

Intégration sur un intervalle quelconque

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} et on s'intéresse à des fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{K} , corps des réels ou des complexes

I Intégrale généralisée sur $[a; +\infty[$

I. A Fonctions continues par morceaux

Définition 1.1

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** sur I lorsqu'elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I .

Notation L101 : On notera $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

Exemples 1.2 : • La fonction partie entière est continue par morceaux sur \mathbb{R} .

- La fonction inverse est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, mais elle n'a pas de prolongement continu par morceaux sur $[0; +\infty[$.

I. B Intégrales convergentes sur $[a; +\infty[$

Dans cette partie $a \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a; +\infty[, \mathbb{K})$.

On dit que l'**intégrale** $\int_a^{+\infty} f$ **converge** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.

On note alors $\int_a^{+\infty} f$ ou $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ cette limite.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Vocabulaire : • La nature d'une intégrale est son caractère convergent ou divergent.

- Lorsque l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge, on dit que l'intégrale converge en $+\infty$.

Proposition 1.4

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a; +\infty[)$ et $b \in [a; +\infty[$.

Les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_b^{+\infty} f$ sont de même nature et si elles convergent, alors :

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f.$$

Proposition 1.5

Soit $f \in \mathcal{C}([a; +\infty[, \mathbb{K})$ telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors l'application

$$\begin{aligned} g : [a; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \int_x^{+\infty} f \end{aligned}$$

est dérivable sur $[a; +\infty[$ et $\forall x \in [a; +\infty[, g'(x) = -f(x)$.

I. C Intégrales des fonctions positives sur $[a; +\infty[$

Proposition 1.6

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; +\infty[$ et à valeurs positives, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Remarque 1.7 : Si $f \in \mathcal{C}_m([a; +\infty[, \mathbb{R})$ à valeurs positives et $x \mapsto \int_a^x f$ n'est pas majorée, alors

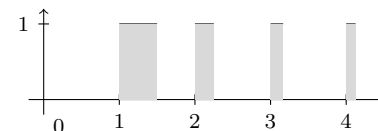
$$\int_a^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On notera alors $\int_a^{+\infty} f = +\infty$.

Attention : La convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ n'implique pas que f tend vers 0 en $+\infty$.

Contre exemple 1.8 :

Soit $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [n; n + \frac{1}{2n^2}]$ et $f = \mathbb{1}_A$.



Proposition 1.9

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a; +\infty[$. Si

- $0 \leq f \leq g$;
- $\int_a^{+\infty} g$ converge ;

alors : $\int_a^{+\infty} f$ converge et

$$\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g.$$

Théorème 1.10 (intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 1.11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

II Intégrabilité sur un $[a; +\infty[$

Définition 2.1

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a; +\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a; +\infty[$ et $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Vocabulaire : • On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a; +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».

- Une fonction f est dite intégrable en $+\infty$ lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est intégrable sur $[a; +\infty[$.

Remarque 2.2 : Si f est de signe constant sur $[a; +\infty[$, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a; +\infty[$.

Exemples 2.3 : • Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Théorème 2.4

Si f est intégrable sur $[a; +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Remarque 2.5 : Cela signifie que si une intégrale converge absolument, alors elle converge.

Remarque 2.6 : La réciproque est fausse, contre exemple la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [n; n+1[$, $f(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 2.7 (de comparaison)

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a; +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{K} .

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$ et g est intégrable sur $[a; +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a; +\infty[$.
- Si $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$ et g est intégrable sur $[a; +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a; +\infty[$.
- Si $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a; +\infty[$ équivaut à celle de f .

Attention : Il s'agit d'un critère d'intégrabilité, c'est à dire de convergence des intégrales des valeurs absolues qui sont des fonctions positives.

Méthode 2.8

On peut ainsi adapter le critère de Riemann aux intégrales sur $[1; +\infty[$.

Exemples 2.9 : Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

III Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

III. A Intégrale sur un intervalle semi-ouvert

Définition 3.1

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$ à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que l'**intégrale** $\int_a^b f$ **converge** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en b (à gauche).
- Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a; b]$ à valeurs dans \mathbb{K} . On dit que l'**intégrale** $\int_a^b f$ **converge** lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^b f$ a une limite finie en a (à droite).

