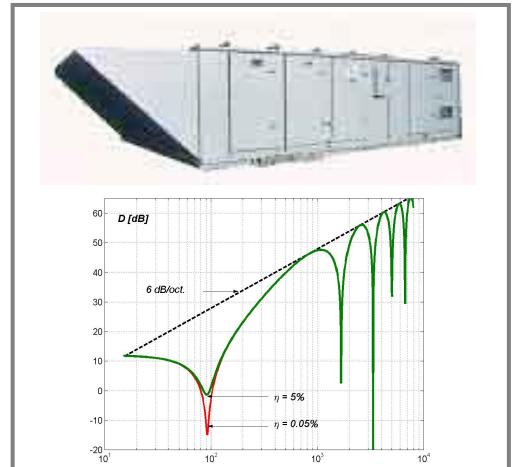
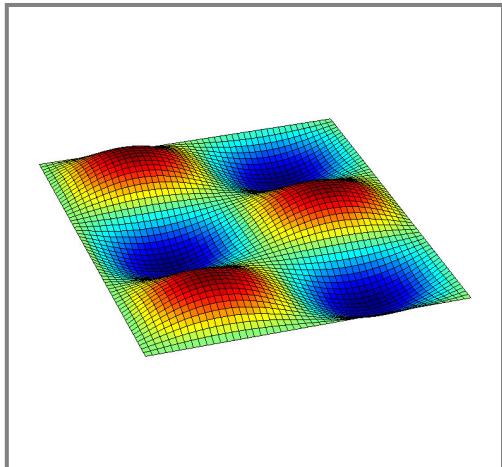
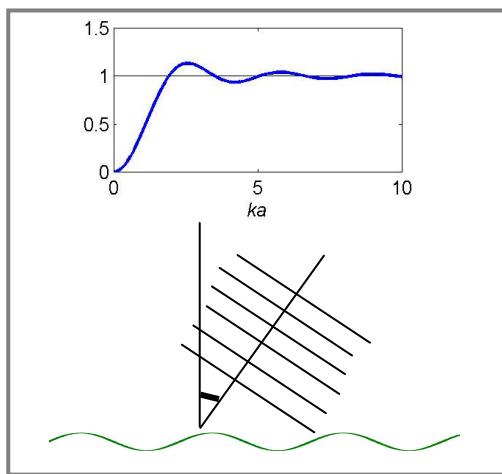


ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'INGENIEURS DU MANS - UNIVERSITE DU MAINE



# VIBRATIONS et ACOUSTIQUE 2

*Jean-Claude Pascal*



**2008-2009**



## **VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 2**

I – VIBRATIONS DES SYSTEMES MECANIQUES CONTINUS

II – PROPAGATION ACOUSTIQUE A UNE DIMENSION ET SILENCIEUX

III – ACOUSTIQUE MODALE ET STATISTIQUE

IV – INTRODUCTION AU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE



# I - VIBRATIONS DES SYSTEMES MECANIQUES CONTINUS

## 1. VIBRATIONS TRANSVERSALES DES CORDES

- 1.1 - Equation des cordes
- 1.2 - Description des conditions aux limites
- 1.3 - Techniques de séparation des variables
- 1.4 - Exemple : corde

## 2. VIBRATIONS LONGITUDINALES DANS LES BARRES

- 2.1 - Equation des ondes longitudinales
- 2.2 - Fréquences naturelles et déformées modales
- 2.3 - Conditions aux limites

## 3. VIBRATIONS DE TORSION DANS LES BARRES

- 3.1 - Equation des ondes de torsion
- 3.2 - Conditions aux limites

## 4. VIBRATIONS DE FLEXION DANS LES POUTRES

- 4.1 - Equation des poutres
- 4.2 - Conditions aux limites
- 4.3 - Détermination des fréquences naturelles et des déformées modales
- 4.4 - Un exemple : les lames du xylophone

## 5. VIBRATIONS DES MEMBRANES

- 5.1 - Equation des membranes
- 5.2 - Membranes rectangulaires
- 5.3 - Solution générale et conditions initiales
- 5.4 - Membranes circulaires

## 6. VIBRATIONS DES PLAQUES

- 6.1 - Equation des plaques minces
- 6.2 - Méthodes pour obtenir des solutions
- 6.3 - Plaque rectangulaire simplement supportée
- 6.4 - Introduction de Rayleigh-Ritz

## 7. MODELES D'AMORTISSEMENT

- 7.1 - Facteur d'amortissement modal
- 7.2 - Coefficient d'amortissement dans l'équation d'onde
- 7.3 - Dissipation aux limites

## 8. REPONSE FORCEE

- 8.1 - Réponse forcée par décomposition modale
- 8.2 - Exemple pour une poutre en flexion
- 8.3 - Cas des plaques rectangulaires
- 8.4 - Synthèse modale

## 9. PROPAGATION DES ONDES VIBRATOIRES

- 9.1 - Ondes quasi-longitudinales dans les barres
- 9.2 - Ondes de flexion dans les poutres
- 9.3 - Flux de puissance transmis par les ondes de flexion dans les poutres

## 10. REPONSE FORCEE PAR DECOMPOSITION EN ONDES

- 10.1 - Présentation de la méthode pour les barres
- 10.2 - Extensions de la méthode
- 10.3 - Cas des poutres en flexion
- 10.4 - Comparaison avec la méthode de la synthèse modale

## ANNEXE A

*Identification des paramètres modaux généralisés pour la poutre en flexion*

## ANNEXE B

*Solution approchée pour les plaques utilisant des fonctions de poutre*

## Bibliographie

### Niveau élémentaire

D.J. Inman, *Engineering vibration*, Prentice-Hall, 1996.

M. Lalanne, J. Der Hogapian, P. Berthier, *Mécanique des vibrations linéaires* (2eme Edition), Masson, 1986.

S.S. Rao, *Mechanical vibration* (3rd Edition), Addison-Wesley, 1995.

### Niveau supérieur

M. Gérardin, D. Rixen, *Théorie des vibrations* (2eme Edition), Masson, 1996.

J.L. Guyader, *Vibrations des milieux continus*, Hermès, 2002.

L. Meirovitch, *Principles and techniques of vibrations*, Prentice-Hall, 1997.

A.W. Leissa, *Vibration of plates (originally published 1969)*, Acoustical Society of America Publications.

W. Soedel, *Vibration of shells and plates* (2<sup>nd</sup> Edition), Marcel Dekker, 1993.



# 1 – VIBRATIONS TRANSVERSALES DES CORDES

## 1.1 - Equation des cordes

Une corde de masse linéique  $m$  (en kg/m) est tendue avec une tension  $\tau$  entre deux points d'attache. L'équilibre des forces d'un petit élément  $\Delta x$  de la corde est observé.

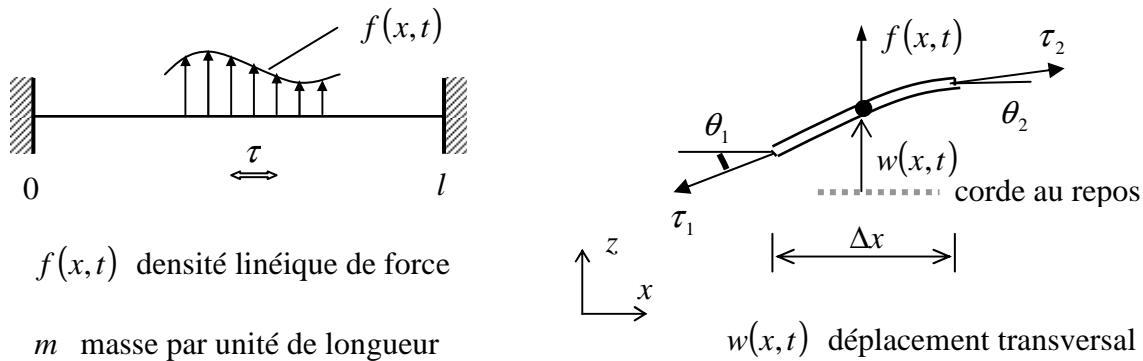


Figure 1.1 – Déplacement transversal et équilibre des forces pour une corde tendue

La résultante des forces agissant sur l'élément  $\Delta x$  doit être égal à la force d'inertie dans la direction  $z$

$$-\tau_1 \sin \theta_1 + \tau_2 \sin \theta_2 + f(x, t) \Delta x = m \Delta x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont petits, si bien que l'équilibre des forces dans la direction  $x$  conduit à

$$\tau_1 \cos \theta_1 = \tau_2 \cos \theta_2 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau$$

et il est possible d'écrire également

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &\approx \tan \theta_1 = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x_1} \\ \sin \theta_2 &\approx \tan \theta_2 = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x_2} \end{aligned}$$

donc

$$\left( \tau \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)_{x_2} - \left( \tau \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)_{x_1} + f(x, t) \Delta x = m \Delta x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

Si on considère pour une quantité scalaire  $s(x)$ , le développement en série de Taylor tronqué au second ordre autour de  $x_0$ , le point central de l'élément  $\Delta x$

$$s(x) \Big|_{x_1} = s(x) \Big|_{x_0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial s(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} + O(\Delta x^2) \quad \text{et} \quad s(x) \Big|_{x_2} = s(x) \Big|_{x_0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial s(x)}{\partial x} \Big|_{x_0} + O(\Delta x^2)$$

donc

$$\left( \tau \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)_{x_1} = \left( \tau \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)_{x_0} \mp \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_0} + O(\Delta x^2)$$

L'équation d'équilibre devient donc

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_0} \Delta x + f(x,t) \Delta x = m \Delta x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

Dans le cas où la force externe est nulle ( $f(x,t)=0$ ), cette relation conduit à l'**équation des cordes**

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

avec  $c = \sqrt{\tau/m}$ , la vitesse de propagation de l'onde transversale.

Sans considérer de conditions aux limites, la solution représente la propagation des ondes (le long d'une corde très longue ou infinie, par exemple)

$$w(x,t) = g_1(x-ct) + g_2(x+ct), \quad g_1 \text{ et } g_2 \text{ sont des fonctions arbitraires.}$$

Avec une excitation harmonique, l'équation peut se mettre sous la forme semblable à celle de l'équation de Helmholtz en acoustique

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + k^2 w(x) = 0, \quad \text{où le nombre d'onde } k = \frac{\omega}{c}$$

dont la solution est

$$w(x) = A e^{-jkx} + B e^{jkx},$$

(la dépendance temporelle en  $e^{j\omega t}$  est omise tel que  $w(x,t) = w(x)e^{j\omega t}$ ).

Pour une corde de **dimension finie**, le déplacement dépendra des conditions de fixation aux extrémités : les **conditions aux limites**.

## 1.2 - Description des conditions aux limites

Si l'extrémité de la corde n'est pas maintenue fixe, la résultante dans la direction  $z$  des forces à cette extrémité doit être nulle

$$\begin{aligned} \sum_{\text{direction } z} F \Big|_{x_0} &= \tau \sin \theta + \text{forces extérieures} \Big|_{x_0} = 0 \\ &= \tau \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x_0} + \text{forces ext.} \Big|_{x_0} = 0 \end{aligned}$$

Par exemple pour l'extrémité  $x = \ell$  :

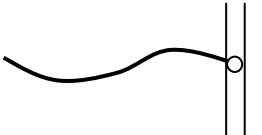
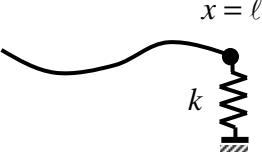
	fixe $w(\ell, t) = 0$	
	glissière $\tau \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{\ell} + \text{forces ext.} \Big _{\ell} = 0$ $\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{\ell} = 0$	forces ext. $ _{\ell} = 0$
	raideur $\tau \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{\ell} + k w(\ell, t) = 0$ $\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{\ell} = -\frac{k}{\tau} w(\ell, t)$	forces ext. $ _{\ell} = k w(\ell, t)$

Tableau 1.1 – Exemples de conditions aux limites pour une corde.

### 1.3 - Technique de séparation des variables

Cette technique permet d'obtenir les solutions du mouvement pour une corde de dimension finie avec des conditions aux limites particulières. La solution recherchée pour le déplacement transversal se présente sous la forme d'un produit de deux fonctions, dont l'une dépend de l'espace et l'autre du temps

$$w(x, t) = X(x)T(t)$$

L'équation des cordes s'écrit alors

$$c^2 X''(x)T(t) = X(x)\ddot{T}(t)$$

avec  $X''(x) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$  et  $\ddot{T}(t) = \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$ , et peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \text{constante} = -\sigma^2$$

Les rapports de fonctions qui dépendent des variables indépendantes  $x$  et  $t$ , ne peuvent être que constants pour satisfaire l'égalité. Cette constante vaut  $-\sigma^2$  et permet d'écrire deux équations séparées

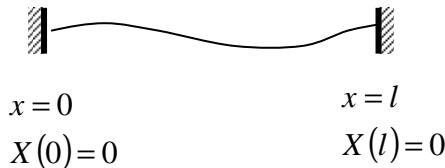
$$\begin{cases} X''(x) + \sigma^2 X(x) = 0 \\ \ddot{T}(t) + \sigma^2 c^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont

$$\begin{aligned} X(x) &= \alpha \sin \sigma x + \beta \cos \sigma x \\ T(t) &= a \sin \sigma c t + b \cos \sigma c t \end{aligned}$$

### 1.3.1 – Utilisation des conditions aux limites : exemple fixe – fixe

Les conditions aux limites sont employées pour déterminer  $\sigma$  et  $\beta$ :



$$\text{CL en } x = 0 \Rightarrow X(0) = \beta = 0$$

donc le déplacement se réduit à

$$X(x) = \alpha \sin \sigma x$$

Figure 1.2 – Conditions aux limites fixe-fixe

$$\text{CL en } x = l \Rightarrow X(l) = \alpha \sin \sigma l$$

Les solutions du problèmes sont celles qui vérifient l'équation caractéristique  $\sin \sigma l = 0$ , c'est à dire  $\sigma l = n\pi$  où  $n$  est un entier ( $n = 0$  est écarté car il conduit à  $X(x) = 0$ , c'est à dire à l'absence de mouvement), soit

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Il y a donc un nombre infini de solutions qui correspondent aux **modes** de la corde

$$X_n(x) = \alpha_n \sin \sigma_n x \quad (\text{pour } n = 1, 2, \dots) \text{ pour lesquelles } X_n(0) = X_n(l) = 0$$

$\alpha_n$  est une constante arbitraire. Il y a donc aussi un nombre infini d'équations différentielles de la fonction de la variable  $t$  qui s'écrivent maintenant sous la forme

$$\ddot{T}_n(t) + \sigma_n^2 c^2 T_n(t) = 0, \quad (\text{pour } n = 1, 2, \dots)$$

et dont les solutions sont

$$T_n(t) = a_n \sin \sigma_n c t + b_n \cos \sigma_n c t$$

Les solutions du déplacement et de la vitesse de la corde s'expriment à partir de la somme sur  $n$  du produit des fonctions  $T_n(t)X_n(t)$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \sigma_n c t + B_n \cos \sigma_n c t) \sin \sigma_n x$$

$$\dot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n c (A_n \cos \sigma_n c t - B_n \sin \sigma_n c t) \sin \sigma_n x$$

Les  $A_n$  et  $B_n$  sont des constantes arbitraires telles que  $A_n = a_n \alpha_n$  et  $B_n = b_n \alpha_n$ . Il apparaît clairement que les  $\sigma_n c$  sont les **pulsations propres** de chaque mode

$$\omega_n = \sigma_n c = \frac{n\pi c}{l}$$

**Remarque**

Les deux équations qui représentent les conditions aux limites (CL) peuvent se mettre sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sin \sigma l & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur  $[\alpha \quad \beta]^T$  est non nul et les solutions correspondent à

$$\det \begin{bmatrix} \sin \sigma l & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \sin \sigma l = 0.$$

**1.3.2 – Utilisation des conditions initiales pour déterminer A et B**

Les fonctions  $\sin \sigma_n x$  représentent la distribution spatiale du déplacement sur toute la longueur de la corde pour chaque mode  $n$  et se nomment les **déformées modales**. Ce sont des fonctions orthogonales qui satisfont la **relation d'orthogonalité**

$$\int_0^l \sin \sigma_n x \sin \sigma_m x dx = \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} l/2 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

La condition initiale ( $t = 0$ ) sur le déplacement s'écrit

$$w(x,0) = w_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \sigma_m x$$

En multipliant à droite par  $\sin \sigma_n x$  et en intégrant par rapport à  $x$  sur  $[0 \ l]$ , la relation d'orthogonalité permet d'obtenir

$$\int_0^l w_0(x) \sin \sigma_n x dx = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^l \sin \sigma_m x \sin \sigma_n x dx = B_n \frac{l}{2}$$

donc

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \sin \sigma_n x dx \quad n = 1, 2, \dots$$

De la même manière, l'utilisation de la vitesse initiale permet d'écrire

$$\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sigma_m c \sin \sigma_m x$$

et d'obtenir en utilisant la relation d'orthogonalité

$$A_n = \frac{2}{\sigma_n l c} \int_0^l \dot{w}_0(x) \sin \sigma_n x dx \quad n = 1, 2, \dots$$

**1.3.3 – Interprétation**

Pour une corde de longueur  $l$ , le déplacement libre s'écrit donc

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \phi_n(x)$$

$w_n(x, t)$  représente la contribution de chaque mode, pour lequel  $\omega_n$  est la **pulsation propre** et  $\phi_n(x)$  la **déformée modale**.

Par exemple, pour une corde tendue entre **deux points fixes**, nous avons obtenu :

- les pulsations propres  $\omega_n = \sigma_n c = \frac{n\pi c}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{\tau}{m}}$  ou les fréquences propres  $f_n = \frac{nc}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{\tau}{m}}$ . Les fréquences sont "harmoniques" :
- les déformées modales  $\phi_n(x) = \sin \sigma_n x = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ,

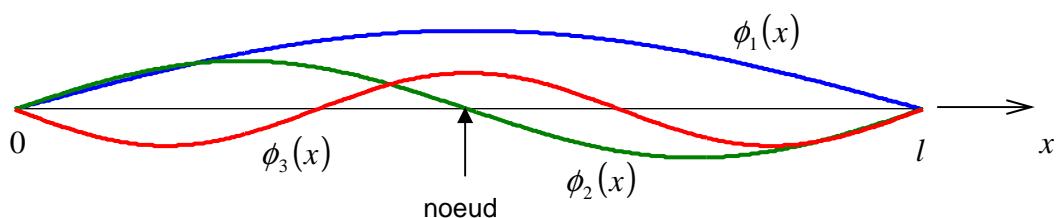
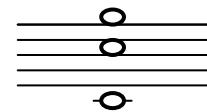


Figure 1.3 – Déformées modales des 3 premiers modes d'une corde fixées à ses extrémités

### Technique des "harmoniques" au violon

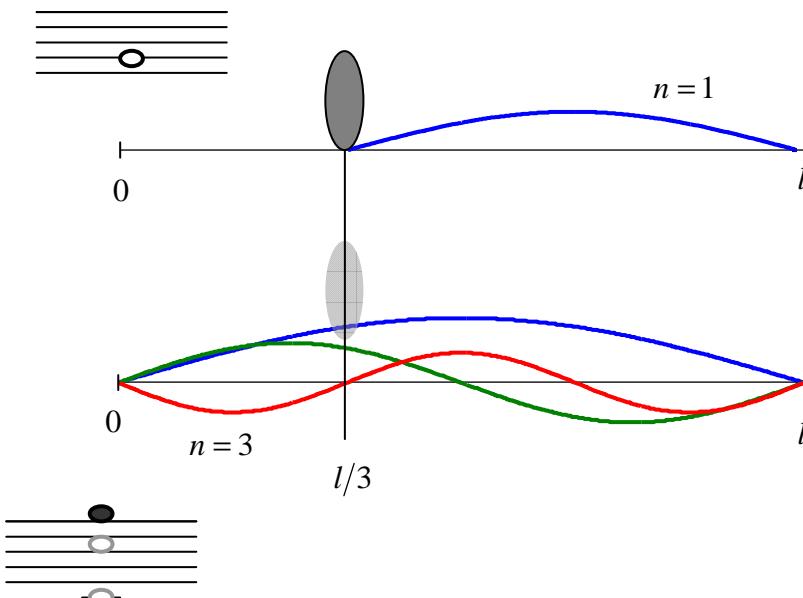


Figure 1.4 – Déformées modale pour le fondamental et les harmoniques

La corde pincée fortement au  $1/3$  de sa longueur produit le fondamental ( $n=1$ ) d'une corde de longueur  $2l/3$

$$f_1 = \frac{c}{2(2l/3)} = \frac{3c}{4l}$$

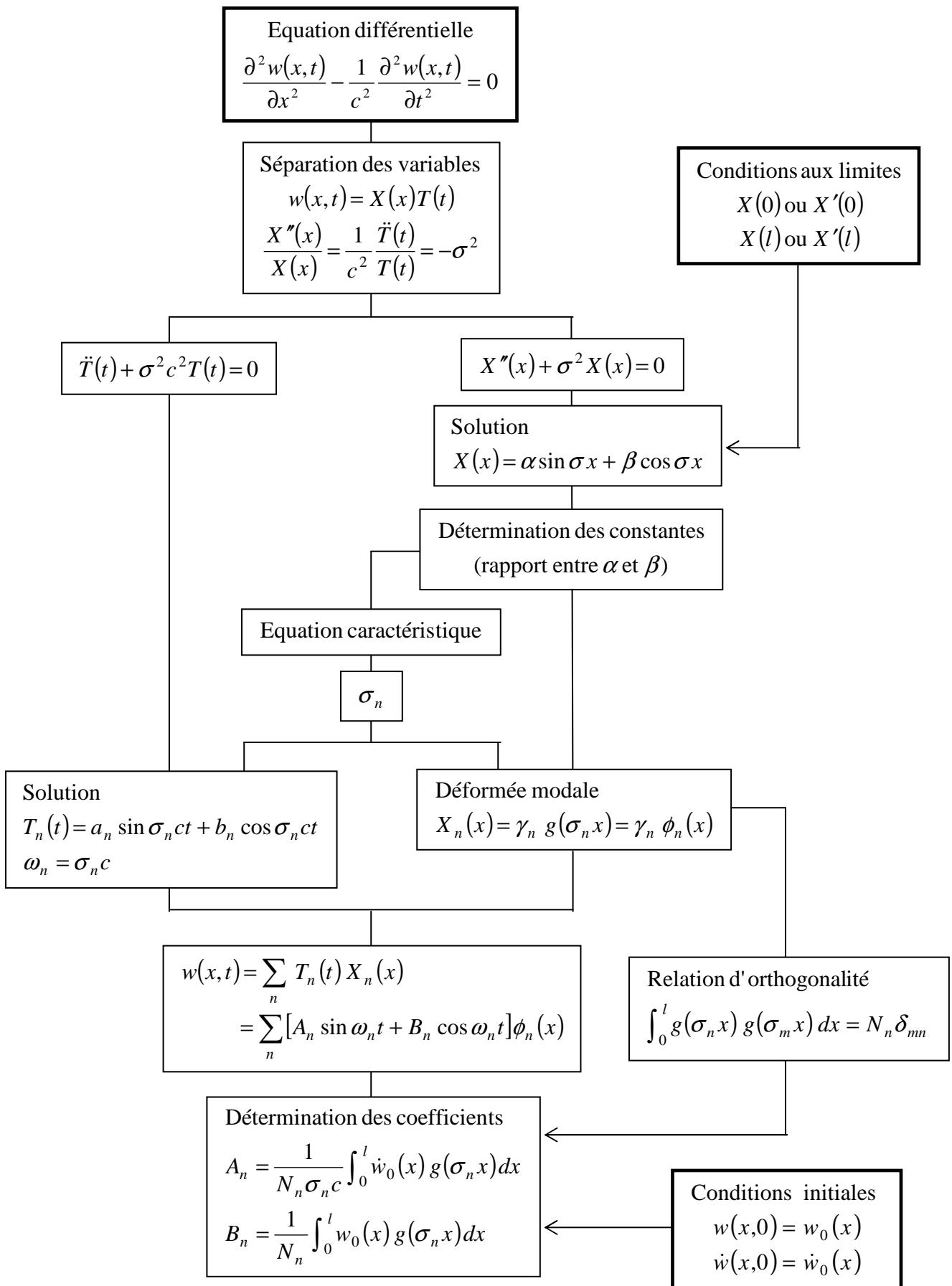
En effleurant cette corde au même endroit, le fondamental de la corde de longueur  $l$  est étouffé ainsi que l'harmonique 2.

L'harmonique 3 qui présente un nœud à cet endroit n'est pratiquement pas atténué : la fréquence

$$f_3 = \frac{3c}{2l}$$

est entendue : on gagne une octave.

### 1.3.4 – Résumé de la démarche : fréquences propres et déformées modales



### 1.4 - Exemple : Corde

On considère ici une corde montée fixe à une extrémité et sur un support de raideur  $k$  à l'autre extrémité.

Equation  $X''(x) + \sigma^2 X(x) = 0$       Solution générale :  $X(x) = \alpha \sin \sigma x + \beta \cos \sigma x$

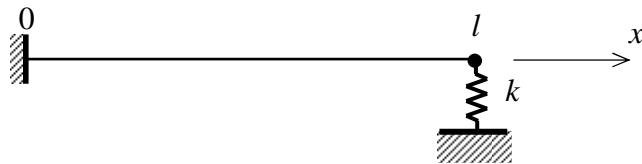


Figure 1.5 – Configuration d'une corde montée sur un support de raideur finie

Les conditions aux limites

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0 & \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} &= -\frac{k}{\tau} w(l, t) \\ X(0) &= 0 & X'(l) &= -\frac{k}{\tau} X(l) \end{aligned}$$

entraînent

$$\begin{aligned} X(0) = \beta &= 0 \Rightarrow X(x) = \alpha \sin \sigma x \\ X'(0) &= \alpha \sigma \cos \sigma x \\ X'(l) = -\frac{k}{\tau} X(l) &\Rightarrow \alpha \sigma \cos \sigma l = -\frac{k}{\tau} \alpha \sin \sigma l \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'**Équation caractéristique**

$$-\frac{\tau}{kl} \sigma l = \tan \sigma l$$

Sur la figure 1.6, les intersections de la courbe  $\tan \sigma l$  et de la droite de pente  $-\tau/kl$  sont les solutions  $\sigma_n l$  cherchées.

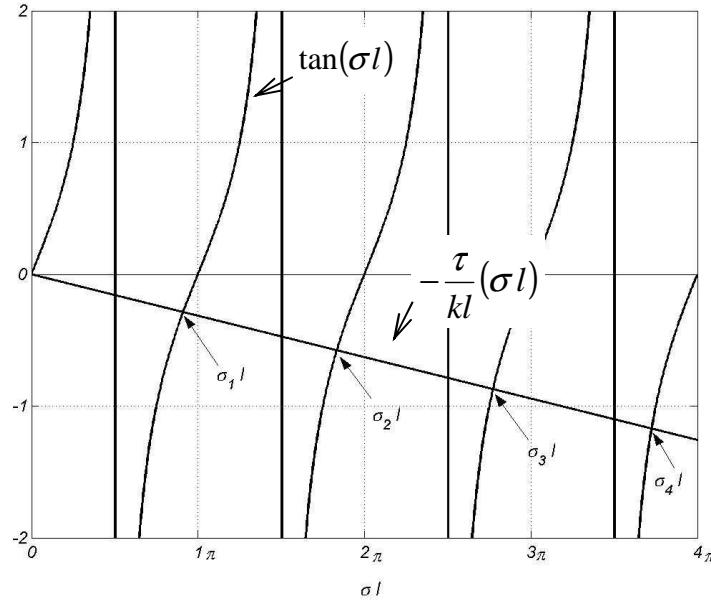


Figure 1.6 – Représentation des solutions de l'équation caractéristique.

Les solutions de cette équation s'obtiennent numériquement (fonction Matlab fzero) en prenant  $\tau/kl = 0,1$ . Elles sont comparées au cas où la condition à la limite en  $x=l$  correspond à une rigidité infinie (fixe). L'écart se réduit quand l'ordre du mode augmente.

$n$	$(\sigma_n l)$ pour $\frac{\tau}{kl} = 0,1$	$(\sigma_n l)$ pour $\frac{\tau}{kl} = 0$ $(k \rightarrow \infty)$	écart par rapport à une raideur infinie
1	2.86277259	$\pi$	- 8.88 %
2	5.76055793	$2\pi$	- 8.32 %
3	8.70831383	$3\pi$	- 7.60 %
4	11.70267808	$4\pi$	- 6.87 %

Tableau 1.2 – Exemple de la solution qui permet d'obtenir la pulsation propre  $\omega_n = (c/l)(\sigma_n l)$

## 2 – VIBRATIONS LONGITUDINALES DANS LES BARRES

### 2.1 - Equation des ondes longitudinales

Les ondes longitudinales sont des ondes de traction-compression dans la direction  $x$ .

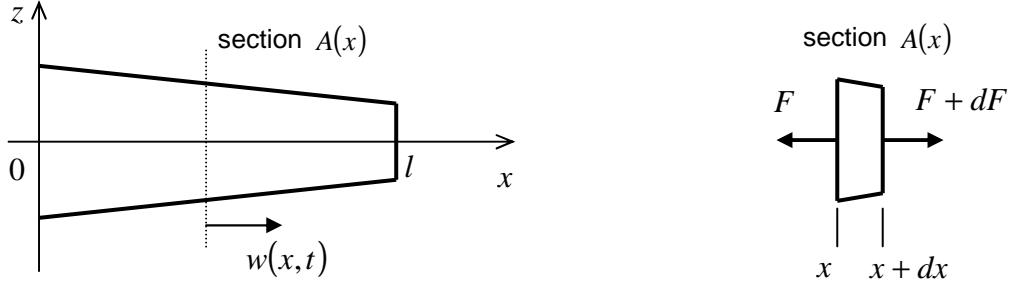


Figure 2.1 – Déplacement longitudinal dans une barre

L'équation d'équilibre de l'élément  $dx$  s'écrit

$$F + dF - F = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

avec  $w(x, t)$  le déplacement longitudinal,  $A(x)$  la section et  $\rho$  la masse volumique. Le tenseur de la contrainte est

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_{xx} = \frac{F}{A(x)}$$

Le tenseur des déformations s'obtient par la loi de Hooke ( $E$ : module de Young,  $\nu$ : coefficient de Poisson)

$$\underline{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{\mathbf{I}} \quad \text{où} \quad \text{tr}(\underline{\sigma}) = \sigma_{xx}$$

Or,  $\epsilon_{xx} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$  et  $\epsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{F}{E A(x)}$ , d'où

$$F = E A(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$$

Puisque  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx$ , l'équation d'équilibre devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E A(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) dx = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} dx$$

Dans le cas d'une section constante  $A(x) = A$

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

et en notant la vitesse de propagation des ondes longitudinales  $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , l'équation de propagation peut se représenter sous la forme

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

La loi de Hooke montre qu'il existe aussi une déformation dans la direction  $z$  (et  $y$ )

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} = -\nu \varepsilon_{xx}$$

où on a considéré que  $\sigma_{zz} = 0$  car il s'agit d'une surface libre, donc

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx} = -\nu \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$$

La propagation des ondes de traction-compression dans les barres s'accompagne d'une déformation en  $z$ . On parle alors d'onde **quasi-longitudinale**

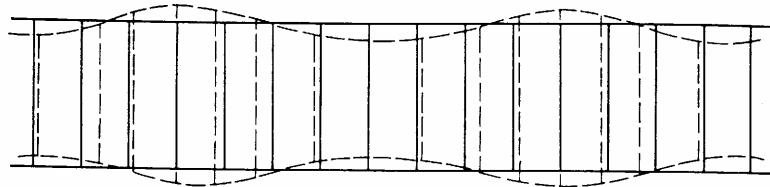


Figure 2.2 - Onde quasi-longitudinale : onde de traction-compression dans une barre

## 2.2 – Fréquences naturelles et déformées modales

C'est une démarche identique à celles des cordes qui est suivie ici : le déplacement longitudinal est représenté par des fonctions indépendantes

$$w(x,t) = X(x)T(t)$$

Introduite dans l'équation des ondes, cette relation va conduire (voir les cordes) à deux équations indépendantes dont les solutions sont

$$\begin{aligned} X(x) &= \alpha \sin \sigma x + \beta \cos \sigma x \\ T(t) &= a \sin \sigma ct + b \cos \sigma ct \end{aligned}$$

Fréquences naturelles et déformées modales vont dépendre des **conditions aux limites**.

La barre encastrée à une extrémité et libre à l'autre (cantilever) est prise comme exemple.

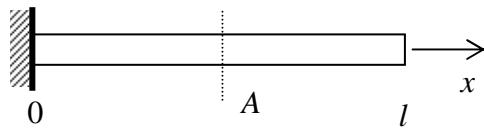


Figure 2.3 – Barre encastrée - libre

Les conditions aux limites se décrivent par :

$$\text{en } x = 0, \text{ le déplacement est nul} \quad w(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0$$

$$\text{en } x = l, \text{ la contrainte est nulle} \quad \sigma_{xx}(l, t) = E \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(l) = 0$$

soit

$$\text{CL en } x = 0 : \quad X(0) = \beta \cos(\sigma 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

d'où l'équation du déplacement  $X(x) = \alpha \sin \sigma x$  et sa dérivée  $X'(x) = \sigma \alpha \cos \sigma x$

$$\text{CL en } x = l : \quad X'(l) = \sigma \alpha \cos(\sigma l) = 0$$

conduit à l'équation caractéristique :  $\cos \sigma l = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

Les solutions sont

$$\sigma_n = \frac{2n-1}{2l} \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les **déformées modales** sont

$$\phi_n(x) = \sin \sigma_n x = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

et vérifient la relation d'orthogonalité

$$\int_0^l \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \int_0^l \sin \sigma_n x \sin \sigma_m x dx = \frac{l}{2} \delta_{nm}$$

avec le symbole de Kronecker  $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$ . Les **pulsations naturelles** sont

$$\omega_n = \sigma_n c_L = \frac{(2n-1)\pi c_L}{2l} = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Les solutions du déplacement et de la vitesse peuvent s'écrire

$$\boxed{w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \sigma_n c_L t + B_n \cos \sigma_n c_L t) \sin \sigma_n x}$$

$$\dot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n c_L (A_n \cos \sigma_n c_L t - B_n \sin \sigma_n c_L t) \sin \sigma_n x$$

$$\omega_n = \sigma_n c_L \quad \phi_n(x) = \sin \sigma_n x$$

Les **conditions initiales** (pour  $t=0$ ) et la relation d'orthogonalité (voir les cordes) sont employées pour déterminer les coefficients  $A_n$  et  $B_n$

$$\text{le déplacement initial: } w(x,0) = w_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(\sigma_m c_L 0) \sin \sigma_m x$$

$$\int_0^l w_0(x) \sin \sigma_n x \, dx = \int_0^l B_n \sin^2 \sigma_n x \, dx = B_n \frac{l}{2}$$

donc

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \sin \sigma_n x \, dx$$

$$\text{la vitesse initiale: } \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m c_L A_m \cos(\sigma_m c_L 0) \sin \sigma_m x$$

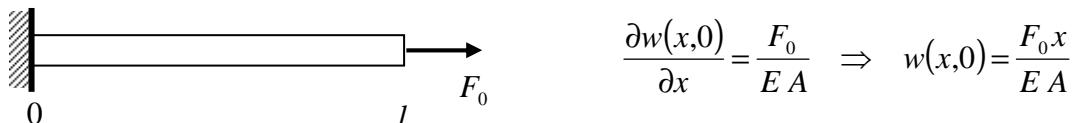
$$\int_0^l \dot{w}_0(x) \sin \sigma_n x \, dx = \int_0^l \sigma_n c_L A_n \sin^2 \sigma_n x \, dx = \sigma_n c_L A_n \frac{l}{2}$$

donc

$$A_n = \frac{2}{\sigma_n c_L l} \int_0^l \dot{w}_0(x) \sin \sigma_n x \, dx$$

### Exemple

À  $t=0$ , la vitesse initiale  $\dot{w}_0(x)=0$  et une force  $F_0$  est appliquée à l'extrémité libre de la barre encastrée



$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial x} = \frac{F_0}{EA} \Rightarrow w(x,0) = \frac{F_0 x}{EA}$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{F_0 x}{EA} \sin \sigma_n x \, dx = \frac{2F_0}{EA l} \left[ -\frac{x}{\sigma_n} \cos \sigma_n x + \frac{\sin \sigma_n x}{\sigma_n^2} \right]_0^l$$

$$= \frac{2F_0}{EA l} \left( -\underbrace{\frac{l}{\sigma_n} \cos(2n-1)\frac{\pi}{2}}_0 + \underbrace{\frac{1}{\sigma_n^2} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}_{(-1)^{n+1}} \right) = \frac{2F_0}{EA l} \frac{4l^2 (-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2}$$

$$\text{soit } B_n = \frac{8F_0 l}{EA \pi^2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \quad \text{et} \quad A_n = 0 \quad \text{car} \quad \dot{w}_0(0) = 0$$

Le déplacement libre de la barre est complètement défini par ses conditions aux limites et ses conditions initiales

$$w(x,t) = \frac{8F_0 l}{EA \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos \omega_n t \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

$$\text{avec } \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

### 2.3 – Conditions aux limites

Les déformées modales et les fréquences naturelles dépendent des conditions aux limites aux deux extrémités de la barre. Différents types de conditions aux limites peuvent être envisagés :

a) extrémité **libre** : la **contrainte** est **nulle**  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

b) extrémité **encastrée** : le **déplacement** est **nul**  $w = 0$

c) extrémité fixée à un ressort de **raideur**  **$k$**   $kw = E A \frac{\partial w}{\partial x}$

d) extrémité attachée à une **masse**  **$m$**   $-m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = E A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Le tableau suivant donne les pulsations naturelles et les déformées modales pour quelques combinaisons de CL

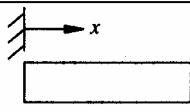
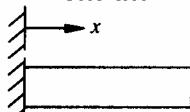
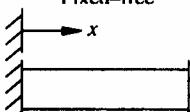
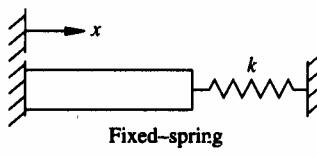
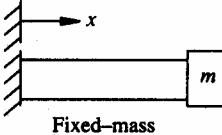
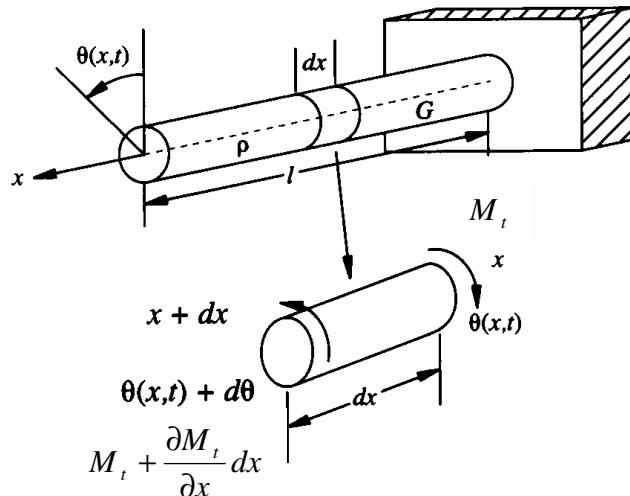
configuration	pulsations naturelles $\omega_n$	déformées modales $\phi_n(x)$
	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\cos \frac{n\pi x}{l}$
	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2l}, n = 1, 2, \dots$	$\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$
	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, n = 1, 2, \dots$	$\sin \frac{n\pi x}{l}$
	$\lambda_n \cot \lambda_n = -\left(\frac{kl}{EA}\right)$ $\omega_n = \frac{\lambda_n c}{l}$	$\sin \frac{\lambda_n x}{l}$
	$\cot \lambda_n = \left(\frac{m}{\rho Al}\right) \lambda_n$ $\omega_n = \frac{\lambda_n c}{l}$	$\sin \frac{\lambda_n x}{l}$

Tableau 2.1 – Pulsations naturelles et déformées modales pour les déplacements longitudinaux dans la barre

### 3 – VIBRATIONS DE TORSION DANS LES BARRES

#### 3.1 - Equation des ondes de torsion

Une barre peut vibrer en torsion : la vibration est caractérisée par un déplacement angulaire (mouvement de rotation) autour de l'axe longitudinal de la barre.



On considère l'équilibre des moments d'un petit élément  $dx$  d'une barre de section circulaire uniforme. Soit  $M_t$  le moment de torsion en  $x$  et  $M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx$  le moment de torsion en  $x + dx$ .

Figure 3.1 – Notations pour la barre en torsion

Le moment de torsion s'écrit

$$M_t = G I_0 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}$$

où  $G I_0$  est la raideur à la torsion,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  le module de cisaillement et  $I_0 = \pi D^2$  le moment d'inertie de rotation de la section.

L'équilibre des moments est

$$M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx - M_t = \rho I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dx$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ G I_0 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] = \rho I_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}$$

L'équation de propagation des ondes de torsion peut s'écrire sous la forme habituelle

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

avec la vitesse de propagation des ondes de torsion  $c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ .

### 3.2 – Conditions aux limites

- a) extrémité **encastrée** : **déplacement** angulaire **nul**  $\theta(x_0, t) = 0$
- b) extrémité **libre** : **moment nul**  $\dot{\theta}(x_0, t) = 0$

La méthode pour obtenir les pulsations naturelles et les déformées modales est la même que pour les cordes et les barres en traction-compression. La prise en compte des conditions initiales permettra de déterminer totalement le mouvement de la barre en torsion

Le tableau suivant donne les pulsations naturelles et les déformées modales pour quelques combinaisons de CL

configuration	pulsations naturelles $\omega_n$	déformées modales $\phi_n(x)$
---------------	----------------------------------	-------------------------------

#### Conditions aux limites

	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2l}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$
	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\sin \frac{n\pi x}{l}$
	$\lambda_n \cot \lambda_n = -\frac{kl}{G\gamma}$ $\omega_n = \frac{\lambda_n c}{l}$	$\sin \frac{\lambda_n x}{l}$
	$\cot \lambda_n = \frac{J_0}{\rho l \gamma} \lambda_n$ $\omega_n = \frac{\lambda_n c}{l}$	$\sin \frac{\lambda_n x}{l}$

(Note: dans ce tableau  $I_0 = \gamma$ )

Tableau 3.1 – Pulsations naturelles et déformées modales pour les déplacements de torsion dans la barre

## 4 – VIBRATIONS DE FLEXION DES POUTRES

### 4.1 - Equation des poutres

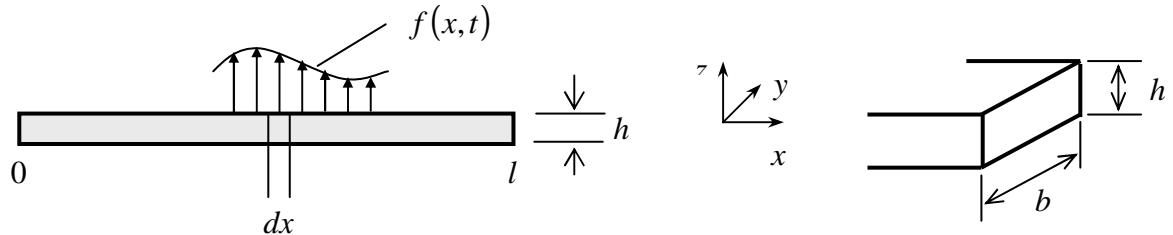


Figure 4.1 – Géométrie pour les poutres en flexion

Le déplacement transversal  $w(x,t)$  est l'amplitude du mouvement de flexion. L'équilibre de l'efforts tranchants et des moments sur un élément de poutre  $dx$  est décrit par le schéma ci-dessous

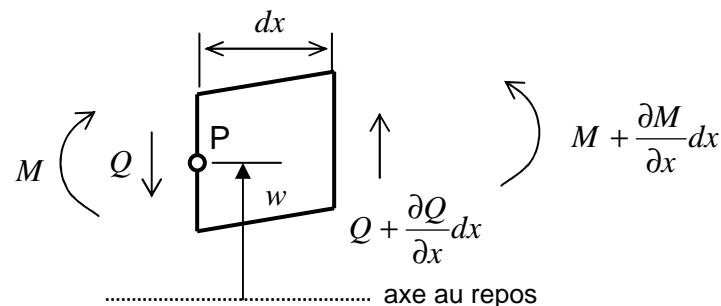


Figure 4.2 – Équilibre d'un élément de poutre  $dx$

$Q$  est la force de cisaillement ou effort tranchant. Le moment de flexion s'écrit

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$$

$I = \frac{bh^3}{12}$  est le moment d'inertie de la section droite (selon l'axe  $y$ ). L'équation d'équilibre des forces est établie en considérant que les déformations due au cisaillement peuvent se négliger (les sections droites ne se déforment pas)

$$\left[ Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx \right] - Q(x,t) + f(x,t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

Pour l'équilibre des moments par rapport au point  $P$ , les inerties de rotation selon  $y$  sont négligées

$$\left[ M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] - M(x,t) + \left[ Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + [f(x,t)dx] \frac{dx}{2} = 0$$

$$\left[ \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + Q(x,t) \right] dx + \left[ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \frac{f(x,t)}{2} \right] (dx)^2 = 0$$

Puisque  $dx$  est petit,  $(dx)^2$  peut être négligé et finalement

$$Q(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x}$$

Cette dernière expression permet de remplacer  $Q$  par  $M$  dans l'équation d'équilibre des forces

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} dx + f(x,t) dx = \rho A dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

soit

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t)$$

Dans le cas où la densité des forces extérieures est nulle

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

4 conditions aux limites  2 conditions initiales

Ces équations sont basées sur la théorie des poutres d'**Euler-Bernouilli** qui fait deux approximations importantes :

- les déformations de la section droite dues au cisaillement sont négligées,
- l'effet d'inertie de rotation est négligé.

La théorie des poutres de **Timoshenko** prend en compte ces deux phénomènes.

## 4.2 – Conditions aux limites

Elles sont définies en considérant les 4 grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion

- déplacement dû à la flexion :  $w(x,t)$
- déplacement angulaire (rotation) dû à la flexion :  $\theta(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$
- moment de flexion :  $M(x,t) = EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$
- force de cisaillement (effort tranchant) :  $Q(x,t) = -EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}$

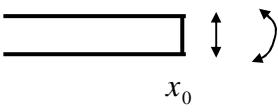
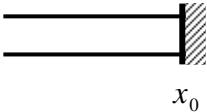
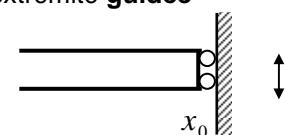
<b>extrémité libre</b> 	<p>pas de contraintes sur le déplacement et la rotation <math>\Rightarrow</math> le <b>moment de flexion</b> et la <b>force de cisaillement</b> s'annulent en <math>x_0</math></p>	$M(x_0 t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0 t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$
<b>extrémité encastrée</b> 	<p>les <b>déplacements</b> transversal et angulaires sont <b>nuls</b> en <math>x_0</math></p>	$w(x_0, t) = 0$ $\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$
<b>extrémité simplement supportée</b> 	<p>le <b>déplacement transversal</b> est bloqué mais la rotation est libre <math>\Rightarrow</math> le <b>moment de flexion</b> est donc nul en <math>x_0</math></p>	$w(x_0, t) = 0$ $M(x_0 t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$
<b>extrémité guidée</b> 	<p>le déplacement transversal est libre et la <b>rotation</b> est bloquée <math>\Rightarrow</math> la <b>force de cisaillement</b> est donc nulle en <math>x_0</math></p>	$\theta(x_0 t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0 t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$

Tableau 4.1 – Principales conditions aux limites pour les poutres

#### 4.3 – Détermination des fréquences naturelles et des déformées modales

Une solution en variables séparées  $w(x, t) = X(x)T(t)$  est recherchée. L'équation différentielle du mouvement peut ainsi s'écrire

$$\mu^2 \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

et produire deux équations séparées. L'équation de la fonction dépendant du temps

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

a la même solution que pour les cas précédents

$$T(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

pour l'équation différentielle de la fonction spatiale  $X(x)$

$$X^{(4)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \beta^4 = \frac{\omega^2}{\mu^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

on suppose des solutions de la forme  $D e^{sx}$ , où  $D$  et  $s$  sont des constantes. En reportant cette solution dans l'équation différentielle on obtient

$$s^4 - \beta^4 = 0$$

$$\text{soit } s_{1,2}^2 = \beta^2 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \beta \\ s_2 = -\beta \end{cases} \quad \text{et} \quad s_{3,4}^2 = -\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} s_3 = j\beta \\ s_4 = -j\beta \end{cases}$$

d'où la solution

$$X(x) = D_1 e^{\beta x} + D_2 e^{-\beta x} + D_3 e^{j\beta x} + D_4 e^{-j\beta x}$$

ou encore sous une forme équivalente<sup>1</sup>

$$X(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x$$

Pour déterminer les coefficients  $D_1$  à  $D_4$  ou  $C_1$  à  $C_4$ , quatre conditions aux limites sont utilisées.

### Exemple : poutre encastrée – simplement supportée

A partir des définitions des CL du tableau précédent on obtient les conditions aux limites de la figure 4.3.

