Chapitre 24

Probabilités sur un univers fini

1 Expérience aléatoire et univers

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1.1

Une *expérience aléatoire* est une action dont le résultat ne peut être prévu avec certitude.

1.2 Univers

On cherche à relier les expériences aléatoires aux mathématiques. Pour cela, on effectue ce qu'on appelle une modélisation.

Définition 1.2

L'*univers* (ou univers des possibles) d'une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles (ou des issues, ou des réalisations).

Remarques.

1. L'univers est en général noté Ω
2. A priori, chaque expérience aléatoire a son propre univers.
3. Le choix de l'univers pour modéliser notre expérience dépend de l'objectif qu'on se donne. On peut par exemple lancer deux dés, et étudier les couples obtenus, mais aussi la somme des nombres obtenus. L'univers sera $[\![1,6]\!]^2$ dans le premier cas, et $[\![2,12]\!]$ dans le deuxième.

Méthode 1.3

Attention au choix de l'univers lors de "tirages dans une urne". Si on considère une urne contenants n boules toutes de couleur différente, dans laquelle on veut prendre p boules. On peut :

1. Faire un **tirage simultané** : on prend en une fois les p boules. L'univers est alors l'ensemble des parties à p boules distinctes de l'ensemble des n boules, de cardinal $\binom{n}{p}$.

2. On peut effectuer un **tirage avec remise**. On replace la boule tirée avec de recommencer : on procède p fois. Comme chaque boule peut être tirée plusieurs fois, l'univers est ici l'ensemble des p-listes de boules, de cardinal n^p.

3. On peut effectuer un **tirage sans remise**. Les boules sont tirées successivement, mais pas remise après tirage. L'univers est alors l'ensemble des p-arrangements de boules, de cardinal A_n^p.

Remarques.

1. Lorsque l'ordre des boules n'est pas important, le tirage simultané ou sans remise donne le même résultat.
2. Ce genre de situations apparaît dans des modèles de prises d'échantillon dans une population pour des sondages.

Dans toute la suite de la sup, on ne considérera que des univers finis.

1.3 Evénement

Définition 1.4 (Événement)

Un *événement* d'une expérience aléatoire d'univers Ω est un sous-ensemble de Ω.

Remarque.

Un événement au sens donné ci-dessus est donc la modélisation mathématique d'un événement au sens courant du terme. Par exemple, lorsqu'on lance un dé, on peut considérer l'événement $\{1, 2\}$, qui correspond à l'événement (au sens courant) que le nombre obtenu est 1 ou 2.

Remarque.

Si $\text{card}(\Omega) = n$, on a 2^n événements possibles.

Définition 1.5

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω.

1. L'*événement certain* est l'ensemble Ω.
2. L'*événement impossible* est $\emptyset$.
3. Un *événement élémentaire* est un singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$.

1.4 Traduction probabiliste des opérations ensemblistes

Définition 1.6

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, et soient A et B deux événements.

1. L'événement "A ou B" est l'événement $A \cup B$.

2. L'événement "A et B" est l'événement $A \cap B$.
3. L'événement contraire de A est l'événement $\overline{A}$.

Remarque.
Il est souvent très intéressant pour le calcul de décomposer un événement en union ou intersection d'événements.

1.5 Système complet d'événements

Définition 1.7 (Événements incompatibles)

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Deux événements sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 1.8 (Système complet d'événement)

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Un *système complet d'événements* est une famille (nécessairement finie) d'événements $(A_k)_{k \in [1,n]}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que :

1. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow A_j \cap A_j = \emptyset$.
2. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Remarques.

1. La première condition se lit "les événements sont deux à deux incompatibles".
2. Les A_k peuvent être vides. Si tous sont non vide, on parle de partition de Ω.

Proposition 1.9

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω.

1. Pour tout événement A, la famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événement.
2. La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événement.