Dans ce cas, cette limite est notée : $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$.

Remarque 3.2 : On définit de même la convergence des intégrales $\int_{-\infty}^a f$.

Exemples 3.3 :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^1 \ln t dt \text{ et } \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha t} dt$$

Remarque 3.4 : Si $f \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{K})$, alors

$$\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_a^b f(t) dt.$$

La définition de $\int_a^b f$ pour $f \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{K})$ ne crée donc pas d'ambiguïté.

III. B Intégrale sur un intervalle ouvert

Définition 3.5

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a; b[$ à valeurs dans \mathbb{K} avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$.

On dit que **l'intégrale $\int_a^b f$ converge** lorsqu'il existe $c \in]a; b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. On note alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Remarque 3.6 : Si les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, il en est de même de $\int_a^d f$ et $\int_d^b f$ pour tout $d \in]a; b[$. Il suffit donc de considérer un élément c quelconque de $]a; b[$ pour conclure sur la nature de l'intégrale.

De plus $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$, l'intégrale $\int_a^b f$ est donc bien définie sans ambiguïté.

Vocabulaire : Pour $f \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{K})$ et $c \in]a; b[$,

- lorsque $\int_c^b f$ converge, on dit que l'intégrale converge en b ;
- lorsque $\int_a^c f$ converge, on dit que l'intégrale converge en a .

Notation : Pour f à valeurs positive, on écrit $\int_a^b f = +\infty$ lorsque l'intégrale diverge.

III. C Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 3.7 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge, pour a, b, c dans I ou des extrémités de I :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

Proposition 3.8 (Linéarité de l'intégrale)

Soit $f, g \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Proposition 3.9 (Positivité)

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a; b], \mathbb{R})$. Si f est positive sur $]a; b[$ et l'intégrale $\int_a^b f$ converge, alors :

$$\int_a^b f \geq 0.$$

De plus, si f est continue et positive sur $]a; b[$ ($a < b$) et $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $]a; b[$.

Proposition 3.10 (Croissance)

Soit f, g continues par morceaux sur $]a; b[$ telles que $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent. Si $f \leq g$, alors :

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

III. D Intégration par parties

Théorème 3.11

Soit f et g des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I et a, b dans I ou des extrémités de I . Si le produit fg a des limites finies en a et en b , alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature et si elles convergent :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt,$$

où $[fg]_a^b = \lim_{t \rightarrow b} f(t)g(t) - \lim_{t \rightarrow a} f(t)g(t)$.

Exemple 3.12 :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

III. E Changement de variable

1) sur un segment

Théorème 3.13

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle J telle que $\varphi(J) \subset I$. Soit $a, b \in J$.

On a :

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

Méthode 3.14

Pour effectuer un changement de variable $t = \varphi(u)$:

1. mettre $\varphi'(u)$ en facteur ;
2. exprimer le reste de l'intégrande en fonction de $\varphi(u)$;
3. remplacer formellement :
 - $\varphi'(u) du$ par dt
 - $\varphi(u)$ par t
 - changer les bornes.

2) sur un intervalle quelconque

Théorème 3.15

Soit f une fonction continue sur $]a; b[$ et $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ bijective, strictement croissante et de classe \mathcal{C}^1 .

Alors les intégrales $\int_a^b f(u) du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ sont de même nature et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Remarque 3.16 : Les hypothèses :

« $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ bijective, strictement croissante et de classe \mathcal{C}^1 »

sont équivalentes à :

« $\varphi \in \mathcal{C}^1(]\alpha; \beta[, \mathbb{R})$ strictement croissante, $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$. »

Proposition 3.17

Soit f une fonction continue sur $]a; b[$ et $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ bijective, strictement décroissante et de classe \mathcal{C}^1 .