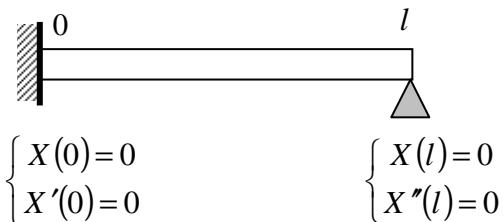


Figure 4.3 – Conditions aux limites de la poutre encastrée-simplement supportée

$$\begin{aligned} \text{Pour } x=0, \quad & X(0)=0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \\ & X'(0)=0 \Rightarrow \beta(C_1 + C_3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x=l, \quad & X(l)=0 \Rightarrow C_1 \sin \beta l + C_2 \cos \beta l + C_3 \sinh \beta l + C_4 \cosh \beta l = 0 \\ & X''(l)=0 \Rightarrow \beta^2 [-C_1 \sin \beta l - C_2 \cos \beta l + C_3 \sinh \beta l + C_4 \cosh \beta l] = 0 \end{aligned}$$

Ces 4 équations peuvent s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & \beta & 0 \\ \sin \beta l & \cos \beta l & \sinh \beta l & \cosh \beta l \\ -\beta^2 \sin \beta l & -\beta^2 \cos \beta l & \beta^2 \sinh \beta l & \beta^2 \cosh \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

---

<sup>1</sup>  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\sinh(0) = 0$ ,  $\cosh(0) = 1$ ,  
 $(\sinh x)' = \cosh x$ ,  $(\cosh x)' = \sinh x$

La solution non-trivial (vecteur  $[C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4]^T$  non-nul) s'obtient en trouvant la solution de l'équation  $\det(\mathbf{A})=0$ , soit

$$\tan \beta l = \tanh \beta l$$

vérifiée pour un nombre infini de valeurs  $\beta_n$  ( $n=1,2,\dots$ ), comme le montre la figure suivante. Les valeurs  $\beta_n l$  sont obtenues numériquement. Toutefois, pour  $n > 5$ ,  $\beta l \gg 1$  et  $\tanh \beta l \rightarrow 1$ : on peut considérer que l'équation caractéristique est  $\tan \beta l \approx 1$ , et employer l'approximation  $\beta_n l = \frac{(4n+1)\pi}{4}$ .

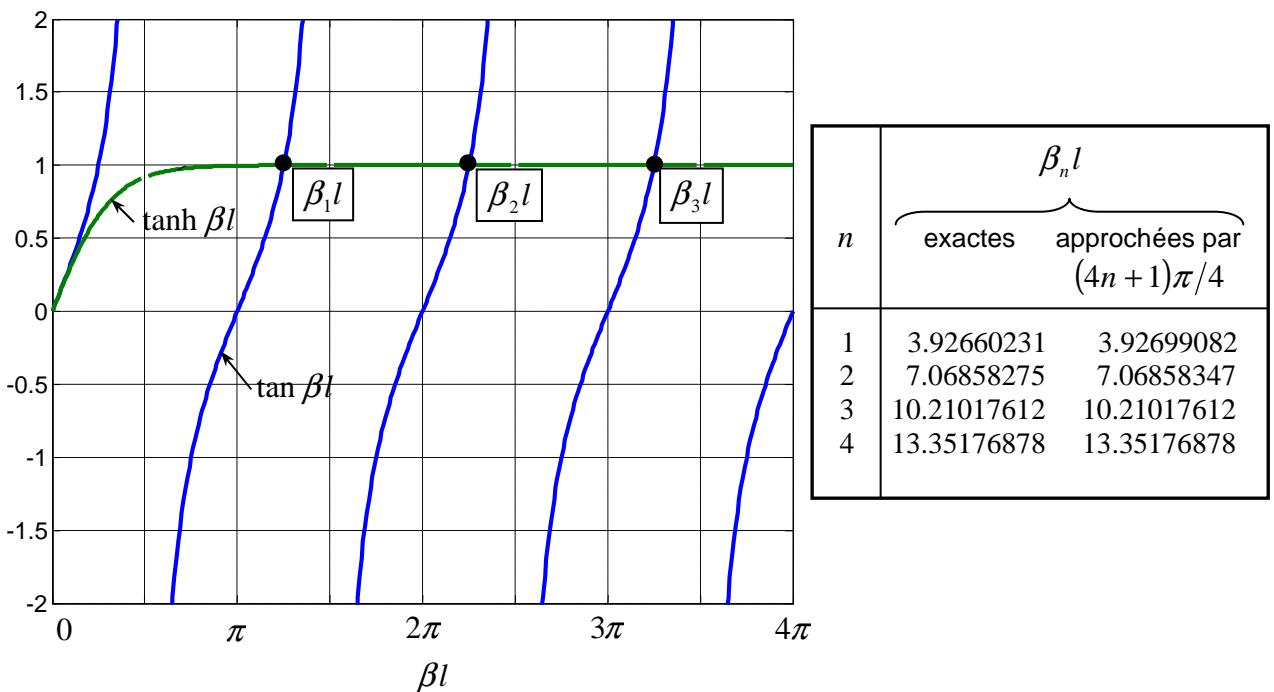


Figure 4.4 – Représentations graphique des solution de la poutres encadrée-simplement supportée.

Les **pulsations naturelles** s'obtiennent à partir de

$$\beta_n^4 = \frac{\omega_n^2}{\mu^2} \Rightarrow \omega_n = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}, \quad n=1,2,3,\dots$$

Pour obtenir les **déformées modales**, il faut utiliser les relations entre les différents coefficients  $C_1$  à  $C_4$ . La condition pour  $x=0$  conduit à  $C_2 = -C_4$  et  $C_1 = -C_3$ . En utilisant ces relations dans l'équation  $X''(l)=0$ , on obtient

$$C_4 (\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l) + C_3 (\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l) = 0$$

d'où

$$C_3 = -\frac{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l} \quad C_4 = -\sigma_n C_4$$

La fonction de la variable  $x$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} X_n(x) &= C_n [(\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l) - \sigma_n (\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l)] \\ &= C_n \phi_n(x) \end{aligned}$$

Les déformées modales  $\phi_n(x)$  vérifient la **relation d'orthogonalité**

$$\int_0^l \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad \text{quand } m \neq n$$

L'équation du déplacement est

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \phi_n(x)$$

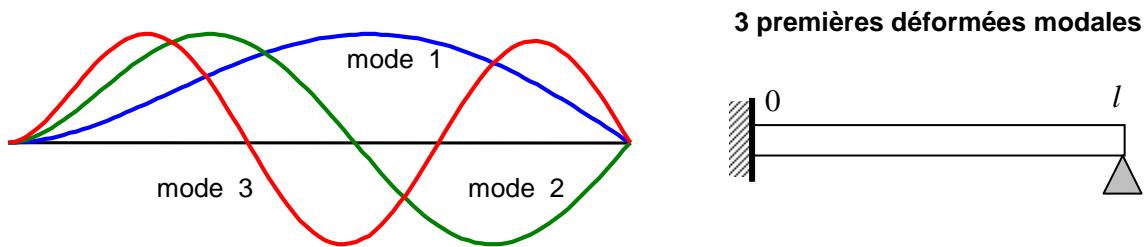


Figure 4.5 – Déformées modales des 3 premiers modes de la poutre encastrée - simplement supportée.

Le tableau 4.3 donne les valeurs  $\beta_n l$  pour calculer les pulsations  $\omega_n = (\beta_n l)^2 \sqrt{EI/\rho Al^4}$ , les déformées  $\phi_n(x)$  et les coefficients  $\sigma_n$ .

Free-free	$\sigma_n = \frac{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}$
Clamped-free	$\sigma_n = \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l}$
Clamped-pinned	$\sigma_n = \frac{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}$
Clamped-sliding	$\sigma_n = \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l}$
Clamped-clamped	$\sigma_n = \frac{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}$

Tableau 4.2 - Expressions du coefficient  $\sigma_n$  pour l'utilisation du tableau précédent.

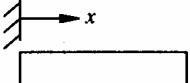
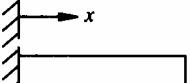
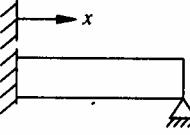
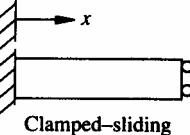
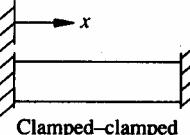
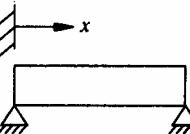
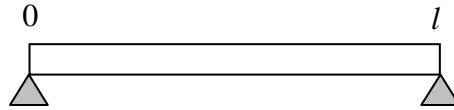
configuration	équation caractéristique et solutions $\beta_n l$	déformées modales $\phi_n(x)$	coefficients $\sigma_n$
 Free-free	0 (rigid-body mode) 4.73004074 7.85320462 10.9956078 14.1371655 17.2787597 $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ for $n > 5$ $\cos \beta l / \cosh \beta l = 1$	$\cosh \beta_n x + \cos \beta_n x$ $-\sigma_n (\sinh \beta_n x + \sin \beta_n x)$	0.9825 1.0008 0.9999 1.0000 0.9999 1 for $n > 5$
 Clamped-free	1.87510407 4.69409113 7.85475744 10.99554073 14.13716839 $\frac{(2n-1)\pi}{2}$ for $n > 5$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$ $-\sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)$	0.7341 1.0185 0.9992 1.0000 1.0000 1 for $n > 5$
 Clamped-pinned	$\cos \beta l / \cosh \beta l = -1$ 3.92660231 7.06858275 10.21017612 13.35176878 16.49336143 $\frac{(4n+1)\pi}{4}$ for $n > 5$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$ $-\sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)$	1.0008 1 for $n > 1$
 Clamped-sliding	$\tan \beta l = \tanh \beta l$ 2.36502037 5.49780392 8.63937983 11.78097245 14.92256510 $\frac{(4n-1)\pi}{4}$ for $n > 5$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$ $-\sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)$	0.9825 1 for $n > 1$
 Clamped-clamped	$\tan \beta l + \tanh \beta l = 0$ 4.73004074 7.85320462 10.9956079 14.1371655 17.2787597 $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ for $n > 5$	$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x$ $-\sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)$	0.9825 1.0008 0.9999 1.0000 0.9999 1 for $n > 5$
 Pinned-pinned	$\cos \beta l / \cosh \beta l = 1$ $n\pi$ $\sin \beta l = 0$	$\sin \frac{n\pi x}{l}$	none

Tableau 4.3 – Combinaison des principales conditions aux limites pour la poutre

Remarque : seul le cas simplement supporté aux deux extrémités conduit à une expression analytique complète.



$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X''(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X(l) = 0 \\ X''(l) = 0 \end{cases}$$

Figure 4.6 – Conditions aux limites pour la poutre simplement supportée.

Pour  $x=0$ ,

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \\ X''(0) = 0 &\Rightarrow \beta^2(-C_2 + C_4) = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow C_2 = C_4 = 0$$

Pour  $x=l$ ,

$$\begin{aligned} X(l) = 0 &\Rightarrow C_1 \sin \beta l + C_3 \sinh \beta l = 0 \\ X''(l) = 0 &\Rightarrow \beta^2[-C_1 \sin \beta l + C_3 \sinh \beta l] = 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \sin \beta l = 0$$

Les solutions sont donc  $\beta_n l = n\pi$ , avec  $n=1, 2, 3, \dots$  et le déplacement peut s'exprimer par

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\omega_n = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

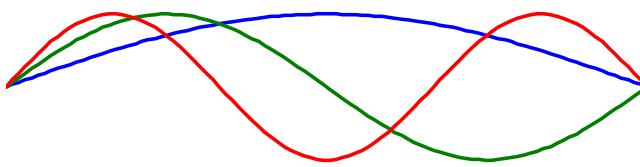


Figure 4.7 – Premières déformées modale de la poutre simplement supportée.

#### 4.4 – Un exemple : les lames du xylophone

Le xylophone est un instrument de percussion composé de barres ou lames en bois mises en vibration par l'impact d'une mailloche. Il est d'usage de parler de barre ou de lame pour le xylophone alors que dans la terminologie des vibrations il s'agit bien de vibrations de flexion de poutres libres. Les lames sont maintenues en place par une cordelette et un

résonateur constitué d'un tube fermé à une extrémité est utilisé pour renforcer le son rayonné<sup>2</sup>.



Figure 4.8 – Xylophone.

La section transversale des barres du xylophone présente la particularité de n'être pas uniforme pour accorder leurs premières fréquence propres. Les tubes résonateurs ne font que renforcer le fondamental (première fréquence propre des poutres).

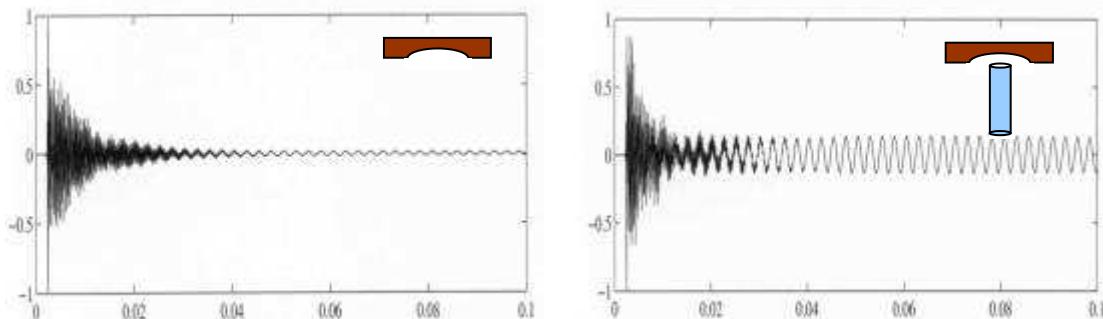


Figure 4.9 – Renforcement de la réponse de la première fréquence propre par les résonateurs tubulaires.

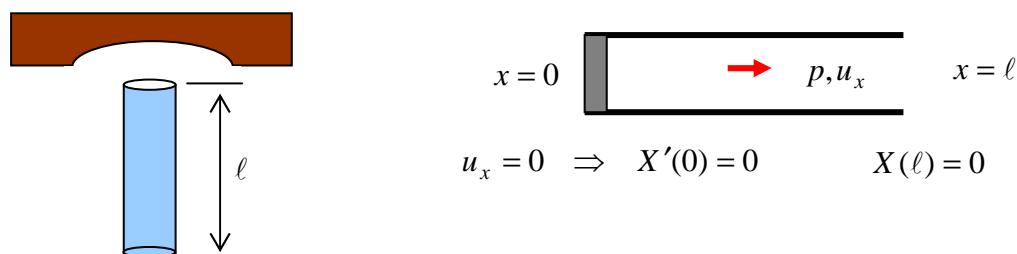


Figure 4.10 – Accord des tubes : conditions aux limites.

L'accord des tubes est obtenu en réglant leur longueur, en prenant en compte le fait qu'il sont fermés à une extrémité (vitesse nulle) et ouvert à l'autre (pression nulle). La méthode de séparation des variables  $p(x,t) = X(x)T(t)$  permet de calculer cette longueur en

<sup>2</sup> D'après A. Chaigne <http://www.ensta.fr/~chaigne/percussion/TEXTES/percussion.htm>, voir également : A. Chaigne, V. Doutaut, "Numerical simulations of xylophones. I. Time-domain modeling of the vibrating bars", J. Acoust Soc. Am. 101 (1997) 539-557, et I. Bork, "Practical tuning of xylophone bars and resonators", App. Acoust. 46 (1995) 103-127.

utilisant les conditions au limites avec l'équation  $X''(x) + \sigma^2 X(x) = 0$  (avec  $\omega = \sigma c$ ) dont la solution et sa dérivée sont respectivement  $X(x) = \alpha \sin \sigma x + \beta \cos \sigma x$  et  $X'(x) = \alpha \sigma \cos \sigma x - \beta \sigma \sin \sigma x$ . Les conditions aux limites en  $x = 0$  permettent d'écrire  $X'(0) = \alpha \sigma \cos(0) = 0$  ce qui conduit à  $\alpha = 0$ , et à exprimer le fonction spatial de la pression sous la forme  $X(x) = \beta \cos \sigma x$ . Les conditions en  $x = \ell$  appliquées à cette dernière équation permettent d'écrire  $X(\ell) = \beta \cos \sigma \ell = 0$  et d'obtenir l'équation caractéristique  $\cos \sigma \ell = 0$  dont les solutions

$$\sigma_n \ell = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots = \frac{2n-1}{2} \pi$$

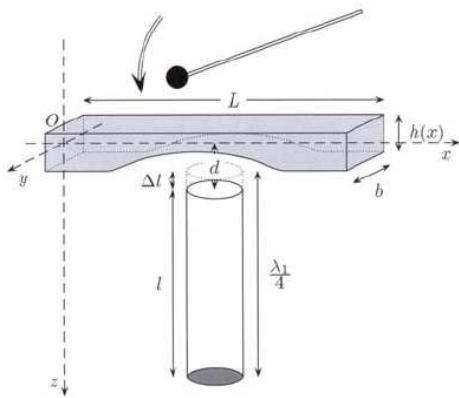
conduisent aux fréquences propres

$$\omega_n = \sigma_n c = \frac{(2n-1)\pi c}{2\ell}.$$

La relation entre la fréquence du fondamental ( $n=1$ ) et la longueur du tube  $2\pi f_1 = \frac{\pi c}{2\ell}$

permet de constater que cette dernière correspond au quart de la longueur d'onde acoustique (tube résonateur quart d'onde)

$$\ell = \frac{\lambda_1}{4}.$$



L'équation du déplacement de la poutre du xylophone s'écrire

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial^2 x} + \gamma_B \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial^2 t}$$

avec  $\gamma_B$  le coefficient d'amortissement visqueux du au fluide (qui dépend de la vitesse) et un moment de flexion

$$M(x,t) = EI(x) \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial^2 x}$$

dans l'expression duquel apparaît le facteur de perte qui traduit la dissipation dans la poutre (avec

$$I(x) = b \frac{h^3(x)}{12}.$$

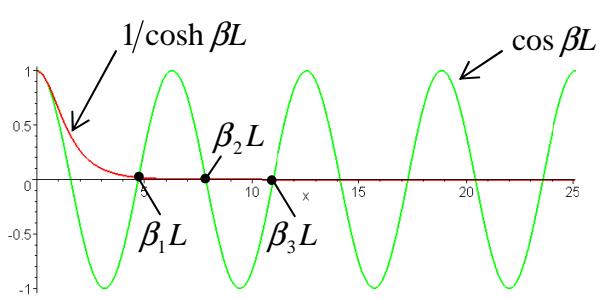
Les conditions aux limites libres se caractérisent par :

- aucune contrainte en rotation (moment nul)
- aucune contrainte en translation (effort tranchant nul)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial^2 x} \right|_{x=0,L} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial^3 x} \right|_{x=0,L} &= 0 \end{aligned}$$

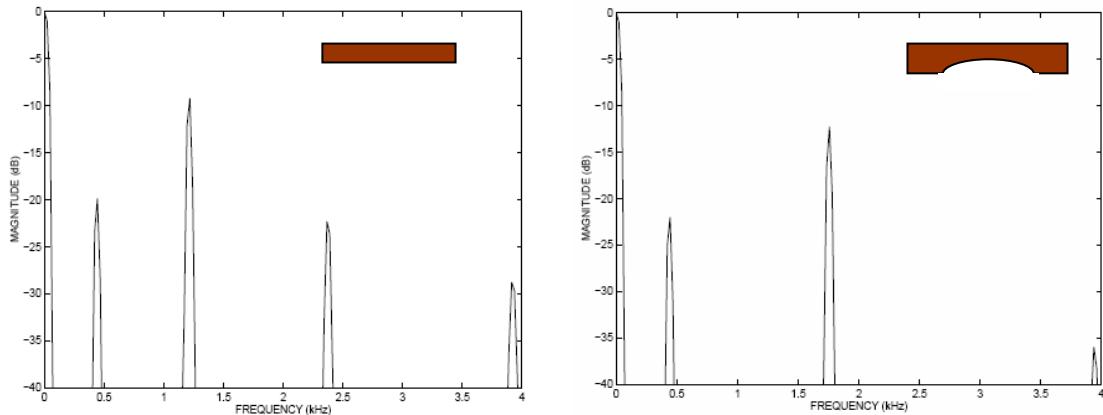
En considérant un modèle simplifié où la poutre est de section constante ( $A(x) = A$ ) et la dissipation est négligée ( $\gamma_B = 0$  et  $\eta = 0$ ), les conditions aux limites libres conduisent à l'équation caractéristique  $\cos \beta L \cosh \beta L = 1$  et aux fréquence propres

$$f_n = \frac{(\beta_n L)^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$



$n$	$\beta_n L$	$f_n / f_1$
1	4.73004	1
2	7.85320	2.76
3	10.9956	5.40
4	14.1371	8.93
5	17.2788	13.3
>5	$(n + 0.5)\pi$	$(n + 0.5)^2 0.41$

La modification de section des lames permet une progression **harmonique** des fréquences propres. Les lames sont faites en bois de Padouk ou en palissandre.



$$f_n / f_1 = 1, 2.76, 5.40, \dots$$

$$f_n / f_1 = 1, 4, 9, \dots$$

## 5 – VIBRATIONS DES MEMBRANES

Les membranes sont les équivalents en deux dimensions des cordes. Ils se retrouvent dans les diaphragmes de microphones, les peaux de tambours et timbales, ...

Pour simplifier les développements mathématiques et introduire les vibrations des plaques, les membranes sont traitées en coordonnées cartésiennes. Les solutions obtenues pour des membranes rectangulaires ne correspondent pas évidemment aux applications les plus courantes ...

### 5.1 – Équation des membranes

Un petit élément  $dx dy$  est considéré dans une membrane  $\Omega$

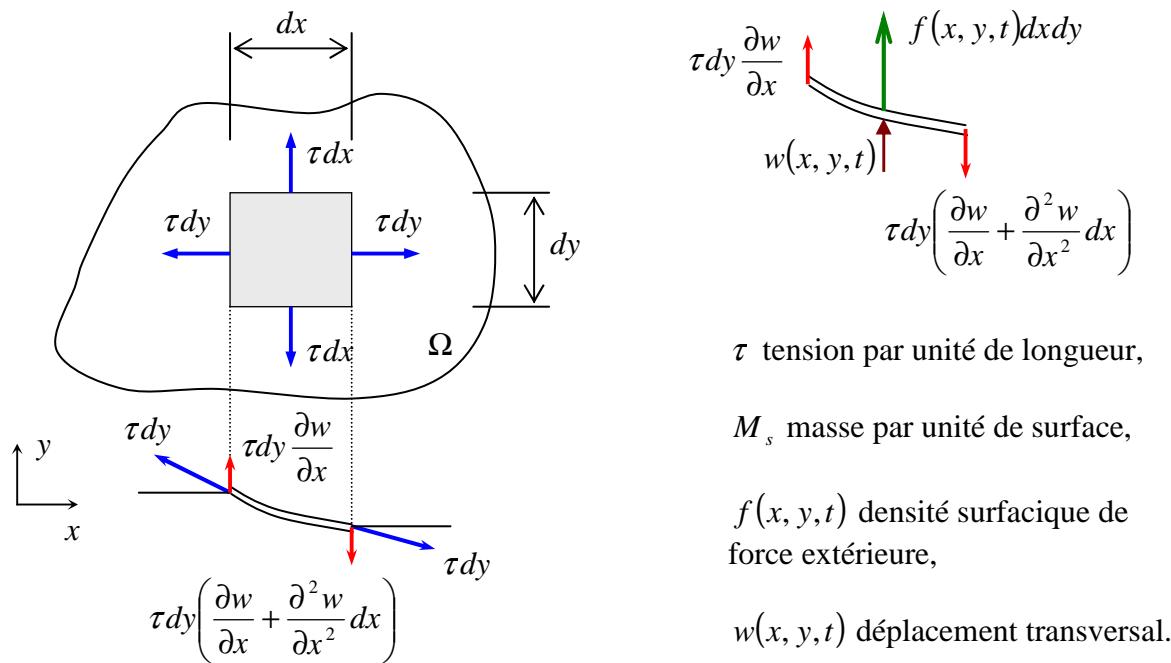


Figure 5.1 – Notations et équilibre d'un élément de membrane.

Equation d'équilibre pour l'élément  $dxdy$

$$\tau dy \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - \tau dy \frac{\partial w}{\partial x} + \tau dx \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) - \tau dx \frac{\partial w}{\partial y} + f(x, y, t) dx dy = M_s dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

soit

$$\tau \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy + f(x, y, t) dx dy = M_s dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

En considérant que la force extérieure est nulle :  $f(x, y, t) = 0$

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}$$

avec  $c = \sqrt{\frac{\tau}{M_s}}$ , et en utilisant le Laplacien  $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\boxed{\nabla^2 w(x, y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0}$$

Les solutions devront satisfaire les conditions aux limites sur le contour  $\Gamma$ . Pour les membranes, on peut envisager les mêmes conditions aux limites que pour les cordes. En particulier, on distingue les cas suivants :

Fixée sur  $\Gamma$  :

$$w(x, y, t) = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Gamma$$

Libre sur  $\Gamma$  (pas des forces) :

$$\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial n} = 0 \quad \text{pour } (x, y) \in \Gamma$$

$\partial n$  : dérivée de  $w$  dans la direction normale  $\hat{n}$ .

## 5.2 – Membranes rectangulaires

Le déplacement d'une membrane rectangulaire de dimensions  $(L_x \times L_y)$  est représenté par des fonctions à variables séparées

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

L'équation différentielle du déplacement se met sous la forme

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = -\sigma^2 = \text{constante 1}$$

d'où on peut tirer

$$\frac{X''}{X} = -\sigma^2 - \frac{Y''}{Y} = -\alpha^2 = \text{constante 2}$$

soit

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -\alpha^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -\sigma^2 + \alpha^2 = -\gamma^2 \end{cases} \quad \text{avec } \sigma^2 = \alpha^2 + \gamma^2$$

On obtient trois équations différentielles indépendantes

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X = 0 &\Rightarrow X(x) = a \sin \alpha x + b \cos \alpha x \\ Y'' + \gamma^2 Y = 0 &\Rightarrow Y(y) = c \sin \gamma y + d \cos \gamma y \\ \ddot{T} + \sigma^2 c^2 T = 0 &\Rightarrow T(t) = e \sin \sigma ct + f \cos \sigma ct \end{aligned}$$

Ainsi, la forme spatiale générale pour le déplacement est

$$X(x)Y(y) = C_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + C_2 \sin \alpha x \cos \gamma y + C_3 \cos \alpha x \sin \gamma y + C_4 \cos \alpha x \cos \gamma y$$

Pour la préciser davantage il faut considérer des conditions aux limites particulières.

On choisit ici le cas le plus fréquent : la membrane est fixée sur le contour  $\Gamma$  :  $w(x, y, t) = 0$  pour  $(x, y) \in \Gamma$ .

CL pour  $x = 0$

$$X(0)Y(y) = C_3 \sin \gamma y + C_4 \cos \gamma y = 0$$

La relation  $C_3 \sin \gamma y + C_4 \cos \gamma y = 0$  doit être vérifiée pour tout  $y$ , ce qui conduit à  $C_3 = C_4 = 0$ , donc

$$X(x)Y(y) = C_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + C_2 \sin \alpha x \cos \gamma y$$

CL pour  $x = L_x$

$$X(L_x)Y(y) = C_1 \sin \alpha L_x \sin \gamma y + C_2 \sin \alpha L_x \cos \gamma y = 0$$

d'où

$$\sin \alpha L_x (C_1 \sin \gamma y + C_2 \cos \gamma y) = 0.$$

Si on rejette la solution triviale  $C_1 = C_2 = 0$ , on obtient l'équation caractéristique

$$\boxed{\sin \alpha L_x = 0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_m L_x = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

CL pour  $y = 0$  et  $y = L_y$

Ces conditions aux limites conduisent à  $C_2 = 0$  et à l'autre équation caractéristique

$$\boxed{\sin \gamma L_y = 0} \quad \Rightarrow \quad \gamma_n L_y = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Les solutions pour la constante  $\sigma$  sont

$$\sigma_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \gamma_n^2} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}$$

Il est alors possible d'obtenir pour une **membrane fixée** sur ses bords

- les **fréquences naturelles**

$$\boxed{\omega_{mn} = \sigma_{mn} c = \pi \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} \sqrt{\frac{\tau}{M_s}}}$$

- les **déformées modales**

$$\begin{aligned} X_m(x)Y_n(y) &= C_1 \sin \alpha_m x \sin \gamma_n y \\ &= C_{mn} \phi_{mn}(x, y) \end{aligned}$$

avec la déformée modale

$$\boxed{\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y}$$

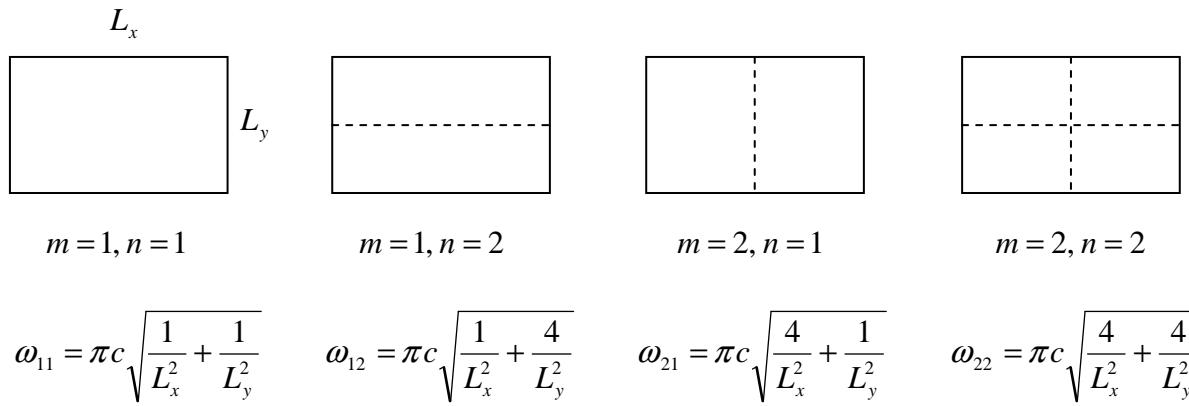


Figure 5.2 - Représentation des déformées pour les 4 premiers modes (lignes nodales)

### Remarque

Pour une membrane carrée ( $L_x = L_y = L$ )

- les déformées  $\phi_{mn}$  et  $\phi_{nm}$  ont des fréquences naturelles identiques

$$\omega_{mn} = \omega_{nm} = \frac{\pi c}{L} \sqrt{m^2 + n^2}$$

- pour  $m = n$ , les déformées sont identiques ("modes doubles").

### 5.3 – Solution générale et conditions initiales

La solution générale pour le déplacement s'écrit

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] \phi_{mn}(x, y)$$

Ce sont les conditions initiales qui permettent de déterminer les coefficients  $A_{mn}$  et  $B_{mn}$  en employant la relation d'orthogonalité

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dx dy = \begin{cases} N_{mn} & m = p \text{ et } n = q \\ 0 & m \neq p \text{ et } n \neq q \end{cases}$$

On obtient ainsi les relations suivantes

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w(x, y, t) \phi_{mn}(x, y) dx dy = N_{mn} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t]$$

et

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \dot{w}(x, y, t) \phi_{mn}(x, y) dx dy = \omega_{mn} N_{mn} [A_{mn} \cos \omega_{mn} t - B_{mn} \sin \omega_{mn} t]$$

À l'instant  $t = 0$ ,  $w(x, y, 0) = w_0(x, y)$  et  $\dot{w}(x, y, t) = \dot{w}_0(x, y)$ , et les relations précédentes permettent d'obtenir

$$\boxed{B_{mn} = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w_0(x, y) \phi_{mn}(x, y) dx dy}$$

$$A_{mn} = \frac{1}{N_{mn} \omega_{mn}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \dot{w}_0(x, y) \phi_{mn}(x, y) dx dy$$

Par exemple, pour la *membrane rectangulaire fixée sur le contour*  $\Gamma$

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}$$

d'où

$$N_{mn} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy = \int_0^{L_x} \sin^2 \frac{m\pi x}{L_x} dx \int_0^{L_y} \sin^2 \frac{n\pi y}{L_y} dy = \frac{L_x L_y}{4}$$

## 5.4 – Membranes circulaires

L'équation des membranes circulaires s'obtient en écrivant l'équation des membranes en coordonnées polaires

$$\nabla^2 w(r, \theta, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0$$

avec le Laplacien  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ . Le domaine est défini par  $0 < r < a$  et les conditions aux limites sont données pour  $r = a$ . Une solution est recherchée sous la forme de variables séparées  $w(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ . L'équation différentielle s'écrit alors

$$\Theta T \left( R'' + \frac{1}{r} R' \right) + RT \frac{\Theta''}{r^2} - \frac{1}{c^2} R \Theta \ddot{T} = 0$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = -\sigma^2 \quad \leftarrow \text{ constante}$$

Comme précédemment, cette dernière relation peut se séparer en deux : une équation temporelle dont on connaît déjà la solution

$$\ddot{T} + \sigma^2 c^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = e \sin \sigma ct + f \cos \sigma ct$$

et une autre équation

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \sigma^2 r^2 = m^2 \quad \leftarrow \text{ constante}$$

qui peut encore se séparer en deux par avec l'introduction d'une nouvelle constante

$$\Theta''(\theta) + m^2 \Theta(\theta) = 0$$

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left( \sigma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0.$$

La première a une solution harmonique de période  $2\pi$ , ce qui implique que  $m$  soit un entier

$$\Theta(\theta) = c \sin m\theta + d \cos m\theta$$

et la deuxième équation différentielle est connue comme étant l'équation de Bessel dont la solution est

$$R(r) = a J_m(\sigma r) + b Y_m(\sigma r)$$

$J_m(x)$  et  $Y_m(x)$  sont des fonctions de Bessel d'ordre  $m$  de première et seconde espèce. La Figure montre que la fonction de Bessel de seconde espèce n'est pas finie au centre ( $r = 0$ ) et ne peut donc pas être une solution de notre problème.

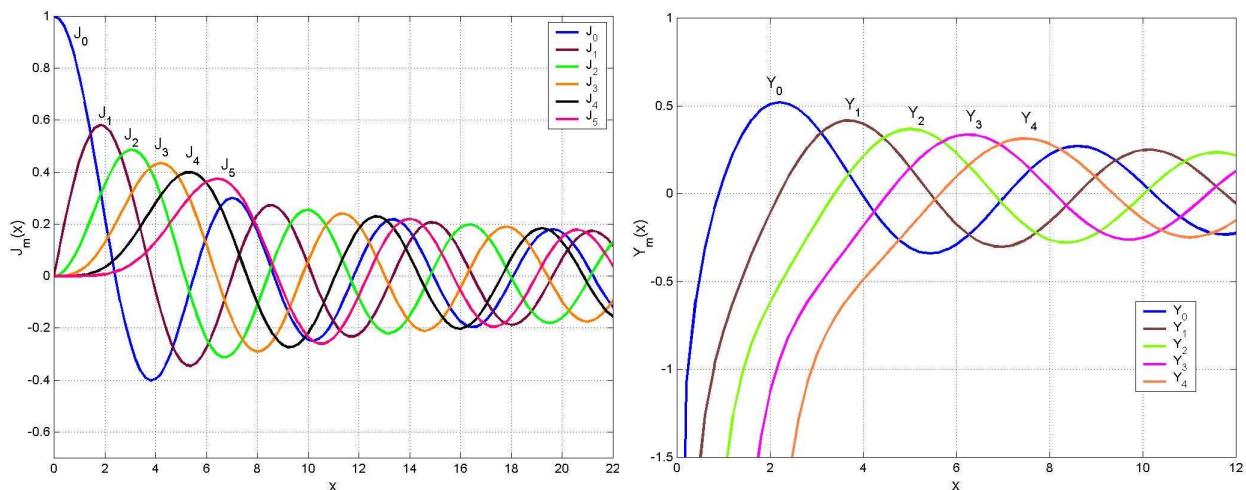


Figure 5.3 - Représentation des fonctions de Bessel de première espèce  $J_m(x)$  (gauche) et de seconde espèce  $Y_m(x)$  (droite).

Si on considère que la membrane est tendue sur un cadre circulaire fixe, la condition aux limites  $R(a) = 0$  conduit pour être satisfaite à chercher les solutions de l'équation

$$J_m(\sigma a) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Les solutions discrètes  $\chi_{mn} = \sigma_{mn} a$  (en nombre infini) correspondent aux passages à zéro des fonctions  $J_m(x)$ , comme le montre la figure ci-dessous (voir aussi le tableau 5.1)

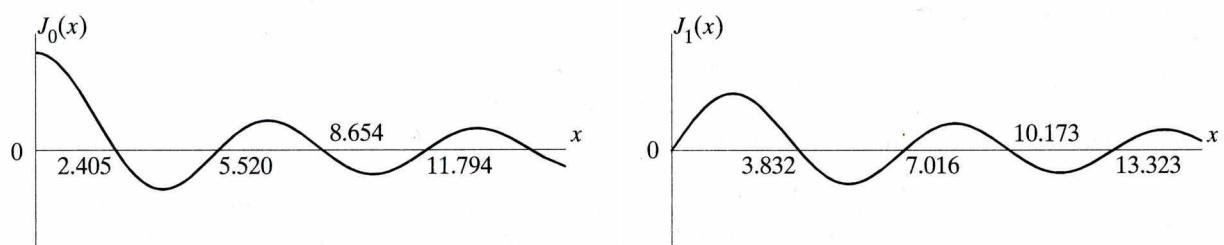


Figure 5.4 – Passages à zéro des fonctions de Bessel  $J_0(x)$  et  $J_1(x)$

$\chi_{mn}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$m = 0$	2.40483	5.52008	8.65373	11.79153	14.93092
$m = 1$	3.83171	7.01559	10.17347	13.32369	16.47063
$m = 2$	5.13562	8.41724	11.61984	14.79595	17.95982
$m = 3$	6.38016	9.76102	13.01520	16.22347	19.40942
$m = 4$	7.58834	11.06471	14.37254	17.61597	20.82693

Tableau 5.1 – Valeurs des arguments des fonctions de Bessel correspondant à leur passage à zéro

Les fréquences naturelles sont donc ( $\sigma_{mn} = \chi_{mn}/a$ )

$$\omega_{mn} = \sigma_{mn} c = \frac{\chi_{mn}}{a} \sqrt{\frac{\tau}{M_s}}$$

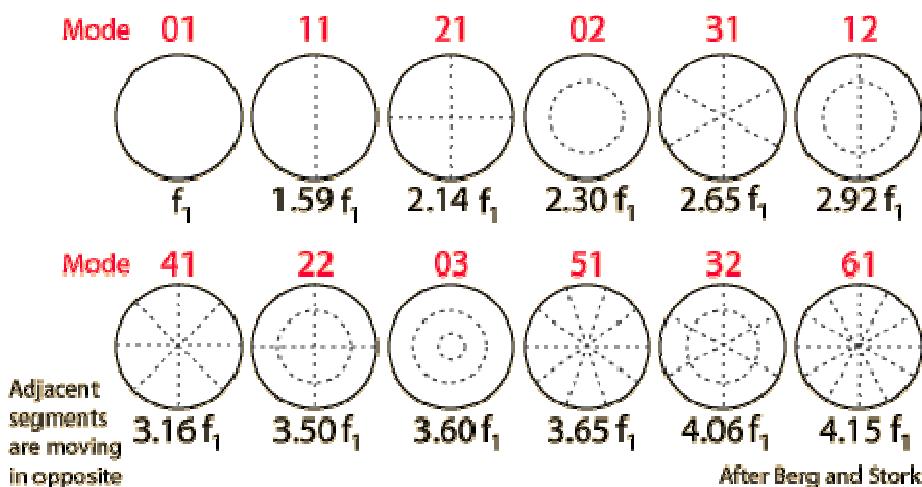
et la solution générale (bords fixes)

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] J_m(\sigma_{mn} r) (c \sin m\theta + d \cos m\theta)$$

La déformée modale  $\phi_{mn}(r, \theta) = J_m(\sigma_{mn} r)(c \sin m\theta + d \cos m\theta)$  apparaît comme composée de deux modes (à l'exception de  $m = 0$ ) qui permettent d'orienter les figures modales par rapport à la position arbitraire des axes choisie, comme on peut le voir en écrivant cette déformée sous la forme équivalente  $\alpha J_m(\sigma_{mn} r) \sin m(\theta - \theta_0)$ . Ce sont les conditions initiales qui fourniront les 4 coefficients, par exemple ici en considérant le déplacement initial

$$B_{mn} c = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^a w_0(r, \theta) J_m(\sigma_{mn} r) \sin m\theta r dr d\theta$$

$$B_{mn} d = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{2\pi} \int_0^a w_0(r, \theta) J_m(\sigma_{mn} r) \cos m\theta r dr d\theta.$$

Figure 5.5 – Les déformées modales des membranes circulaires classées par fréquences naturelles croissantes (d'après Berg et Stork<sup>3</sup>)

<sup>3</sup> R.E. Berg, D.G. Stork, *The Physics of Sound*, 2nd Ed., Prentice Hall, 1995

Les timbales sont des instruments composés d'une membrane fermant un volume acoustique. La peau de veau est remplacée maintenant par une membrane en Mylar parfaitement homogène et insensible à l'humidité. Des tirants actionnés par une pédale permettent de changer l'accord en modifiant la tension de la membrane. La position de la frappe vers le bord à pour effet de sélectionner plus particulièrement les modes (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1). Sur la face à l'air libre le fluide agit par effet d'inertie en augmentant la masse en mouvement avec pour conséquence une diminution des fréquences naturelles. La cavité crée un couplage vibroacoustique beaucoup plus complexe où l'amortissement joue un rôle important. Dans le tableau 5.2, les fréquences naturelles de la membrane sont comparées à des mesures de fréquences rayonnées.



$(m,n)$	$f_{mn} / f_{11}$	fréquences acoustiques mesurées	
		$f / f_{11}$	intervalles musicaux
1,1	1	1	fondamental
2,1	1.35	1.5	quinte
3,1	1.67	1.74	
4,1	1.99	2	octave
5,1	2.30	2.25	
6,1	2.61	2.49	octave + tierce majeure
...	...	...	...

Tableau 5.2 – Fréquences naturelles de la membrane et harmonique de la timbale (d'après Benade<sup>4</sup>)

---

<sup>4</sup> A.H. Benade, *Fundamentals of Musical Acoustics*, Oxford University Press, 1976

## 6 – VIBRATIONS DES PLAQUES

### 6.1 – Equation des plaques minces

De façon similaire à l'équation qui décrit les déplacements dus aux ondes de flexion dans les poutres, il est possible d'obtenir une équation pour décrire les ondes de flexion qui existent dans un milieu à deux dimensions: c'est l'équation des **plaques**

$$D \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0$$

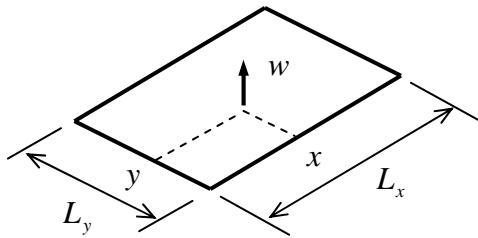


Figure 6.1 – Notations pour la plaque

avec  $w(x, y, t)$  le déplacement transversal,  
 $D$  la rigidité de flexion

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$h$  épaisseur,  $\rho$  masse volumique,  
 $E$  module de Young,  $\nu$  coefficient de Poisson,  
 $\nabla^4 \equiv \Delta^2$  est l'opérateur biharmonique ou double laplacien.

$$\nabla^4 \equiv (\nabla^2)^2 \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$$

L'écriture des conditions aux limites dépend du système de coordonnées utilisé. pour une plaque rectangulaire, elles s'expriment pour chaque bord de la même façon que pour la poutre (voir partie 4). Par exemple, pour une **plaqué rectangulaire simplement supportée**

$$w(x, y, t) = 0 \quad \text{pour } x = 0, x = L_x, y = 0 \text{ et } y = L_y.$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L_x.$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } y = L_y.$$

L'équation des plaques ci-dessus correspond à la théorie des **plaques minces** ou théorie de **Kirchoff-Love**. Elle est l'équivalent de la théorie d'Euler-Bernoulli des poutres et néglige également les déformations dues au cisaillement et les effets de l'inertie de rotation. A cause de ces approximations, elle est valable pour les plaques minces (quand l'épaisseur est très petite devant les dimensions de la plaque et la longueur d'onde flexion) c'est à dire pour le domaine basse fréquence des plaques isotropes. La théorie plus complète, équivalente de la théorie des poutres de Timoshenko, est la théorie de **Mindlin** (1951).

## 6.2 – Méthodes pour obtenir les solutions

La solution recherchée pour le déplacement transversal est

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

En l'introduisant dans l'équation différentielle des plaques on obtient

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2 \frac{X''}{X} \frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = -\frac{1}{\mu^2} \frac{\ddot{T}}{T} = \text{constante} = \beta^4$$

avec  $\mu^2 = \frac{B}{\rho h}$  ( $\mu$  n'est pas la célérité des ondes). La difficulté apparaît dans le membre de gauche où il n'est plus possible d'obtenir des équations séparées pour  $X(x)$  et  $Y(y)$ .

Une méthode de résolution consiste à choisir arbitrairement une fonction  $X(x)$  qui satisfait les conditions aux limites, puis à résoudre l'équation précédente pour obtenir  $Y(y)$ . Elle conduit à une solution exacte du problème. Cependant, il n'est pas possible de trouver des solutions analytiques dans la majorité des cas de conditions aux limites. Cette méthode est souvent employée quand **deux bords opposés** sont **simplement supportés** (ou appuyés): c'est cette démarche qui est décrite par la suite.

Pour traiter les autres cas on utilise le plus souvent la méthode de Rayleigh-Ritz, basée sur la minimisation de l'énergie vibratoire (potentielle et cinétique) ou encore une méthode approximative comme :

- la méthode des fonctions de poutre (voir annexe),
- la méthode des effets de bords de Bolotin,
- la méthode de Galerkin utilisant une technique variationnelle,
- des méthodes basées sur les différences finies et les éléments finis.

## 6.3 – Plaques rectangulaires simplement supportées sur deux bords opposés

La fonction  $X(x)$  est obtenue en satisfaisant les conditions aux limites simplement supportées pour  $x=0$  et  $x=L_x$ . La fonction obtenue pour les poutres peut donc être utilisée :

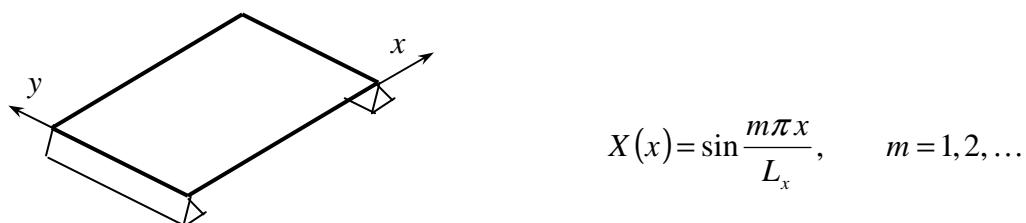


Figure 6.2 – Plaque simplement supportée sur les deux bords opposés

Ses dérivées spatiales (par rapport à  $x$ )

$$X''(x) = -\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{L_x} \quad \text{et} \quad X^{(4)}(x) = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{L_x}$$

sont reportées dans l'équation différentielle

$$\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 - 2\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = \beta^4$$

ce qui conduit à une équation différentielle d'ordre 4

$$Y^{(4)} - 2\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 Y'' + \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 - \beta^4\right] Y = 0$$

Comme pour les poutres, on recherche des solutions de la forme  $D e^{sy}$  où  $D$  et  $s$  sont des constantes. En reportant cette solution générale dans l'équation différentielle, on obtient une équation caractéristique

$$s^4 - 2\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 s^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 - \beta^4\right] = 0$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont

$$s_1 = \gamma_1, \quad s_2 = -\gamma_1, \quad s_3 = j\gamma_2, \quad s_4 = -j\gamma_2$$

avec

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2}$$

donc la solution pour la fonction  $Y(y)$  est

$$Y(y) = D_1 e^{\gamma_1 y} + D_2 e^{-\gamma_1 y} + D_3 e^{j\gamma_2 y} + D_4 e^{-j\gamma_2 y}$$

ou

$$Y(y) = C_1 \sin \gamma_2 y + C_2 \cos \gamma_2 y + C_3 \sinh \gamma_1 y + C_4 \cosh \gamma_1 y$$

Cette solution est similaire à celle obtenue pour les poutres avec comme différence deux paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  à la place d'un seul. En toute rigueur, il faudrait écrire  $Y_m(y)$  car les constantes de cette équation dépendent de  $m$ :  $C_{im}$ ,  $\gamma_{1m}$ ,  $\gamma_{2m}$ . Les coefficients de l'équation  $Y(y)$  peuvent s'obtenir en fonction des conditions aux limites par la même méthode que celle employée pour les poutres :

- les conditions aux limites en  $y=0$  et  $y=L_y$  permettent d'obtenir 4 équations qui s'expriment sous forme matricielle

$$\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $4 \times 4$  et  $\mathbf{C}$  le vecteur des coefficients  $C_i$ .

- les solutions de l'équation caractéristique obtenue à partir de  $\det(\mathbf{A})=0$  permettent de calculer les fréquences propres et les déformées modales.

Remarque : cette démarche utilise la forme particulière de  $X(x)$  pour des conditions aux limites simplement supportées pour laquelle  $X''/X$  et  $X^{(4)}/X$  deviennent des constantes.

Pour les deux autres bords, il est possible de choisir n'importe quelles conditions aux limites.

