Chapitre 9

Ensembles et applications

1 Ensembles

Soient A et B deux ensembles. Alors

1. On note $x \in A$ pour "x est un élément de A".

2. Soit E un ensemble. On note $\{x \in E \mid P(x)\}$ le sous-ensemble des éléments de E vérifiant la propriété P. Par exemple $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2 \text{ et } x < 7\}$.

Définition 1.1

Soient A et B deux ensembles. L'ensemble A est inclu dans B (et on note $A \subset B$) si tout élément de A est un élément de B, *i.e.* : $\forall\, x \in A,\ x \in B$.

Méthode 1.2

Pour montrer qu'un ensemble A est inclu dans un ensemble B, on peut considérer un élément quelconque de A, et montrer qu'il est alors aussi dans B. Une telle démonstration commence toujours par "Soit $x \in A$. Montrons que $x \in B$."

Remarque.

Notez la différence d'écriture entre "$x \in A$" et "$\{x\} \subset A$", mais ces deux affirmations sont équivalentes.

Proposition 1.3

Soient A et B deux ensembles. Alors $A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

Méthode 1.4 (Double-inclusion)

Pou montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder par double-inclusion : on montre que $A \subset B$, puis que $B \subset A$.

Définition 1.5

Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. On définit les ensembles suivants :

1. *L'intersection* $A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$.

2. *L'union* $A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

3. Le *complémentaire* de A dans E : $\mathcal{C}_E A = \{x \in E,\ x \notin A\}$, ou encore $\overline{A}$ lorsque l'ensemble E est évident.

4. La *différence* de A et B : $A \setminus B = A \cap \mathcal{C}_E B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in A,\ x \notin B\}$.

Méthode 1.6

Soient X, Y, Z trois ensembles.

1. Pour montrer que $X \cap Y \subset Z$, on montre que si $x \in X$ et $x \in Y$, alors $x \in Z$.

2. Pour montrer que $X \subset Y \cap Z$, on montre que $X \subset Y$ et $X \subset Z$, en montrant par exemple que si $x \in X$, alors $x \in Y$ et $x \in Z$.

3. Pour montrer que $X \cup Y \subset Z$, on montre que $X \subset Z$ et $Y \subset Z$.

4. Pour montrer que $X \subset Y \cup Z$, on peut raisonner par disjonction des cas de la façon suivante : on considère $x \in X$, et on montre que, si $x \notin Y$, alors $x \in Z$.

5. Pour montrer que $A \not\subset B$, on exhibe un $x \in A$ tel que $x \notin B$.

Proposition 1.7

Soit $A \subset E$. Alors $\overline{\overline{A}} = A$, où les complémentaires sont pris dans E.

Proposition 1.8

Soient A et B deux sous-ensembles de E. Alors

$$A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A},$$

où les complémentaires sont pris dans E.

Proposition 1.9

Soient A et B deux sous-ensembles de E. Alors $A \setminus B = A \setminus A \cap B$.

Proposition 1.10 (Associativité)

Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Alors

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Proposition 1.11 (Distributivité)

Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Alors

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Proposition 1.12 (Lois de De Morgan)

Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Alors

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

où les complémentaires sont pris dans E.

Méthode 1.13

1. Pour montrer que $x \notin A \cap B$, on montre que $x \notin A$ ou $x \notin B$. On utilisera pour cela le raisonnement par disjnction des cas, en raisonnant ainsi : "Supposons que $x \in A$. Montrons qu'alors $x \notin B$".

2. Pour montrer que $x \notin A \cup B$, on montre que $x \notin A$ et $x \notin B$.

Définition 1.14 (Produit cartésien)

1. Soient A et B deux ensembles. Le *produit cartésien* de A et B est l'ensemble

$$A \times B = \{(a, b),\ a \in A,\ b \in B\}$$

avec la propriété fondamentale que pour $(a, b), (a', b') \in A \times B$, on a

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles. Le produit cartésien de $A_1, \ldots, A_n$ est l'ensemble

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), \forall\, i = 1, \ldots, n,\ a_i \in A_i\},$$

avec la propriété fondamentale que pour $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$, on a

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \iff \forall\, i = 1, \ldots, n,\ a_i = b_i.$$

Remarque.
Un élément d'un produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_n$ est un *n-uplet*.

