

# Compléments d'algèbre linéaire

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## I Somme de sous-espaces vectoriels

### I. A Somme de deux sous-espaces vectoriels (rappels)

#### Définition 1.1

Soit  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- Somme de  $F$  et  $G$  :

$$F + G = \{x_F + x_G; \text{ avec } x_F \in F, x_G \in G\}.$$

- La somme  $F + G$  est dite directe lorsque pour tout  $x \in F + G$ , il existe un unique couple  $(x_F, x_G) \in F \times G$  tel que  $x = x_F + x_G$ . Dans ce cas la somme est notée  $F \oplus G$ .
- Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  lorsque :

$$E = F \oplus G.$$

#### Proposition 1.2

Soit  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- $F + G$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $F$  et  $G$ .
- La somme  $F + G$  est directe si et seulement si \_\_\_\_\_.
- $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur  $x \in E$  peut s'écrire de manière unique sous la forme  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

**Remarque 1.3 :** Si on considère l'application  $\varphi : \begin{matrix} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{matrix}$ , alors

- $\varphi$  est une application linéaire et  $\text{Im}(\varphi) =$  \_\_\_\_\_ ;
- $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $\varphi$  est \_\_\_\_\_ ;
- $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si  $\varphi$  est \_\_\_\_\_.

#### Proposition 1.4 (Formule de Grassmann)

Si  $F$  et  $G$  sont de dimension finie, alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier,  $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$  avec égalité si et seulement si  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

#### Proposition 1.5

Si  $E$  est de dimension finie et  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors sont équivalents :

- $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ;
- $F \cap G = \{0\}$  et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$  ;
- $F + G = E$  et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .

#### Proposition 1.6

Si  $E$  est de dimension finie et  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , les espaces  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  si et seulement si la concaténation d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$  forme une base de  $E$ , dite adaptée à la somme directe.

**Remarque 1.7 :** On peut ainsi construire des sous-espaces vectoriels supplémentaires à partir d'une base de  $E$ .

#### Proposition 1.8

Si  $E$  est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de  $E$  admet un supplémentaire. Une base adaptée à cette somme directe est également dite adaptée au sous-espace vectoriel  $F$ .

### I. B Sommes d'une famille de sous-espaces vectoriels

#### Définition 1.9

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On appelle **somme des  $F_1, \dots, F_p$**  et on note  $\sum_{i=1}^p F_i$  l'ensemble des vecteurs de  $E$

de la forme  $x = \sum_{i=1}^p x_i$  avec pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i \in F_i$ .

**Remarque 1.10 :** Si  $F, G$  et  $H$  sont trois sous-espaces de  $E$  alors  $(F + G) + H = F + G + H = F + (G + H)$ .  
La somme est associative.

**Remarque 1.11 :** Considérons l'application :

$$\begin{aligned}\varphi : \prod_{i=1}^p F_i &\longrightarrow E \\ (u_1, \dots, u_p) &\longmapsto \sum_{i=1}^p u_i\end{aligned}$$

Alors  $\varphi$  est linéaire et  $\text{Im}(\varphi) = \dots$ .

**Proposition 1.12**

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

La somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient tous les  $F_i$  pour  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ .

**Méthode 1.13**

Si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , pour montrer que  $\sum_{i=1}^p F_i \subset G$  il suffit de montrer que :  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, F_i \subset G$ .

**Définition 1.14**

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

La somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est dite **directe** lorsque pour tout  $x \in \sum_{i=1}^p F_i$ , il existe un unique

$p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p F_i$  tel que  $x = \sum_{i=1}^p x_i$ .

Dans ce cas, la somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est notée  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

**Remarque 1.15 :** La somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe si et seulement si  $\varphi$  est injective.

**Théorème 1.16**

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

La somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p F_i, \quad \sum_{i=1}^p x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i = 0.$$

**Proposition 1.17**

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

La somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la somme } \sum_{i=1}^{p-1} F_i \text{ est directe} \\ \left( \bigoplus_{i=1}^{p-1} F_i \right) \cap F_p = \{0\}. \end{array} \right.$$

**Attention :** Pour  $p \geq 3$ , il ne suffit pas que les intersections deux à deux des  $F_i$  soient réduites à  $\{0_E\}$  pour que la somme des  $F_i$  soit directe.

