Chapitre 10

Probabilités

I Ensembles dénombrables

Définition 1.1

- Un ensemble A est dit **fini** lorsque $A = \varnothing$ ou il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de A dans $[\![1\,;N]\!]$. Dans ce cas, N est unique et est appelé **le cardinal de** $\boldsymbol{A}$.
- Un ensemble A est dit **dénombrable** lorsqu'il existe une bijection de A dans $\mathbb{N}$.
- Un ensemble est dit **au plus dénombrable** lorsqu'il est fini ou dénombrable.

Exemples 1.2 : Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, k\mathbb{N}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ sont dénombrables.

Proposition 1.3

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Corollaire 1.4

Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Remarque 1.5 : Un ensemble E non vide est au plus dénombrable si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.

Proposition 1.6

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Corollaire 1.7

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrale.

Exemples 1.8 : Les ensembles $\mathbb{N}^p$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Proposition 1.9

Une réunion au plus dénombrables d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Proposition 1.10

Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.

Théorème 1.11

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Remarque 1.12 : Le même argument diagonal de Cantor permet de montrer que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.

II Espaces probabilisés

II. A Rappels

Définition 2.1

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance.
- On appelle **univers** l'ensemble des résultats observables ou encore des **issues** possibles d'une expérience aléatoire. On note en général Ω l'univers et ω une issue de l'expérience aléatoire.
- Un **événement aléatoire** est un événement lié à une expérience aléatoire et dont la réalisation dépend exclusivement de l'issue ω de l'expérience. Il est représenté par l'ensemble des issues ω qui réalisent cet événement.

- l'événement certain est ____________, il est réalisé par ________________________ ;
- l'événement impossible est ____________, il n'est réalisé par __________________ ;
- un événement élémentaire est de la forme : ____________, il est réalisé par ________________________ ;
- l'événement contraire de A est ____________, il est réalisé lorsque ________________________ ;
- l'événement A ou B est ____________, il est réalisé lorsque ________________________ ;
- l'événement A et B est ____________, il est réalisé lorsque ________________________ ;
- A_1 ou A_2 ou … ou A_n est ____________ est réalisé lorsque ________________________ ;
- A_1 et A_2 et … et A_n est ____________ est réalisé lorsque ________________________ ;
- « si A est réalisé, alors B est réalisé » : ____________.

II. B Tribu

Envisageons deux situations avant de généraliser la notion d'espace probabilisé à un univers infini :

Exemples 2.2 :
- Alexandre et Benoît lancent à tour de rôle un dé équilibré et Alexandre commence. Le premier qui a un 6 a gagné. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k : « le premier 6 arrive au k-ième lancer ». Exprimer « Benoît gagne la partie » à l'aide des S_k.
- Un archer tire une flèche sur une cible, on considère que la flèche arrive aléatoirement sur la cible. Quelle peut être la probabilité que la flèche (ponctuelle) touche un point précis de la cible ? qu'elle arrive dans une zone donnée ?

Définition 2.3

Soit Ω un ensemble, on appelle **tribu** sur Ω une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :
1. $\Omega \in \mathcal{T}$;
2. $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{T}$;
3. $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, la réunion $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ est dans $\mathcal{T}$.

Remarques 2.4 :
- Lorsque Ω est l'univers d'une expérience aléatoire, les éléments de $\mathcal{T}$ sont les événements.
- Lorsque Ω est au plus dénombrable, on choisit en général $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Proposition 2.5

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω, alors :
- $\mathcal{T}$ contient l'événement impossible $\varnothing$;
- $\mathcal{T}$ est stable par union au plus dénombrable.
- $\mathcal{T}$ est stable par intersection au plus dénombrable.
- $\mathcal{T}$ est stable par différence.

Définition 2.6

On appelle **espace probabilisable** un couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où Ω est un ensemble et $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω appelée **tribu des événements**.

Définition 2.7

Deux événements A et B d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ sont dits **incompatibles** lorsque : $A \cap B = \varnothing$.

II. C Probabilité

Définition 2.8

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un univers Ω.
- On appelle **probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$** une application $\mathrm{P} : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$ telle que
  1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
  2. P est une application **σ−additive** : pour toute famille dénombrable $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série de terme général $\mathrm{P}(A_n)$ converge et :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_k) \qquad (\sigma - \text{additivité})$$

- Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est appelé **espace probabilisé**.
- Pour $A \in \mathcal{A}$, le nombre $\mathrm{P}(A)$ est la **probabilité de l'événement A**.

