Corrigé du DS 3

Exerice 1 : extrait de CCINP MP 2020 maths 2

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{k} I_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Donc, par caractérisation séquentielle des fermés :

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un fermé de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. L'application det est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3. L'ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \cap]0\,;+\infty[$ est fini car la matrice M a au plus n valeurs propres.
On distingue deux cas :

premier cas : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \cap]0\,;+\infty[= \varnothing$, on pose alors $\rho = 1$

deuxième cas : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \cap]0\,;+\infty[\neq \varnothing$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \cap]0\,;+\infty[$ est une partie finie non vide de $]0\,;+\infty[$ et a un plus petit petit élément, on note ρ ce plus petit élément.

Dans tous les cas, pour tout $\lambda \in]0\,;\rho[, \lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ donc $M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On a montré que :

$$\boxed{\exists \rho > 0, \forall \lambda \in]0\,;\rho[, M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\rho > 0$ tel que $\forall \lambda \in]0\,;\rho[, M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Or $\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc à partir d'un certain rang n_0, $0 < \frac{1}{k} < \rho$. Donc : $\forall k \geqslant n_o, M - \frac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M - \frac{1}{k} I_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} M$.
Donc, par caractérisation séquentielle :

$$\boxed{\text{l'ensemble } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$.
De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k B = (A_k B) A_k A_k^{-1} = A_k (B A_k) A_k^{-1}$, donc $A_k B$ et $B A_k$ sont semblables et on le même polynôme caractéristique. Soit $x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \det(xI_n - A_k B) = \det(xI_n - BA_k)$.
Or : par continuité du produit matriciel et de l'application déterminant, $\det(xI_n - A_k B) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \det(xI_n - AB)$ et $\det(xI_n - BA_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \det(xI_n - BA)$.
Donc, par unicité de la limite, pour tout $x \in \mathbb{R}, \det(xI_n - AB) = \det(xI_n - BA)$.
Donc :

$$\boxed{AB \text{ et } BA \text{ ont le même polynôme caractéristique.}}$$

On remarque que : $AB = 0_2$, donc le polynôme minimal de AB est X, mais $BA \neq 0_2$, donc son polynôme minimal n'est pas X ($BA = B \neq 0_2$ *et* $B^2 = 0_2$, *donc* $\mu_B = X^2$).
Donc :

$$\boxed{AB \text{ et } BA \text{ n'ont pas toujours le même polynôme minimal.}}$$

5. L'application det est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det M \in \mathbb{R}^*$.
Donc : $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$, or $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs (*ce n'est pas un intervalle*) donc par contraposée du résultat rappelé dans l'énoncé,

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas connexe par arcs.}}$$

Problème : CCINP MP 2020 maths 1

D'après le corrigé par Hugues Blanchard et Simon Billouet.

Partie 1 : Développement ternaire

1. Montrons que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- On a tout d'abord $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- La suite nulle étant bornée, elle appartient bien à ℓ^∞ ;
- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de ℓ^∞, bornées respectivement par M_u et M_v et λ, μ deux réels, l'inégalité triangulaire nous apprend que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda| M_u + |\mu| M_v$$
ce qui montre que $\lambda u + \mu v$ est bornée, donc dans ℓ^∞.

Ainsi, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc un espace vectoriel réel.

Montrons maintenant que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞ :

- **Caractère bien défini** : si $u \in \ell^\infty$,
$$\{|u_n|, n \in \mathbb{N}^*\}$$
est une partie non vide (elle contient $|u_1|$) et majorée (puisque u est bornée) de $\mathbb{R}$, donc par propriété de la borne supérieure, $\|u\|$ existe.
- **Séparation** : si $u \in \ell^\infty$ est telle que $\|u\| = 0$, cela veut dire que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n| = 0$, donc que 0 majore tous les $|u_n|$, qui sont des nombres positifs. On a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| = 0$$
et par suite, u est la suite nulle.
- **Inégalité triangulaire** : soit $u, v \in \ell^\infty$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \|u\| + \|v\|$$
donc la quantité $\|u\| + \|v\|$ est un majorant de tous les nombres $|u_n + v_n|$, et elle est donc plus grande que le plus petit desdits majorants, à savoir $\|u + v\|$. On a donc bien :
$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$
- **Homogénéité** : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \ell^\infty$. Si $\lambda = 0$, on a $\|\lambda u\| = 0 = 0\,\|u\|$. Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|\lambda u_n| = |\lambda||u_n| \leqslant |\lambda|\,\|u\|$$
De ce fait, $\|\lambda u\| \leqslant |\lambda|\,\|u\|$. Par ailleurs, on a $u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u)$, donc :
$$\|u\| = \left\|\frac{1}{\lambda}(\lambda u)\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\,\|\lambda u\|$$
et donc
$$\|\lambda u\| \leqslant \lambda\,\|u\|$$
On conclut donc à l'égalité
$$\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$$
ce qui conclut la preuve.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, bornée par M. Alors, on a
$$0 \leqslant \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \frac{M}{3^n}$$
par croissances comparées. Or, $\frac{M}{3^n}$ est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison dans $]0\,;1[$) ; par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge donc absolument, donc converge.