Définition 1.15 (Ensemble des parties d'un ensemble)

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, *i.e.* l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E, *i.e.*

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

2 Fonctions

2.1 Définitions

Définition 2.1

Une application (ou fonction) f est la donnée :

1. d'un ensemble de départ E.

2. d'un ensemble d'arrivée F.

3. pour tout élément $x \in E$, d'un unique élément de F appelé image de x par f, et noté $f(x)$.

Dans ce cas, f est une fonction de E dans F et on note $\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Remarques.

1. On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions de E dans F.
2. Attention : si on change l'ensemble de départ, ou d'arrivée, on change de fonction, même si l'expression de l'image reste la même.
3. Tout élément de E admet une unique image par f.
4. Un élément de F n'admet pas nécessairement d'antécédent par f, *cf.* la notion de surjectivité.
5. Un élément de F peut avoir plusieurs antécédents par f (et même une infinité), *cf.* la notion d'injectivité.

Définition 2.2 (Graphe d'une fonction)

Le *graphe* de la fonction f est l'ensemble

$$\{(a,b) \in E \times F,\ b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in E \times F\} \subset E \times F.$$

Définition 2.3 (Restriction, prolongement)

Soient E, F deux ensembles, $f \in F^E$, A un sous-ensemble de E, et G un ensemble contenant E.

1. La restriction de f à A est la fonction $\begin{array}{rccc} f_{|A}: & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.
2. Un prolongement de f à G est une fonction $g : G \longrightarrow F$ telle que, pour tout $x \in E$, $g(x) = f(x)$.

2.2 Exemples

Définition 2.4 (Application identité)

Soit E un ensemble. L'application *identité* de E est la fonction $\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E: & E & \longrightarrow & E \\ & a & \longmapsto & a. \end{array}$

Proposition 2.5

Soient E, F deux ensembles, $f \in F^E$ et $g \in E^F$. Alors $\mathrm{id}_E \circ g = g$ et $f \circ \mathrm{id}_E = f$.

Définition 2.6 (Fonction indicatrice)

Soit E un ensemble et $A \subset E$. La fonction indicatrice de A est la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{1}_A: & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Proposition 2.7

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Proposition 2.8

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A,$$
$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B,$$
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$$

2.3 Image directe, image reciproque

Définition 2.9 (Image directe, image reciproque)

Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$.

1. Soit A un sous-ensemble de E. L'*image directe* de A par f est le sous-ensemble de F

$$f(A) = \{b \in F,\ \exists\, a \in A,\ b = f(a)\} = \{f(a),\ a \in A\} \subset F,$$

i.e. l'ensemble des images par f de tous les éléments de A.

2. Soit B un sous-ensemble de F. L'*image réciproque* de B par f est le sous-ensemble de E

$$f^{-1}(B) = \{a \in E,\ f(a) \in B\} \subset E,$$

i.e. le l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B.

Proposition 2.10 (Image d'une application)

Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$. L'image $\mathrm{Im}(f)$ de f est l'image directe de E par F : $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.

Remarques.

1. La notation $f^{-1}(B)$ ne sous-entend pas du tout que la fonction f est bijective. Ce n'est qu'une notation.
2. Si $b \in F$, et f^{-1} n'est pas bijective, la notation $f^{-1}(b)$ n'a aucun sens. Seul $f^{-1}(\{b\})$ a un sens.

Proposition 2.11

1. Soient $A, A' \subset E$ tels que $A \subset A'$. Alors $f(A) \subset f(A')$.

2. Soient $B, B' \subset F$ tels que $B \subset B'$. Alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Proposition 2.12

Soient A, A' des sous-ensembles de E, et B, B' des sous-ensembles de F, et $f : E \longrightarrow F$. Alors

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \qquad f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A'),$$

$$A \subset f^{-1}\Big(f(A)\Big), \qquad f\Big(f^{-1}(B)\Big) \subset B,$$

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'), \qquad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$

Méthode 2.13

Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

1. Pour déterminer l'image directe de A, on considère $y \in F$. On résout alors l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in A$. Si l'équation a au moins une solution, alors $y \in f(A)$. Sinon, $y \notin f(A)$.

2. En particulier, pour déterminer l'image de f, on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$.

3. Pour déterminer l'image réciproque de B, on considère $x \in E$. On calcule $f(x)$, et on cherche une cns sur x pour que $f(x) \in B$.

2.4 Cas particuliers des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

.

