Chapitre 1

Calculs algébriques

L'objectif de ce chapitre est de se mettre à l'aise avec des techniques fondamentales du calcul algébrique. Nous insisterons en particulier sur la manière de les effectuer, ainsi que sur la rédaction des différentes étapes du calcul. N'oubliez pas qu'il ne s'agit pas d'exercices gratuits, mais de calculs qui interverviendront naturellement dans des problèmes de concours par exemple, et qu'il faut savoir les mener sans erreur, puis les mettre sous une forme adaptée à l'exploitation qu'on veut en faire.

1 Rappels sur les fonctions puissances

Définition 1.1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit x^n par

$$x^0 = 1, \qquad x^{n+1} = x \times x^n.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}_-^*$. On définit x^n par

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}.$$

Proposition 1.2

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors

$$x^a x^b = x^{a+b}, \qquad x^a y^a = (xy)^a.$$

Remarque.

Le résultat reste vrai si $x = 0$ ou $y = 0$ à condition que tous les exposants concernants 0 soient positifs.

Proposition 1.3

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, et $n, m \in \mathbb{Z}$. Alors $(x^n)^m = x^{nm}$.

Définition 1.4

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $x^{\frac{1}{n}}$ par $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, *i.e.* $x^{\frac{1}{n}}$ est l'unique solution de l'équation $a^n = x$ d'inconnue $a \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 1.5

Soient $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Remarque.

On peut aussi considérer $x < 0$, pourvu que n et m soient impairs.

Définition 1.6

Soient $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. On définit $x^{\frac{m}{n}}$ par

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \qquad \text{et si } x > 0, \quad x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}.$$

Remarque.

On vient donc de définir pour $x > 0$ et $q \in \mathbb{Q}$ le réel x^q, et 0^q si $q \geqslant 0$. Mais attention, x^q n'est pas défini si $x < 0$.

2 Sommes et produits

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des n-uplets de réels.

2.1 Notations

Définition 2.1

Soit I un ensemble non vide. La famille de réels $(a_i)_{i\in I}$ indéxée par I est la fonction $I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à i associe a_i. L'ensemble I est l'ensemble d'indexation de la famille.

Remarque.

C'est une manière de "numéroter" des réels : le i-ème réel de la famille est le réel $f(i)$.

Définition 2.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \leqslant n$ et $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i$ et $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} a_i$ par

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + \cdots + a_n \qquad \prod_{i=p}^{n} a_i = a_p \cdots a_n.$$

Remarques.

1. Ces définitions correspondent à des définitions par récurrence : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=p}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$ et $\displaystyle\prod_{i=p}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=p}^{n} a_i\right) \times a_{n+1}$.
2. Par convention, si $n < p$, on a $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} a_i = 1$.
3. On utilise aussi les notations suivantes :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i = \sum_{i \in I} a_i,$$
où $I = \{1, \dots, n\}$. De même pour le produit.
4. Notez bien que la somme $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i$ dépend de n, mais pas de i, qui est un indice de sommation. Il sert juste à numéroter les réels qu'on somme. On peut lui donner le nom que l'on souhaite : c'est un indice muet.
5. Les cas les plus fréquents sont $p = 0$ et $p = 1$, *cf.* les exemples.

2.2 Propriétés

Proposition 2.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux familles de réels.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_k$.
2. Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda = \lambda^n$.
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$.
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$.
6. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$.
7. Si les b_k sont tous non nul, alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} b_i}$.

3 Changements d'indice

3.1 Définition

Proposition 3.1 (Changement d'indice)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+1}^{n+p} a_{\ell-p} = \sum_{\ell=p-n}^{p-1} a_{p-\ell} = \sum_{\ell=1-p}^{n-p} a_{\ell+p}.$$

Remarques.

1. On ne doit pas apprendre par coeur ces formules de changement d'indice. On les effectue proprement quand on en a besoin. Il faut surtout déterminer les valeurs min et max du nouvel indice.
2. On met toujours la plus petite valeur sous le signe $\sum$, même si le changement d'indice est donné par une fonction décroissante.

3.2 Exemples de changements d'indices

Proposition 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque.

C'est la technique utillisée par Gauss enfant pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k$.

Proposition 3.3

Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r, et $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$. Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$.

Remarque.

On retiendra que la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est le nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier.

