Chapitre 6

Fonctions usuelles

1 Logarithmes et exponentielles

1.1 Logarithme népérien

Définition 1.1 (Logarithme népérien)

Le logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction

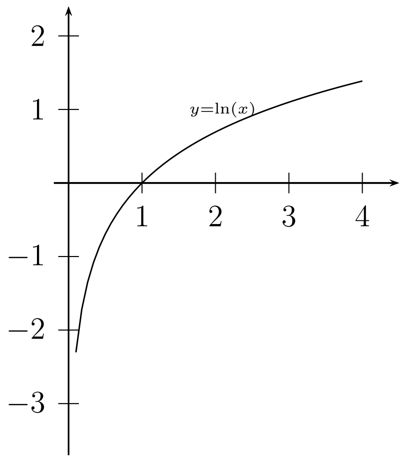
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

qui s'annule en 1. Il est noté ln.

Proposition 1.2 (Propriétés élémentaires de $\ln$)

1. La fonction ln est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. Pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
4. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$.
6. Le logarithme népérien et une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Voici le graphe du logarithme népérien.



Proposition 1.3

1. Une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \longmapsto x\ln(x) - x$.
2. Une primitive de la fonction $x \longmapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$ est la fonction $x \longmapsto \ln|x|$.

Remarque.

Les primitives sur $\mathbb{R}^*$ de $x \longmapsto 1/x$ sont les fonctions $x \longmapsto \begin{cases} \ln(|x|) + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(|x|) + C_2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

1.2 Fonction exponentielle

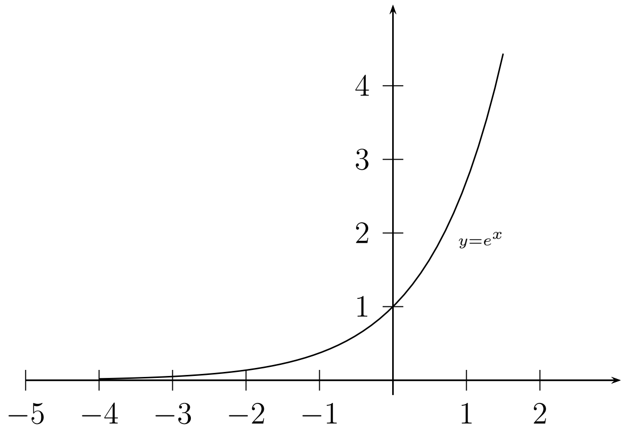
Définition 1.4 (Exponentielle)

La fonction exponentielle exp et la fonction réciproque du logarithme népérien. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.5 (Propriétés élémentaires de $\exp$**)**

1. Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $\ln(\exp(y)) = y$, $\exp(\ln(x)) = x$ et exp est strictement positive.
2. La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est strictement croissante, dérivable et $\exp' = \exp$.
3. $\exp(0) = 1$.
4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \quad \text{et} \quad \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.
5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\exp(x) \geqslant x + 1$.
7. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Voici le graphe de la fonction exponentielle.



Définition 1.6 (e)

1. On définit le réel e par $e = \exp(1)$. Autrement dit, e et l'unique antécédent de 1 par ln : $\ln(e) = 1$.
2. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ le réel e^x par : $e^x = \exp(x)$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit le réel a^x par $a^x = e^{x \ln(a)}$.

Proposition 1.7

Pour tous $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $\ln(x^y) = y \ln(x)$.

Proposition 1.8

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que u soit à valeurs strictement positives. Alors la fonction f définie sur I par

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = u(x)^{v(x)}$$

est dérivable sur I, et si $x \in I$, on a

$$f'(x) = f(x) \times \left(v'(x) \ln(u(x)) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

Remarque.

On utilise souvent en informatique le logarithme en base 2, et en physique le logarithme en base 10.

Le logarithme en base 2, noté $\ln_2$, est défini sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Il vérife les mêmes propriétés que le logarithme usuel, à ceci près que $\ln_2(2) = 1$, et donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\ln_2(2^x) = x$.

Le logarithme en base 10, noté en général log, est défini sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Il vérife les mêmes propriétés que le logarithme usuel, à ceci près que $\log(10) = 1$, et donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\log(10^x) = x$.

