Chapitre 16

Calcul différentiel

Dans ce chapitre :

- E, F, G désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie non nulle ;
- Ω désigne un ouvert non vide de E ;
- f désigne une fonction définie de Ω dans E.

I Différentielle

I. A Dérivée selon un vecteur

Définition 1.1

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$ et $v \in E \setminus \{0_E\}$.
On dit que f admet une **dérivée en a selon le vecteur v** lorsque la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.
Cette dérivée est notée $D_v f(a)$.

Remarques 1.2 :
- Ω étant un ouvert, la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est définie sur un voisinage de 0.
- Lorsque f est a une dérivée en a selon v, cette dérivée $D_v f(a)$ est un vecteur de F.

Exemple 1.3 : $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ en $a = (1, 2)$ selon le vecteur $u = (1, -1)$.

Attention : Une fonction peut avoir des dérivées en a selon tout vecteur (non nul) sans être continue en a.

Exemple 1.4 :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \\ \frac{yx^2}{y^2 + x^4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

I. B Dérivées partielles

Définition 1.5

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Pour $a \in \Omega$ et $i \in [\![1\,; p]\!]$, lorsque f admet une dérivée en a selon le vecteur e_i, on appelle cette dérivée la **i-ième dérivée partielle de f dans la base $\mathcal{B}$**.
Cette dérivée est notée : $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Remarque 1.6 : Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a)$.

1) Lorsque $E = \mathbb{R}^p$

Lorsque $E = \mathbb{R}^p$, si rien n'est précisé, on considère les dérivées partielles dans la base canonique. C'est à dire : pour $a = (a_1, \dots, a_p) \in \Omega$ et $i \in [\![1\,; p]\!]$, on considère la i-ième application partielle de f en a $f_i : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_p)$.
La fonction f admet une i-ième dérivée partielle (dans la base canonique) si et seulement si f_i est dérivable en 0 et dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_i'(0)$.

2) Lorsqu'une base $\mathcal{B}$ est fixée

On suppose qu'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E est fixée et $f : \Omega \longrightarrow F$.
On sait que $\Phi : x \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de E dans $\mathbb{R}^p$ (de même dimension finie), donc Φ et Φ^{-1} sont continues sur E et $\mathbb{R}^p$ et $\Phi(\Omega)$ est l'image réciproque de Ω par Φ^{-1}, donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
On pose $f_{\mathcal{B}} = f \circ \Phi^{-1} : \Phi(A) \longrightarrow F$, c'est à dire :

$$f_{\mathcal{B}} : (x_1, \dots, x_p) \mapsto f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right).$$

Proposition 1.7

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $a = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i x_i \in \Omega$.
Pour tout $i \in [\![1\,; p]\!]$, la fonction f admet une i-ième dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$ si et seulement si $f_{\mathcal{B}}$ admet une i-ième dérivée partielle et dans ce cas :

$$\partial_i f(a) = \partial_i f_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_p).$$

Remarque 1.8 : Lorsqu'une base de E est fixée, on identifie alors $f(x)$ et $f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$.

I. C Différentielle

Notation : Pour U un voisinage de 0_E dans E et $g : U \longrightarrow F$, on note $g(h) = o(h)$ lorsqu'il existe $\varepsilon : U \longrightarrow F$ tel que $g(h) = \|h\|\, \varepsilon(h)$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F$.

Définition 1.9

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$ et $a \in \Omega$.
On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a + h) = f(a) + \varphi(h) + o(h).$$

Remarque 1.10 : La fonction f est différentiable en a lorqu'elle a un développement limité à l'ordre 1 en a.
On peut écrire ce développement limité sous la forme :

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \|h\|\,\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F.$$

Proposition 1.11

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$ et $a \in \Omega$.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Définition/Théorème 1.12

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$ différentiable en $a \in \Omega$.
Alors il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :
$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(h)$; on l'appelle **différentielle de f en a** et on la note $\mathrm{d}f(a)$.

Vocabulaire : La différentielle de f en a est également appelée application linéaire tangente à f en a.

Notation : La valeur en $h \in E$ de la différentielle de f en a est est notée $\mathrm{d}f(a)\cdot h$ plutôt que $\mathrm{d}f(a)(h)$ pour alléger l'écriture.
Le développement limité à l'ordre 1 s'écrit alors :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + o(h).$$

Proposition 1.13 (cas des fonctions d'une variable réelle)

Soit Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \longrightarrow F$.
L'application f est différentiable en $a \in \Omega$ si et seulement si f est dérivable en a et dans ce cas : $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto hf'(a)$ et $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.

