Chapitre 13

Variables aléatoires discrètes

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ désigne un espace probabilisé et E un ensemble quelconque.

I Variables aléatoires discrètes

I. A Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 1.1

Une **variable aléatoire discrète** X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ et à valeurs dans E est une application $X : \Omega \longrightarrow E$ telle que :

- $X(\Omega)$ est au plus dénombrable ;
- $\forall x \in E, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}$.

Remarques 1.2 :
- La seconde condition signifie que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est un événement.
- Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une **variable aléatoire discrète réelle**.

Proposition 1.3

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ à valeurs dans E. Si A est une partie quelconque de E, alors $X^{-1}(A)$ est un événement noté $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$.

Notation : Si $x \in E$, on note $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$.
Si X est une variable aléatoire discrète réelle et $x \in \mathbb{R}$, on note :

- $(X \leqslant x) = (X \in \left]-\infty\,; x\right])$,
- $(X < x) = (X \in \left]-\infty\,; x\right[)$,
- $(X \geqslant x) = (X \in \left[x\,; +\infty\right[)$,
- $(X > x) = (X \in \left]x\,; +\infty\right[)$.

Remarque 1.4 : Les variables aléatoires finies vues en sup : sur un univers Ω fini sont des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Définition 1.5

Soit X une variable aléatoire discrète, alors $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé à X**.

Définition 1.6

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète.
L'application :

$$\mathrm{P}_X \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & \mathrm{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ appelée **loi de probabilité de X**.

Remarque 1.7 : La loi de X peut être définie sur un ensemble E contenant $X(\Omega)$.

Proposition 1.8

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète, la probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilité discrète $\big(\mathrm{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$, c'est à dire par la donnée de :

- l'ensemble au plus dénombrable $X(\Omega)$;
- la probabilité de chaque événement élémentaire.

Exemples 1.9 :
- On lance deux dés équilibrés et on appelle S la somme des résultats. Proposer une modélisation : un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$, une expression pour S et la distribution de probabilité discrète associée.
- On suppose que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(X = n+1) = \frac{4}{n}\,\mathrm{P}(X = n)$.
Donner une expression explicite de la loi de X.

Notation : Lorsque deux variables aléatoires discrètes X et Y à valeurs dans un même ensemble E ont la même loi, c'est à dire lorsque $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y$, on note $X \sim Y$.

Remarque 1.10 : La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont égales ou même qu'elles sont définies sur le même espace probabilisé.

Exemple 1.11 : On lance un dé rouge et on appelle X le résultat du dé, on lance un dé vert et on appelle Y le résultat du dé.
Les deux expériences peuvent être considérées séparément, X et Y sont définies sur des univers différents, mais $X \sim Y$.

I. B Fonction d'une variable aléatoire discrète

Dans tout le reste du chapitre, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.

Proposition 1.12

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ à valeurs dans E et $f : E \longrightarrow F$.
Alors $f \circ X : \Omega \longrightarrow F$ est une variable aléatoire discrète notée $f(X)$.

Remarque 1.13 : La loi de $Y=f(X)$ est donnée par :

- $Y(\Omega)=f\big(X(\Omega)\big)$;
- $\forall y\in Y(\Omega), \mathrm{P}(Y=y)=\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)\,|\,f(x)=y}\mathrm{P}(X=x)$.

Proposition 1.14

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega_1,\mathcal{T}_1,\mathrm{P}_1)$ et $(\Omega_2,\mathcal{T}_2,\mathrm{P}_2)$ à valeurs dans un même ensemble E.
Si $X\sim Y$ et $f:E\longrightarrow F$, alors $f(X)\sim f(Y)$.

I. C Loi conditionnelle

Définition 1.15

Soit $X:\Omega\longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète et $A\in\mathcal{T}$ un événement non négligeable. Alors :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(E) & \longrightarrow & [0\,;1]\\ B & \longmapsto & \mathrm{P}_A(X\in B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap(X\in B))}{\mathrm{P}(A)}\end{array}$$

est une probabilité sur $(E,\mathcal{P}(E))$ appelée **loi conditionnelle de X sachant A**.