Exemple : cas d'une plaque simplement supportée sur tous ses bords

Ce cas simple permet d'illustrer la méthode : les conditions simplement supportées en  $y=0$  et  $y=L_y$  conduisent à l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin \gamma_2 L_y & \cos \gamma_2 L_y & \sinh \gamma_1 L_y & \cosh \gamma_1 L_y \\ 0 & -\gamma_2^2 & 0 & \gamma_1^2 \\ -\gamma_2^2 \sin \gamma_2 L_y & -\gamma_2^2 \cos \gamma_2 L_y & \gamma_1^2 \sinh \gamma_1 L_y & \gamma_1^2 \cosh \gamma_1 L_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0$$

Le calcul de  $\det(\mathbf{A})=0$  conduit à

$$(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2 \sinh \gamma_1 L_y \sin \gamma_2 L_y = 0$$

En écartant les solutions triviales, reste finalement

$$\sin \gamma_2 L_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 L_y = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Par ailleurs,  $\gamma_2^2 = \beta^2 - (m\pi/L_x)^2$  avec  $\beta^2 = \omega/\mu$  et  $\mu = \sqrt{D/\rho h}$ , ce qui permet d'écrire

$$\beta^2 = \left( \frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)^2$$

d'où l'expression des pulsations naturelles  $\omega_{mn} = \beta^2 \mu$

$$\boxed{\omega_{mn} = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}}$$

L'étape suivante consiste à utiliser les 4 relations obtenues avec les conditions aux limites sur  $y=0$  et  $y=L_y$  pour exprimer 3 des 4 coefficients  $C_1$  à  $C_4$ . On obtient alors l'expression

$$Y(y) = C_1 \sin \frac{n\pi y}{L_y}$$

qui permet d'écrire l'équation complète du déplacement d'une **plaque simplement supportée**

$$\boxed{w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] \phi_{mn}(x, y)}$$

avec la **déformée modale**

$$\boxed{\phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}}$$

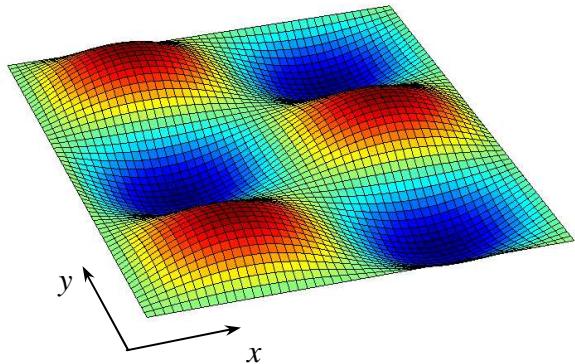


Figure 6.3 – Déformée pour le mode (2,3) de la plaque simplement supportée

Cette approche peut être utilisée pour n'importe quelles conditions aux limites associées à deux bords opposés simplement supportés<sup>5</sup>. Dans les autres cas des **solutions approchées** utilisant des **fonctions de poutre** peuvent fournir des solutions dont la précision est très dépendantes des conditions aux limites (voir en Annexe). Dans tous les cas où les solutions analytiques exactes ne sont pas accessibles, c'est la méthode de Rayleigh-Ritz qui est préférée car sa précision est contrôlable.

Toutefois, les **plaques circulaires** permettent aussi des solutions analytiques exactes en variables séparées de la forme

$$R(r)\Theta(\theta) = [a_{mn}J_m(\beta_{mn}r) + b_{mn}I_m(\beta_{mn}r)]\sin m\theta + [c_{mn}J_m(\beta_{mn}r) + d_{mn}I_m(\beta_{mn}r)]\cos m\theta$$

où  $I_m(x)$  sont les fonctions de Bessel modifiées correspondant en fait à des fonctions de Bessel dont l'argument est imaginaire. Ces fonctions croissent en s'éloignant du centre pour pouvoir satisfaire les différentes conditions aux limites. Les coefficients arbitraires  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$ ,  $d_{mn}$  et l'argument  $\beta_{mn}$  sont précisés en fonction des conditions aux limites.

#### 6.4 – Introduction à la méthode de Rayleigh-Ritz

Cette méthode approchée qui permet d'obtenir des solutions pour des conditions aux limites quelconques sera examinée en détail en 3<sup>ème</sup> année. Comme la méthode de Rayleigh-Ritz est très souvent employée, on en donne ici le principe.

Le principe de Rayleigh valable pour les systèmes conservatifs (énergie potentielle maximale = énergie cinétique maximale) peut être employée pour trouver la première fréquence propre de la plaque. Par exemple, si on se donne pour la déformée modale approchée du premier mode la déformée statique pour les conditions aux limites considérées, il est possible de calculer les quantités suivantes à partir des valeurs quadratiques de la déformée :

- l'énergie potentielle maximale  $U_{\max}$  (énergie de déformation)
- la partie  $\check{T}_{\max}$  de l'énergie cinétique maximale  $T_{\max}$  telle que  $T_{\max} = \omega^2 \check{T}_{\max}$

<sup>5</sup> voir : A.W. Leissa, "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration* **31**(3), 257-293 (1973).

La pulsation propre approchée du premier mode s'obtient par

$$\omega_R^2 = \frac{U_{\max}}{\bar{T}_{\max}}.$$

Ritz en 1909 a étendu cette méthode pour calculer les  $r$  premiers modes d'une structure. Les déformées modales sont représentées à partir d'une fonction  $\phi$  comportant  $r$  coefficients arbitraires  $C_1, C_2, \dots, C_r$ , qu'il convient de calculer pour chaque mode

$$\phi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_r \varphi_r.$$

Les fonctions spatiales  $\varphi_i$  doivent satisfaire les conditions aux limites du problème.

Les énergies potentielle et cinétique se calculent à partir de la valeur quadratique de  $\phi$  et peuvent s'écrire formellement sous la forme

$$U_{\max} = \sum_i \sum_j k_{ij} C_i C_j \quad \text{et} \quad \bar{T}_{\max} = \sum_i \sum_j m_{ij} C_i C_j.$$

La différence entre énergie potentielle et énergie cinétique est minimisée par rapport aux coefficients  $C_i$  et on obtient alors  $r$  équations homogènes qui peuvent s'écrire sous forme matricielle.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial C_1} (U_{\max} - \omega^2 \bar{T}_{\max}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C_2} (U_{\max} - \omega^2 \bar{T}_{\max}) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial C_r} (U_{\max} - \omega^2 \bar{T}_{\max}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & C_1 \\ & \mathbf{A} & \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_r \end{bmatrix} = 0 \end{bmatrix}$$

En annulant le déterminant de  $\mathbf{A}$ ,  $r$  valeurs propres  $\lambda = \omega_R^2$  sont obtenues. Les pulsations propres  $\omega_{R_n}$  approximent la pulsation du mode  $n$

$$\omega_{R_n} = \omega_n + \varepsilon$$

$\varepsilon$  tend vers 0 quand le nombre  $r$  de coefficients  $C_i$  s'accroît par rapport à l'ordre  $n$  du mode, ce qui revient à dire que les dernières valeurs de  $\omega_{R_n}$  ne sont généralement pas utilisables. Pour chaque mode  $n$ ,  $\omega^2$  est remplacé par  $\omega_{R_n}^2$  dans l'équation matricielle  $\mathbf{AC} = \mathbf{0}$ , ce qui permet d'exprimer  $r-1$  coefficients et d'écrire la déformée modale correspondante sous la forme

$$\phi_n = C_q (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_r \varphi_r), \quad (\alpha_q = 1).$$

**Note historique**

En 1787 à Leipzig, Chladni met en évidence expérimentalement la formation de lignes nodales sur une plaque libre avec du sable. Wheatstone (1833) et Rayleigh (1873) utilisent les modes de poutre libre pour essayer d'expliquer les figures de Chladni. Ritz (1909) utilise sur ce problème (la plaque libre) la méthode qui porte son nom et Sezawa donne en 1931 les premiers résultats pour une plaque encastree. Iguchi (1938) développe une méthode pour obtenir certains résultats analytiques. Les premières synthèses complètes sur les méthodes utilisables pour calculer les fréquences naturelles et les déformées modales de plaques sont dues à Warburton (1954) et Leissa (1969).



Figure 6.4 – Figures de Chladni d'une plaque libre.

## 7 – MODELES D'AMORTISSEMENT

Dans les modèles de cordes, barres, poutres, membranes et plaques étudiées précédemment, l'amortissement n'est pas pris en compte pour simplifier la mise en équation du problème. En conséquence, les solutions pour les réponses libres obtenues ne présentent pas de décroissance de l'amplitude des mouvements avec le temps. Dans tous les cas considérés, la fonction  $T_n(t)$  avait pour équation différentielle

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

### 7.1 – Facteur d'amortissement modal

La méthode la plus simple consiste à inclure un terme dissipatif correspondant à un modèle d'amortissement visqueux

$$\ddot{T}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0$$

où  $\zeta_n$  est le **facteur d'amortissement modal** ( $\zeta_n \ll 1$ ). La solution correspond à celle d'un système à un degré de liberté.

$$T_n(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t} \left[ a_n \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} t) + b_n \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} t) \right]$$

ou encore la forme équivalente

$$T_n(t) = A_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} t + \varphi_n\right)$$

où les constantes  $(a_n, b_n)$  et  $(A_n, \zeta_n)$  sont déterminées à partir des conditions initiales.

### 7.2 – Coefficient d'amortissement dans l'équation d'onde

D'autres modèles sont construits en insérant directement un coefficient d'amortissement dans l'équation différentielle

- Modélisation de l'amortissement externe représentant la dissipation due par exemple à la présence d'un fluide (air) dans le cas d'une membrane:

$$\text{équation non-dissipative: } \tau \nabla^2 w - M_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{équation dissipative: } \tau \nabla^2 w - c \frac{\partial w}{\partial t} - M_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$c$  : coefficient d'amortissement

- Modélisation de l'amortissement interne en appliquant un coefficient proportionnel à la vitesse de fluctuation des contraintes dans une poutre (modèle d'amortissement de Kelvin-Voigt)

équation non-dissipative :  $EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$

équation dissipative:  $EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha I \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$

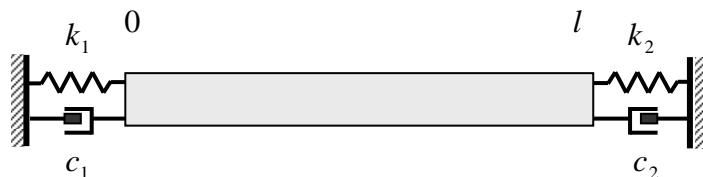
Remarque : Une forme équivalente à ce dernier modèle consiste à considérer le module de Young complexe  $\underline{E} = E(1 + j\eta)$ . En considérant une variable complexe pour le déplacement tel que  $w = W e^{j\omega t}$ , l'équation précédente devient

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + j\omega \alpha I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A w = 0$$

donc  $\omega\alpha \equiv \eta E$ . L'utilisation du facteur de perte  $\eta$  pour représenter le rôle de l'amortissement structural dans la réponse forcée d'une structure mécanique est décrit dans la section 7.

### 7.3 – Dissipation aux limites

L'amortissement peut également être reporté dans la définition des conditions aux limites. En effet, les modes de fixation des structures vont souvent introduire une dissipation. Un exemple en est donné pour des conditions aux limites dans le cas des ondes longitudinales dans une barre



$$AE \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_1 w(0,t) + c_1 \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} \quad AE \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -k_2 w(l,t) - c_2 \frac{\partial w(l,t)}{\partial t}$$

Figure 6.1 – Conditions aux limites dissipatives pour les ondes longitudinales dans une barre.

## 8 – REPONSE FORCEE

Les solutions étudiées jusqu'à maintenant correspondent aux réponses libres de systèmes continus. Elles dépendent des fréquences naturelles, des déformées modales et de conditions initiales. On recherche maintenant la réponse en régime stationnaire à une excitation harmonique forcée représentée par une force

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

où  $\omega$  est la pulsation imposée par l'excitation.

Remarque: La notation complexe est souvent employée  $F = F_0 e^{j\omega t}$  (ou plus simplement  $F = F_0$ , le terme  $e^{j\omega t}$  étant souvent omis) où  $F$  est une force complexe. Le signal physique réel se retrouve par  $F(t) = \operatorname{Re}\{F\} = \operatorname{Re}\{F_0 e^{j\omega t}\}$

### 8.1 – Réponse forcée par décomposition modale

La méthode de décomposition modale est basée sur l'orthogonalité des déformées modales  $\phi_n(\mathbf{r})$ . Les  $\phi_n$  constituent une base orthogonale sur laquelle sont décomposés les paramètres du système (ces équations sont démontrées en Annexe dans le cas des poutres)

$$M_n = \int_{\Omega} m(\mathbf{r}) \phi_n^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{masse (modale) généralisée avec } m(\mathbf{r}) \text{ la densité}$$

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad \text{raideur généralisée}$$

$$C_n = \int_{\Omega} c(\mathbf{r}) \phi_n^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{amortissement généralisé}$$

$$F_n = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}, t) \phi_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{force généralisée avec } f(\mathbf{r}, t) \text{ la densité de force}$$

Ces paramètres modaux permettent d'écrire une équation modale pour chaque mode qui est découpée des autres

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = F_n(t)$$

Il s'agit là d'un système à 1 DDL dont  $q_n(t)$  est la solution du déplacement en coordonnées pour le mode  $n$ . Elle s'exprime selon la nature du signal de la force  $F(t)$ .

#### 8.1.1 - Force quelconque

$$q_n(t) = A_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega_{a_n} t + \theta_n) + F_n(t) * h_n(t)$$

$A_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega_{a_n} t + \theta_n)$ : réponse libre du système dont les constantes  $A_n$  et  $\phi_n$  dépendent des conditions initiales à  $t = 0$ .

$F_n(t) * h_n(t)$ : réponse forcée représentée par le produit de convolution de la force par la réponse impulsionnelle.

On a vu<sup>6</sup> que la réponse impulsionnelle d'un système à 1DDL conduisait à

$$F_n(t) * h_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) h_n(t - \tau) d\tau = \frac{e^{-\zeta_n \omega_n t}}{M_n \omega_{a_n}} \int_0^t F_n(\tau) e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin \omega_{a_n}(t - \tau) d\tau$$

avec  $\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n \omega_n}$  et  $\omega_{a_n} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$ . Ce terme représente la réponse en régime établi, quand  $t \gg 0$ .

### 8.1.2 - Force harmonique

Une force complexe  $F_n e^{j\omega t}$  produira une réponse de la forme  $q_n = B_n e^{j\omega t}$  où  $B_n$  est complexe. L'équation du système devient

$$-\omega^2 M_n B_n + j\omega C_n B_n + K_n B_n = F_n$$

ou encore

$$[-\omega^2 + j2\omega\omega_n\zeta_n + \omega_n^2] M_n B_n = F_n \quad \Rightarrow \quad \frac{B_n}{H_n} = F_n$$

en posant

$$H_n = \frac{1}{M_n [(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\omega\omega_n\zeta_n]}$$

En représentant  $H_n$  sous la forme  $|H_n| e^{j\phi_n}$

$$|H_n| = \frac{1}{M_n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_n\zeta_n)^2}}, \quad \tan \phi_n = \frac{-2\omega\omega_n\zeta_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

La réponse à la force  $F_n(t) = F_n \cos \omega t$  est  $q_n(t) = \operatorname{Re}\{B_n e^{j\omega t}\}$ , soit

$$q_n(t) = F_n |H_n| \cos(\omega t + \phi_n) = \frac{F_n}{M_n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_n\zeta_n)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\omega\omega_n\zeta_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

$q_n(t)$  est la solution du déplacement en coordonnées généralisées pour le mode  $n$ . La réponse à la force  $F(t)$  est fournie par la **synthèse modale**

$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(\mathbf{r})$

---

<sup>6</sup> voir cours Vibrations et Acoustique 1 (ENSIM 2A)

## 8.2 – Exemple pour une poutre en flexion

La première étape consiste à identifier les paramètres modaux généralisés. La démonstration qui conduit à la relation donnée précédemment est reportée en Annexe. La déformée  $\phi_n(x)$  et la pulsation naturelle  $\omega_n$  pour le mode  $n$  satisfont l'équation homogène des poutres

$$EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A \phi_n(x) = 0$$

et la déformée vérifie la relation d'orthogonalité  $\int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_p(x) dx = 0$  pour  $p \neq n$ . En

multippliant par la déformée  $\phi_p(x)$  et en intégrant, on aboutit à l'équation

$$\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_p(x) dx = \omega_n^2 \int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_p(x) dx$$

La prise en compte de la relation d'orthogonalité dans le second membre conduit à une seconde relation d'orthogonalité dont la symétrie est vérifiée dans l'annexe A. Quand  $p = n$ , les deux intégrales de l'équation précédente peuvent s'interpréter aisément comme la **raideur généralisée** et la **masse généralisée**

$$K_n = \int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx \quad \text{et} \quad M_n = \int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_n(x) dx$$

pour que la relation précédente s'écrive sous la forme

$$K_n = \omega_n^2 M_n$$

La deuxième étape considère une excitation sous la forme d'une densité linéique de force  $f(x, t)$ , la réponse forcée de la solution de l'équation inhomogène

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t)$$

On cherche une solution sous la forme  $w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \phi_m(x)$ , donc

$$EI \sum_m w_m(t) \frac{d^4 \phi_m(x)}{dx^4} + \rho A \sum_m \ddot{w}_m(t) \phi_m(x) = f(x, t)$$

en multipliant par  $\phi_n(x)$  et en intégrant

$$\int_0^l EI \sum_m w_m(t) \frac{d^4 \phi_m(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx + \int_0^l \rho A \sum_m \ddot{w}_m(t) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \int_0^l f(x, t) \phi_n(x) dx$$

$$\sum_m w_m(t) \underbrace{\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_m(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx}_{0 \text{ ou } K_n} + \sum_m \ddot{w}_m(t) \underbrace{\int_0^l \rho A \phi_m(x) \phi_n(x) dx}_{0 \text{ ou } M_n} = \underbrace{\int_0^l f(x, t) \phi_n(x) dx}_{F_n(t)}$$

Quand  $m = n$

$$M_n \ddot{w}_n(t) + K_n w_n(t) = F_n(t).$$

C'est l'équation d'un système à 1DDL non dissipatif. Un facteur d'amortissement modal  $\zeta_n$  est introduit à ce niveau. Dans le cas d'une excitation harmonique de la force  $f(x, t) = f(x) e^{j\omega t}$  le déplacement de la poutre s'écritra

$$w(x, t) = \sum_n w_n(t) \phi_n(x) = \sum_n w_n \phi_n(x) e^{j\omega t}$$

soit

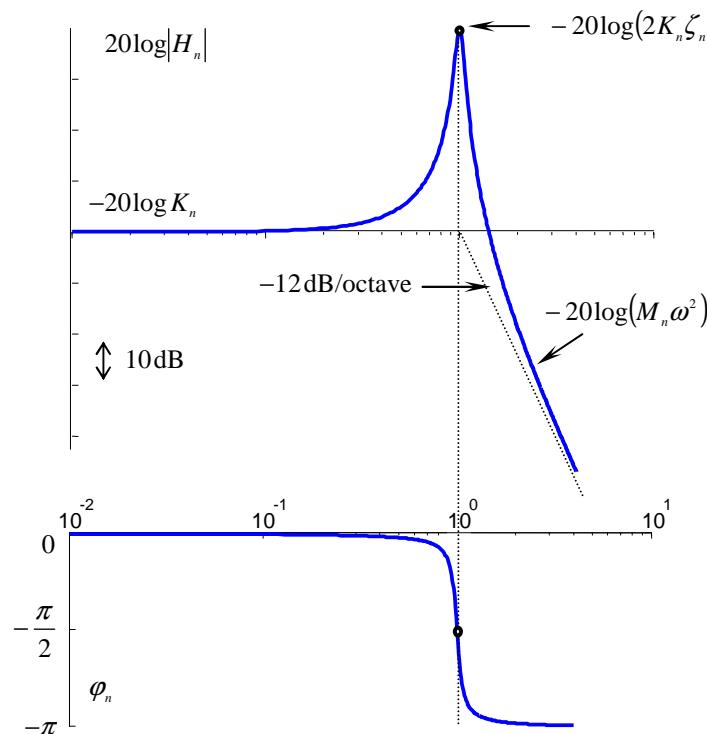
$$M_n [-\omega^2 + j2\omega\omega_n\zeta_n + \omega_n^2] w_n = F_n$$

avec la force modale généralisée

$$F_n = \int_0^l f(x, t) \phi_n(x) dx$$

La solution est

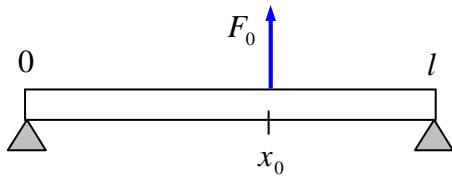
$$\begin{aligned} w(x, \omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n e^{j\omega t}}{M_n [(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\omega\omega_n\zeta_n]} \phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n e^{j\varphi_n} e^{j\omega t}}{M_n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_n\zeta_n)^2}} \phi_n(x) \quad \text{avec} \quad \tan \varphi_n = \frac{-2\omega\omega_n\zeta_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{aligned}$$



La figure ci-contre représente la fonction de transfert  $H_n(\omega)$  si  $w(x, \omega)$  est écrit sous la forme

$$w(x, \omega) = \sum_n H_n F_n \phi_n(x) e^{j\omega t}.$$

Figure 8.1 – Réponse fréquentielle en amplitude et phase pour un mode.

**Exemple : Cas d'une force ponctuelle sur une poutre simplement supportée**

La poutre est excitée par une distribution de force (force ponctuelle)

$$f(x, t) = F_0 \delta(x - x_0) e^{j\omega t}$$

Figure 8.2 – Excitation d'une poutre par une force ponctuelle

La force modale généralisée s'écrit  $F_n = \int F_0 \delta(x - x_0) \phi_n(x) dx = F_0 \phi_n(x_0)$

Remarque : si la force est appliquée sur le nœud du mode  $p$ ,  $\phi_p(x_0) = 0$  et la force généralisée pour le mode  $p$  est nulle :  $F_p = 0$ . Pour une poutre simplement supportée

$$F_n = F_0 \sin \frac{n\pi x_0}{l}$$

Si la force est appliquée au centre  $x_0 = l/2$ ,  $F_n = F_0 \sin n\pi/2$  et seuls les modes *impairs* seront excités.

**8.3 – Cas des plaques rectangulaires****Cas général pour les plaques homogènes avec excitation harmonique**

Les expressions sont similaires à celles des poutres.

$$w(x, y, \omega) = \sum_m \sum_n \frac{F_{mn} e^{j\omega t}}{M_{mn} [\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j2\omega\omega_{mn}\zeta_{mn}]} \phi_{mn}(x, y)$$

avec la masse généralisée  $M_{mn} = \rho h \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy$

la force généralisée  $F_{mn} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) \phi_{mn}(x, y) dx dy$

**Cas particulier d'une plaque simplement supportée**

$$\text{la déformée modale } \phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y}$$

$$\text{la masse généralisée } M_{mn} = \rho h \int_0^{L_x} \sin^2 \frac{m\pi x}{L_x} dx \int_0^{L_y} \sin^2 \frac{n\pi y}{L_y} dy = \frac{\rho h L_x L_y}{4}$$

**Cas particulier d'une excitation ponctuelle (plaque simplement supportée)**

$$\text{la force } f(x, y) = F_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

la force généralisée

$$F_{mn} = F_0 \int_0^{L_x} \delta(x - x_0) \sin \frac{m\pi x}{L_x} dx \int_0^{L_y} \delta(y - y_0) \sin \frac{n\pi y}{L_y} dy = F_0 \sin \frac{m\pi x_0}{L_x} \sin \frac{n\pi y_0}{L_y}$$

## 8.4 – Synthèse modale

### 8.4.1 – Contribution de chaque mode

Quand une structure est excitée à la pulsation  $\omega$ , tous les modes sont plus ou moins excités. Le champ vibratoire est créé par la superposition de tous les modes. La contribution de chacun dépend

- de la force modale généralisée du mode (donc de la position de la force d'excitation),
- de la proximité de la pulsation naturelle du mode de celle de l'excitation.

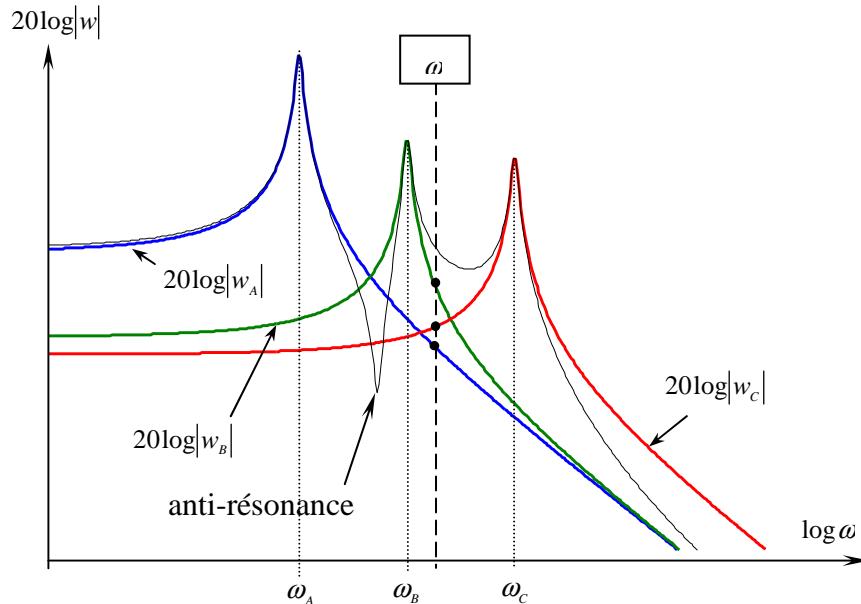


Figure 8.3 – Réponse totale due à la contribution de 3 modes tel que  $w = |w_A| + |w_B| - |w_c|$

Sur la figure ci-dessus :

- le mode A ( $\omega_A < \omega$ ) en fonction de la **masse** modale généralisée  $F_A/M_A\omega^2$ ,
- le mode B ( $\omega_B \sim \omega$ ) est contrôlé majoritairement par l'**amortissement**,
- le mode C ( $\omega_c > \omega$ ) contribue en fonction de la **raideur** généralisée  $F_c/K_c$ .

### 8.4.2 – Cas particulier d'une plaque carrée

Les pulsations naturelles de la plaque carrée de côtés  $L$  sont données par

$$\omega_{mn} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (m^2 + n^2) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Il y aura plusieurs combinaisons  $(m, n)$  ayant la même valeur  $m^2 + n^2$ , comme le montre la table ci-contre. Plusieurs modes différents auront donc la même pulsation naturelle. Exemple : (1,7), (7, 1) et (5,5).

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	$m^2 + n^2$
1	2	5	10	17	26	37	50	
2	5	8	13	20	29	40	53	
3	10	13	18	25	34	45	58	
4	17	20	25	32	41	52	65	
5	26	29	34	41	50	61	74	
6	37	40	45	52	61	72	85	
7	50	53	58	65	74	85	98	

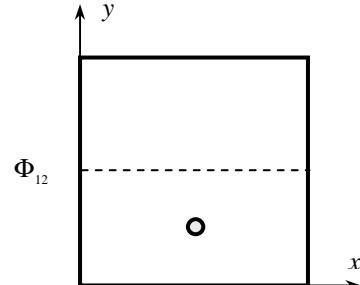
Tableau 8.1 – Fréquences propres normalisées pour une plaque carrée

Leur superposition va conduire à une forme apparente qui va dépendre de l'excitation et pourra tromper l'expérimentateur. Considérons les modes (1,2) et (2,1) avec une excitation à leur pulsation naturelle

$$\omega_{12} = \omega_{21} = 5 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

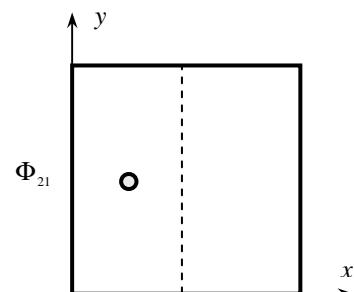
- excitation en  $x_0 = \frac{L}{2}$ ,  $y_0 = \frac{L}{4}$ , sur la ligne nodale du mode (2,1). La déformée du mode (1,2) apparaît

$$\Phi_{12} = A_{12} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L}$$



- excitation en  $x_0 = \frac{L}{4}$ ,  $y_0 = \frac{L}{2}$ , sur la ligne nodale du mode (1,2). La déformée du mode (2,1) apparaît

$$\Phi_{21} = A_{21} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L}$$



- excitation sur la diagonale en  $x_0 = \frac{L}{4}$ ,  $y_0 = \frac{L}{4}$ .

Les deux modes sont également excités car les forces modales généralisées sont identiques. Ainsi,  $A_{12} = A_{21}$  et

$$\Phi_{12,21} = A_{12} \left( \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi y}{L} + \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \right)$$

Cette déformée présente une ligne nodale pour  $y = L - x$  où  $\Phi_{12,21} = 0$ .

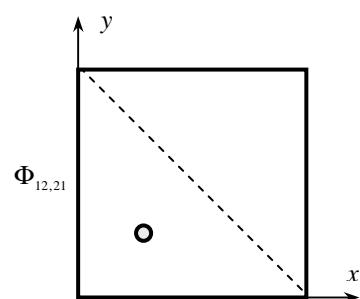


Figure 8.4 – Déformées apparentes (non-modale) pour une plaque carrée.

Cependant, si la position du point d'excitation est changée,  $A_{21} = \alpha A_{12}$  et une forme modale différente apparaît, comme la figure suivante permet de le constater pour les modes (1,2) et (2,1), (1,4) et (4,1), (1,5) et (5,1). Ces formes ne sont pas orthogonales car si

$$\Phi_A = \phi_{12} + \alpha_A \phi_{21} \quad \text{et} \quad \Phi_B = \phi_{12} + \alpha_B \phi_{21}$$

alors

$$\begin{aligned} \iint_S \Phi_A \Phi_B \, dS &= \iint_S (\phi_{12}^2 + \alpha_A \phi_{21} \phi_{12} + \alpha_B \phi_{12} \phi_{21} + \alpha_A \alpha_B \phi_{21}^2) \, dS \\ &= \iint_S (\phi_{12}^2 + \alpha_A \alpha_B \phi_{21}^2) \, dS \neq 0 \end{aligned}$$

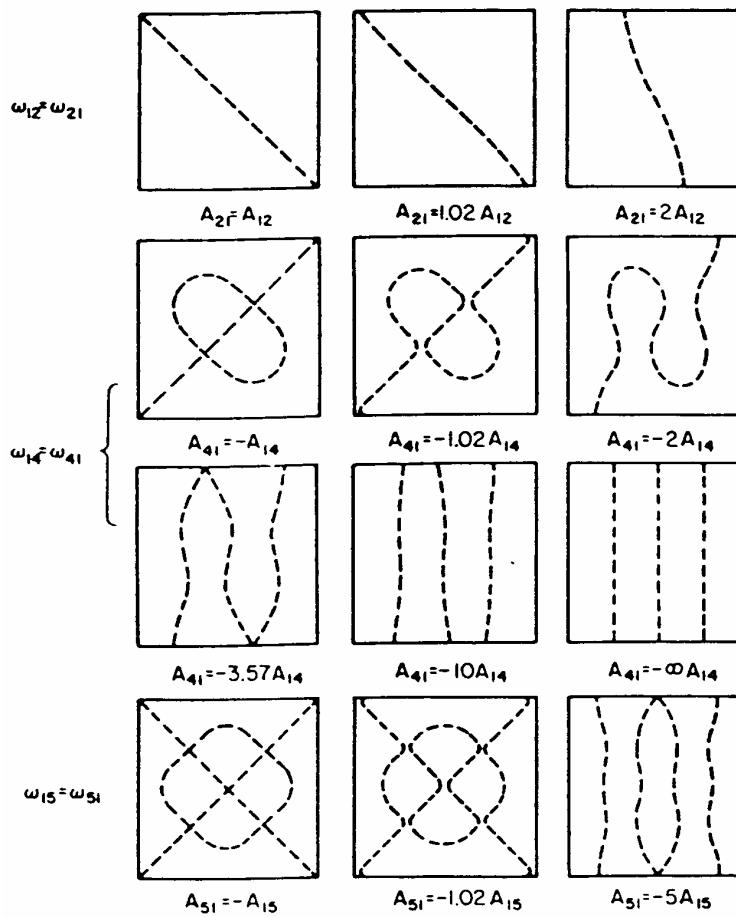


Figure 8.5 – Lignes nodales des déformées apparentes dues aux combinaisons de modes pour une plaque carrée

#### 7.4.3 – Grandeur quadratiques moyennes

Ce sont souvent ces quantités qui sont mesurées sur les structures mécaniques vibrantes. Soit le déplacement  $w(x, y, t)$  et la vitesse  $v(x, y, t)$

$$w(x, y, t) = e^{j\omega t} \sum_m \sum_n F_{mn} H_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y)$$

$$v(x, y, t) = j\omega w(x, y, t)$$

La vitesse quadratique moyenne se définit par

$$\begin{aligned} \langle v^2(x, y, t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} v^2(x, y, t) dt \\ &= \frac{1}{2} |v(x, y, t)|^2 \\ &= \frac{\omega^2}{2} \left| \sum_m \sum_n F_{mn} H_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y) \right|^2 \end{aligned}$$

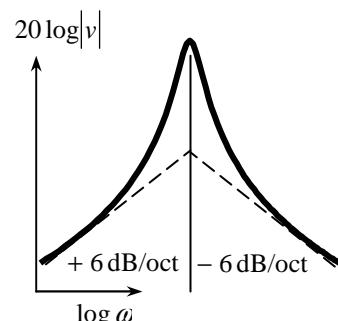
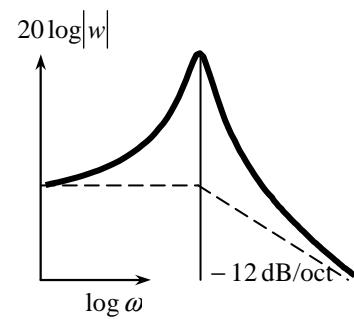


Figure 8.6 – Réponse d'un mode en déplacement et en vitesse

En considérant que  $\left| \sum_i z_i \right|^2 = \sum_i \sum_j z_i z_j^*$

$$\langle v^2(x, y, t) \rangle = \frac{\omega^2}{2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q F_{mn} F_{pq}^* H_{mn}(\omega) H_{pq}^*(\omega) \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y)$$

L'intégration de  $\langle v^2(x, y, t) \rangle$  sur la surface d'une plaque  $L_x \times L_y$  conduit à

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \langle v^2(x, y, t) \rangle dx dy = \frac{\omega^2}{2} \sum_m \sum_n |F_{mn}|^2 |H_{mn}(\omega)|^2 \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy$$

avec

$$|H_{mn}(\omega)|^2 = \frac{1}{M_{mn}^2 [(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_{mn}\zeta_{mn})^2]}$$

Pour une plaque homogène simplement supportée

$$M_{mn} = \rho h \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \phi_{mn}^2(x, y) dx dy = \frac{\rho h L_x L_y}{4}$$

d'où

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \langle v^2(x, y, t) \rangle dx dy = \frac{4\omega^2}{2(\rho h)^2 L_x L_y} \sum_m \sum_n \frac{|F_{mn}|^2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_{mn}\zeta_{mn})^2}$$

La vitesse quadratique moyenne sur la surface de la plaque peut s'exprimer par une simple somme de la valeur quadratique des composantes de chaque mode.

#### 8.4.4 – Facteur de perte et amortissement structural

Pour les calculs dynamiques de structures mécaniques, le module de Young est souvent considéré sous la forme complexe

$$\underline{E} = E(1 + j\eta)$$

où  $\eta$  est le **facteur de perte** qui se définit par

$$\eta = \frac{\text{Energie dissipée par cycle}}{2\pi \text{ Energie potentiel maximale}}$$

La raideur modale généralisée de la structure (poutre, plaque, etc.) qui est proportionnelle au module de Young, devient elle aussi complexe

$$\underline{K}_n = K_n(1 + j\eta)$$

Une excitation harmonique  $F_n e^{j\omega t}$  produit une réponse  $q_n(t) = B_n e^{j\omega t}$  et l'équation du système mécanique est

$$-\omega^2 M_n B_n + \underline{K}_n B_n = F_n$$

d'où

$$q_n(t) = \frac{F_n e^{j\omega t}}{M_n (\underline{\omega}_n^2 - \omega^2)}$$

avec  $\underline{\omega}_n^2 = K_n/M_n$  la pulsation propre complexe  $\underline{\omega}_n^2 = \omega_n^2 (1 + j\eta)$ , soit

$$q_n(t) = \frac{F_n e^{j\omega t}}{M_n (\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta \omega_n^2)}$$

A la résonance  $\omega = \omega_n$  et

$$\eta = 2 \zeta_n$$

## 9 – PROPAGATION DES ONDES VIBRATOIRES

Sous l'action d'une excitation mécanique, les ondes vibratoires se propagent dans les structures mécaniques de grandes dimensions ou dissipatives. la solution générale du déplacement peut s'écrire

$$w(x, t) = X(x) T(t)$$

Pour une excitation harmonique  $T(t) = e^{j\omega t}$ , donc

$$w(x, t) = X(x) e^{j\omega t}$$

### 9.1 – Ondes quasi-longitudinales dans les barres

A partir de la relation

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \text{constante}, \quad c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

on obtient avec  $T(t) = e^{j\omega t}$

$$\frac{1}{c_L^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\frac{\omega^2}{c_L^2} = -k_L^2$$

ce qui conduit à l'équation  $X''(x) + k_L^2 X(x) = 0$  dont les solutions sont (en notation complexe)

$$X(x) = A e^{-jk_L x} + B e^{jk_L x}$$

$k_L = \omega/c_L$  est le nombre d'onde ( $c_L$  : célérité des ondes longitudinales)

$A e^{-jk_L x}$  : onde se propageant vers les  $x$  positifs

$B e^{jk_L x}$  : onde se propageant vers les  $x$  négatifs

#### 9.1.1 – Onde dans une barre semi-infinie

Ainsi, une force  $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$  appliquée à une barre semi-infinie va créer une onde propagative

$$w(x, t) = W e^{-jk_L x} e^{j\omega t}$$

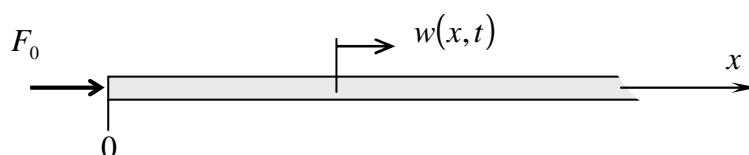


Figure 9.1 – Déplacement longitudinal produit par une force appliquée à l'extrémité d'une barre infinie

En considérant la relation d'équilibre des forces à l'extrémité  $x = 0$

$$\sum F|_{x=0} = E A \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} + \text{forces extérieures}|_{x=0} = 0$$

En calculant  $\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = -jk_L W e^{-jk_L x} e^{j\omega t}$ , la relation d'équilibre devient

$$-jk_L E A W e^{j\omega t} + F_0 e^{j\omega t} = 0$$

Elle permet d'obtenir l'amplitude de l'onde  $W = \frac{F_0}{jk_L EA}$ . L'onde propagative (avec l'hypothèse que l'onde n'est pas réfléchie) s'écrit

$$w(x,t) = \frac{F_0}{jk_L EA} e^{-jk_L x} e^{j\omega t}$$

### 9.1.2 – Impédance mécanique

L'**impédance mécanique** au point d'application de la force s'exprime par

$$Z_m = \left. \frac{\text{force}}{\text{vitesse}} \right|_{x=0} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{j\omega w(0,t)},$$

Pour une barre semi-infinie avec une onde purement propagative, l'impédance mécanique  $Z_m$  correspond à l'**impédance caractéristique**

$$Z_c = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{j\omega w(0,t)} = \frac{E A}{c_L} = \rho A c_L = m c_L, \quad m : \text{masse par unité de longueur}$$

(et l'équation du déplacement devient  $w(x,t) = (F_0 / j\omega Z_c) e^{-jk_x x} e^{j\omega t}$ )

Dans le cas où l'onde incidente  $e^{-jk_L x}$  est partiellement réfléchie, un terme  $e^{jk_L x}$  apparaît dans l'équation et l'impédance mécanique est modifiée.

### Exemple d'une barre libre de longueur $l$

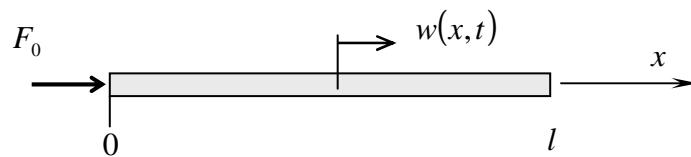


Figure 8.2 – Déplacement longitudinal produit par une force appliquée à l'extrémité d'une barre finie libre de longueur  $l$

Expression du déplacement

$$w(x,t) = (W^+ e^{-jk_L x} + W^- e^{jk_L x}) e^{j\omega t}$$

$W^+$ : amplitude de l'onde qui se propagent vers les  $x > 0$

$W^-$ : amplitude de l'onde qui se propagent vers les  $x < 0$

La barre est libre donc les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned}x=0 \quad EA \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -F_0 e^{j\omega t} \\x=l \quad EA \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0\end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = -jk_L (W^+ e^{-jk_L x} - W^- e^{jk_L x}) e^{j\omega t},$$

la première condition aux limites permet d'écrire  $W^+ - W^- = \frac{F_0}{jk_L EA}$  et la seconde  $\cos k_L l (W^+ - W^-) = j \sin k_L l (W^+ + W^-)$ , soit

$$\frac{F_0}{jk_L EA} = j \tan k_L l (W^+ + W^-)$$

L'impédance mécanique est

$$Z_m = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{j\omega w(0,t)} = \frac{F_0}{j\omega (W^+ + W^-)} = -\frac{k_L EA \tan k_L l}{j\omega} = j \frac{EA}{c_L} \tan k_L l$$

En considérant  $\frac{EA}{c_L} = \sqrt{\rho E}$   $A = \rho A \sqrt{\frac{E}{\rho}} = Z_c$ , l'impédance mécanique au point d'application de la force pour une barre libre est

$$Z_m = j Z_c \tan k_L l$$

L'impédance mécanique dépend donc de la structure et de ses conditions aux limites<sup>7</sup>.

### 9.1.3 – Puissance mécanique injectée

La puissance mécanique injectée dans une structure par une force se définit comme le produit moyen dans le temps de cette force par la vitesse au point d'application  $\Pi = \langle F(t)v(0,t) \rangle$ , ce qui correspond aussi

$$\Pi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ F_0 v^*(0) \}$$

si on utilise la notation complexe. En écrivant  $v(0) = F_0/Z_m$

$$\Pi = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ F_0 \frac{F_0^*}{Z_m^*} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z_m} \right\} |F_0|^2$$

Pour une barre **semi-infinie** la puissance injectée par une force  $F_0$  est

$$\Pi = \frac{|F_0|^2}{2 Z_c} = \frac{|F_0|^2}{2 \rho A c_L}.$$

---

<sup>7</sup>  $Z_m = -j Z_c \cot k_L l$  si l'extrémité de la barre est encastrée ( $w(l,t) = 0$ ).

Pour la barre **finie** libre décrite précédemment  $\Pi = \frac{1}{2} |F_0|^2 \operatorname{Re}\{l/Z_m\} = 0$  car l'impédance mécanique  $Z_m$  est purement imaginaire. Aucune puissance n'est injectée dans la barre qui n'est pas dissipative et qui n'est pas connectée à une structure à laquelle elle pourrait transférer de l'énergie. Si maintenant on considère un module de Young complexe pour introduire le facteur de perte  $\underline{E} = E(1 + j\eta)$ . Avec l'hypothèse  $\eta \ll 1$ , on exprime

- la célérité du son complexe  $\underline{c}_L = \sqrt{\underline{E}/\rho} = \sqrt{E(1 + j\eta)/\rho} \approx \sqrt{E/\rho} \left(1 + j\frac{\eta}{2}\right)$
- le nombre d'onde complexe  $\underline{k}_L = \frac{\omega}{\underline{c}_L} \approx \frac{\omega}{\sqrt{E/\rho}} \left(1 - j\frac{\eta}{2}\right) = k_L \left(1 - j\frac{\eta}{2}\right)$

L'impédance mécanique devient complexe

$$\underline{Z}_m = j\sqrt{\rho\underline{E}} A \tan \underline{k}_L l \approx jZ_c \left(1 + j\frac{\eta}{2}\right) \tan \left[k_L l \left(1 - j\frac{\eta}{2}\right)\right]$$

et la puissance ne sera pas nulle.

## 9.2 – Ondes de flexion dans les poutres

Si on considère un déplacement transversal  $w(x, t) = X(x)T(t)$ , l'équation de propagation des ondes de flexion conduit à

$$\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \text{constante}$$

Si  $T(t) = e^{j\omega t}$  alors  $\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$  et

$$X^{(4)}(x) - k_B^4 X(x) = 0, \quad \text{avec} \quad k_B^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI}$$

Les solutions pour  $X(x)$  peuvent s'écrire sous la forme

$$X(x) = B_1 e^{-jk_B x} + B_2 e^{jk_B x} + B_3 e^{-k_B x} + B_4 e^{k_B x}$$

- |                   |  |
|-------------------|--|
| $B_1 e^{-jk_B x}$ | est une onde qui se <i>propage</i> vers les $x > 0$  |
| $B_2 e^{jk_B x}$  | est une onde qui se <i>propage</i> vers les $x < 0$  |
| $B_3 e^{-k_B x}$  | est une onde dont l'amplitude décroît dans la direction des $x > 0$ ,<br><i>sans rotation de phase</i> , |
| $B_4 e^{k_B x}$   | est une onde dont l'amplitude décroît dans la direction des $x < 0$ ,<br><i>sans rotation de phase</i> . |

Les deux dernières ondes se nomment **ondes évanescentes**.  $k_B$  correspond bien à la définition d'un nombre d'onde de flexion  $k_B = \omega/c_B$ , où  $c_B$  est la **célérité** des ondes de flexion dans la poutre ( $c_B$  : vitesse de phase). Comme par ailleurs  $k_B^4 = \omega^2 \rho A/EI$

$$k_B = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \quad \text{et} \quad c_B = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}}$$

La célérité des ondes de flexion dans la poutre dépend de la pulsation  $\omega$  : elle n'est donc pas constante avec la fréquence et le nombre d'onde n'est pas une droite comme pour les ondes acoustiques ou les ondes longitudinales dans les barres.

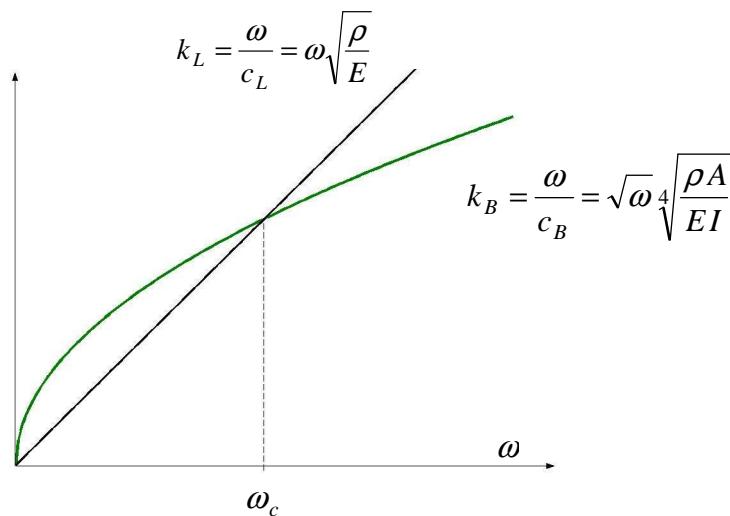


Figure 9.3 – Nombres d'onde des ondes longitudinales et de flexion en fonction de la fréquence

### 9.3 – Flux de puissance transmis par les ondes de flexion dans les poutres

Comme pour l'intensité acoustique, on parle couramment d'intensité de structure. Pour les poutres ce terme désigne la puissance transmise à travers la section de la poutre (en Watt). En considérant les deux mouvements couplés du modèle d'Euler-Bernouilli

- a) le déplacement transversal  $w$  et l'effort tranchant  $Q$ ,
- b) la rotation de flexion  $\theta$  et le moment flechissant  $M$ ,

l'intensité (ou flux de puissance) à travers la section de la poutre s'écrit en utilisant les variables complexes

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ M \dot{\theta}^* + Q \dot{w}^* \right\}$$

Les vitesses dans l'expression précédente s'écrivent  $v = \dot{w} = j\omega w$  et  $\dot{\theta} = j\omega \theta$ . En utilisant les expressions obtenues précédemment

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad Q = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

on obtient l'intensité exprimée en fonction du déplacement

$$I = \frac{EI}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \dot{w}^* \right\} = -\frac{\omega EI}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w^*}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} w^* \right\},$$

en fonction des vitesses vibratoire en posant  $w = v/j\omega$

$$I = \frac{EI}{2\omega} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} v^* \right\},$$

où encore en fonction de l'accélération en posant  $v = a/j\omega$

$$I = \frac{EI}{2\omega^3} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \frac{\partial a^*}{\partial x} - \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} a^* \right\}.$$

En un point de la poutre suffisemment éloigné des extrémités ou des forces d'excitations (c'est à dire d'une discontinuité du champ vibratoire) les différentes dérivées spatiales s'écrivent simplement sous la forme

$$\begin{aligned} v &= A e^{-jk_B x} + B e^{jk_B x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -jk_B (A e^{-jk_B x} - B e^{jk_B x}) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -k_B^2 (A e^{-jk_B x} + B e^{jk_B x}) = -k_B^2 v \\ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} &= jk_B^3 (A e^{-jk_B x} - B e^{jk_B x}) = -k_B^2 \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

L'utilisation de ces relations dans la formulation générale de l'intensité structurale dans la poutre conduite à l'approximation dite de champ lointain

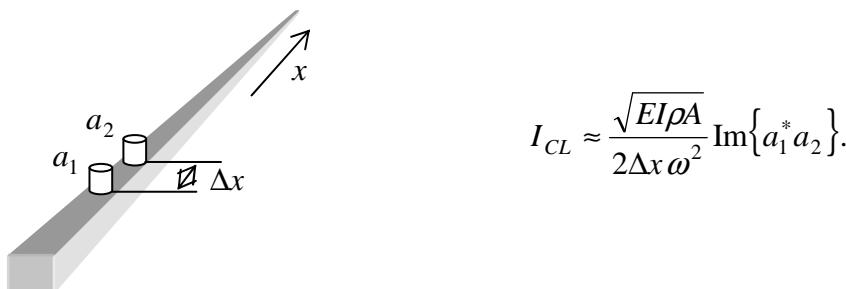
$$I \approx I_{CL} = \frac{EI}{2\omega} \operatorname{Im} \left\{ -k_B^2 v \frac{\partial v^*}{\partial x} + k_B^2 \frac{\partial v}{\partial x} v^* \right\} = -\frac{EI k_B^2}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ v \frac{\partial v^*}{\partial x} \right\}.$$

Exprimer le nombre d'onde par sa valeur  $k_B^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ , conduit à l'expression usuelle de

l'intensité en champ lointain

$$I_{CL} = -\sqrt{EI\rho A} \operatorname{Im} \left\{ v \frac{\partial v^*}{\partial x} \right\} = -\frac{\sqrt{EI\rho A}}{\omega^2} \operatorname{Im} \left\{ a \frac{\partial a^*}{\partial x} \right\}.$$

Cette approximation a souvent été utilisée avec un schéma aux différences finies ( $\partial a/\partial x \approx (a_2 - a_1)/\Delta x$  et  $a \approx (a_2 + a_1)/2$ ) pour mesurer l'intensité de structure dans une poutre à l'aide de deux accéléromètres à condition de valider l'approximation de champ lointain



$$I_{CL} \approx \frac{\sqrt{EI\rho A}}{2\Delta x \omega^2} \operatorname{Im} \left\{ a_1^* a_2 \right\}.$$

## 10 – REPONSE FORCEE PAR DECOMPOSITION EN ONDES

Cette méthode permet d'obtenir des solutions analytiques à partir de la connaissance des conditions aux limites et des excitations. Elle est limitée aux structures unidimensionnelles et aux excitations harmoniques.