2 Fonctions puissances

On connait déjà les fonctions $x \longmapsto x^n$ si $n \in \mathbb{N}$, définies sur $\mathbb{R}$. On connait aussi les fonctions $x \longmapsto x^n$ si $n \in \mathbb{Z}$, définies sur $\mathbb{R}^*$. On connait aussi les fonctions $x \longmapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ lorsque $n \in \mathbb{Z}^*$, définies sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair, sur $\mathbb{R}$ si n est impair : ce sont les fonctions réciproques des précédentes : on utilise le théorème de la bijection.

On voudrait maintenant définir une fonction $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1 (Fonctions puissances)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction *puissance* $\alpha^{\grave{a}me}$ est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}. \end{array}$$

Proposition 2.2 (Propriétés élémentaires)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

2. La fonction puissance α-ème est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

3. Pour $\alpha \neq -1$, une primitive de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

4. Si $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est strictement décroissante,

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0,$$

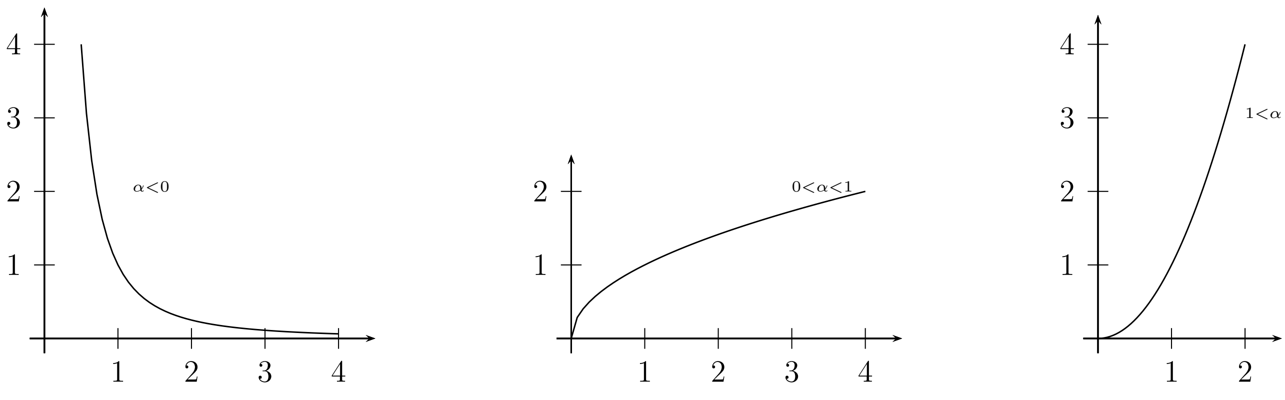
et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est strictement croissante,

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty,$$

et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Voici les graphes des fonctions puissances.



Remarques.

1. Bien entendu, si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction puissance n-ème se prolonge à $\mathbb{R}$, comme rappelé au début du paragraphe.
2. Pour $\alpha = 0$, on obtient la fonction constante égale à 1, et pour $\alpha = 1$, la fonction identité de $\mathbb{R}$.
3. Il ne faut pas confondre les fonctions $x \longmapsto x^y$ (fonction puissance sur $\mathbb{R}_+^*$) et $y \longmapsto x^y$ (fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ pour $x > 0$).

Proposition 2.3

1. Si $0 < \alpha$, $x \longmapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.
2. Si $0 < \alpha < 1$, le graphe de $x \longmapsto x^\alpha$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
3. Si $1 < \alpha$, le graphe de $x \longmapsto x^\alpha$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Proposition 2.4 (Fonction réciproque)

Soit $\alpha \neq 0$. La fonction réciproque de $x \longmapsto x^\alpha$ est $x \longmapsto x^{1/\alpha}$.

3 Croissances comparées

Proposition 3.1 (Croissances comparées 1)

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)/x = 0$.

Proposition 3.2 (Croissances comparées 2)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\alpha = 0.$$

Proposition 3.3 (Croissances comparées 3)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^\beta \left(e^x\right)^\alpha = 0.$$

4 Fonctions circulaires réciproques

4.1 Définitions

Proposition 4.1

Les fonctions

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1], \qquad \cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1], \qquad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

sont bijectives.

Méthode 4.2

En particulier, on a :

1. Si $a, b \in [0, \pi]$, $a = b \iff \cos(a) = \cos(b)$.
2. Si $a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $a = b \iff \sin(a) = \sin(b)$.
3. Si $a, b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $a = b \iff \tan(a) = \tan(b)$.

C'est très utile pour résoudre des équations. Et facilement vérifiable sur un cercle trigonométrique.