Remarque 2.9 : Dans les exercices, en général, ni Ω ni $\mathcal{T}$ ni la probabilité P n'est précisé. On supposera qu'il existe un modèle mathématique adapté à la modélisation de l'expérience aléatoire considérée et on utilisera les propriétés des probabilités.

Exemple 2.10 : Avec les notations de l'exemple 2.2 et en admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(S_k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$, calculer la probabilité que Benoît gagne la partie.

Proposition 2.11

Soit A et B deux événements.
- *Additivité :* Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille finie d'événements deux à deux incompatibles, alors $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$.
- *Croissance :* Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque 2.12 : $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$.

Exemples 2.13 :
- Avec les notations de l'exemple 2.2, calculer la probabilité de l'événement C : « la partie ne se termine jamais ».
- Déterminer la probabilité de l'événement E : « la partie se termine en au plus 4 lancers. »
- Déterminer la probabilité de l'événement E : « la partie nécessite au moins 5 lancers. »

Théorème 2.14 (Limite monotone)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Continuité croissante : si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Continuité décroissante : si $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Remarque 2.15 : Pour déterminer la probabilité d'une union ou d'une intersection lorsque l'on n'a pas d'hypothèse de monotonie, on peut la faire apparaître :

Corollaire 2.16

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

- $P\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i\right)$
- $P\left(\bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{i=0}^{n} A_i\right)$

Théorème 2.17 (Sous additivité)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements.

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

Remarques 2.18 :
- La somme peut être infinie.
- La sous additivité est également vraie pour une famille finie d'événements.

II. D Événements presques sûrs et négligeables

Définition 2.19

Un événement A d'un espace probabilisé est dit :

- **presque sûr** lorsque : $\mathrm{P}(A) = 1$;
- **négligeable** lorsque : $\mathrm{P}(A) = 0$.

Proposition 2.20

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

- Une réunion finie ou dénombrable d'énénements négligeables est négligeable ;
- une intersection finie ou dénombrable d'énénements presques sûrs est presque sûre.

III Espaces probabilisés discrets

Définition 3.1

Soit Ω un ensemble, on appelle **distribution de probabilités dicrète sur Ω** une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.
On appelle **support** de cette distribution de probabilité l'ensemble des éléments $\omega \in \Omega$ tels que $p_\omega > 0$.

Proposition 3.2

Le support d'une distribution de probabilités dicrète sur Ω est au plus dénombrable.

Proposition 3.3

Soit Ω un ensemble et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrète sur Ω. L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P} : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array}$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$.

Proposition 3.4

On suppose Ω au plus dénombrable, alors pour tout événement $A \in \mathcal{T}$, on a

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathrm{P}(\{\omega\}).$$

Remarque 3.5 : Si Ω est au plus dénombrable, toute probabilité P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est la probabilité associée à la distribution de probabilités discrète : $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} = \big(\mathrm{P}(\{\omega\})\big)_{\omega\in\Omega}$.

Exemples 3.6 : Proposer une modélisation de l'expérience :

- un lancer d'un dé à 6 faces ;
- le jeu d'Alexandre et Benoît.

IV Probabilités conditionnelles

IV. A Définition et premières propriétés

Dans cette section, on se place dans le cadre d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ quelconque.

Définition 4.1

Soit A un événement tel que $\mathrm{P}(A) \neq 0$.
Pour tout événement B on appelle **probabilité de *B* sachant *A*** le nombre $\mathrm{P}_A(B)$ défini par :

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Attention : Ne pas confondre $\mathrm{P}(A\cap B)$ et $\mathrm{P}_A(B)$

- dans $\mathrm{P}_A(B)$, on sait que A est réalisé et on en déduit la probabilité de B ;
- dans $\mathrm{P}(A\cap B)$, on ne sait rien a priori, aucune hypothèse n'est faite.

Proposition 4.2

Soit A un événement tel que $\mathrm{P}(A) \neq 0$.
L'application P_A de $\mathcal{A}$ dans $[0;1]$ qui à tout $B \in \mathcal{A}$ associe $\mathrm{P}_A(B)$ est une probabilité.

Corollaire 4.3

Soit A un événement tel que $\mathrm{P}(A) \neq 0$. Alors :

- $\mathrm{P}_A(\Omega) =$ ______
- $\mathrm{P}_A(\varnothing) =$ ______
- $\mathrm{P}_A\left(\overline{B}\right) =$ ______
- $\mathrm{P}_A(B\cup C) =$ ______
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\mathrm{P}_A\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} B_i\right) =$ ______.