Remarque.
Choisir $(A, \overline{A})$ comme système complet d'événement signifie qu'en général, on s'intéresse seulement à la réalisation ou non de l'événement A.

2 Espaces probabilisés finis

Dans ce paragraphe, on cherche à modéliser la notion intuitive de chance qu'un événement arrive. Cette notion est liée à celle de fréquence : quand on jette un dé n-fois, et qu'on compte le nombre n_i de fois où on obtient i, on dira que la probabilité d'obtenir i est n_i/n.

On remarque que ces "chances" sont comprises entre 0 et 1, que la somme de deux deux d'entre-elles est la chance d'obtenir l'une des deux (les événements sont incompatibles). D'où la définition :

2.1 Probabilité

Définition 2.1 (Probabilité)

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω fini. Une *probabilité sur* Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Pour tous événements A et B incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité).

Définition 2.2 (Espace probabilisé fini)

Un *espace probabilisé fini* est un couple (Ω, P), où Ω est un univers fini, et P une probabilité sur Ω.

2.2 Propriétés

Théorème 2.3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et A et B deux événements. Alors :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leqslant P(B)$ (croissance de P).
4. Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
5. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.
8. Si $A \subset B$ et $P(B) = 0$, alors $P(A) = 0$.
9. Si $A \subset \overline{B}$ et $P(B) = 1$, alors $P(A) = 0$.

Proposition 2.4 (Additivité finie)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ une famille finie d'événements deux à deux incompatibles. Alors

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Proposition 2.5 (Inégalité de Boole)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ une famille finie d'événements. Alors

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Proposition 2.6 (Probabilité d'un système complet d'événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $(A_i)_{i=1,\cdots,n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ un système complet d'événements. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

De plus, si B est un événement, on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

2.3 Images des événements élémentaires

Dans ce paragraphe, on montre qu'une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminé par la connaissance de la probablité des événements élémentaires.

Théorème 2.7 (Probabilité et événements élémentaires)

Soit Ω un univers fini.

1. Soit P une probabilité sur Ω. Pour $\omega \in \Omega$, on pose $p_\omega = P(\{\omega\})$. Alors :

$$(1) \quad \forall\, \omega \in \Omega,\ p_\omega \geqslant 0, \qquad\qquad (2) \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

2. Réciproquement, soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille (finie) de réels vérifiant les conditions (1) et (2). Alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = p_\omega$. De plus, si A est un événement, on a

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Remarque.

S'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $P(\{\omega\}) = 1$, alors $P(\{\omega'\}) = 0$ si $\omega' \neq \omega$.

Théorème 2.8 (Probabilité uniforme)

Soit Ω un univers fini. Il existe une unique probabilité sur Ω prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires, appelée *probabilité uniforme sur* Ω. Elle est définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

De plus, si A est un événement, on a

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Remarques.

1. Il s'agit de la modélisation de l'équiprobabilité pour tous les événements élémentaires.
2. La probabilité d'un événement quelconque se lit "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles".
3. On fait essentiellement du dénombrement quand on travaille avec une probabilité uniforme.

Méthode 2.9 (Construire une probabilité)

Lorsqu'on veut construire une probabilité pour une expérience aléatoire :

1. On détermine tous les cas possibles qui constitueront nos événements élémentaires. Cela nous donne l'univers Ω.
2. On construit la probabilité P en donnant pour chaque événement élémentaire sa probabilité.
3. On vérifie la cohérence de notre modélisation : a-t-on bien $P(\Omega) = 1$?

3 Probabilités conditionnelles

Dans ce paragraphe, on cherche à modéliser la situation suivante : on lance un dé 6 face mais on cache le résultat avant qu'on ait eu le temps de le voir. Quelqu'un regarde le nombre obtenu et annonce que le résultat est pair. Quelle est la probabilité d'avoir un 6 ?

Sans l'information de parité, on modélise l'expérience en posant $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme. En notant A l'événement "avoir un 6", on a $A = \{6\}$ et donc $P(A) = \frac{1}{6}$.