II Couple et famille de variables aléatoires discrètes

II. A Couple de variables aléatoires discrètes

Définition 2.1

Soit X,Y des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathrm{P})$ à valeurs dans E et F respectivement.
Alors :

$$\begin{array}{ccccc}W & : & \Omega & \longrightarrow & E\times F\\ & & \omega & \longmapsto & \big(X(\omega),Y(\omega)\big)\end{array}$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E\times F$, appelée **couple de variables aléatoires (X,Y)**.

Exemple 2.2 : On lance deux dés. Soit X la variable aléatoire égale au plus petit résultat des deux dés et Y au plus grand. Alors (X,Y) est un couple de variables aléatoires. Donner $(X,Y)(\Omega)$.

Remarque 2.3 : On n'a pas toujours : $(X,Y)(\Omega)=X(\Omega)\times Y(\Omega)$, et dans ce cas certains des événements $\big((X=x)\cap(Y=y)\big)$ sont impossibles. On pourra tout de même donner la loi d'une telle variable aléatoire sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ quitte à compléter par des 0.

Définition 2.4

Soit X,Y des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathrm{P})$ à valeurs dans E et F respectivement. On appelle

Loi conjointe du couple : la loi de la variable aléatoire (X,Y) ;

Lois marginales du couple : les lois des variables aléatoires X et Y.

Remarque 2.5 : La loi conjointe du couple est donc la donnée de :

- $(X,Y)(\Omega)$
- $\forall x\in X(\Omega),\forall y\in Y(\Omega),\mathrm{P}(X=x,Y=y)$

Méthode 2.6

Si l'on connaît la loi de X et les lois conditionnelles de Y sachant les événements $(X=x)$ pour chaque $x\in X(\Omega)$, on retrouve la loi conjointe du couple par ....

Exemples 2.7 :

- Déterminer la loi du couple de variables aléatoires de l'exemple précédent.
- On effectue 2 tirages successifs et sans remise dans une urne qui contient 2 boules blanches et une boule noire. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale à 1 lorsque la première (respectivement la seconde) boule tirée est blanche et à 0 sinon.
  Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

Théorème 2.8 (Lois marginales à partir de la loi conjointe)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On a

$$\forall x\in X(\Omega),\quad \mathrm{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathrm{P}\left(X=x,Y=y\right)$$

$$\forall y\in Y(\Omega),\quad \mathrm{P}(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathrm{P}\left(X=x,Y=y\right)$$

Exemple 2.9 : Déterminer la loi de la variable aléatoire Y de l'exemple précédent.

Remarque 2.10 : On peut étendre les notions de loi conjointe et loi conditionnelles pour un n-uplet de variables aléatoires discrètes.

II. B Variables aléatoires indépendantes

Définition 2.11

Deux X et Y variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ à valeurs dans E et F sont dites indépendantes, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$, lorsque :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(F), \mathrm{P}(X \in A, Y \in B) = \mathrm{P}(X \in A) \times \mathrm{P}(Y \in B).$$

Proposition 2.12

Deux variables aléatoires discrètes X et Y à valeurs dans E et F sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilité du couple (X, Y) est le produit des distributions de probabilité de X et de Y :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \mathrm{P}(X = x, Y = y) = \mathrm{P}(X = x) \times \mathrm{P}(Y = y).$$

Proposition 2.13

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute fonction f définie sur $X(\Omega)$ et toute fonction g définie sur $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Définition 2.14 (famille finie de variables aléatoires indépendantes)

Les variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ sont dites **indépendantes** lorsque, pour tout $(A_1, \dots A_n) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$, les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ sont indépendants.

Remarques 2.15 :
- Toute sous famille d'une famille de variables aléatoires indépendante est indépendante.
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes et $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions définies sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$, alors $f(X_1), \dots, f(X_n)$ sont indépendantes.

Attention : L'indépendance implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Théorème 2.16 (Lemme des coalitions)

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 2.17 : On peut créer plus de deux coalitions.

II. C Suites de variables aléatoires indépendantes

Définition 2.18 (famille quelconque de VA indépendantes)

Une famille quelconque $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ est dite indépendantes lorsque pour toute partie finie J de I, la sous famille $(X_i)_{i \in J}$ est indépendante.