Définition 4.3 (Fonctions circulaires réciproques)

Les fonctions

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi], \qquad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

sont les fonctions réciproques respectives des bijections de la proposition 4.1.

Proposition 4.4

Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\arccos(x)$ est l'unique angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus est x.
2. $\cos(\arccos(x)) = x$.
3. $\arccos(\cos(\theta)) = \theta \iff \theta \in [0, \pi]$.

Proposition 4.5

Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\arcsin(x)$ est l'unique angle de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus est x.
2. $\sin(\arcsin(x)) = x$.
3. $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta \iff \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 4.6

Soit $x \in \mathbb{R}]$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$.

1. $\arctan(x)$ est l'unique angle de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente est x.
2. $\tan(\arctan(x)) = x$.
3. $\arctan(\tan(\theta)) = \theta \iff \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarques.

1. Attention, $\arctan \neq \frac{\arcsin}{\arccos}$.
2. En général,

$$\arcsin(\sin(a)) \neq a, \qquad \arccos(\cos(a)) \neq a, \qquad \arctan(\tan(a)) \neq a.$$

Par exemple, si $a \in [\pi/2, 3\pi/2]$, alors $\sin(u) = \sin(a)$ et $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ impose $u = \pi - a$ et donc $\arcsin(\sin(a)) = \pi - a$.

Proposition 4.7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arcsin(\sin(\theta)) = \begin{cases} \theta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \pi - \theta + 2k\pi \end{cases}$.

Proposition 4.8

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arccos(\cos(\theta)) = \begin{cases} \theta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ -\theta + 2k\pi \end{cases}$.

Proposition 4.9

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arctan(\tan(\theta)) = \theta + k\pi$.

Méthode 4.10 (Déterminez $\arccos(\cos(\theta))$, $\arcsin(\sin(\theta))$, $\arctan(\tan(\theta))$)

On place sur un cercle trigonométrique, suivant le cas, $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ ou $\tan(\theta)$. Puis :

1. Pour $\arccos(\cos(\theta))$, on détermine dans le cercle trigonométrique l'unique angle $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$: on a $\alpha = \arccos(\cos(\theta))$.
2. Pour $\arcsin(\sin(\theta))$, on détermine dans le cercle trigonométrique l'unique angle $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\alpha) = \sin(\theta)$: on a $\alpha = \arcsin(\sin(\theta))$.
3. Pour $\arctan(\tan(\theta))$, on détermine dans le cercle trigonométrique l'unique angle $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = \tan(\theta)$: on a $\alpha = \arctan(\tan(\theta))$.

Ensuite, on justifie avec des phrases. Par exemple pour le cosinus, on peut écrire : Soit $\alpha = \cdots$. Alors $\alpha \in [0, \pi]$, et $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$ car ... (à justifier), donc $\alpha = \arccos(\cos(\theta))$.

Proposition 4.11 (Symétries)

Les fonctions arcsin et arctan sont impaires, et pour $x \in [-1, 1]$, on a $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$, autrement dit, le graphe de arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, \pi/2)$.

4.2 Dérivation des fonctions circulaires réciproques

Proposition 4.12

On a

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in [-1,1], &\quad \sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}, \\
\forall\, x \in\,]-1,1[, &\quad \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \\
\forall\, x \in [-1,1] \setminus \{0\}, &\quad \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \\
\forall\, x \in \mathbb{R}, &\quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\
\forall\, x \in \mathbb{R}, &\quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Proposition 4.13 (Dérivation des fonctions circulaires réciproques)

1. La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall\, x \in\,]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall\, x \in\,]-1,1[,\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Proposition 4.14 (Tangentes remarquables)

1. Le graphe de arcsin admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x$, et des tangentes verticales au point d'abscisse ± 1.

2. Le graphe de arccos admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = -x + \frac{\pi}{2}$, et des tangentes verticales au point d'abscisse ± 1.

3. Le graphe de arctan admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x$.

Proposition 4.15 (Asymptotes)

Le graphe de arctan admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ (resp. $y = -\frac{\pi}{2}$) quand $x \longrightarrow +\infty$ (resp. $x \longrightarrow -\infty$).

