Chapitre 15

Fonctions d'une variable réelle : limites

1. **Pour une fonction f, on notera $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.**
2. **Toutes les fonctions sont à valeurs réelles, sauf dans le paragraphe 6.**

0 Voisinage d'un point

Pour la notion de limite d'une fonction f, il faut d'abord savoir en quels points on peut étudier l'existence d'une limite. Intuitivement, ce sont les points dont on peut se rapprocher.

Définition 0.1 (Voisinage d'un point)

1. Un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est un ensemble qui contient un intervalle $]a-h, a+h[$, où $h > 0$.
2. Un voisinage à droite de $a \in \mathbb{R}$, ou voisinage de a^+, est un ensemble qui contient un intervalle $[a, a+h[$, où $h > 0$.
3. Un voisinage à gauche de $a \in \mathbb{R}$, ou voisinage de a^-, est un ensemble qui contient un intervalle $]a-h, a]$, où $h > 0$.
4. Un voisinage de $+\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle $]h, +\infty[$, où $h \in \mathbb{R}$.
5. Un voisinage de $+\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle $]-\infty, h[$, où $h \in \mathbb{R}$.

Définition 0.2 (Fonction définie au voisinage d'un point a)

Une fonction f est définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f est définie sur un voisinage de a, sauf peut-être en a.

Remarques.

1. La définition reste la même pour a^+ et a^-.
2. Si une fonction est définie sur un intervalle (a, b) (fermé ou ouvert), alors f est définie au voisinage de a^+ et de a, et au voisinage de b et de b^-.

Proposition 0.3

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions définies au voisinage de a (resp. a^+, a^-). Alors $f+g$ et fg le sont également.

Proposition 0.4

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit f définie au voisinage de a. Alors : $\forall\ \alpha > 0,\ ]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\} \cap D_f \neq \emptyset$.
2. Soit f définie au voisinage de a^+. Alors : $\forall\ \alpha > 0,\ ]a, a+\alpha[\ \cap D_f \neq \emptyset$.
3. Soit f définie au voisinage de a^-. Alors : $\forall\ \alpha > 0,\ ]a-\alpha, a[\ \cap D_f \neq \emptyset$.

Proposition 0.5

1. Soit f définie au voisinage de $+\infty$. Alors : $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ ]\alpha, +\infty[\ \cap D_f \neq \emptyset$.
2. Soit f définie au voisinage de $-\infty$. Alors : $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ ]-\infty, \alpha[\ \cap D_f \neq \emptyset$.

Définition 0.6 (Propriété définie au voisinage d'un point)

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp. a^+, a^-). La fonction f vérifie une propriété P au voisinage de a (resp. a^+, a^-) si elle vérifie P sur un voisinage de a (resp. a^+, a^-), sauf peut-être en a.

1 Définitions et premières propriétés des limites

On fixe dans ce paragraphe une fonction f à valeurs réelles.

1.1 Limite

Définition 1.1 (Limite, cas a réel)

Soit f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

1. La fonction f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0 \mid \forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

2. La fonction f admet comme limite $+\infty$ en a (ou tend vers $+\infty$ en a) si

$$\forall\ A \in \mathbb{R},\ \exists\ \eta > 0 \mid \forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

3. La fonction f admet comme limite $-\infty$ en a (ou tend vers $-\infty$ en a) si

$$\forall\ A \in \mathbb{R},\ \exists\ \eta > 0 \mid \forall\ x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

La limite de f en a, si elle existe, se note $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Remarque.
La condition $x \in D_f$ et $|x-a| \leqslant \eta$ et équivalente à $x \in D_f \cap [a-\eta, a+\eta]$.