Remarque 2.19 : Si $(X_i)_{i \in I}$ sont des variables indépendantes et $(f_i)_{i \in I}$ sont des fonctions définies sur $X_1(\Omega), \dots,$ alors $(f(X_i))_{i \in I}$ sont indépendantes.

Théorème 2.20

Pour toute suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de lois de probabilités discrètes, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ et une suite de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de la variable aléatoire X_n est P_n.

Remarque 2.21 : En particulier, si P est une loi de probabilité discrète, il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ et une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est P. On dit alors que les variables aléatoires sont indépendantes identiquement distribuées (abrégé en i.i.d.).

Exemple 2.22 : Si P est la loi de Bernoulli de paramètre p, on obtient une modélisation du jeu de pile ou face ou toute autre suite d'épreuve de type succès-échec indépendantes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est la variable aléatoire égale à 1 en cas de succès à la $n^{\text{ième}}$ épreuve et à 0 en cas d'échec et les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

III Lois usuelles

III. A Loi uniforme

Définition 3.1

Soit X une variable aléatoire finie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X **suit la loi uniforme sur** $[\![1; n]\!]$ et on note $X \sim \mathcal{U}([\![1; n]\!])$ lorsque :
- $X(\Omega) =$ ________ ;
- $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\mathrm{P}(X = k) =$ ____

Schéma type

X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1; n]\!]$ avec équiprobabilité.

Exemple 3.2 : Résultat d'un lancer de dé équilibré.

III. B Loi de Bernoulli

Définition 3.3

Soit X une variable aléatoire finie et $p \in [0\,;1]$.
On dit que $\boldsymbol{X}$ **suit la loi de Bernoulli de paramètre** $\boldsymbol{p}$ et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $X(\Omega) =$ ________ ;
- $\mathrm{P}(X = 1) =$ ______ et $\mathrm{P}(X = 0) =$ ______

Schéma type

On considère une épreuve Bernoulli c'est à dire une expérience aléatoire dont l'exécution amène soit un succès (événement S) soit un échec (événement $\overline{S}$) ; on note $p = \mathrm{P}(S)$.

X est la v.a. finie définie par $\begin{cases} X = 1 & \text{si } S \text{ est réalisé} \\ X = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Remarque 3.4 : La variable aléatoire X est alors la fonction indicatrice de l'ensemble S : $X = \mathbb{1}_S$.

III. C Loi binomiale

Définition 3.5

Soit X une variable aléatoire finie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;1]$.
On dit que X **suit la loi binomiale de paramètres** $\boldsymbol{n}$ **et** $\boldsymbol{p}$ et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ lorsque :

- $X(\Omega) =$ ________
- $\forall k \in [\![0; n]\!],\ \mathrm{P}(X = k) =$ ______________________

Schéma type

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- On répète n fois (n fixé) une épreuve de Bernoulli ;
- la probabilité de S (succès) reste identique à chaque réalisation de l'épreuve ;
- les réalisations successives de l'épreuve sont indépendantes ;
- X est la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n épreuves.

Exemple 3.6 : On lance 3 fois un dé équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus. Déterminer la loi de X.

Remarques 3.7 :

- On connaît le nombre de réalisations de l'épreuve à l'avance.
- Si $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p.
- On peut en déduire la formule du binôme de Newton dans le cas où $a > 0$ et $b > 0$ en posant $p = \frac{a}{a+b}$.

Proposition 3.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0\,;1]$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées de loi binomiale de paramètre p.
Alors $X = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

III. D Loi géométrique

Définition 3.9

Soit $p \in \,]0\,;1[$, on pose $q = 1 - p$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ou $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$;
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1}$.

Schéma type

On considère une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès $p \in \,]0\,;1[$ et X est le rang du premier succès ($+\infty$ s'il n'y a aucun succès).

Exemples 3.10 :

- Dans un jeu de pile ou face infini avec un pièce qui donne pile avec probabilité $p = \,]0\,;1[$, le rang X du premier pile est une variable géométrique de paramètre p.
- Pour la même expérience aléatoire, on note Y le rang du deuxième pile. Déterminer la loi conjointe de X et Y et en déduire la loi de Y.

