Chapitre 33

Groupe orthogonal

Dans tout ce chapitre, on fixe un espace vectoriel euclidien de dimension $n = 2$ ou $n = 3$. On notera $\langle . \, , . \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

1 Isométries vectorielles

1.1 Définition et caractérisations

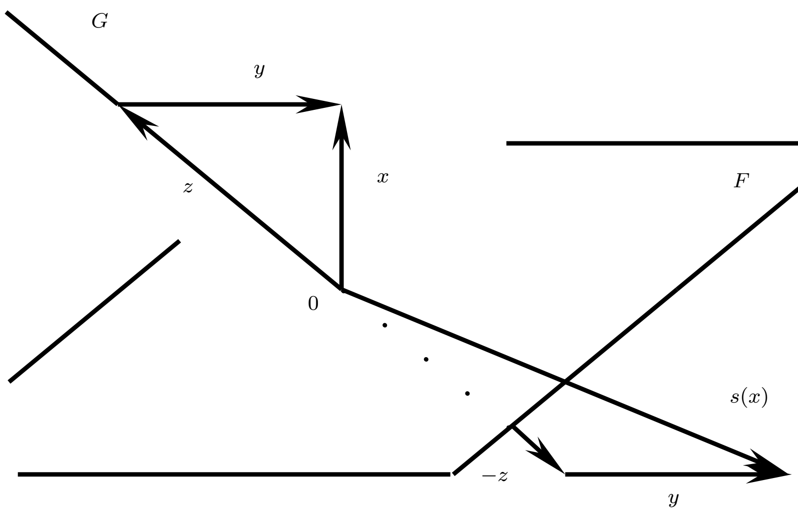
Définition 1.1 (Isométrie vectorielle)

Une *isométrie vectorielle* de E est un endomorphisme de E qui conserve la norme, *i.e.* un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que,

$$\forall\, x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|\,.$$

Proposition 1.2 (CNS pour qu'une symétrie soit une isométrie vectorielle)

Une symétrie de E est une isométrie vectorielle si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.



Définition 1.3 (Réflexion)

Une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 1.4 (Une isométrie est un automorphisme)

Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.

Remarque.

On utilise aussi la terminologie *automorphisme orthogonal* à la place d'isométrie vectorielle.

Proposition 1.5 (Caractérisation par le produit scalaire)

Une application $f : E \longrightarrow E$ est une isométrie vectorielle de E si et seulement si elle conserve le produit scalaire, *i.e.* si et seulement si

$$\forall\, x, y \in E,\ \langle f(x)\ , f(y)\rangle = \langle x\ , y\rangle\,.$$

Proposition 1.6 (Caractérisation par l'image d'une base orthonormale)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors sont équivalents :

1. f est une isométrie vectorielle.
2. L'image par f d'une base orthonormale de E est une base orthonormale de E.
3. L'image par f de toute base orthonormale de E est une base orthonormale de E.

1.2 Groupe orthogonal

Définition 1.7 (Groupe orthogonal)

Le *groupe orthogonal* de E, noté $O(E)$, est l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition 1.8

L'ensemble $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

2 Matrices orthogonales

2.1 Définition et caractérisations

Définition 2.1 (Matrice orthogonale, $O(n)$)

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si

$${}^tMM = M\,{}^tM = I_n.$$

On note $O(n) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Proposition 2.2 (Caractérisation par l'inverse)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$M \in O(n) \iff {}^tM \in O(n) \iff {}^tMM = I_n \iff M\,{}^tM = I_n \iff M \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } M^{-1} = {}^tM.$$

Proposition 2.3 (Caractérisation par les colonnes ou les lignes)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors M est une matrice orthogonale si et seulement si les vecteurs colonnes (resp. vecteurs lignes) de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

2.2 Matrices orthogonales positives et négatives

Proposition 2.4 (Déterminant d'une matrice orthogonale)

Une matrice orthogonale a pour déterminant ± 1.

Remarque.
Attention, la réciproque est fausse.

Définition 2.5 (Matrice orthogonale positive/négative)

Une matrice orthogonale est positive (resp. négative) si son déterminant vaut 1 (resp. -1).

Définition 2.6 (Groupe orthogonal d'ordre n)

1. Le *groupe orthogonal d'ordre* n noté $O(n)$ est l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

2. Le groupe *spécial orthogonal d'ordre* n noté $SO(n)$ est le sous-ensemble de $O(n)$ des matrices positives.

Proposition 2.7

1. L'ensemble $O(n)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), .)$.

2. L'ensemble $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$.

3 Matrices orthogonales et isométries vectorielles

3.1 Matrices dans une base orthonormale

Proposition 3.1 (Matrice de passage entre deux bases orthonormales)

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $\mathcal{B}'$ une base de E. Alors la base $\mathcal{B}'$ est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.

