Espaces préhilbertiens

I Produit scalaire

I. A Définition et exemples canoniques

Définition 1.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est un **produit scalaire** sur E lorsque φ est

une forme bilinéaire :

i) $\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire ;

ii) $\forall y \in E, x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire.

symétrique : $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;

définie positive :

i) $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geqslant 0$;

ii) $\forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Notation : Si φ est un produit scalaire sur E et $x, y \in E$, le réel $\varphi(x,y)$ est appelé produit scalaire de x et y et il est noté $(x|y)$ ou $\langle x, y\rangle$.

Définition 1.2

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé un **espace euclidien**.

Exemples 1.3 :

- $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace euclidien muni de son produit scalaire canonique défini par : $\forall X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i = X^\top \times Y.$$

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace euclidien muni de son produit scalaire canonique défini par : $\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$\langle M, N\rangle = \operatorname{tr}(M^\top \times N)$$

- $\mathcal{C}^0([a\,;b])$ est un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire canonique défini par : $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a\,;b])$,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

I. B Norme associée à un produit scalaire

Jusqu'à la fin du chapitre, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$.

Définition 1.4

On appelle **norme associée au produit scalaire** $\langle\ ,\ \rangle$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

Méthode 1.5 (Formules de polarisation)

On peut exprimer le produit scalaire en fonction de la norme associée en développant $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ ou $\|x-y\|^2$.

Théorème 1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|\,.$$

De plus, $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \times \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démo. Théorème vrai si $y = 0_E$. On suppose à présent $y \neq 0_E$.
Soit $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|x + \lambda y\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle x, y\rangle \times \lambda + \|v\|^2 \lambda^2$.
Donc : P est un polynôme de degré 2 ($\|y\|^2 \neq 0$).
Et : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geqslant 0$. Donc : P a au plus une racine.
D'où : $\Delta = (2\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$, donc $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$.
De plus : on a égalité $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow P$ a une racine $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid x = \lambda y$. □

Exemples 1.7 :

- Soit $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots y_n$ des réels, alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2\right)^{1/2}$$

- Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Théorème 1.8

La norme associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur E est une norme.

Remarque 1.9 : Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire
$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$, c'est à dire si et seulement si x et y sont positivement liés.

II Orthogonalité

II. A Vecteurs othogonaux

Définition 2.1

Deux vecteurs x et y de E sont dit **orthogonaux** et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.

Exemples 2.2 :
- Dans $\mathcal{C}^0([0; 2\pi])$ muni de son produit scalaire canonique, les fonctions sinus et cosinus sont orthogonales.
- Déterminer les vecteurs orthogonaux au vecteur $(1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

Solution :
- $\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t)\,\mathrm{d}t = 0$
- $(x, y, z) \perp x \Leftrightarrow \langle x, (x, y, z)\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}\big((-1, 0, 1), (0, 1, 0)\big)$.

Remarques 2.3 :
- si $x \perp y$, alors $y \perp x$;
- si $x \perp x$, alors $x = 0_E$;

II. B Orthogonal d'une partie

Définition 2.4

Soit A une partie non vide de E, on appelle **orthogonal de A** l'ensemble :

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, x \perp y\}.$$

Proposition 2.5

Soit A une partie de E.
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Méthode 2.6

Pour déterminer l'orhogonal d'une partie A de E (en particulier d'un sous-espace vectoriel), il suffit de déterminer l'orthogonal d'une famille génératrice (souvent une base) de $\mathrm{Vect}(A)$.

Exemple 2.7 : Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, déterminer $\mathrm{Vect}\big((1, 0, 1)\big)^\perp$.

Solution : $\mathrm{Vect}\big((1, 0, 1)\big)^\perp = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1), (0, 1, 0)\big)$.

Remarque 2.8 : Pour tout $a \in E \smallsetminus \{0_E\}$, on note $\varphi_a : x \mapsto \langle x, a\rangle$ forme linéaire sur E, continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc : $\mathrm{Ker}\,\varphi_a$ est un fermé. Donc pour toute partie non vide A de E, $A^\perp$ est un fermé de E comme intersection de fermés.

II. C Familles orthogonales, orthonormées

Définition 2.9

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs,
- On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille orthogonale** lorsque ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux : $\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$.
- On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille orthonormée** lorsqu'elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont normés.

Théorème 2.10 (Pythagore)

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si l'on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Corollaire 2.11

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, on a

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Proposition 2.12

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
En particulier toute famille orthonormée est libre.

II. D Bases orthonormées

Définition 2.13

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs.
On dit que $\mathcal{F}$ est une **base orthonormée** de E lorsque c'est une base de E et une famille orthonormée.

Théorème 2.14

Tout espace euclidien a des bases orthonormées.

Théorème 2.15 (base orthornormée incomplète)

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{L}$ une famille orthonormée de E, alors $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base orthonormée de E.

Proposition 2.16

On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et $x \in E$.
Alors les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de x dans la base $\mathcal{B}$ sont données par

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], x_i = \langle x, e_i \rangle\,.$$

Démo. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la BON $\mathcal{B}$, alors : $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. D'où : $\forall i \in [\![1\,;n]\!] : \langle x, e_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, e_i\rangle = x_i \|e_i\|^2 = x_i$. □

Proposition 2.17 (Produit scalaire dans une base orthonormée)

On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et $x, y \in E$.
Si les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}.$$

Démo.

