

Chapitre 10

Les nombres réels

1 Bornes supérieure et inférieure dans \mathbb{R}

Définition 1.1 (Bornes supérieure et inférieure)

Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. La *borne supérieure* de X , si elle existe, est le plus petit des majorants de X , *i.e.* un majorant $M \in \mathbb{R}$ de X tel que si M' est un majorant de X , on ait $M \leq M'$. On la note $\sup(X)$.
2. La *borne inférieure* de X , si elle existe, est le plus grand des minorants de X , *i.e.* un minorant $m \in \mathbb{R}$ de X tel que si m' est un minorant de X , on ait $m' \leq m$. On la note $\inf(X)$.

Remarques.

1. Un sous-ensemble X de \mathbb{R} n'admet pas nécessairement de borne supérieure ou inférieure.
2. La borne inférieure de X est la borne supérieure de $-X$, et inversement.

Proposition 1.2

Soit $X \subset \mathbb{R}$.

1. Si X admet une borne supérieure, elle est unique.
2. Si X admet une borne inférieure, elle est unique.

Proposition 1.3

Soit $X \subset \mathbb{R}$.

1. L'ensemble X admet un maximum si et seulement s'il admet une borne supérieure et si $\sup(X) \in X$, et alors $\max(X) = \sup(X)$.
2. L'ensemble X admet un minimum si et seulement s'il admet une borne inférieure et si $\inf(X) \in X$, et alors $\min(X) = \inf(X)$.

Remarque.

On dit que le plus grand élément est une "borne supérieure atteinte".

Théorème 1.4

1. Tout sous-ensemble non vide et majoré de \mathbb{R} admet une borne supérieure.
2. Tout sous-ensemble non vide et minoré de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Méthode 1.5

Soit X un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} .

1. Soit $M \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $M = \sup(X)$, on montre que M est un majorant de X , et que si M' est un majorant de X , alors $M \leq M'$, ou que si $M' < M$, alors M' ne majore pas X .
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $m = \inf(X)$, on montre que m est un minorant de X , et que si m' est un minorant de X , alors $m \geq m'$, ou que si $m' > m$, alors m' ne minore pas X .

Proposition 1.6 (Caractérisation des bornes inférieures/supérieures parmi les minorants/majorants)

Soit X un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} .

1. Soit a **un majorant** de X . Alors $a = \sup(X)$ si et seulement si pour tout réel $b < a$, il existe $x \in X$ tel que $b < x$, ou plus formellement

$$\begin{aligned} a = \sup(X) &\iff \forall b \in \mathbb{R}, b < a \implies \exists x \in X \mid b < x \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \mid a - \varepsilon < x \\ &\iff \text{aucun réel } b < a \text{ n'est un majorant de } X. \end{aligned}$$

2. Soit a **un minorant** de X . Alors $a = \inf(X)$ si et seulement si pour tout réel $b > a$, il existe $x \in X$ tel que $x < b$, ou plus formellement

$$\begin{aligned} a = \inf(X) &\iff \forall b \in \mathbb{R}, a < b \implies \exists x \in X \mid x < b \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \mid x < a + \varepsilon \\ &\iff \text{aucun réel } b > a \text{ n'est un minorant de } X. \end{aligned}$$

Méthode 1.7 (Montrer qu'un réel est la borne supérieure d'un ensemble)

On considère un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$, et un réel M . On veut montrer que X admet une borne supérieure et que $\sup(X) = M$.

1. On montre que M majore X . Ceci prouve que X admet une borne supérieure.
2. On fixe $\varepsilon > 0$. On montre qu'il existe $x \in X$ tel que $M - \varepsilon < x$.

Méthode 1.8 (Montrer qu'un réel est la borne inférieure d'un ensemble)

On considère un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$, et un réel m . On veut montrer que X admet une borne inférieure et que $\inf(X) = m$.

1. On montre que m minore X . Ceci prouve que X admet une borne inférieure.
2. On fixe $\varepsilon > 0$. On montre qu'il existe $x \in X$ tel que $x < m + \varepsilon$.

Méthode 1.9 (Montrer qu'un réel est la borne supérieure, avec les suites)

On considère un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$, et un réel M . On veut montrer que X admet une borne supérieure et que $\sup(X) = M$.

1. On montre que M majore X . Ceci prouve que X admet une borne supérieure.
2. On montre qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M$.

Ce résultat sera démontré dans le chapitre sur les suites.

Méthode 1.10 (Montrer qu'un réel est la borne inférieure, avec les suites)

On considère un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$, et un réel m . On veut montrer que X admet une borne inférieure et que $\inf(X) = m$.

1. On montre que m minore X . Ceci prouve que X admet une borne inférieure.
2. On montre qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} m$.

Ce résultat sera démontré dans le chapitre sur les suites.