Méthode 2.14 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

1. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b)$. Alors $f([a, b]) = [\min(f), \max(f)]$.

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors

$$f(I) = \begin{cases} [\inf_I(f), \sup_I(f)] & \text{si } \inf_I(f), \sup_I(f) \text{ sont atteints} \\ ]\inf_I(f), \sup_I(f)] & \text{si } \sup_I(f) \text{ est atteint et pas } \inf_I(f) \\ [\inf_I(f), \sup_I(f)[& \text{si } \inf_I(f) \text{ est atteint et pas } \sup_I(f) \\ ]\inf_I(f), \sup_I(f)[& \text{si } \inf_I(f), \sup_I(f) \text{ ne sont pas atteints} \end{cases}$$

3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 3.1

1. La fonction f est *injective* si pour tous $a, a' \in E$, on a

$$a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a'),$$

ou encore

$$f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'.$$

C'est équivalent à dire que pour tout $b \in F$, l'équation $b = f(a)$ d'inconnue $a \in E$ admet au plus une solution.

2. La fonction f est *surjective* si pour tout $b \in F$, il existe $a \in E$ tel que $b = f(a)$, ou encore si pour tout $b \in F$, l'équation $b = f(a)$ d'inconnue $a \in E$ admet au moins une solution, ou encore si $f(E) = F$.

3. La fonction f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective, *i.e.* si et seulement si pour tout $b \in F$, l'équation $b = f(a)$ d'inconnue $a \in E$ admet une et une seule solution. La fonction $F \longrightarrow E$ qui à $b \in F$ associe son unique antécédent $a \in E$ est la *fonction réciproque* de f et est notée f^{-1}.

Remarque.

Lorsqu'on étudie une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de ses sous-ensembles), les solutions de l'équation $b = f(a)$ se trouvent facilement avec un graphique. Ce sont (si elles existent), les abscisses des points d'intersections de la courbe représentative de f avec la droite horizontale d'équation $y = b$.

Proposition 3.2

Une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et strictement monotone, est injective.

Proposition 3.3

La composition de deux applications injectives (respectivement surjective) est injective (respectivement surjective).

Définition 3.4

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une bijection. La bijection réciproque de f est la fonction $F \longrightarrow E$ qui à $b \in F$ associe son unique antécédent par f. On la note f^{-1}.

Proposition 3.5

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une bijection. Alors

1. $\forall\, (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.
2. $\forall\, x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$, ou encore $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.
3. $\forall\, y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$, ou encore $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.
4. $\forall\, y \in F,\ f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

Proposition 3.6

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposition 3.7 (Caractérisation d'une bijection)

Soient E, F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. S'il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Méthode 3.8 (Déterminez si une fonction est bijective, et déterminez f^{-1})

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

1. Pour déterminer si f est bijective, on fixe $y \in F$, et on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$. Si, pour tout y, l'équation admet une et une seule solution, f est bijective. Sinon, elle ne l'est pas.
2. Si f est bijective, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation précédente.

Méthode 3.9 (Cas particulier des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un intervalle J.

1. Si f est strictement monotone, elle est injective (attention : réciproque fausse si f n'est pas continue).

2. Si f est continue, pour la surjectivité, on peut utiliser la méthode 2.14 qui permet de déterminer l'image de f.

3. On peut aussi utiliser la méthode 3.8.

4 Relations d'équivalence et d'ordre

4.1 Relations binaires

Définition 4.1 (Relation binaire)

Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une propriété définie sur $E \times E$, *i.e.* sur les couples d'éléments de E, qui peut être soit vraie, soit fausse. Losqu'un couple $(x, y) \in E^2$ vérifie la relation $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$.

Définition 4.2

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E. Elle est

1. réflexive si, pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.

2. symétrique si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

3. antisymétrique si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$.

4. transitive si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

Remarque.

Si une relation est à la fois symétrique et antisymétrique, la relation binaire est triviale, puisque si $x, y \in E$, et $x\mathcal{R}y$, alors par symétrie $y\mathcal{R}x$, donc par antisymétrie, $x = y$.

4.2 Relations d'équivalence

Définition 4.3 (Relation d'équivalence)

Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation binaire réflexive, transitive et symétrique. On note alors, pour $(x, y) \in E^2$, $x \sim y$ au lieu de $x\mathcal{R}y$.

