Chapitre 29

Construction d'une intégrale

Dans ce chapitre, on fixe deux réels $a < b$, et on note $I = [a, b]$.

1 Continuité uniforme

Définition 1.1 (Continuité uniforme)

Une fonction f est uniformément continue si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x, y \in \mathcal{D}_f,\ |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque.

Attention à ne pas confondre avec la continuité simple. Le "η" est ici indépendant des points x et y. Pour f, cela signifie que, où que vous vous placiez dans son domaine de définition, si x varie au plus de η, $f(x)$ variera au plus de ε. Pour une fonction qui n'est que continue, le η va dépendre de x, donc de l'endoit où on se place dans le domaine de définition.

Proposition 1.2

1. Une fonction uniformément continue est continue.

2. Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème 1.3 (Heine)

Une fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

2 Fonctions continues par morceaux

Définition 2.1 (Subdivision d'un segment)

1. Une *subdivision* de I est une suite finie $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

2. Le *pas* de la subdivision est le réel $\delta(\sigma) = \max\limits_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1})$.

3. La subdivision est à *pas constant* si

$$\forall\, i = 1, \dots, n-1,\ x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}\ ,$$

et dans ce cas on a

$$\forall\, i = 1, \dots, n-1,\ x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Définition 2.2 (Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux)

1. Une fonction f définie sur I est *en escalier* sur I s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de I telle que $f_{]x_{i-1},x_i[}$ soit constante pour tout $i = 1, \dots, n$.

2. On note $\mathcal{E}(I)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I.

3. Une fonction f définie sur I est *continue par morceaux* sur I s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de I telle que $f_{]x_{i-1},x_i[}$ soit continue pour tout $i = 1, \dots, n$, et telle que f admette des limites finies à gauche et à droite en tout x_i, $i = 0, \dots, n$, ce qui est équivalent à dire que pour tout $i = 1, \dots, n$, f est la restriction à $]x_{i-1}, x_i[$ d'une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$.

4. On note $\mathcal{CPM}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Remarques.

1. Les subdivisions de la défintion sont dites *subordonnées* (ou *adaptées*) à f.
2. Il y a une infinité de subdivision subordonnée à une fonction en escalier (ou continue par morceaux).
3. La valeur de la fonction en $x_0, \dots, x_n$ n'a pas d'importance.
4. Une fonction en escalier est continue par morceaux.
5. Attention, pour être continue par morceaux, il faut des limites finies à droite et à gauche aux points de la subdivision !

Proposition 2.3

1. Une fonction en escalier est continue par morceuax.

2. Une fonction continue est continue par morceaux.

Proposition 2.4

Les ensembles $\mathcal{E}(I)$ et $\mathcal{CPM}(I)$ sont des sous-espaces vectoriels et des sous-anneaux de $\big(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times\big)$.

Remarque.

Essentiellement, on dit que les combinaisons linéaires de fonctions en escalier (resp. cpm) sont en escalier (resp. cpm).

Proposition 2.5

Une fonction continue par morceaux sur I est bornée.

Théorème 2.6 (Approximation des fonctions continues par morceaux)

Soit f une fonction continue par morceaux sur I, et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur I telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

Corollaire 2.7

Soit f une fonction continue par morceaux sur I et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction φ en escalier sur I telle que

$$|f - \varphi| < \varepsilon.$$

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Définition 3.1 (Intégrale des fonctions en escalier)

Soit f une fonction en escalier sur I. On définit son intégrale sur I par

$$\int_I f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

où $\sigma = (x_0 \dots, x_n)$ est une subdivision quelconque subordonnée à f.

Remarques.

1. Remarquez qu'on définit l'intégrale sur le segment I, et qu'on n'utilise pas (encore) la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ que vous connaissez.
2. Cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie.
3. Faîtes un dessin pour vous rendre compte de ce que représente cette intégrale. On remarquera qu'elle est l'aire algébrique de la surface délimitée par l'axe Ox et la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
4. Si f est constante sur I, on a alors

$$\int_I f = (b-a)f(c)$$

pour tout $c \in I$.
5. L'intégrale ne dépend pas de la valeur de f aux points d'une subdivision.

On définit alors l'intégrale des fonctions continues par morceaux (et donc des fonctions continues) par des limites d'intégrales de fonctions en escalier. On note $\displaystyle\int_I f$ cette intégrale. On va surtout étudier les propriétés de cette intégrale.

3.1 Notation usuelle

Définition 3.2

Soit $f \in \mathcal{CPM}(I)$ et $c, d \in I$. On pose

$$\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{[c,d]} f & \text{si } c < d \\ 0 & \text{si } c = d \\ -\int_{[d,c]} f & \text{si } d < c. \end{cases}$$

Proposition 3.3 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{CPM}(I)$ et $c, d, e \in I$. Alors $\displaystyle\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \int_c^e f(t)\mathrm{d}t + \int_e^d f(t)\mathrm{d}t$.

