Chapitre 12

Suites réelles et complexes

Jusqu'au §8, on ne considère que des suites réelles.

1 Généralités

Définition 1.1

Une suite (réelle) est une application

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u(n)$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles, et la suite u se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

Rappels :

1. On peut ajouter et multiplier deux suites : pour $(u_n), (v_n)v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit pour tout entier n

$$(u+v)_n = u_n + v_n, \qquad (\lambda \cdot u)_n = \lambda u_n, \qquad (uv)_n = u_n v_n.$$

2. Rappelons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$, et décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$. Dans le cas où la suite est à termes **strictement positifs**, la suite est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$$

3. La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).

4. Une suite (u_n) est *constante* si $u_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et *stationnaire* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$, *i.e.* si (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

5. Les suites constantes sont les seules à être à la fois croissante et décroissante.

6. La suite arithmétique de premier terme $a \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$ est la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_0 = a,$$

ou de manière équivalente par

$$u_n = a + nr.$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Une telle suite est strictement croissante si $r > 0$, constante si $r = 0$, et strictement décroissante si $r < 0$.

7. La suite géométrique de premier terme $a \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}$ est la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_{n+1} = qv_n \quad \text{et} \quad v_0 = a,$$

ou de manière équivalente par

$$v_n = aq^n.$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n} v_n = a\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \ \text{ si } \ q \neq 1, \quad (n+1)a \ \text{ sinon.}$$

Une telle suite est croissante si $a \geqslant 0$ et $q \geqslant 1$, décroissante si $a \leqslant 0$ et $q \geqslant 1$, *etc...*

8. Une suite (u_n) est majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant M$ (resp. $M \leqslant u_n$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, ou encore si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Définition 1.2

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une *suite extraite* (ou *sous-suite*) de (u_n) est une suite (v_n) telle qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Remarque.

On note souvent une sous-suite de la façon suivante :

$$(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}},$$

et on a donc $\varphi(n) = k_n$.

Remarque.

Comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout entier n.

2 Convergence, divergence et divergence vers l'infini

2.1 Convergence et divergence

Définition 2.1 (Suite convergente)

Une suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

ou plus formellement :

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Le réel ℓ est alors unique et est la limite de (u_n), qui est notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Méthode 2.2

Si une suite $(u_n)_n$ vérifie une proriété P_1 à partir du rang n_1, et une propriété P_2 à partir du rang n_2, alors elle vérifie les propriétés P_1 et P_2 à partir du rang $\max(n_1, n_2)$.

Méthode 2.3

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on utilisera en général les théorèmes qui suivent. Mais parfois, il faut revenir à la définition, et la méthode est alors la suivante.

On essaye de deviner la limite ℓ, puis on choisit un $\varepsilon > 0$ quelconque, et on démontre que pour cet epsilon là, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. La démonstration étant faite pour un epsilon quelconque, elle est valable pour tous les epsilons > 0, donc la suite converge bien vers ℓ.

Remarque.

Il est important de noter que pour montrer qu'une suite converge vers un certain réel, il suffit de montrer la relation de la définition pour tous les $\varepsilon > 0$ plus petit par exemple que 1 (ou $\sqrt{2}$, ou tout réel > 0). Ce sont les "petites" valeurs de ε qui comptent, c'est à dire (par exemple) que si u est une suite et $\ell \in \mathbb{R}$, on a

$$\Big(\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\Big) \iff \Big(\forall\, \varepsilon \in]0,1],\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\Big).$$

De même, si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\Big(\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\Big) \iff \Big(\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < a\varepsilon\Big).$$

Définition 2.4 (Suite divergente)

Une suite (u_n) est divergente si elle n'est pas convergente, *i.e.* si

$$\forall\, \ell \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

Remarque.

La négation de l'implication donne plutôt

$$\forall\, \ell \in \mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Mais les deux sont équivalents. On utilise en général l'inégalité large.

Proposition 2.5

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Méthode 2.6

Pour montrer qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on montre (presque) toujours que la suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0. Pour cela, on majore $|u_n - \ell|$.

Définition 2.7 (À partir d'un certain rang)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété P à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie la propriété P.

