Chapitre 21

Fractions rationnelles

1 Définition et forme irréductible

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Corps des fractions rationnelles)

Le *corps des fractions rationnelles* $K(X)$ est l'ensemble des quotients de polynômes

$$K(X) = \left\{ \frac{P}{Q},\ P, Q \in K[X],\ Q \neq 0 \right\}$$

où par définition pour tous $A, B, P, Q \in K[X]$, $Q, B \neq 0$,

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \iff PB = AQ.$$

Une écriture P/Q d'une fraction rationnelle est un *représentant* de cette fraction.

Remarques.

1. Tout polynôme P peut s'identifier à une fraction rationnelle en écrivant que

$$P = \frac{P}{1}$$

car l'application

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & K(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array}$$

est injective.

2. Si $R \neq 0$, on a

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

puisque $PRQ = PRQ$!

3. Une fraction P/Q est nulle si et seulement si $P = 0$ car $P/Q = 0 (= 0/1)$ si et seulement si $P \times 1 = Q \times 0$.

Proposition 1.2 (Structure de corps et d'espace vectoriel)

Soient $A, B, P, Q \in K[X]$, avec B, Q non nuls.

1. L'addition et la multiplication sur $K(X)$ données par

$$\frac{P}{Q} + \frac{A}{B} = \frac{PB + AQ}{QB}, \qquad \frac{P}{Q} \times \frac{A}{B} = \frac{PA}{QB}$$

lui confère une structure de corps, où l'élément neutre pour la multiplication est la fraction $1 = 1/1$ et l'inverse d'une fraction non nulle P/Q est Q/P.

2. La multiplication par les scalaires pour tout $\lambda \in K$

$$\lambda \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}$$

lui confère une structure de K-espace vectoriel.

Remarque.

On ne verra la définition d'expace vectoriel que plus tard dans l'année. La définition n'est pas nécessaire ici pour retenir les opérations.

1.2 Fraction conjuguée

Définition 1.3 (Fraction conjuguée)

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, et P/Q un représentant de F, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. On définit la fraction conjuguée de F par $\overline{F} = \dfrac{\overline{P}}{\overline{Q}}$.

Proposition 1.4

Soient $F, G \in \mathbb{C}(X)$. Alors $\overline{F + G} = \overline{F} + \overline{G}$ et $\overline{FG} = \overline{F}\,\overline{G}$.

1.3 Forme irréductible d'une fraction rationnelle

Définition 1.5

1. Une *forme irréductible* (ou *représentant irréductible*) d'une fraction rationnelle est un représentant P/Q avec P et Q premiers entre eux.

2. Une *forme irréductible unitaire* (ou *représentant irréductible unitaire*) d'une fraction rationnelle est un représentant irréductible P/Q avec Q unitaire.

Proposition 1.6

Soient $P, Q, P^*, Q^* \in K[X]$ des polynômes non nuls, avec $P \wedge Q = 1$.

1. On a $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P^*}{Q^*}$ si et seulement s'il existe $R \in K[X]$ tel que

$$P^* = RP \quad \text{et} \quad Q^* = RQ.$$

2. Si P^* et Q^* sont premier entre eux, on a $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P^*}{Q^*}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que

$$P^* = \lambda P \quad \text{et} \quad Q^* = \lambda Q.$$

Proposition 1.7

Toute fraction rationnelle admet un unique représentant irréductible unitaire.

1.4 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 1.8 (Degré d'une fraction rationnelle)

Soit $F \in K(X)$, et P/Q un représentant de F (avec $P, Q \in K[X]$, $Q \neq 0$). Le degré de F est

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}.$$

Remarques.

1. Comme le degré de Q n'est pas $-\infty$, la définition précédente n'est jamais une forme indéterminée.
2. On a bien sûr $\deg(F) = -\infty$ si et seulement si $F = 0$.

Proposition 1.9

Soient $F, G \in K(X)$. Alors

1. $\deg(F + G) \leqslant \max(\deg(F), \deg(G))$.
2. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$.

2 Racines, pôles et fonction rationnelle

2.1 Racines et pôles d'une fraction rationnelle

Définition 2.1 (Racines, pôles)

Soit $F \in K(X)$ et P/Q une forme **irréductible** de F.

1. Une *racine* de F est une racine de P.
2. Un *pôle* de F est une racine de Q.

L'ordre d'une racine de F (resp. d'un pôle) est son ordre de multiplicité en tant que racine de P (resp. Q).

Remarques.

1. Cette définition ne dépend pas du représentant irréductible choisi. En effet, d'après la proposition 1.6 du chapitre 20, les autres formes irréductibles sont de la forme
$$\frac{\lambda P}{\lambda Q}$$
où $\lambda \in K^*$.
2. Un élément $a \in K$ ne peut pas être à la fois une racine et un pôle de F. En effet, dans le cas contraire, on aurait $P(a) = Q(a) = 0$, donc $X - a$ diviserait à la fois P et Q : absurde.

