Chapitre 14

Intégrales à paramètres

Dans tout le chapitre, les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés sont d'intérieur non vide et les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

I Convergence d'une suite d'intégrales

I. A Convergence uniforme sur un segment (rappel)

Théorème 1.1

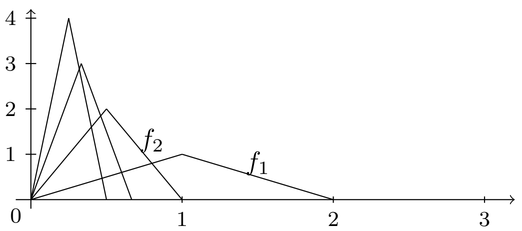
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur un segment $[a\,;b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a\,;b]$, alors f est continue sur $[a\,;b]$ et :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Attention : La convergence simple ne suffit pas !

Contre exemple 1.2 : Sur $[0\,;2]$, pour $n\geqslant 1$,

$$f_n : x\mapsto \begin{cases} n^2x & \text{si } x\leqslant \frac{1}{n} \\ n(2-nx) & \text{si } x\in \left]\frac{1}{n}\,;\frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

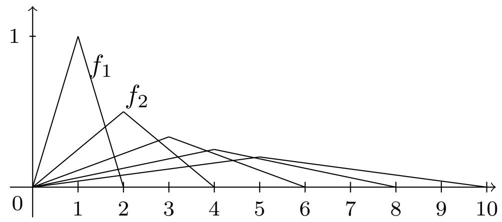


$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x\mapsto 0$ sur $[0\,;2]$ et $\displaystyle\int_0^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t \nrightarrow 0$.

Attention : Ce théorème n'est pas valable sur un intervalle quelconque.

Contre exemple 1.3 : Sur $[0\,;+\infty[$, pour $n\geqslant 1$,

$$f_n : x\mapsto \begin{cases} \frac{x}{n^2} & \text{si } x\leqslant n \\ \frac{2n-x}{n^2} & \text{si } x\in \left]n\,;2n\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$



$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x\mapsto 0$ sur $[0\,;+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \nrightarrow 0$.

I. B Le théorème de convergence dominée

Théorème 1.4 (de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si :

- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;
- il existe une fonction φ positive et intégrable sur I telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, |f_n|\leqslant\varphi$;

alors :

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f.$$

Remarques 1.5 :

- Sous les hypothèses du théorème, toutes les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et donc les intégrales sont convergentes.
- Pour appliquer le théorème de convergence dominée, on vérifiera explicitement les hypothèses de convergence simple et de domination, mais il n'est pas nécessaire d'écrire que les fonctions sont continues par morceaux.

Exemples 1.6 :

- Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée aux suites de fonctions de 1.2 et 1.3 ?
- Intégrales de Wallis : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$.

Méthode 1.7 (Cas particulier : convergence dominée sur un segment)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un segment $[a\,;b]$.
Si :

- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a\,;b]$ vers une fonction f continue par morceaux ;
- il existe une constante positive M telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[a\,;b], |f_n(x)|\leqslant M$;

alors :

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

Exemple 1.8 : C'est ce que l'on a fait pour les intégrales de Wallis.

Méthode 1.9

Le théorème de convergence dominée s'applique sur un intervalle I qui est fixé, mais si l'intervalle d'intégration dépend de n, on peut prolonger la fonction par la fonction nulle.

Exemple 1.10 :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}\,\mathrm{d}x$$

I. C Extension à une famille de fonctions

Théorème 1.11

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et λ_0 est un élément de J ou une extrémité de J.
Si :

- pour tout $x\in I$, $f_\lambda(x)\xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} f(x)$ avec f une fonction continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive et intégrable sur I telle que : $\forall\lambda\in J, |f_\lambda|\leqslant\varphi$;

alors :

$$\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \int_I f.$$

II Intégration terme à terme

II. A Convergence uniforme sur un segment (rappel)

Théorème 2.1

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a\,;b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.
Si $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction S sur $[a\,;b]$, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)=\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.2 : On peut en particulier utiliser ce théorème pour une série entière si $[a\,;b]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence : $-R<a<b<R$.

II. B Cas positif

Théorème 2.3 (Intégration terme à terme : cas positif)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur I.
Si :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est positive sur I ;
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et que sa somme est continue par morceaux sur I ;

alors, dans $[0\,;+\infty]$:

$$\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Remarque 2.4 : En particulier la somme $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$ de la série de fonction (qui est supposée continue par morceaux sur I) est intégrable sur I si et seulement si la série $\sum\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge, c'est à dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)<+\infty.$$

Exemple 2.5 : Montrer que l'intégrale suivante converge et la calculer :

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$

II. C Intégration terme à terme d'une série de fonction

Théorème 2.6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si :

- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et que sa somme est continue par morceaux sur I ;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right) < +\infty$;

alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Remarques 2.7 :

- Ces deux théorèmes sont l'analogue pour une interversion $\sum \leftrightarrow \int$ du théorème de Fubini sur les familles sommables pour une interversion $\sum \leftrightarrow \sum$.
- D'après le théorème 2.3, si $\sum |f_n|$ converge vers une fonction continue par morceaux sur I et $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(t)|\right)\mathrm{d}t < +\infty$,
  alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right) < +\infty$.

