Chapitre 28

Matrices et applications linéaires

Dans tout ce chapitre, on fixe un corps commutatif K (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Tous les espaces vectoriels seront des K-espaces vectoriels. On fixe également trois K-espaces vectoriels E, F et G de dimension respective $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et

$$B_E = (e_1, \ldots, e_p), \qquad B_F = (f_1, \ldots, f_n), \qquad B_G = (g_1, \ldots, g_q)$$

des bases de E, F et G.

On rappelle également que $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est un K-espace vectoriel de dimension np. En effet, les np matrices élémentaires

$$\left(E_{ij}^{np}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

forment une base de $\mathcal{M}_{np}(K)$.

Enfin, on rappelle que la *base canonique* de K^n est la base

$$\Big((1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\Big),$$

et que celle de $K_n[X]$ est

$$\Big(1, X, \ldots, X^n\Big).$$

1 Matrice d'une application linéaire

1.1 Matrices de composantes

Définition 1.1 (Matrice des composantes)

Soit

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E.$$

La *matrice des composantes* de x dans la base B_E est la matrice colonne

$$\mathrm{Mat}_{B_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K).$$

Remarque.

La matrice des composantes d'un vecteur dépend bien entendu de la base que l'on considère.

Proposition 1.2

L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(K) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{B_E}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels. On a donc en particulier, si $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in K$,

$$\mathrm{Mat}_{B_E}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathrm{Mat}_{B_E}(x) + \mu \mathrm{Mat}_{B_E}(y)$$

et

$$x = y \iff \mathrm{Mat}_{B_E}(x) = \mathrm{Mat}_{B_E}(y).$$

Définition 1.3 (Matrice des composantes d'une famille de vecteurs)

Soient $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_r)$ une famille de vecteurs de E. La *matrice des composantes* de $\mathcal{F}$ dans la base B_E est la matrice

$$\mathrm{Mat}_{B_E}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{p,r}(K)$$

dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\mathrm{Mat}_{B_E}(v_j)$. Autrement dit, si

$$\mathrm{Mat}_{B_E}(\mathcal{F}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant r}},$$

alors a_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ composantes de v_j, ou encore

$$\forall\, j = 1, \ldots, r, \quad v_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i.$$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.4 (Matrice d'une application linéaire)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Sa *matrice relative aux bases B_E et B_F* (ou *dans les bases*, ou *par rapport aux bases*) est la matrice

$$\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

des composantes de la famille

$$\big(u(e_1), \ldots, u(e_p)\big) = u\big(B_E\big)$$

dans la base B_F, *i.e.*

$$\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u) = \mathrm{Mat}_{B_F}\big(u(e_1), \ldots, u(e_p)\big) = \mathrm{Mat}_{B_F}\big(u(B_E)\big).$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u) = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}},$$

si et seulement si on a pour tout $j = 1, \ldots, p$,

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

2. Lorsque $E = F$, $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle matrice de u relative à la base B_E la matrice de u relative aux bases B_E et B_E.

Remarques.

1. Attention : il n'y a pas une seule matrice d'une application linéaire ! Il y en a une pour chaque couple de bases de E et F.
2. Il faut bien comprendre que la j-ème colonne contient les composantes de $u(e_j)$, et plus précisément, la composante de $u(e_j)$ devant e_i est a_{ij}.

Remarque.

On dit souvent que *les colonnes de A forment une famille génératrice de Im(f)*. C'est un abus de language, qui signifie les vecteurs de F dont les composantes sont données par les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 1.5

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(K) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, pour tous $u, u' \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda, \lambda' \in K$, on a

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(\lambda u + \lambda' u') = \lambda \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) + \lambda' \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u')$$

et

$$u = u' \iff \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u').$$

Remarques.

1. La matrice d'une application linéaire dépend des bases de E et F que l'on considère.
2. Cet isomorphisme n'existe qu'une fois des bases de E et F fixées.
3. On en déduit que $\mathcal{L}(E,F)$ est un K-espace vectoriel de dimension np.