Proposition 2.2

Soient $a \in K$, $A, B \in K[X]$, $B \neq 0$, et $F = A/B$. Si $B(a) \neq 0$, alors a n'est pas un pôle de F.

Proposition 2.3

Soient $a \in K$, $F, G \in K(X)$. Si a n'est pas un pôle de F, ni un pôle de G, alors a n'est pas un pôle de $F + G$, ni de FG.

Proposition 2.4

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors F n'a pas de pôle si et seulement si $F \in \mathbb{C}[X]$.

Proposition 2.5

Soit $P, Q \in K[X]$, $Q \neq 0$. Si aucune racine de Q n'est une racine de P, les racines de Q sont les pôles de P/Q, avec même ordre de multiplicité.

Proposition 2.6 (Pôle conjugué)

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et $a \in \mathbb{C}$ un pôle non réel de F. Alors $\overline{a}$ est un pôle de F de même ordre de multipplcité que a.

Méthode 2.7 (Déterminez les pôles d'une fraction)

Soit P/Q un représentant d'une fraction F.

1. Si $P \wedge Q = 1$, les pôles de F sont les racines de Q. Pratique lorsque P et Q sont décomposés en produit d'irréductibles, car il est facile de voir s'ils sont premiers entre eux.

2. Si aucune racine de Q n'est une racine de P, les racines de Q sont les pôles de F. Pratique si Q est factorisé, mais pas P : on teste les racines de Q sur P.

3. Attention : si P et Q ont une racine commune, elle peut être, ou ne pas être un pôle. Cela dépend des ordres de multiplicité.

2.2 Fonction rationnelle

Définition 2.8 (Fonction rationnelle)

Soit $F \in K(X)$, $A \subset K$ l'ensemble de ses pôles, et P/Q une forme irréductible de F. La *fonction rationnelle* associée à F est la fonction
$$\begin{array}{ccc} K \setminus A & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \end{array}$$

Proposition 2.9

Soient $a \in K$, $A, B \in K[X]$, $B \neq 0$, et $F = A/B$. Si $B(a) \neq 0$, alors a n'est pas un pôle de F et $F(a) = \frac{A(a)}{B(a)}$.

Remarque.

On a déjà vu une partie de la proposition dans la proposition 2.2.

Définition 2.10

Une fraction rationnelle est paire (resp. impaire) si sa fonction rationnelle est paire (resp. impaire).

Proposition 2.11

Soit $F \in K(X)$ et P/Q un représentant irréductible de F.

1. Si F est paire, alors P et Q sont des polynômes pairs.
2. Si F est impaire, alors P est pair et Q impair, ou P est impair et Q pair.

Proposition 2.12 (Pôles d'une fraction paire ou impaire)

Soit $F \in K(X)$ une fraction paire ou impaire, et a un pôle de F. Alors $-a$ est un pôle de F de même ordre de multiplicité que a.

3 Décomposition en éléments simples

3.1 Partie entière d'une fraction rationnelle

Théorème 3.1 (Partie entière)

Une fraction rationnelle F s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme P et d'une fraction rationnelle de degré < 0. Ce polynôme P est la *partie entière* de la fraction rationnelle, et se note $\mathrm{E}(F)$.

Proposition 3.2

Soit $F \in K(X)$.

1. Si $\deg(F) \geqslant 0$, alors $\deg(\mathrm{E}(F)) = \deg(F)$.
2. $\deg(F) < 0$ si et seulement si $\mathrm{E}(F) = 0$.

Proposition 3.3

Soit $F \in K(X)$. Si F est paire (resp. impaire), sa partie entière est paire (resp. impaire).

Méthode 3.4 (Calcul de la partie entière)

Soit $F \in K(X)$ et A/B un représentant de F, a le coefficient dominant de A, b celui de B.

1. La partie entière de F est le quotient de la division euclidienne de A par B. De plus, si R est le reste, $F = \mathrm{E}(F) + R/B$.

2. Le coefficeint dominant de $\mathrm{E}(F)$ est a/b. En particulier, si $\deg(F) = 0$, alors $\mathrm{E}(F) = a/b$. Voir les exemples d'utilisation.

Proposition 3.5

Soit $F \in K(X)$, et $G = F - \mathrm{E}(F)$. Les pôles de F et G coïncident, et ont même ordre de multiplicité.

3.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème 3.6

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ admettant $n \in \mathbb{N}$ pôles distincts $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, d'ordres de multiplicité respectives $r_1, \ldots, r_n$. Il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant r_i}}$ telle que

$$F = \mathrm{E}(F) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X - a_i)^j} \right).$$

La fraction $\displaystyle\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X - a_i)^j}$ est la *partie polaire* relative au pôle a_i.

Remarque.

Ce théorème s'applique bien entendu aussi à une fraction à coefficients réels dont tous les pôles complexes sont réels, *i.e.* si le dénominateur d'une forme irréductible est scindé sur $\mathbb{R}$.