**Méthode :** Le système vibrant est divisé en sous-structures (ou tronçons). Dans chaque tronçon, les conditions aux limites et les conditions de raccordement permettent de trouver des solutions en termes d'ondes forcées. Cette méthode est également désignée sous le nom de *méthode spectrale* et les tronçons sont appelés *éléments spectraux*.

### 10.1 – Présentation de la méthode pour les barres

Pour les barres ou les systèmes dont les équations ondes sont représentées par des opérateurs différentiels d'ordre deux, les conditions aux limites sont décrites par deux équations (pour  $x=0$  et  $x=l$ ) et les conditions de raccordement portent sur un déplacement et un effort.

Le cas d'une barre excitée en torsion est choisi comme exemple. Les déplacements angulaires  $\theta(x,t)$  sont les solutions de l'équation différentielle

$$G I_0 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \rho I_0 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

En adoptant une solution harmonique de la forme  $\theta(x,t) = \theta(x)e^{j\omega t}$ , l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme

$$G I_0 \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \rho I_0 \omega^2 \theta(x) = 0$$

Il est considéré que cette barre est encastrée aux deux extrémités et qu'elle est excitée par un couple harmonique en  $x = x_0$

$$M(x_0, t) = M_0 e^{j\omega t}$$

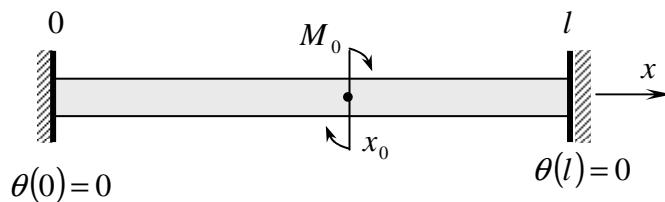


Figure 10.1 – Excitation des ondes de torsion dans la barre encastrée

### 10.1.1 – Conditions de raccordement

La méthode consiste à diviser la barre en deux tronçons et à chercher les solutions  $\theta_1(x)$  et  $\theta_2(x)$  pour chaque tronçon. A la jonction des deux tronçons en  $x = x_0$ , il faut exprimer les **conditions de raccordement** :

- continuité des déplacements

$$\theta_1(x_0) = \theta_2(x_0)$$

- discontinuité du moment de torsion  $G I_0 \frac{d\theta}{dx}$  dû au couple d'excitation  $M_0$

$$G I_0 \left. \frac{d\theta_1(x)}{dx} \right|_{x=x_0} - G I_0 \left. \frac{d\theta_2(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = M_0$$

auxquelles s'ajoutent les conditions aux limites

$$\theta_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta_2(l) = 0$$

Les solutions générales pour les déplacements angulaires dans les deux tronçons sont

$$\theta_1(x) = A_1 e^{-jkx} + B_1 e^{jkx}$$

$$\theta_2(x) = A_2 e^{-jkx} + B_2 e^{jkx}$$

ou encore la forme équivalente

$$\theta_1(x) = a_1 \sin kx + b_1 \cos kx$$

$$\theta_2(x) = a_2 \sin kx + b_2 \cos kx$$

avec le nombre d'onde de torsion  $k = \omega/c_T$  et la célérité des ondes de torsion dans la barre  $c_T = \sqrt{G/\rho}$ .

Les solutions qui satisfont les conditions aux limites pour toutes les valeurs de  $k$  sont

$$\theta_1(x) = a_1 \sin kx$$

$$\theta_2(x) = a_2 \sin k(x-l)$$

L'utilisation des conditions de raccordement permet d'écrire des équations qui peuvent se mettre sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sin kx_0 & -\sin k(x_0 - l) \\ \cos kx_0 & -\cos k(x_0 - l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_0}{kGI_0} \end{bmatrix}$$

### 10.1.2 – Solution du déplacement

L'équation précédente conduit aux solutions suivantes pour  $a_1$  et  $a_2$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin kx_0 & -\sin k(x_0 - l) \\ \cos kx_0 & -\cos k(x_0 - l) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_0}{kGI_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M_0}{kGI_0} \frac{\sin k(x_0 - l)}{\Delta} \\ -\frac{M_0}{kGI_0} \frac{\sin kx_0}{\Delta} \end{bmatrix}$$

avec le déterminant du système  $\Delta = \sin kl$ .

Les équations pour les deux tronçons de la barre sont donc

$$\begin{cases} \theta_1(x) = -\frac{M_0}{kGI_0} \frac{\sin k(x_0 - l)}{\sin kl} \sin kx & 0 \leq x \leq x_0 \\ \theta_2(x) = -\frac{M_0}{kGI_0} \frac{\sin kx_0}{\sin kl} \sin k(x - l) & x_0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Cette méthode fournit donc une solution analytique ("close form") de la réponse forcée. Les zéros de la fonction  $\sin kl$  (qui apparaît dans la solution des deux tronçons) correspondent aux fréquences naturelles

$$kl = \frac{\omega}{c_T} l = n\pi \quad \text{soit} \quad \omega_n = \frac{n\pi c_T}{l}$$

Elle met aussi en évidence des fréquences d'*anti-résonances* pour  $\sin k(x_0 - l) = 0$  et  $\sin kx = 0$  (tronçon 1), et pour  $\sin kx_0 = 0$  et  $\sin k(x - l) = 0$  (tronçon 2). Contrairement aux fréquences naturelles, ces *anti-résonances* dépendent de la position du point d'excitation et du point d'observation. En particulier, quand  $\sin k(x_0 - l) = 0$ , c'est à dire à la pulsation  $\omega = n\pi c_T / (l - x_0)$ , la réponse est partout nulle sur le tronçon 1, alors que l'amplitude sur le tronçon 2 est correspond à celle d'une barre de longueur  $l - x_0$  dont les extrémités sont encastrées. La situation est inversée pour  $\omega = n\pi c_T / x_0$ . Cette solution sera comparée plus loin à la méthode modale.

## 10.2 – Extensions de la méthode

### 10.2.1 – Barres et poutres hétérogènes

Les caractéristiques mécaniques peuvent varier pour les tronçons. Dans l'exemple suivant, la méthode va considérer 3 tronçons dans lesquels les solutions générales seront

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= a_1 \sin kx + b_1 \cos kx, & 0 \leq x \leq l_1 \\ \theta_2(x) &= a_2 \sin kx + b_2 \cos kx & l_1 \leq x \leq x_0 \\ \theta_3(x) &= a_3 \sin kx + b_3 \cos kx & x_0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

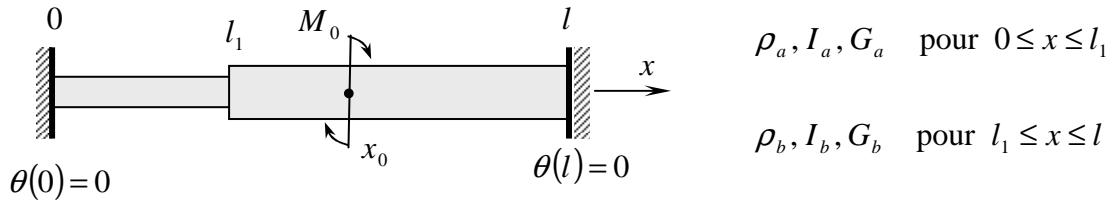


Figure 10.2 – Cas de deux barres connectées

En  $x = l_1$ , les conditions de raccordement seront

$$\theta_1(l_1) = \theta_2(l_1) \quad \text{et} \quad G_a I_a \frac{d\theta_1(x)}{dx} \Big|_{x=l_1} = G_b I_b \frac{d\theta_2(x)}{dx} \Big|_{x=l_1}$$

Avec les conditions aux limites elles permettent de constituer un système linéaire de 3 équations dont la résolution conduira aux solutions dans les 3 tronçons. Le nombre de tronçons à prendre en compte dépend du nombre de singularités (excitations et discontinuités de structure).

### 10.2.2 – Milieux dissipatifs

L'amortissement est introduit par l'intermédiaire du module de Young complexe

$$\underline{E} = E(1 + j\eta), \quad \eta \text{ facteur de perte}$$

de même pour le module de cisaillement  $G = E/2(1 + \nu)$

$$\underline{G} = G(1 + j\eta)$$

Dans les solutions du déplacement

$$\theta(x) = A e^{-j\omega x} + B e^{j\omega x}$$

le nombre d'onde de torsion  $k = \frac{\omega}{c_T} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$  est remplacé par  $\underline{k} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ , soit

$$\underline{k} = \frac{k}{\sqrt{1 + j\eta}}$$

Comme  $\eta$  est très faible, l'approximation suivante peut être employée<sup>8</sup>

$$\underline{k} = \frac{k \sqrt{1 - j\eta}}{\sqrt{(1 + j\eta)(1 - j\eta)}} \approx k \left(1 - j \frac{\eta}{2}\right).$$

<sup>8</sup> En utilisant les approximations suivantes pour  $\varepsilon \ll 1$

$(1 + j\varepsilon)(1 - j\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 \approx 1$  et  $(1 - j\varepsilon)(1 - j\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 - j2\varepsilon \approx 1 - j2\varepsilon$

La solution du déplacement angulaire du tronçon 1 dans le premier exemple devient

$$\theta_1(x) = -\frac{M_0}{kGI_0} \frac{e^{jk(x_0-l)} - e^{-jk(x_0-l)}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \frac{e^{jklx} - e^{-jklx}}{2j}$$

Le dénominateur  $2j(e^{jkl} - e^{-jkl}) = -\sin kl \cosh \frac{\eta}{2}l + j \cos kl \sinh \frac{\eta}{2}l$  ne s'annule plus pour les fréquences naturelles : l'amortissement limite l'amplitude des déplacements.

### 10.2.3 – Excitation répartie

Le déplacement pour une excitation ponctuelle unitaire est la solution de l'équation

$$GI_0 \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \omega^2 \rho I_0 \theta(x) = \delta(x - x')$$

Cette solution élémentaire du problème s'appelle *fonction de Green* et se note  $G(x'|x)$ . D'après les résultats précédents (cas non dissipatif)

$$G(x'|x) = \begin{cases} G_1(x'|x) = -\frac{1}{kGI_0} \frac{\sin k(x') - l}{\sin kl} \sin kx & 0 \leq x \leq x' \\ G_2(x'|x) = -\frac{1}{kGI_0} \frac{\sin kx'}{\sin kl} \sin k(x - l) & x' \leq x \leq l \end{cases}$$

La solution générale d'un problème peut s'écrire à l'aide de la fonction de Green. En considérant une excitation répartie  $m(x)$  (moment), le déplacement angulaire peut s'écrire

$$\theta(x) = \int_0^l m(x') G(x'|x) dx' = \int_0^x m(x') G_2(x'|x) dx' + \int_x^l m(x') G_1(x'|x) dx'$$

Exemple :  $m(x) = M_0 \delta(x - x_0)$

$$\theta(x) = M_0 \int_0^x \delta(x' - x_0) G_2(x'|x) dx' + M_0 \int_x^l \delta(x' - x_0) G_1(x'|x) dx'$$

soit

$$\begin{cases} \theta_1(x) = M_0 G_2(x_0|x) & \text{quand } 0 \leq x \leq x_0 \\ \theta_2(x) = M_0 G_1(x_0|x) & \text{quand } x_0 \leq x \leq l \end{cases}$$

ce qui correspond bien aux résultats obtenus précédemment.

### 10.3 – Cas des poutres en flexion

La méthode s'applique de la même façon que pour les barres. Les calculs sont plus longs car la solution générale comporte 4 coefficients (ondes propagatives et ondes évanescentes) et la poutre peut être excitée par des forces et des moments.

Comme exemple, on considère une poutre encastrée-libre excitée par une force harmonique  $F(x_0, t) = F_0 e^{j\omega t}$ .

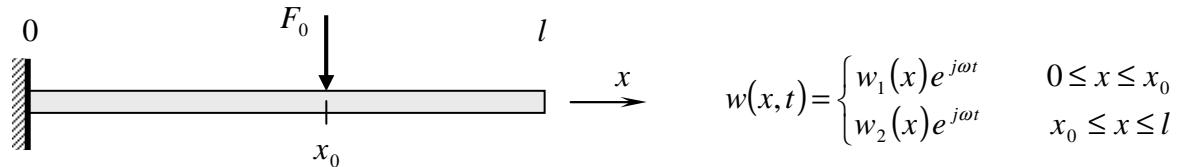


Figure 10.3 – Excitation des ondes de flexion dans la poutre encastrée - libre

La poutre est composée de deux tronçons où les déplacements doivent vérifier l'équation

$$EI \frac{d^4 w_i(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho A w_i(x) = 0, \quad i = \{1, 2\}$$

Les solutions sont

$$\begin{aligned} w_1(x) &= A_1 \sin kx + B_1 \cos kx + C_1 \sinh kx + D_1 \cosh kx \\ w_2(x) &= A_2 \sin kx + B_2 \cos kx + C_2 \sinh kx + D_2 \cosh kx \end{aligned}$$

$$\text{avec } k = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}}.$$

Les conditions aux limites s'écrivent de la façon suivante

$$x = 0 : \text{extrémité encastrée} \quad x = l : \text{extrémité libre}$$

$$\begin{aligned} w_1(0) &= 0 & EI \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} &= 0 \\ \left. \frac{dw_1(x)}{dx} \right|_{x=0} &= 0 & EI \frac{d^3 w_2(x)}{dx^3} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned}$$

Les conditions de raccordement sont

$$\begin{aligned} w_1(x_0) &= w_2(x_0) && \text{continuité des déplacements} \\ w'_1(x_0) &= w'_2(x_0) && \text{continuité des rotations} \\ EI w''_1(x_0) &= EI w''_2(x_0) && \text{continuité des moments} \\ EI w'''_1(x_0) - EI w'''_2(x_0) &= F_0 && \text{discontinuité de l'effort tranchant} \end{aligned}$$

L'utilisation des solutions  $w_1(x)$  et  $w_2(x)$  avec ces 8 conditions permet d'obtenir un système linéaire à 8 équations

$$\begin{bmatrix} & A_1 \\ & \vdots \\ & D_1 \\ A & A_2 \\ & \vdots \\ & D_2 \end{bmatrix}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} F_0/EI \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et de calculer les coefficients de  $A_1$  à  $D_2$ .

#### 10.4 – Comparaison avec la méthode de la synthèse modale

Pour faire la comparaison avec la méthode de synthèse modale, le premier exemple d'une barre excitée localement en  $x = x_0$  par un couple harmonique de moment  $M_0$  est considéré avec un milieu dissipatif.

Avec la méthode modale le déplacement angulaire s'obtient par

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{M_n [\omega_n^2 - \omega^2]} \phi_n(x)$$

avec la déformée modale

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

la masse modale généralisée

$$M_n = \int_0^l \rho I_0 \phi_n^2(x) dx = \int_0^l \rho I_0 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{\rho I_0 l}{2}$$

la force modale généralisée

$$F_n = \int_0^l M_0 \delta(x - x_0) \phi_n(x) dx = \int_0^l M_0 \delta(x - x_0) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = M_0 \sin \frac{n\pi x_0}{l}$$

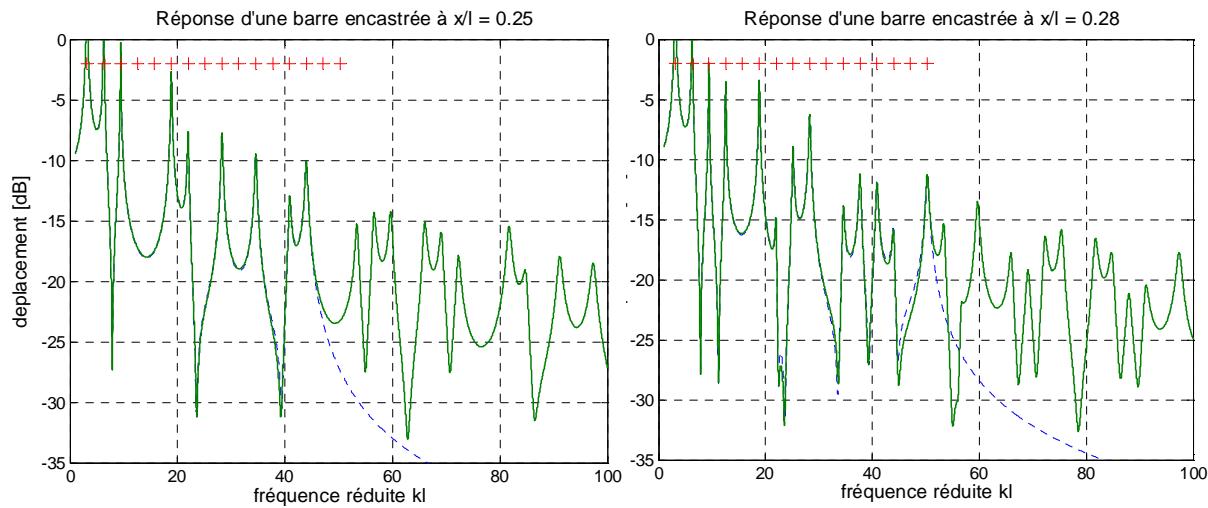
la pulsation naturelle complexe

$$\underline{\omega}_n^2 = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{G}{\rho} = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{G}{\rho} (1 + j\eta) = \omega_n^2 (1 + j\eta)$$

soit

$$\theta(x) = \frac{2M_0}{\rho I_0 l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega_n^2 \eta} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{avec } \omega_n^2 = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{G}{\rho}.$$

La solution modale tronquée à  $N = 16$  est comparée à la solution ondulatoire sur la figure suivante.



*Figure 10.4 – Réponses par la méthode des ondes forcées (trait plein) et la méthode modale tronquée ( $N = 16$ , trait interrompu) pour une barre excitée par un couple en  $x_0/l = 0.6$  pour des points d'observation à  $x/l = 0.25$  (à gauche) et  $x/l = 0.28$  (à droite).*

Malgré l'intérêt que présente la méthode de décomposition en ondes forcées, elle est moins générale que la méthode modale. Des extensions aux plaques rectangulaires ont été proposées : les conditions de raccordement entre tronçons rectangulaires se font par les composantes de séries de Fourier (tronquées) représentant les grandeurs le long des frontières.

## ANNEXE A

### Identification des paramètres modaux généralisés pour la poutre en flexion.

Si on considère l'équation homogène des plaques dans laquelle on reporte la solution générale (pour le mode  $n$ ) exprimée en fonction de la pulsation naturelle  $\omega_n$  et de la déformée  $\phi_n$  obtenus pour des conditions aux imites particulières, on obtient

$$EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A \phi_n(x) = 0$$

En multipliant par la déformée  $\phi_p(x)$  et en intégrant, on aboutit à l'équation (1)

$$\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_p(x) dx - \omega_n^2 \int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_p(x) dx = 0 \quad (1)$$

On vérifie la symétrie de chacune des deux intégrales par rapport à  $n$  et  $p$ . Pour la seconde, la symétrie est évidente

$$\int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_p(x) dx = \int_0^l \rho A \phi_p(x) \phi_n(x) dx$$

Pour la première, on réalise des intégrations par parties successives

$$\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_p(x) dx = - \int_0^l EI \frac{d^3 \phi_n(x)}{dx^3} \frac{d \phi_p(x)}{dx} dx + \left[ EI \frac{d^3 \phi_n(x)}{dx^3} \phi_p(x) \right]_0^l$$

Si on considère des conditions simplement supportées

$$\phi_n(0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \phi_n(l) = 0, \quad \left. \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \right|_{x=l} = 0$$

On contacte que le terme intégré est nul: il en sera de même pour les opérations successives

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l EI \phi_p^{(4)} \phi_n dx \\
 &= - \int_0^l EI \phi_p^{(3)} \phi_n' dx + \left[ EI \phi_p^{(3)} \phi_n \right]_0^l \\
 &= \int_0^l EI \phi_p'' \phi_n'' dx - \left[ EI \phi_p'' \phi_n' \right]_0^l \\
 &= - \int_0^l EI \phi_p' \phi_n^{(3)} dx + \left[ EI \phi_p' \phi_n' \right]_0^l \\
 &= \int_0^l EI \phi_p \phi_n^{(4)} dx - \left[ EI \phi_p \phi_n^{(3)} \right]_0^l
 \end{aligned}$$

donc la symétrie est vérifiée

$$\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_p(x) dx = \int_0^l EI \frac{d^4 \phi_p(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx$$

En intervertissant les indices  $n$  et  $p$  dans la relation (1)

$$\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_p(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx = -\omega_p^2 \int_0^l \rho A \phi_p(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad (2)$$

et calculant (2)-(1) on obtient donc grâce aux relations de symétrie

$$(\omega_n^2 - \omega_p^2) \int_0^l \rho A \phi_p(x) \phi_n(x) dx = 0$$

- quand  $\omega_n = \omega_p$ , l'équation est vérifiée, et on nomme masse généralisée.

$$M_n = \int_0^l \rho A \phi_n^2(x) dx$$

- quand  $\omega_n \neq \omega_p$ , on obtient la relation d'orthogonalité

$$\int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_p(x) dx = 0 \quad (n \neq p)$$

En reprenant l'équation (1) ou (2), on en déduit une autre relation d'orthogonalité

$$\int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_p(x) dx = 0 \quad \text{pour } n \neq p$$

qui est vérifiée si la relation de symétrie est vérifiée donc si

$$\left[ EI \frac{d^3 \phi_n(x)}{dx^3} \phi_p(x) \right]_0^l = 0 \quad \text{et} \quad \left[ EI \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \frac{d \phi_n(x)}{dx} \right]_0^l = 0$$

pour tous  $n$  et  $p$ . Ceci est vrai pour la plupart des conditions aux limites.

Quand  $n = p$ , cette relation permet de définir la raideur généralisée

$$K_n = \int_0^l EI \frac{d^4 \phi_n(x)}{dx^4} \phi_n(x) dx$$

L'équation (1) ou (2) permet alors de montrer que

$$K_n = \omega_n^2 M_n$$

## ANNEXE B

### Solution approchée pour les plaques utilisant des fonctions de poutre

En exprimant le déplacement solution de l'équation des plaques par  $w(x, y, t) = f(x, y)T(t)$  et en considérant que la fonction  $T(t)$  est harmonique telle que  $\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t)$ , l'équation des plaques devient

$$D \nabla^4 f(x, y) - \omega^2 \rho h f(x, y) = 0$$

et en multipliant chaque terme par  $f(x, y)$

$$D f \nabla^4 f - \omega^2 \rho h f^2 = 0$$

on obtient finalement une expression de la pulsation

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \frac{\iint f \nabla^4 f \, dx \, dy}{\iint f^2 \, dx \, dy}.$$

Considérons que la fonction  $f$  est le produit de deux fonctions de  $x$  et de  $y$  (fonctions de poutre)

$$f(x, y) = \alpha(x) \beta(y)$$

le dénominateur de la formule de  $\omega^2$  est

$$\iint f^2 \, dx \, dy = \int_0^a \alpha^2 \, dx \int_0^b \beta^2 \, dy$$

et en considérant

$$\nabla^4 f = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) f \quad \text{et} \quad \nabla^4(\alpha \beta) = \left( \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^4 \beta}{\partial y^4} \right)$$

et le numérateur  $\iint f \nabla^4 f \, dx \, dy$  peut s'exprimer par

$$\iint \alpha \beta \nabla^4(\alpha \beta) \, dx \, dy = \int_0^a \alpha \frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^4} \, dx \int_0^b \beta^2 \, dy + \int_0^a \alpha^2 \, dx \int_0^b \beta \frac{\partial^4 \beta}{\partial y^4} \, dy + 2 \int_0^a \alpha \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right) \, dx \int_0^b \beta \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) \, dy$$

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions de poutre, ils vérifient les relations suivantes :

$$\frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^4} - \lambda_m^4 \alpha = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^4 \beta}{\partial y^4} - \lambda_n^4 \beta = 0$$

où  $\lambda_m^4$  est la solution pour la poutre qui satisfait les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = a$  (et même chose pour  $\lambda_n^4$ ).

$$\iint \alpha \beta \nabla^4(\alpha \beta) \, dx \, dy = \int_0^a \lambda_m^2 \alpha^2 \, dx \int_0^b \beta^2 \, dy + \int_0^a \alpha^2 \, dx \int_0^b \lambda_n^2 \beta^2 \, dy + 2 \int_0^a \alpha \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right) \, dx \int_0^b \beta \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) \, dy$$

Cette dernière forme conduit à l'expression des fréquences propres

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \left[ \lambda_m^4 + \lambda_n^4 + 2 \frac{\int_0^a \alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx \int_0^b \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} dy}{\int_0^a \alpha^2 dx \int_0^b \beta^2 dy} \right].$$

**Exemple :** Pour une plaque carrée encastrée sur 4 bords, les déformées de la poutre encastrée est utilisée

$$\alpha(x) = C(\lambda_m x) - \frac{C(\lambda_m a)}{S(\lambda_m a)} S(\lambda_m x)$$

avec

$$C(\lambda_m x) = \cosh \lambda_m x - \cos \lambda_m x \quad \text{et} \quad S(\lambda_m x) = \sinh \lambda_m x - \sin \lambda_m x$$

et  $\lambda_1 a = 4.73$ ,  $\lambda_2 a = 7.85$ ,  $\lambda_3 a = 11.00$ , etc.

Les expressions de  $\alpha(x)$  et de  $\beta(x)$  servent à calculer le 3ème terme de  $\omega_{mn}^2$ . Le tableau suivant donne les résultats du calcul pour  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 1$	36.11	73.74	132.48
$n = 2$	73.74	108.85	165.92
$n = 3$	132.48	165.92	220.91

**Remarque :** Dans le cas de conditions aux limites encastrées ou de mélange avec des conditions aux limites simplement supportées, l'approximation est assez satisfaisante pour obtenir les fréquences naturelles, par contre elle devient imprécise dès que des conditions aux limites libres sont introduites (voir l'ouvrage de Soedel et l'article de Leissa, cités précédemment).

## **II - PROPAGATION ACOUSTIQUE A UNE DIMENSION ET SILENCIEUX**

1. ONDES PLANES
2. CHANGEMENT DE SECTION
3. SILENCIEUX A CHAMBRE D'EXPANSION
4. RESONATEUR DE HELMHOLTZ
5. SILENCIEUX A RESONATEUR
6. SILENCIEUX DISSIPATIFS
7. SILENCIEUX INDUSTRIELS
8. TERMINAISONS
9. CARACTERISATION DES SILENCIEUX

### **ANNEXE A**

Modélisation matricielle des systèmes silencieux



# PROPAGATION A UNE DIMENSION ET SILENCIEUX

## 1 ONDES PLANES

Beaucoup de problèmes de bruit industriel sont liés à la propagation d'ondes dans des conduits et des tuyaux. Si la longueur d'onde acoustique  $\lambda$  est bien plus grande que le diamètre  $D$  du tuyau, le son se propage comme une onde plane (ou onde monodimensionnelle) :

$$\lambda = \frac{c}{f} \gg D$$

$c$  : célérité du son,  $c = 344$  m/s dans l'air à  $20^\circ\text{C}$ ,

$f$  : fréquence (en Hertz).

On considère une onde harmonique de fréquence  $f = \omega/2\pi$  qui se propage dans la direction des  $x$  positifs. Sa pression acoustique s'écrit

$$p(t, x) = \operatorname{Re}\left\{A e^{j\omega(t-x/c)}\right\}. \quad (1)$$

L'amplitude  $A$  est en général complexe et la fonction exponentielle décrit l'évolution de la pression en fonction du temps et de la distance. Il est plus simple d'utiliser la notation complexe

$$p = A e^{-jkx}, \quad (2)$$

avec le nombre d'onde  $k = \omega/c$ . Dans cette dernière équation,  $p$  est une variable complexe pour laquelle la dépendance temporelle se trouve omise. On retrouvera la pression acoustique instantanée de l'équation (1) par la relation suivante :

$$p(t, x) = \operatorname{Re}\{p e^{j\omega t}\}.$$

La vitesse particulière est en relation avec la pression acoustique (eq. de conservation de la quantité de mouvement)

$$\rho_0 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + \frac{\partial p(t)}{\partial x} = 0.$$

Exprimée en notation complexe selon l'équation (3), elle devient

$$j\rho_0\omega u + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

d'où

$$u = \frac{-1}{j\rho_0\omega} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-1}{j\rho_0 c k} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Dans le cas de l'onde plane propagative décrite par l'équation (2), la vitesse particulière s'écrit

$$u = \frac{A}{\rho_0 c} e^{-jkx} = \frac{p}{\rho_0 c}. \quad (4)$$

L'intensité acoustique (active), qui est la densité de flux de puissance transportée par l'onde acoustique, s'exprime en notation complexe par (voir Annexe)

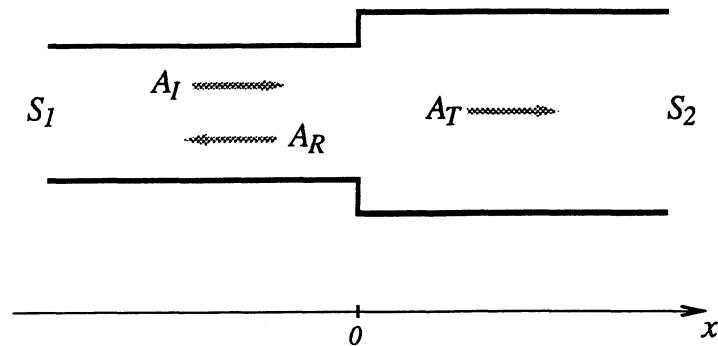
$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{p u^*\} \quad [\text{W/m}^2]. \quad (5)$$

En fonction des résultats précédents, l'intensité acoustique d'une onde plane progressive est en relation simple avec la pression:

$$I = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c}. \quad (6)$$

## 2 CHANGEMENT DE SECTION

Interessons nous à la transmission du son dans un conduit possèdant un brusque changement de section, comme représenté par le schéma de la figure 1.



*Fig. 1 – Changement de section.*

L'onde incidente est partiellement réfléchie par le changement de section de  $S_1$  à  $S_2$  (en  $x = 0$ ). La pression acoustique dans la région  $x < 0$  de section  $S_1$  est donc une onde quasi-stationnaire produite par la somme de l'onde incidente d'amplitude  $A_I$  et de l'onde réfléchie d'amplitude  $A_R$

$$p_1 = A_I e^{-j k x} + A_R e^{j k x}, \quad \text{pour } x < 0. \quad (7a)$$

Dans la région  $x > 0$  de section  $S_2$ , une onde transmise d'amplitude  $A_T$  se propage vers les  $x$  positifs (on suppose qu'il n'y a pas de réflexion au-delà de  $x = 0$ )

$$p_2 = A_T e^{-j k x}, \quad \text{pour } x > 0. \quad (7b)$$

Pour déterminer les amplitudes  $A_R$  et  $A_T$ , on doit satisfaire deux conditions.

Première condition: le débit acoustique se conserve à travers la jonction

$$\rho_0 S_1 u_1 = \rho_0 S_2 u_2, \quad \text{pour } x = 0 \quad (8)$$

$u_1$  est la vitesse particulaire dans le tronçon de gauche ( $x < 0$ ) et  $u_2$  la vitesse particulaire dans le tronçon de droite ( $x > 0$ ). La vitesse particulaire qui correspond à la pression  $p_1$  dans le tronçon de gauche est

$$u_1 = \frac{A_I}{\rho_0 c} e^{-j k x} - \frac{A_R}{\rho_0 c} e^{j k x}, \quad (9a)$$

et celle correspondant à  $p_2$  dans le tronçon de droite

$$u_2 = \frac{A_T}{\rho_0 c} e^{-j k x}. \quad (9b)$$

La relation (8) qui exprime la conservation du débit, dans laquelle on a employé les deux équations précédentes, conduit à une nouvelle relation

$$S_1 (A_I - A_R) = S_2 A_T, \quad \text{pour } x = 0. \quad (10)$$

Deuxième condition: une relation sur la continuité de la pression (pour  $x = 0$ ) doit être vérifiée à l'endroit du changement de section :

$$p_1 = p_2 \quad (11)$$

qui s'écrit aussi

$$A_I + A_R = A_T. \quad (12)$$

En utilisant les équations (10) et (12), on exprime les amplitudes de l'onde réfléchie et de l'onde transmise en fonction de celle de l'onde incidente

$$A_R = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} A_I \quad (13)$$

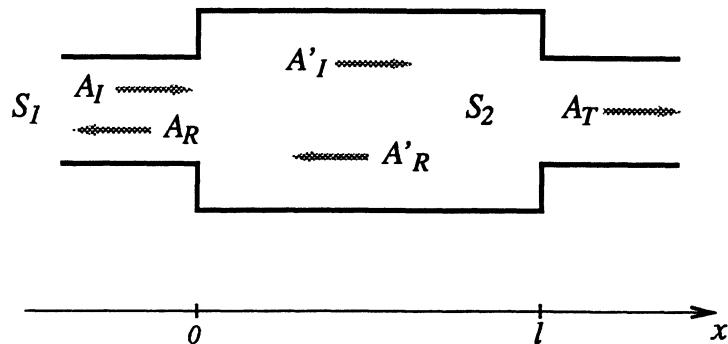


Fig. 2 – Silencieux à chambre d'expansion.

$$A_T = \frac{2 S_1}{S_1 + S_2} A_I \quad (14)$$

On définit la perte de transmission (*Transmission Loss*) par le rapport, exprimé en décibel, de la puissance incidente sur la puissance transmise

$$L_{TL} = 10 \log \frac{W \text{ incidente}}{W \text{ transmise}} \quad [dB]. \quad (15)$$

La puissance dans le conduit est le produit de l'intensité acoustique  $I$  par la section. Dans le cas d'une onde plane, c'est le produit du carré de l'amplitude par la section, d'où l'expression suivante du facteur de perte par transmission

$$L_{TL} = 10 \log \frac{S_1 |A_I|^2}{S_2 |A_T|^2},$$

qui devient en utilisant les relations (13) et (14)

$$L_{TL} = 10 \log \frac{(S_1 + S_2)^2}{4 S_1 S_2}. \quad (16)$$

On pourrait recommencer à traiter le problème avec une propagation de la section la plus importante vers la plus faible ( $S_1 > S_2$ ) et le résultat serait identique, et à cause de la symétrie de la formule (16) la valeur de la perte de transmission sera la même.

### 3 SILENCIEUX A CHAMBRE D'EXPANSION

La chambre d'expansion est le procédé utilisé comme silencieux dans de nombreuses applications industrielles (automobiles, ...). Le modèle de base est constitué par deux tuyaux de section  $S_1$  en entrée et en sortie d'une chambre d'expansion de section  $S_2$  et de longueur  $l$ .

En fonction des notations définies sur la figure 2, on écrit les équations de la pression

$$p = A_I e^{-j kx} + A_R e^{j kx}, \quad \text{pour } x < 0, \quad (17a)$$

$$p = A'_I e^{-j kx} + A'_R e^{j kx}, \quad \text{pour } 0 < x < l, \quad (17b)$$

$$p = A_T e^{-j kx}, \quad \text{pour } l < x. \quad (17c)$$

Comme pour le cas précédent, on peut écrire les équations de continuité pour les débits et les pressions au niveau de la première discontinuité  $x = 0$

$$S_1 (A_I - A_R) = S_2 (A'_I - A'_R), \quad (18a)$$

$$A_I + A_R = A'_I + A'_R, \quad (18b)$$

et au niveau de la seconde discontinuité  $x = l$

$$S_2 (A'_I e^{-j kl} - A'_R e^{j kl}) = S_1 A_T e^{-j kl}, \quad (19a)$$

$$A'_I e^{-j kl} + A'_R e^{j kl} = A_T e^{-j kl}. \quad (19b)$$

En posant  $m = S_2/S_1$  et en écrivant le système d'équation (19) sous la forme

$$m(A'_I - A'_R) \cos kl - j m(A'_I + A'_R) \sin kl = A_T e^{-j kl},$$

$$(A'_I + A'_R) \cos kl - j (A'_I - A'_R) \sin kl = A_T e^{-j kl},$$

on fait apparaître les termes  $A'_I + A'_R$  et  $A'_I - A'_R$  qui peuvent être exprimés à l'aide des équations (18). On obtient alors un système qui ne comporte que des termes  $A_I$ ,  $A_R$  et  $A_T$ , dont on peut tirer les expressions suivantes pour l'onde réfléchie et l'onde transmise

$$A_R = \frac{j \left( \frac{1}{m} - m \right) \sin kl}{2 \cos kl + j \left( \frac{1}{m} + m \right) \sin kl} A_I, \quad (20)$$

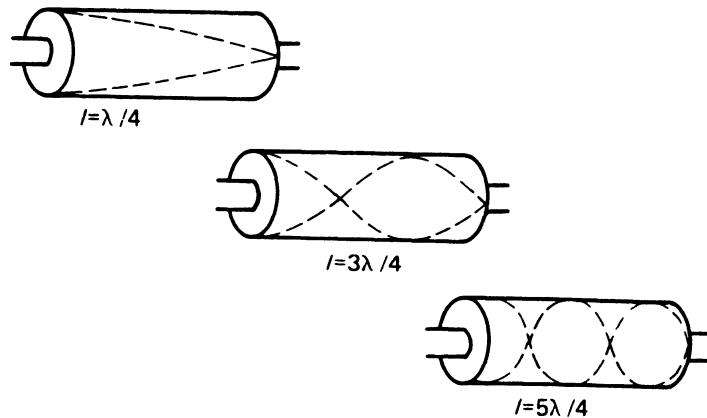
$$A_T = \frac{2 e^{j kl}}{2 \cos kl + j \left( \frac{1}{m} + m \right) \sin kl} A_I. \quad (21)$$

On remarque dans ce cas que les amplitudes des ondes réfléchie et transmise dépendent de  $kl$ , donc de la fréquence et de la longueur de la chambre d'expansion. Comme précédemment, on détermine l'indice de perte de transmission

$$L_{TL} = 10 \log \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( m - \frac{1}{m} \right)^2 \sin^2 kl \right] \quad (22)$$

qui est une fonction périodique de  $kl$  se répétant tous les  $\pi$  radians et où  $m = S_2/S_1$  est le rapport d'expansion. La perte de transmission est nulle quand  $kl$  est un multiple de  $\pi$ . Il est intéressant d'interpréter le phénomène sur la base des longueurs d'onde dans la chambre, en considérant la relation

$$kl = \frac{2\pi l}{\lambda}.$$



*Fig. 3 – Longueur de la chambre pour une perte de transmission maximum (d'après Dowling et Ffowcs Williams [1]).*

L'atténuation est nulle pour des longueurs de chambre multiples de  $\lambda/2$ . Au contraire, elle est maximum quand la longueur de la chambre est un *multiple impair* de  $\lambda/4$ , comme l'illustre la figure 3. La périodicité de l'indice de perte de transmission se retrouve sur l'échelle des fréquences avec une période de  $c/2l$

$$L_{TL} = 0 \text{ dB} \quad \text{quand} \quad f = 0, \frac{c}{2l}, \frac{c}{l}, \frac{3c}{2l}, \frac{2c}{l}, \dots, \frac{nc}{2l}, \dots$$

$$L_{TL} \text{ maximum} \quad \text{quand} \quad f = \frac{c}{4l}, \frac{3c}{4l}, \frac{5c}{4l}, \dots, \frac{(2n-1)c}{4l}, \dots$$

Les performances des silencieux en fonction du rapport d'expansion  $m$  sont illustrées par la figure 4.

En pratique, les valeurs d'atténuation sont en bon accord avec la formule (22) qui reste valide tant que la plus grande dimension transversale reste approximativement inférieure à  $0,8\lambda$ . Les performances ne sont pas affectées par un écoulement stationnaire jusqu'à une vitesse de 35 m/s. On devra tenir compte de la température de fonctionnement qui modifie sensiblement la vitesse du son utilisée dans les calculs

$$c = 345 \sqrt{\frac{\theta + 273}{295}},$$

avec  $\theta$  la température en °C dans le silencieux (dans le cas de l'air).

Il est possible d'utiliser deux ou plusieurs chambres d'expansion en série pour augmenter l'indice de perte de transmission. Toutefois, l'utilisation de trois chambres n'apporte que peu d'amélioration par rapport à deux chambres. La figure 5 montre l'influence des conditions de montage de deux chambres d'expansion identiques. En particulier, le  $L_{TL}$  croît avec la longueur du tube de connection, mais quand celui-ci est égal à  $l$  ou à un multiple de  $l$ , la plage de fréquence où  $L_{TL} \approx 0 \text{ dB}$  est plus large.

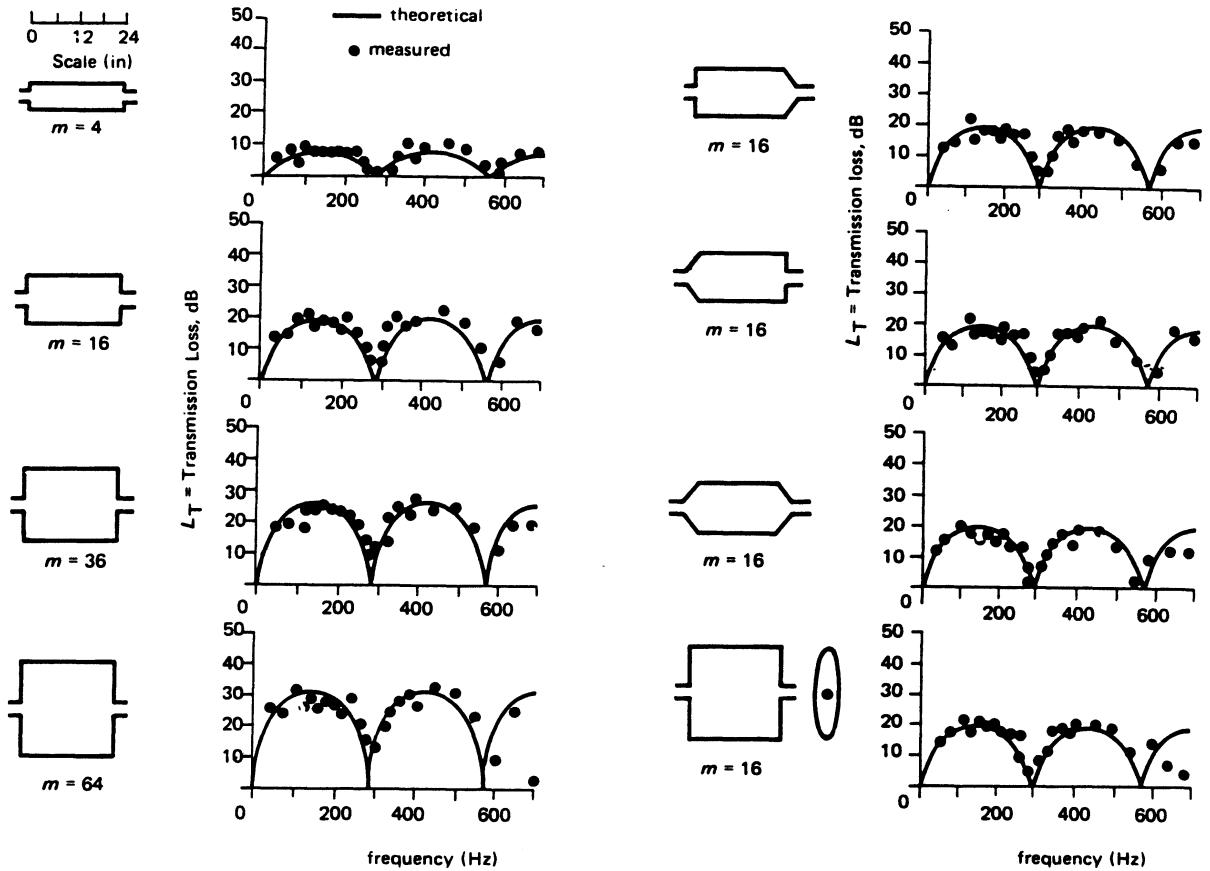


Fig. 4 – Influence du rapport d'expansion  $m$  et de la forme de la chambre du silencieux : comparaison entre la théorie (équation 22) et l'expérience (d'après Davis et al [4]).

#### 4 RESONATEUR DE HELMHOLTZ

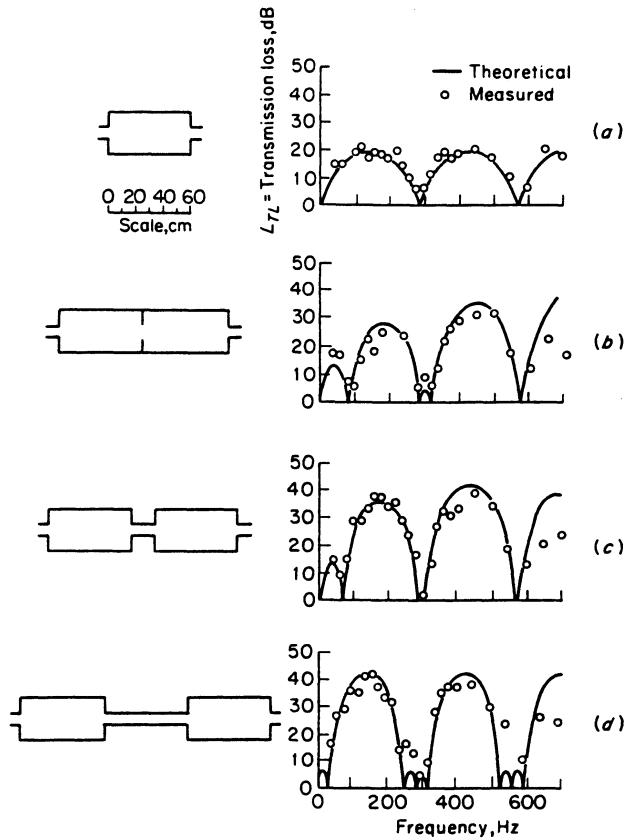
Un résonateur de Helmholtz est constitué d'un tube court de section  $S$  nommé col qui communique sur une cavité de volume  $V$  (voir figure 6).

A l'extrémité libre du col, une pression acoustique  $p$  va produire des fluctuations de masse  $Q$  dans la cavité (en kg/s). Nous allons rechercher la relation qui existe entre  $p$  et  $Q$ . Dans la cavité, les fluctuations de masse correspondent à des fluctuations de densité

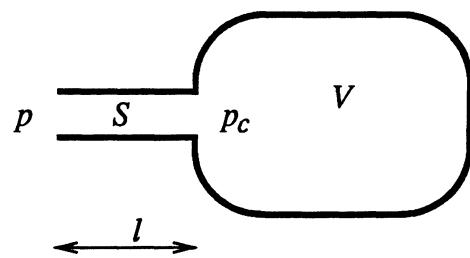
$$Q = V \frac{\partial \rho}{\partial t} = j \omega \rho V.$$

D'après cette équation, la pression acoustique dans la cavité est

$$p_c = c^2 \rho = \frac{c^2 Q}{j \omega V}. \quad (23)$$



*Fig. 5 – Indices de perte de transmission dans le cas de deux chambres d'expansion de rapport  $m = 16$  comparés à l'utilisation d'une seule (d'après Davis et al [4]).*



*Fig. 6 – Résonateur de Helmholtz.*

En faisant l'hypothèse que les dimensions sont bien inférieures à la longueur d'onde, le volume d'air contenu dans le col de longueur  $l$  du résonateur se comporte comme une masse incompressible  $M = \rho_0 l S$ , tandis que le volume d'air dans la cavité agit comme un

ressort. On peut ainsi écrire l'équation dynamique

$$p - p_c = \rho_0 l \frac{\partial u}{\partial t} = j \omega \rho_0 l u. \quad (24)$$

Par ailleurs, la continuité des débits

$$\rho_0 u S = V \frac{\partial \rho}{\partial t} = Q$$

montre que la vitesse particulière  $u$  dans le col peut s'exprimer en fonction des fluctuations de masse dans la cavité

$$u = \frac{Q}{\rho_0 S},$$

ce qui permet d'obtenir

$$p - p_c = \frac{j \omega l Q}{S}. \quad (25)$$

En utilisant dans cette équation l'expression (23) de la pression dans la cavité, on obtient la relation cherchée

$$p = \left[ \frac{c^2}{j \omega V} + \frac{j \omega l}{S} \right] Q = \left[ \omega^2 - \frac{c^2 S}{V l} \right] \frac{j l Q}{\omega S}.$$

Écrite sous la forme

$$Q = \frac{-j \omega p}{\frac{l}{S} \left[ \omega^2 - \frac{c^2 S}{V l} \right]}, \quad (26)$$

cette relation montre qu'il s'agit d'un système qui possède une fréquence de résonance pour  $\omega = \omega_0 = \sqrt{c^2 S / V l}$  dans le voisinage de laquelle de petites fluctuations de pression à l'entrée du col produisent des fluctuations de masse importantes à l'intérieur de la cavité.

