Chapitre 30

Séries numériques

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions

1.1 Série

Définition 1.1 (Série)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. La série de terme général u_n , notée $\sum u_n$, est la suite $(S_n)_n$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est le terme général de la série et S_n est la somme partielle d'indice n de la série.

Remarques.

1. Connaissant la suite $(S_n)_n$, on peut étudier la suite $(u_n)_n$ car $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.
2. Plus généralement, toute suite (u_n) peut être étudiée comme une série, car $u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})$: on étudie la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.
3. On peut également considérer des suites et des séries définies à partir d'un rang n_0. Dans ce cas, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et on note par exemple la série $\sum_{p\geqslant n_0} u_p$.
4. Une série n'est rien d'autre qu'une suite. Tous les résultats sur les suites s'appliquent donc aux séries. Mais ce qui nous intéresse, c'est l'étude de la série, non pas à l'aide des sommes partielles, mais seulement à partir de son terme général.

1.2 Convergence et divergence

Définition 1.2 (Série convergente/divergente)

Une série $\sum u_n$ est convergente si la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est convergente. Elle est divergente dans le cas contraire.

Définition 1.3 (Somme d'une série convergente)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. La limite de la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est appelée *somme de la série* et est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarques.

1. Ne pas confondre $\sum u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Si $\sum u_n$ est une série convergente, et $n_0 \in \mathbb{N}^*$, alors $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est aussi une série convergente, dont la somme vaut $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$, et on a la relation
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n,$$
cf. les restes d'une série convergente.

Proposition 1.4 (Convergence d'une série à terme général complexe)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent, et dans ce cas
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Définition 1.5 (Nature d'une série)

La nature d'une série $\sum u_n$ est son caractère convergent ou divergent. Étudiez la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

2 Propriétés

2.1 Propriétés des séries convergentes

Proposition 2.1 (Combinaisons linéaires de séries convergentes)

Les combinaisons linéaires de séries convergentes sont convergentes, et la somme d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des sommes. Autrement dit, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarques.

1. On ne peut rien dire en général sur la somme de séries divergentes. Elles peuvent être convergentes ou divergentes. Par exemple, les éries $\sum(-1)^n$ et $\sum(-1)^{n+1}$ sont divergentes, et la série $\sum((-1)^n + (-1)^n) = 2\sum(-1)^n$ diverge et $\sum((-1)^n + (-1)^{n+1}) = \sum 0$ converge.
2. La somme d'une série divergente et d'une série convergente est une série divergente. En effet, la somme des sommes partielles est la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente, donc une suite divergente.
3. Le résultat est faux pour le produit : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes, en général,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \neq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right),$$

comme le prouve l'exemple $(u_n) = (v_n) = (1, 1, 0, \dots, 0, \dots)$.
4. D'ailleurs, le produit des termes généraux de deux séries convergentes n'est pas convergent en général : prnez $u_n = v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.
5. Par contre, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et sont à termes positifs, alors $\sum u_n v_n$ converge : à partir d'un certain rang, on a $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ (le terme général tend vers 0, donc $0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n$.
6. ATTENTION : si $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, on n'écrit JAMAIS $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ avant d'avoir vérifié que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.

Proposition 2.2 (Terme général d'une série convergente)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque.

Attention, la réciproque est fausse comme le prouve l'exemple de la série harmonique. Son terme général $1/n$ tend vers 0, mais la série est divergente.

Définition 2.3 (Divergence grossière)

Une série $\sum u_n$ diverge grossièrement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Proposition 2.4

Une série grossièrement divergente est divergente.

2.2 Restes d'une série convergente

Définition 2.5 (Reste d'ordre n)

Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme S, et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le reste d'ordre n de $\sum u_n$ est le scalaire

$$R_n = S - S_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p - \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

Proposition 2.6 (Écriture $S_n + R_n$)

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Soit $n \in \mathbb{N}$ et R_n le reste d'ordre n. La série $\sum\limits_{p\geqslant n+1} u_p$ est convergente et $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$, et de plus,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n = \sum_{p=0}^{n} u_p + \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

Proposition 2.7 (Convergence de la suite des restes)

Soit $\sum u_n$ une série convergente, et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes. Alors $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ou encore

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.3 Lien série-suite

Proposition 2.8 (Lien série-suite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature.

Remarque.

On peut donc étudier une suite grâce à une série.

3 Exemples

Proposition 3.1 (Série géométrique)

Soit $a \in \mathbb{K}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas , $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

Proposition 3.2 (Série exponentielle)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = e^a$.

Corollaire 3.3 (Séries spéciales alternées)

Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ est convergente.

4 Séries de nombres réels positifs

Définition 4.1 (Série à termes positifs)

Une série $\sum u_n$ est à termes positifs si $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.2

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Dans le cas contraire, on a $\sum_{p=0}^{n} u_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème 4.3

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors

1. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi (vers $+\infty$).

Remarque.

On peut se contenter de $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un rang n_0. Mais alors on n'aura que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

Corollaire 4.4 (Termes positifs dominés, négligeables)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge également.