Alors les intégrales $\int_a^b f(u) du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ sont de même nature et en cas de convergence :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_b^a f(u) du = - \int_a^b f(u) du.$$

Exemple 3.18 :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

IV Fonctions intégrables

IV. A intégrale absolument convergentes et fonctions intégrables

Définition 4.1

Soit $f \in \mathcal{C}_m(]a; b[, \mathbb{K})$, on dit que $\int_a^b f$ est **absolument convergente** lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

Théorème 4.2

Soit $f \in \mathcal{C}_m(]a; b[, \mathbb{K})$, si $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Définition 4.3

Une fonction f est dite **intégrable sur l'intervalle $]a; b[$** lorsqu'elle est continue par morceaux sur $]a; b[$ et que l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument.

Vocabulaire : Soit $f \in \mathcal{C}_m(]a; b[, \mathbb{K})$ et $c \in]a; b[$,

- on dit que f est intégrable en b lorsque f est intégrable sur $[c; b[$;
- on dit que f est intégrable en a lorsque f est intégrable sur $]a; c]$.

Notation : Pour I un intervalle quelconque et f intégrable sur I , on note $\int_I f$ son intégrale sur I .

Proposition 4.4

L'ensemble des fonctions intégrables sur I à valeurs dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

Remarque 4.5 : l'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur $L^1(I, \mathbb{K})$.

Proposition 4.6 (Inégalité triangulaire)

Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$, alors :

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

IV. B Comparaison

Théorème 4.7

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $]a; b[$ à valeurs dans \mathbb{K} .

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g est intégrable en b , alors f est intégrable en b .
- Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g est intégrable en b , alors f est intégrable en b .
- Si $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$, alors l'intégrabilité de g en b équivaut à celle de f .
- Si $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g est intégrable en a , alors f est intégrable en a .
- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g est intégrable en a , alors f est intégrable en a .
- Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$, alors l'intégrabilité de g en a équivaut à celle de f .

IV. C Intégrales de Riemann

Théorème 4.8

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Remarque 4.9 : Une fonction f est intégrable en a (respectivement en b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Théorème 4.10

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{|t-a|^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple 4.11 : Montrer que l'intégrale suivante converge puis la calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

V Intégration des relations de comparaison

V. A Cas convergent : comparaison des restes

Proposition 5.1

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a; b[, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_m([a; b[, \mathbb{R})$ avec φ à valeurs positives et intégrable sur $[a; b[$.

- Si $f(t) = O_{t \rightarrow b}(\varphi(t))$, alors f est intégrable sur $[a; b[$ et $\int_a^b f = O_{x \rightarrow b}\left(\int_a^b \varphi\right)$.
- Si $f(t) = o_{t \rightarrow b}(\varphi(t))$, alors f est intégrable sur $[a; b[$ et $\int_a^b f = o_{x \rightarrow b}\left(\int_a^b \varphi\right)$.
- Si $f(t) \sim_{t \rightarrow b} \varphi(t)$, alors f est intégrable sur $[a; b[$ et $\int_a^b f \sim_{x \rightarrow b} \int_a^b \varphi$.

Remarque 5.2 : Même résultats en a pour $f \in \mathcal{C}_m(]a; b], \mathbb{K})$.

Exemple 5.3 : Donner un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{t\sqrt{t}} dt$.

V. B Cas divergent : comparaison des intégrales partielles

Proposition 5.4

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a; b[, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_m([a; b[, \mathbb{R})$ avec φ à valeurs positives et non intégrable sur $[a; b[$.

- Si $f(t) = O_{t \rightarrow b}(\varphi(t))$, alors $\int_a^x f = O_{x \rightarrow b}\left(\int_a^x \varphi\right)$.
- Si $f(t) = o_{t \rightarrow b}(\varphi(t))$, alors $\int_a^x f = o_{x \rightarrow b}\left(\int_a^x \varphi\right)$.
- Si $f(t) \sim_{t \rightarrow b} \varphi(t)$, alors $\int_a^x f \sim_{x \rightarrow b} \int_a^x \varphi$.

Exemple 5.5 : Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, un équivalent simple quand $x \rightarrow +\infty$ de $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.