Dans l'analyse précédente, l'air vibre dans le col comme un piston de masse  $M = \rho_0 l S$ . Cependant, l'air en mouvement dans le col entraîne une partie du fluide extérieur et la masse extérieure qui doit être prise en compte pour le calcul est plus importante. On résout le problème en apportant une correction de longueur de col. Pour un tube circulaire dont la longueur est bien plus grande que son rayon  $a$ , il faut pour une extrémité augmenter la longeur de  $\Delta l = 0,61a$  pour un orifice sans rebord ou de  $\Delta l = 0,82a$  pour un orifice avec rebord ou débouchant sur un baffle [2]. Pour un résonateur de Helmholtz comme celui qui est représenté sur la figure 6, la longueur effective du col est  $l' = l + \Delta l_1 + \Delta l_2$ , où  $\Delta l_1$  est la correction d'extrémité de la partie connectée à la cavité qui peut être considérée comme une terminaison bafflée et  $\Delta l_2$  est la correction de l'extrémité débouchant sur l'extérieur (non bafflée), soit

$$l' = l + 0,82a + 0,61a = l + 1,43a.$$

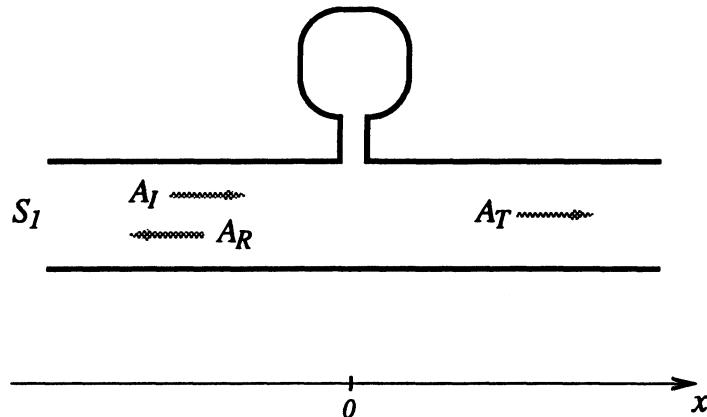
Dans le cas où la longueur du col est très inférieure au rayon ( $l \ll a$ ), la relation (due à Lord Rayleigh, 1878) est

$$l' = l + \frac{\pi}{2}a = l + 1,57a.$$

Cette dernière expression est aussi applicable pour un orifice pratiqué dans un résonateur à paroi mince ( $l' = \pi a/2$ ). Si la section du col n'est pas circulaire, il est usuel d'adopter l'approximation  $a \approx \sqrt{S/\pi}$ .

## 5 SILENCIEUX A RESONATEUR

Le phénomène de résonance d'une cavité communicant à l'extérieur par un orifice, est utilisé pour produire un silencieux. Un résonateur de Helmholtz est connecté à un tuyau, comme le montre la figure 7.



*Fig. 7 – Silencieux à résonateur de Helmholtz.*

Comme dans les cas précédents, on considère une onde incidente  $A_I$  que la présence du résonateur (en  $x = 0$ ) transforme en une onde réfléchie d'amplitude  $A_R$  et une onde transmise d'amplitude  $A_T$

$$p_1 = A_I e^{-j k x} + A_R e^{j k x}, \quad \text{pour } x < 0, \quad (27a)$$

$$p_2 = A_T e^{-j k x}, \quad \text{pour } x > 0. \quad (27b)$$

La pression  $p$  à l'entrée du col du résonateur, en  $x = 0$ , est

$$p = A_I + A_R = A_T. \quad (28)$$

En considérant le volume devant l'entrée du col du résonateur, on écrit la relation exprimant la continuité des débits à travers l'enveloppe qui le délimite (cf. relation 8)

$$\rho_0 S_I u_1 = \rho_0 S u + \rho_0 S_1 u_2,$$

où le premier terme est le débit à travers la section du tuyau à gauche du col qui correspond à la somme du débit dans le col (avec  $S$  la section du col et  $u$  la vitesse de la masse du fluide dans le col) et à travers la section à droite du col. En exprimant les vitesses  $u_1$  et  $u_2$  à partir des équations (27) et en posant la vitesse de la masse du fluide dans le col  $u = Q/\rho_0 S$ , on obtient

$$\frac{S_1}{c} (A_I - A_R) = Q + \frac{S_1}{c} A_T. \quad (29)$$

$Q$  est remplacé par  $-j\omega Sp/l(\omega^2 - \omega_0^2)$  en utilisant l'équation (26) et les équations (28) permettent de remplacer  $p$  et  $A_R$ , pour obtenir finalement l'amplitude de l'onde transmise

$$A_T = \frac{A_I}{1 - j \frac{\omega c S}{2S_1 l(\omega^2 - \omega_0^2)}} = \frac{A_I}{1 - j \frac{c S}{2\omega_0 S_1 l \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}},$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$A_T = \frac{A_I}{1 - j \left[ 2\beta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^{-1}}, \quad (30)$$

où  $\beta = cS_1/\omega_0 V$  est une grandeur sans dimension qui représente la réactance du résonateur [3]. L'indice de perte de transmission  $L_{TL} = 10 \log(S_1 |A_I|^2 / S_2 |A_2|^2)$  s'obtient à partir de l'équation précédente

$$L_{TL} = 10 \log \left[ 1 + \frac{1}{4\beta^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \right]. \quad (31)$$

L'atténuation la plus importante est obtenue autour de la fréquence de résonance comme le montrent les exemples de la figure 8. Pour que la formule (31) conserve sa validité, il faut que les dimensions du résonateur restent inférieures à  $\lambda/10$  dans toute la gamme de fréquence considérée.

Pour déterminer la fréquence de résonance  $\omega_0$ , la correction appliquée à la longueur du col du résonateur correspond à deux orifices bafflés, soit  $l' = l + 2(0,82)a = l + 1,64a$ .

L'équation (31) montre que la perte de transmission présente une valeur infinie à la fréquence de résonance  $\omega_0$ . En pratique, il y aura toujours une dissipation de l'énergie acoustique dans le col du résonateur. Dans ce cas l'indice de perte de transmission est donné par la relation [3]

$$L_{TL} = 10 \log \left[ 1 + \frac{1 + 4\alpha}{4\alpha^2 + 4\beta^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \right], \quad (32)$$

avec la résistance du résonateur (sans dimension)  $\alpha = S_1 R_s / \rho_0 c S$ , où  $R_s$  est la résistance acoustique (en  $\text{Ns/m}^3$ ). La perte de transmission maximale à la fréquence de résonance dépend seulement du terme d'amortissement :

$$L_{TL}(\omega = \omega_0) = 10 \log \left( 1 + \frac{1}{2\alpha} \right)^2.$$

Dans une réalisation industrielle, la dissipation dans le col sera recherchée pour élargir la plage d'atténuation autour de la fréquence de résonance (comme le montre la figure 9) et limiter les tropes fortes amplitudes à l'intérieur de la cavité. Un matériau poreux sera disposé dans le col (protégé par un tissus métallique ou de la tôle perforée) et la résistance acoustique  $R_s$  dépendra de sa résistance spécifique à l'écoulement de l'air (des formules de calcul sont données dans la référence [5]).

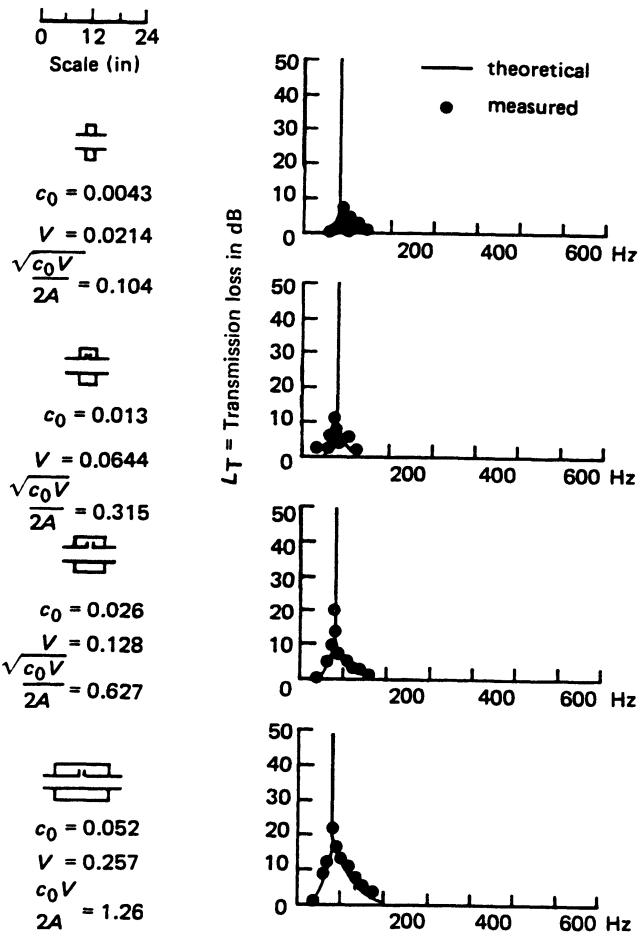


Fig. 8 – Comparaison entre la théorie (équation 31) et l’expérimentation pour différentes formes de silencieux à résonateur possédant la même fréquence de résonance :  $A$  est la section du conduit ( $S_1$  dans le texte) et  $c_0 = S/l$  (d’après Davis et al [4]).

## 6 SILENCIEUX DISSIPATIFS

Ils comportent à l’intérieur des produits absorbants tels que de la laine de verre. Le modèle le plus simple est un conduit droit dont les faces intérieures sont revêtues d’absorbants sans changement de section intérieure du conduit (figure 10).

Dans le conduit, la pression s’écrit  $p = A_I \exp(-jkx)$  pour  $x < 0$ ,  $p = A_T \exp(-jkx)$  pour  $x > l$  et dans la partie revêtue de matériaux absorbants

$$p = A_I e^{-j k x} e^{-\frac{\sigma}{2} x}, \quad \text{pour } 0 < x < l, \quad (33)$$

où  $\exp(-\frac{\sigma}{2} x)$  est l’atténuation en amplitude en fonction de la distance de propagation dans le conduit dissipatif à la fréquence considérée. L’amplitude transmise se déduit im-

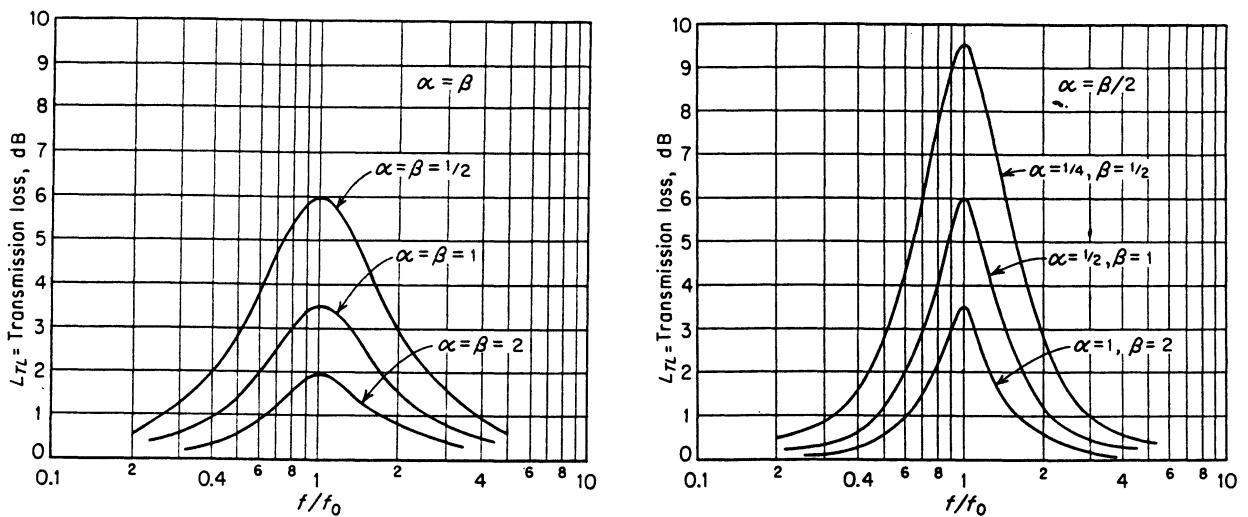


Fig. 9 – Perte de transmission autour de la fréquence de résonance pour un silencieux à résonateur en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Le respect de la condition que la plus grande dimension ne dépasse pas la longueur d'onde ne permet pas à  $\beta$  de dépasser 0,5 (d'après Ingard, cité dans [3]).

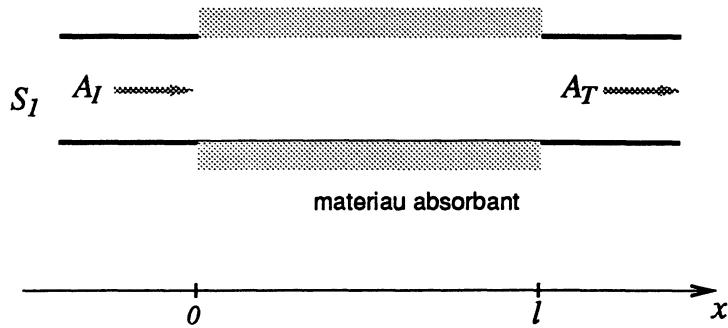


Fig. 10 – Silencieux droit dissipatif.

médiatement

$$A_T = A_I e^{-\frac{\sigma}{2}l},$$

d'où l'indice de perte par transmission

$$L_{TL} = 10 \log \frac{|A_I|^2}{|A_T|^2} = 10 \log e^{\sigma l} = 4,34 \sigma l. \quad (34)$$

$4,34\sigma$  représente donc l'atténuation de l'énergie par unité de longueur (en dB/m). Aux basses fréquences, cette grandeur peut être obtenue à partir d'une formule empirique donnée par Sabine [3]

$$4,34\sigma = 1,05 (\bar{\alpha}_{SAB})^{1,4} \frac{P}{S}, \quad [dB/m] \quad (35)$$

où  $\bar{\alpha}_{SAB}$  est le coefficient d'absorption moyen du matériau déterminé en salle réverbérante,  $P$  le périmètre intérieur des parties recouvertes de matériaux (en m) et  $S$  la section du conduit (en  $m^2$ ).

**Remarque:** Pour établir la relation (33), on a fait l'hypothèse à priori qu'il n'y avait pas d'onde réfléchie  $A_R$  dans le tronçon  $x < 0$  du conduit. Etablir la relation exacte en utilisant les équations de continuité de la pression et du débit.

Un autre modèle de silencieux dissipatif un peu plus complexe est constitué par une chambre d'expansion dont les parois internes sont revêtues de matériaux absorbants. Pour calculer la perte par transmission, il suffit de remplacer dans l'équation (17b) le nombre d'onde  $k$  par l'expression complexe  $k - j\sigma/2$  :

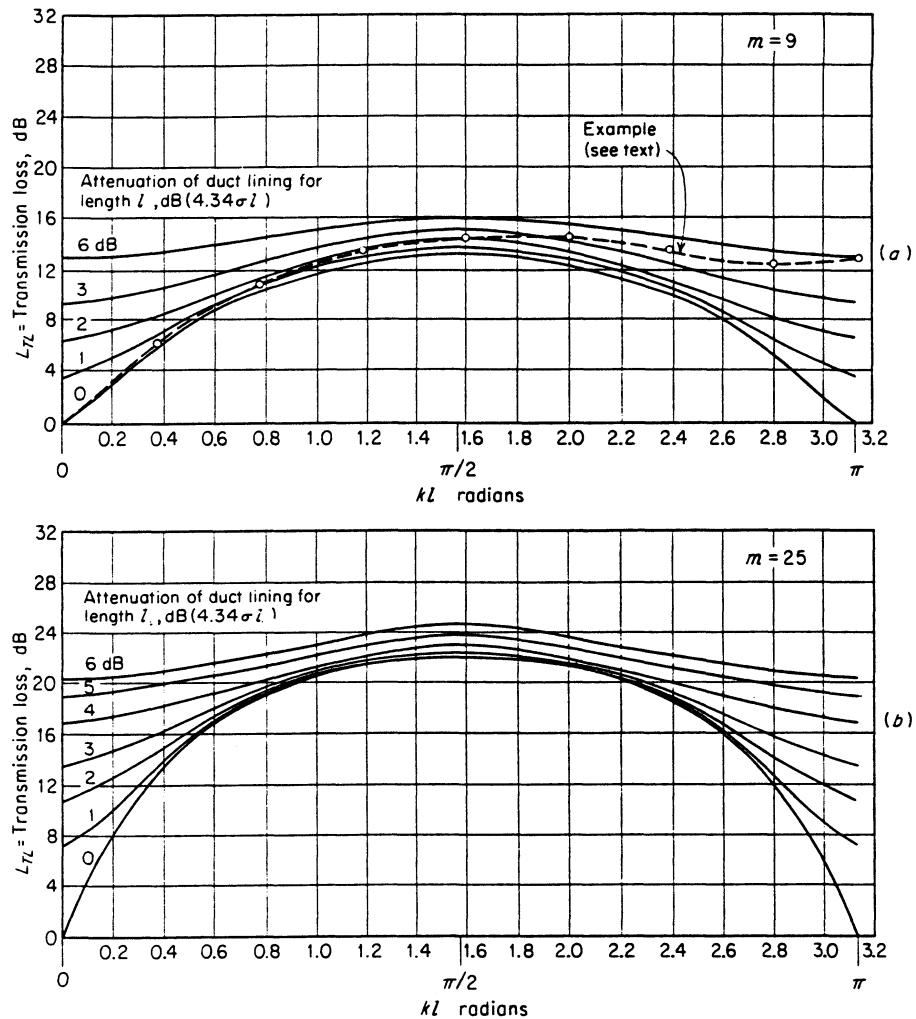
$$p = A'_I e^{-j k x} e^{-\frac{\sigma}{2} x} + A'_I e^{j k x} e^{\frac{\sigma}{2} x}, \quad 0 < x < l.$$

Les calculs utilisant cette équation (et les relations de l'Annexe B) conduisent à l'indice de perte par transmission

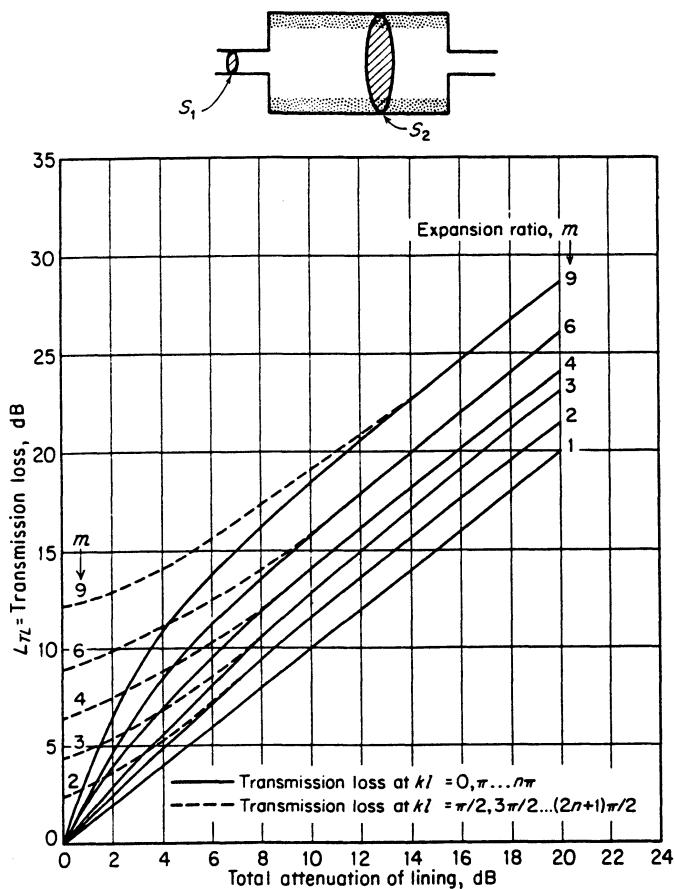
$$L_{TL} = 10 \log \left\{ \left[ \cosh \frac{\sigma l}{2} + \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \sinh \frac{\sigma l}{2} \right]^2 \cos^2 kl + \left[ \sinh \frac{\sigma l}{2} + \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \cosh \frac{\sigma l}{2} \right]^2 \sin^2 kl \right\}. \quad (36)$$

Pour déterminer le rapport d'expansion  $m = S_2/S_1$ , la section  $S_2$  à l'intérieur de la chambre d'expansion est mesurée sans tenir compte de la présence du matériau absorbant. L'étude de la formule (36) montre qu'elle présente, comme pour la chambre d'expansion sans absorbant, des maxima pour  $kl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2}$  et des minima pour  $kl = 0, \pi, \dots, n\pi$ . Ces derniers ne correspondent plus à une perte de transmission nulle mais dépendent de l'atténuation apportée par l'absorbant. La figure 11 illustre cette propriété pour deux valeurs du rapport d'expansion  $m$ .

En pratique,  $\sigma$ , qui est représenté ici comme un paramètre, va varier avec la fréquence. La perte de transmission d'un silencieux réel correspondrait davantage à la courbe pointillée de la figure 11 ( $m = 9$ ). Pour connaître la caractéristique de tels silencieux, il est seulement nécessaire de déterminer les valeurs de  $L_{TL}$  pour les maxima et les minima, en fonction de l'atténuation totale  $4,34\sigma l$  aux fréquences  $f = \frac{c}{4l}, \frac{3c}{4l}, \frac{5c}{4l} \dots$  (pour les maxima) et  $f = 0, \frac{c}{2l}, \frac{c}{l} \dots$  (pour les minima). On utilise pour cela des formes simplifiées de l'équation (36) pour  $kl = 0$  et  $kl = \pi/2$ , ou bien l'abaque de la figure 12.



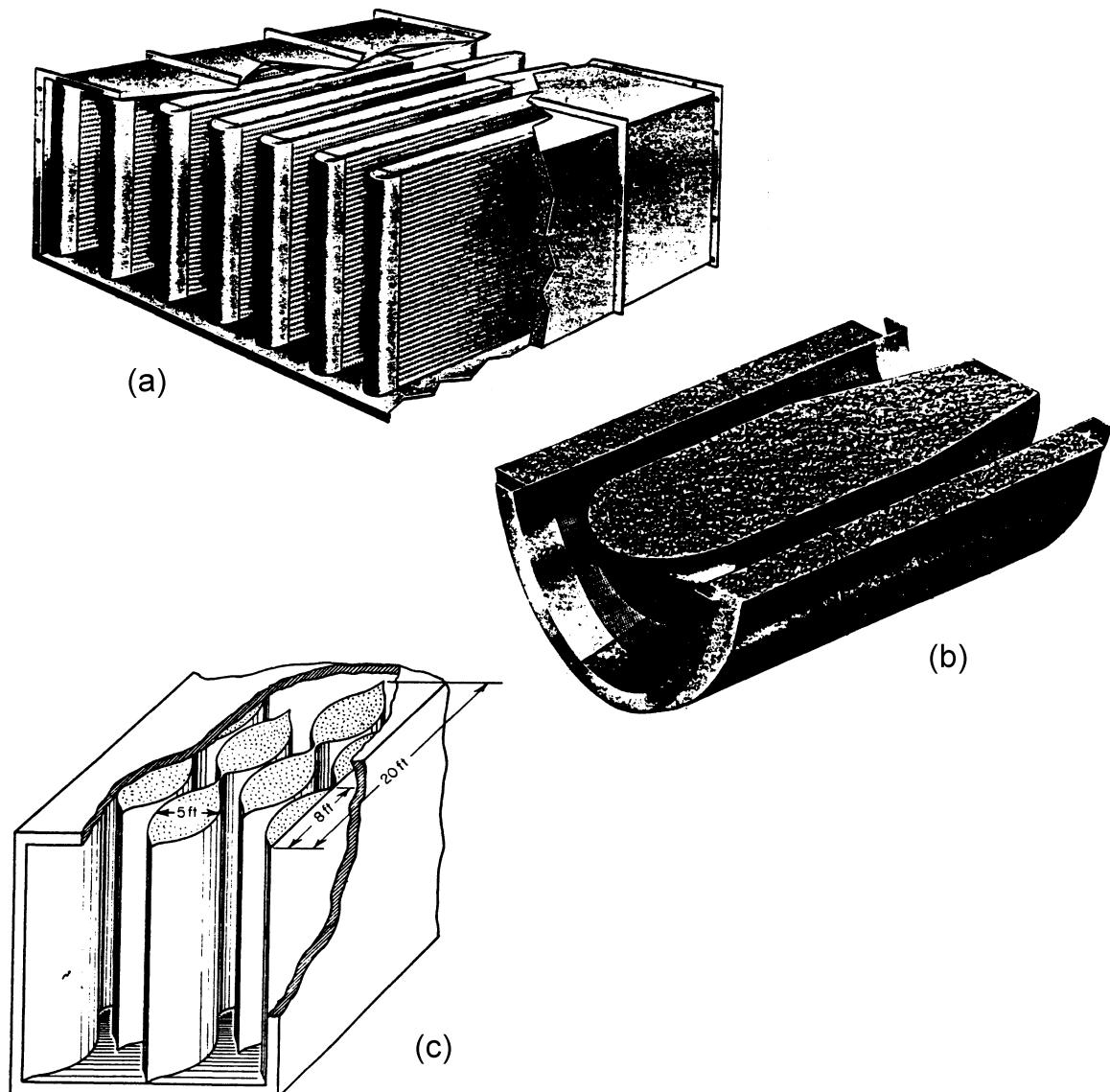
*Fig. 11 – Indice de perte de transmission en fonction de  $kl$  d'un silencieux dissipatif à chambre d'expansion pour  $m = 9$  et  $m = 25$ . Les différentes courbes correspondent à des valeurs d'atténuation  $4,34\sigma l$  en dB (d'après Embleton [3]).*



*Fig. 12 – Indice de perte de transmission pour un silencieux dissipatif à chambre d'expansion en fonction du rapport d'expansion  $m$  et de l'atténuation totale dans la chambre 4,34 $\sigma l$  dB. Les courbes en traits continus correspondent aux minima et les courbes en traits pointillés correspondent aux maxima (d'après Embleton [3]).*

## 7 SILENCIEUX INDUSTRIELS

Les silencieux sont souvent employés dans les réalisations industrielles courantes dont l'insonorisation devient de plus en plus nécessaire: ventilation, admission et échappement de turbines et de compresseurs, four de combustion, automobile ... Dans le cas de réalisation de capotages pour réduire le rayonnement sonore des machines, des silencieux sont également utilisés pour traiter les ouvertures nécessaires à leur fonctionnement (orifices de ventilation par exemple). Les silencieux sont généralement classés en deux grandes catégories : les silencieux dissipatifs et les silencieux réactifs.



*Fig. 13 – Réalisations industrielles de silencieux dissipatifs.*

## Silencieux dissipatifs

L'énergie en provenance de la source est dissipée par la présence d'un matériau acoustique absorbant. Ils possèdent en général des caractéristiques d'atténuation large bande et sont adaptés pour traiter les cas mettant en jeu des sources à spectre étendu (bruit des machines, bruit de jet...) mais également les cas où un spectre bande étroite varie sur une gamme étendue de fréquences avec les conditions de fonctionnement de la source. Il existe des silencieux dissipatifs qui ne modifient pas la forme intérieure des conduits mais dont les parois sont simplement constituées de matériaux absorbants. Plus souvent, la surface du matériau en contact avec le fluide est augmentée (cf équation 35) par l'utilisation de baffles parallèles (voir figure 13a) ou de cylindres concentriques (figure 13b). Toutefois, l'efficacité de ces systèmes décroît en hautes fréquences ou les *rayons* acoustiques traversent plus facilement les silencieux. Pour y remédier, des géométries plus élaborées sont mises en œuvre (figure 13c). Aux basses fréquences, l'efficacité du silencieux dépend essentiellement de l'épaisseur du matériau acoustique, dont le coefficient d'absorption  $\bar{\alpha}_{SAB}$  croît avec cette épaisseur jusqu'à ce qu'elle atteigne le quart de la longueur d'onde. L'efficacité d'un silencieux à absorbant dépend du sens de propagation du son par rapport au sens de l'écoulement du fluide. L'atténuation augmente quand les ondes se propagent dans le sens opposé à l'écoulement et diminue quand elles se propagent dans le même sens. Plusieurs mécanismes contribuent à cette tendance, mais l'effet principal est du au fait que l'écoulement modifie le nombre d'alternances de pression (ou de cycles) en contact avec le matériau. L'atténuation est multipliée ainsi par un facteur  $1/(M + 1)$ , où  $M$  est la vitesse de l'écoulement exprimée en nombre de Mach ( $M$  est négatif quand l'onde sonore et l'écoulement se propagent en sens opposés). D'autres facteurs dépendant des techniques de construction font que les caractéristiques de ces silencieux ne sont pas réversibles et que leur atténuation doit être déterminée en mode direct et en mode inverse.

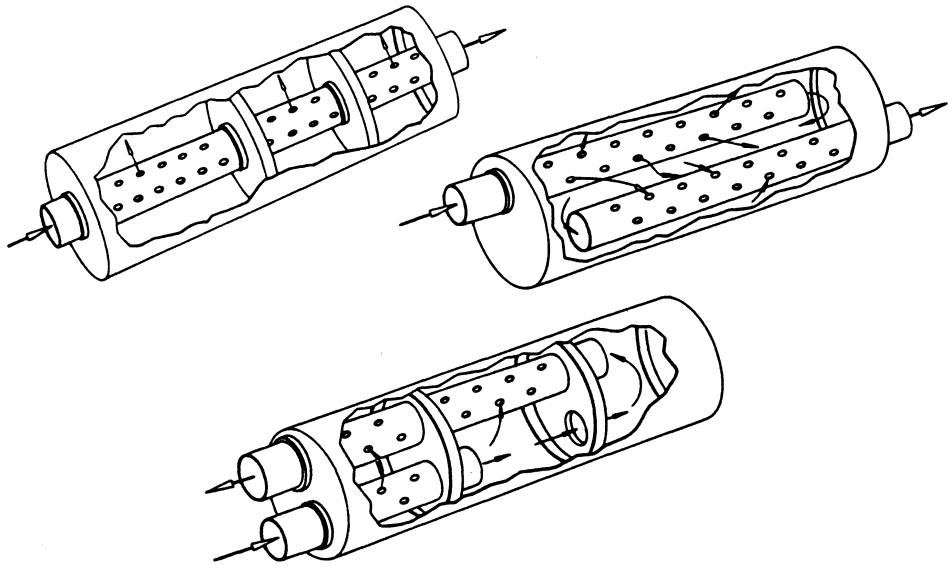
## Silencieux réactifs

Leur performances sont déterminées principalement par leur géométrie et la perte de transmission provient de la modification de l'impédance dans laquelle va débiter la source acoustique. Cette famille est représentée par les silencieux à résonateur et les silencieux à une ou plusieurs chambres d'expansion, dont des exemples de réalisations industrielles sont représentés figure 14.

La distinction entre silencieux dissipatifs et silencieux réactifs est souvent artificielle car ces derniers peuvent comporter des matériaux absorbants dans le col des résonateurs ou dans les chambres d'expansion. Des vitesses d'écoulement importantes peuvent créer dans les silencieux réactifs des bruits de turbulence.

## 8 TERMINAISONS

Dans la détermination de l'indice de perte par transmission, on a considéré que l'onde en sortie du silencieux se propageait sans réflexion dans un conduit infini. Ce qui revient à dire que l'impédance de l'extrémité correspond à l'impédance caractéristique  $\rho_0 c$ . Dans la réalité, le conduit de sortie débouche sur l'extérieur.



*Fig. 14 – Réalisations industrielles de silencieux réactifs (d'après Embleton [3]).*

### Tuyau fini

Son comportement peut être représenté par un changement de section dont le rapport  $m = S_2/S_1$  devient très grand. Les équations (13) et (14) de l'amplitude de l'onde réfléchie et transmise  $A_R = A_I(1 - m)/(1 + m)$  et  $A_T = 2A_I/(1 + m)$  se transforment quand  $m$  devient très grand en

$$A_R \approx -A_I \quad \text{et} \quad A_T \approx \frac{2A_I}{m}. \quad (37)$$

L'amplitude de l'onde transmise à l'extérieur est très faible et l'onde réfléchie est sensiblement de même amplitude que l'onde incidente mais en opposition de phase, créant une onde stationnaire dans le conduit

$$p \approx A_I (e^{-jkx} - e^{jkx}) = -2j A_I \sin kx, \quad (38a)$$

$$u = \frac{-1}{j\rho c k} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{A_I}{\rho_0 c} (e^{-jkx} + e^{jkx}) = 2 \frac{A_I}{\rho_0 c} \cos kx. \quad (38b)$$

A l'extrémité du conduit ( $x = 0$ ), la pression est partiellement nulle et la vitesse particulaire est maximale. L'impédance à l'extrémité est donc nulle :  $Z = p/u \approx 0$ . Ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de puissance qui est transmise à l'extérieur

$$W = S I = \frac{S}{2} \operatorname{Re}\{pu^*\} = \frac{S}{2} \operatorname{Re}\{Z\} |u|^2 = 0.$$

Ce résultat ne donne pas une très bonne description de la réalité où l'orifice du tube vibrant à la vitesse maximale du conduit va rayonner dans l'espace comme un piston. Il

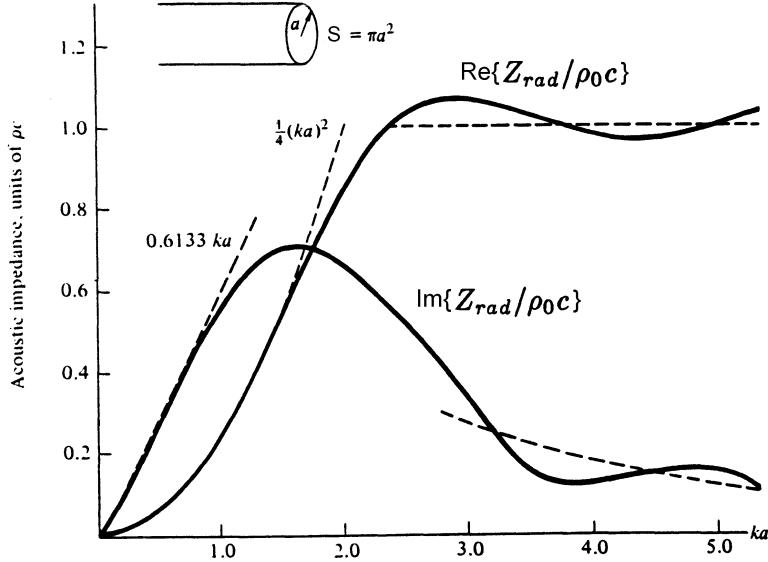


Fig. 15 – Impédance de rayonnement réduite (partie réelle et partie imaginaire) de l'orifice d'un tuyau non bâflé de rayon  $a$  en fonction de  $ka$  (d'après Levine et Schwinger [6]).

trahit la limite de validité de notre modèle monodimensionnel pour traiter ce problème. L'impédance de rayonnement de l'orifice est en réalité

$$Z_{\text{rad}} = \frac{p}{u} \quad \text{pour } x = 0, \quad (39)$$

et la puissance rayonnée

$$W = S I = \frac{S}{2} \text{Re}\{Z_{\text{rad}}\} |u|^2.$$

Les équations de continuité en  $x = 0$

$$\begin{aligned} A_I + A_R &= A_T, \\ S_1 \frac{A_I}{\rho_0 c} - S_1 \frac{A_R}{\rho_0 c} &= S_1 \frac{A_T}{Z_{\text{rad}}}, \end{aligned}$$

conduisent aux expressions de  $A_R$  et  $A_T$  en fonction de l'impédance de rayonnement de l'orifice

$$A_R = \frac{Z_{\text{rad}}/\rho_0 c - 1}{Z_{\text{rad}}/\rho_0 c + 1} A_I, \quad (40)$$

$$A_T = \frac{2 Z_{\text{rad}}/\rho_0 c}{Z_{\text{rad}}/\rho_0 c + 1} A_I. \quad (41)$$

Si  $Z_{\text{rad}}/\rho_0 c \ll 1$ , ces relations conduisent aux résultats décrits par les relations (37), mais dans le cas contraire, l'amplitude transmise peut ne pas être négligeable. Les résultats obtenus par Levine et Schwinger [6] fournissent l'impédance de rayonnement de l'orifice d'un tuyau circulaire non bâflé de rayon  $a$  animé par une vitesse uniforme.

Les courbes de la figure 15 représentent l'évolution de la partie réelle et de la partie imaginaire en fonction de  $ka$ . La limite de validité de notre modèle unidimensionnel impose  $\lambda > 2a$ , c'est à dire  $ka < \pi$ . La figure 15 montre que dans la gamme des fréquences considérées, on trouve des "hautes fréquences" ( $ka > 2$ ) où l'énergie incidente est presque totalement transmise et rayonnée ( $\text{Re}\{Z_{rad}/\rho_0c\} \approx 1$ ) et des "fréquences moyennes" ( $ka \approx 1$ ) où une moitié de l'énergie est réfléchie et l'autre rayonnée. Dans les "basses fréquences" ( $ka < 1$ ), on peut adopter l'approximation  $Z_{rad}/\rho_0c \approx (ka)^2/4 + j 0,61 ka$  ( $Z_{rad}/\rho_0c \approx (ka)^2/2 + j 0,82 ka$  pour un orifice débouchant sur un baffle). Si on cherche à bien rayonner une fréquence de 100 Hz (ce qui n'est pas le but pour un silencieux), il faudra que  $ka$  soit supérieur à 2 donc que le tube ait un diamètre de  $2a > 2\text{m}$ .

### Conduit de section variable

Soit un conduit de section  $S(x)$  qui varie en fonction de la distance axiale. Si le diamètre du conduit est petit en comparaison de la longueur d'onde et si son évolution est lente en fonction de la distance, la composante de la vitesse particulière dans la direction radiale peut être négligée (figure 16).

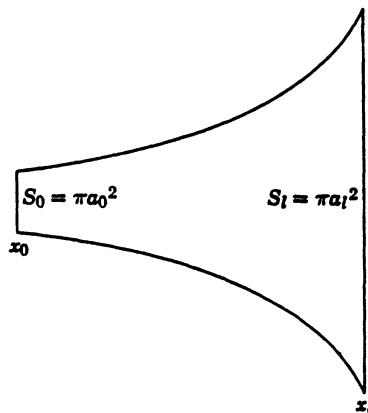


Fig. 16 – Pavillon exponentiel.

L'approche monodimensionnelle peut être conservée : nous écrivons

- l'équation linéarisée de conservation de la masse

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial(Su)}{\partial x},$$

- l'équation linéarisée de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

En utilisant  $p = c^2 \rho$ , on obtient l'équation d'onde de Webster (1919) pour les pavillons

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{S}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (42)$$

Dans certains cas, cette équation admet des solutions simples. Par exemple, pour un pavillon exponentiel  $S(x) = S_0 \exp(\alpha x)$  et

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + S \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \alpha S_0 e^{\alpha x} \frac{\partial p}{\partial x} + S_0 e^{\alpha x} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

En adoptant la notation complexe  $\partial^2 p / \partial t^2 = -\omega^2 p$ , on aboutit à l'équation modifiée

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0, \quad (43)$$

qui a pour solution

$$p = e^{-\frac{\alpha}{2}x} [A_I e^{-j\gamma x} + A_R e^{j\gamma x}] = \frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{S}} [A_I e^{-j\gamma x} + A_R e^{j\gamma x}], \quad (44)$$

où  $\gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$ , avec  $k = \omega/c$ .

### Pavillon infini

Pour étudier la propagation, on considère un pavillon infini dans lequel une onde incidente se propage sans réflexion

$$p = A_I e^{-\frac{\alpha}{2}x} e^{-j\gamma x}. \quad (45)$$

Plusieurs cas sont à considérer en fonction de  $\gamma$  :

- a) Dans les "hautes fréquences", quand  $k = \frac{\omega}{c} \gg \frac{\alpha}{2}$ ,  $\gamma$  correspond à  $k$  et la pression est  $p = A_I e^{-\frac{\alpha}{2}x} e^{-jkx}$ . Cette loi de propagation est semblable à celle de l'onde plane si ce n'est que l'amplitude de la pression, du fait de l'élargissement du pavillon, décroît proportionnellement à la racine carrée de la section (c'est à dire proportionnellement au rayon).
- b) Dans le cas où  $k > \frac{\alpha}{2}$ , l'onde se propage dans le pavillon avec une longueur d'onde  $2\pi/\sqrt{k^2 - \alpha^2/4}$  plus importante que celle de l'onde plane à la même fréquence, jusqu'à ce que  $k = \frac{\alpha}{2}$  où la pression dans le pavillon ne présente plus de déphasage en fonction de la distance axiale  $x$
- c) Dans les "basses fréquences", quand  $k < \frac{\alpha}{2}$ , le facteur  $\gamma$  devient imaginaire en considérant que  $j = -\sqrt{-1}$

$$\gamma = -j \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - k^2},$$

et la pression dans le pavillon est

$$p = A_I e^{-\frac{\alpha}{2}x} e^{-|\gamma|x}.$$

Il n'y a pas de propagation d'onde acoustique et l'amplitude de la fluctuation de pression décroît encore plus rapidement : on dit qu'on est en présence d'ondes évanescentes. La limite de ce phénomène dans les basses fréquences, quand  $k \ll \frac{\alpha}{2}$ , donne une pression  $p = A_I e^{-\alpha x}$  qui décroît proportionnellement avec l'augmentation de surface.

Intéressons nous à l'impédance dans le pavillon. La vitesse particulière calculée à partir de l'équation (45) de la pression

$$u = \frac{-1}{jk\rho_0 c} \frac{\partial p}{\partial x} = \left( \frac{\gamma}{k} - j \frac{\alpha}{2k} \right) \frac{A_I}{\rho_0 c} e^{-\frac{\alpha}{2}x} e^{-j\gamma x}, \quad (46)$$

permet d'obtenir l'impédance de l'onde dans le pavillon infini

$$Z = \frac{p}{u} = \frac{\rho_0 c}{\frac{\gamma}{k} - j \frac{\alpha}{2k}}. \quad (47)$$

Dans le cas des "hautes fréquences" ( $k \gg \frac{\alpha}{2}$ ), l'impédance  $Z$  tend vers l'impédance caractéristique du fluide  $\rho_0 c$ , comme pour le conduit à section constante. Dans le cas des "basses fréquences" ( $k < \frac{\alpha}{2}$ ), les ondes évanescentes ont une impédance purement imaginaire

$$Z = j \frac{\rho_0 c}{\frac{|\gamma|}{k} + \frac{\alpha}{2k}}. \quad (48)$$

La puissance transmise vers les  $x$  positifs

$$W = S I = \frac{S}{2} \operatorname{Re}\{Z\} |u|^2 = \frac{S}{2} \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{Z} \right\} |p|^2,$$

ne dépend que de la partie réelle de l'impédance. Dans les "hautes fréquences", elle tend vers  $S|p|^2/2\rho_0 c$ , comme pour l'onde plane. On note que la loi de variation de l'amplitude en  $S^{-\frac{1}{2}}$  fait qu'elle se conserve tout au long de  $x$ . Pour les ondes évanescentes ( $k < \frac{\alpha}{2}$ ), aucune puissance n'est transmise à travers le pavillon qui se comporte comme un filtre passe-haut: l'augmentation de section du conduit est trop rapide à l'échelle de la longueur d'onde pour propager une onde acoustique. Il est d'usage de définir la fréquence de coupure (pour  $k = \frac{\alpha}{2}$ ) du pavillon

$$f_c = \frac{c\alpha}{4\pi}. \quad (49)$$

### Pavillon fini

Le pavillon est utilisé pour rayonner une basse fréquence en augmentant la section de l'orifice. Le rayon de l'extrémité du pavillon de longueur  $L$  est  $a_L = a_0 e^{\frac{\alpha}{2}L}$ , où  $a_0$  est le rayon à l'entrée du pavillon. Il doit satisfaire à la condition  $ka_L \geq 2$  ( $Z_{rad} \approx \rho_0 c$ ) pour rayonner. La longueur  $L$  est déterminée de sorte que le rayon varie suffisamment lentement pour éviter la formation d'ondes évanescentes dans la gamme de fréquence considérée, c'est à dire que  $k > \frac{\alpha}{2}$ .

## 9 CARACTERISATION DES SILENCIEUX

Plusieurs grandeurs sont employées pour caractériser les performances des silencieux.

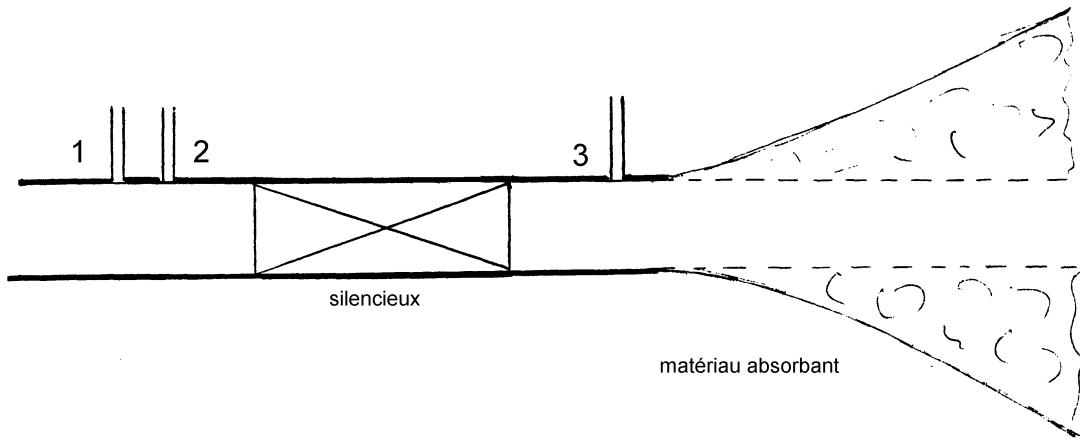


Fig. 17 – Détermination expérimentale de l'indice de perte de transmission.

### Perte de transmission

L'indice de perte de transmission se définit comme le rapport exprimé en décibel de la puissance acoustique incidente à l'entrée du silencieux sur la puissance acoustique transmise par le silencieux dans un conduit infini:

$$L_{TL} = 10 \log \frac{W_{\text{incidente}}}{W_{\text{transmise}}} = 10 \log \frac{S_I |A_I|^2}{S_T |A_T|^2}, \quad (50)$$

$A_I$  amplitude de l'onde plane incidente dans le conduit d'entrée de section  $S_I$ ,  $A_T$  amplitude de l'onde plane transmise dans le conduit de sortie de section  $S_T$ .