3. Montrons tout d'abord que σ est bien une forme linéaire sur ℓ^∞. σ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors
$$\sigma(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda u_n + \mu v_n)}{3^n} = \lambda\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}\right) + \mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right) = \lambda\sigma(u) + \mu\sigma(v)$$
par linéarité de la somme d'une série (notons que cette égalité est justifiée par le fait que toutes les séries qui interviennent convergent bien d'après la question précédente). Ainsi, σ est linéaire, et σ est donc bien une forme linéaire.

Montrons maintenant que σ est continue. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors :
$$\|\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{3^n}\| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n}\right)\|u\|$$
Le terme de gauche de cette inégalité converge vers $\|\sigma(u)\|$, celui de droite converge également car la série de terme général $\frac{1}{3^n}$ converge, pour les mêmes raisons qu'à la question 2. Par conséquent, on peut passer à la limite lorsque $N \to +\infty$, et :
$$\|\sigma(u)\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\right)\|u\|$$
et d'après une caractérisation de la continuité des applications linéaires, cela montre que σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

4. Soit $t=(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in T$. Notamment, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, 0\leqslant \frac{t_n}{3^n}\leqslant\frac{2}{3^n}$, donc

$$0\leqslant\sigma(t)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^n}$$

et cette dernière somme de série vaut 1 car, pour $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{3^n}=2\frac{1-3^{-N}}{2}\to 1$$

Donc $\sigma(t)\in[0\,;1]$.

5. On a

$$\sigma(\tau)=\frac{\tau_1}{3^1}=\frac{1}{3}$$

et

$$\sigma(\tau')=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^n}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Notamment, l'application σ n'est pas injective sur T.

6. Il s'agit de montrer que $t(x)$ est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. Notons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, t_n(x)$ est un entier relatif comme différence d'entiers relatifs. Par ailleurs, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$3^nx-1<\lfloor 3^nx\rfloor\leqslant 3^nx$$

et

$$3^{n-1}x-1<\left\lfloor 3^{n-1}x\right\rfloor\leqslant 3^{n-1}x$$

d'où (à chaque fois on somme une inégalité large et une inégalité stricte, donc on a bien une inégalité stricte)

$$3^nx-1-3(3^{n-1}x)=-1<t_n(x)<3^nx-3(3^{n-1}x-1)=3$$

Et puisque $t_n(x)$ est entier, on a bien $t_n(x)\in\{0,1,2\}$. Donc $t(x)\in T$.

7. Tout d'abord, $y_n-x_n=\frac{1}{3^n}\to 0$. De plus, pour $n\geqslant 2$,

$$x_n-x_{n-1}=\frac{\lfloor 3^nx\rfloor}{3^n}-\frac{\left\lfloor 3^{n-1}x\right\rfloor}{3^{n-1}}=\frac{t_n(x)}{3^n}\geqslant 0$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et, pour $n\geqslant 2$,

$$y_n-y_{n-1}=\frac{t_n(x)}{3^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{t_n(x)-2}{3^n}\leqslant 0$$

donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ainsi, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Puisqu'on a l'encadrement, valable pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$3^nx-1\leqslant\lfloor 3^nx\rfloor\leqslant 3^nx$$

on a donc

$$1-\frac{1}{3^n}\leqslant x_n\leqslant 1$$

et par théorème d'encadrement, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers x, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de même puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Par ailleurs, pour $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{t_n(x)}{3^n}&=\frac{t_1(x)}{3}+\sum_{n=1}^{N}\frac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}}\\&=\frac{\lfloor 3x\rfloor}{3}-\lfloor x\rfloor+\sum_{n=1}^{N}(x_{n+1}-x_n)\\&=x_1-0+x_{N+1}-x_1\\&=x_{N+1}\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n(x)}{3^n}=x$$