Méthode 1.11 (Passage à la borne supérieure/inférieure)

Soit $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, et un réel y .

1. Si : $\forall x \in X$, $x \leq y$, alors $\sup(X) \leq y$. On dit alors qu'on "passe à la borne supérieure dans l'inégalité large".
2. Si : $\forall x \in X$, $y \leq x$, alors $y \leq \inf(X)$. On dit alors qu'on "passe à la borne inférieure dans l'inégalité large".

2 Droite numérique achevée

Définition 2.1

La *droite numérique achevée* est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de la relation d'ordre de \mathbb{R} prolongée par

1. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \leq +\infty$.
2. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$, $-\infty \leq x$.

Proposition 2.2

On a :

1. $+\infty$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
2. $-\infty$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 2.3

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.4

Soit X un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} . Alors :

1. X est majoré si et seulement si $\sup(X) < +\infty$.
2. X est minoré si et seulement si $-\infty < \inf(X)$.

On prolonge partiellement les opérations algébriques de \mathbb{R} à $\overline{\mathbb{R}}$. On pose

1. $-\infty + y = -\infty$ pour tout $y \neq +\infty$.
2. $-\infty + \infty$ est indéterminé.
3. $+\infty + y = +\infty$ pour tout $y \neq -\infty$.

De même pour les produits. Seuls restent indéterminés les produits de 0 par $\pm\infty$.

3 Intervalles de \mathbb{R}

Définition 3.1 (Intervalles de \mathbb{R})

Un *intervalle* de \mathbb{R} est un sous-ensemble I de \mathbb{R} tel que

$$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \implies x \in I.$$

Remarque.

L'ensemble vide et les ensembles réduits à un point sont des intervalles, appelés *intervalles triviaux*.

On rappelle que pour $a \leq b$, on définit les ensembles

$$]a, b[, \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad [a, b], \quad]-\infty, b[, \quad]-\infty, b], \quad]-\infty, +\infty[, \quad]a, +\infty[, \quad [a, +\infty[$$

par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, etc...

Proposition 3.2

Les ensembles ci-dessus sont des intervalles.

Théorème 3.3

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Alors

$$I = \begin{cases} [a, b] & \text{si } a, b \in I \\]a, b] & \text{si } a \notin I, b \in I \\ [a, b[& \text{si } a \in I, b \notin I \\]a, b[& \text{si } a, b \notin I \end{cases}$$

4 Partie entière

Proposition 4.1 (Propriété d'Archimède)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Proposition 4.2 (Partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p + 1$. C'est la *partie entière* de x , et on la note $\lfloor x \rfloor$.
2. La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x , et $\lfloor x \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement plus grand que x .

Remarque.

On peut être tenté de faire cette démonstration (fausse!) : A est un sous-ensemble non vide et majoré de \mathbb{Z} . Il admet donc un plus grand élément, qui est justement $\lfloor x \rfloor$. Mais attention : *a priori*, A n'est pas majoré dans \mathbb{Z} , mais seulement dans \mathbb{R} .

Proposition 4.3 (Croissance)

La partie entière est une fonction croissante sur \mathbb{R} .

Proposition 4.4

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

1. $n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor$.
2. $x < n \iff \lfloor x \rfloor + 1 \leq n$.
3. $n \leq x < n + 1 \iff n = \lfloor x \rfloor$.

Proposition 4.5

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

1. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Méthode 4.6 (Montrer qu'un entier est la partie entière d'un réel)

On considère $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On veut montrer que $n = \lfloor x \rfloor$.

1. Si ce n'est pas fait, on vérifie que $n \in \mathbb{Z}$.
2. On montre que $n \leq x$.
3. On montre que si $m \in \mathbb{Z}$ vérifie $m \leq x$, alors $m \leq n$. Ou on montre que $x < n + 1$.

5 Approximation décimale des réels

Définition 5.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit les suites $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}, \quad e_n = \frac{1 + \lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = d_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le décimal d_n est la valeur approchée par défaut à 10^{-n} près de x , et e_n la valeur approchée par excès à 10^{-n} près de x .

Proposition 5.2

1. La suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n \leq x < e_n$.
4. $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers x .

Définition 5.3

Un sous-ensemble A de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} s'il rencontre tout intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} .

Proposition 5.4

Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} . Alors

$$\begin{aligned} A \text{ dense dans } \mathbb{R} &\iff \forall x, y \in \mathbb{R} \mid x < y, A \cap]x, y[\neq \emptyset \\ &\iff \forall (x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, A \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset \end{aligned}$$

Proposition 5.5

Les ensembles \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

6 Compétences

1. Savoir déterminer la borne supérieure/inférieure d'un ensemble.
2. Connaître et reconnaître la caractérisation d'une borne supérieure.
3. Savoir utiliser la caractérisation de la partie entière.