Chapitre 4

Réduction d'endomorphismes et de matrices carrées

I Éléments propres

I. A Valeur propre d'un endomorphisme

Définition 1.1

Soit u un endomorphisme de E. Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de u lorsqu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Un tel vecteur est appelé **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ.

Remarque 1.2 : Sont équivalents :

- λ est un valeur propre de u ;
- $\mathrm{Ker}(u - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{0\}$;
- $u - \lambda \cdot \mathrm{id}$ n'est pas injectif.

Remarque 1.3 : Un vecteur non nul x de E est un vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

Notation : L'équation $u(x) = \lambda x$ est appelée **équation aux éléments propres**.

Exemples 1.4 :

- Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés d'un projecteur non nul et différent de l'identité.
- Pour $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : P \mapsto P'$, déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés de u.
- $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u : f \mapsto f'$.

I. B Sous-espaces propres

Définition 1.5

Soit u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u. On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace :

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda \cdot \mathrm{id}) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Remarques 1.6 :

- Le sous-espace propre associé à λ est constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul.
- Un sous-espace propre n'est jamais le sous-espace nul.

Théorème 1.7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres de u distinctes. Alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe :

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \cdot \mathrm{id}) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \cdot \mathrm{id}).$$

Corollaire 1.8

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

II Éléments propres en dimension finie

Dans le reste du chapitre on suppose E de dimension finie.

II. A Spectre d'un endomorphisme en dimension finie

Définition 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre** de u et on note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

Remarque 2.2 : Sont équivalents :

- λ est une valeur propre de u ;
- $u - \lambda \cdot \mathrm{id}$ n'est pas un automorphisme ;
- $\det(u - \lambda \cdot \mathrm{id}) = 0$.

Proposition 2.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\dim(E) = n$, alors le spectre de u est de cardinal au plus n.

Remarque 2.4 : Autrement dit, un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres.

Proposition 2.5

Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

II. B Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 2.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire λ est une **valeur propre de A** lorsqu'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$; une telle matrice est appelée **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.
- On appelle **spectre de A**, et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.
- Pour toute valeur propre λ de A, on appelle **sous-espace propre** de A associé à λ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $\mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$.

Notation : On appelle équation aux éléments propres : $MX = \lambda X$.

Remarque 2.7 : Sont équivalents :

- λ est une valeur propre de A ;
- $A - \lambda \cdot I_n$ n'est pas inversible ;
- $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.

En particulier, 0 est un valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

Exemple 2.8 : Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Remarque 2.9 : Les éléments propres d'une matrice A coïncident avec ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à A. En particulier A a au plus n valeurs propres.

Proposition 2.10

Deux matrices semblables ont le même spectre.

Attention : Mais elles n'ont pas les mêmes sous-espaces propres !

Proposition 2.11

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors le spectre de f est égal au spectre de la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Remarque 2.12 : Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est inclus dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

Exemple 2.13 : Déterminer le spectre de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$ et en déduire son spectre dans $\mathbb{R}$.

II. C Valeurs propres et polynômes annulateurs

Proposition 2.14

Soit $P \in \mathbb{K}[X], u \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Théorème 2.15

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si P annule u, toute valeur propre de u est une racine de P ;
- les racines du polynôme minimal de u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.

Exemples 2.16 :

- homothétie ;
- projecteur $p \notin \{0, \mathrm{id}\}$;
- symétrie $s \notin \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$;
- matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III Polynôme caractéristique

III. A Définition et premières propriétés

Définition/Proposition 3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A = \det(XI_n - A) : x \mapsto \det(xI_n - A)$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n appelé **polynôme caractéristique de A**.

Exemples 3.2 :

- Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon du polynôme $P = X^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i X^i$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 3.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Proposition 3.4

Si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même polynôme caractéristique.

Définition/Proposition 3.5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n finie.
Alors $\chi_u = \det(X \cdot \mathrm{id} - u) : x \mapsto \det(x \cdot \mathrm{id} - u)$ est un polynôme unitaire de degré n appelé **polynôme caractéristique de u**.

Proposition 3.6

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et A est la matrice de u dans une base de E, alors $\chi_u = \chi_A$.

Remarque 3.7 : On retrouve ainsi que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

III. B Cas particuliers

Proposition 3.8

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ une matrice triangulaire. Alors :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i}).$$

Proposition 3.9

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous espace stable par u et $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F.
Alors : $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u.