Proposition 2.8

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si (v_n) converge vers 0 et si $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge vers ℓ.

2. Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Remarque.

La réciproque du 2 est fausse : $((-1)^n)$.

Méthode 2.9

Soit une suite (u_n), un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, un réel ℓ et un réel $\lambda \in [0, 1[$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \lambda |u_n - \ell|$. On montre alors par récurrence sur $n \geqslant n_0$ que $|u_n - \ell| \leqslant \lambda^{n-n_0} |u_{n_0} - \ell|$, et donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 2.10

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite convergente vers ℓ. Si $\ell > a$ (resp. $\ell < a$), alors $u_n > a$ (resp. $u_n < a$) à partir d'un certain rang.

Corollaire 2.11

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers un réel ℓ. Si $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$), la suite $(u_n)_n$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel > 0 (resp. majorée à partir d'un certain rang par un réel < 0). En particulier, si $\ell \neq 0$, la suite $(|u_n|)_n$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel > 0.

Remarques.

1. Attention, le résultat est faux si $\ell = 0$, comme le prouve l'exemple de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Il faut bien faire la différence entre

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$

et

$$\exists\, a > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a.$$

La deuxième affirmation implique la première, mais la réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

En particulier, dans le deuxième cas, on pourra étudier la limite de $(1/u_n)$.

Corollaire 2.12

Toute suite convergente est bornée.

Remarque.

La réciproque est évidemment fausse, comme le prouve l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2 Suites divergentes vers l'infini

Définition 2.13

Une suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N,\ u_n \geqslant A,$$

et elle tend vers $-\infty$ si

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N,\ u_n \leqslant A.$$

Remarque.

Dans le cas de $+\infty$, on peut remplacer "$A \in \mathbb{R}$" par "$A \geqslant 0$" ou "$A \geqslant a$" où a et un réel fixé, et dans le cas de $-\infty$, on peut remplacer "$A \in \mathbb{R}$" par "$A \leqslant 0$" ou "$A \leqslant a$" où a et un réel fixé.

Proposition 2.14

Une suite divergente vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est minorée (resp. majorée).

3 Opérations sur les limites

3.1 Combinaisons linéaires et produit

Proposition 3.1

1. Le produit d'une suite bornée par une suite convergente vers 0 est une suite convergente vers 0.

2. En particulier, Le produit d'une suite convergente par une suite convergente vers 0 est une suite convergente vers 0.

Proposition 3.2

1. Les combinaisons linéaires et les produits de suites bornées sont des suites bornées.

2. Les combinaisons linéaires et les produits de suites convergentes vers 0 sont des suites convergentes vers 0.

3. Les combinaisons linéaires et les produits de suites convergentes sont des suites convergentes. De plus, si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim_{n\to+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = (\lim_{n\to+\infty} u_n)(\lim_{n\to+\infty} v_n).$$

Proposition 3.3

La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

Remarque.

La somme ou le produit de deux suites divergentes est indéterminé. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-1)^{n+1}$, la suite $(u_n) + (u_n)$ est divergente et la suite $(u_n) + (v_n)$ est convergente.

3.2 Somme/produit avec une suite divergente vers l'infini

Proposition 3.4

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (v_n) minorée. Alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corollaire 3.5

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (v_n) convergente. Alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition 3.6

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (v_n) minorée un réel strictement positif. Alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Corollaire 3.7

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (v_n) convergente vers un réel strictement positif. Alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Méthode 3.8

1. Lorsqu'on a affaires à une suite (u_n) divergente vers $-\infty$, on peut considérer $(-u_n)$ pour appliquer les propositions précédentes.

2. On peut aussi utiliser cette proposition avec la suite $(|u_n|)_n$ lorsque celle-ci tend vers $+\infty$.

3.3 Inverse d'une suite

Proposition 3.9 (Inverse d'une suite)

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers un réel $\ell \neq 0$. Alors la suite $(u_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0, et la suite

$$\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$$

est convergente vers $1/\ell$.

Proposition 3.10

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la suite $(1/u_n)_n$ est bien définie à partir d'un certain rang et converge vers 0.