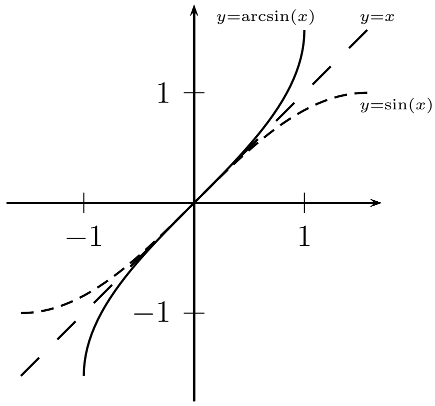
On en déduit les tableaux de variations :

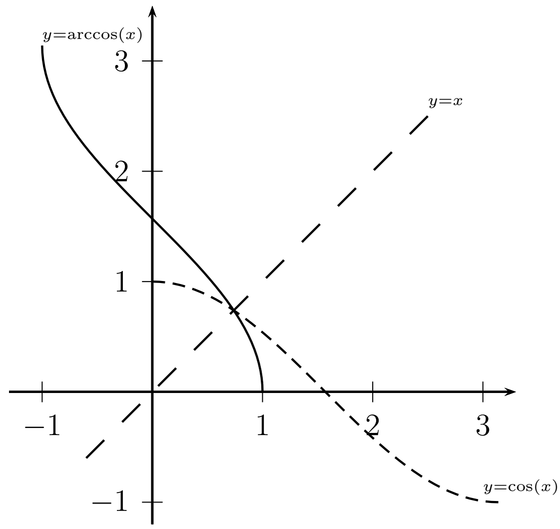
x	-1		0		1
$\arcsin'(x)$		$+$	1	$+$	
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

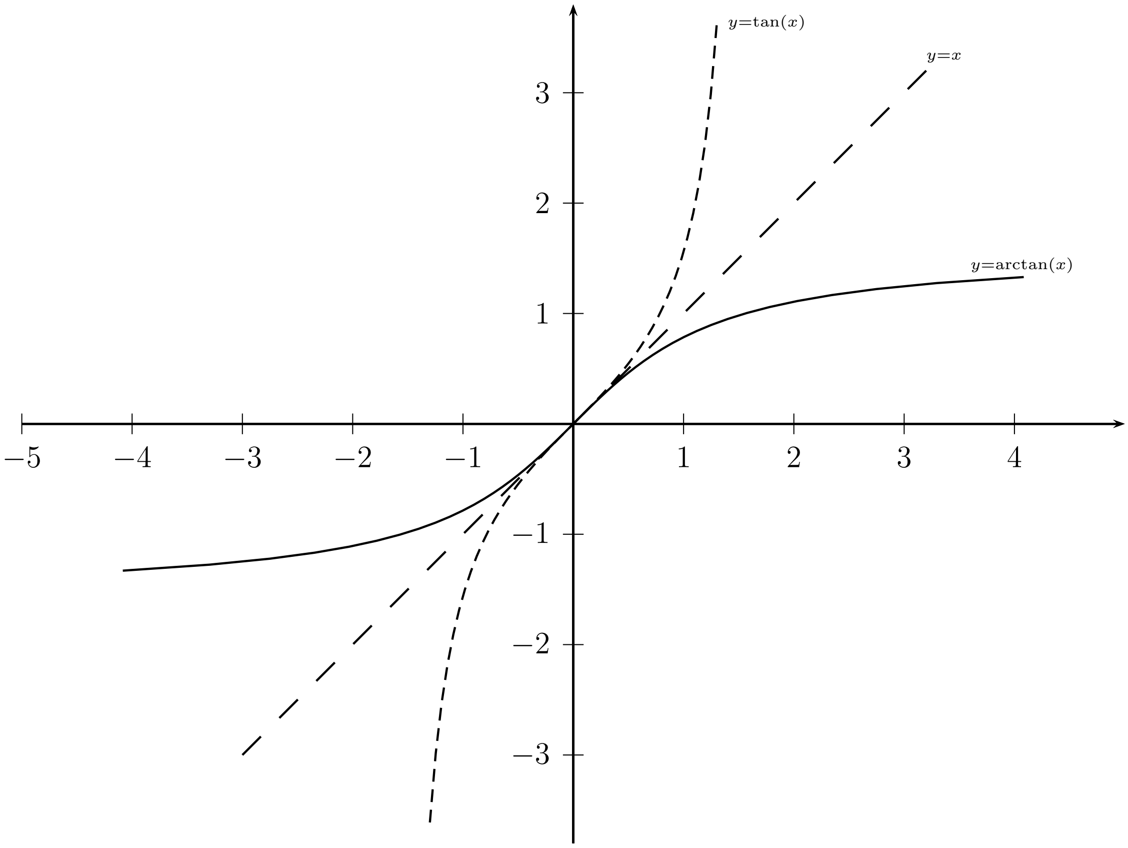
x	-1		0		1
$\arccos'(x)$		$-$	-1	$-$	
$\arccos(x)$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan'(x)$		$+$	1	$+$	
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Voici également les graphes de ces fonctions, avec en pointillés ceux de cos, sin et tan. Rajoutez les tangentes remarquables et les asymptotes.







