Chapitre 11

Relations de comparaison de suites et de fonctions

1 Relations de comparaison entre suites

Dans tout ce paragraphe, on doit travailler avec des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Pour simplifier, et quitte à décaler les indices, on supposera qu'aucune suite de ce paragraphe ne s'annule.

1.1 Définitions

Définition 1.1

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles.

1. La suite (u_n) est *dominée* par (v_n) si la suite $(u_n/v_n)_n$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.
2. La suite (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.
3. La suite (u_n) est *équivalente* à (v_n) si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Proposition 1.2

Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff u_n = o(1)$.

Proposition 1.3

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles. Alors $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

Méthode 1.4

Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$. Le "$o(w_n)$" n'est qu'une notation, et en les ajoutant, on n'obtient pas "$2 \times o(w_n)$".

De même, on aura $u_n - v_n = o(w_n)$. Les "$o(w_n)$" ne se simplifient pas.

Remarques.

1. ATTENTION : $u_n \sim v_n$ n'est pas équivalent à $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par exemple, les suites (n) et $(n+1)$ sont équivalentes, mais la différence ne tend pas vers 0. Puis, les suites $(1/n)$ et $(1/n^2)$ ne sont pas équivalentes, mais leur différence tend vers 0.
2. ATTENTION : en général, $u_n \not\sim u_{n+1}$. Par exemple, si $u_n = e^n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$, qui ne tend pas vers 1. Et si $u_n = e^{n^2}$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $u_n = o(u_{n+1})$.

1.2 Propriétés

Proposition 1.5

Soient ℓ un réel **non nul** et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors $u_n \sim \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarques.

1. Attention : une suite ne peut pas être équivalente à 0 (sauf si elle est nulle à partir d'un certain rang, ce qui est exclu de notre étude). En particulier, si une suite converge vers 0, la proposition précédente n'est pas vérifiée.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$, on va en général plutôt chercher un équivalent de $u_n - \ell$.

Proposition 1.6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$.

1. Si $u_n \sim v_n$, alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $\mu \neq 0$, alors $\lambda u_n = o(\mu v_n)$.
3. Si $u_n = O(v_n)$ et $\mu \neq 0$, alors $\lambda u_n = O(\mu v_n)$.
4. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$.

Proposition 1.7

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles.

1. On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $v_n \sim u_n$.
2. Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, (u_n) et (v_n) ont même signe.
3. Si $u_n \sim v_n$, la suite (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge, et dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
4. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Proposition 1.8

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites équivalentes, et $(u'_n), (v'_n)$ deux autres suites équivalentes. Alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $u_n/u'_n \sim v_n/v'_n$.

Remarque.

Attention : c'est faux pour la somme de suites équivalentes. Par exemple, si $u_n = n + 1/n$, $v_n = -n$, $u'n = n$, $v'_n = -n + 1/n^2$, alors $u_n \sim u'_n$, $v_n \sim v'_n$, $u_n + v_n \sim 1/n$ et $u'_n + v'_n \sim 1/n^2$, donc ces deux suites ne sont pas équivalentes. Il faut faire attention à la forêt (ici, n pour v) qui cache l'arbre ($1/n$).

Proposition 1.9 (Sommes 1)

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles. Si $v_n = o(w_n)$ et $u_n = v_n + w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Méthode 1.10 (Sommes 2)

Si $u_n \sim \lambda w_n$ et $v_n \sim \mu w_n$, et si $\lambda + \mu \neq 0$, alors $u_n + v_n \sim (\lambda + \mu) w_n$. En effet, on a $u_n = \lambda w_n + o(w_n)$ et $v_n = \mu w_n + o(w_n)$, donc

$$u_n + v_n = (\lambda + \mu) w_n + o(w_n).$$

Comme $\lambda + \mu \neq 0$, on a bien $u_n + v_n \sim (\lambda + \mu) w_n$.

Ceci prouve d'ailleurs aussi que si $\lambda + \mu = 0$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.

Remarque.

On ne peut pas utiliser cette méthode simplement en l'énonçant. Il faut systématiquement la redémontrer pour le cas précis où on l'utilise.