Proposition 1.2 (Négations de la définition 1.1)

Soit f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

1. La fonction f ne tend pas vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a si :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \mid,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

2. La fonction f ne tend pas vers $+\infty$ en a si :

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \mid \forall\, \eta > 0,\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid |x-a| \leqslant \eta \text{ et } f(x) < A.$$

3. La fonction f ne tend pas vers $-\infty$ en a si :

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \mid \forall\, \eta > 0,\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid |x-a| \leqslant \eta \text{ et } f(x) > A.$$

Remarque.
On peut aussi formaliser le fait que f admet une limite finie en a :

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R} \mid \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

dont la négation est (*i.e.* f n'a pas de imite finie en a) :

$$\forall\, \ell \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, \eta > 0,\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

Définition 1.3 (Limite, cas $a = +\infty$)

Soit f définie au voisinage de $+\infty$.

1. La fonction f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2. La fonction f admet comme limite $+\infty$ en $+\infty$ (ou tend vers $+\infty$ en $+\infty$) si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, B \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. La fonction f admet comme limite $-\infty$ en $+\infty$ (ou tend vers $-\infty$ en $+\infty$) si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, B \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

La limite de f en $+\infty$, si elle existe, se note $\lim\limits_{+\infty} f$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Proposition 1.4 (Négations de la définition 1.3)

Soit f définie au voisinage de $+\infty$.

1. La fonction f ne tend pas vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid x \geqslant B \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

2. La fonction f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \mid \forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid x \geqslant B \text{ et } f(x) < A.$$

3. La fonction f ne tend pas vers $-\infty$ en $+\infty$ si :

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \mid \forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid x \geqslant B \text{ et } f(x) > A.$$

Remarque.

On peut aussi formailiser le fait que f admet une limite finie en $+\infty$:

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R} \mid \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

dont la négation est (*i.e.* f n'a pas de limite finie en $-\infty$) :

$$\forall\, \ell \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid x \geqslant B \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

Définition 1.5 (Limite, cas $a = -\infty$)

Soit f définie au voisinage de $-\infty$.

1. La fonction f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x \leqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2. La fonction f admet comme limite $+\infty$ en $-\infty$ (ou tend vers $+\infty$ en $-\infty$) si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, B \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. La fonction f admet comme limite $-\infty$ en $-\infty$ (ou tend vers $-\infty$ en $-\infty$) si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, B \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

La limite de f en $-\infty$, si elle existe, se note $\lim\limits_{-\infty} f$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Proposition 1.6 (Négations de la définition 1.5)

Soit f définie au voisinage de $-\infty$.

1. La fonction f ne tend pas vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid x \leqslant B \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

2. La fonction f ne tend pas vers $+\infty$ en $-\infty$ si :

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \mid \forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid x \leqslant B \text{ et } f(x) < A.$$

3. La fonction f ne tend pas vers $-\infty$ en $-\infty$ si :

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \mid \forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid x \leqslant B \text{ et } f(x) > A.$$

Remarque.

On peut aussi formailiser le fait que f admet une limite finie en $-\infty$:

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R} \mid \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ x \leqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

dont la négation est (*i.e.* f n'a pas de limite finie en $-\infty$) :

$$\forall\, \ell \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, B \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid x \leqslant B \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

Méthode 1.7

Pour montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ (avec par exemple $a, \ell \in \mathbb{R}$) :

1. Soit on utilise les théorèmes généraux que nous verrons dans le chapitre.

2. Si ce n'est pas possible, on fixe $\varepsilon > 0$, et on cherche $\eta > 0$ tel que si $|x-a| \leqslant \eta$, alors $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$.

On peut procéder par un raisonnement par équivalences, ou par analyse-synthèse.

Remarque.

On a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les équivalences suivantes :

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A \iff \forall\, A \geqslant \alpha,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant$$

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A \iff \forall\, A \leqslant \alpha,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant$$

1.2 Premières propriétés

Proposition 1.8 (Unicité de la limite)

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite en a, celle-ci est unique.

Méthode 1.9

Pour montrer que deux réels x et y sont égaux, on peut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|x-y| \leqslant \varepsilon$.