III. C Racines du polynôme caractéristique

Théorème 3.10

Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathcal{L}(E)$) sont les racines de son polynôme caractéristique.

Remarques 3.11 :
- On retrouve ainsi que le cardinal du spectre de A (ou de u) est inférieur à n.
- Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a toujours au moins une valeur propre (dans $\mathbb{C}$).
- Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en notant $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(\mathcal{M}_)(\mathbb{K})$ le spectre de M dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ respectivement, on a :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M) = \mathbb{K} \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(M).$$

III. D Ordre de multiplicité

Définition 3.12

On appelle **ordre de multiplicité d'une valeur propre** son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Exemples 3.13 :
- Déterminer le polynôme caractéristique d'un projecteur et donner l'ordre de multiplicité de ses valeurs propres.
- Quel est l'ordre de la valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$?
- Valeurs propres de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 3.14

Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors A admet exactement n valeurs propres <u>comptées avec multiplicité</u> : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(A).$$

Remarques 3.15 :
- Pour retenir les formules : c'est ce qu'on obtient pour une matrice diagonale.
- Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de p comptées sans multiplicité et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ leurs ordre de multiplicité, alors :

$$\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{\alpha_i} = \det(A) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i = \operatorname{tr}(A).$$

- Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$, ainsi les formules sont toujours vraies si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 3.16

La dimension d'un sous-espace propre est inférieur à la multiplicité de la valeur propre correspondante, i.e. :

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre d'ordre de multiplicité $\omega \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id} - u) \leqslant \omega$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre d'ordre de multiplicité $\omega \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(\lambda \cdot I_n - A) \leqslant \omega$.

Remarque 3.17 : En particulier, si λ est une racine simple de χ_u, alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

III. E Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 3.18 (Cayley-Hamilton)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique de u est annulateur de u.

Remarques 3.19 :

- On a donc : $\chi_u(u) = 0$ et de même pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_A(A) = 0_n$.
- le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique : $\mu_u \mid \chi_u$.
- Si χ_u est scindé (toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, alors $\mu_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec : $\forall i \in [\![1\,;r]\!], 1 \leqslant \alpha_i \leqslant m_i$.
- Les polynômes χ_u et μ_u ont les mêmes racines, ce sont les valeurs propres de u.

Exemple 3.20 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\chi_A = (X-1)^2(X^2+X+1)$. Déterminer μ_A.

III. F Astuces

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si la somme de chaque ligne de A vaut λ, alors λ est un valeur propre de A et ______ est un vecteur propre associé.
- Si la somme de chaque colonne de A vaut λ, alors λ est un valeur propre de A.
- Si une colonne est nulle en dehors du coefficient diagonal égal à λ, alors λ est une valeur propre de A et ______ est un vecteur propre associé.
- Si deux lignes ou deux colonne sont proportionnelles, alors la matrice ______ et __ est une valeur propre de A.
- Si on connaît $n-1$ valeur propre, on peut obtenir la dernière en utilisant la formule sur le déterminant (toujours valable dans $\mathbb{C}$).

Exemples 3.21 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une valeur propre de A et B et les valeurs propres de C.

Pour déterminer la dimension d'un sous espace propre, on peut se servir de l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée et du théorème du rang.

Exemple 3.22 : Déterminer le polynôme caractéristique, le spectre et les sous-espaces propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

IV Diagonalisation

IV. A Endomorphisme diagonalisable

Définition 4.1

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Remarque 4.2 : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres.

Proposition 4.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie n,
u est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ de E constituée de vecteurs propres de E.
Dans ce cas la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec : $\forall i \in [\![1\,;n]\!], u(x_i) = \lambda_i x_i$.

Exemples 4.4 : Projecteurs et symétries.

IV. B Matrice diagonalisable

Définition 4.5

Une matrice carrée est dite **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 4.6 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

Proposition 4.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la matrice A est diagonalisable.

IV. C Caractérisation par les sous-espaces propres

Théorème 4.8 (Condition nécessaire et suffisante)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, sont équivalents :

- u est diagonalisable ;
- la somme (directe) des sous-espaces propres de u est égale à E ;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de E.

Méthode 4.9

On peut obtenir la dimension d'un sous-espace propre sans avoir à en déterminer une base, en se servant du théorème du rang.