2. Si la suite $(u_n)_n$ est > 0 (resp < 0) à partir d'un certain rang, et converge vers 0, la suite $(1/u_n)_n$ est bien définie à partir d'un certain rang et tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

3. Si la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et converge vers 0, alors la suite $(1/|u_n|)_n$ est dien définie à partir d'un certain rang et converge vers $+\infty$.

Remarque.

Si $(u_n)_n$ tend vers 0 mais n'est pas de signe constant, on ne peut rien dire. Par exemple, si $u_n = (-1)^n/n$, $1/u_n = (-1)^n n$ qui ne tend ni vers $-\infty$, ni vers $+\infty$.

3.4 Compatibilité avec les inégalités

Proposition 3.11 (Conservation des inégalités larges par passage à la limite)

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Remarques.

1. C'est faux pour les inégalités strictes, puisque par exemple pour tout $n > 0$, on a

$$\frac{1}{n} > 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Quand on utilise cette proposition, on dit qu'"on passe à la limite dans l'inégalité".

Méthode 3.12

Soient $(u_n$ et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang. On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n$. ATTENTION : on ne peut pas passer à la limite dans une inégalité stricte.

— On peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq \lim_{n\to+\infty} v_n$. Comme on sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$, on aura le résultat voulu.

— On peut montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + a \leqslant v_n$. On aura alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + a \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n$.

Méthode 3.13

— Si (u_n) est croissante et convergente, et il faut montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n > a$ (où $a \in \mathbb{R}$), il suffit de montrer que $u_0 > a$.

— Si (u_n) est strictement croissante et convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n > u_0$, et même, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n > u_{n_0}$.

Proposition 3.14

Soient $a < b$ des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $[a, b]$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [a, b]$.

Théorème 3.15 (Théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_n, (w_n)_n$ deux suites convergentes ayant même limite $\ell \in \mathbb{R}$, et $(v_n)_n$ une suite telle que

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

à partir d'un certain rang. Alors la suite $(v_n)_n$ est convergente et converge vers ℓ.

Théorème 3.16 (Théorème de comparaison)

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$.

1. Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

3.5 Suites extraites d'une suite convergente ou divergente vers l'infini

Proposition 3.17

Soit (u_n) une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors toute suite extraite de (u_n) est convergente vers ℓ.

Remarques.

1. La réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont les suites extraites d'indices pairs et impairs sont convergentes.
2. On utilise souvent cette proposition pour montrer qu'une suite n'est pas convergente, en exhibant une sous-suite qui ne converge pas ou des sous-suites convergentes vers des limites différentes. Par exemple, si $u_n = \sin(n\pi/2)$, la sous-suite d'indices impairs ne converge pas, donc (u_n) ne converge pas.

Proposition 3.18

Soit (u_n) une suite dont les sous-suites d'indices pairs et impairs sont convergentes et ont même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors (u_n) converge vers ℓ.

Proposition 3.19

Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Toute suite extraite de (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

4 Suites particulières

4.1 Suites arithmetico-géométriques

Définition 4.1 (Suites arithmetico-géométriques)

Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite arithmetico-géométrique s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

On fixe une telle suite dans ce qui suit.

Proposition 4.2

1. Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique.
2. Si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique.

Méthode 4.3 (Étude d'une suite arithmético-géométrique)

On suppose $a \neq 1$.

1. On résout l'équation $x = ax + b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On note $\ell = \frac{b}{1-a}$ l'unique solution.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$. On montre qu'elle est géométrique de raison a.
3. On en déduit une expression de u_n en fonction de n, a et b.

Proposition 4.4

Avec les notations précédentes, la suite (u_n) converge si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

1. $|a| < 1$, et sa limite est $\frac{b}{1-a}$.
2. $a \neq 1$ et $u_0 = \frac{b}{1-a}$: la suite est constante.
3. $a = 1$ et $b = 0$: la suite est constante.

4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 4.5

Une suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'équation $x^2 - ax - b = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ est l'équation caractéristique de la suite.

Proposition 4.6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, et (u_n) une suite telle que pour tout entier n, on ait

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit (E) son équation caractéristique.