2. Si $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge également.

Corollaire 4.5 (Séries à termes positifs équivalents)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (*i.e.* elles sont simultanément convergentes ou divergentes).

Remarques.

1. Si les termes généraux sont équivalents, et l'une des séries est à termes positifs, l'autre l'est aussi à partir d'un certain rang.

2. On a bien entendu le même résultat avec des suites négatives : ce qui est important, c'est que le signe reste constant.

Remarque.

On va beaucoup utiliser ce corollaire avec les séries absolument convergentes (théorème 5.2) et les développements asymptotiques, *cf.* la méthode 5.4

5 Absolue convergence

Définition 5.1 (Absolue convergence)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. La série $\sum u_n$ est *absolument convergente* lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 5.2 (Convergence absolue implique la convergence)

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors $\sum u_n$ converge. De plus, on a $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Remarque.

La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes non absolument convergentes, comme par exemple $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. C'est une série spéciale alternée, donc elle converge, mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Corollaire 5.3 (Séries à termes dominés)

Soient $\sum u_n$ une série complexe, et $\sum v_n$ une série à termes positifs, avec $\sum v_n$ convergente. Si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$, la série $\sum u_n$ converge absolument.

Méthode 5.4 (Utilisation de développements asymptotiques)

Voici un exemple d'utilisation de la convergence abolue et de séries à termes positifs équivalents/dominés.

Soit $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. Comme $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, alors

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + v_n,$$

où $v_n = -\frac{1}{3n^{3/2}} - \frac{1}{3n^{3/2}}\varepsilon\left((-1)^n/\sqrt{n}\right)$.

On en déduit que $|v_n| \sim \frac{1}{n^{3/2}}$. Or, $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (*cf.* plus loin les séries de Riemann), donc par équivalence de séries à termes constants, $\sum v_n$ converge absolument, donc converge.

Mais $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (c'est une série spéciale alternée), et $\sum(-\frac{1}{2n})$ diverge (série harmonique), donc $\sum u_n$ diverge car c'est la somme de deux séries convergentes et d'une série divergente.

Remarque.

Attention : cette méthode illustre aussi qu'il ne faut pas utiliser les équivalents lorsque les séries ne sont pas à termes de signe constant. En effet, $u_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$, et $\sum(-1)/\sqrt{n}$ converge (série spéciale alternée), or $\sum u_n$ diverge !

6 Comparaison série-intégrale

6.1 Comparaison des natures

Proposition 6.1 (Comparaison série-intégrale)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[n_0, +\infty[$, positive et décroissante. La série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ et la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n \geqslant n_0}$ sont de même nature. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, on a

$$\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t + f(n_0).$$

Remarques.

1. On applique en général cette proposition quand on connait une primitive de f, et qu'on sait calculer la limite de l'intégrale, pour en déduire la nature de la série.
2. Attention : en cas de convergence, les limites ne sont pas les mêmes en général.
3. Écrire les cas particuliers $n_0 = 0$ et $n_0 = 1$. Ils sont fréquents !

Remarque.

Lorsque la fonction f est croissante (et positive) non décroissante, la série et la suite des intégrales sont divergente vers $+\infty$ dans tous les cas.

6.2 Application aux séries de Riemann

Théorème 6.2 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Proposition 6.3 (Règle de Riemann ou règle $n^\alpha u_n$)

Soit $\sum u_n$ une série.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\sum u_n$ est à termes positifs et s'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque.

Souvent, plutôt que d'invoquer cette règle, on la "redémontre" systématiquement. Si $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $|u_n| = o(1/n^\alpha$, donc $\sum u_n$ converge absolument.

7 Application : développement décimal des réels

Paragraphe facultatif. Faîtes d'abord tous les exos avant d'étudier ce paragraphe.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'écriture "à virgule" d'un réel positif, *i.e.* à l'écriture sous la forme $3,14159... = 3/10^0 + 1/10 + 4/10^2 + 1/10^3 + 5/10^4 + ...$ On est donc amené à étudier les séries de terme général $\frac{a_n}{10^n}$, où $a_n \in [\![0, 9]\!]$ pour $n \geqslant 1$.

Proposition 7.1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels avec $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ pour $n \geqslant 1$.

1. La série $\sum \frac{a_n}{10^n}$ est convergente.
2. Pour $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^{n_0-1}}$.

Remarque.

On a par exemple $1 = 0,999....$ Les développements décimaux impropres ne permettent pas l'unicité d'une écriture "à virgule".

Théorème 7.2 (Développement décimal illimité propre)

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant 9$, et qui ne soit pas stationnaire égale à 9, et telle que

$$x = a_0, a_1 a_2 \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Cette écriture est le *développement décimal illimité propre* de x.

Remarques.

1. Attention : on perd l'unicité si on n'impose pas la condition que la suite ne soit pas stationnaire égale à 9, comme le prouve la proposition 7.1.
2. L'unicité signifie que si deux développements décimaux propres sont égaux, les chiffres sont tous égaux.