Méthode 1.10

Si on a

— $\exists\, \eta_1 > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow x$ vérifie la propriété P_1.

— $\exists\, \eta_2 > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow x$ vérifie la propriété P_2.

Alors, en posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a $\eta > 0$, et pour tout $x \in D_f$, on a

$$|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow x \text{ vérifie les deux propriétés } P_1 \text{ et } P_2.$$

Proposition 1.11

Soit f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. La fonction f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si la fonction $f - \ell$ tend vers 0 en a.
2. Si $a \in \mathbb{R}$, la fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ tend vers ℓ en 0.

Proposition 1.12 (Majoration par une fonction tendant vers 0)

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.. Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et si $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 1.13 (Limite de la valeur absolue)

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\ell|$.

1.3 Définition de la continuité

Proposition 1.14

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et définie en a. Si f admet une limite en a, alors $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Définition 1.15 (Continuité en un point)

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et définie en a. La fonction f est continue en a si elle admet une limite en a.

Proposition 1.16

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et définie en a. La fonction f est continue en a si et seulement si $f_{|\mathcal{D}_f\setminus\{a\}}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.

Remarque.

Cette proposition permet de rédiger la continuité de la façon suivante : on a $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, donc f est continue en a.

Définition 1.17 (Continuité sur un ensemble)

Une fonction f est continue sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}_f$.

2 Limite à gauche et à droite

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 (Limite à gauche et à droite)

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.. La fonction f admet une limite à gauche (resp. à droite) en a si la fonction f restreinte à

$$\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[\quad \text{(resp. } \mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[)$$

admet une limite en a, ou autrement dit :

1. La fonction f admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ a > x \text{ (resp. } a < x),\ |x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

2. La fonction f admet $+\infty$ comme limite à gauche (resp. à droite) en a si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ a > x \text{ (resp. } a < x),\ |x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

3. La fonction f admet $-\infty$ comme limite à gauche (resp. à droite) en a si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ a > x \text{ (resp. } a < x),\ |x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant A.$$

Les limites à gauche et à droite de f en a, si elles existent, sont notées

$$\lim_{a^+} f \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{a^-} f \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Remarques.

1. C'est la notion de limite pour les fonctions définies au voisinage de a^+ ou a^-, mais pas en a.
2. Dans le cas où $a \in \mathcal{D}_f$, on ne tient donc pas compte de la valeur de f en a lors d'une étude d'une limite à gauche ou à droite.
3. Il n'y a bien sûr pas de notion de limite à gauche si f n'est pas définie au voisinage de a^-, ni de limite à droite si f n'est pas définie au voisinage de a^+.

4. Les limites à gauche et à droite sont des limites de fonctions. Tous les énoncés sur les limites s'appliquent donc également aux limites à gauche et à droite (par exemple les propriétés de somme et de produit).

Proposition 2.2 (Unicité de la limite à gauche et à droite)

Si f admet une limite à gauche (ou à droite) en $a \in \mathbb{R}$, celle-ci est unique.

Proposition 2.3

Soit f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, mais pas en a. La fonction f admet une limite en a si et seulement si elle admet des limites à gauche et à droite en a et si celles-ci sont égales. De plus, on a alors $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f$.

Remarque.

ATTENTION : c'est faux si $a \in \mathcal{D}_f$, comme le prouve l'exemple de la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$, valant 1 en 0 : elle n'admet pas de limite en 0, mais bien des limites à gauche te à droite, et celles-ci sont égales.

2.2 Continuité à gauche et à droite

Définition 2.4 (Continuité à gauche et à droite)

Soit f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et définie en a. La fonction f est continue à gauche en a (resp. à droite en a) si elle admet une limite à gauche en a (resp. à droite en a) et si $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$).

Remarque.

Attention à la différence avec la définition de la continuité en a. L'existence d'une limite à gauche ou à droite n'implique pas que cette limite soit égale à $f(a)$.