1. Si (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = x r_1^n + y r_2^n.$$

2. Si (E) admet une solution double r, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (x + yn) r^n.$$

3. Si P admet deux solutions complexes non réelles conjuguées $re^{\pm i\theta}$ $(r \in \mathbb{R}_+^*)$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n(x\cos(n\theta) + y\sin(n\theta)).$$

5 Caractérisations séquentielles

5.1 Caractérisation séquentielle des bornes supérieures/inférieures

Proposition 5.1

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Alors

1. $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si et seulement si M est un majorant de A et s'il existe une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$.

2. $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A si et seulement si m est un minorant de A et s'il existe une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = m$.

Proposition 5.2

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Alors A n'est pas majoré (resp. minoré) si et seulement s'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque.

On aurait pu faire les deux propositions 5.1 et 5.2 en même temps en parlant de bornes supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

5.2 Caractérisation séquentielle de la densité

Proposition 5.3

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dense si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers x.

6 Théorèmes de convergence

6.1 Suites monotones

Définition 6.1 (Borne supérieure/inférieure d'une suite)

Soit (u_n) une suite réelle. Les bornes supérieure et inférieure de (u_n) sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On les note $\sup u_n$ et $\inf u_n$.

Remarque.

Elles existent toujours, mais $\sup u_n$ peut valoir $+\infty$, et $\inf u_n$ peut valoir $-\infty$.

Proposition 6.2

Une suite réelle $(u_n)_n$ est majorée (resp. minorée) si et seulement si $\sup u_n < +\infty$ (resp. $\inf u_n > -\infty$).

Théorème 6.3 (Théorème de la limite monotone)

Soit (u_n) une suite croissante (resp. décroissante). Alors (u_n) est convergente si et seulement si elle est majorée, et alors sa limite est

$$\sup_n(u_n) \quad \Big(\text{resp.} \quad \inf_n(u_n)\Big).$$

Sinon,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \Big(\text{resp.} \quad -\infty\Big).$$

Méthode 6.4

Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs. Alors la suite (S_n) de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante.

Pour montrer qu'elle converge, on peut utiliser les techniques vues au chapitre 5 pour montrer qu'elle est majorée.

6.2 Suites adjacentes

Définition 6.5 (Suites adajcentes)

Deux suites $(u_n), (v_n)$ sont adjacentes si

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont monotones de sens contraire.
2. La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Proposition 6.6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes avec (u_n) croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$.

Théorème 6.7

Deux suites adjacentes $(u_n), (v_n)$ sont convergentes et ont même limite. De plus, si $\ell \in \mathbb{R}$ est cette limite commune, et (u_n) est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Remarque.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont des valeurs approchées de la limite ℓ, resp. par défaut et par excès, et que l'erreur commise est majorée en valeur absolue par $v_n - u_n$.

Méthode 6.8

Si (u_n) est une suite décroissante qui converge vers 0, la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ s'étudie en considérant les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}), qui sont adjacentes.

6.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 6.9 (Théorème des segments emboités)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ dont la longueur tend vers 0 et telle que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide et réduite à un point. De plus, si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ et si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I_n$, la suite (u_n) converge vers ℓ.

Remarque.

C'est faux lorsque les intervalles ne sont pas des segments. L'exemple des intervalles $]0, 1/n]$ le prouve. Si leur intersection était non vide, elle ne pourrait contenir que 0, qui est la limite de la suite des $1/n$. Mais 0 n'est dans aucun de ces intervalles. Le problème ici est que les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite.

Théorème 6.10 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

7 Suites récurrentes

Dans ce paragraphe, on étudie les suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

7.1 Définitions

Définition 7.1 (Intervalle stable par une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.

Définition 7.2 (Point fixe d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Un point fixe de f est un réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Proposition 7.3 (Suite récurrente)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, stable par f. La suite (u_n) définie par

$$u_0 \in I, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

est bien définie, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Remarques.

1. Ne pas confondre avec les suites du type $u_n = f(n)$.
2. La fonction f s'appelle la fonction d'itération de (u_n).

Dans toute la suite du paragraphe 7, on fixe une fonction f définie sur un intervalle I stable par f, et une suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

7.2 Propriétés générales

Proposition 7.4

Si I est borné, la suite (u_n) est bornée.