4 Sommes et produits télescopiques

4.1 Définitions

Dans ce paragraphe, on va exploiter les propositions 4.1 et 4.2 pour calculer des sommes et des produits.

Proposition 4.1 (Somme télescopique)

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, et $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p \text{ et } \sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1}$$

Remarques.

1. On appelle ces sommes des "sommes télescopiques".
2. Que peut-on dire de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k+1})$? et de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k-1})$?

Proposition 4.2 (Produit télescopique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tous non nul, et $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$. Alors

$$\prod_{k=p}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}.$$

Remarque.

On appelle ces produits des "produits télescopiques".

4.2 Exemples de sommes télescopiques

Proposition 4.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Proposition 4.4

Soient $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$, et $x \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n}x^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si } x = 1, \\ \frac{x^{n+1}-x^p}{x-1} = \frac{x^p-x^{n+1}}{1-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1, \\ \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors

$$a^n - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1),$$

et si n est impair,

$$a^n + 1 = (a+1)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \cdots - a + 1).$$

Corollaire 4.6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Alors

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

et si n est impair,

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-1-k} = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Méthode 4.7

Il faut savoir reconnaître les sommes télescopiques, et faire des changements d'indice pour calculer les sommes.

5 Sommation par regroupement de termes

Parfois, il est intéressant de regrouper les termes suivant une propriété de l'indice.

5.1 Regroupement des termes d'indice pair/impair

Il est parfois intéressant de couper une somme en deux parties : celle des indices pairs, et celle des indices impairs. Si I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indéxée par I, on écrira que

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\substack{i \in I \\ i \text{ pair}}} a_i + \sum_{\substack{i \in I \\ i \text{ impair}}} a_i.$$

Une des difficultés est de déterminer proprement les ensembles $\{i \in I,\ i \text{ pair}\}$ et $\{i \in I,\ i \text{ impair}\}$.

Proposition 5.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} a_{2j+1} + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} a_{2j}.$$

5.2 Sommation par paquets

Il s'agit ici de mettre en place un paranthésage dans la somme qui fait apparaître des simplifications.

6 Sommes doubles

Dans ce paragraphe, on étudie les sommes qui dépendent de deux indices, qu'on appelle "sommes doubles".

6.1 Définition générale

Rappelons que $\mathbb{Z}^2$ est l'ensemble des couples d'entiers.

Définition 6.1 (Sommes doubles)

Soit $E \subset \mathbb{Z}^2$, et $(a_{ij})_{(i,j) \in E}$ une famille de réels indéxée par E. La somme double de cette famille est $\displaystyle\sum_{(i,j) \in E} a_{ij}$.

6.2 Somme double sur un rectangle

Proposition 6.2 (Sommes doubles sur un rectangle)

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, et $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ une famille de réels indéxée par $I = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{ij} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right).$$

Remarques.

1. On omet en général les parenthèses, pour noter simplement $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ ou $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.
2. On dit qu'on fait une somme sur un rectangle : lorsqu'on place les a_{ij} dans un tableau en numérotant les lignes par i et les lignes par j, on obtient un rectangle de données que l'on somme.

3. Lorsqu'on effectue la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$, on dit qu'on somme d'abord sur les colonnes, puis sur les lignes. Inversement pour l'autre sens.

Proposition 6.3

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ deux familles de réels. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j.$$

Remarques.

1. Dans la somme double de la proposition 6.3, on peut poser $a_{ij} = a_i b_j$ pour se ramener à la définition 6.1.
2. Attention : $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^m\right)\left(\prod_{j=1}^{m} b_j^n\right)$.

6.3 Sommes doubles triangulaires

Proposition 6.4 (Sommes triangulaires)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $T = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$. Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in T}$ une famille de réels indéxée par le triangle T. Alors

$$\sum_{(i,j)\in T} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right).$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $T = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in T}$ une famille de réels indéxée par le triangle T. Alors

$$\sum_{(i,j)\in T} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\right).$$

Remarques.

1. Les sommes de la proposition 6.4 sont dîtes triangulaires : si on place les données dans un tableau, et en numérotant les lignes par i, les colonnes par j, les sommes de la proposition 6.4 consistent à sommer tous les éléments sous la diagonale, diagonales comprise pour le premier cas, non comprise dans le deuxième.
2. Dans cette proposition, la première égalité signifie qu'on somme d'abord sur les lignes, puis sur les colonnes (somme sur i à j fixé, puis somme sur j), et la deuxième qu'on somme d'abord sur les colonnes, puis sur les lignes (somme sur j à i fixé, puis sur i).