Proposition 2.5

Soit $a \in \mathcal{D}_f$. La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

3 Propriétés des limites

Nous avons vu que les définitions de continuité, limite à gauche et à droite, et continuité à gauche et à droite, sont des notions de limite. On en déduit que tous les résultats généraux sur les limites seront également valables en remplaçant le terme "limite" par "continue", "limite à gauche ou à droite", "continue à gauche ou à droite", sauf tout ce qui concerne la composition, *cf* ce paragraphe.

On notera aussi que lorsqu'on parle d'une fonction admettant une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, il est sous-entendu qu'elle est définie au voisinage de a.

3.1 Propriétés locales

Proposition 3.1 (Caractère local des limites)

Soient f et g deux fonctions définies et égales au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est définie et continue en a, alors g admet une limite en a et celle-ci vaut $f(a)$.

2. Si f et g sont définies en a, ou si ni f ni g n'est définie en a, alors f admet une limite en a si et seulement si g admet une limite en a et en cas d'existence de la limite, on a $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$.

Proposition 3.2

Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

Proposition 3.3

Toute fonction admettant une limite > 0 en un point est minorée au voisinage de ce point par un réel > 0.

Corollaire 3.4

Soit f une fonction admettant une limite finie non nulle en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $|f|$ est minorée au voisinage de a par un réel > 0.

3.2 Opérations algébriques sur les limites

Proposition 3.5

1. Le produit d'une fonction bornée au voisinage d'un point a par une fonction tendant vers 0 en a est une fonction tendant vers 0 en a.

2. Le produit d'une fonction admettant une limite finie en a par une fonction tendant vers 0 en a est une fonction tendant vers 0 en a.

Proposition 3.6 (Combinaisons linéaires de limites finies)

Soient f, g deux fonctions admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a qui vaut $\lambda \lim\limits_a f + \mu \lim\limits_a g$.

Corollaire 3.7

Les combinaisons linéaires de fonctions continues en a sont continues en a.

Proposition 3.8 (Produits de limites finies)

Soient f, g deux fonctions admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La fonction fg admet une limite en a qui vaut $\left(\lim\limits_a f\right)\left(\lim\limits_a g\right)$.

Corollaire 3.9

Les produits de fonctions continues en a sont continus en a.

Proposition 3.10

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est minorée (resp. majorée) au voisinage de a et si $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$).

2. Si f est minorée au voisinage de a par un réel > 0 et si $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposition 3.11 (Limite d'un quotient)

Soit f définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite finie non nulle en a, alors $1/f$ est définie au voisinage de a, admet une limite en a et

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim\limits_a f}.$$

Proposition 3.12

Soit f définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f tend vers $+\infty$ en a, alors $1/f$ est définie au voisinage de a et tend vers 0 en a.

2. Si f tend vers 0 en a et si f est > 0 au voisinage de a, alors $1/f$ est définie au voisinage de a et tend vers $+\infty$ en a.

4 Limites et relation d'ordre

Théorème 4.1 (Théorème de comparaison)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions telles que, au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$.

1. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Si $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

Proposition 4.2 (Passage à la limite dans une inégalité large)

Soient f, g deux fonctions admettant une limite en a, et telles que au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$. Alors $\lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$ (inégalité dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Remarques.

1. Cette proposition est fausse pour les inégalité strictes, comme le prouve l'exemple des fonctions

$$f : x \longmapsto x^2 - 1 \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto x^2 - 1 + \sqrt{|x|}.$$

On a $g(x) > f(x)$ pour $x \neq 0$, mais $\lim\limits_0 f = \lim\limits_0 g$.