Définition 1.14

Une application $f : \Omega \longrightarrow F$ est **différentiable sur Ω** lorsqu'elle est différentiable en tout $a \in \Omega$.
Dans ce cas, l'**application différentielle** est :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f & : & \Omega & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & & x & \longmapsto & \mathrm{d}f(x). \end{array}$$

Proposition 1.15

- Si $f : \Omega \longrightarrow F$ est constante sur Ω, alors f est différentiable sur Ω et : $\forall a \in \Omega$, $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est différentiable Ω et : $\forall a \in \Omega$, $\mathrm{d}f(a) = f$.

Exemple 1.16 : Soit E un espace euclidien. Montrer que $f : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable sur E.

I. D Lien avec les dérivées selon un vecteur ou partielles

Proposition 1.17

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$ différentiable en $a \in \Omega$.
Alors f est dérivable en a selon tout vecteur non nul de E et :

$$\forall v \in E \setminus \{0\}, \quad D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot v.$$

Remarque 1.18 : Si f est différentiable en a, sa différentielle est : $v \mapsto D_v f(a)$.

Méthode 1.19

On suppose que f est dérivable en a selon tout vecteur non nul, alors f est différentiable en a si et seulement si :

- $v \mapsto D_v f(a)$ est linéaire ;
- $f(a+h) = f(a) + D_h f(a) + o(h)$.

Exemple 1.20 : L'application

$$\begin{array}{rccl} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) ; \\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

est-elle différentible en $(0,0)$?

Attention : L'existence des dérivées partielles n'implique pas la différentiabilité !

Contre exemple 1.21 : Retour à l'exemple 1.4.

Corollaire 1.22

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $f : \Omega \longrightarrow F$.
Si f est différentiable en $a \in \Omega$, alors

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!], \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot e_i.$$

Corollaire 1.23

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f : \Omega \longrightarrow F$.
Si f est différentiable en $a \in \Omega$, alors pour $h = \sum_{i=1}^{p} h_i e_i \in E$

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Méthode 1.24

Pour montrer que f est différentiable en a, on peut :

1. montrer que toutes les dérivées partielles de f existent ;
2. introduire $\varphi : h \mapsto \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$;
3. montrer que $f(a+h) - f(a) - \varphi(h) = o(h)$.

Exemple 1.25 : L'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \\ \frac{x^3}{x^2+y^4} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

est-elle différentible en $(0,0)$?

I. E Matrice jacobienne

Proposition 1.26

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
La fonction f est différentiable en $a \in \Omega$ si et seulement si toutes les fonctions coordonnées le sont.

Notation : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable en $a \in \Omega$. On note $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de f. On appelle matrice jacobienne de f en a la matrice :

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 1.27

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable en a, alors la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques est la matrice jacobienne de f en a.

Exemple 1.28 :

$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big). \end{array}$$

I. F Gradient

Dans cette section E est un espace euclidien et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Rappel : Pour toute forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $y \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, f(x) = \langle x, y \rangle.$$

Définition 1.29

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \Omega$.
Le **gradient de f en a**, noté $\nabla f(a)$, est l'unique vecteur de E tel que :

$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Proposition 1.30

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de E.
Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \Omega$, alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a) e_i.$$

Corollaire 1.31

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ muni de son produit scalaire canonique et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \Omega$, alors :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_p f(a) \end{pmatrix} = (J_f)^\top$$

où J_f est la jacobienne de f en a.

Proposition 1.32

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \Omega$ telle que $\nabla f(a) \neq 0$. La restriction à la sphère unité de $h \mapsto D_h f(a)$ admet un maximum qui est atteint en l'unique vecteur unitaire positivement colinéaire à $\nabla f(a)$.

Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, alors $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale. Le gradient ainsi la direction de variation maximale.
Interprétation topographique : Supposons que le relief d'une montagne est représenté par le graphe d'une fonction f de deux variables différentiable en tout point. En tout point, le gradient de f indique la direction dans laquelle la pente sera la plus forte.