Proposition 3.2 (Matrice d'un automorphisme orthogonal)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors sont équivalents

1. f est une isométrie vectorielle.

2. La matrice de f dans une base orthonormale est orthogonale.

3. La matrice de f dans toute base orthonormale est orthogonale.

Corollaire 3.3 (Déterminant d'une isométrie vectorielle)

Le déterminant d'une isométrie vectorielle vaut ± 1.

Remarque.

Attention, la réciproque est fausse.

Proposition 3.4 (Matrice d'une symétrie orthogonale)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans une base orthonormale. Alors f est une symétrie orthogonale si et seulement si $M^2 = I_n$ et M est symétrique, ou encore si et seulement si

$$M \in O(n) \quad \text{et} \quad {}^tM = M.$$

3.2 Groupe spécial orthogonal

Définition 3.5 (Isométries vectorielles positives, négatives)

Une isométrie vectorielle positive (resp. négative) de E est une isométrie vectorielle de déterminant 1 (resp. -1).

Proposition 3.6 (Une réflexion est négative)

Une réflexion est une isométrie vectorielle négative.

Définition 3.7 (Groupe spécial orthogonal)

Le *groupe spécial orthogonal* de E noté $SO(E)$ est le sous-ensemble de $O(E)$ des isométries vectorielles positives.

Proposition 3.8 (Isométries positives/négatives et matrices orthogonales positives/négatives)

Une isométrie vectorielle est positive (resp. négative) si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale positive (resp. négative).

Méthode 3.9

Si f est une isométrie, il suffit de calculer le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base (orthonormale ou non) pour savoir si f est positive. En effet, le déterminant ne dépend pas de la base.

Proposition 3.10

L'ensemble $SO(E)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$.

Remarque.

La composée d'une isométrie positive et d'une isométrie négative est une isométrie négative En effet, le produit des déterminants vaut -1, et c'est le déterminant de la composée. De même, la composée de deux isométries négatives est positive.

4 Application : produit mixte

4.1 Orientation d'un espac vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 0$, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

On peut donc définir sur l'ensemble des bases de E la relation $\sim$:

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \iff \text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0.$$

C'est une relation d'équivalence :

1. Elle est réflexive puisque $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$.
2. Symétrique puisque $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\text{dét}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$, donc les deux déterminants sont simultanément > 0.
3. Transitive puisque $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \text{dét}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')\,\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ dès que $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$.

On peut remarquer qu'il n'y a que deux classes d'équivalences : si on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors une base $\mathcal{X}$ n'est pas équivalente à $\mathcal{B}$, alors

$$\text{dét}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{X}) = \text{dét}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\,\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = -\,\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) > 0.$$

Définition 4.1 (Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

Orienter E, c'est choisir une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence précédente, et décréter que les bases de cette classe d'équivalence sont positives (ou directes), et les autres négatives (ou indirectes).

Remarque.

En pratique, pour choisir la classe d'équivalence, on choisit une base (celle qui nous interesse le plus), et on décrète qu'elle est positive. Par exemple, dans $\mathbb{R}^n$, on choisit (presque) toujours l'orientation donnée par la base canonique.

4.2 Produit mixte

Dans ce paragraphe, on considère un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

Proposition 4.2

La matrice de passage entre deux base orthonormales positives (resp. deux bases orthonormales négatives) est une matrice orthogonale positive, et la matrice de passge entre une base orthonormale positive et une base orthonormale négative est une matrice orthogonale négative.

Corollaire 4.3

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales positives. Alors :

$$\forall\,(u_1, \dots, u_n) \in E^n,\ \text{dét}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \text{dét}_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n),$$

ou encore

$$\forall\ (u_1, \ldots, u_n) \in E^n,\ \text{dét}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)\right) = \text{dét}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_1, \ldots, u_n)\right).$$

Définition 4.4 (Produit mixte)

Le *produit mixte* de n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ est leur déerminant dans n'importe quelle base orthonormale positive. On le note $[u_1, \ldots, u_n]$.

Remarque.

Le choix de la base orthonormale positive n'est pas important au vu du corollaire 4.3.