2. On rédige en général en écrivant quo'n passe à la limite dans l'inégalité.

Méthode 4.3

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, admettant une limite finie en a notées respectivement ℓ et ℓ', et telles que, pour tout x au voisinage de a, $f(x) < g(x)$. On nous demande de prouver que $\ell < \ell'$ (ce n'est pas toujours le cas !). On peut procéder en utilisant une des deux techniques suivantes :

1. On prouve que $\ell \leqslant \ell'$ (passage à la limite dans l'inégalité), puis après, que $\ell \neq \ell'$.
2. On prouve qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout x au voisinage de a, $f(x) + m \leqslant g(x)$ (m indépendant de x donc). On a alors par passage à la limite $\ell + m \leqslant \ell'$, donc $\ell < \ell'$.

Méthode 4.4

Un cas particulier : on considère une fonction f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, admettant une limite finie ℓ en a. On suppose en outre que f est minoré au voisinage de a par un réel $m > 0$. On nous demande de prouver que $0 < \ell$. Par passage à la limite dans l'inégalité, $\ell \geqslant m$, donc $\ell > 0$. Attention : ne pas écrire que $f(x) > 0$ don par passage à la limite,.. ! !

Méthode 4.5

Un cas particulier du cas particulier : les fonctions monotones. On considère une fonction f définie sur un intervalle $[\alpha, a[$, et strictement positive et croissante sur cet intervalle, et par exemple croissante. On nous demande de prouver que $0 < \ell$. On a $f(\alpha) \leqslant f(x)$, donc par passage à la limite dans l'inégalité, $\ell \geqslant f(\alpha) > 0$, donc $\ell > 0$. Attention : ne pas écrire que $f(x) > 0$ donc par passage à la limite,.. ! !

Théorème 4.6 (Théorème d'encadrement)

Soient f, g et h trois fonctions telles qu'au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ on ait

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

Si f et h admettent une limite finie en a, et si ces limites sont égales, alors g admet une limite en a et

$$\lim_a g = \lim_a f (= \lim_a h).$$

4.1 Composition des limites

Théorème 4.7 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$
2. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$ telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Corollaire 4.8 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et définie en a. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est continue en a.

2. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Méthode 4.9 (Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite)

On utilise souvent le théorème 2.8 pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point, en exhibant des suites convergentes dont l'image par la fonction n'est soit pas une suite convergente, soit des suites convergentes avec des limites distinctes. Par exemple, la fonction

$$f : x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite en 0. En effet, les suites

$$\left(x_n = \frac{1}{2(n+1)\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(y_n = \frac{1}{2(n+1)\pi + \pi/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent vers 0, mais pour tout entier n on a

$$f(x_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad f(y_n) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème 4.10 (Limite d'une fonction composée)

Soient f et g deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, et $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} c$, alors $g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} c$.

En particulier, si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

5 Fonctions monotones

Définition 5.1 (Bornes inférieure et supérieure d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On définit :

1. $\sup\limits_D(f) = \sup\left(\{f(x),\ x \in D\}\right)$.

2. $\inf\limits_D(f) = \inf\left(\{f(x),\ x \in D\}\right)$.

Théorème 5.2 (Théorème de la limite monotone)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $m = \inf I$, $M = \sup I$, et f une fonction monotone définie sur I. Alors f admet une limite à droite en m et une limite à gauche en M, éventuellement infinies. De plus, on a

1. <u>Si f est croissante</u> :

   (a) $\lim\limits_{m^+} f = \inf\limits_{]m,M[} f$ et $\lim\limits_{M^-} f = \sup\limits_{]m,M[} f$.

   (b) $\lim\limits_{m^+} f \leqslant \lim\limits_{M^-} f$ et $\lim\limits_{m^+} f \neq +\infty$ et $\lim\limits_{M^-} f \neq -\infty$.

   (c) f est minorée si et seulement si $\lim\limits_{m^+} f \neq -\infty$.

   (d) f est majorée si et seulement si $\lim\limits_{M^-} f \neq +\infty$.

   (e) si $m \in I,\ f(m) \leqslant \lim\limits_{m^+} f$.

(f) si $M \in I$, $\lim\limits_{M^-} f \leqslant f(M)$.