II Opérations sur les applications différentiables

II. A Combinaison linéaire

Proposition 2.1 (Linéarité)

Soit f et g deux applications de Ω dans F, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Si f et g sont différentiables en $a \in \Omega$, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et :
$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \,\mathrm{d}f(a) + \mu \,\mathrm{d}g(a).$$
- Si f et g sont différentiables sur Ω, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur Ω et :
$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \,\mathrm{d}f + \mu \,\mathrm{d}g.$$

II. B Différentielle et applications multilinéaires

Proposition 2.2

Soit $F_1, \dots, F_q, G$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, pour tout $i \in [\![1\,;q]\!]$, $f_i : \Omega \longrightarrow F_i$ et $M : F_1 \times \cdots \times F_q \longrightarrow G$ une application multilinéaire.

- Si $f_1, \dots, f_q$ sont différentiables en $a \in \Omega$, alors $g = M(f_1, \dots, f_q)$ est différentiable en a et :
$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}g(a) \cdot h = \sum_{k=1}^{q} M\Big(f_1(a), \dots, f_{k-1}(a), \mathrm{d}f_k(a) \cdot h, f_{k+1}(a), \dots, f_q(a)\Big).$$
- Si $f_1, \dots, f_q$ sont différentiables en sur Ω, alors $g = M(f_1, \dots, f_q)$ est différentiable sur Ω.

Corollaire 2.3

Soit $B : F_1 \times F_2 \longrightarrow G$ bilinéaire et $f_1 : \Omega \longrightarrow F_1, f_2 : \Omega \longrightarrow F_2$.
Si f_1 et f_2 sont différentiables en $a \in \Omega$, alors $g = B(f_1, f_2)$ est différentiable en a et :
$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}g(a) \cdot h = B\big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, f_2(a)\big) + B\big(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a) \cdot h\big).$$

Exemple 2.4 : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables en a, alors $f \times g$ est différentiable en a, calculer les dérivées partielles de $f \times g$.

II. C Règle de la chaîne

Théorème 2.5

Soit Ω' un ouvert de F, $f : \Omega \longrightarrow F$ et $g : \Omega' \longrightarrow G$ telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$.

- Si f est différentiable en $a \in \Omega$ et g est différentiable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(g \circ f)(a) &= \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a) \\ &= \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a).\end{aligned}$$
- Si f est différentiable sur Ω et g est différentiable sur Ω', alors $g \circ f$ est différentiable sur Ω.

Exemple 2.6 : retour sur la proposition 1.26 : caractérisation de la différentiabilité de f par ses fonctions coordonnées.

Corollaire 2.7 (Matrice jacobienne d'une composée)

On suppose $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathbb{R}^m$, f différentiable en $a \in \Omega$ et g différentiable en $b = f(a)$, alors :
$$J_{g \circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big) \times J_f(a).$$

Proposition 2.8 (Règle de la chaîne)

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et F respectivement. On suppose f différentiable en $a \in \Omega$ et g différentiable en $b = f(a)$. En notant $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}'$ de F. Alors :
$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1\,;p]\!], \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big).\end{aligned}$$

Remarques 2.9 :

- $\frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \in$ ____ et $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \in$ ____.
- Si g est à valeurs réelles, on peut écrire la formule sous la forme :
$$\forall j \in [\![1\,;p]\!], \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).$$

Exemples 2.10 : Appliquer la formule dans chaque cas (on suppose les hypothèses vérifiées) :

1. $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \rule{5cm}{0.1pt}$$
$$\rule{5cm}{0.1pt}.$$

2. $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$:

$$g'(t) = \rule{4cm}{0.1pt}$$
$$\rule{4cm}{0.1pt}.$$

3. $g(x,y) = f\big(\varphi(x,y)\big)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \rule{4cm}{0.1pt}.$$

Exemple 2.11 : Changement de variable polaire : $g(r,\theta) = f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Alors d'après la règle de la chaîne, $g \in \mathcal{C}^1\big(]-\pi\,;\pi[\times\mathbb{R}_+^*\big)$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + \sin(\theta) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + r\cos(\theta) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$$

II. D Dérivation le long d'un arc

Proposition 2.12

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow F$.
Si γ est dérivable en $t_0 \in I$ et si f est différentiable en $a = \gamma(t_0)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et :

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma)'(t_0) &= \mathrm{d}f(a)\cdot\gamma'(t_0)\\ &= \mathrm{d}f\big(\gamma(t_0)\big)\cdot\gamma'(t_0).\end{aligned}$$

Exemple 2.13 : Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = a + tv$ avec $a \in \Omega$ et $v \in E$.
Si f est différentiable en x, alors $g : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 et :

$$g'(0) = \mathrm{d}f(a)\cdot v.$$

On retrouve la formule liant la dérivée partielle selon le vecteur v est la différentielle.