Or, on sait que le résultat est pair. Notons B cet événement. On a $B = \{2, 4, 6\}$, et on peut alors changer notre Ω, puisque les résultats $1, 3$ et 5 n'arrivent jamais. On poserait ainsi $\tilde{\Omega} = \{2, 4, 6\}$, munit également de la probabilité uniforme. On a alors $P(A) = \frac{1}{3}$.

On voudrait faire le raisonnement précédent, sans changer d'univers. On va parler de "probabilité d'avoir un 6, sachant qu'on a un nombre pair".

Dans le cas d'une probabilité uniforme, la probabilité d'obtenir l'événement B, sachant que l'événement A est réalisé, est $\frac{\text{card}(A \cap B}{\text{card}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

3.1 Définition

Définition 3.1 (Probabilité conditionnelle)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et B un événement tel que $P(B) \neq 0$. La *probabilité de A sachant B* est le réel

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Théorème 3.2 (Probabilité conditionnelle)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et B un événement tel que $P(B) \neq 0$. L'application

$$\begin{array}{rccc} P_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & P_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω, appelé *probabilité conditionnelle à* B.

Remarques.

1. Attention : $P_B(A) \neq P(A \cap B)$. En effet, $P(A \cap B)$ est la probabilité d'avoir un élément de $A \cap B$ dans l'univers Ω, alors que $P_B(A)$ est la probabilité d'avoir un élément de A dans l'univers B.
2. Attention : il n'existe pas d'événement $(A|B)$.

3.2 Formule des probabilités composées

Proposition 3.3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements. Alors

1. $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ si $P(A) \neq 0$.
2. $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$ si $P(B) \neq 0$.

Remarque.

Il est en général plus simple de calculer une probabilité conditionnelle que de calculer la probabilité d'une intersection. On utilise donc la proposition 3.3 pour calculer la probabilité d'une intersection après avoir calculé une probabilité conditionnelle.

Théorème 3.4 (Formule des probabilités composées)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $n \geqslant 2$ et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Méthode 3.5

Cette formule est utilisée en particulier quand des événements se succèdent chronologiquement. Elle permet d'éviter des dénombrements compliqués en calculant des probabilités au fur et à mesure.

3.3 Formule des probabilités totales

Dans ce paragraphe, on cherche à calculer une probabilité en décomposant les événements suivant un système complet d'événements.

Proposition 3.6

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, et A un événement. Pour tout événement B, on a

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}).$$

De plus, si $0 < P(A) < 1$, alors

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}).$$

Méthode 3.7

Si on a une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on connait $P(A_n|A_{n-1})$ et $P(A_n|\overline{A}_{n-1})$, on peut déterminer une relation de récurrence entre $P(A_n)$ et $P(A_{n-1})$ en utilisant la proposition 3.6 avec $A = A_{n-1}$ et $B = A_n$.

Théorème 3.8 (Formule des probabilités totales)

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout événement B, on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k).$$

De plus, si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$, alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k).$$

Méthode 3.9

On utilise en particulier la formule des probabilités totales quand l'expérience se déroule en plusieurs étapes, et que la première aboutit à plusieurs événements incompatibles entre-eux, donnant un système complet d'événements.

Remarque.

On peut illustrer la formule par un arbre de probabilité, ou chaque noeud correspond à un événement (la racine est l'événement certain, les événements issus d'un même noeud forment un système complet d'événement), et chaque branche est affectée de la probabilité conditionnelle correspondante. La probabilité d'une feuille est le produit des probabilités des chemins qui y aboutissent (formule des probabilités composées), et la formule des probabilités totales nous dit que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

3.4 Formule de Bayes

Proposition 3.10 (formule de Bayes)

Soient A et B des événements de probabilité non nulle d'un l'espace probabilisé (Ω, P). Alors

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Remarque.