Exemple 2.8 : Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

Méthode 2.9

Lorsque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right) = +\infty$, on peut essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles ou à la suite des restes.

Exemple 2.10 : Montrer que :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t^{2n+2}}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

III Fonction définie par une intégrale à paramètre

III. A Continuité

Notation : Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- pour tout $t\in I$ (fixé), $f(\cdot,t)$ désigne la fonction $x\mapsto f(x,t)$ définie de A dans $\mathbb{K}$;
- pour tout $x\in A$ (fixé), $f(x,\cdot)$ désigne la fonction $t\mapsto f(x,t)$ définie de A dans $\mathbb{K}$.

Théorème 3.1

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si :

- pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive et intégrable sur I telle que,
  pour tout $x\in A$, $|f(x,\cdot)|\leqslant\varphi$.

Alors la fonction $g : x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Remarques 3.2 : Comme pour le théorème de convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme, dans les exercices on ne vérifiera pas explicitement l'hypothèse de continuité par morceau de $f(x,\cdot)$. Par contre les hypothèses de continuité de $f(\cdot,t)$ et l'hypothèse de domination doivent être vérifiées.

Exemple 3.3 : Montrer que la fonction $g : x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
Remarque : la fonction g est la transformée de Laplace de $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$.

Remarque 3.4 : La continuité étant une propriété locale, pour montrer que g est continue sur A, il suffit de montrer que pour tout $a\in A$ il existe un voisinage relatif de a dans A sur lequel g est continue.
Ainsi, si A est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ce sera souvent le cas), on peut vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés.

Exemple 3.5 : Montrer que la fonction $g : x\mapsto\int_0^{+\infty}\cos(t^2)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

Méthode 3.6

Pour déterminer la limite en une extrémité de A, on peut revenir au théorème 1.11.

Exemple 3.7 : Montrer que $g : x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
Montrer que $x\mapsto xg(x)$ a une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite. En déduire un équivalent de g au voisinage de $+\infty$.

III. B Dérivabilité

Rappel : Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $t_0 \in I$, lorsque $f(\cdot, t_0) : x \mapsto f(x, t_0)$ est dérivable en $x_0 \in A$, sa dérivée en x_0 est appelée dérivée partielle par rapport à x en (x_0, t_0) et notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0)$.

Exemple 3.8 : Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{x}{x^2+t^2}. \end{array} \right.$

Montrer que pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Théorème 3.9 (dérivation d'une intégrale à paramètre)

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$ dans $\mathbb{K}$.
Si :

- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que,
  pour tout $x \in A$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right| \leqslant \varphi$.

Alors : $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques 3.10 :

- Dans les exercices, on ne vérifiera pas explicitement les hypothèses de continuité par morceau par rapport à t ; mais les hypothèses de régularité par rapport à x et la domination doivent être vérifiées.
- L'hypothèses de domination pourra être faite sur tout segment de A :
  pour tout segment $[a\,;b]$ de A avec $a < b$, il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout $(x,t) \in [a\,;b] \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.
- On peut remplacer les segments par une autre famille d'intervalles adaptés.

Exemple 3.11 : Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } h(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que $g + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
4. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exemple 3.12 : On pose

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. En déduire $g(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

III. C Classe C^k

Rappel : Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $t_0 \in I$, lorsque $f(\cdot, t_0) : x \mapsto f(x, t_0)$ est k fois dérivable en $x_0 \in A$, sa dérivée en x_0 est appelée dérivée partielle d'ordre k par rapport à x en (x_0, t_0) et notée $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0, t_0)$.

Théorème 3.13

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur $A \times I$ dans $\mathbb{K}$.
Si :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $x \in A$ et tout $j \in [\![0\,;k-1]\!]$, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que,
  pour tout $x \in A$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)\right| \leqslant \varphi$.

Alors : $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et :

$$\forall j \in [\![0\,;k]\!], \forall x \in A, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 3.14 : L'hypothèse de domination peut être faite sur tout segment.

Exemple 3.15 : Fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

- Montrer que la fonction Γ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}, \Gamma^{(k)}$ sous la forme d'une intégrale.
- Montrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Et en déduire une expression de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que $\Gamma(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x}$.