IV. B Formule des probabilités composées

Théorème 4.4 (Formule des probabilités composées)

- Intersection de deux événements : si $\mathrm{P}(A) \neq 0$,

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \text{______}$$

- Intersection d'une famille finie d'événements : si $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}_{A_1}(A_2) \times \mathrm{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\ldots \mathrm{P}_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque 4.5 : Si $\mathrm{P}(A) = 0$, alors $\mathrm{P}(A\cap B) =$ ______.
On adopte la convention : $\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) = 0$ lorsque $\mathrm{P}(A) = 0$ pour pouvoir utiliser la formule dans tous les cas.

Méthode 4.6

La formule des probabilités composées sert en particulier lorsque l'expérience se déroule en plusieurs étapes.
On choisira alors des événements A_k de façon à ce que : A_1 ne concerne que la première étape, A_2 que la deuxième étape, ..., A_k que de la k-ième étape...

Exemple 4.7 : Montrer que dans l'exemple 2.2, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(S_k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$.

Exemple 4.8 : Un rat se trouve dans un labyrithe face à quatre portes dont une seule conduit à la sortie. Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, il est re-déposé à son point de départ. On s'intéresse au nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne porte. On envisage trois hypothèses :

- $\mathcal{H}_1$: le rat a une bonne mémoire, à chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment.
- $\mathcal{H}_2$: le rat a une mémoire immédiate, à chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte choisie à l'essai précédent.
- $\mathcal{H}_3$: le rat n'a pas de mémoire, il choisit de manière équiprobale une porte à chaque essai.

Pour chacune de ces hypothèses, calculer la probabilité de l'événement A_k : « le rat réussit à sortir au $k^{\text{ième}}$ essai ».

Méthode 4.9 (Probabilité d'une intersection dénombrable)

- Pour calculer la probabilité de l'intersection d'une suite infinie d'événements, on utilise le théorème de la limite monotone (si la suite des événements est croissante) ou son corollaire, ce qui permet de se ramener au cas d'une intersection finie :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \underset{\text{Thm de limite monotone}}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)}_{\text{avec Formule probabilités composées}}$$

- Cette formule est indispensable lorsque l'expérience aléatoire est composée de **plusieurs étapes successives** et qu'**une étape influence la suivante**.
  On choisira alors des événements A_k de façon à ce que : A_1 ne concerne que la première étape, A_2 que la 2-ième étape,…, A_i que de la i-ième étape…

Exemple 4.10 : Calculer d'une autre manière la probabilité de l'événement : « la partie ne se termine jamais » pour l'exemple 2.2.

Méthode 4.11 (Probabilité d'une union dénombrable)

Pour calculer la probabilité d'une union d'événements :

- si les événements sont deux à deux incompatibles, il suffit d'utiliser la $\sigma-$additivité de la probabilité ;
- si les événements forment une suite croissante, on utilise le théorème de la limite monotone ;
- si on n'est dans aucun des deux cas précédents, on utilise les lois de Morgan pour se ramener au calcul de la probabilité d'une intersection par passage au complémentaire.

IV. C Formule des probabilités totales

Définition 4.12

- une famille $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** lorsque :
  1. I est au plus dénombrable ;
  2. les A_i sont deux à deux incompatibles : $\forall i,j\in I, i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$;
  3. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i=\Omega$.
- une famille $(A_i)_{i\in I}$ est un **système quasi-complet d'événements** lorsque :
  1. I est au plus dénombrable ;
  2. les A_i sont deux à deux incompatibles : $\forall i,j\in I, i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$;
  3. la réunion des A_i est presque sûre : $\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)=1$.

Remarques 4.13 :

- Une famille d'événement est un système complet d'événements ssi les événements qui la constituent sont 2 à 2 incompatibles (premier point) et d'union égale à l'univers (deuxième point).
- Si de plus tous les événements sont non vides, alors ils réalisent une partition de l'ensemble Ω.
- Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements, alors en posant $U=\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, la famile constituée de $\overline{U}$ et des A_i est un système complet d'événements.

Méthode 4.14

Pour montrer qu'une famille d'événements est un système complet d'événements, on peut montrer que chaque issue de l'expérience aléatoire réalise un et un seul des événements de la famille d'événements.