Exemple 4.10 : Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Corollaire 4.11 (Condition suffisante)

Si u un endomorphisme d'un espace de dimension n admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Remarque 4.12 : De même si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Attention : La réciproque est fausse ! Contre ex : ____________ .

Théorème 4.13 (Condition nécessaire et suffisante)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et que pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Remarques 4.14 :

- Il suffit de vérifier la condition sur la dimension de l'espace propre associé pour les valeurs propres dont la multiplicité est au moins 2.
- Même résultat pour les matrice carrées.

Exemple 4.15 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? et sur $\mathbb{C}$?

Proposition 4.16 (Condition suffisante)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si χ_u est simplement scindé (scindé à racines simples), alors u est diagonalisable.

Méthode 4.17 (Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable)

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable : $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors pour tout $k \in \mathbb{N}, M^k = PD^kP^{-1}$.

Exemple 4.18 : Diagonaliser et calculer les puissances de la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

IV. D Diagonalisation et polynômes annulateurs

Théorème 4.19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Sont équivalents :

- u est diagonalisable ;
- u annule un polynôme simplement scindé ;
- le polynôme minimal de u est simplement scindé.

Remarque 4.20 : Même chose pour les matrices.

IV. E Diagonalisation d'un endomorphisme induit

Proposition 4.21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u.
Alors le polynôme minimal de l'endomorphisme induit $\tilde{u}$ par u sur F divise le polynôme minimal de u.

Théorème 4.22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u.
Si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit $\tilde{u}$ par u sur F est diagonalisable.

V Trigonalisation

V. A Endomorphismes trigonalisables

Définition 5.1

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Remarque 5.2 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de trigonalisation de $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- le vecteur e_1 est ______________________ ;
- pour tout $i \in [\![1\,;n]\!], u(e_i)$ ______________________ .

Ainsi, en notant pour tout $i \in [\![1\,;n]\!], F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, les sous-espaces F_i sont stables par u.

Définition 5.3

Une matrice carrée est dite trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.

Remarque 5.4 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable.

Proposition 5.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si la matrice A est trigonalisable.

V. B Caractérisation par le polynôme caractéristique

Théorème 5.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Sont équivalents :

- u est trigonalisable ;
- le polynôme caractéristique de u est scindé ;
- u annule un polynôme scindé ;
- le polynôme minimal de u est scindé.

Remarques 5.7 :
- Même chose pour les matrices.
- On retrouve les expressions à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire 5.8

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.
- Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Application : Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton (non exigible).

VI Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Définition 6.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'endomorphisme u est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.
On appelle **indice de nilpotence** de u le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

Définition 6.2

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dit **nilpotente** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.
On appelle **indice de nilpotence** de A le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

Remarque 6.3 : Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que X^k est un polynôme annulateur de u. Dans ce cas le polynôme minimal de u est donc de la forme X^p et p est l'indice de nilpotence de u.

Proposition 6.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Sont équivalents :

- u est nilpotent ;
- u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0 ;
- le polynôme caractéristique de u est X^n avec $n = \dim(E)$.

Remarque 6.5 : En particulier, une matrice strictement triangulaire est nilpotente.

Mais attention, la réciproque est fausse. Contre ex : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 6.6

L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est majoré par la dimension de E.

Remarque 6.7 : Même chose pour les matrices.

VII Sous-espaces caractéristiques

Définition 7.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

On appelle **sous-espaces caractéristiques** de u les sous espaces :

$$\mathrm{Ker}\left((u - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{m_i}\right).$$

Remarques 7.2 :

- Soit λ une valeur propre de u, alors le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(u - \lambda \cdot \mathrm{id})$ est inclus dans le sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}\left((u - \lambda \cdot \mathrm{id})^m\right)$.
- Les sous espaces caractéristiques de u sont stables par u.

Théorème 7.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé, alors E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{m_i}\right).$$

De plus pour tout $i \in [\![1 ; k]\!]$, la dimension du sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}\left((u - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{m_i}\right)$ est m_i l'ordre de la valeur propre λ_i.

Théorème 7.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs et dont les blocs diagonaux sont triangulaires supérieures à termes diagonaux égaux :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_k \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in [\![1 ; k]\!], T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Exemple 7.5 : Suite de l'exemple 3.22.

Déterminer P tel que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$