Méthode 3.7 (Partie polaire relative à un pôle simple)

On considère une fraction $F \in \mathbb{C}(X)$ admettant un pôle simple a. On écrit que $F = \dfrac{P}{(X-a)Q_1}$ où $Q_1(a) \neq 0$, $P(a) \neq 0$. On cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $F = \dfrac{\lambda}{X-a} + F_0$ où F_0 est une fraction n'admettant pas a pour pôle. En multipliant par $X - a$ et en substituant a à X, on obtient

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{\big((X-a)Q_1\big)'(a)}.$$

Méthode 3.8 (Partie polaire relative à un pôle double)

On considère une fraction $F \in \mathbb{C}(X)$ admettant un pôle double a. On écrit que $F = \dfrac{P}{(X-a)^2 Q_2}$ où $Q_2(a) \neq 0$, $P(a) \neq 0$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tel que $F = \dfrac{\lambda_1}{X-a} + \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2} + F_0$ où F_0 est une fraction n'admettant pas a pour pôle. En multipliant par $(X-a)^2$ et en substituant a à X, on obtient

$$\lambda_2 = \frac{P(a)}{Q_2(a)}.$$

On peut obtenir le coefficient λ_1 en appliquant la méthode 3.7 à $F - \dfrac{\lambda_2}{(X-a)^2}$. Étudier la limite en $+\infty$ de $xF(x)$ est une tehnique qui permet d'obtenir λ_1.

Méthode 3.9 (Décomposer en éléments simples)

On détermine d'abord la partie entière, puis on écrit la fraction comme somme de sa partie entière et de ses différentes parties polaires sous la forme de la proposition 3.6 (en pratique, les pôles seront simples ou doubles). On détermine alors chaque coefficient des pôles simples à l'aide de la méthode 3.7, puis le coefficient dominant des parties polaires des pôles doubles grâce à la méthode 3.8. Pour les coefficients qui restent, on peut utiliser la fin de la méthode 3.8, ou les différentes techniques développées ci-dessous (valeurs particulières, limites, parité, conjugués).

On peut aussi, une fois que les coefficients "faciles" ont été calculés (3.7 et 3.8), réduire tout au même dénominateur et procéder par indentification.

Il est en général plus simple d'étudier $F - \mathrm{E}(F)$.

Méthode 3.10 (Parties polaires dans le cas de pôles conjugués)

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, et a un pôle non réel de F. On sait alors que $\overline{a}$ est un pôle de F de même ordre que a (proposition 2.6). La parie polaire relative à $\overline{a}$ est alors la fraction conjuguée de la partie polaire relative à a. Pour décomposer F en éléments simples, on écrit alors tout de suite que (par exemple dans le cas d'un pôle double)

$$F = \mathrm{E}(F) + \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \frac{\overline{\lambda_1}}{X-\overline{a}} + \frac{\overline{\lambda_2}}{(X-\overline{a})^2} + \cdots$$

Méthode 3.11 (Parties polaires dans le cas d'une fraction paire ou impaire)

Sit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction paire ou impaire, et a un pôle de F. On sait alors (proposition 2.12) que $-a$ est un pôle de F de même ordre que a. En écrivant que $F(-X) = F$ (ou $F(-X) = -F$) lorsqu'on décompoe formellement F en éléments simples, on obtient des relations entre les coefficients des parties polaires de a et de $-a$: ils sont soient égaux, soient opposés. Mais attention : le résultat ne dépend pas que de la parité de F. Faîtes les calculs complets systématiquement.

Proposition 3.12

Soit $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{r_k} \in \mathbb{C}[X]$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}^*$. La décomposition en éléments simples de P'/P est

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{X - a_k}.$$

3.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème 3.13 (Décomposition en éléments simple dans $\mathbb{R}(X)$)

Soient $F \in \mathbb{R}(X)$, et P/Q un représentant irréductible. Soient $a_1, \dots, a_n$ les pôles réels deux à deux distincts de F, et $r_1, \dots, r_n$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Soient $Q_1, \dots, Q_m$ des polynômes de degré 2 sans racine réelle, deux à deux premiers entre eux, et $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}^*$, tels que

$$Q \sim \left(\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{r_k} \right) \left(\prod_{k=1}^{m} Q_k^{s_k} \right),$$

(c'est la décomposition en produit d'irréductibles de Q). Il existe alors trois familles de réels $(\lambda_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant r_i}})$, $(\alpha_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant s_i}})$ et $(\beta_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant s_i}})$ tels que

$$F = \mathrm{E}(F) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{s_i}\frac{\alpha_{ij}X+\beta_{ij}}{Q_i^j}\right).$$

Remarque.

En pratique, les situations ne seront pas aussi compliquées que le cas général, et on prendra des notations plus simples pour les coefficients.

Méthode 3.14 (Décomposition pratique dans $\mathbb{R}(X)$)

Il y a deux méthodes pour décomposer dans $\mathbb{R}(X)$.

1. Soit on décompose dans $\mathbb{C}(X)$, et on regroupe ensuite les pôles conjugués ensembles.

2. Soit on écrit la décomposition formellement avec les coefficients, que l'on détermine à l'aide des techniques ci-dessous, similaires à celles utilisées dans $\mathbb{C}(X)$.