1.3 Relations usuelles

Proposition 1.11 (Suites polynomiales)

1. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ avec$p < q$. Alors $n^p = o(n^q)$.
2. Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré.

Proposition 1.12

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| > 1$. Alors $a^n = o(n!)$.

Remarque.

Si $-1 \leqslant a \leqslant 1$, le résultat est encore vrai car (a^n) est bornée dans ce cas.

Proposition 1.13 (Croissances comparées)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. Alors

1. $\ln^\beta(n) = o(n^\alpha)$.
2. $\ln^\beta(n) = o(e^{\alpha n})$.
3. $n^\beta = o(e^{\alpha n})$.

4. Si $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$, on a $n^\beta = o(x^n)$.

Proposition 1.14 (Équivalents de référence)

On fixe une suite $(u_n)_n$ convergente vers 0 et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\sin(u_n) \sim u_n, \qquad \cos(u_n) \sim 1, \qquad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}, \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$
$$\tan(u_n) \sim u_n, \qquad e^{u_n} - 1 \sim u_n, \qquad \ln(1+u_n) \sim u_n, \qquad \mathrm{sh}(u_n) \sim u_n.$$

Corollaire 1.15

Soit (v_n) une suite convergente vers 1. Alors $\ln(v_n) \sim v_n - 1$.

Méthode 1.16

Si $v_n = o(u_n)$, pour obtenir un équivalent de $\ln(u_n + v_n)$, on procède ainsi :

$$\ln(u_n + v_n) = \ln\big(u_n(1 + v_n/u_n)\big) = \ln(u_n) + \ln(1 + v_n/u_n).$$

Le deuxième terme tend vers 0, donc si $\lim u_n = 0$ ou $\lim(u_n) = +\infty$, un équivalent sera $\ln(u_n)$.

Proposition 1.17 (Deux cas particuliers)

1. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites équivalentes, strictement positives, et convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ de limite différente de 1 (en général 0 ou $+\infty$). Alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

2. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites strictement positives et équivalentes, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$. En particulier, $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Méthode 1.18 (Avec l'exponentielle)

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors $e^{u_n} \sim e^\ell$, car $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\ell \neq 0$.

Remarques.

1. Attention, en général, on ne peut pas composer des équivalents. En général, si $u_n \sim v_n$, et f est une fonction, on n'a pas $f(u_n) \sim f(v_n)$. L'exemple des suites $u_n = n$ et $v_n = n + \pi$ et la fonction cosinus le prouve, puisque $u_n \sim v_n$ et $f(u_n) = \cos(n)$ et $f(v_n) = -\cos(n)$, qui ne sont pas des suites équivalentes.
2. ATTENTION AUX TROIS PÊCHÉS CAPITAUX : dire qu'une suite est équivalente à 0, ajouter des équivalents sans le justifier, composer des équivalents sans le justifier.

Méthode 1.19 (Équivalent d'une somme)

On cherche par exemple un équivalent de $s_n = u_n + v_n + w_n$.

1. Si un (ou plusieurs) terme est compliqué, on en cherche un équivalent, disons ici u'_n, v'_n et w'_n.

2. On compare ces équivalents entre eux.
   — Si par exemple $v'_n = o(u'_n)$ et $w'_n = o(u'_n)$, on aura aussi $v_n = o(u_n)$ et $w_n = o(u_n)$, donc d'après la proposition 1.9, on a $s_n \sim u_n$.

— Si par exemple $v_n' \sim \lambda u_n'$ et $w_n' \sim \mu u_n'$, on aura aussi $v_n \sim \lambda u_n$ et $w_n \sim \mu u_n$, donc d'après la proposition 1.10, si $1+\lambda+\mu \neq 0$, on a $s_n \sim u_n$.

Méthode 1.20 (Équivalent d'une suite)

Pour déterminer un équivalent simple d'une suite (u_n) :

1. On commence par factoriser l'expression de u_n puisque les produits et quotients d'équivalents sont les équivalents des produits et quotients.