III. E Loi de Poisson

Définition 3.11

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit **la loi de Poisson de paramètre** $\boldsymbol{\lambda}$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$;
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Proposition 3.12

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi binomiale de paramètres (n, p_n). Si : $n \times p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Remarques 3.13 :
- Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) avec n grand et $\lambda = n \times p$ « pas trop grand », on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre λ (événements rares).
- La loi de Poisson de paramètre λ est souvent utilisée pour décrire le nombre d'événements dans un intervalle de temps lorsque ces événements sont indépendants et qu'il y en a λ en moyenne.

Exemple 3.14 : Nombre d'appels reçus entre 15h et 16h par un standard téléphonique : il y a un grand nombre de personnes qui peuvent appeler, mais chacune avec une probabilité faible. On sait qu'en moyenne le standard reçoit 20 appels par heures.

Remarque 3.15 : Une loi conditionnelle peut être une loi usuelle.

Exemple 3.16 : On suppose que le nombre de voitures arrivant à un payage autoroutier en une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0\,;+\infty[$, il y a k caisses et on suppose que chaque voiture choisit aléatoirement et indépendament des autres une des caisse. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le nombre de voitures qui passent à la caisse numéro 1 en une heure.

IV Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

IV. A Définitions et propriétés

Définition 4.1 (Espérance d'une VA positive)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. L'espérance de X, notée $\mathrm{E}(X)$ est la somme dans $[0\,;+\infty]$ de la famille $\big(x\,\mathrm{P}(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathrm{P}(X = x).$$

Remarque 4.2 : Par convention, si $P(X = +\infty) = 0$, alors $+\infty \times \mathrm{P}(X = +\infty) = 0$.

Proposition 4.3

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geqslant n).$$

Définition 4.4

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que X est **d'espérance finie** lorsque la famille $\big(x\,\mathrm{P}(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas, on appelle **espérance de X** la somme de cette famille :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathrm{P}(X = x).$$

Notation : On note $X \in L^1$ lorsque X est une variable aléatoire discrète réelle ou complexe d'espérance finie.

Remarques 4.5 :
- Soit X une variable aléatoire discrète. Si X est positive, alors elle possède une espérance finie ou infinie. Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors soit elle a une espérance finie, soit elle n'a pas d'espérance.
- Si X est une variable aléatoire fini (en particulier si Ω est fini), alors X a une espérance finie.

Définition 4.6

Une variable aléatoire discrète est dite **centrée** lorsqu'elle est d'espérance finie et que son espérance est nulle.

Exemples 4.7 :
- Espérance des loi usuelles finies.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité discrète. Une variable aléatoire discrète X de loi associée à cette distribution de probabilité a-t-elle une espérance ?

IV. B Espérance des lois usuelles

Proposition 4.8

Si une variable aléatoire discrète X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$, alors X a une espérance finie et $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Proposition 4.9

Si une variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors X a une espérance finie et $\mathrm{E}(X) = \lambda$.

IV. C Propriétés de l'espérance

Théorème 4.10 (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète et $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$.
La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,\mathrm{P}(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et dans ce cas :

$$\mathrm{E}\left(f(X)\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathrm{P}(X=x).$$

Remarques 4.11 :

- La formule de transfert permet le calcul de l'espérance de $f(X)$ sans avoir à déterminer sa loi, il suffit de connaître la loi de X.
- Si f est définie sur un ensemble E qui contient $X(\Omega)$, on peut remplacer la famille $\big(f(x)\,\mathrm{P}(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ par la famille $\big(f(x)\,\mathrm{P}(X=x)\big)_{x\in E}$ (on ajoute des éléments nuls).
- Dans ce théorème f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais X est une variable aléatoire discrète quelconque, elle peut en particulier être un couple de variables aléatoires discrètes (cf espérance du produit).