8. En appliquant la formule donnée par l'énoncé :
(Notons ici qu'il y a un problème de précision : les flottants ont une précision maximale, et l'entier peut quant à lui être arbitrairement grand. La fonction proposée ne peut structurellement qu'être une approximation de la représentation ternaire.)

```
def flotVersTern(n,x):
    T=[]
    for k in range(1,n+1):
        T.append(int(3**k*x)-3*int(3**(k-1)*x))
    return T
```

9. Il suffit ici de calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n(x)}{3^n}$ sachant que les derniers termes sont nuls :

```
def ternVersFlot(L):
    x=0
    for k in range(len(L)):
        x+=L[k]/3**(k+1)
    return x
```

10. C'est un simple test :

```python
def ajout(L):
    s=0
    for k in L:
        s+=k
    if s%2==0:
        L.append(-1)
    else:
        L.append(-2)
    return L
```

De même pour verif :

```python
def verif(L):
    s=0
    for k in range(len(L)-1):
        s+=L[k]
    if s%2==0 and L[-1]==-1:
        return True
    if s%2==1 and L[-1]==-2:
        return True
    return False
```

On pouvait aussi remarquer que c'est correct si la somme de tous les termes est impaire :

```python
def verif(L):
    if L[-1]!=-1 and L[-1]!=-2:
        return False
    return sum(L)%2==1
```

Partie 2 : Étude d'une fonction définie par une série

11. Notons $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1+\sin(nx)}{3^n} \end{array} \right.$.

Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme composition, somme et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme sin varie entre -1 et 1, $\|f_n\|_\infty = \frac{2}{3^n}$. Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$). Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc simplement, sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ donc $\|f\|_\infty = \frac{n}{3^n}$. Or, $\frac{n}{3^n} = o\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ par croissance comparée. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série positive et convergente (c'est une série de Riemann d'exposant strictement plus grand que 1), par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{3^n}$ converge.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation d'une série, φ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.

12. Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{e^{inx}}{3^n}\right| \leqslant \frac{1}{3^n}$$

De même que dans la question 2, la série de fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{inx}}{3^n}$ converge donc simplement. Notamment, sa partie imaginaire converge simplement. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ (fixé pour le reste de la question) :

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$$

D'autre part, par le même calcul qu'à la question 4,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

On obtient donc bien

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$$

Enfin, par somme d'une série géométrique convergente et de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} = \frac{e^{ix}}{3\left(1-\frac{e^{ix}}{3}\right)} = \frac{e^{ix}\left(1-\frac{e^{-ix}}{3}\right)}{3\left(\left(1-\frac{\cos(x)}{3}\right)^2 + \frac{\sin^2(x)}{9}\right)} = \frac{3e^{ix}-1}{10-6\cos(x)}$$

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

13. La question 11 nous a permis de vérifier le théorème de dérivation d'une série de fonctions terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$$

D'autre part, en dérivant à vue l'expression obtenue à la question précédente, on trouve que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \frac{3\cos(x)(10 - 6\cos(x)) - 3\sin(x)6\sin(x)}{(10 - 6\cos(x))^2} = \frac{-18 + 30\cos(x)}{(10 - 6\cos(x))^2}$$

On en déduit donc que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{-18 + 30\cos(x)}{(10 - 6\cos(x))^2}$$

14. On a montré en question 11 que $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Cette série converge donc uniformément. Par ailleurs, les f_n, étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sont notamment continues sur $[0, \pi]$. Par théorème d'intégration d'une série terme à terme :

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi} f_n(x) \, \mathrm{d}x \right)$$

donc

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{3^n} - \frac{\cos(nx)}{n3^n} \right]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{3^n} + \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n3^n} \right)$$

Or, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{3^n} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 12, donc :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x) - \frac{1}{2}}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n3^{n+1}}$$

Enfin, par développement en série entière, on a, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, donc

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{1}{3} \ln(2)$$

15. Avec le changement de variable (licite, car de classe $\mathcal{C}^1$ $u = \cos(x)$ et $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$), on obtient que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)} \, \mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-1}{10 - 6u} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{1}{6} \ln(10 - 6u) \right]_1^{-1} = \frac{1}{3} \ln(2)$$