3. Il est important de savoir correctement déterminer les valeurs extrêmes de chaque indice. Par exemple, avec les notations de la proposition 6.4, dans le deuxième cas, puisque si $(i,j) \in T$, on a $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on a nécessairement $2 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
4. Il faut aussi savoir le faire lorsqu'un des indices est fixé. Si i est fixé, on a $i < j \leqslant n$, donc $i+1 \leqslant j \leqslant n$, ce qui donne les valeurs de j. Si j est fixé, on a $1 \leqslant i < j$, donc $1 \leqslant i \leqslant j-1$, d'où les valeurs de i.

Méthode 6.5

L'intervertion des signes sommes lors de calculs de sommes doubles (rectangulaires ou triangulaires) est une technique pour obtenir des égalités.

7 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Définition 7.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la *factorielle de n* par $n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k & \text{sinon.} \end{cases}$

Proposition 7.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Proposition 7.3

Soient $0 \leqslant p \leqslant n$. Alors $\dfrac{n!}{p!} = n(n-1)(n-2)\cdots(p+1) = \displaystyle\prod_{k=p+1}^{n} k$.

Définition 7.4

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$. On définit le *coefficient binomial* $\dbinom{n}{p}$ par $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque.

Nous verrons dans le chapitre sur les ensembles finis une définition ensembliste des coefficients binomiaux.

Proposition 7.5

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$. Alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\cdots(p+1)}{(n-p)!}$.

Remarque.

Quand on calcle explicitement des coefficients binomiaux, il ne faut surtout pas calculer toutes les factorielles, mais simplifier les produits autant que possible, cf les exemples.

Proposition 7.6

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$. Alors $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

Proposition 7.7

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$. Alors $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Proposition 7.8 (Formule du triangle de Pascal)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Proposition 7.9 (Formule du binôme)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Corollaire 7.10

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a-b)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

En particulier, on a

$$(a-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k, \qquad \text{et } (a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k.$$

8 Systèmes linéaires

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la résolution de systèmes linéaires. La théorie des systèmes linéaires sera faîte ultérieurement, lorsque nous aurons les outils d'algèbre linéaire.

On fixe dans ce paragraphe deux entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$, une famille de réels $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, et $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 8.1 (Système linéaire)

1. Le système à n équations (ou lignes) et p inconnues à coefficients $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et de second membre $(b_1, \ldots, b_n)$ est le système

$$(S) \ : \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

2. Le système est *homogène* si $(b_1, \ldots, b_n) = (0, \ldots, 0)$.

3. Le système homogène associé (S_0) est le système obtenu en remplaçant $(b_1, \dots, b_n)$ par $(0, \dots, 0)$.

4. Le système est *compatible* s'il admet au moins une solution.

Remarques.

1. Un système peut n'avoir aucune solution : il est alors *incompatible*.
2. Un système peut avoir une infinité de solutions. Dans ce cas, certaines des inconnues sont alors des paramètres de l'ensemble des solutions, *cf.* les résolutions en td.
3. Un système se résout (presque) tout le temps par équivalences. Il faudra veiller à faire une rédaction qui en tient compte, *cf.* les rédactions en td.

Méthode de résolution d'un système linéaire

On utilisera **impérativement** la technique de manipulation sur les lignes exposée ci-dessous (méthode du pivot). Pour un système à n équations et p inconnues, on procède ainsi :

— On choisit tout d'abord une inconnue et une équation : cette équation est la ligne pivot. On place cette équation en premier, et également l'inconnue choisie, et ce dans toutes les équations.

— Pour chacune des équations restantes, on élimine l'inconnue choisie en faisant une combinaison linéaire entre cette équation et la ligne pivot.

— Il reste alors l'équation pivot, et un système de $n-1$ équations à $p-1$ inconnues. On recommence alors le procédé avec ce système.

— Finalement, il reste un système triangulaire, qu'on résout (s'il y a des solutions) en remplaçant successivement les valeurs des inconnues dans les équations précédentes.

On utilisera systématiquement le codage donné dans la résolution de l'exemple ci-dessous pour expliquer chaque manipulation.