Proposition 4.15

- Si A est un événement quelconque d'une expérience aléatoire alors la famille $(A,\overline{A})$ est un système complet d'événements.
- Si l'univers est au plus dénombrable, alors la famille (ou la suite) constituée de tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire est un système complet d'événements.

Remarque 4.16 : Dans une expérience qui comporte une infinité de lancers possibles (pièce, dé etc.), l'univers n'est pas dénombrable.

Théorème 4.17 (Formule des probabilités totales)

Soit E un événement.

- Si A événement, on a :

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(A \cap E) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap E) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(E) + \mathrm{P}(\overline{A}) \times \mathrm{P}_{\overline{A}}(E).$$

- Si $\left(A_i\right)_{i \in I}$ est un système complet d'événements ou un système quasi-complet d'événements, alors :

$$\mathrm{P}(E) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i \cap E) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(E)$$

Remarques 4.18 :

- **Cette formule permet d'obtenir les relations de récurrence** dans presque tous les exercices de probabilités.
- La formule des probabilités totales garantit la convergence des séries.
- la convention $\mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(E) = 0$ lorsque $\mathrm{P}(A_i) = 0$, permet d'utiliser la formule sans se poser de question sur l'existence des probabilités conditionnelles.

Méthode 4.19

Si on connaît les probabilités conditionnelles d'un événement conditionnées par les événements d'un système complet d'événements, on obtient la probabilité ce cet événement avec la formule des probabilités totales.

Exemples 4.20 :

- Dans l'expérience aléatoire de l'exemple 2.2, calculer la probabilité que l'on ait que des 1 avant le premier 6.
- On considère une urne qui contient au départ une boule blanche, puis on lance une pièce jusqu'à obtenir Face. S'il a fallu n lancers, on ajoute $n! - 1$ boules noires dans l'urne.
  Quelle est la probabilité de tirer la boule blanche ?

IV. D Probabilités des causes : formule de Bayes

Théorème 4.21 (Formule de Bayes)

- Soit A un événement et E un événement de probabilité non nulle, alors :

$$\mathrm{P}_E(A) = \frac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(E)}{\mathrm{P}(E)}$$

- Si $\left(A_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si E est un événement de probabilité non nulle alors : pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}_E(A_i) = \frac{\mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(E)}{\mathrm{P}(E)} = \frac{\mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(E)}{\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_j) \times \mathrm{P}_{A_j}(E)}.$$

Exemples 4.22 :

- Dans l'expérience de l'exemple précédent, si on a obtenu une boule noire, quelle est la probabilité d'avoir fait 10 lancers.
- Une maladie affecte une personne sur 10 000. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% chez une personne malade et a un taux de faux positif de 2%.
  Si le test d'une personne est positif, quelle est la probabilité que la personne soit malade ?

V Indépendance

Dans cette section, on se place dans le cadre d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ quelconque.

Définition 5.1

- Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque :

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B).$$

- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. Ces événements sont dits **indépendants** lorsque pour toute partie **finie** J de I,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathrm{P}(A_i).$$

Attention : Ne pas confondre indépendants et incompatibles.

Proposition 5.2

Soit A et B deux événements avec $\mathrm{P}(A) \neq 0$.
Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B)$.

Remarques 5.3 :

- L'indépendance d'une famille finie ou infinie d'événements sera une hypothèse (qui peut être implicite) de l'énoncé. C'est le cas dans les situations suivantes :
  - On lance un dé et on lance une pièce.
  - On lance plusieurs fois un dé/une pièce.
  - On effectue des tirages successifs avec remise.
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements indépendants, alors la formule des probabilités composées devient beaucoup plus simple. On a alors :

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \;=\; \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2) \times \cdots \times \mathrm{P}(A_n)$$

Méthode 5.4 (Montrer que des événements ne sont pas indépendants)

S'il existe $i, j \in I$ tels que A_i et A_j ne sont pas négligeables et que A_i et A_j sont incompatibles, alors les événements ne sont pas indépendants deux à deux.

Attention : Des tirages successifs sans remise ne donnent pas lieu à des événements indépendants car les conditions d'un tirage dépendent des résultats des tirages précédents.

Attention : Si des événements sont indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Contre exemple 5.5 : Soit U une urne avec 4 boules numérotées de 1 à 4. On choisit une boule au hasard. On défini les événements :

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 3\} \quad \text{et} \quad C = \{1, 4\}.$$

Ces événements sont deux à deux indépendants mais pas indépendants.

Proposition 5.6

Si les événements A et B sont indépendants alors les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.