(g) $\forall\, x \in \,]m, M[, \quad \lim\limits_{m^+} f \leqslant f(x) \leqslant \lim\limits_{M^-} f$.

2. Si f est décroissante :

(a) $\lim\limits_{m^+} f = \sup\limits_{]m,M[} f$ et $\lim\limits_{M^-} f = \inf\limits_{]m,M[} f$.

(b) $\lim\limits_{m^+} f \geqslant \lim\limits_{M^-} f$ et $\lim\limits_{m^+} f \neq -\infty$ et $\lim\limits_{M^-} f \neq = +\infty$.

(c) f est majorée si et seulement si $\lim\limits_{m^+} f \neq +\infty$.

(d) f est minorée si et seulement si $\lim\limits_{M^-} f \neq -\infty$.

(e) si $m \in I$, $f(m) \geqslant \lim\limits_{m^+} f$.

(f) si $M \in I$, $\lim\limits_{M^-} f \geqslant f(M)$.

(g) $\forall\, x \in \,]m, M[, \quad \lim\limits_{m^+} f \geqslant f(x) \geqslant \lim\limits_{M^-} f$.

Théorème 5.3

Soit f une fonction monotone définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. Alors f admet une limite finie à droite et à gauche en x_0, et f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x_0^+} f$. De plus, pour tous $x, x' \in I$ tels que $x < x_0 < x'$, on a

1. Si f est croissante,
$$f(x) \leqslant \lim_{x_0^-} f \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x_0^+} f \leqslant f(x').$$

2. Si f est décroissante,
$$f(x) \geqslant \lim_{x_0^-} f \geqslant f(x_0) \geqslant \lim_{x_0^+} f \geqslant f(x').$$

6 Fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions à valeurs complexes. Si $f : D_f \longrightarrow \mathbb{C}$, on définit alors deux fonctions à valeurs réelles par

$$\forall\, x \in D,\ \mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x)), \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x)).$$

Définition 6.1

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Si f est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, elle admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a si
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in D,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

2. Si f est définie au voisinage de $+\infty$, elle admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$ si
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in D,\ x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

3. Si f est définie au voisinage de $-\infty$, elle admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $-\infty$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in D,\ x \leqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 6.2

Soit f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

1. La fonction f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a si et seulement si $|f - \ell|$ tend vers 0 en a.

2. La fonction f admet une limite finie en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent une limite finie en a, et alors $\lim\limits_a f = \lim\limits_a \mathrm{Re}(f) + i \lim\limits_a \mathrm{Im}(f)$.

Proposition 6.3

Soit f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite ℓ en a, alors $\overline{f}$ admet $\overline{\ell}$ comme limite en a.

Attention :

1. On ne parle pas de fonctions monotones, ni des théorèmes de comparaison ou d'encadrement.

2. Il n'y a pas de notion de limite infinie pour f. Par contre, $|f|$ peut tendre vers $+\infty$ en a.

7 Compétences

1. Pour montrer qu'une fonction f admet une limite en a, on peut
   (a) Étudier une éventuelle monotonie de la fonction.
   (b) Utiliser le théorème d'encadrement.
   (c) Si on pense que la limite est $\ell \in \mathbb{R}$, majorer $|f(x) - \ell|$ par une fonction qui tend vers 0 en a.
   (d) Si on pense que la limite est $+\infty$, minorer f par une fonction qui tend vers $+\infty$ en a.
   (e) Si on pense que la limite est $-\infty$, majorer f par une fonction qui tend vers $-\infty$ en a.
   (f) Il peut être intéressant de faire un changement de variable pour se ramener à une limite en 0.
2. Savoir montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a à l'aide de suites.
3. Savoir calculer une limite. On peut pour cela faire un changement de variable pour se ramener à une limite en 0, et appliquer les méthodes usuelles.
4. Savoir calculer la limite d'une suite/d'une fonction à l'aide d'équivalents.