Corollaire 2.14

On suppose $E = \mathbb{R}^p$ et I est un intervalle d'intérieur non vide.
Si $\gamma : t \mapsto \big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$ est une fonction dérivable sur I et à valeurs dans Ω est f différentiable sur Ω, alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big) = \sum_{i=1}^{p} x_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big).$$

III Applications de classe $\mathcal{C}^1$

III. A Définition et caractérisation

Définition 3.1

Une application $f : \Omega \longrightarrow F$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω lorsqu'elle est différentiable sur Ω et que $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.

Théorème 3.2

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$.
L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E exitent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.

Exemple 3.3 : Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

III. B Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 3.4 (Linéarité)

Soit f et g deux applications de Ω dans F, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Corollaire 3.5

L'ensemble $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, F)$.

Proposition 3.6

Soit $F_1, \dots, F_q, G$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, pour tout $i \in [\![1\,;q]\!]$, $f_i : \Omega \longrightarrow F_i$ et $M : F_1 \times \dots \times F_q \longrightarrow G$ une application multilinéaire.
Si $f_1, \dots, f_q$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ en sur Ω, alors $g = M(f_1, \dots, f_q)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Corollaire 3.7

Les applications polynomiales sur E sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

Exemples 3.8 :
- L'application $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2y + xyz$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, calculer ses dérivées partielles.
- L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.9 (Composition)

Soit Ω' un ouvert de F, $f : \Omega \longrightarrow F$ et $g : \Omega' \longrightarrow G$ telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et g est de classe C^1 sur Ω', alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur Ω.

Exemple 3.10 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^*$, montrer que $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et calculer sa différentielle.

Corollaire 3.11

Toute fonction rationnelle définie sur Ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Exemple 3.12 : Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis que $M \mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 3.13 : L'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \\ \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

est-elle différentible en sur $\mathbb{R}^2$?

III. C Intégration le long d'un chemin

Théorème 3.14

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans F et γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0\,;1]$ dans Ω telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 3.15 : On suppose que le segment $[a\,;b]$ est inclus dans Ω, on pose $v = b - a$ et $\gamma : t \mapsto a + tv \in \mathcal{C}^1([0\,;1], \Omega)$.
Si f est de classe C^1 sur Ω, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(a + tv) \cdot v\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.16

On suppose Ω connexe par arcs et $f : \Omega \longrightarrow F$.
L'application f est constante si et seulement si f est différentiable sur Ω et $\mathrm{d}f = 0$.

IV Vecteurs tangents à une partie

IV. A Vecteurs tangents

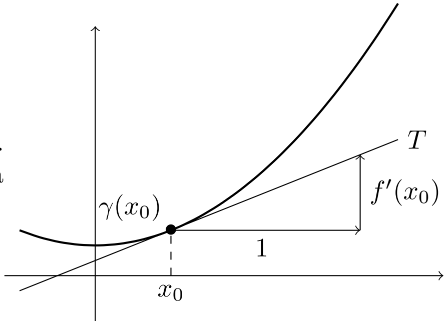
Définition 4.1

Soit X une partie de E et $x \in X$. Un vecteur v de E est appelé **vecteur tangent à X en x** lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Notation : L'ensemble des vecteurs tangents à X en x est noté : T_xX.

Exemple 4.2 : Graphe d'une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I.
On considère l'arc $\gamma : x \mapsto \big(x, f(x)\big)$.
L'image de γ est donc le graphe de la fonction f et $\gamma'(x_0) = \big(1, f'(x_0)\big)$

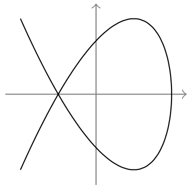


Remarques 4.3 :
- Le vecteur nul est tangent à X en tout point x de X ($\gamma : t \mapsto$).
- Si $x \in \mathring{X}$, alors $T_xX =$.
- L'ensemble T_xX est un cône de E c'est à dire une partie de E stable par multiplication par un scalaire : si $v \in T_xX$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda v \in T_xX$.

Attention : L'ensemble des vecteurs tangents n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E.

Contre exemple 4.4 :

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (\cos(2t), \sin(3t)) \end{array}$$



et $\mathcal{C}$ l'image de γ.