Corollaire 1.6

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $u = v \iff \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(v)$.

Corollaire 1.7 (Isomorphisme Canonique)

L'application

$$\mathcal{L}(K^p, K^n) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

qui à une application linéaire $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ associe sa matrice relative aux bases canoniques de K^p et K^n, est un isomorphisme, appelé isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(K^p, K^n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$, sa matrice relative aux bases canoniques de K^p et K^n s'appelle la *matrice canoniquement associée à u*.

Réciproquement, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, l'unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ dont la matrice relative aux bases canoniques de K^p et K^n est A s'appelle *l'application linéaire canoniquement associée à* A.

En particulier, si $p = n$, on a un isomorphisme $\mathcal{L}(K^n) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$, et on parle alors *d'endomorphisme* canoniquement associé à une matrice.

Remarque.
On verra qu'à l'usage ce corollaire est très utile. Il permettra de transformer un problème matriciel en problème d'application linéaire et vice-versa par *identification* de ces espaces.

1.3 Propriétés

Proposition 1.8

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$, $y = u(x) \in F$, et

$$A = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(K), \qquad X = \mathrm{Mat}_{B_E}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(K), \qquad Y = \mathrm{Mat}_{B_F}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(K).$$

Alors

$$Y = AX.$$

Remarque.
Cette formule permet de facilement calculer les composantes de l'image d'un vecteur grâce à la matrice de l'application linéaire.

Proposition 1.9

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_G}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{B_F,B_G}(v) \times \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u).$$

Remarque.
Faîtes très attention à ne pas faire d'erreur dans cette formule. L'ordre d'apparition de B_E et B_G est inversé dans un membre par rapport à l'autre ! Mais par contre, B_E est toujours la base de l'espace de départ, et B_G celle de l'espace d'arrivée.

2 Le groupe $GL_n(K)$

Proposition 2.1

Si $p = n$ (*i.e.* $\dim(E) = \dim(F)$), $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u)$ est inversible, et dans ce cas

$$\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(u^{-1}) = \Big(\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u)\Big)^{-1}.$$

Proposition 2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(K),\ AX = 0 \Longrightarrow X = 0.$$

Alors A est inversible.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2.7 du chapitre **??**. On redonne quand même l'énoncé.

Proposition 2.3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = I_n$. Alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$.

Proposition 2.4

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E (avec $p = \dim(E)$). Alors $\mathrm{Mat}_{B_E}(\mathcal{F})$ est inversible si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

Remarque.

Attention, le nombre de vecteurs doit être égal à la dimension de E, sinon la matrice n'est même pas carrée.

3 Formules de changement de base

Définition 3.1

Soient B et B' deux bases de E. La *matrice de passage* $P_{B,B'}$ de B à B' est la matrice des composantes de la famille B' dans la base B, *i.e.*

$$P_{B,B'} = \mathrm{Mat}_B(B') \in \mathcal{M}_p(K),$$

ou encore la $j^{\text{ème}}$ colonne de $P_{B,B'}$ contient les composantes du $j^{\text{ème}}$ vecteur de B' dans la base B.

Remarque.

On parle de l'ancienne base (B), et de nouvelle base (B'), et $P_{B,B'}$ exprime la nouvelle base dans l'ancienne.

Proposition 3.2

Avec les notations de la définition 3.1, les matrices $P_{B,B'}$ et $P_{B',B}$ sont inversibles et

$$P_{B',B} = P_{B,B'}^{-1}.$$

De plus, si B'' est une troisième base de E, on a

$$P_{B,B''} = P_{B,B'}P_{B',B''}.$$

Proposition 3.3

Avec les notations de la définition 3.1 :

1. Si $x \in E$, et si X (resp. X') sont les composantes de x dans la base B (resp. B'), alors

$$X = P_{B,B'}X'.$$

2. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de $p(= \dim(E))$ vecteurs de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = P_{B,B'}\mathrm{Mat}_{B'}(\mathcal{F}).$$

Remarques.