3.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 3.4 (Linéarité)

Soient f, g des fonctions continues par morceaux sur I, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g,$$

i.e. l'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{CPM}(I)$.

Proposition 3.5 (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soient f, g des fonctions continues par morceaux sur I. Alors

1. Si $f \geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$. En particulier, si $a, b \in I$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ (positivité)

2. Si $f \geqslant g$, on a $\displaystyle\int_I f \geqslant \int_I g$. En particulier, si $a, b \in I$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (croissance).

Proposition 3.6

Soit $f \in \mathcal{CPM}(I)$. Alors $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$. En particuier, si $a, b \in I$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$.

Remarque.

Si on ne sait rien sur a et b, on a encore $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t\right|$.

Proposition 3.7 (Inégalité de la moyenne)

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur I. Alors

$$\left|\int_I fg\right| \leqslant \sup_I |f| \int_I |g|.$$

En particulier, si $a, b \in I$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_I |f| \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} |f|.$$

Proposition 3.8 (Additivité)

Soit f une fonction continue par morceaux sur I, et $a, b \in I$ avec $a < b$.

1. Pour tout $c \in]a, b[$, on a
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+\alpha,b+\alpha]} f_\alpha,$$

où f_α est définie sur $[a+\alpha, b+\alpha]$ par $f_\alpha(x) = f(x-\alpha)$.

Proposition 3.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient f, g deux fonctions continues par morceaux sur $I = [a, b]$. Alors

$$\left(\int_I fg\right)^2 \leqslant \left(\int_I f^2\right)\left(\int_I g^2\right).$$

On peut aussi l'écrire

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right),$$

ou en passant à la racine carrée,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x},$$

où ici $f^2(x) = (f(x))^2$.

4 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

Théorème 4.1

Soit f une fonction **continue** sur I, et $x_0 \in I$. La fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$$

est **la** primitive de f s'annulant en x_0.

Corollaire 4.2

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Pour tous $x_0, x \in I$, on a

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 4.3

Soit f une fonction **continue et de signe constant** sur I. Alors

$$f = 0 \iff \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Remarque.

Attention, ce théorème est faux si f est juste continue par morceaux.

Corollaire 4.4

Soit f une fonction continue, positive, non nulle sur $[a, b]$ $(a < b)$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

4.1 Fonctions à valeurs complexes

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux si ses parties réelle et imaginaire le sont. On définit alors

$$\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i\int_I \mathrm{Im}(f).$$

On a les même propositions que pour les fonctions à valeurs réelles, sauf bien entendu la positivité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ni le théorème 4.3.

5 Approximation de l'intégrale d'une fonction continue

Proposition 5.1 (Sommes de Riemann)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a \leqslant b)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Les sommes

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right), \qquad R'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

sont des sommes de Riemann associées à f sur $[a, b]$, et

$$R_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f, \qquad R'_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f.$$

En particulier, pour $a = 0$ et $b = 1$, on a

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right), \qquad R'_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Remarques.

1. Faîtes un dessin ! C'est la méthode des rectangles que vous avez vue en terminale.
2. Les suites $(R_n(f))$ et $(R'_n(f))$ sont des cas particuliers de *sommes de Riemann*.

Proposition 5.2 (Majoration de l'erreur pour la méthode des rectangles)

1. Si f est k-lipschitzienne sur $I = [a, b]$, avec les notations de la proposition 6.2, on a
$$\left| R_n(f) - \int_I f \right| \leqslant \frac{k(b-a)^2}{2n}.$$

2. Si f est de classe C^1 sur I, alors
$$\left| R_n(f) - \int_I f \right| \leqslant \frac{\sup_I |f'|(b-a)^2}{2n}.$$

Remarque.

La deuxième inégalité est optimale, puisque si $f(x) = x - a$, alors
$$\int_I f = \frac{(b-a)^2}{2} \quad \text{et} \quad R_n(f) = \int_I f - \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Corollaire 5.3 (Méthode des trapèzes)

Avec les notations de la proposition 6.2, on pose
$$T_n(f) = \frac{R_n(f) + R'_n(f)}{2}.$$
Alors la suite $(T_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et
$$\lim_{n \to +\infty} T_n(f) = \int_I f.$$

Remarque.

Faîtes un dessin et expliquez le nom de cette méthode.

6 Formules de Taylor

Dans ce paragraphe, nous voyons des formules qui permettent d'approcher des fonctions par des fonctions polynomiale.

Théorème 6.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors pour tous $a, b \in I$, on a
$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a + t(b-a))\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
C'est la *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre a et b*, ou encore *formule de Taylor avec reste intégral en a* si on ne veut pas préciser b.

Corollaire 6.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et $a, b \in I$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{u \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(u) \right|.$$