2. On détermine alors un équivalent du numérateur et du dénominateur en déterminant un équivalent de chaque facteur.

3. Lorsque dans un facteur on rencontre une somme, on essaye d'appliquer la méthode 1.19.

4. Pour les autres facteurs, on cherche un équivalent à l'aide des propositions 1.14 et 1.17.

5. On conclut grâce à la compatibilité des équivalents avec le produit et le quotient.

2 Relations de comparaison entre fonctions

Dans ce paragraphe, on considère un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $h > 0$, et on pose

$$\text{si } a \in \mathbb{R},\ D =]a, a+h[\quad \text{ou} \quad D =]a-h, a[\quad \text{ou} \quad D =]a-h, a+h[\setminus \{a\},$$
$$\text{si } a = +\infty,\ D =]h, +\infty[,$$
$$\text{si } a = -\infty,\ D =]-\infty, -h[.$$

On supposera les trois points suivant :

1. Toutes les fonctions de ce paragraphe seront définies sur le même ensemble D, et éventuellement en a (on dit que les fonctions sont définies au voisinage de a).

2. Les fonctions ne s'annulent pas sur D, mais peuvent s'annuler en a.

3. Si une fonction est définie en a, elle est continue en a *i.e.* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.

   On fixe deux fonctions f et g définies sur D, et éventuellement en a.

2.1 Définitions

Définition 2.1

1. La fonction f est *dominée* par g en a si la fonction f/g est bornée au voisinage de a. On note alors $f(x) \underset{x=a}{=} O(g(x))$.

2. La fonction f est *négligeable* devant g en a si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. On note $f(x) \underset{x=a}{=} o(g(x))$.

3. La fonction f est *équivalente* à g en a si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$. On note $f(x) \underset{x=a}{\sim} g(x)$.

Remarque.

Quand il n'y a pas ambiguïté, on omet le "$x = a$" pour alléger les notations.

Remarque.
On peut aussi parler de dominance, négligeabilité et équivalence en a^+, a^-.

Proposition 2.2

$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \iff f(x) \underset{x=a}{=} o(1)$.

Proposition 2.3

$f(x) \underset{x=a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x=a}{=} o(g(x)) \iff f(x) = g(x) + \underset{x=a}{o}(g(x))$.

Méthode 2.4

Si $f(x) \underset{x=a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x=a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) + g(x) \underset{x=a}{=} o(h(x))$. Le "$o(h(x))$" n'est qu'une notation, et en les ajoutant, on n'obtient pas "$2 \times o(h(x))$".

De même, on aura $f(x) - g(x) \underset{x=a}{=} o(h(x))$: les "$o(h(x))$" ne se simplifient pas.

2.2 Propriétés

Proposition 2.5

Soit ℓ un réel non nul. Alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.

Remarque.
ATTENTION : une fonction n'est jamais équivalente à 0. En particulier, si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, la proposition précédente n'est pas vérifiée.

Corollaire 2.6

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a)$.

Proposition 2.7

1. On a $f(x) \sim g(x) \iff g(x) \sim f(x)$.

2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors f admet une limite en a si et seulement si g en admet une et alors ces limites sont égales.

3. Si $f(x) \sim g(x)$, f et g sont de même signe au voisinage de a, et f est bornée au voisinage de a si et seulement si g l'est.

Proposition 2.8

1. Si $f(x) \sim g(x)$ et $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) \sim h(x)$.

2. Si $f(x) \sim g(x)$ et $g(x) = o(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.

Proposition 2.9 (Produit et quotient)

Si $f(x) \sim g(x)$ et $h(x) \sim \varphi(x)$, alors $f(x)h(x) \sim g(x)\varphi(x)$ et $\dfrac{f(x)}{h(x)} \sim \dfrac{g(x)}{\varphi(x)}$.

Proposition 2.10 (Propriétés diverses)

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. Si $f(x) = o(g(x))$ et $h(x) = o(g(x))$, alors $\lambda f(x) + \mu h(x) = o(g(x))$.
2. $f(x) = 0(g(x))$ $h(x) = 0(g(x))$ alors $\lambda f(x) + \upsilon h(x) = 0(g(x))$.
3. $f(x) = o(g(x))$ alors $f(x) = O(g(x))$.