L'indice de perte de transmission est concept très utile pour la démarche analytique que nous avons suivie, il peut aussi se déterminer expérimentalement :

- a) En amont, séparation de l'amplitude de l'onde incidente  $A_I$  de celle de l'onde réfléchie  $A_R$ . Deux capteurs de pression sont montés en membrane affleurante aux abscisses  $x_1$  et  $x_2$  (voir figure 17)

$$\begin{aligned} p_1 &= A_I e^{-jkx_1} + A_R e^{jkx_1}, \\ p_2 &= A_I e^{-jkx_2} + A_R e^{jkx_2}. \end{aligned}$$

Pour éliminer le terme  $A_R$ , il suffit de multiplier la première expression par  $e^{jkx_2}$  et la seconde par  $e^{-jkx_1}$ . Par différence on obtient une expression de l'amplitude incidente

$$A_I = \frac{p_1 e^{jkx_2} - p_2 e^{jkx_1}}{e^{jk(x_2-x_1)} - e^{-jk(x_2-x_1)}} = \frac{p_1 e^{jkx_2} - p_2 e^{jkx_1}}{j 2 \sin k(x_2 - x_1)}, \quad (51)$$

et par suite

$$\begin{aligned} |A_I|^2 &= \frac{(p_1 e^{jkx_2} - p_2 e^{jkx_1})(p_1^* e^{-jkx_2} - p_2^* e^{-jkx_1})}{4 \sin^2 k(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{|p_1|^2 + |p_2|^2 - 2 \operatorname{Re}\{p_1 p_2^* e^{jk(x_2-x_1)}\}}{4 \sin^2 k(x_2 - x_1)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Pour une source d'excitation à large spectre (bruit), on remplace  $|p_1|^2$ ,  $|p_2|^2$  et  $p_1 p_2^*$  par des densités spectrales et interspectrale, mais une détermination par fréquence discrète est possible. Dans ce cas  $p_1 p_2^* = |p_1| |p_2| e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)}$  et l'équation précédente peut s'écrire

$$|A_I|^2 = \frac{|p_1|^2 + |p_2|^2 - 2 |p_1| |p_2| \cos[k(x_2 - x_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)]}{4 \sin^2 k(x_2 - x_1)}, \quad (53)$$

$\varphi_2 - \varphi_1$  est la différence de phase mesurée entre les deux capteurs de pression (en prenant le capteur 1 comme référence de phase). Cette méthode nécessite quelques précautions d'emploi :

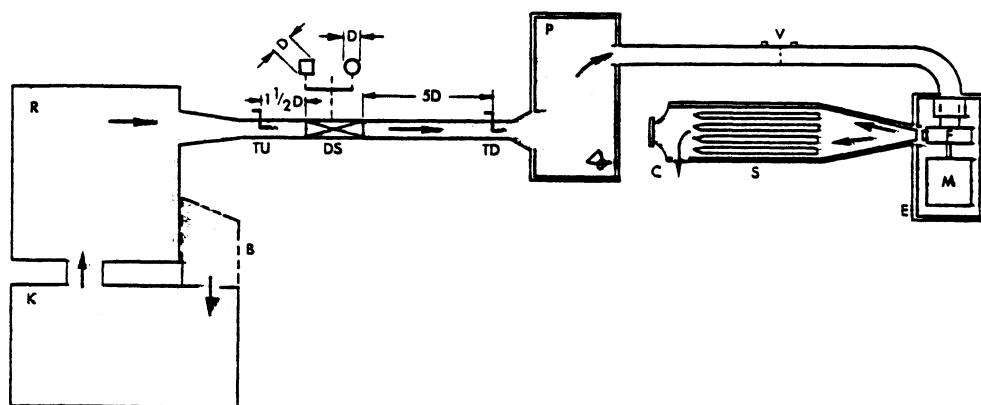
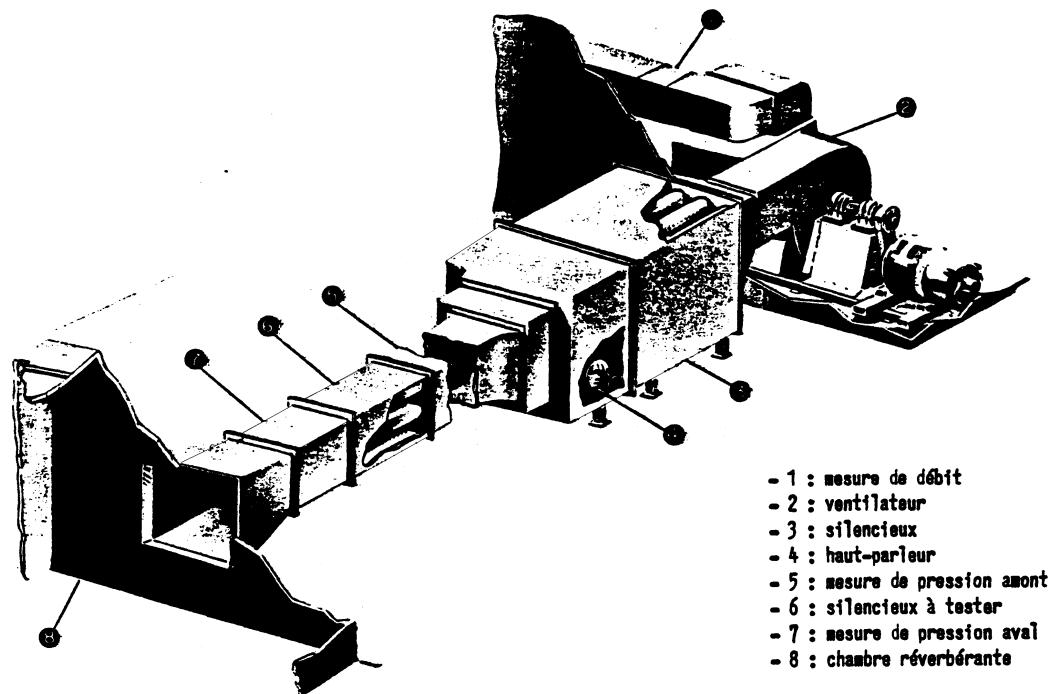
- Eviter pour des raisons de précision de travailler autour des fréquences correspondant à  $k(x_2 - x_1) = \{0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi\}$ .
  - La méthode repose sur la connaissance précise de la phase des pressions mesurées entre deux points dans une onde quasi-stationnaire: il est nécessaire de corriger l'erreur instrumentale entre les deux chaines de mesure.
- b) En aval, suppression des ondes réfléchies. Nous avons vu que la condition pour qu'une terminaison ne réfléchisse pas une onde est que son impédance corresponde à  $\rho_0 c$ . Deux solutions sont possibles: dissiper la totalité de l'énergie transmise ou adapter la section du conduit par un pavillon. En pratique, la meilleure solution est fournie par une combinaison des deux comme le montre la figure 17. L'onde transmise se mesure alors à l'aide d'un simple capteur de pression et l'indice de perte de transmission s'obtient par

$$L_{TL} = \frac{|p_1|^2 + |p_2|^2 - 2 |p_1| |p_2| \cos[k(x_2 - x_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)]}{4 |p_3|^2 \sin^2 k(x_2 - x_1)}, \quad (54)$$

où  $|p|/\sqrt{2}$  correspond à la pression efficace.

### Atténuation

C'est la différence de niveaux sonores (en dB) mesurés en deux points d'un silencieux, en faisant l'hypothèse que l'onde sonore se propage librement dans une seule direction. L'atténuation est surtout utilisée pour les silencieux dissipatifs possédant une distribution uniforme de matériaux absorbants dans leur longueur: la mesure est réalisée dans le silencieux lui-même par deux capteurs de pression (microphones) disposés à distance des extrémités. De cette mesure on déduit l'atténuation totale du silencieux ou l'atténuation par unité de longueur (en dB/m) en fonction de la vitesse d'écoulement (en mode direct et inverse).



*Fig. 18 – Banc d'essai pour tester les silencieux en mode direct (partie haute) et en mode inverse (partie basse).*

### *Perte par insertion*

Cette grandeur se définit comme la différence de niveaux sonores (en dB) ou de

puissance acoustique mesurés en un même emplacement entre une configuration où le silencieux est inséré dans la veine d'essai et une configuration où il est remplacé par un conduit rectiligne. C'est la méthode la plus facile à mettre en œuvre pour tous les types de silencieux et celle qui est généralement employée par les fabricants. Un ventilateur assure un débit d'air constant dans la veine d'essai et un haut-parleur génère un bruit blanc de niveau important. Les deux séries de mesure, avec et sans silencieux, consistent le plus souvent en des relevés de niveaux sonores dans une chambre réverbérante dans laquelle débouche l'extrémité de la veine d'essai (figure 18).

## ANNEXE A : Représentation des grandeurs acoustiques.

Les grandeurs physiques sont représentées parfois sous la forme de signaux temporels  $x(t)$ , mais souvent également par leur valeur quadratique moyenne quand ils sont stationnaires:

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) dt. \quad (A1)$$

C'est cette dernière grandeur qui est accessible à la mesure (sur une durée  $T$  finie). Sa racine carrée est la *valeur efficace* du signal (notée RMS dans la littérature anglaise). Cette valeur moyenne quadratique correspond naturellement à une grandeur énergétique. Elle est employée également pour représenter le produit moyen de deux grandeurs:

$$\langle x(t) y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) y(t) dt. \quad (A2)$$

Pour des calculs analytiques, on raisonne souvent sur des fréquences pures, et pour simplifier la *notation complexe* est employée pour représenter une variable périodique temporelle:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{x e^{j\omega t}\}, \quad x \in \mathcal{C}. \quad (A3)$$

Dans les calculs mettant en cause des opérations linéaires, on omet d'exprimer la dépendance temporelle et l'indication que seule la partie réelle représente la grandeur physique. On peut écrire les équivalences suivantes:

$$y(t) = \sum_i a_i x_i(t) \iff y = \sum_i a_i x_i \quad (A4)$$

$$y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} \iff y = j\omega x \quad (A5)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \iff y = \frac{x}{j\omega} \quad (A6)$$

avec  $y(t) \in \mathcal{R}$ ,  $y \in \mathcal{C}$  et  $y(t) = \operatorname{Re}\{y e^{j\omega t}\}$ .

Toutefois, il faut prendre des précautions pour les opérations quadratiques:

$$\langle x(t) y(t) \rangle = \langle \operatorname{Re}\{x e^{j\omega t}\} \operatorname{Re}\{y e^{j\omega t}\} \rangle, \quad (A7)$$

la notation  $\langle \rangle$  signifiant ici une moyenne sur une période  $2\pi/\omega$ . En écrivant  $\text{Re}\{z\} = (z + z^*)/2$ , l'équation (A7) devient

$$\begin{aligned}\langle x(t) y(t) \rangle &= \left\langle \frac{(x e^{j\omega t} + x^* e^{-j\omega t})}{2} \frac{(y e^{j\omega t} + y^* e^{-j\omega t})}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle xy^* + x^*y + xy e^{j2\omega t} + x^*y^* e^{-j2\omega t} \rangle.\end{aligned}\quad (A8)$$

Seules dépendantes du temps, les composantes  $\langle e^{j2\omega t} \rangle$  et  $\langle e^{-j2\omega t} \rangle$  s'annulent, d'où

$$\langle x(t) y(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{xy^*\}. \quad (A9)$$

## ANNEXE B : Sinus et cosinus hyperboliques.

Relations fondamentales:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ e^x &= \cosh x + \sinh x & e^{-x} &= \cosh x - \sinh x \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\end{aligned}$$

Fonctions de somme et de différence:

$$\begin{aligned}\sinh(a \pm b) &= \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b \\ \cosh(a \pm b) &= \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b\end{aligned}$$

Fonctions d'une variable imaginaire:

$$\sinh(jx) = j \sin x \quad \cosh(jx) = \cos x$$

Fonctions d'une variable complexe:

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm iy) &= \sinh x \cosh(iy) \pm \cosh x \sinh(iy) \\ &= \sinh x \cos y \pm j \cosh x \sin y \\ \cosh(x \pm iy) &= \cosh x \cosh(iy) \pm \sinh x \sinh(iy) \\ &= \cosh x \cos y \pm j \sinh x \sin y\end{aligned}$$

## Références

- [1] A.P. Dowling, J.E. Ffows Williams, *Sound and Sources of Sound*, Ellis Horwood, 1983.
- [2] A.D. Pierce, *Acoustics*, McGraw-Hill, 1981.
- [3] T.F.W. Embleton, "Mufflers", in *Noise and Vibration Control* (L.L. Beranek, ed.), McGraw-Hill, 1971.
- [4] D.D. Davies, G.M. Stokes, D. Moore, G.L. Stevens, "Theoretical and experimental investigation of mufflers with comments on engine-exhaust muffer design", NACA, Report n°1192, 1954.
- [5] D.A. Bies, "Acoustical properties of porous materials", in *Noise and Vibration Control* (L.L. Beranek, ed.), McGraw-Hill, 1971.
- [6] H. Levine, J. Schwinger, "On the radiation of sound from an unflanged circular pipe", Phys. Rev. 73 (1948), 386-406.

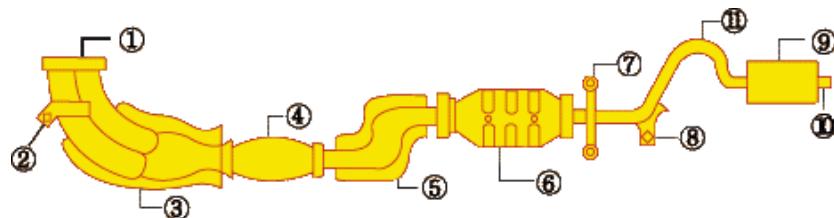


## ANNEXE - MODELISATION DES SYSTEMES SILENCIEUX

### Méthode de la matrice de transfert

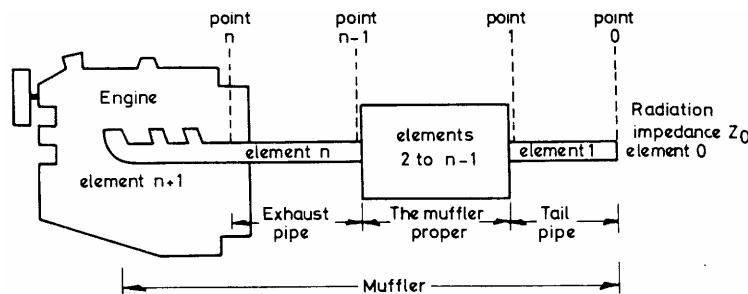
#### 1. Introduction

Un système silencieux est constitué d'un ensemble d'éléments mis en série : tuyaux cylindriques, chambres d'expansion, résonateurs, etc.



NO	Name of main function	The function of important
1	FLANGE	It is connected with flange. It means that it is connected with ex-manifold of engine with bolts. So be careful for degree of flange and welded spatter.
2	HOLDER EXHAUST SYSTEM	HOLDER EXHAUST SYSTEM is connected to engine with bolts
3,5	HEAT COVER and GLASS WOOL	In order to activate a catalytic action of C converter, reduce noise and warming effect of glass wool
4	BELLOWS	Improve durability of exhaust system by absorbing vibration of the bellows engine and reduce noisy
6	C/CONVERTER	This cleans exhaust gas and reduces noise
7,8	HANGER	hanger enables exhaust systems to be connected to the body.
9	RESONATOR	With the expansion of contacting surface, this part turns exhaust gas with high temperature and pressure into one with low temperature and pressure, which results in reducing the noise.
10	TAIL PIPE	This part is used for discharging exhaust gas outside (rear part) of car and reducing the noise.
-	DAMPER	This part reduces the noise by changing vibration in accordance with vibration features
-	SEALING and GASKET	These parts improve assembling where connection with corresponding parts is made and prevent leakage of exhaust gas.
-	Reinforcement	Improve durability by enforcement of stiffness on welding area

[http://www.sejongind.co.kr/homepage/English/RD/rd\\_3\\_1.htm](http://www.sejongind.co.kr/homepage/English/RD/rd_3_1.htm)



Chaque élément des schémas précédents peu constituer lui-même un système. L'idée est de représenter les caractéristiques de chaque élément par une matrice qui relie les grandeurs de sortie aux grandeurs d'entrée.

## 2. Méthodes des matrices de transfert

On définit une matrice de transfert permettant d'exprimer la pression  $p_1$  et le débit de masse  $Q_1 = \rho_1 S_1 u_1$  à l'entrée de l'élément en fonction des mêmes grandeurs  $p_2$  et  $Q_2 = \rho_2 S_2 u_2$  en sortie (bi-porte ou quadripôle)

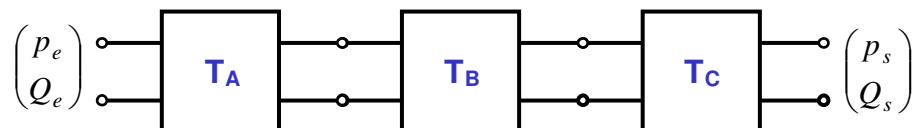
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} p_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$



Note : la masse volumique moyenne du gaz à l'entrée et à la sortie pourra être différente du fait des variations de température. Dans ce cas, la célérité des ondes devra aussi varier dans les différents éléments.

Un système silencieux décrit par une matrice  $\mathbf{T}$  pourra être représenté simplement à partir des matrices de transfert des éléments mis en série

$$\begin{bmatrix} p_e \\ Q_e \end{bmatrix} = \mathbf{T}_A \mathbf{T}_B \mathbf{T}_C \begin{bmatrix} p_s \\ Q_s \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} p_s \\ Q_s \end{bmatrix}$$



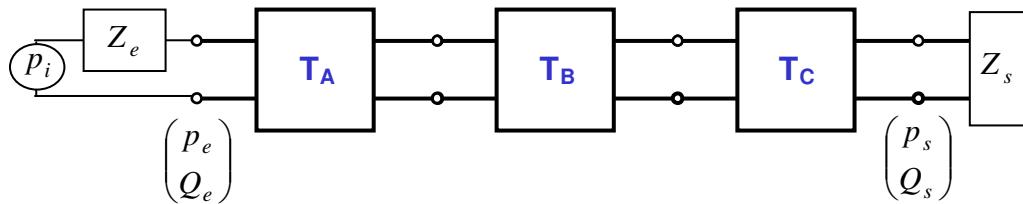
La source (caractérisée par une pression  $p_i$  et une impédance interne  $Z_i$ ) sera raccordée à l'entrée du système

$$p_i = p_e + Z_e u_e$$

et la charge en sortie du système sera représentée par une impédance qui permettra de fournir une relation entre les grandeurs acoustiques de sortie

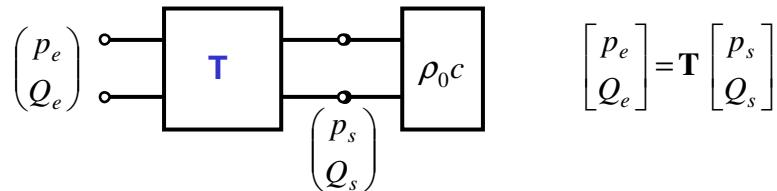
$$p_s = Z_s u_s$$

Remarque : l'expression usuelle  $Z = p/u$  de l'impédance acoustique est conservée ici mais on rencontre parfois la définition  $Z' = p/Q$  : on a alors  $Z = \rho_0 S Z'$ .



### 3. Pertes de transmission

Pour calculer les pertes de transmission de l'élément global dont la matrice de transmission est  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_A \mathbf{T}_B \mathbf{T}_C$ , on considère comme précédemment qu'il est raccordé sur l'impédance caractéristique du fluide  $Z_s = \rho_0 c$  (on considère aussi que la masse volumique  $\rho_0$  du gaz et sa célérité  $c$  ne change pas de l'entrée à la sortie).



Dans ces conditions la puissance de l'onde transmise en sortie peut s'exprimer par

$$W_s = S_s \frac{|p_s|^2}{2\rho_0 c}$$

et l'indice de perte de transmission s'écrit

$$D = 10 \log \frac{S_e |p_I|^2}{S_s |p_s|^2}$$

La pression incidente  $p_I$  (ne pas confondre avec la pression interne  $p_i$  de la source) s'exprime en utilisant les caractéristiques de l'onde plane quasi-stationnaire dans la section d'entré  $S_e$

$$\begin{aligned} p_e &= p_I + p_R \\ \rho_0 c u_e &= p_I - p_R = \frac{c}{S_e} Q_e \quad \Rightarrow \quad p_I = \frac{1}{2} \left( p_e + \frac{c}{S_e} Q_e \right) \end{aligned}$$

En exprimant  $p_e$  et  $u_e$  à l'aide de la matrice de transfert et en considérant

$$\begin{bmatrix} p_e \\ Q_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_s \\ Q_s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} p_e &= T_{11}p_s + T_{12}Q_s = \left[ T_{11} + \frac{S_s}{c} T_{12} \right] p_s \\ Q_e &= T_{21}p_s + T_{22}Q_s = \left[ T_{21} + \frac{S_s}{c} T_{22} \right] p_s \end{aligned}$$

où le débit de masse a été exprimé en fonction de la pression en utilisant l'impédance de sortie

$$Z_s = \frac{p_s}{u_s} = \rho_0 S_s \frac{p_s}{Q_s} = \rho_0 c$$

la pression incidente prend la forme

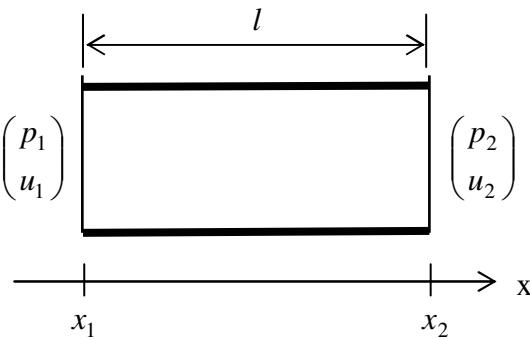
$$p_I = \frac{1}{2} \left( p_e + \frac{c}{S_e} Q_e \right) = \frac{1}{2} \left( T_{11} + \frac{S_s}{c} T_{12} + \frac{c}{S_e} T_{21} + \frac{S_s}{S_e} T_{22} \right) p_s$$

qui conduit à l'expression suivante de la perte de transmission

$$D = 10 \log \frac{S_e |p_I|^2}{S_s |p_s|^2} = 10 \log \frac{S_e \left| T_{11} + \frac{S_s}{c} T_{12} + \frac{c}{S_e} T_{21} + \frac{S_s}{S_e} T_{22} \right|^2}{4 S_s}$$

#### 4. Exemple pour un silencieux à chambre d'expansion

Pour utiliser la méthode des matrices de transfert pour calculer un silencieux à chambre d'expansion, la première étape consiste à calculer la matrice de transfert d'un conduit droit



Un élément de conduit droit est présenté dans la Figure ci-dessus. La pression et la vitesse dans le conduit droit de longueur  $l$  sont exprimées par ( $e^{j\alpha x}$  est utilisé) :

$$p(x) = A_I e^{-jkx} + A_R e^{jkx}, \quad u(x) = \frac{A_I}{\rho_0 c} e^{-jkx} - \frac{A_R}{\rho_0 c} e^{jkx},$$

où  $j = -\sqrt{-1}$ ,  $k = 2\pi f / c$  est le nombre d'onde acoustique. En considérant la pression et la vitesse à l'extrémité  $x = x_2$  du conduit

$$p_2 = A_I e^{-jkx_2} + A_R e^{jkx_2}, \quad u_2 = \frac{1}{\rho_0 c} (A_I e^{-jkx_2} - A_R e^{jkx_2})$$

il est possible d'exprimer les amplitudes des ondes incidente et réfléchie dans le conduit de la manière suivante

$$A_I = \frac{1}{2}(p_2 + \rho_0 c u_2) e^{j k x_2}, \quad A_R = \frac{1}{2}(p_2 - \rho_0 c u_2) e^{-j k x_2}$$

Ces expressions sont utilisées ensuite pour décrire la pression et la vitesse à l'entrée

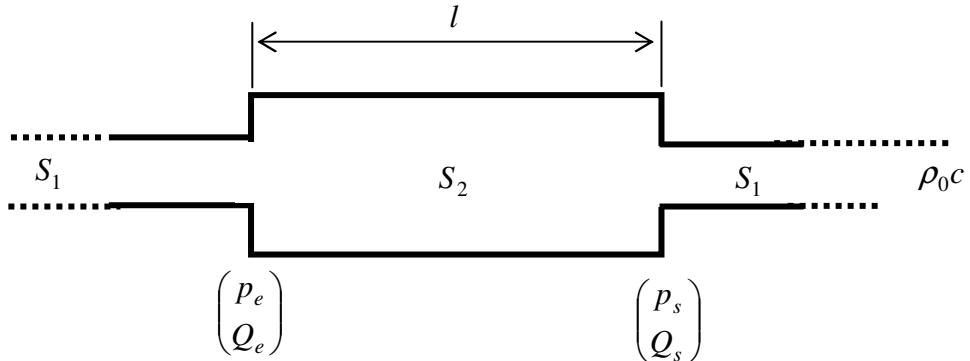
$$\begin{aligned} p_1 &= A_I e^{-j k x_1} + A_R e^{j k x_1} \Rightarrow p_1 = \cos k(x_2 - x_1)p_2 + j\rho_0 c \sin k(x_2 - x_1)u_2 \\ u_1 &= \frac{1}{\rho_0 c}(A_I e^{-j k x_1} - A_R e^{j k x_1}) \Rightarrow u_1 = \frac{j}{\rho_0 c} \sin k(x_2 - x_1)p_2 + \cos k(x_2 - x_1)u_2 \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut se mettre sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos kl & j\rho_0 c \sin kl \\ \frac{j}{\rho_0 c} \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

puis sous la forme standard (pQ) en considérant  $Q_1 = \rho_0 S u_1$  et  $Q_2 = \rho_0 S u_2$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos kl & j \frac{c}{S} \sin kl \\ j \frac{S}{c} \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$



La perte de transmission apportée par la chambre d'expansion de section  $S_2$  raccordée à des sections d'entrée et de sortie identiques  $S_e = S_s = S_1$  s'obtient en appliquant l'expression précédente des pertes de transmission

$$D = 10 \log \frac{S_e \left| T_{11} + \frac{S_s}{c} T_{12} + \frac{c}{S_e} T_{21} + \frac{S_s}{S_e} T_{22} \right|^2}{4 S_s} = 10 \log \frac{\left| T_{11} + \frac{S_1}{c} T_{12} + \frac{c}{S_1} T_{21} + T_{22} \right|^2}{4}$$

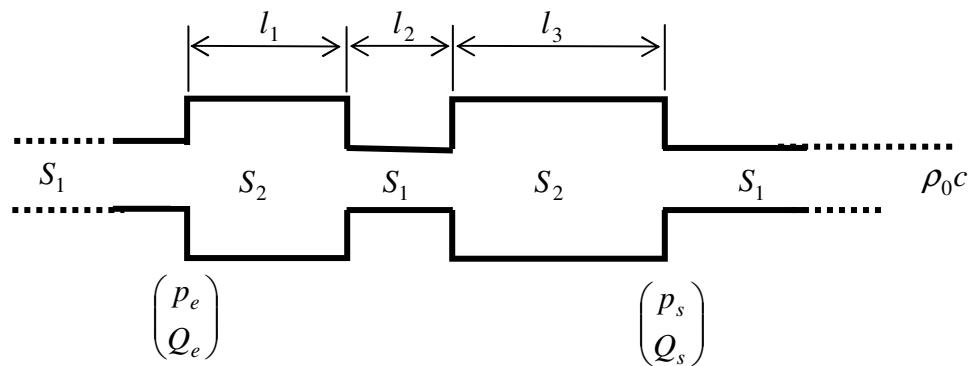
En utilisant les termes de la matrice de transfert du conduit droit de section  $S_2$  et de longueur  $l$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos kl & j \frac{c}{S_2} \sin kl \\ j \frac{S_2}{c} \sin kl & \cos kl \end{bmatrix}$$

on retrouve l'expression de la chambre d'expansion déterminée précédemment ( $m = S_2/S_1$ )

$$D = 10 \log \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{S_2}{S_1} - \frac{S_1}{S_2} \right) \sin^2 kl \right]$$

Remarque : c'est la prise en compte de sections différentes de  $S_2$  pour l'entrée et la sortie ( $S_e = S_s = S_1$ ) qui introduit les changements de section.



Cette méthode peut être appliquée au système ci-dessus en considérant maintenant la matrice de transfert

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos kl_1 & j \frac{c}{S_2} \sin kl_1 \\ j \frac{S_2}{c} \sin kl_1 & \cos kl_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos kl_2 & j \frac{c}{S_1} \sin kl_2 \\ j \frac{S_1}{c} \sin kl_2 & \cos kl_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos kl_3 & j \frac{c}{S_2} \sin kl_3 \\ j \frac{S_2}{c} \sin kl_3 & \cos kl_3 \end{bmatrix}$$

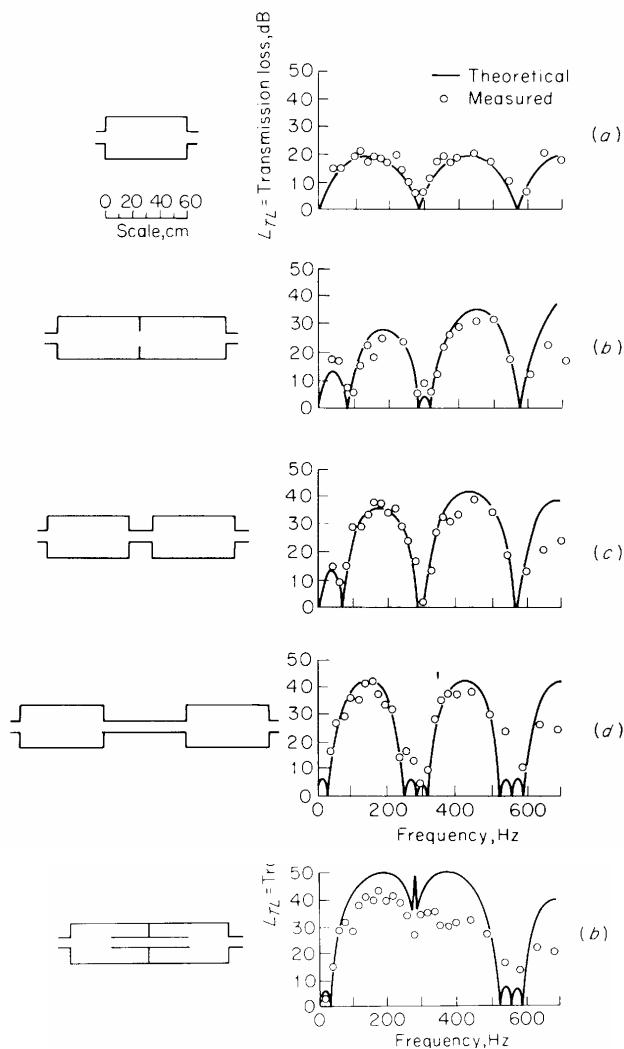


Figure – Différentes configurations de silencieux

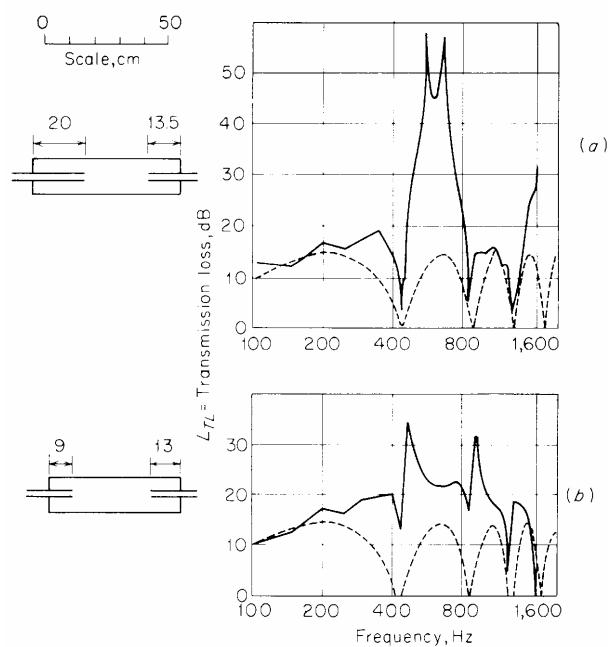
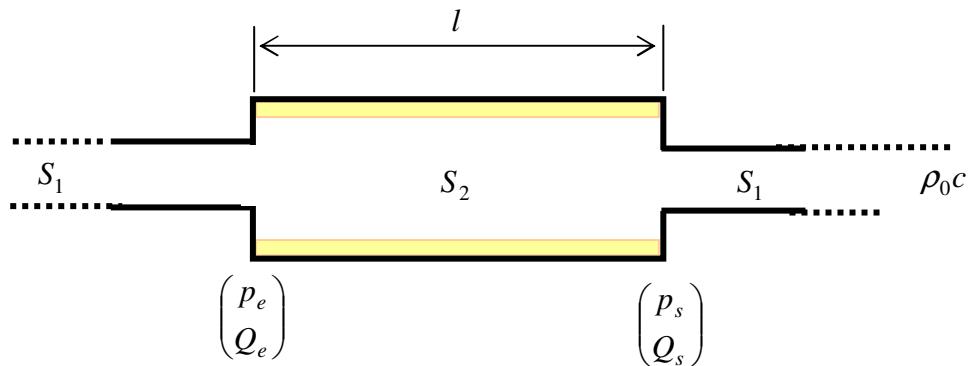


Figure – Influence des entrées et sorties de tubes

## 5. Prise en compte de la dissipation : conduit traité

La dissipation peut facilement être prise en compte en remplaçant les termes en  $e^{\pm jkx}$  par des termes en  $e^{\pm \Gamma x}$  avec  $\Gamma = \sigma + jk$ . Le terme  $\sigma$  représente alors la dissipation. Ainsi la matrice de transfert du conduit droit devient

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\Gamma l} + e^{-\Gamma l}) & \frac{c}{2S_2}(e^{\Gamma l} - e^{-\Gamma l}) \\ \frac{S_2}{2c}(e^{\Gamma l} - e^{-\Gamma l}) & \frac{1}{2}(e^{\Gamma l} + e^{-\Gamma l}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\Gamma l) & \frac{c}{S_2} \sinh(\Gamma l) \\ \frac{S_2}{c} \sinh(\Gamma l) & \cosh(\Gamma l) \end{bmatrix}$$



Comme précédemment, le calcul des pertes de propagation conduit à la formulation suivante

$$D = 10 \log \left\{ \left[ \cosh \sigma l + \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \sinh \sigma l \right]^2 \cos^2 kl + \left[ \sinh \sigma l + \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \cosh \sigma l \right]^2 \sin^2 kl \right\}$$

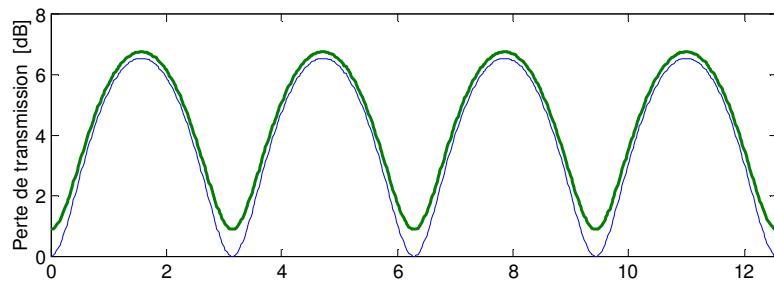


Figure – Chambre d'expansion traitée par un matériau dissipatif (courbe supérieure) comparée à une chambre non traitée (courbe inférieure).

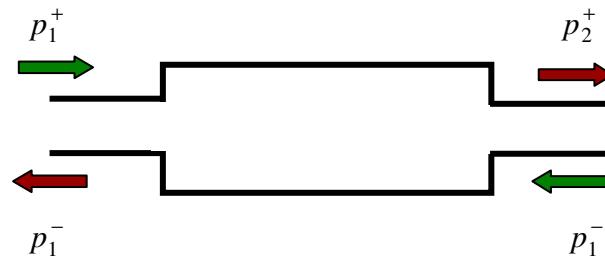
## Autres formes de représentations matricielles

La matrice d'impédance qui fait correspondre les pressions et les vitesses particulières

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Chaque terme de la matrice à la dimension d'une impédance :  $p_1 = Z_{11} u_1 + Z_{12} u_2$ . La matrice de diffusion qui permet d'exprimer les ondes sortantes en fonction des ondes entrantes et dont les termes sont les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $S$

$$\begin{bmatrix} p_1^- \\ p_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & S \\ S & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^+ \\ p_2^- \end{bmatrix}$$



### **Bibliographie sur la modélisation par matrices de transfert**

A. G. Galaitsis, I. L. Vér, "Passive silencers and lined ducts", Chapter 10 in *Noise and Vibration Control Engineering* (L.L. Beranek and I.L. Vér, Eds), Wiley, 1992.

M. Munjal, *Acoustics of Ducts and Mufflers*, Wiley, 1987.



## **III - ACOUSTIQUE MODALE ET STATISTIQUE**

- 1. PROPAGATION DES ONDES EN MILIEU GUIDE**
- 2. ACOUSTIQUE MODALE DES SALLES**
- 3. ACOUSTIQUE STATISTIQUE**

### **ANNEXE A**

Modélisation simplifiée des silencieux dissipatifs

### **ANNEXE B**

Traitemennt acoustique par encoffrement des sources de bruit

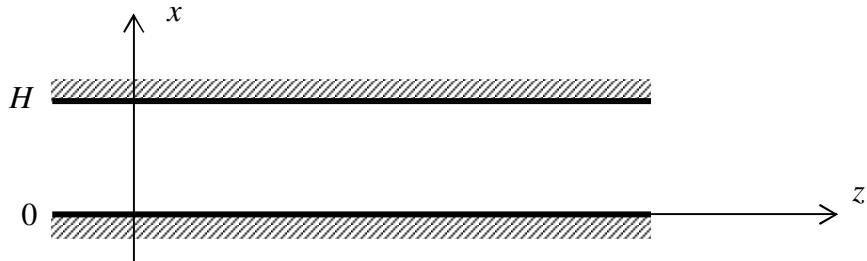


## 1 - PROPAGATION DES ONDES EN MILIEU GUIDE

Cette partie traite de la propagation des ondes acoustiques en conduit quand une dimension de la section est supérieure à  $\lambda/2$ . Les applications sont les conduits de ventilation, les conduits hydrauliques, les gaines d'admission et d'éjection de compresseurs, les manches à air de turboréacteurs, etc.

Pour simplifier l'exposé on considère dans un premier temps une configuration bidimensionnelle où les ondes se propagent dans la direction  $z$  entre deux plans parallèles réfléchissants.

### 1.1. Guide d'onde bidimensionnel



Considérant l'équation d'onde

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

c'est à dire

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

on cherche une solution à une fréquence d'excitation  $\omega$  en séparant les variables

$$p(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t) = X(x)Z(z)e^{j\omega t}$$

ce qui conduit à écrire (en divisant par  $e^{j\omega t}$ )

$$X''(x)Z(z) + Z''(z)X(x) + k^2 X(x)Z(z) = 0$$

avec le nombre d'onde  $k = \frac{\omega}{c}$

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + k^2 = \beta^2 = \text{constante}$$

Cette dernière relation se transforme en deux équations séparées

$$\begin{aligned} Z''(z) + \beta^2 Z(z) &= 0 \\ X''(x) + k_x^2 X(x) &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$k_x^2 = k^2 - \beta^2$$

### a) Résolution de l'équation en $Z(z)$

La solution est  $Z(z) = Ce^{-j\beta z} + De^{j\beta z}$  donc la pression dans le conduit peut déjà s'écrire

$$p(x, z, t) = X(x)Z(z)e^{j\omega t} = X(x)[Ce^{j(\omega z - \beta z)} + De^{j(\omega z + \beta z)}]$$

$C$  : amplitude des ondes se propageant vers les  $z$  positifs

$D$  : amplitude des ondes se propageant vers le  $z$  négatifs

Aucune condition aux limites n'est pas imposée dans la direction  $z$  a priori (réflexion à une extrémité du conduit par exemple).

### b) Résolution de l'équation en $X(x)$

La solution est  $X(x) = Ee^{-jk_x x} + Fe^{jk_x x}$ . Dans la direction  $x$ , le milieu est limité par deux parois rigides en  $x = 0$  et  $x = L$ . Ces conditions aux limites correspondent à une impédance des parois infinie, donc à des vitesses particulières nulles en  $x = 0$  et  $x = L$ .

$$Z = \left. \frac{p}{u_x} \right|_{x=0,H} = \infty \Rightarrow u_x(0) = u_x(H) = 0 \Rightarrow X'(0) = X'(H) = 0$$

Ces conditions s'appliquent sur la fonction  $X'(x) = -jk_x(Ee^{-jk_x x} - Fe^{jk_x x})$ , donc

$$\begin{aligned} X'(0) &= 0 \Rightarrow k_x(E - F) = 0 \\ X'(H) &= 0 \Rightarrow k_x(Ee^{-jk_x H} - Fe^{jk_x H}) = 0 \end{aligned}$$

Deux cas sont possibles : d'une part  $k_x = 0$  qui conduit à  $X(x) = \text{constante}$ , c'est à dire à l'onde plane et d'autre part

$$E = F \Rightarrow e^{-jk_x H} - e^{jk_x H} = -2j \sin k_x H = 0,$$

Cette équation comporte une infinité de solutions

$$k_x H = m\pi, \text{ pour } m = 0, 1, 2, \dots$$

Remarque :  $m = 0 \Rightarrow k_x = 0$ , qui correspond également à l'onde plane.

Avec ces conditions aux limites, il est possible de préciser la fonction en x

$$X(x) = E(e^{-jk_x x} + e^{jk_x x}) = 2E \cos k_x x = 2E \cos \frac{m\pi x}{H}$$

### Solution complète

L'évaluation de  $k_x$  permet de déterminer la constante de propagation

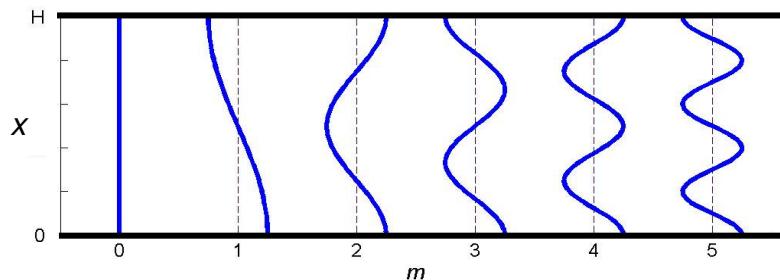
$$k_x^2 = k^2 - \beta^2 \Rightarrow \beta_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}$$

et d'obtenir la solution complète de l'onde se propageant dans le conduit

$$p(x, z, t) = X(x)Z(z)e^{j\omega t} = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m e^{j\beta_m z} + B_m e^{j\beta_m z}) e^{j\omega t} \cos \frac{m\pi x}{H}$$

avec  $A_m = 2CE_m$  et  $B_m = 2DE_m$  les constantes arbitraires qui pourront être calculées à partir des excitations ou des conditions de réflexion aux extrémités du conduit.

La longueur d'onde transversale  $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{2H}{m}$  dépend de l'indice  $m$  donc du mode de propagation. L'indice  $m$  correspond donc au nombre de demi-longueur d'onde  $\lambda/2$ , donc aussi au nombre de passages par zéro comme le montre la figure ci-dessous.



Les nœuds de vitesse correspondent aux vents de pression et inversement. La paroi est rigide et impose une vitesse nulle sur les parois. En conséquence il y aura toujours un vent de pression au niveau des parois.

## 2. Relation de dispersion

C'est la relation qui lie les nombres d'onde

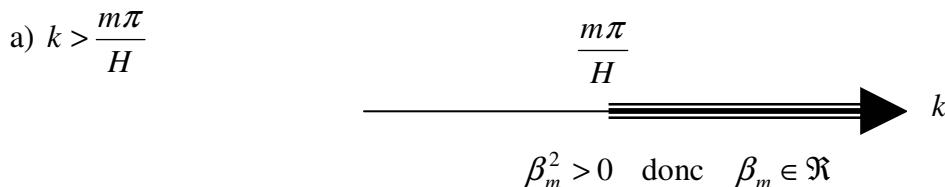
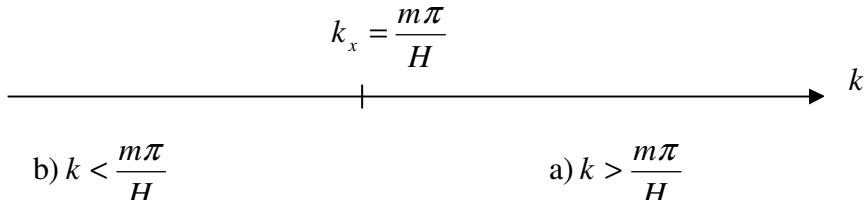
$$\beta_m^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$$

Le nombre d'onde axial  $\beta_m$  représente la propagation du mode  $m$  dans la direction x. Il dépend de

$$k = \frac{\omega}{c}, \text{ le nombre d'onde acoustique,}$$

$$\left( \frac{m\pi}{H} \right) \text{ le nombre d'onde transversal } k_x$$

Deux cas sont possibles et conduisent à des types d'onde différents.



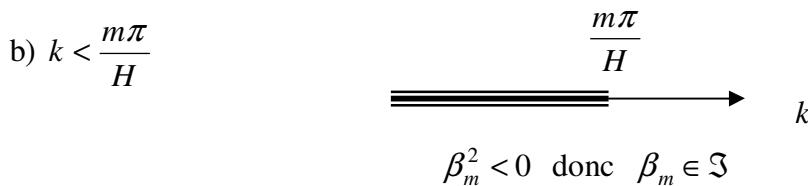
L'onde se propage avec une longueur d'onde longitudinale  $\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_m} > \lambda$ . Par exemple, en considérant seulement la composante se propageant vers les x positifs :

$$p = A_m e^{-j\beta_m z} \cos \frac{m\pi x}{H} e^{j\omega t} \quad (\text{avec } B_m = 0)$$

$$u_z = \frac{-1}{j\rho_0 c k} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta_m}{k} \frac{A_m}{\rho_0 c} e^{-j\beta_m z} \cos \frac{m\pi x}{H} e^{j\omega t}$$

Pression quadratique : 
$$\frac{|p|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|A_m|^2}{2\rho_0 c} \cos^2 \frac{m\pi x}{H}$$

Intensité active : 
$$I_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{pu_z^*\} = \frac{|A_m|^2}{2\rho_0 c} \frac{\beta_m}{k} \cos^2 \frac{m\pi x}{H}$$



On peut écrire

$$\beta_m = \sqrt{-1} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 - k^2} = -j \sqrt{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 - k^2} = -j|\beta_m|$$

d'où l'expression générale de la pression

$$p = (A_m e^{-|\beta_m|z} + B_m e^{|\beta_m|z}) \cos \frac{m\pi z}{H} e^{j\omega t}$$

Dans le cas où  $B_m = 0$ , pression et vitesse particulaire s'écrivent

$$p = A_m e^{-|\beta_m|z} \cos \frac{m\pi z}{H} e^{j\omega t}$$

$$u_z = -\frac{1}{j\rho_0 c k} \frac{\partial p}{\partial z} = -j \frac{|\beta_m|}{k} \frac{A_m}{\rho_0 c} e^{-|\beta_m|z} \cos \frac{m\pi z}{H} e^{j\omega t}$$

Pression quadratique :  $\frac{|p|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|A_m|^2}{2\rho_0 c} e^{-2|\beta_m|z} \cos^2 \frac{m\pi z}{H}$

Intensité active :  $I_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{p u_z\} = 0$

Il n'y a donc aucune énergie que se propage dans le conduit pour cette configuration ( $k < m\pi/H$ ). La pression d'un mode  $m$  qui a pu être produite par une source va décroître rapidement dans la direction  $z$ . Son atténuation sur une longueur  $l$  s'obtient par

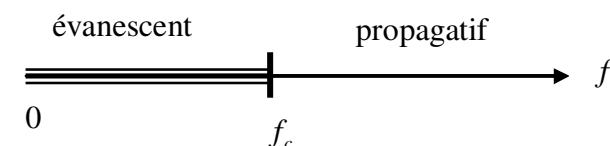
$$\text{Atténuation sur } l = 10 \log \frac{|p(0)|^2}{|p(l)|^2} = 10 \log e^{2|\beta_m|l}$$

$$\text{Atténuation sur 1 m} = (10 \log e) 2|\beta_m| = 8,69 \sqrt{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 - k^2}$$

Pour un mode  $m$  donné, on appelle *fréquence de coupure*, la fréquence qui correspond à

$$k = \frac{m\pi}{H} \Rightarrow \frac{2\pi f_c}{c} = \frac{m\pi}{H} \quad \text{soit} \quad f_c = \frac{cm}{2H}$$

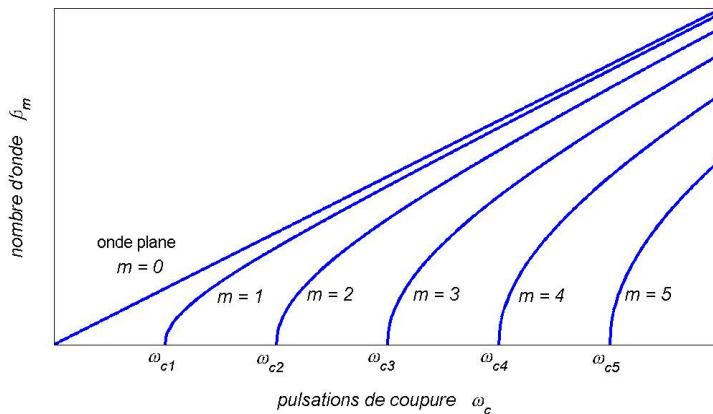
Un conduit se comporte donc comme un filtre passe-haut.



$$f > f_c, \quad k > \frac{m\pi}{H} \Rightarrow \beta_m^2 > 0 : \text{ondes propagatives}$$

$$f < f_c, \quad k < \frac{m\pi}{H} \Rightarrow \beta_m^2 < 0 : \text{ondes évanescentes}$$

La fréquence de coupure dépend du mode  $m$  : plus un mode est d'ordre élevé, plus sa fréquence de coupure est haute. Pour le mode d'ordre,  $m = 0$ ,  $\beta_0 = k$  et c'est une onde plane qui se propage sur toute la gamme de fréquence.



Interprétation : La relation de dispersion  $k^2 = k_x^2 + \beta^2$  montre qu'il existe un angle  $\alpha$  tel que

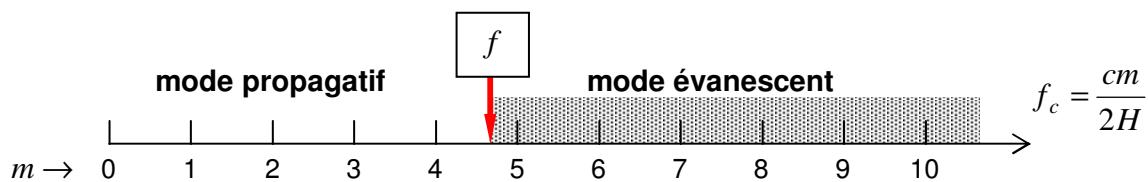
$$k^2 = k^2 \sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha$$

donc  $k_x = k \sin \alpha$  et  $\beta = k \cos \alpha$ . Pour chaque nombre d'onde  $\beta_m$ , il correspondra à chaque fréquence au-dessus de la fréquence de coupure un angle  $\alpha$  qui permet de représenter sa propagation comme celle d'une onde plane d'incidence  $\alpha$  qui se réfléchie sur les parois.