En particulier pour $t_0 = \frac{\pi}{3}$ et $a = \gamma(t_0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, alors $\gamma'(t_0) = -(\sqrt{3}, 3)$.
Donc $\gamma'(t_0)\mathbb{R} \subset T_a\mathcal{C}$, mais $\gamma'(t_0)\mathbb{R} \neq T_a\mathcal{C}$.

IV. B Exemples d'espaces tangents

Exemple 4.5 : Soit X un sous-espace affine de E, on note F la direction de X.
Pour tout $x \in H$, $T_xX = F$.

Exemple 4.6 : Soit E un espace euclidien, S la sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $a \in S$.
Alors T_aS est l'hyperplan orthogonal au vecteur a.

Exemple 4.7 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $G = \left\{\big(x, y, f(x, y)\big);\ \text{avec } (x, y) \in \Omega\right\}$ le graphe de f.
Si f est différentiable en $a = (x_0, y_0) \in \Omega$, alors l'ensemble de vecteurs tangents à G en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\right)$.

IV. C Ensembles définis par une équation

Théorème 4.8

Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, $k \in \mathbb{R}$ et $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = k\}$.
Si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $T_xX = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}g(x))$.

Corollaire 4.9

Supposons que E est un espace euclidien, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = k\}$.
Si $a \in X$ et $\nabla g(a) \neq 0$, alors $T_aX = \big(\nabla g(a)\big)^{\perp}$.

Exemple 4.10 : Retour aux l'exemples 4.6 de la sphère euclidienne et 4.7.

V Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

V. A Dérivées partielles d'ordre k

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Définition 5.1

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$ et $i, j \in [\![1\,;p]\!]$. Lorsque f admet une $i^{\text{ième}}$ dérivée partielle $\partial_i f$ sur Ω et que cette fonction dérivée partielle admet une dérivée partielle $\partial_j(\partial_i f)$ sur Ω, on dit que **f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport aux variables x_i et x_j**.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_k \in [\![1\,;p]\!]$, lorsque $\partial_{i_k}(\ldots(\partial_{i_2}(\partial_{i_1} f)))$ existe, on dit que f a une **dérivée partielle d'ordre k par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$**.

Notation : La dérivée partielle d'ordre k par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ est notée $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_k}}$ ou $\partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1} f$ ou $\partial_{i_k, \ldots, i_1} f$.

Définition 5.2

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, une application $f : \Omega \longrightarrow F$ est dite de **classe $\mathcal{C}^k$** sur Ω lorsque toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.
Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Notation : L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans F est noté $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$.

Exemples 5.3 :
- Les applications constantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Les applications linéaires sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

V. B Théorème de Schwarz

Théorème 5.4 (Schwarz)

Soit $f : \Omega \longrightarrow F$ une fonction de classe C^2 sur Ω. Alors :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;p]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Exemple 5.5 :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

V. C Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Proposition 5.6 (Linéarité)

Soit f et g deux applications de Ω dans F, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur Ω.

Corollaire 5.7

L'ensemble $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, F)$.

Proposition 5.8

Soit $F_1, \dots, F_q, G$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, pour tout $i \in [\![1\,;q]\!]$, $f_i : \Omega \longrightarrow F_i$ et $M : F_1 \times \cdots \times F_q \longrightarrow G$ une application multilinéaire.
Si $f_1, \dots, f_q$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ en sur Ω, alors $g = M(f_1, \dots, f_q)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω.

Corollaire 5.9

Les applications polynomiales sur Ω sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

Proposition 5.10 (Composition)

Soit Ω' un ouvert de F, $f : \Omega \longrightarrow F$ et $g : \Omega' \longrightarrow G$ telles que $f(\Omega) \subset \Omega'$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω et g est de classe C^k sur Ω', alors $g \circ f$ est de classe C^k sur Ω.

V. D Exemples d'équations aux dérivées partielles

1) Exemple fondamental

Exemple 5.11 : Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

2) Un petit peu plus sophistiqué

Exemple 5.12 : Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yf.$$

3) Avec changement de variables

Exemple 5.13 : Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a$$

à l'aide du changement de variable $u = x + y, v = x - y$.

4) Une équation d'ordre 2 avec conditions au bord

Exemple 5.14 : Déterminer les applications de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y + e^x ; \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x,0) = x^2 ; \\ \forall y \in \mathbb{R}, f(0,y) = 3y. \end{cases}$$

5) Passage en coordonnées polaires

Exemple 5.15 :

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On posera $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ après avoir précisé le domaine d'étude.