Proposition 2.11 (Substitution dans un équivalent)

Soit u une fonction définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ à valeurs dans D telle que $u(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} a$. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors

$$f(u(x)) \underset{b}{\sim} g(u(x)).$$

Remarques.

1. On ne peut rien dire sur la composition des équivalents. Par exemple au voisinage de $+\infty$, on a $x \sim x + \sqrt{x}$, mais $e^x = o(e^{x+\sqrt{x}})$, donc $e^x \not\sim e^{x+\sqrt{x}}$.
2. On ne peut rien dire sur l'addition des équivalents, comme le prouve l'exemple suivant (en 0) : $x \sim x + x^3$, $-x \sim -x + x^2$, mais $x^2 \not\sim x^3$.

Proposition 2.12 (Sommes 1)

Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) + g(x) \sim g(x)$.

Méthode 2.13 (Sommes 2)

Si $f(x) \sim \lambda h(x)$, $g(x) \sim \mu h(x)$ et $\lambda + \mu \neq 0$, alors $f(x) + g(x) \sim (\lambda + \mu)h(x)$. En effet, on a $f(x) = \lambda h(x) + o(h(x))$ et $g(x) = \mu h(x) + o(h(x))$, donc

$$f(x) + g(x) = (\lambda + \mu)h(x) + o(h(x)),$$

et comme $\lambda + \mu \neq 0$, on a $f(x) + g(x) \sim (\lambda + \mu)h(x)$.

2.3 Relations usuelles

Proposition 2.14 (Fonctions polynomiales)

1. On a $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.
2. On a $x^\alpha \underset{x=0}{=} o(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.
3. Une fonction polynomiale est équivalente en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré, et en 0 à son terme de plus bas degré.

Proposition 2.15 (Croissances comparées)

1. Une fonction polynomiale est négligeable en $+\infty$ devant $e^{\alpha x}$ pour tout $\alpha > 0$.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\ln(x))^\alpha$ est négligeable devant toute fonction polynomiale non constante au voisinage de $+\infty$.

3. Pour $a > 1$, on a $x^a \underset{+\infty}{=} o(a^x)$.

Proposition 2.16 (Équivalents de référence en 0)

Tous les équivalents suivants sont en $x = 0$.

$$e^x - 1 \sim x, \qquad \ln(1+x) \sim x, \qquad \sin(x) \sim x, \qquad \arcsin(x) \sim x,$$
$$\tan(x) \sim x, \qquad \arctan(x) \sim x, \qquad \mathrm{sh}(x) \sim x, \qquad \mathrm{th}(x) \sim x,$$
$$\mathrm{ch}(x) \sim 1, \qquad \cos(x) \sim 1, \qquad 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}, \qquad (1+x)^a - 1 \sim ax,\ a \neq 0.$$

On peut bien entendu combiner ces résultats avec la substitution.

Proposition 2.17

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$, alors $\ln(f(x)) \underset{x \to a}{\sim} f(x) - 1$.

Proposition 2.18 (Deux cas particuliers)

1. Si f et g sont strictement positives au voisinage de a, $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et admettent une limite en a différente de 1, alors
$$\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x)).$$

2. Si f et g sont strictement positives au voisinage de a et $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$\Big(f(x)\Big)^\alpha \underset{a}{\sim} \Big(g(x)\Big)^\alpha.$$

En particulier, $\sqrt{f(x)} \underset{a}{\sim} \sqrt{g(x)}$.

Méthode 2.19 (Avec l'exponentielle)

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^\ell$.

Méthode 2.20

Recherche d'équivalents : (suites et fonctions)

1. On recherche un équivalent de chaque facteur/quotient. Un équivalent de la fonction est alors obtenu en multipliant/divisant ces équivalents.

2. Pour chaque facteur, on recherche un équivalent grâce aux équivalents de référence.

3. Si c'est une somme, on utilise la proposition 2.12 : on détermine un équivalent de chaque terme. On les range dans l'ordre de négligeabilité. Si tous sont négligeables devant un des termes, celui-ci est un équivalent (équivalence au terme dominant de la somme).