Théorème 4.12 (Inégalité triangulaire)

Soit X est une variable aléatoire discrète complexe.
Alors X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie et dans ce cas :

$$\big|\mathrm{E}(X)\big| \leqslant \mathrm{E}\left(|X|\right).$$

Proposition 4.13

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes, respectivement complexes et positives telles que $|X| \leqslant Y$.
Si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Théorème 4.14 (Linéarité de l'espérance)

Soit X et Y des variables aléatoires discrètes complexes d'espérance finie et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathrm{E}(X) + \mu\,\mathrm{E}(Y).$$

Proposition 4.15 (Positivité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète positive, alors : $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.
De plus, si X est positive et $\mathrm{E}(X) = 0$, alors $X = 0$ presque sûrement.

Proposition 4.16 (Croissance de l'intégrale)

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes d'espérance finie telles que $X \leqslant Y$.
Alors :

$$\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y).$$

De plus si $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$, alors $X = Y$ presque sûrement.

Théorème 4.17 (Espérance du produit de variables indépendantes)

Soit X et Y des variables aléatoires discrètes complexes **indépendantes** et d'espérance finie.
Alors XY est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X) \times \mathrm{E}(Y).$$

Généralisation à n variables aléatoires indépendantes.

Proposition 4.18

Soit $X_1, \dots, X_n$des variables aléatoires discrètes complexes d'espérance finie et indépendantes.
Alors $\prod_{k=1}^{n} X_k$ est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k)$$

V Variance d'une variable aléatoire réelle

Dans cette section, les variables aléatoires sont réelles.

V. A Définition et propriétés

Proposition 5.1

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.
Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Notation : On note $X \in L^2$ lorsque X est une variable aléatoire discrète réelle telle que X^2 est d'espérance finie.

Théorème 5.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit X et Y des variables aléatoires discrètes réelles, si X et Y sont dans L^2, alors XY est dans L^1 et :
$$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2) \times \mathrm{E}(Y^2)$$
avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda Y$ ou $Y = \lambda X$ presque sûrement.

Définition 5.3

Soit $X \in L^2$, on appelle **variance** de X le réel positif :
$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right).$$

Remarque 5.4 : La variance mesure la dispersion de X par rapport à sa moyenne.

Proposition 5.5

Soit $X \in L^2$; $\mathrm{V}(X) = 0$ si et seulement si X est constante presque sûrement, i.e. si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(X = a) = 1$.

Théorème 5.6 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit $X \in L^2$:
$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2.$$

Proposition 5.7

Soit $X \in L^2$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $aX + b \in L^2$ et :
$$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X).$$

Définition 5.8

Soit $X \in L^2$, on appelle **écart type** de X le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

Définition 5.9

Soit $X \in L^2$, on dit que X est réduite lorsque $\mathrm{V}(X) = 1$.

Proposition 5.10

Soit $X \in L^2$, si $\sigma(X) > 0$, alors la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

V. B Variance des lois usuelles

Proposition 5.11

Si une variable aléatoire discrète X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$, alors $X \in L^2$ et $\mathrm{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Proposition 5.12

Si une variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $X \in L^2$ et $\mathrm{V}(X) = \lambda$.

V. C Covariance

Définition 5.13

Soit X et Y dans L^2. Alors $\big(X - \mathrm{E}(X)\big)\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big) \in L^1$ et on appelle **covariance** de X et Y le réel :
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)\Big).$$

Remarque 5.14 : Pour $X \in L^2, \mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{V}(X)$.

Théorème 5.15 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X et Y dans L^2, alors :
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$

Proposition 5.16

Si X et Y sont dans L^2 et sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Définition 5.17

Deux variable aléatoire X et Y sont dites **décorrélées** lorsqu'elles sont dans L^2 et que leur covariance est nulle.

V. D Variance d'une somme

Théorème 5.18

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dans L^2, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ est dans L^2 et :

$$\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Proposition 5.19

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dans L^2 deux à deux décorrélées, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ est dans L^2 et :

$$\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(X_k).$$

Remarque 5.20 : La formule est vraie en particulier si les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes, et a fortiori si elles sont indépendantes.

VI Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

VI. A Inégalités probabilistes

Théorème 6.1 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive d'espérance finie et $a > 0$, alors :

$$\mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(X)}{a}.$$

Théorème 6.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle dans L^2 et $\varepsilon > 0$, alors :

$$\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque 6.3 : On retrouve le fait que la variance mesure la dispersion de la variable aléatoire.