**Contre Exemple 1.18 :** Pour  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \dots$ ,  $G = \dots$  et  $H = \dots$ , les sous-espaces vectoriels  $F, G, H$  sont deux à deux en somme directe, mais la somme  $F + G + H$  n'est pas directe.

**Définition 1.19**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ . On appelle **projecteurs associés** à cette somme directe les  $p$  projecteurs sur l'un de ces sous-espaces vectoriels parallèlement à la somme (directe) des autres.

**Théorème 1.20**

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  et pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $\varphi_i \in \mathcal{L}(F_i, F)$ , alors il existe une unique application  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\varphi|_{F_i} = \varphi_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ .

Autrement dit : si  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ , on peut définir une application linéaire de  $E$  dans  $F$  en la définissant sur chacun des  $F_i$ .

## I. C En dimension finie

**Proposition 1.21**

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Si  $E$  est de dimension finie, on a  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  si et seulement si la concaténation d'une base de chacun des  $F_i$  pour  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$  forme une base de  $E$ .

Une telle base est appelée **adaptée à la décomposition en somme directe**

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i.$$

**Remarque 1.22 :** On peut ainsi former une décomposition en somme directe à partir d'une base de  $E$ .

### Théorème 1.23

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont de dimension finie, alors :

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

## II Matrices définies par blocs

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .

Soit  $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $p_1 + p_2 = p$  et  $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $q_1 + q_2 = q$ .

On définit quatre sous-matrices de  $A$  :  $A_{1,1} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p_1 \\ 1 \leq j \leq q_1}} \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$ ,

$A_{1,2} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p_1 \\ q_1+1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$ ,  $A_{2,1} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q_1}} \in \mathcal{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$  et

$A_{2,2} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1 \leq i \leq p \\ q_1+1 \leq j \leq q_2}} \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$ .

On peut alors écrire  $A = \left( \begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right)$  et on dit que la matrice  $A$  est définie **par blocs**.

**Exemple 2.1 :** Soit  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  
 $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$ . Alors

$$M = \underline{\hspace{2cm}}$$

**Interprétation :** Soit  $A$  la matrice d'une application linéaire  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$  relativement à des bases  $\mathcal{B}$  pour  $E$  et  $\mathcal{B}'$  pour  $F$ . En séparant la famille  $\mathcal{B}$  en deux familles  $\mathcal{B}_1$  des  $p_1$  premiers vecteurs et  $\mathcal{B}_2$  des autres vecteurs de  $B$ , on obtient les bases de deux sous-espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  supplémentaires dans  $E$ . De même pour  $F = F_1 \oplus F_2$  et  $\pi_1, \pi_2$  les projecteurs associés. Alors  $A_{i,j}$  est la matrice de  $\pi_j \circ u|_{E_i}$  dans les bases  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{B}'_j$ .

### Proposition 2.2

Soit  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

On suppose que  $A$  et  $B$  sont définies par blocs selon le même découpage ( $p = p_1 + p_2$ ,  $q = q_1 + q_2$ ) :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \text{ et } B = \left( \begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right).$$

Alors :

$$A + B = \left( \begin{array}{c|c} A_{1,1} + B_{1,1} & A_{1,2} + B_{1,2} \\ \hline A_{2,1} + B_{2,1} & A_{2,2} + B_{2,2} \end{array} \right)$$

et :

$$\lambda A = \left( \begin{array}{c|c} \lambda A_{1,1} & \lambda A_{1,2} \\ \hline \lambda A_{2,1} & \lambda A_{2,2} \end{array} \right)$$

### Proposition 2.3

Soit  $A = \left( \begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  définie par blocs, alors :

$$A^\top = \left( \begin{array}{c|c} A_{1,1}^\top & A_{2,1}^\top \\ \hline A_{1,2}^\top & A_{2,2}^\top \end{array} \right)$$

### Proposition 2.4

Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ .

On suppose que  $A$  et  $B$  sont définies par blocs et que le découpage en colonnes de  $A$  est le même que le découpage en lignes de  $B$  ( $q = q_1 + q_2$ ).

Alors

$$\begin{aligned} A \times B &= \left( \begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ \hline A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

**Exemple 2.5 :** Déterminer une matrice  $N$  définie par bloc telle le produit  $M \times N$  puisse être calculé par blocs.

**Attention :** On peut faire les calculs sur les matrices par blocs de la même manière que si c'était des matrices dont les coefficients sont eux-même des matrices. Mais la multiplication entre deux blocs n'est pas commutative.

On peut généraliser ceci à un nombre quelconque de blocs :

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,m} \end{array} \right)$$

Pour le produit  $AB$ , le découpage selon les colonnes de  $A$  doit être le même que le découpage selon les lignes de  $B$ .

**Remarque 2.6 :** On généralise également les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes (échange, multiplication par un scalaire, transvection). En particulier une transvection ( $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ ) sur des blocs de  $p_i$  lignes correspond à  $p_i$  transvections sur les lignes de la matrice. Elle laisse donc le déterminant invariant.

Lorsque  $n = m$ , on appelle matrice **triangulaire (supérieure) par blocs** toute matrice de la forme :

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{array} \right)$$

et matrice **diagonale par blocs** toute matrice de la forme :

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{array} \right).$$

#### Théorème 2.7

Si  $A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_p \end{array} \right)$  est une matrice triangulaire par blocs telle que

pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $A_k$  est une matrice carrée, alors :  $\det(A) = \prod_{k=1}^p \det(A_k)$ .

## III Sous-espaces stables

### Définition 3.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  un endomorphisme de  $E$ .

- On dit qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est **stable par  $\varphi$**  lorsque :  $\varphi(F) \subset F$ , i.e. :  $\varphi|_F : F \rightarrow F$ .
- L'application  $\tilde{\varphi} : \begin{array}{c} F \rightarrow F \\ u \mapsto \varphi(u) \end{array}$  est alors un endomorphisme de  $F$  appelé **endomorphisme induit par  $\varphi$  sur  $F$** .

**Exemples 3.2 :** • Quelque soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  et  $\{0_E\}$  sont stables par  $\varphi$ .

- Soit  $E = \mathbb{K}[X]$  et  $\varphi$  l'application de dérivation (linéaire sur  $E$ ). Déterminer des sous-espaces vectoriels non triviaux stables par  $\varphi$ .

### Proposition 3.3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent c'est-à-dire tels que  $u \circ v = v \circ u$ .

Alors les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker}(v)$  et  $\text{Im}(v)$  sont stables par  $u$ .

**Remarque 3.4 :** En particulier  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $u$ .

### Proposition 3.5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  adaptée à  $F$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $F$  est stable par  $\varphi$
- la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire par blocs :  $\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$  où  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .

Dans ce cas,  $A$  est la matrice de l'endomorphisme induit par  $\varphi$  sur  $F$  dans la base  $(e_1, \dots, e_p)$ .

### Théorème 3.6

Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  adaptée à cette décomposition.

Sont équivalents :

- $F_1, \dots, F_p$  sont stables par  $\varphi$
- la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \quad \text{où pour tout } i \in \{1, \dots, p\}, A_i \in \mathcal{M}_{\dim F_i}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $A_i$  est la matrice de  $\varphi|_{F_i}$  dans la base  $\mathcal{B}_i$ .

**Remarque 3.7 :** Donner un condition nécessaire et suffisante pour que la matrice de  $\varphi$  dans une certaine base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

### Proposition 3.8 (droite stable)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Une droite vectorielle  $D$  est stable par  $u$  si et seulement si il existe un scalaire  $\lambda$  tel que pour tout  $x \in D$ ,  $u(x) = \lambda x$ .