Proposition 4.5 (Interpretation géométrique)

1. Soient A, B, C trois points distincts du plan euclidien. L'aire du parallèlogramme construit sur ces 3 points est
$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

2. Soient A, B, C, D quatre points distincts de l'espace euclidien. Le volume du parallélépipède construit sur ces 4 points est
$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

5 Isométries vectorielles du plan euclidien

Dans ce §, E est le plan euclidien orienté.

5.1 Rotations du plan euclidien

Théorème 5.1 (Description de $0(2)$**)**

Les éléments de $SO(2)$ sont les matrices $R(\theta)$ et les matrices de $O(2) \setminus SO(2)$ les matrices $S(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, où

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Corollaire 5.2 (Description de $SO(2)$**)**

Le groupe $SO(2)$ est commutatif. De plus, on a pour tous $\theta, \theta' \in [0, 2\pi[$,

$$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta+\theta'}, \qquad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}, \qquad R_0 = I_2.$$

Remarque.

On a une bijection $\mathcal{U} \longrightarrow SO(2)$ qui à $e^{i\theta}$ associe R_θ.

Théorème 5.3 (Matrice d'une isométrie vectorielle positive du plan)

Soit $f \in SO(E)$. Alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de f dans toute base orthonormale positive soit R_θ.

Remarques.

1. Dans une base orthonormale négative, la matrice serait $R_{-\theta}$, puisqu'un changement de base vers une base orthonormale négative est donné par une matrice S_α, égale à son inverse, donc la nouvelle matrice est
$$S_\alpha R_\theta S_\alpha = R_{-\theta}.$$
2. On a $R_0 = I_2$ et $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc la matrice de la réflexion par rapport à Ox.

Définition 5.4 (Rotation du plan)

Une rotation du plan est une isométrie vectorielle positive.

Définition 5.5 (Mesure d'un angle)

Une *mesure de l'angle* d'une rotation est un réel θ telle que la matrice de la rotation dans une base orhonormale directe soit R_θ.

Remarque.

Ce réel est unique modulo 2π.

Proposition 5.6 (Détermination d'une mesure de l'angle)

Soient a un vecteur unitaire de E et u la rotation d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\cos(\theta) = (a|u(a)) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(R_\theta), \quad \sin(\theta) = [a, u(a)].$$

Méthode 5.7

Lorsqu'on a un endomorsphisme f d'un espace euclidien de dimension 2 donné par sa matrice A relative à une base orthonormale positive, et qu'on demande de caractériser f, on procède ainsi :

1. On vérifie que A est orthogonale.
2. Si elle l'est, on vérifie qu'elle est positive en calculant son déterminant. S'il vaut 1, f est une rotation.
3. On détermine l'angle θ avec la trace, ce qui donne $\cos(\theta)$, puis on détermine le signe de $\sin(\theta)$ en déterminant le signe de $[a, f(a)]$, où a est un vecteur non nul quelconque.

5.2 Réflexions du plan euclidien

Proposition 5.8

On a pour tous $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$

$$S_\alpha^2 = I_2, \quad S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}, \quad S_\alpha R_\theta = S_{\alpha-\theta}, \quad R_\theta S_\alpha = S_{\alpha+\theta}.$$

Proposition 5.9

Les isométries vectorielles négatives du plan sont les réflexions du plan. Plus précisément, la matrice S_θ ($\theta \in \mathbb{R}$) est la matrice dans une base orthonormale de la reflexion par rapport à la droite d'équation

$$\begin{cases} y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) x & \text{si} \quad \theta \not\equiv \pi \mod 2\pi, \\ x = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Méthode 5.10

Lorsqu'on a un endomorsphisme f d'un espace euclidien de dimension 2 donné par sa matrice A relative à une base orthonormale directe, et qu'on demande de caractériser f, on procède ainsi :

1. On vérifie que A est orthogonale.
2. Si elle l'est, on vérifie si elle est indirecte en calculant son déterminant. S'il vaut -1, f est une réflexion.
3. On détermine la droite de la réflexion en résolvant le système $AX = X$.

Proposition 5.11 (Décomposition en produit de réflexions)

Tout isométrie vectorielle du plan est la composée d'au plus deux réflexions.

6 Compétences

1. Faire la différence entre les termes bases orthogonales/orthonormales et matrices orthogonales (qui va avec quoi ?).
2. Reconnaître une matrice orthogonale (par différentes méthodes : ${}^tAA = I_n$, matrice de passage entre deux bases orthonormales).
3. Exploiter le caractère orthogonal d'une matrice pour calculer une inverse.
4. Reconnaitre un automorphisme orthogonal du plan.