Définition 4.4 (Classe d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, et $x \in E$. La classe d'équivalence de x pour la relation $\mathcal{R}$ est le sous-ensemble de E des éléments en relation avec x. On la note $Cl(x)$. On a donc : $Cl(x) = \{y \in E, x \sim y\}$.

Proposition 4.5

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, et $(x, y) \in E^2$.

1. $x \sim y \iff Cl(x) = Cl(y)$.

2. Si $x \not\sim y$, alors $Cl(x) \cap Cl(y) = \emptyset$.

Définition 4.6 (Congruence modulo un réel dans $\mathbb{R}$)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Deux réels x et y sont congrus modulo a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = ka$. On note alors $x \equiv y \mod a$.

Proposition 4.7

Soit $a \in \mathbb{R}$. La relation "congruence modulo a" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, alors $Cl(x) = \{x + ka,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 4.8 (Congruence modulo un entier dans $\mathbb{Z}$)

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Deux entiers x et y sont congrus modulo a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = ka$, *i.e.* si a divise $x - y$. On note alors $x \equiv y \mod a$.

Proposition 4.9

Soit $a \in \mathbb{Z}$. La relation "congruence modulo a" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. De plus, si $x \in \mathbb{Z}$, alors $Cl(x) = \{x + ka,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4.3 Relations d'ordre

Définition 4.10 (Relation d'ordre)

Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique. Pour $(x, y) \in E^2$, on note alors en général $x \prec y$ au lieu de $x\mathcal{R}y$.

Définition 4.11 (Ordre total, partiel)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Cet ordre est dit total si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \prec y$ ou $y \prec x$. L'ordre est dit partiel sinon.

Définition 4.12 (Majorants, minorants, plus grand élément, plus petit élément)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre, et A un sous-ensemble de E.

1. Un *majorant* de A est un élément $M \in E$ tel que

$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant M.$$

2. Un *minorant* de A est un élément $m \in E$ tel que

$$\forall\, a \in A,\ m \leqslant a.$$

3. Le *plus grand élément* de A, s'il existe, est un élément $M_0 \in A$ tel que,

$$\forall\, a \in A,\ a \leqslant M_0.$$

on le note $\max(A)$.

4. Le *plus petit élément* de A, s'il existe, est un élément $m_0 \in A$ tel que,

$$\forall\, a \in A,\ m_0 \leqslant a.$$

on le note $\min(A)$.

Remarques.

1. Ces définitions ne présument pas de l'existence de majorants, minorants, et à plus forte raison de plus grand et plus petit élément.
2. Le plus grand élément est un majorant, et le plus petit élément est un minorant.
3. Rappelons qu'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ est majoré si et seulement s'il est fini.
4. Tout sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus petit et un plus grand élément.
5. Le plus grand élément de A, s'il existe, est un majorant de A qui est dans A.

Proposition 4.13

Soit A un sous-ensemble non vide d'un ensemble ordonné E. Si A admet un plus grand élément (resp. plus petit élément), celui-ci est unique.

Méthode 4.14

Soient E un ensemble ordonné, A un sous-ensemble de E, et $m, M \in E$.

1. Pour montrer que $M = \max(A)$, on montre que $M \in A$ et que M majore A.

2. Pour montrer que $m = \min(A)$, on montre que $m \in A$ et que m minore A.

Proposition 4.15

Soit A un sous-ensemble non vide d'un ensemble ordonné E.

1. Si A admet un plus grand élément, on a pour $M \in E$,

$$\forall\, a \in A,\ M \geqslant a \iff M \geqslant \max(A),$$

i.e. M majore A si et seulement si M majore $\max(A)$.

2. Si A admet un plus petit élément, on a pour $m \in E$,

$$\forall\, a \in A,\ m \leqslant a \iff m \leqslant \min(A),$$

i.e. M minore A si et seulement si M minore $\min(A)$.

Remarque.

Un cas particulier très fréquent est le suivant : soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_i)_{1 \leqslant n}$ une famille de réels. Comme cette famille est finie, elle admet un plus grand et un plus petit élément. On en déduit que si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall\, i = 1, \ldots, n,\ x \geqslant x_i \iff x \geqslant \max(x_1, \ldots, x_n)$$

et

$$\forall\, i = 1, \ldots, n,\ x \leqslant x_i \iff x \leqslant \min(x_1, \ldots, x_n).$$