Proposition 7.5

On suppose que f est **continue** sur I.

1. Si la suite (u_n) est convergente vers $\ell \in I$, alors ℓ est un point fixe de f.
2. Si I est un segment et si (u_n) converge, alors sa limite ℓ est un point fixe de f.

Proposition 7.6

— Si $f(x) - x \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, la suite (u_n) est croissante.
— Si $f(x) - x \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, la suite (u_n) est décroissante.

7.3 Cas d'une fonction croissante

Proposition 7.7

Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone. Plus précisément :
— si $u_0 \leqslant u_1$, (u_n) est croissante.
— si $u_0 \geqslant u_1$, (u_n) est décroissante.

Corollaire 7.8

On suppose f **continue** et **croissante**. Alors
— Si (u_n) est bornée, elle est convergente.
— Si l'intervalle I est borné, la suite (u_n) est convergente.

7.4 Cas d'une fonction décroissante

Proposition 7.9

Si f est décroissante, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Plus précisément,

— Si $u_0 \leqslant u_2$, alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante.

— Si $u_0 \geqslant u_2$, alors (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

Proposition 7.10

Si f est **continue** et **décroissante**, et si (u_n) est bornée, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers des limites qui sont des points fixes de $f \circ f$, et (u_n) est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.

Méthode 7.11 (Plan d'étude)

On considère une suite (u_n) comme ci-dessus. On l'étudie ainsi :

1. On montre que la fonction f est continue. On fait une étude rapide, et on trace son graphe.

2. On détermine un intervalle I stable par f, qui contient u_0 (ou u_1, u_2).

3. On résout l'équation $f(x) = x$ d'inconuue $x \in I$. Si on peut, on étudie la signe de $f(x) - x$ (parfois, il faut faire une étude de fonction).

4. Si on connait le signe de $f(x) - x$, on connait le signe de $u_{n+1} - u_n$, donc on peut savoir si (u_n) est monotone. Si elle est bornée, elle est convergente, sinon, elle est divergente.

5. Si f est croissante, on peut montrer par récurrence que (u_n) est monotone suivant que $u_0 \leqslant u_1$ ou $u_1 \leqslant u_0$. On finit alors comme ci-dessus.

6. Si f est décroissante, on peut montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones par récurrence. Si elles sont bornées, on sait qu'elles convergent. Il faut alors savoir si elles ont même limite pour savoir si (u_n) converge.

8 Suites complexes

Il n'y a a pas de grande différences avec les suites réelles. On remplace la valeur absolue par le module. Notons qu'il n'y a par contre pas de notion de suite monotone.

Pour toute suite complexe (u_n), on définit les suites $\mathrm{Re}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$ et $\overline{u}$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ (\mathrm{Re}(u))_n = \mathrm{Re}(u_n), \quad (\mathrm{Im}(u)_n = \mathrm{Im}(u_n), \quad (\overline{u})_n = \overline{u_n},$$

et la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont convergentes respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\max\big(|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)|, |\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)|\big) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| + |\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)|.$$

On remarquera que :

1. Il n'y a pas de théorème de comparaison, ni de théorème d'encadrement, puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations algébriques.

2. La suite $(|u_n|)$ est réelle, et si (u_n) converge, alors $(|u_n|)$ aussi, et si la limite de (u_n) est non nulle, $(|u_n|)$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel > 0.

3. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est valable pour les suites complexes : toute suite complexe bornée (au sens du module) admet une sous-suite convergente.

9 Compétences

1. Savoir montrer "à la main" qu'une suite converge vers un réel donné, *i.e.* savoir "trouver le η qui va bien avec le ε".

2. Savoir déterminer la borne supérieure/inférieure d'un ensemble/d'une fonction à l'aide des suites.

3. Connaître les différentes techniques pour montrer qu'une suite est convergente.

4. Dans le cas d'une suite récurrente définie à l'aide d'une fonction continue, connaître l'enchainement des raisonnements à faire.