1. On parle d'anciennes et de nouvelles composantes.
2. Attention au piège : $P_{B,B'}$ exprime la nouvelle base dans l'ancienne, mais

$$X = P_{B,B'}X'$$

exprime les anciennes composantes en fonction des nouvelles.

Théorème 3.4 (Formule de changement de base)

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, B'_E et B'_F des bases de E et F,

$$P = P_{B_E,B'_E}, \qquad Q = P_{B_F,B'_F}, \qquad A = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u), \qquad A' = \mathrm{Mat}_{B'_E,B'_F}(u).$$

Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, B'_E une base de E, $P = P_{B_E,B'_E}$, $A = \mathrm{Mat}_{B_E}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{B'_E}(u)$. Alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

4 Trace d'un endomorphisme

Proposition 4.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $\mathrm{tr}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f))$.

Définition 4.2 (Trace d'un endomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit la trace $\mathrm{tr}(f)$ de f par la trace de sa matrice relative à n'importe qu'elle base.

Proposition 4.3

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in K$. Alors $\mathrm{tr}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathrm{tr}(f) + \mu\,\mathrm{tr}(g)$, *i.e.* la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 4.4 (Trace d'une projection)

Soit p une projection de E. Alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rang}(p)$.

Proposition 4.5 (Trace d'une symétrie)

Soit s une symétrie de E. Alors $\mathrm{tr}(s) = \dim(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)) - \dim(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E))$.

Proposition 4.6

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$.

Remarque.

Attention : $\mathrm{tr}(f \circ g) \neq \mathrm{tr}(f)\,\mathrm{tr}(g)$! !

5 Rang d'une matrice

5.1 Définitions

Rappelons la définition déjà vue :

Définition 5.1

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes vues comme vecteurs de K^n. Le *rang colonnes* de M est l'entier

$$\mathrm{rang}(M) = \dim(\mathrm{vect}(C_1, \dots, C_p)) = \mathrm{rang}(C_1, \dots, C_p).$$

De même pour le rang lignes, mais dans K^p.

Proposition 5.2

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. Alors

$$\mathrm{rang}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{rang}\Big(\mathrm{Mat}_{B_E}(x_1, \dots, x_n)\Big).$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{rang}(u) = \mathrm{rang}\Big(\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u)\Big).$$

Corollaire 5.3

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(K)$ est inversible si et seulement si son rang colonne est p.

5.2 Rang et manipulations élémentaires

Proposition 5.4

1. Le rang d'une matrice ne change pas lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.
2. Les maniupulations élémentaires ne changent pas le rang d'une matrice.

Proposition 5.5

Soient $r \leqslant \min(n,p)$ et

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & \star & \star & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & m_2 & \star & \star & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & \ddots & \star & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_r & \star & \cdots & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1p-r} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{n-r1} & \cdots & b_{n-rp-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$$

où $m_1, \dots, m_r$ sont non nuls et $\star$ désigne un élément quelconque de K, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n-rp-r}(K)$. Alors

$$\text{rang}(A) = r + \text{rang}(B).$$

5.3 Matrice J_r

Définition 5.6

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ fixé et $r \leqslant \min(n,p)$, on définit la matrice

$$J_r^{n,p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K),$$

avec exactement r 1 sur la diagonale.

Proposition 5.7

Le rang de $J_r^{n,p}$ est r.

Proposition 5.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $r \leqslant \min(n,p)$. Alors le rang de A est r si et seulement s'il existe $P \in \text{GL}_p(K)$ et $Q \in \text{GL}_n(K)$ telles que

$$A = QJ_rP.$$

Proposition 5.9

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}({}^tA),$$

ou encore les rangs colonnes et lignes sont égaux.