Puisque  $\lambda = \frac{c}{f}$ , alors  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et de même  $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$  et  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_z}$

**Pour une fréquence  $f$  donnée**

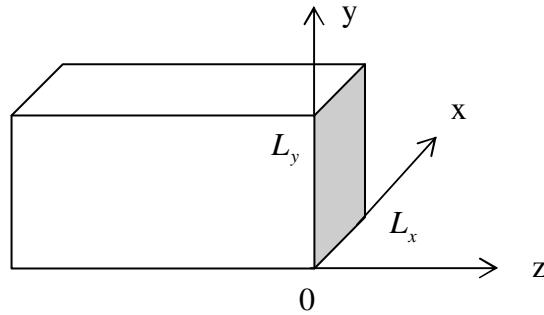
$$\begin{aligned} \text{Si } f > f_c = \frac{cm}{2H}, & \quad \text{c.a.d. si} \quad m < \frac{2Hf}{c} = \frac{2H}{\lambda} & \quad \text{mode propagatif} \\ \text{Si } f < f_c = \frac{cm}{2H}, & \quad \text{c.a.d. si} \quad m > \frac{2Hf}{c} = \frac{2H}{\lambda} & \quad \text{mode évanescant} \end{aligned}$$



### 3. Conduit à section rectangulaire

Le problème du conduit à section rectangulaire est une simple extension du guide bidimensionnel. L'onde acoustique doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$



Une solution de la forme  $p(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)e^{j\omega t}$  est recherchée par séparation des variables. L'équation de propagation devient

$$YZX'' + ZX Y'' + XYZ'' + k^2 XYZ = 0$$

avec  $k = \omega/c$ . On écrit

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k^2 = k_z^2 \quad \leftarrow \text{ constante}$$

Equation en Z :  $Z(z) = C e^{-jk_z z} + D e^{jk_z z}$

Equation transversale :  $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + K_T^2 = 0 \quad \text{avec} \quad K_T^2 = k^2 - k_z^2$

Cette équation peut s'écrire encore de deux façons différentes

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + K_T^2 = k_x^2 \quad \text{ou} \quad -\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} + K_T^2 = k_y^2$$

L'indépendance des variables  $x$  et  $y$  conduit à équations

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0 \quad \text{et} \quad Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0$$

avec  $K_T^2 = k_x^2 + k_y^2$ . L'utilisation de conditions aux limites (parois rigides) conduit aux mêmes solutions que pour le cas bidimensionnel : les composantes de la pression pour chaque mode  $(m, n)$  sont

$$p = (A_{mn} e^{-jk_z z} + B_{mn} e^{jk_z z}) e^{j\omega t} \cos k_x x \cos k_y y$$

$$\text{avec } k_x = \frac{m\pi}{L_x} \text{ et } k_y = \frac{n\pi}{L_y}$$

### Relation de dispersion

$$k^2 = K_T^2 + k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_z^2 + \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2$$

Fréquence de coupure du mode ( $m, n$ )

$$f_{c,mn} = \frac{cK_T}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}$$

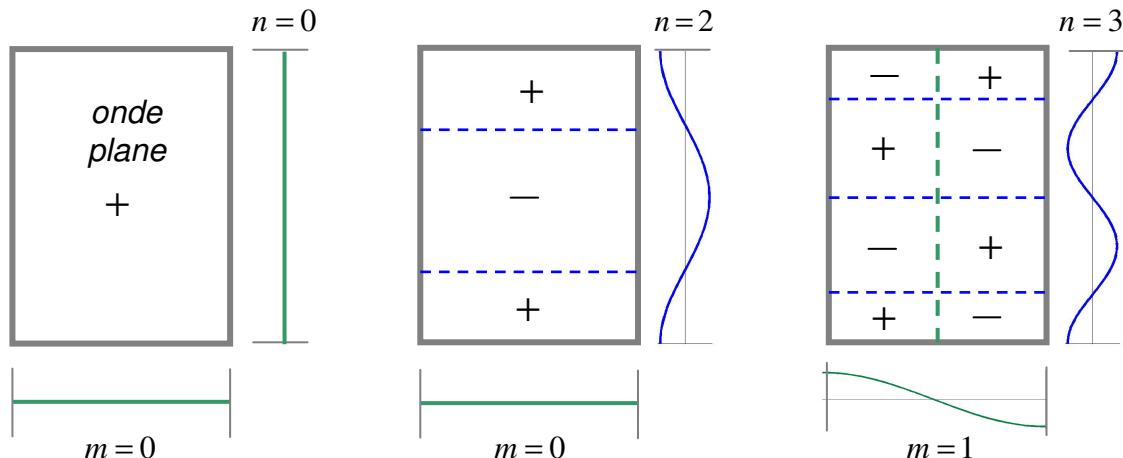
Pression totale

$$p(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{mn} e^{-j\beta_{mn}z} + B_{mn} e^{j\beta_{mn}z}) e^{j\omega t} \cos \frac{m\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y}$$

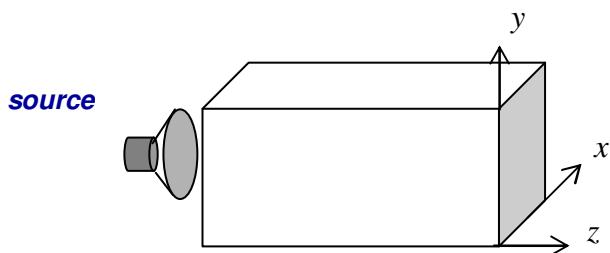
avec

$$\beta_{mn} = k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2}$$

C'est la somme des contributions de tous les modes. Exemple de répartition transversale de la pression pour quelques modes représentés par des couples ( $m, n$ ).



La superposition des modes va conduire dans la pratique à des fluctuations importantes de la pression quadratique dans la section droite du conduit. Par exemple, les figures ci-dessous représentent deux cas des niveaux en dB dans des gaines de refoulement de ventilateurs centrifuges.

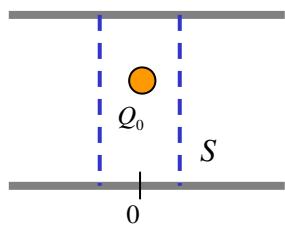
**4. Pression en conduit en fonction de la source**

Source à une extrémité du conduit et pas de réflexion : propagation vers les  $z$  positifs.

$B_{mn0} = 0$  et il faut déterminer  $A_{nm}$

$$p(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} e^{-j\beta_{mn}z} e^{j\omega t} \cos \frac{m\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y}$$

On considère une source de débit de masse  $Q_0$  en  $(x_0, y_0, 0)$ . Le débit total  $Q$  à travers la surface  $S$  s'écrit



$$Q = \iint_S \rho_0 u_z \, dx dy = \frac{1}{2} \iint_S Q_0 e^{j\omega t} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \, dx dy$$

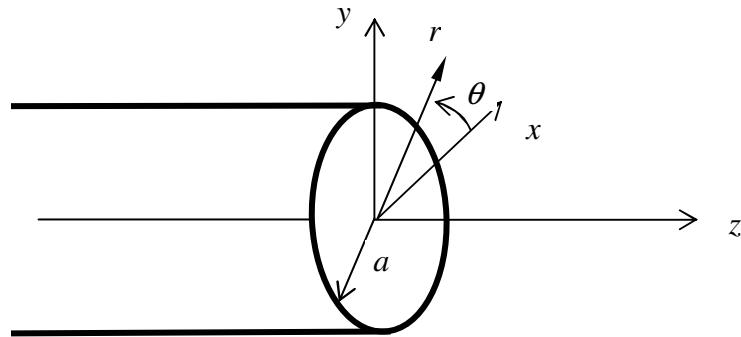
En remplaçant dans cette équation la vitesse particulière par son expression dérivée de la pression (relation d'Euler) exprimée dans la base modale,

$$u_z = \frac{-1}{j\rho_0 c k} \frac{\partial p}{\partial z} = \sum_m \sum_n \frac{\beta_{mn}}{k} \frac{A_{mn}}{\rho_0 c} e^{-j\beta_{mn} z} e^{j\omega t} \cos \frac{m\pi x}{L_x} \cos \frac{n\pi y}{L_y}$$

la relation d'orthogonalité des modes permet d'obtenir une expression qui permet de déterminer les coefficients  $A_{mn}$  de l'amplitude de pression de chaque mode

$$\frac{\beta_{mn}}{k} \frac{A_{mn}}{\rho_0 c} \frac{S}{\epsilon_{mn}} = \frac{1}{2} Q_0 \cos \frac{m\pi x_0}{L_x} \cos \frac{n\pi y_0}{L_y} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \epsilon_{00} &= 1 \\ \epsilon_{m0} = \epsilon_{0n} &= 2 \\ \epsilon_{mn} &= 4 \end{aligned}$$

## 5. Conduit à section circulaire



Equation d'onde  $\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$  s'exprime en coordonnées cylindriques avec

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

On recherche une solution de la forme  $p(r, \theta, z, t) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)e^{j\omega t}$ , ce qui conduit à

$$\Theta Z \left( R'' + \frac{1}{r} R' \right) + Z R \frac{\Theta''}{r^2} + R \Theta Z'' + k^2 R \Theta Z = 0$$

ou encore

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + k^2 = \beta^2 \quad \leftarrow \text{constante}$$

**Equation en  $Z$  :**  $Z''(z) + \beta^2 Z(z) = 0$

**Equation transversale**

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + K_T^2 = 0 \quad \text{avec} \quad K_T^2 = k^2 - \beta^2$$

ou

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + K_T^2 r^2 = m^2 \quad \leftarrow \text{ constante}$$

soit 2 équations :

a) *Equation angulaire*

$$\Theta''(\theta) + m^2 \Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(\theta) = E e^{-jm\theta} + F e^{jm\theta}$$

Comme le champ de pression se retrouve identiquement après rotation de  $2\pi$ ,  $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ , donc  $m \in N$ .  $m$  est le nombre d'onde angulaire ou nombre de mode angulaire

$$p(r, \theta, z, t) = R(r) e^{j(\omega t \pm m\theta \pm \beta z)}$$

b) *Equation radiale*

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left( K_T^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0$$

en divisant par  $K_T^2$  et en considérant comme variable  $x = K_T r$ , nombre sans dimension

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R(x) = 0$$

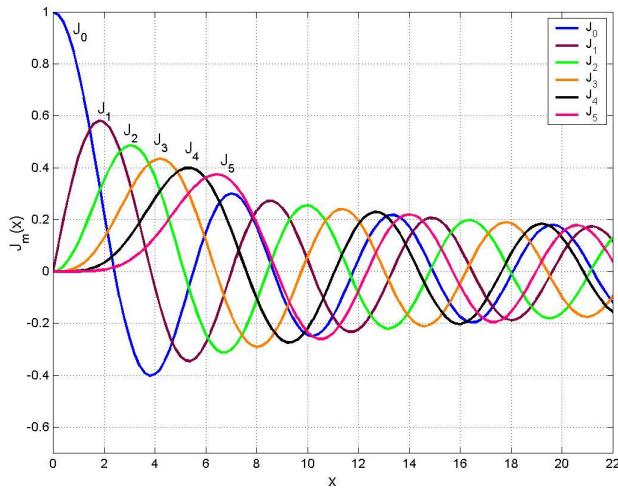
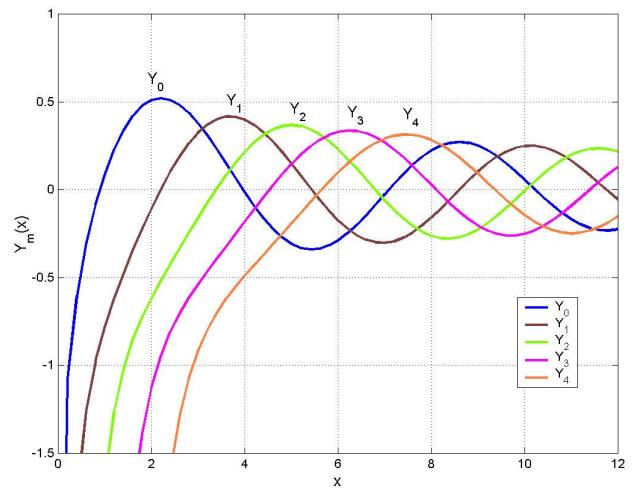
Cette équation est connue comme l'équation de Bessel dont la solution générale est

$$R(x) = \alpha J_m(x) + \gamma Y_m(x)$$

$\alpha, \gamma$  sont des constantes.

$J_m(x)$  et  $Y_m(x)$  : fonction de Bessel d'ordre  $m$  de première et seconde espèce (voir figures)

Au centre du conduit  $r = 0$ , la pression doit rester finie sur l'axe  $z$  : puisque  $Y_m(0) \rightarrow -\infty$ , alors  $\gamma = 0$  et  $R(x) = \alpha J_m(x)$  ou  $R(r) = \alpha J_m(K_T r)$

Fonction de Bessel de 1<sup>ere</sup> espèce  $J_m(x)$ Fonction de Bessel de 2<sup>nd</sup> espèce  $Y_m(x)$ 

L'utilisation des conditions aux limites sur les parois du conduit (parois parfaitement rigides) → vitesse particulière radiale nulle en  $r = a \rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$  ou  $\frac{dR(r)}{dr} \Big|_{r=a} = 0$  permet d'obtenir une équation. Soit  $\alpha K_T J'_m(K_T a) = 0$

En excluant le cas trivial<sup>1</sup>  $K_T = 0$ , cette équation a pour solution :

$K_T a = \chi_{mn}$ , le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la dérivé de la fonction de Bessel d'onde  $m$  :  $J'_m(\chi_{mn}) = 0$ .  $\chi_{mn}$  peut être donnée dans des tables<sup>2</sup>.  $n$  est appelé le nombre mode radial

Relation de dispersion :  $k^2 = K_T^2 + \beta^2$  avec  $K_T = \frac{\chi_{mn}}{a}$

$K_T$  et  $\beta$  dépendent des deux entiers  $m$  et  $n$ .

Fréquence de coupure du mode  $(m, n)$

$$f_{c,mn} = \frac{c K_T}{2\pi} = \frac{c \chi_{mn}}{2\pi a}$$

le mode  $(m, n)$  se propage seulement si  $k \geq K_T$  ou  $f \geq f_{c,mn}$ .

Pression totale

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{mn} e^{j(\omega t - \beta z)} + B_{mn} e^{j(\omega t + \beta z)} \right) \cos(m\theta + \theta_0) J_m \left( \chi_{mn} \frac{r}{a} \right)$$

$$\text{avec } \beta = \sqrt{k^2 - \left( \frac{\chi_{mn}}{a} \right)^2}$$

<sup>1</sup> Si  $K_T = 0$ ,  $J_m(0) = 0$  pour  $m \neq 0$ . Mais pour  $m = 0$ ,  $J_0(0) = 1$  ce qui correspond aussi à l'onde plane.

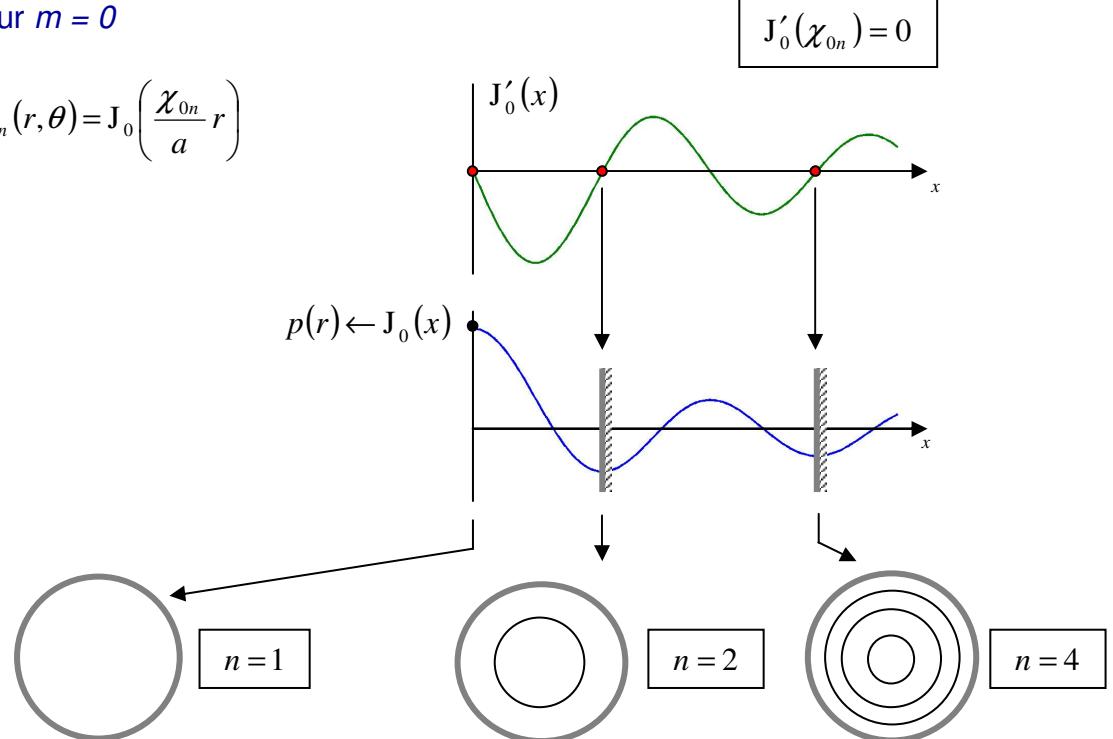
<sup>2</sup> M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, 1975.

La plus basse fréquence de propagation d'un mode angulaire  $m$  donné correspond à la plus petite valeur possible de  $\chi_{mn}$  donc à  $n = 1$ .

Si  $m = 0$  et  $n = 1$ ,  $\chi_{01} = 0$  et les fonctions  $\Theta(\theta)$  et  $R(r)$  sont des constantes, ce qui correspond à l'onde plane ( $f_{c,01} = 0$ ).

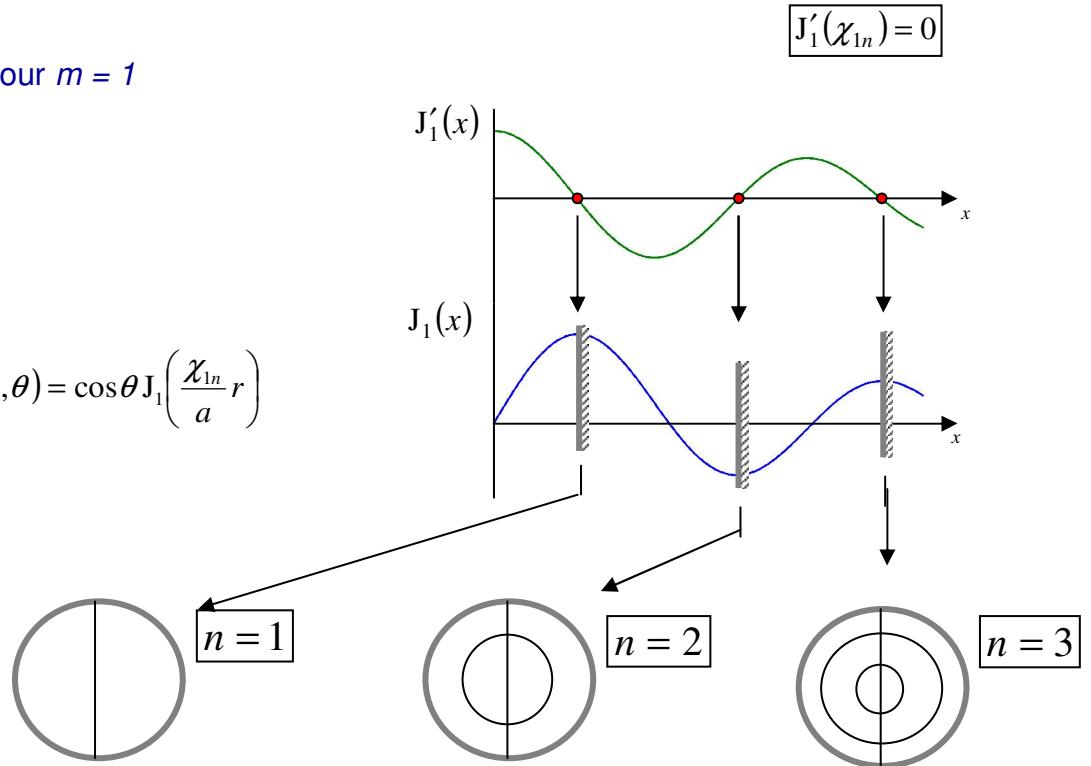
### Exemple pour $m = 0$

$$\chi_{0n} \rightarrow \phi_{0n}(r, \theta) = J_0\left(\frac{\chi_{0n}}{a} r\right)$$



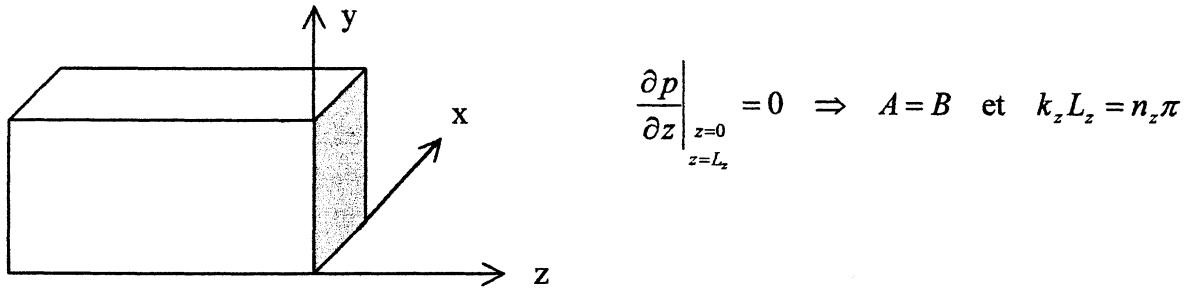
### Exemple pour $m = 1$

$$\chi_{1n} \rightarrow \phi_{1n}(r, \theta) = \cos \theta J_1\left(\frac{\chi_{1n}}{a} r\right)$$



## 2 – ACOUSTIQUE MODALE DES SALLES

On s'intéresse dans un premier temps aux salles rectangulaires. Ensuite l'approche modale sera étendue aux habitacles de forme quelconque. L'idée est d'utiliser l'expression de la pression dans un conduit rectangulaire dont la propagation est libre dans la direction z et d'ajouter au problème des conditions aux limites correspondant à des terminaisons rigides :



Pour obtenir un modèle du comportement acoustique d'une salle, on peut considérer un conduit rectangulaire fermé aux deux extrémités par des parois rigides. Dans le conduit, on a

$$p(x, y, z) = [A e^{-jK_z z} + B e^{jK_z z}] \cos \frac{n_x \pi}{l_x} x \cos \frac{n_y \pi}{l_y} y.$$

Les parois rigides imposent les conditions aux limites

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} = 0 \Big|_{z=0, l_z}.$$

On calcule

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -j K_z [A e^{-jK_z z} - B e^{jK_z z}] \cos(K_x x) \cos(K_y y),$$

pour les deux conditions aux limites

$$\frac{\partial p}{\partial z}(z = 0) \Rightarrow A - B = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}(z = l_z) \Rightarrow A e^{-jK_z z} - B e^{jK_z z} = 0,$$

ce qui conduit à

$$e^{-jK_z z} - e^{jK_z z} = -j 2 \sin K_z l_z = 0,$$

d'où  $K_z l_z = n_z \pi$ , avec  $n_z = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Ainsi, la pression dans une salle parallélépipédique  $l_x \times l_y \times l_z$  est donnée par la relation suivante

$$p(x, y, z) = \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} P_{n_x, n_y, n_z} \Psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z), \quad (1a)$$

où  $P_{n_x, n_y, n_z}$  est la contribution du mode  $(n_x, n_y, n_z)$  et où la fonction  $\Psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z)$  représente la distribution spatiale de la pression dans la salle pour le mode  $(n_x, n_y, n_z)$ , qui pour des parois parfaitement réfléchissantes est définie par

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \cos \frac{n_x \pi x}{l_x} \cos \frac{n_y \pi y}{l_y} \cos \frac{n_z \pi z}{l_z}. \quad (1b)$$

Parmi les modes d'une salle parallélépipédique  $(l_x, l_y, l_z)$ , on distingue

- 1) les modes axiaux  $(n_x, 0, 0)$   $(0, n_y, 0)$   $(0, 0, n_z)$
- 2) les modes tangeantiels  $(n_x, n_y, 0)$   $(n_x, 0, n_z)$   $(0, n_y, n_z)$
- 3) les modes obliques  $(n_x, n_y, n_z)$ .

La relation

$$k^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$$

$$k^2 = \frac{\omega_{n_x, n_y, n_z}^2}{c^2} = \left( \frac{n_x \pi}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y \pi}{l_y} \right)^2 + \left( \frac{n_z \pi}{l_z} \right)^2,$$

permet d'obtenir les fréquences propres de la salle

$$f_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\omega_{n_x, n_y, n_z}}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left( \frac{n_x}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{l_y} \right)^2 + \left( \frac{n_z}{l_z} \right)^2}. \quad (2)$$

### Répartition spatiale des modes

Si on considère une petite enceinte parallélépipédique dont une dimension  $l_z$  est bien inférieure à  $\lambda/10$ , de façon que  $n_z$  soit toujours égal à 0. Alors

$$f_{n_x, n_y, 0} = \frac{c}{2} \sqrt{\left( \frac{n_x}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{l_y} \right)^2}.$$

Si  $l_x = 1,5$  m et  $l_y = 1$  m, les fréquences propres des modes normaux  $(2,0,0)$ ,  $(1,1,0)$  et  $(2,1,0)$  sont

$$f_{2,0,0} = \frac{344}{2} \sqrt{\left( \frac{2}{1,5} \right)^2} = 229 \text{ Hz}$$

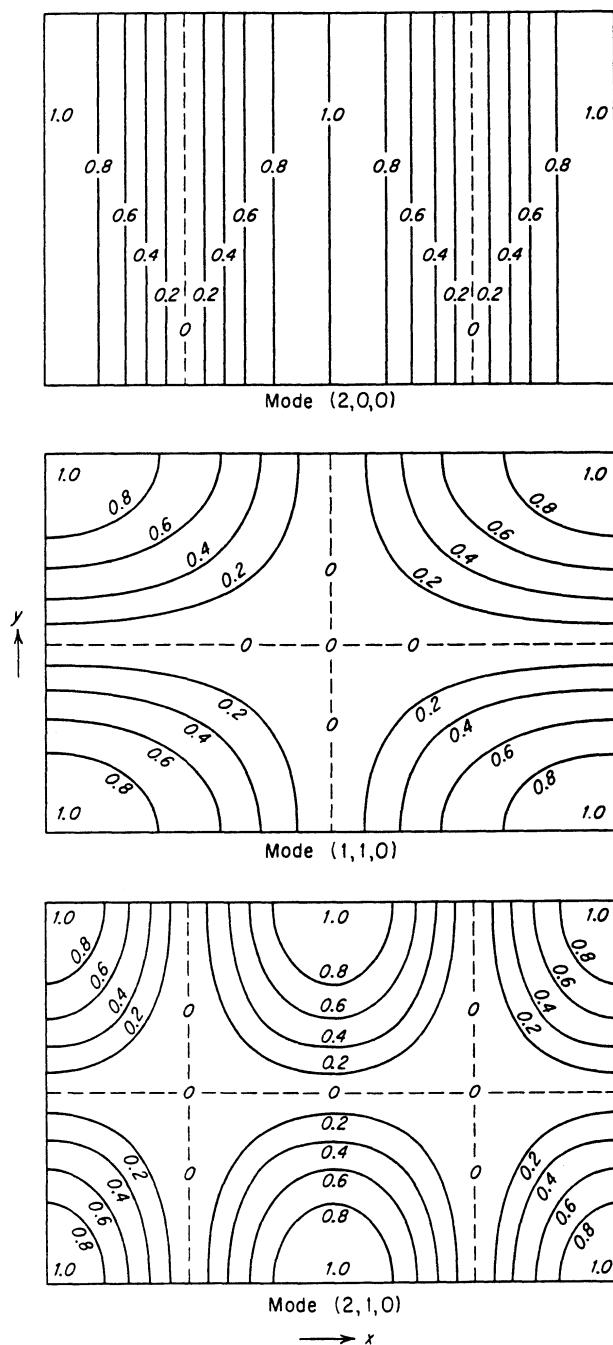
$$f_{1,1,0} = \frac{344}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{1,5} \right)^2 + \left( \frac{1}{1} \right)^2} = 207 \text{ Hz}$$

$$f_{2,1,0} = \frac{344}{2} \sqrt{\left( \frac{2}{1,5} \right)^2 + \left( \frac{1}{1} \right)^2} = 287 \text{ Hz.}$$

La distribution de pression dans l'espace pour chaque mode est calculée par la fonction (1a)

$$\Psi_{n_x, n_y, 0}(x, y, z) = \cos \frac{n_x \pi x}{l_x} \cos \frac{n_y \pi y}{l_y},$$

et représentée dans le plan (x,y) sur la figure 1.



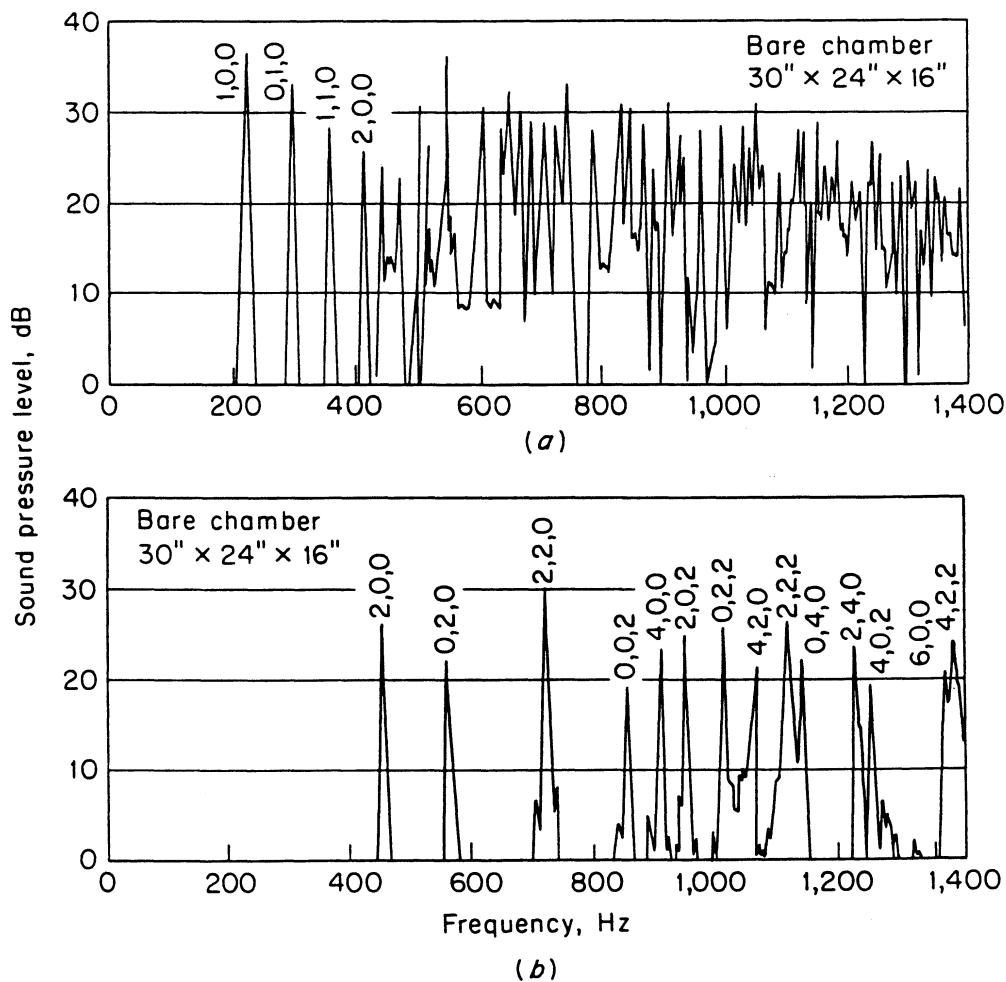
*Fig. 1 – Distributions de la pression pour les modes (2,0,0), (1,1,0) et (2,1,0) (d'après Beranek [1]).*

L'examen de l'équation de la pression montre que chaque mode possède un maximum dans les coins de la salle. Pour chaque mode ayant un des nombres  $n_x$ ,  $n_y$  ou  $n_z$  impair, la pression est nulle au centre de la salle. Il en résulte que seulement 1/8 ième des modes ont une pression qui n'est pas nulle au centre de la salle. De la même façon, au centre de

chaque mur la pression est nulle pour les modes ayant deux des nombres  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  qui soient impairs. A cet endroit, 1/4 des modes seulement sont détectables.

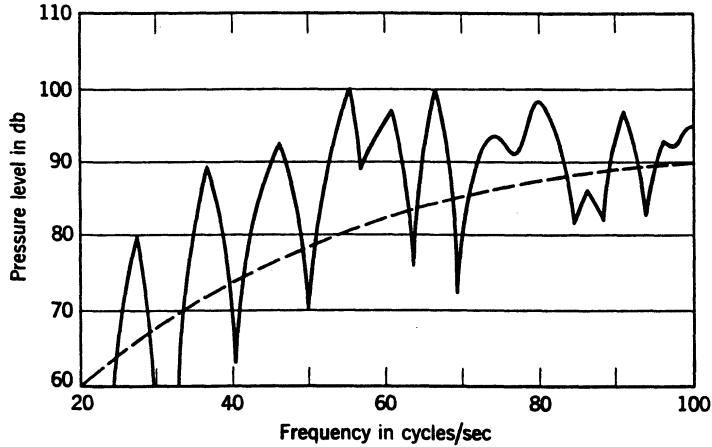
Aucun mode  $(n_x, n_y, n_z)$  ne peut être excité par une source ponctuelle qui serait placée où la fonction  $\Psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z)$  a des valeurs nulles.

Ces considérations sont illustrées par l'évolution de la pression acoustique en fonction de la fréquence dans une petite enceinte de  $0,76 \times 0,61 \times 0,41$  m, mesurée par un microphone placé dans un coin.



*Fig. 2 – Pression mesurée par un microphone placée dans un coin de la salle; a) la source est dans le coin opposé au microphone, b) la source est au centre (d'après Beranek [1]).*

Dans un cas, la source est placée dans le coin opposé au microphone et on remarque que le nombre de modes s'accroît rapidement avec la fréquence (figure 2a). Quand la source est placée au centre (figure 2b), les modes “pairs” apparaissent seuls.



*Fig. 3 – Réponse en pression d'une salle de  $3 \times 4,6 \times 6,1 \text{ m}$  (d'après Kinsler et Frey [2]).*

Un autre exemple de l'accroissement du nombre de modes avec la fréquence est donné par la figure 3. Là aussi, le haut-parleur est placé dans un coin de la salle et le microphone dans le coin opposé. La ligne pointillée correspond à la réponse du haut-parleur mesurée dans une salle anéchoïque.

#### **Nombre de modes et densité modale**

Il est possible de donner une estimation du nombre de modes qui apparaissent en dessous d'une fréquence  $f$  par la formule suivante

$$N \approx \frac{4\pi V}{3c^3} f^3 + \frac{\pi S}{4c^2} f^2 + \frac{L}{8c} f, \quad (3)$$

avec  $V = l_x l_y l_z$  le volume de la salle

$S = 2(l_x l_y + l_y l_z + l_x l_z)$  la surface des parois

$L = 4(l_x + l_y + l_z)$  la longueur totale des arrêtes.

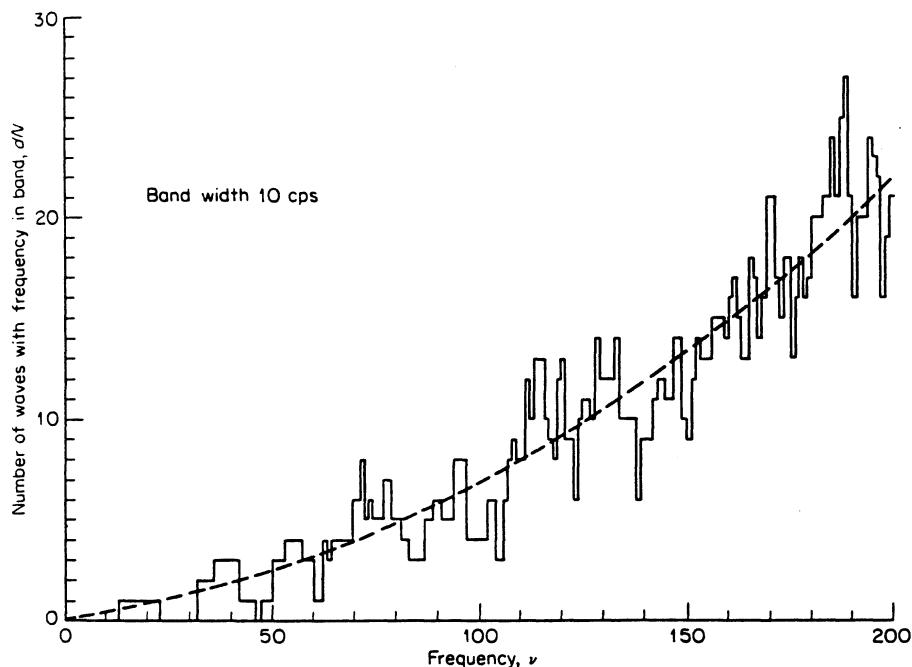
Quand  $V/S \gg \lambda/4$  le premier terme prédomine et peut servir seul à donner une bonne approximation du nombre de modes. Pour une salle de  $100 \text{ m}^3$ ,  $N = 13696$  pour  $f = 1100 \text{ Hz}$  et  $N = 10290$  pour  $f = 1000 \text{ Hz}$ . Le nombre de mode compris entre  $1100 \text{ Hz}$  et  $1000 \text{ Hz}$  est de 3406 pour une salle de  $100 \text{ m}^3$  et de 34060 pour une salle de  $1000 \text{ m}^3$ . Pour caractériser une salle on emploie souvent la notion de densité modale qui s'obtient en dérivant la relation précédente

$$n(f) = \frac{dN}{df} = \frac{4\pi V}{c^3} f^2 + \frac{\pi S}{2c^2} f + \frac{L}{8c}. \quad (4a)$$

En pratique, la densité modale peut s'exprimer par

$$n(f) \approx \frac{4\pi V}{c^3} f^2 \quad (4b)$$

et ce résultat établi pour une enceinte rectangulaire à parois rigides est peu influencé par la forme de la salle et par des conditions aux limites différentes. La figure 4 montre l'évolution du nombre de modes  $\Delta N$  dans une bande de fréquence  $\Delta f$  de 10 Hz en fonction de la fréquence dans une salle de  $3,05 \times 4,57 \times 9,14$  m ( $V = 127 \text{ m}^3$ ,  $S = 167 \text{ m}^2$  et  $L = 67 \text{ m}$ ), calculé à partir de l'équation (4b) par  $\Delta N = n(f) \Delta f$ .



*Fig. 4 – Nombre de modes par bande de fréquence de 10 Hz pour une salle de  $127 \text{ m}^3$  (d'après Morse et Ingard [3]).*

## REFERENCES

- [1] L.L. Beranek, "Sound in Small Spaces", in L.L. Beranek (ed.), *Noise and Vibration Control*, (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [2] L.E. Kinsler, A.R. Frey, *Fundamentals of Acoustics*, (Wiley, New York, 1962).
- [3] P.M. Morse, K.U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [4] S. Léwy, *Fondements de l'acoustique industrielle*, (UTC, Compiègne, 1990).

# APPROCHE STATISTIQUE DE L'ACOUSTIQUE DES SALLES ET APPLICATIONS

## 1 MODELE DES SALLES DE SABINE

Les exemples du chapître précédent montrent qu'avec l'accroissement de la fréquence, le nombre de modes devient très important et la description modale perd de son intérêt. La superposition des ventres et des nœuds conduit à un niveau de pression sensiblement égal dans tout l'espace. On peut alors parler de *champ diffus*. Le champ diffus peut se comprendre comme la superposition d'ondes planes que les multiples réflexions sur les parois font se propager dans toutes les directions possibles (figure 1).

Ce concept de champ diffus va permettre de construire un modèle statistique d'acoustique de salle, le modèle de Sabine, qui prend en compte l'absorption du son par les parois. Le niveau sonore dans une salle suffisamment réverbérante est la composition de deux champs acoustiques

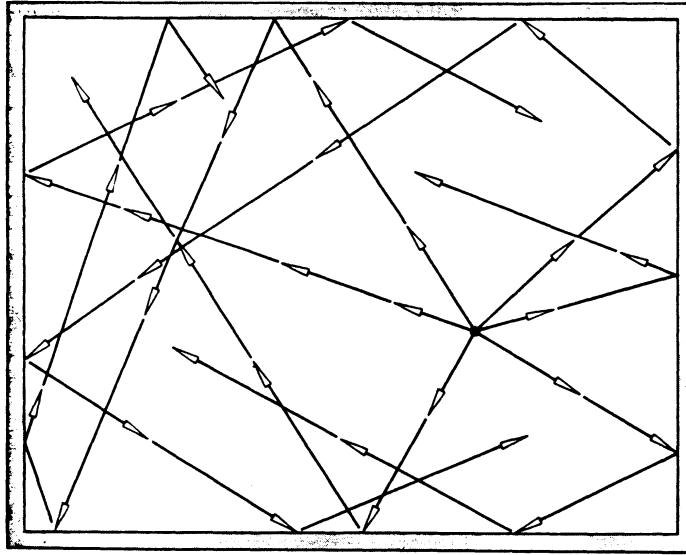
- 1) le champ direct produit par le rayonnement de la source,
- 2) le champ réverbéré produit par les réflexions successives sur les parois.

### *Champ direct*

Il est décrit par les lois de propagation des ondes émises par une source. Pour une source de petites dimensions, l'intensité dans la direction radiale peut se représenter à partir de la puissance par une loi inversement proportionnelle au carré de la distance, comme s'il s'agissait d'une source ponctuelle

$$I_D = \frac{\langle p_D^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{W Q(\theta)}{4\pi r^2}. \quad (1)$$

Dans cette relation  $W$  est la puissance acoustique de la source et  $Q$  est son facteur de directivité (voir [1] Ch.X et Annexe A).



*Fig. 1 – Représentation schématique du concept de champ diffus tel qu'il est utilisé ici.*

### *Champ réverbéré*

Le champ réverbéré est un champ diffus. En régime permanent il se crée un équilibre entre l'énergie  $\mathcal{E}_S$  apportée au champ réverbéré par la source et l'énergie  $\mathcal{E}_A$  absorbée par les parois

$$\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_A.$$

Après une première réflexion, la partie  $d\mathcal{E}_S$  de l'énergie  $W dt$  qui n'est pas absorbée s'ajoute au champ réverbéré

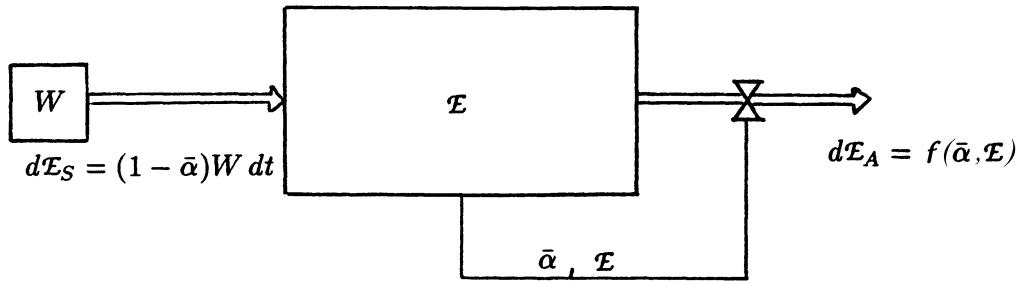
$$d\mathcal{E}_S = (1 - \bar{\alpha})W dt. \quad (2)$$

Le volume de la salle se comporte comme un réservoir d'énergie  $\mathcal{E}$ . La figure 2 illustre le modèle énergétique considéré dont le bilan (la relation de conservation) s'exprime par la relation suivante

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_S - d\mathcal{E}_A. \quad (3)$$

Soit une petite quantité d'énergie diffuse  $\Delta\mathcal{E}$  à laquelle correspond un petit volume  $\Delta V$ . Cette petite quantité d'énergie est transportée à travers le champ diffus à la vitesse  $c$ . Chaque fois que le petit élément de volume  $\Delta V$  va rencontrer une paroi, il cédera une fraction  $\bar{\alpha}$  de son énergie. En une seconde, l'onde rencontrera  $N$  fois les parois et perdra  $N \bar{\alpha} \Delta\mathcal{E}$  quantité d'énergie. Le nombre de fois où l'élément de volume  $\Delta V$  va rencontrer une paroi dépend de la distance qui sépare deux réflexions. On introduit donc ici une notion statistique de *libre parcours moyen*  $\bar{\ell}$  entre deux réflexions pour une salle donnée, ce qui permet d'exprimer la quantité d'énergie perdue par seconde par l'élément  $\Delta V$  par

$$\frac{c}{\bar{\ell}} \bar{\alpha} \Delta\mathcal{E}.$$



*Fig. 2 – Modèle énergétique considéré dans l'analyse.*

Le modèle de Sabine passe du processus discontinu que nous avons décrit à un processus continu: chaque petit élément de volume  $\Delta V$  va perdre statistiquement la même quantité d'énergie pendant le même laps de temps et la perte d'énergie par absorption sur les parois pour l'ensemble des éléments d'énergie  $\Delta \mathcal{E}$  contenus dans le volume de la salle s'obtient en remplaçant  $\Delta \mathcal{E}$  par  $\mathcal{E}$  dans l'expression précédente

$$d\mathcal{E}_A = \frac{c}{\bar{\ell}} \bar{\alpha} \mathcal{E} dt. \quad (4)$$

Le comportement du système de la figure 2 est décrit complètement par les équations (3), (2) et (4) qui peuvent se synthétiser en une équation différentielle

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{c \bar{\alpha}}{\bar{\ell}} \mathcal{E} = (1 - \bar{\alpha})W. \quad (5)$$

Elle exprime l'énergie totale du champ réverbéré diffus en fonction du coefficient d'absorption moyen  $\bar{\alpha}$  des parois, du libre parcours moyen dans la salle  $\bar{\ell}$  et de la puissance totale des sources  $W$ . En général, il sera plus commode d'utiliser la densité d'énergie  $E$  (en  $J/m^3$ ) plutôt que l'énergie totale  $\mathcal{E}$  de la salle employée dans l'analyse précédente

$$\mathcal{E} = EV. \quad (6)$$

### *Grandeur acoustiques concernées par le modèle*

L'équation (5) peut permettre d'observer des fluctuations dans le temps de la densité d'énergie  $E$  qui soient compatibles avec la résolution temporelle du modèle. Celle-ci est principalement une conséquence du passage d'un processus discontinu de perte d'énergie à un processus moyen continu, ce qui se traduit par le lissage

$$E \approx \frac{1}{T_c} \int_{\tau-T_c}^{\tau} E(t) dt.$$

$E$  est la valeur de la densité d'énergie que peut décrire le modèle,  $E(t)$  la valeur qui sera effectivement observée dans la salle et  $T_c$  la résolution temporelle caractéristique  $T_c \approx \bar{\ell}/c$ .

L'énergie totale est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. La superposition d'un grand nombre de modes permet de dire qu'en chaque point du volume, les densités d'énergie cinétiques et potentielles sont égales. On peut donc estimer  $E$  à partir de la seule densité d'énergie potentielle qui est plus facile à mesurer puisqu'elle est proportionnelle à la pression quadratique

$$E = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c^2}. \quad (7)$$

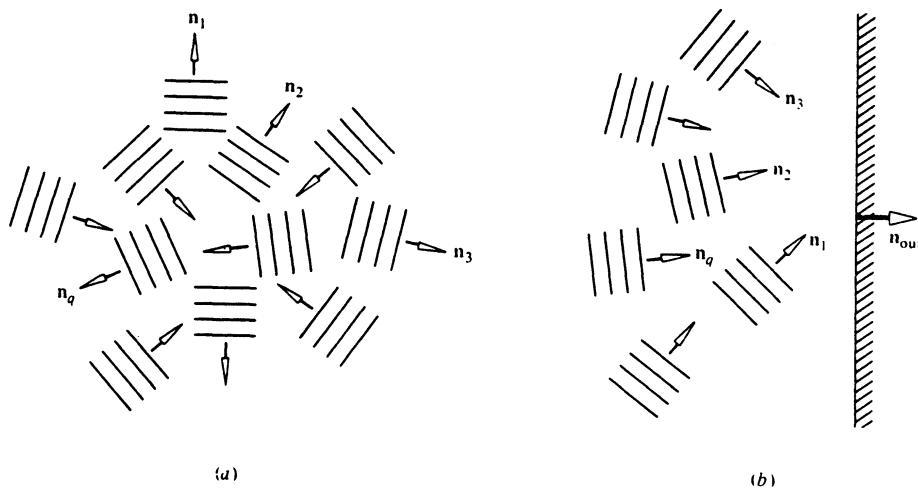


Fig. 3 – (a) Superposition des ondes planes élémentaires constituant le champ diffus, (b) Ondes élémentaires composant le champ incident sur la paroi (d'après Pierce [2]).