On appelle cette formule la *formule de probabilité des causes*, ou *formule à remonter le temps* : si l'événement B se produit après l'événement A, on peut déterminer $P_B(A)$, qui ne respecte pas la chronologie des événements.

Théorème 3.11 (formule de Bayes)

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de l'espace probabilisé (Ω, P), tel que pour tout $k = 1, \ldots, n$, $P(A_k) \neq 0$. Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

4 Événements indépendants

4.1 Couple d'événements indépendants

Définition 4.1 (Indépendance de deux événements)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Proposition 4.2

Soient (Ω, P) un espace probabilisé, et A, B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants pour la probabilité P si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Remarques.

1. Il ne faut pas confondre l'incompatibilité (notion ensembliste) et l'indépendance (notion probabiliste). Si A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$, et $P(A \cap B) = 0$. Mais si A et B sont de probabilité non nulle, on a $P(A)P(B) \neq 0$, donc A et B ne sont pas indépendants.
2. Insistons encore un peu : l'indépendance de deux événements est une notion qui dépend de la probabilté choisie. C'est pour cette raison qu'on peut insister en parlant "d'indépendance pour la probabilité P", *cf.* l'exemple ci-dessous.
3. On verra en particulier en td le cas des probabilités conditionnelles, *cf.* la méthode 4.3.
4. De même, si A et B sont indépendants, A et $A \cap B$ ne le sont pas en général, et A et $A \cup B$ non plus. En effet, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A \cap (A \cap B))$, et

$$P(A)P(A \cap B) = P^2(A)P(B) \neq P(A)P(B),$$

dès que $P(A) \neq 0, 1$ et $P(B) \neq 0$. De même, $P(A \cap (A \cup B)) = P(A)$, et

$$P(A)P(A \cup B) \neq P(A)$$

dès que $P(A) \neq 0, 1$ et $P(A \cup B) \neq 1$.

Méthode 4.3

Soient A, B et C trois événements. Lorsqu'on sait que les événements A et B sont indépendants une fois que l'événement C a eu lieu, cela signifie que A et B sont indépendants pour la probabilité conditionnelle P_C, *i.e.* que $P_C(A \cap B) = P_C(A)P_C(B)$.

Proposition 4.4

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, et A, B deux événements.

1. Si $P(B) = 0$ ou $P(B) = 1$, alors les événements A et B sont indépendants.

2. Les événements A et $\emptyset$ sont indépendants, A et Ω sont indépendants.

3. Si A et B sont deux événements indépendants, A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

4.2 Famille d'événements mutuellement indépendants

Définition 4.5 (Indépendance mutuelle)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soient n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont *mutuellements indépendants* (ou *indépendants*) si pour tout sous-ensemble non vide I de $[\![1, n]\!]$, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Définition 4.6 (Indépendance deux à deux)

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'espace probabilisé (Ω, P) sont deux à deux indépendants si

$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Remarques.

1. L'indépendance mutuelle entraine l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse comme le prouve l'exemple suivant.
2. L'indépendance mutuelle est une condition très forte : il faut vérifier $2^n - n - 1$ égalités (nombre de soous-ensemble d'un ensemble à n éléments, auquel on soustrait 1 (l'ensemble vide) et le nombre de singletons). En général, elle fait partie des hypothèses (expériences aléatoires aux résultats indépendants).

Proposition 4.7 (Sous-famille d'événements mutuellement indépendants)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soient n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mutuellement indépendants. Pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, la famille $(A_i)_{i \in I}$ est mutuellement indépendante.

Proposition 4.8

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soient n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mutuellement indépendants. Soit pour $i \in [\![1, n]\!]$ un événement $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$. Alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

5 Compétences

1. Savoir modéliser des expériences aléatoires en fonction des demandes de l'énoncé.
2. Savoir quand utiliser la formule des probabilités composées, totales, ou la formule de Bayes.
3. Na pas confondre événements indépendants et incompatibles.
4. Ne pas confondre indépendance mutuelle et deux à deux.