## IV Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

### IV. A Polynômes d'un endomorphisme

#### Définition 4.1

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on note :

$$P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k \in \text{_____}.$$

**Remarque 4.2 :** Le polynôme d'endomorphisme  $P(u)$  est \_\_\_\_\_.

**Attention :**

- $PQ(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$  et pas  $P(Q(u))$  ;
- pour  $x \in E$ , l'écriture  $P(u)(x)$  a un sens car  $P(u) \in \mathcal{L}(E)$  ; mais l'écriture  $P(u(x))$  n'a pas de sens :  $u(x) \in E$ .

#### Théorème 4.3

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . L'application  $P \mapsto P(u)$  est un morphisme d'algèbre de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Son image, notée  $\mathbb{K}[u]$ , est une sous algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$ .

### IV. B Idéal annulateur

#### Définition 4.4

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Le noyau de du morphisme d'algèbre  $P \mapsto P(u)$  est l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $P(u) = 0$ , c'est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  appelé **idéal annulateur** de  $u$ . Les polynômes de cet idéal annulateur sont appelés **polynômes annulateurs** de  $u$ .

**Exemples 4.5 :**

- Déterminer l'idéal annulateur d'un projecteur.
- Soit  $D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$  définie par  $D(f) = f'$ . Montrer que le polynôme nul est le seul polynôme annulateur de  $D$ .

### IV. C En dimension finie

#### Définition/Proposition 4.6

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors l'idéal annulateur de  $u$  est non nul et il existe un unique polynôme unitaire générateur de l'idéal annulateur de  $u$ , appelé **polynôme minimal** de  $u$  et noté  $\mu_u$ .

**Remarques 4.7 :** • Tout polynôme annulateur de  $u$  est un multiple du polynôme minimal de  $u : \mu_u$  ;

- $\mu_u$  est le seul polynôme annulateur unitaire de degré minimal ;
- $\mu_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  ;
- $\deg(\mu_u) \geq 1$ .

#### Définition 4.8

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on note :

$$P(M) = \sum_{k=0}^p a_k M^k \in \text{_____}.$$

L'application  $P \mapsto P(M)$  est un morphisme d'algèbre de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Son image, notée  $\mathbb{K}[M]$ , est une sous algèbre commutative de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Son noyau est l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $P(M) = 0$ , c'est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  appelé **idéal annulateur** de  $M$ . Les polynômes de cet idéal annulateur sont appelés **polynômes annulateurs** de  $M$  et on appelle **polynôme minimal** de  $M$ , et on note  $\mu_M$  (ou  $\pi_M$ ) l'unique polynôme unitaire générateur de l'idéal annulateur de  $M$ .

**Exemple 4.9 :** Polynôme minimal annulateur de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Rappel :** Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  de dimension  $n$ , alors :  $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est un isomorphisme d'algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### Proposition 4.10

Soit  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  de dimension  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ , alors :

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(A)$  ;
- les polynômes annulateurs de  $u$  sont les polynôme annulateurs de  $A$  ;
- $\mu_u = \mu_A$ .

#### Corollaire 4.11

Deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

#### Théorème 4.12

Soit  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $d$  le degré du polynôme minimal de  $u$ .

Alors la famille  $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ .

## IV. D Application : calcul des puissances d'une matrice

#### Méthode 4.13

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mu_A$  son polynôme minimal. On effectue la division euclidienne de  $X^k$  par  $\mu_A : X^k = \mu_A \times Q + R$  et on évalue en  $A : A^k = R(A)$ .

**Exemple 4.14 :** Polynôme minimal et puissances de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Remarque 4.15 :** On peut également calculer les puissances de cette matrice à l'aide de \_\_\_\_\_.

## IV. E Exemple fondamental : matrice compagnon (HP)

Le résultat suivant n'est pas au programme, mais c'est un exercice classique.

#### Proposition 4.16

Tout polynôme unitaire  $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$  est le polynôme minimal d'au moins une matrice, sa matrice compagnon :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

## IV. F Lemme de décomposition des noyaux

#### Théorème 4.17 (Lemme de décomposition des noyaux)

Soit  $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$  deux à deux premiers entre eux,  $P = \prod_{i=1}^r P_i$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$