Partie 3 : Développements ternaires aléatoires

Partie 4 : Fonction de Cantor-Lebesgue

16. On a :

$$\forall x \in [0,1], f_0(x) = x$$

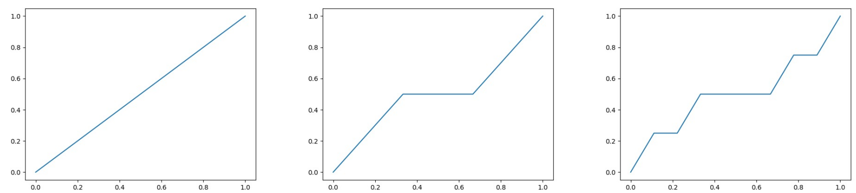
D'où l'on déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \ f_1(x) = \frac{3}{2}x \\ \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, \ f_1(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \ f_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

puis que

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{9}\right], \ f_2(x) = \frac{9}{4}x \\ \forall x \in \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[, \ f_2(x) = \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \ f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, \ f_2(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \ f_2(x) = \frac{9}{4}x - 1 \\ \forall x \in \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[, \ f_2(x) = \frac{3}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{8}{9}, 1\right[, \ f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{5}{4} \end{cases}$$

On en déduit les graphiques respectifs de f_0, f_1 et f_2 :



17. Le programme se déduit directement de la définition :

```
def cantor(n,x):
    if n == 0:
        return x
    if x <= 1 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x) / 2
    if x >= 2 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x - 2) / 2 + 1 /2
    return 1 / 2
```

18. Montrons que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0,1], |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- Tout d'abord :

- Si $x \in [0\,;\frac{1}{3}]$, alors
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{6}$$
- Si $x \in]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}[$, alors $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a donc
$$|f_1(x) - f_0(x)| = x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
D'autre part, si $x < \frac{1}{2}$, on a
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{1}{2} - x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
- Si $x \in [\frac{2}{3}\,;1]$, alors
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\frac{1}{2} + \frac{3x-2}{2} - x\right| = \frac{1}{2}|x-1| = \frac{1}{2}(1-x) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :
  - Si $x \in [0\,;\frac{1}{3}]$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x) - f_n(3x)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}$$
  - Si $x \in]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}[$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = 0$$
  - Si $x \in [\frac{2}{3}\,;1]$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x-2) - f_n(3x-2)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}$$

  donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion :d'après le principe de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

19. La série de terme général $\frac{1}{3 \times 2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison dans $]0\,;1[$. D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge donc normalement sur $[0,1]$, donc uniformément sur $[0,1]$. Par lien suite-série, la suite de fonctions $(f_n - f_0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$, et il en va donc de même pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n)$: f_n est continue et croissante sur $[0,1]$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $f_0 = \mathrm{Id}$ qui est bien continue, croissante sur $[0,1]$, et vaut bien 0 en 0 et 1 en 1.
- soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.
Alors f_{n+1} est continue sur $[0\,;\frac{1}{3}],]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}[$ et $[\frac{2}{3}\,;1]$ comme somme, quotient et composition de fonctions continues. Par ailleurs,
$$f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{f_n(3x)}{2} = \frac{f_n(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x)$$
donc f_{n+1} est continue en $\frac{1}{3}$. On montre de la même manière que f_{n+1} est continue en $\frac{2}{3}$. Donc f_{n+1} est continue sur $[0,1]$.
Comme composée de fonctions croissantes, f_{n+1} est également croissante sur chacun des intervalles $[0\,;\frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}\,;1]$, et elle est constante donc croissante sur $[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}]$. Comme cette croissance a lieu sur chaque intervalle fermé, on peut « recoller » cette croissance sur tout $[0,1]$:
par exemple si $x \in [0\,;\frac{1}{3}]$ et $y \in [\frac{2}{3}\,;1]$, on a $f_{n+1}(x) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant f_{n+1}(y)$).
Enfin, $f_{n+1}(0) = \frac{f_n(3\times 0)}{2} = 0$ et $f_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3\times 1-2)}{2} = 1$.
- Conclusion : par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$$
En passant à la limite en n, on trouve que pour tout $x \in [0,1]$:
$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$
La fonction f est donc bien à valeurs dans $[0,1]$. Par ailleurs, si $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n(x) \leqslant f_n(y)$$
et là encore, en passant à la limite en n, on obtient
$$f(x) \leqslant f(y)$$
La fonction f est donc croissante, et en passant à la limite dans les égalités $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$, on obtient $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque f est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, elle est elle-même continue sur $[0,1]$. Enfin, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([0\,;1])$ est un intervalle contenant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc il contient $[0\,;1]$, et f est donc surjective.