4.3 Propriétés diverses

Proposition 4.16

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$xy = 1 \iff \arctan(x) + \arctan(y) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Proposition 4.17

1. Soit $x \in [-1,1]$. Alors $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors
$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4.18

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$. De plus, un tel x est unique à 2π près.

5 Fonctions hyperboliques

Définition 5.1 (Définition des fonctions hyperboliques)

Les fonctions *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique*, notées respectivement sh, ch et th, sont définies sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition 5.2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

Proposition 5.3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1$ et $-1 < \operatorname{th}(x) < 1$.

Proposition 5.4

1. La fonction cosinus hyperbolique est paire et les fonctions sinus et tangente hyperboliques sont impaires.

2. Ces trois fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a
$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}, \qquad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \qquad \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

3. Les fonctions sinus et tangente hyperboliques sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, et la fonction cosinus hyperbolique est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. Ces trois fonctions admettent des limites en $\pm\infty$ et on a
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1.$$

Proposition 5.5 (Tangentes remarquables)

1. La fonction sh admet une tangente d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0.

2. La fonction ch admet une tangente horizontale d'équation $y = 1$ au point d'abscisse 0.

3. La fonction th admet une tangente d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0.

Proposition 5.6 (Asymptotes)

Le graphe de th admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) quand $x \longrightarrow +\infty$ (resp. $x \longrightarrow -\infty$).

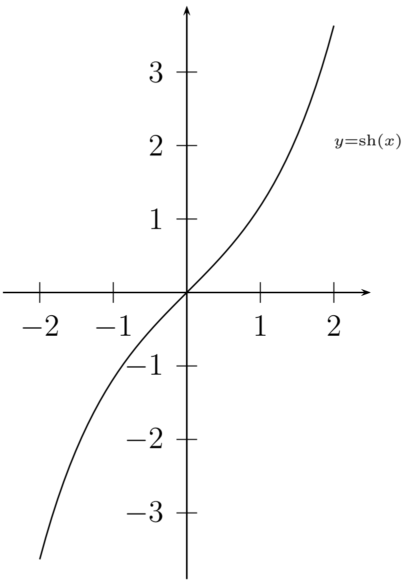
Voici les tableaux de variations de ces fonctions.

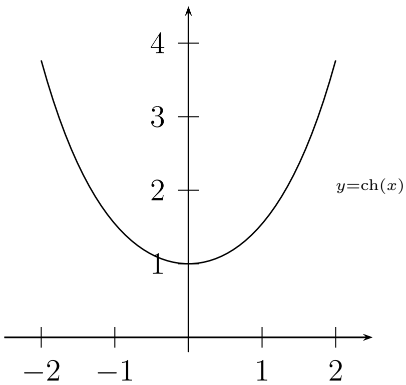
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		+	1	+	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

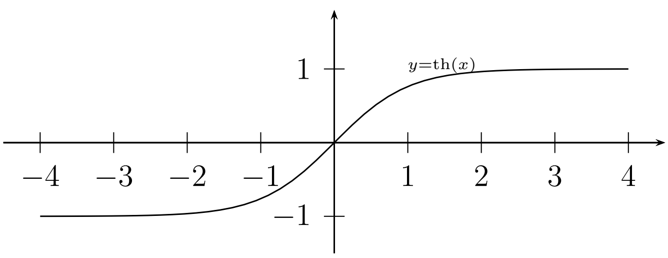
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	+	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$		+	0	+	
$\mathrm{th}(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Voici les graphes. Rajoutez les tangentes remarquables et les asymptotes.







Remarque.

Les fonctions hyperboliques paramàtrent les hyperboles. En effet, la courbe paramétrée donnée par $x(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $y(t) = \mathrm{sh}(t)$ est une branche d'une hyperbole équilatàre, car $x^2(t) - y^2(t) = 1$.

Proposition 5.7

Les fonctions

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty[, \qquad \mathrm{th} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$$

sont bijectives.

Remarque.

On notera bien que si sh et th sont injectives sur $\mathbb{R}$, la fonction ch ne l'est que sur $\mathbb{R}_+$.