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \langle e_k, e_j\rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\end{aligned}$$

□

Remarque 2.18 : Si E est un espace euclidien de dimension n, $x, y \in E$ et X, Y sont les matrices de x, y respectivement dans une base orthonormée, alors le produit scalaire de x et y est égal au produit scalaire de X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = {}^tX \times Y = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i.$$

III Projection orthogonale

III. A Supplémentaire orthogonal

Définition/Théorème 3.1

Si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors V et $V^\perp$ sont supplémentaires. Le sous-espace vectoriel $V^\perp$ est appelé **le supplémentaire orthogonal** de V.

Remarque 3.2 : L'espace préhilbertien réel E n'est pas nécessairement de dimension finie.
Mais le résultat est faux sans l'hypothèse : V de dimension finie !

Proposition 3.3

Si E est un espace euclidien (de dimension finie) et V est un sous-espace vectoriel de E, alors :

- $\dim(V^\perp) = \dim(E) - \dim(V)$;
- $(V^\perp)^\perp = V$.

Méthode 3.4

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel V défini par un système linéaire homogène, on peut interpréter chaque équation comme un produit scalaire nul et ainsi avoir V comme l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel. On conclut par la proposition ci-dessus.

Exemple 3.5 : Déterminer l'orthogonal de

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + t = x + y + 2z - t = 0\}.$$

Sol : $F = \mathrm{Vect}\big((2, -1, 1, 1), (1, 1, 2, -1)\big)^\perp$,
donc $F^\perp = \mathrm{Vect}\big((2, -1, 1, 1), (1, 1, 2, -1)\big)$.

III. B Projection orthogonale

Définition 3.6

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
On appelle **projection orthogonale** sur V la projection P_V sur V parallèlement à son supplémentaire orthogonal $V^\perp$.

Proposition 3.7

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel V de E, le projeté orthogonal sur V d'un vecteur $x \in E$ est :

$$P_V(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$

Proposition 3.8

Si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E engendré par une famille $(y_1, \dots, y_p)$ et $x \in E$, alors pour $y \in E$ on a

$$\begin{aligned} y = P_V(x) &\Leftrightarrow \left[y \in V \text{ et } x - y \in V^\perp\right] \\ &\Leftrightarrow \Big[y \in V \text{ et } \forall i \in [\![1\,;p]\!], \langle (x-y), y_i \rangle = 0\Big]. \end{aligned}$$

Démo. On a : $\forall i \in [\![1\,;p]\!], \langle (x-y), y_i \rangle = 0 \Leftrightarrow (x-y) \in y^\perp$; d'où cqfd. □

Méthode 3.9

Pour calculer le projeté orthogonal sur V d'un vecteur $x \in E$

- si l'on connaît une base orthonormée de V (sev de dimension finie de E), on applique la formule de la proposition 3.7 ;
- si l'on ne connaît qu'une famille génératrice de V : $\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_p)$, on utilise la proposition 3.8, on exprime y comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{G}$ et on résout le système donné par : $\forall i \in [\![1\,;p]\!], \langle (x-y), y_i \rangle = 0$.

Exemple 3.10 : Soit E l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0\}$.
Déterminer le projeté orthogonal de $(1,1,1)$ sur V.

Solution : Deux méthodes :

1. $V = \mathrm{Vect}((0,1,0), (-2,0,1))$ et $y - x \perp V \Leftrightarrow y = (2/5, 1, -1/5)$
2. ou par projection sur $V^\perp = \mathrm{Vect}((1,0,2))$, orthormalise, $P_{V^\perp}(x) = (\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5})$ et $P_V(x) = x - P_{V^\perp}(x)$.

III. C Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Méthode 3.11 (Algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, on note $F_k = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.
On pose $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$;
puis pour chaque $k \in [\![1\,;p-1]\!]$,

$$y_{k+1} = P_{F_k^\perp}(x_{k+1}) = x_{k+1} - P_{F_k}(x_{k+1}) = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \, e_i$$

et

$$e_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}.$$

La famille $(e_1, \dots e_p)$ ainsi obtenue est orthonormée et vérifie :

$$\forall k \in [\![1\,;p]\!], \quad F_k = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Prof : présenter dans un tableau :

$x_1 =$	$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
$x_2 =$	$e_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|}$

Exemple 3.12 : Déterminer une base orthonormée de $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

Solution : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1); \sqrt{\frac{3}{2}}(X^2 - 2X + \frac{1}{3})\right)$

III. D Distance à un sous-espace vectoriel

Proposition 3.13

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$.
Alors $P_V(x)$ le projeté orthogonal sur V de x est l'unique vecteur y_0 tel que

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\| = d(x, V).$$

Exemple 3.14 : Quelle est la distance dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique de $(1,1,1)$ à $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0\}$?

Solution : $d(x,V) = \|x - P_V(x)\| = \big\|(1,1,1) - (\frac{2}{5}, 1, -\frac{1}{5})\big\| = \big\|(\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5})\big\| = \frac{3}{5}\|(1,0,2)\| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.