VI. B Loi faible des grands nombres

Théorème 6.4 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles i.i.d. (indépendantes de même loi) sur le même espace probabilisé et de variance finie.

On pose $m = \mathrm{E}(X_1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathrm{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geqslant \varepsilon \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Remarque 6.5 : La loi faible des grands nombres fait le lien entre la moyenne théorique $\mathrm{E}(X_1)$ et les moyennes observables pour n répétitions.

VII Fonctions génératrices

VII. A Définition et propriétés

Définition 7.1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle **fonction génératrice de X** la fonction G_X de la variable réelle définie par :

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n) t^n.$$

Remarque 7.2 : D'après la formule de transfert, pour $t \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire t^X a une espérance finie si et seulement si la famille $(t^n \, \mathrm{P}(X = n))_{n \in X(\Omega)}$ est sommable et dans ce cas,

$$\mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n) t^n.$$

Proposition 7.3

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La série entière $\sum \mathrm{P}(X = n) t^n$

- est de rayon de convergence supérieur (ou égal) à 1 ;
- elle converge normalement sur $[-1 ; 1]$;
- G_X est continue sur $[-1 ; 1]$.
- G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence.

Remarque 7.4 : Si X est une variable aléatoire fini à valeurs entières, alors G_X est une fonction polynomiale.

Proposition 7.5

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la loi de X est déterminée de manière unique par G_X. Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Deux variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont la même loi si et seulement si elles sont la même fonction génératrice.

Théorème 7.6

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance fini si et seulement si G_X est dérivable en 1 et dans ce cas :

$$\mathrm{E}(X) = G_X'(1).$$

Proposition 7.7

Une X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dans L^2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas, $G''(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$.

Corollaire 7.8

Si la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est deux fois dérivable en 1, alors $X \in L^2$ et :

$$\mathrm{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$

VII. B Fonctions génératrices des lois usuelles

Les formules ne sont pas nécessairement à connaître, mais à savoir calculer rapidement.

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $G_X(t) = q + pt$.
  Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}, G_X'(t) = p$ et $G_X''(t) = 0$
  et on retrouve, $\mathrm{E}(X) = p, \mathrm{V}(X) = p(1-p)$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, variable aléatoire finie, donc G_X définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (q+pt)^n$.
  D'où, $\forall t \in \mathbb{R}, G_X'(t) = np(q+pt)^{n-1}, G_X''(t) = n(n-1)p^2(q+pt)^{n-2}$.
  Et : $\mathrm{E}(X) = np, \mathrm{V}(X) = np(1-p)$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, la série $\sum \mathrm{P}(X=n)t^n = \sum_{n\geqslant 1} pt(qt)^{n-1}$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{q} > 1$ et

$$\forall t \in \left]-R\,;R\right[, G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$$

  et $\forall t \in \left]-R\,;R\right[$,

$$G_X'(t) = \frac{p}{(1-qt)^2} \text{ et } G_X''(t) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}$$

  Donc :

$$\mathrm{E}(X) = G_X'(1) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{E}(X(X-1)) = G_X''(1) = \frac{2q}{p^2} \text{ et } \mathrm{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, la série $\sum \mathrm{P}(X=n)t^n = \sum e^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}, G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \text{ et } G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}.$$

  D'où : $\mathrm{E}(X) = G_X'(1) = \lambda, \mathrm{E}(X(X-1)) = G_X''(1) = \lambda^2$ et $\mathrm{V}(X) = \lambda$.

VII. C Somme de variables aléatoires indépendantes

Théorème 7.9

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Alors, pour tout t tel que $G_{X_k}(t)$ est défini pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$,

$$G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t).$$

Exemples 7.10 :
- Soit $X_1, \dots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes telles que : $\forall i \in [\![1\,;k]\!], X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$ et $X = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. Montrer que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$.
- Soit $X_1, \dots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes telles que : $\forall i \in [\![1\,;k]\!], X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ et $X = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. Montrer que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

VIII Bilan lois usuelles