### Puissance incidente sur les parois et libre parcours moyen

Le champ réverbéré diffus, qui sert de base au modèle de Sabine, considère la superposition d'ondes planes se propageant dans toutes les directions, comme l'illustre la figure 3a. En un point de l'espace, l'intensité de chaque onde plane élémentaire est  $I_i = c E_i \hat{n}_i$  ( $\hat{n}_i$  : vecteur unitaire). L'intensité résultante  $\sum_i I_i$  est nulle, bien que  $\sum_i E_i = E$ . Au niveau d'une paroi, la moitié des ondes élémentaires sont incidentes sur un élément de paroi  $\Delta S$ . Le flux incident dû à une onde plane élémentaire sur cet élément de paroi  $\Delta S$  est

$$\Delta \phi_i = I_i \cdot \hat{n} \Delta S = c E_i \cos \theta_i \Delta S$$

avec  $(\hat{n}_i \cdot \hat{n}) = \cos \theta_i$  ( $\hat{n}$  est le vecteur unitaire normal et  $\theta_i$  l'angle d'incidence). Seules les ondes élémentaires incidentes sont prises en compte, c'est à dire celles pour lesquelles  $(\hat{n}_i \cdot \hat{n}) = \cos \theta_i > 0$  (selon les notations de la figure 3). En considérant que tous les angles  $\theta_i$  sont équiprobables dans l'angle solide  $2\pi$ , la valeur moyenne du flux incident est

$$\langle \Delta \phi_i \rangle = c E_i \langle \cos \theta_i \rangle \Delta S,$$

où l'espérance mathématique de  $\cos \theta_i$  s'écrit

$$\langle \cos \theta_i \rangle = E[\cos \theta_i] = \int_0^{\pi/2} \cos \theta p(\theta) d\theta,$$

avec  $p(\theta) = \sin \theta$  la densité de probabilité de rencontrer une onde incidente avec un angle  $\theta$  (voir figure 4). Ainsi

$$c E_i \langle \cos \theta_i \rangle = c E_i \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{c E_i}{2}.$$

Il faut remarquer que les ondes qui arrivent sur la paroi (celles qui se propagent de gauche à droite selon la figure 3b) ne représentent que la moitié de la contribution du champ diffus

$$\sum_i E_i = \frac{E}{2}, \quad \text{si } i \text{ est tel que } (\hat{n}_i \cdot \hat{n}) > 0.$$

De ce fait, l'intensité du champ diffus incidente sur la paroi est

$$I_{inc} = \frac{c E}{4}. \quad (8)$$

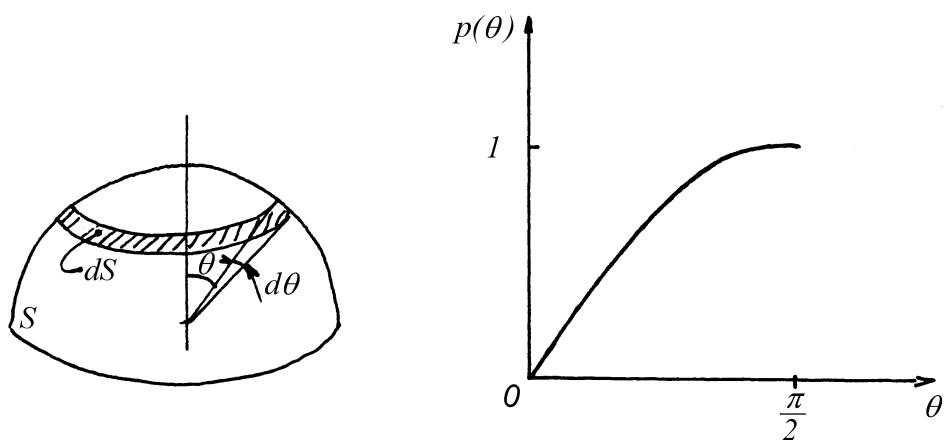


Fig. 4 – La densité de probabilité est proportionnelle aux surfaces  $dS(\theta)/S$ .

Le libre parcours moyen qui entre dans l'équation (5) a été déterminé empiriquement par Sabine à partir des dimensions des salles. Une démonstration utilisant l'acoustique géométrique lui a donné une base théorique (Kosten 1960). Ici on utilise la définition énergétique et statistique de l'intensité incidente (8) pour exprimer la perte d'énergie pour l'ensemble des parois de la salle

$$d\mathcal{E}_A = \bar{\alpha} I_{inc} S dt = \frac{c E \bar{\alpha} S}{4} dt.$$

Cette équation, confrontée à la relation (4) où  $\mathcal{E} = EV$  permet d'exprimer le libre parcours moyen par

$$\bar{\ell} = \frac{4V}{S}. \quad (9)$$

### Solutions du modèle de Sabine

L'expression (9) du libre parcours moyen permet d'écrire l'équation (5) sous la forme d'une équation différentielle dont la variable est la densité d'énergie  $E$

$$V \frac{dE}{dt} + \frac{c S \bar{\alpha}}{4} E = (1 - \bar{\alpha})W. \quad (10)$$

On considère deux solutions:

#### 1) Cas où la puissance de la source demeure constante.

Le régime est permanent et  $dE/dt = 0$ . L'équation (10) conduit à

$$E = \frac{4W}{c \bar{\alpha} S} (1 - \bar{\alpha}).$$

Plutôt qu'à la densité d'énergie, on s'intéressera à la pression quadratique moyenne du champ diffus, ce qui s'exprime d'après l'équation (7) par  $\langle p_R^2 \rangle / \rho_0 c = c E$ , soit

$$\frac{\langle p_R^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{4W}{\bar{\alpha} S} (1 - \bar{\alpha}) = \frac{4W}{R}. \quad (11)$$

$R$  est souvent désigné comme la constante de salle  $R = \bar{\alpha} S / (1 - \bar{\alpha})$  et  $\bar{\alpha}$  est le coefficient d'absorption moyen de la salle dont la surface totale des parois est  $S$

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum_i \alpha_i S_i}{S}, \quad (12)$$

avec  $\alpha_i$  le coefficient d'absorption d'un élément de surface  $S_i$ . Dans les salles réverbérantes, où  $\bar{\alpha}$  est faible, on adopte pour la constante de salle l'approximation

$$R \simeq \bar{\alpha} S = \sum_i \alpha_i S_i.$$

La pression quadratique à une distance  $r$  de la source sera la somme du champ direct (Eq. 1) et du champ diffus (Eq. 11)

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{\langle p_D^2 \rangle}{\rho_0 c} + \frac{\langle p_R^2 \rangle}{\rho_0 c} = W \left[ \frac{Q(\theta)}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right]. \quad (13a)$$

On rencontre souvent cette formule exprimée en niveau de pression et de puissance acoustique

$$L_p = L_W + 10 \log \left[ \frac{Q(\theta)}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right] \quad [\text{endB}], \quad (13b)$$

où  $L_p = 20 \log(p_{eff}/p_0)$  est le niveau de pression avec  $p_{eff} = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$  la pression efficace (ou RMS) et  $p_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , la pression de référence,

$L_W = 10 \log(W/W_0)$  est le niveau de puissance acoustique avec  $W_0 = 10^{-12} \text{ W}$  ( $= 1 \text{ pW}$ ) la puissance de référence.

La figure 5 montre la loi de décroissance du niveau de pression en fonction de la distance à la source:

- près de la source, le premier terme domine et le niveau de pression décroît comme en champ libre, c'est à dire de 6 dB par doublement de la distance,
- à une certaine distance de la source, le second terme représentant le champ diffus est prépondérant et le niveau reste constant.

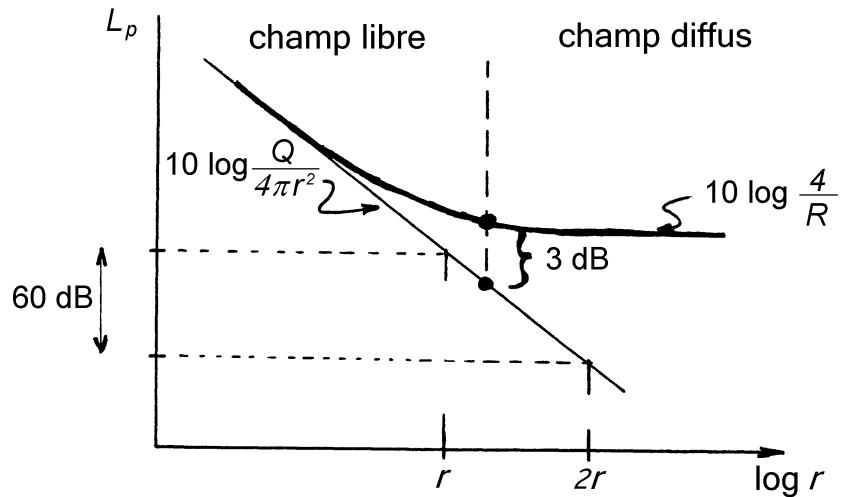


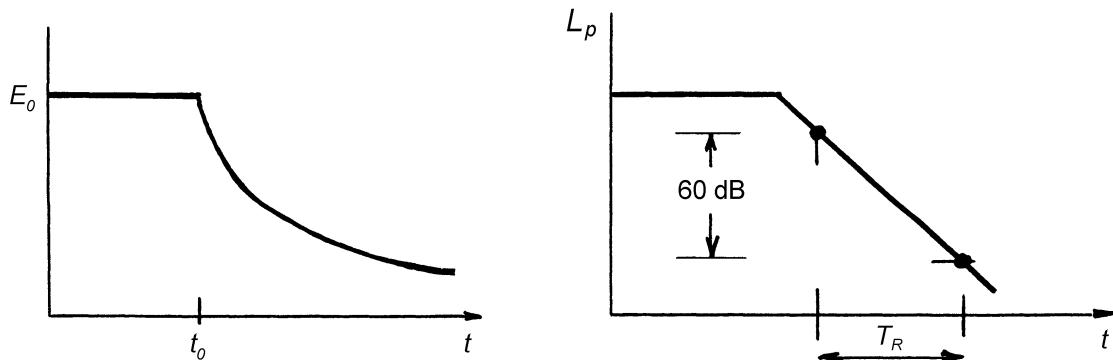
Fig. 5 – Niveau de pression dans un champ diffus en fonction de la distance à la source.

## 2) Cas où la source cesse d'émettre brusquement.

Après le temps  $t_0$  (figure 6), la densité d'énergie du champ diffus obéit à l'équation différentielle (10) sans son second membre

$$V \frac{dE}{dt} + \frac{c S \bar{\alpha}}{4} E = 0,$$

dont la solution est  $E = E_0 \exp[-\frac{c S \bar{\alpha}}{4 V} (t - t_0)]$ , avec  $E_0$  la condition initiale correspondant à l'état stable.



*Fig. 6 – Décroissance de la densité d'énergie dans le champ diffus après arrêt de la source à  $t_0$ : (a) échelle linéaire; (b) échelle logarithmique pour la définition du temps de réverbération ( $L_p$  niveau de pression en dB).*

On définit le temps de réverbération  $T_R$  (ou  $T_{60}$  ou  $RT$ ) comme le temps nécessaire à l'énergie du champ diffus pour décroître de 60 dB (soit 1 millionième =  $10^{-6}$ ). Donc

$$10^{-6} = \exp\left[-\frac{c S \bar{\alpha}}{4 V} T_R\right] \quad \Rightarrow \quad -6 = -(\log e) \frac{c S \bar{\alpha}}{4 V} T_R,$$

d'où le temps de réverbération

$$T_R = \frac{24}{(\log e) c} \frac{V}{\bar{\alpha} S}.$$

En effectuant le calcul des constantes, on obtient l'expression habituellement désignée sous le nom de "formule de Sabine"

$$T_R = \frac{0,16 V}{\bar{\alpha} S}, \quad (14)$$

qui relie le temps de réverbération au volume de la salle, à la surface totale de ses parois et à leur coefficient d'absorption moyen  $\bar{\alpha}$ . On désigne souvent  $\bar{\alpha} S = A$  comme l'aire d'absorption, c'est à dire la surface équivalente d'un matériau parfaitement absorbant (une définition imagée consiste à dire que l'aire d'absorption  $A$  est équivalente à la surface de fenêtres ouvertes dans une salle parfaitement réverbérante !).

Cette formule est valable dans la limite du respect des hypothèses du modèle:

- répartition homogène de l'absorption pour que la notion de coefficient d'absorption moyen ait un sens,
- régularité de la forme du local pour que le libre parcours moyen puisse s'exprimer par l'équation (9).

## 2 TEMPS DE REVERBERATION ET ABSORPTION

### *Mesure du temps de réverbération*

La mesure du temps de réverbération est utilisée pour caractériser une salle. Elle est également associée à d'autres mesures acoustiques pour déterminer le coefficient d'absorption des matériaux, la transparence acoustique des parois, la puissance acoustique des sources. La méthode employée est basée sur la rapidité de décroissance du niveau sonore après arrêt de la source. La méthode la plus précise consiste à utiliser une source de bruit large bande électronique. Le niveau de pression est mesuré avec un microphone. Il existe des appareils spécifiques qui déterminent directement le  $T_R$  où bien, on utilise un enregistreur sur papier. Avec une échelle logarithmique des niveaux, la courbe de décroissance est une droite et le  $T_R$  se détermine aisément à partir de sa pente. Pour des mesures de précision dans des salles réverbérantes on utilise des enregistrements par tiers d'octave. Une autre méthode, employée principalement sur site, utilise le bruit impulsionnel d'un pistolet (figure 7). L'inconvénient de cette technique réside dans le spectre limité du signal, et on opère généralement par bande d'octave.

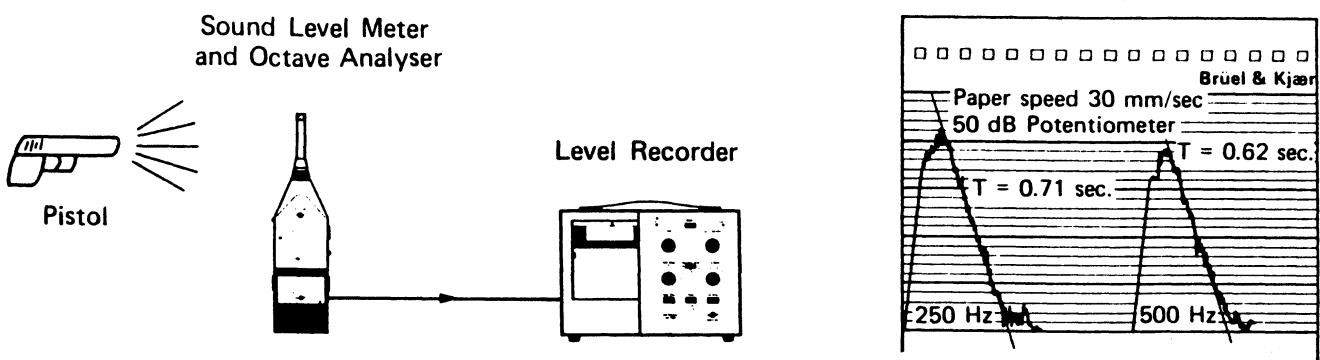


Fig. 7 – Mesure du temps de réverbération par technique impulsionnelle (d'après Ginn [3]).

On recommande généralement que le niveau initial de la source soit supérieur de 40 dB au bruit de fond ambiant dans chaque bande de fréquence. La meilleure position de la source (surtout pour les petites salles) est dans un coin. Si une seule position du microphone peut suffire pour une salle de petite dimension, il faut réaliser des mesures en plusieurs emplacements pour une grande salle, car le  $T_R$  peut fluctuer assez sensiblement.

### Détermination de l'aire d'absorption

Le temps de réverbération est utilisé pour caractériser la contribution apportée par une salle à l'ambiance sonore. Pour les auditoriums, l'expérience a permis de définir un temps de réverbération optimal en fonction de leur utilisation et qui varie *un peu près* comme la racine <sup>cubique</sup> du volume. Les  $T_R$  de la figure 8 doivent être considérés comme une tendance. De bonnes salles peuvent s'écartez sensiblement des valeurs indiquées car d'autres caractéristiques sont tout aussi importantes, comme la géométrie, les réflexions latérales (effet d'espace) et d'autres phénomènes liés à la psycho-acoustique.

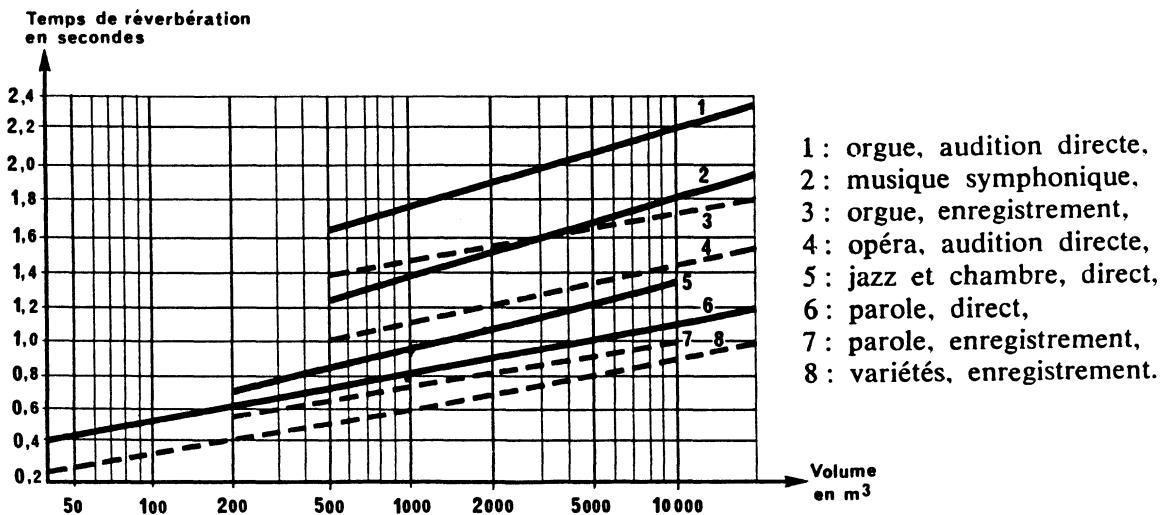


Fig. 8 – Temps de réverbération des salles (auditoriums) en fonction de leur volume et de leur utilisation (d'après Lamoral [4]).

Il est admis également que les temps de réverbération en basse fréquence doivent être un peu plus importants que dans la partie haute du spectre (1,5 fois environ). Le  $T_R$  joue un rôle dans l'équilibre spectral d'une salle et sa variation dans le domaine fréquentiel peut donc dépendre de la destination de la salle, comme l'indique la figure 9.

Si le temps de réverbération ne correspond pas à la valeur souhaitée, on sera amené à modifier l'aire d'absorption initiale du local  $A_0 = \bar{\alpha}_0 S$ . Cependant, des écarts sont constatés entre les résultats expérimentaux et l'utilisation de la formule de Sabine (Eq. 14) quand les salles deviennent plus absorbantes. Ce désaccord devient évident quand  $\bar{\alpha} = 1$ : dans l'Eq. (14), le temps de réverbération n'est pas nul. On a donc été conduit à utiliser une relation plus générale: la *formule de Norris-Eyring*

$$T_R = \frac{0,16 V}{-S \ln(1 - \bar{\alpha})}. \quad (15)$$

Cette équation vérifie bien la condition limite:  $T_R \rightarrow 0$  quand  $\bar{\alpha} \rightarrow 1$ . Considérant le développement  $-\ln(1 - \bar{\alpha}) = \bar{\alpha} + \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{3}\bar{\alpha}^3 + \dots$  dont la formule de Sabine n'utilise que le premier terme, la formule d'Eyring \* devra être employée quand  $\bar{\alpha} > 0,4$ . A partir de (15), le coefficient d'absorption correspond au temps de réverbération sera

$$\bar{\alpha}_1 = 1 - \exp\left(-\frac{0,16 V}{S T_R}\right),$$

\* Pour mémoire, il faut citer la formule de Mellington, où  $-S \ln(1 - \bar{\alpha})$  est remplacée par  $\sum_i -S_i \ln(1 - \bar{\alpha}_i)$  qui est parfois employée quand les coefficients des matériaux sont très différents.

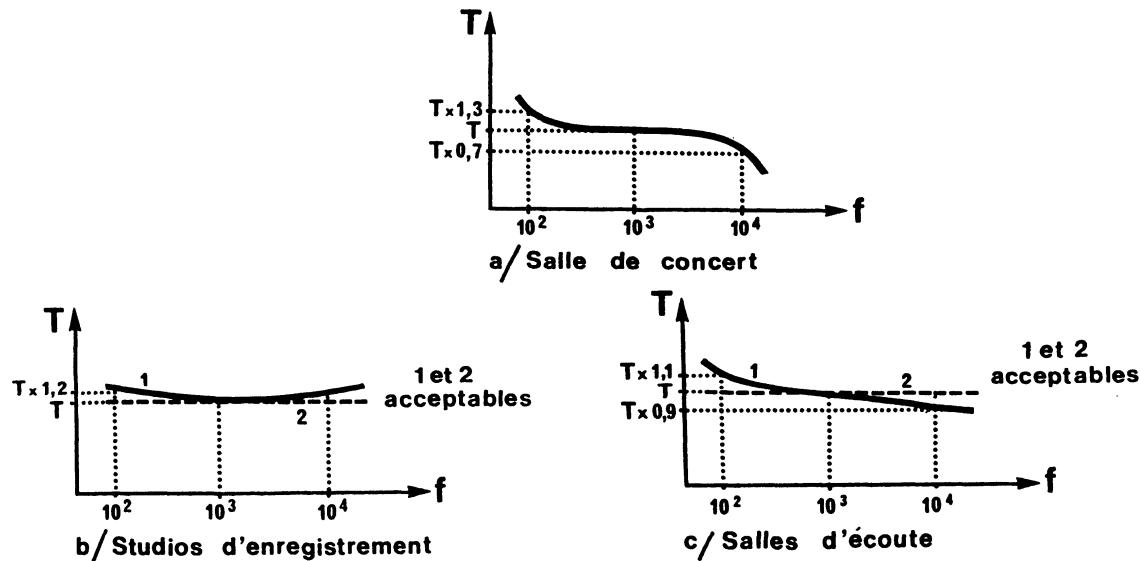


Fig. 9 – Evolution du temps de réverbération en fonction de la fréquence selon la destination de la salle (d'après Lamoral [4]).

et l'aire d'absoption à ajouter sera  $\Delta A = A_0 - A_1 = S(\bar{\alpha}_0 - \bar{\alpha}_1)$ .

Les principales catégories d'absorbants utilisables sont:

- les panneaux fléchissants: ils possèdent une absorption sélective dans la gamme des basses fréquences (< 500 Hz). L'absorption est maximale à la fréquence de résonance (figure 10)

$$f_r \simeq \frac{60}{\sqrt{M_s d}}, \quad (16)$$

$M_s$ : masse du panneau par unité de surface ( $\text{kg/m}^2$ )

$d$ : distance du panneau au mur rigide (m)

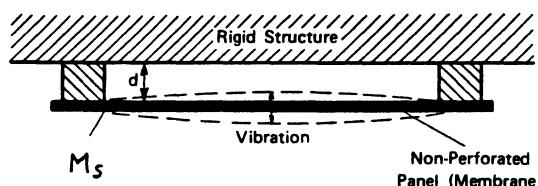


Fig. 10 – Absorption par panneaux fléchissants.

- les résonateurs d'Helmholtz et les panneaux perforés: ils possèdent une absorption sélective dans la gamme des fréquences moyennes. La fréquence de résonance est (voir *silencieux*)

$$f_r = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{l' V}}, \quad (17)$$

$S$ : section du col ( $\text{m}^2$ )

$l'$ : longueur du col corrigée (m)

$V$ : volume de la cavité du résonateur ( $\text{m}^3$ )

L'utilisation des résonateurs d'Helmholtz se fait souvent sous la forme de panneaux perforés (figure 11) dont la distance au mur et la densité des perforations conduiront à un volume équivalent de cavité.

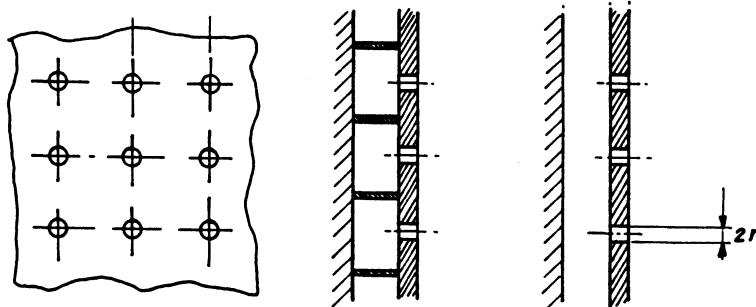


Fig. 11 – Différents types de panneaux perforés agissant comme des résonateurs d'Helmholtz (d'après Lienard et François [5]).

- les matériaux poreux (laines de verre, laines minérales): ils agissent surtout dans les moyennes et hautes fréquences. Leur efficacité dans les basses fréquences dépend beaucoup de leur montage et de leur épaisseur (figure 12).

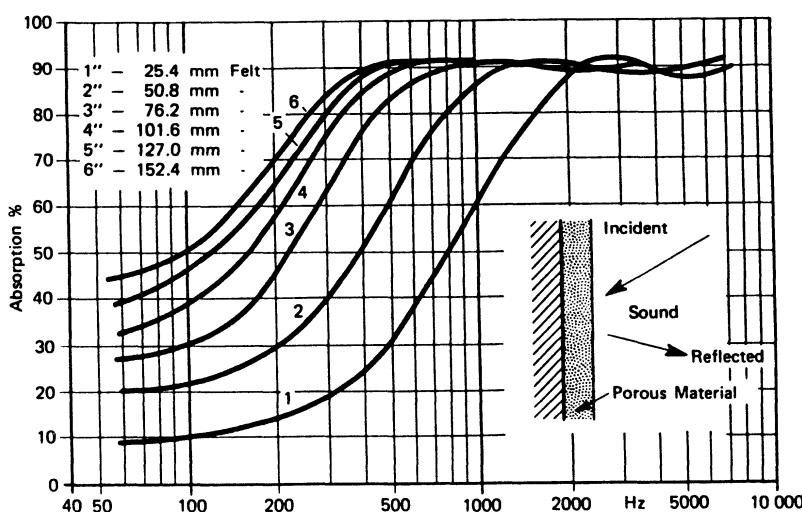


Fig. 12 – Absorption d'un matériau poreux en fonction de son épaisseur.

Une autre technique est employée pour déterminer l'aire d'absorption d'une salle: dans les régions où le champ diffus est prépondérant, la relation (13) montre que la pression dépend de la puissance acoustique de la source et de l'aire d'absorption de la salle

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} \simeq \frac{\langle p_R^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{4 W}{R}.$$

En utilisant une source sonore de référence dont le niveau de puissance acoustique  $L_W$  est connu, on obtient

$$10 \log A = L_W - \bar{L}_p + 6. \quad (18)$$

$\bar{L}_p$  est le niveau moyen de pression obtenu à partir de mesures  $L_{pi}$  en plusieurs points ( $i = \{1, \dots, N\}$ )

$$\bar{L}_p = 10 \log \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 10^{L_{pi}/10} \right] \quad [\text{en dB}]. \quad (19)$$

L'augmentation de l'absorption n'est pas la solution à tous les problèmes d'acoustique des locaux. Dans un atelier par exemple, en traitant les parois pour passer d'une constante de salle  $R = 500$  à une constante  $R = 2000$ , on gagne 6 dB dans le champ diffus à 10 m de la source. Cependant, au poste de travail, près de la source le niveau n'a pratiquement pas diminué, comme le montre les graphes de la figure 13. Dans un rayon de 3 m, la diminution ne dépasse pas 2 dB. Il faudra avoir recours à d'autre méthodes pour agir sur le champ direct (capotage, écran) ou sur les premières réflexions (traitement des parois proches, utilisation de baffles suspendus ...).

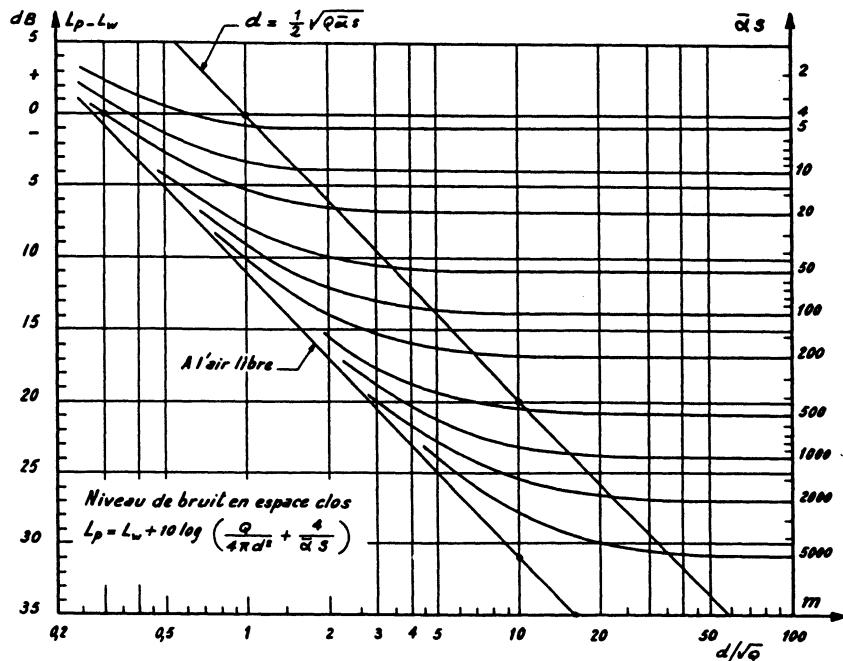


Fig. 13 – Le traitement du local n'est pas une solution pour la réduction du niveau sonore dans le champ direct des sources (d'après Lienard et François [5]).

## Références

- [1] S. Lewy, "Fondements de l'acoustique industrielle, UTC, Compiègne, 1990.
- [2] A.D. Pierce, *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*, McGraw-Hill, 1981.
- [3] K.B. Ginn, *Application of B&K equipement to architectural acoustics*, Brüel-Kjaer, Naerum, 1978.
- [4] R. Lamoral, *Acoustique et architecture*, Masson, 1975.
- [5] P. Lienard, P. François, *Acoustique industrielle*, Masson, 1972.
- [6] R. Waterhouse, "Interference patterns in reverberant sound fields", *J. Acoust. Soc. Am.* **27** (1955), 247-258.
- [7] H. Kuttruff, *Room acoustics*, Applied Science, 1973.

## ANNEXE A

### **Silencieux dissipatifs**

Prise en compte de la dissipation

Pertes par insertion

Modèle de matériau dissipatif

Modèles empiriques d'atténuation dans des conduits traités

Modèle paramétrique de Kuntz et Hoover

Perte par propagation normalisée

Méthode approchée de Mechel

Réaction locale et réaction étendue



### **Bibliographie**

D.A. Bies, C.H. Hansen (1996) *Engineering Noise Control*, Spon, Chapitre 9.

M.E. Delany, E.N. Bazley (1970), "Acoustical properties of fibrous absorbent materials", *Appl. Acoust.* **3**, 105-116.

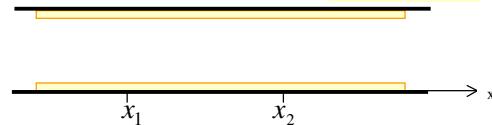
W. Frommhold, F.P. Mechel (1990), "Simplified methods to calculate the attenuation of silencieux", *J. Sound Vib.*, **141**, 103-125.

A.G. Galaitsis, I.L. Vér (1992), "Passive silencers and lined ducts (Ch.10)", in *Noise and Vibration Control Engineering*, (L.L. Beranek and I. Vér, Ed.), (Wiley).

H.L. Kuntz, R.M. Hoover (1987), "The interrelationships between the physical properties of fibrous duct lining materials and lined duct sound attenuation", ASHRAE Transactions 3082, Vol.93, PT.2 (RP-478), 449-470.

## PRISE EN COMPTE DE LA DISSIPATION

Constante de propagation complexe  $\Gamma = \sigma + jk$



En considérant l'onde incidente seule

$$p(x) = A_I e^{-\Gamma x} = A_I e^{-jkx} e^{-\sigma x}$$

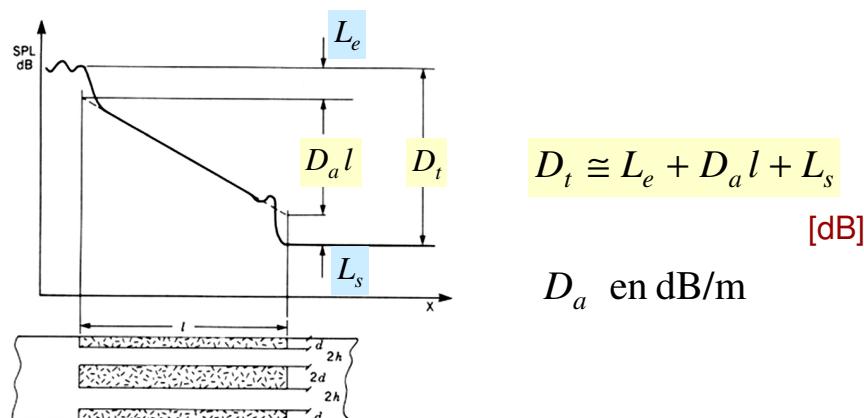
**Perte par propagation:** perte de transmission sur une longueur unitaire (1m)  $x_2 = x_1 + 1$

$$D_a = 10 \log \frac{S |p(x_1)|^2}{S |p(x_2)|^2} = 10 \log e^{2\sigma(x_2 - x_1)} = 8,69 \quad \sigma = 8,89 \operatorname{Re}\{\Gamma\}$$

[dB/m]

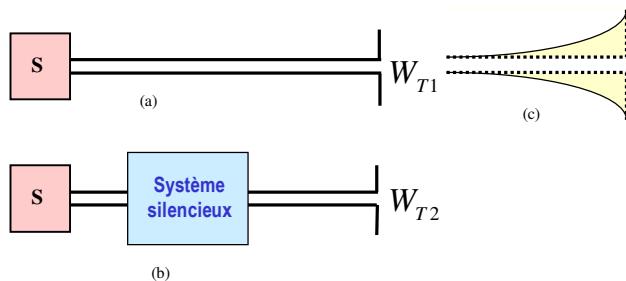
## PRISE EN COMPTE DE LA DISSIPATION

Un effet **dissipatif** est souvent accompagné d'un effet **réactif** : exemple d'un silencieux dissipatif de longeur  $L$  raccordé à des conduits d'entrée et de sortie de même section



## QUANTIFICATION DE L'ATTENUATION

### Perte par insertion



$$D_i = 10 \log \frac{W_{T1}}{W_{T2}} = L_{W_{\text{SANS}}} - L_{W_{\text{AVEC}}}$$

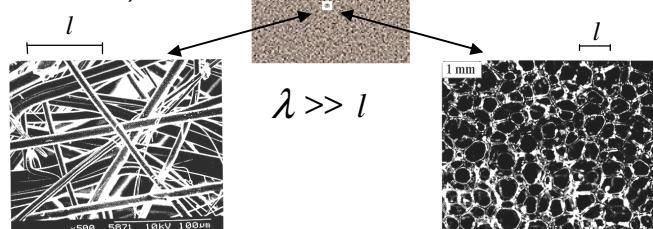
## MODELE DE MATERIAU DISSIPATIF

matériaux poreux, laines minérales ou mousses polymères

**structure (squelette)**

+

**fluide (porosité 90 à 98%)**



*Dissipation visqueuse*

*Dissipation thermique*

*Dissipation viscoélastique*

## MODELE DE MATERIAU DISSIPATIF

Modèles de fluide équivalent

Modèle poroélastique



(théorie de Biot)

*le plus simple : modèle de Delaney et Bazley*

dépend d'une seule variable    
$$X = \frac{\rho_0 f}{r}$$

avec  $r$  résistance spécifique au passage de l'air [Ns/m<sup>4</sup>]

Impédance caractéristique complexe du matériau

$$Z_a = Z_0 (1 + 0.0571 X^{-0.754} - j 0.087 X^{-0.732})$$

Constante de propagation complexe

$$K_a = k_0 (1 + 0.0978 X^{-0.700} - j 0.189 X^{-0.595})$$

## MODELE DE MATERIAU DISSIPATIF

*Epaisseur  $d$  de matériau sur une surface rigide*

Impédance normalisée de la surface

$$\xi = \frac{Z_a}{Z_0} \coth(\Gamma_a d)$$

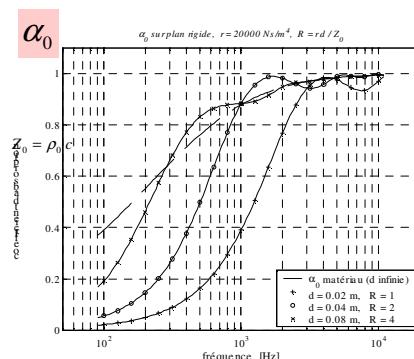


$$Z_0 = \rho_0 c$$

et le coefficient d'absorption en  
Incidence normale

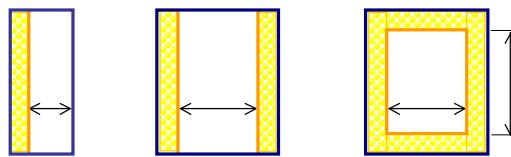
$$\alpha_0 = \frac{4 \operatorname{Re}\{\xi\}}{|\xi|^2 + 2 \operatorname{Re}\{\xi\} + 1}$$

résistance normalisée au passage de l'air



$$R = \frac{rd}{Z_0}$$

## Modèles empiriques



$P$  périmètre traité —  $S$  section libre

Sabine	$D_a = 1.05 \frac{P}{S} \bar{\alpha}^{1.4}$	[dB/m]
Piening	$D_a = 1.5 \frac{P}{S} \bar{\alpha}$	[dB/m]
Parkinson	$D_a = 2.84 \frac{P}{S} \log_{10}(1 - \alpha_0)$	[dB/m]

## Modèles empiriques

Modèle proposé Kuntz et Hoover (1987)

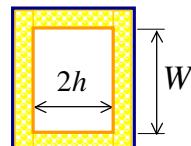
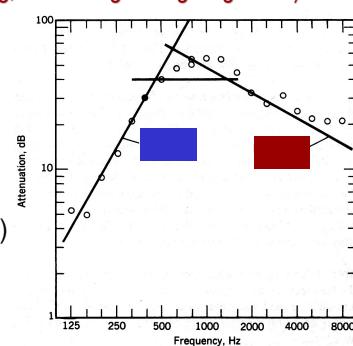
ASHRAE (American Society of Heating, Air Conditioning, and Refrigerating Engineers)

asymptote basse fréquence (125-800 Hz)

$$D_t|_{bas} = \frac{P}{S} l \frac{d^{1.08} (2h)^{0.36} f^{(1.17+K_2\rho_L)}}{K_3 \rho_L^{2.3}} 10^{1.32}$$

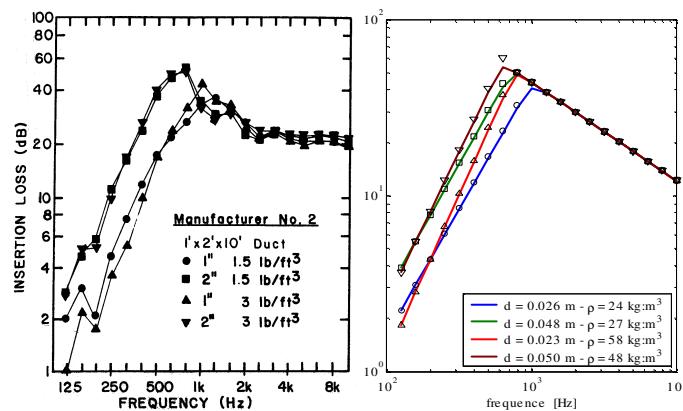
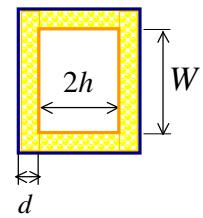
asymptote haute fréquence (800 Hz à 10 kHz)

$$D_t|_{haut} = \frac{P}{S} \min(l, 3) \frac{f^{(K_5 - 1.61 \log_{10}(0.001 P/S))}}{W^{2.5} (2h)^{2.7}} K_4 10^{-18.60}$$



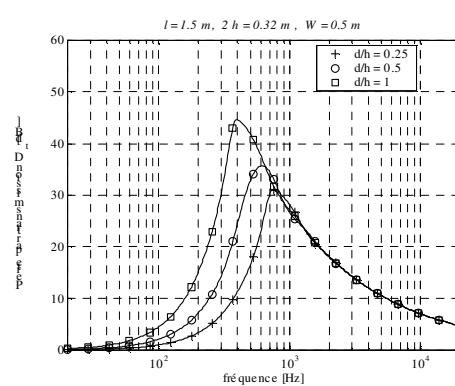
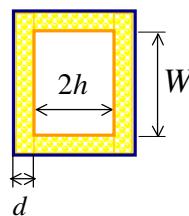
## Modèles empiriques

Modèle de Kuntz et Hoover (1987)



## Modèles empiriques

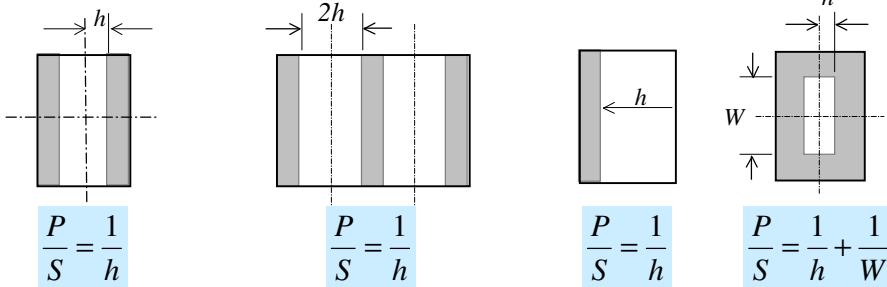
Modèle de Kuntz et Hoover (1987)



## Modèles empiriques

la perte par propagation peut s'écrire sous la forme

$$D_a = \frac{P}{S} D_h \quad [\text{dB/m}]$$



$$D_a \approx \frac{D_h}{h}$$

## Perte par propagation normalisée

Théorie modale pour les conduits dissipatifs pour la propagation entre **deux plans parallèles d'impédance  $Z_w$**  distants de  $2h$ .

Two parallel horizontal lines representing plates, separated by a distance  $2h$ . To the right, the formula  $\Gamma = jK$  is shown.

$$p(x, y, t) = A e^{-jKx} \phi(k_y y) e^{j\omega t} = A e^{-\Gamma x} \phi(k_y y) e^{j\omega t}$$

### Relation de dispersion

$$k^2 = K^2 + k_y^2 = \left(\frac{\Gamma}{j}\right)^2 + k_y^2 = k_y^2 - \Gamma^2 \implies \Gamma = \sqrt{k_y^2 - k^2}$$

## Perte par propagation normalisée

**deux plans parallèles d'impédance  $Z_w$**



$$u_y(x, \pm h, t) = \frac{-1}{jZ_0 k} \left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=\pm h}$$

$$Z_0 = \rho_0 c$$

en faisant une hypothèse de matériaux à réaction locale, on aboutit à une **équation transcendante complexe**

$$k_y h \tan(k_y h) = j k h \frac{Z_0}{Z_w}$$

La solution  $k_y h$  permet d'exprimer  $\Gamma h = \sqrt{(k_y h)^2 - (k h)^2}$

$$D_a = 8.69 \operatorname{Re}\{\Gamma\}$$

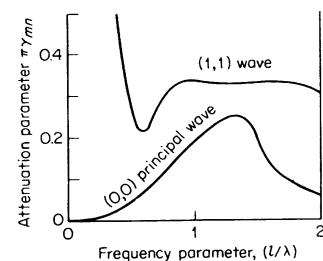
$$D_h = 8.69 \operatorname{Re}\{\Gamma h\} = h D_a$$

## Perte par propagation normalisée

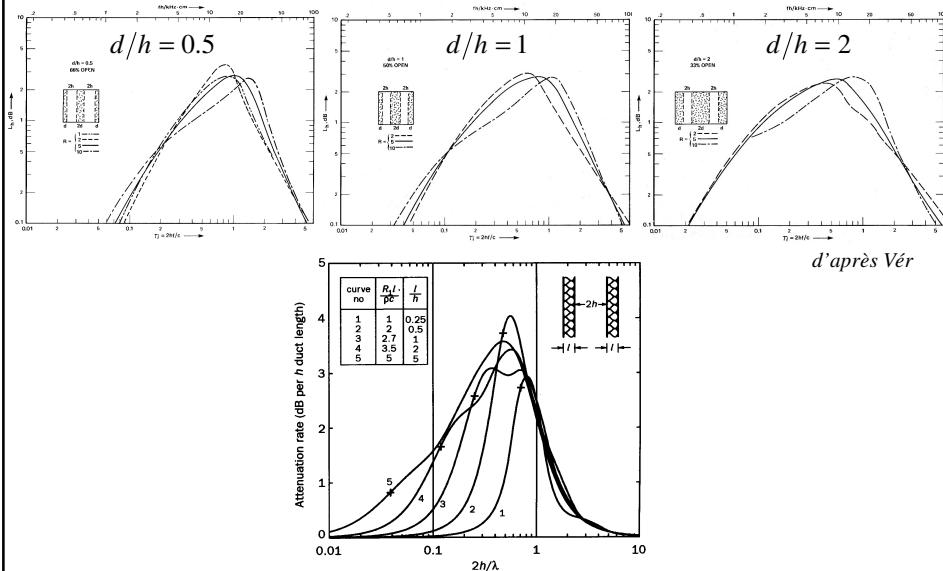
**deux plans parallèles d'impédance  $Z_w$**



Une des premières études due à Morse (1939) a montré que le **mode plan** était le **moins atténué**



## Perte par propagation normalisée



## Méthode approchée

Méthode approchée de résolution proposée par Mechel

$$k_y h \tan(k_y h) = j k h \frac{Z_0}{Z_w} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{E} \tan \sqrt{E} = jU$$

### Solutions

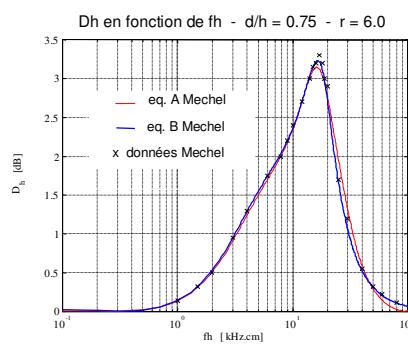
#### Eq. A

$$E \approx \frac{(2.74 - j0.52) jU}{2.88 - j0.55 + jU}$$

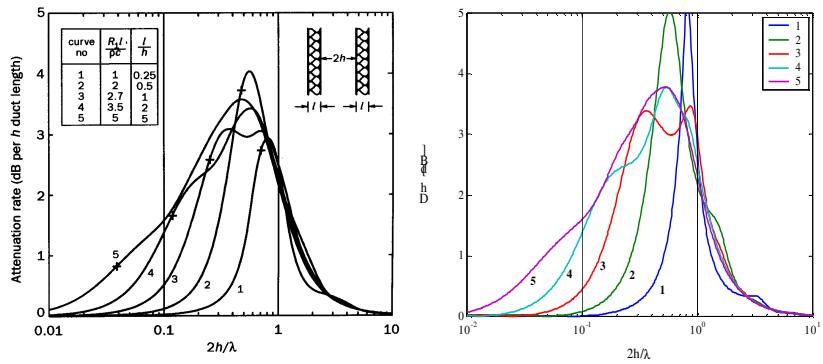
#### Eq. B

$$E_{1,2} \approx \frac{(78.94 - j5.43) + jU (34.47 - j2.2) \pm \sqrt{}}{16.1 - j1.11 + 2jU}$$

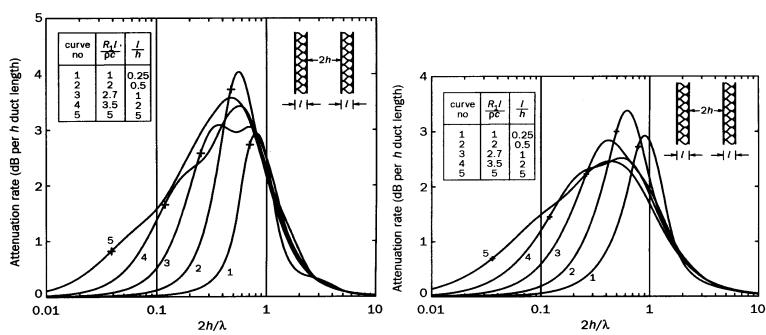
$$\sqrt{ } = \sqrt{(6203 - j857) + jU (2887.3 - j372) + (jU)^2 (867.4 - j130)}$$



## Méthode approchée



## Réaction locale et réaction étendue



## ANNEXE B

### **Traitement acoustique par encoffrement des sources de bruit**

Introduction

L'efficacité d'un capot

Comportement acoustique d'un encoffrement

Modèle simple pour la prévision des performances d'un capot

Modèle monodimensionnel de Jackson

Bibliographie

## **Introduction**

Un **encoffrement** (ou **capotage**) est une enveloppe qui enferme la source sonore (machine) totalement ou partiellement, et dont la fonction attendue est de réduire le rayonnement acoustique. On distingue :

- le capotage complet : il recouvre entièrement la machine, mais peut présenter des ouvertures pour la commande ou l'aération. La réduction du bruit est assurée de manière globale.
- le capotage intégré : c'est un encoffrement acoustique fermé qui est monté directement sur le bâti de la machine. Compact, il épouse les formes de la machine.
- le capotage partiel : il est seulement mis en œuvre sur les parties bruyantes de la machine quand celles-ci sont nettement séparées. C'est une protection acoustique de type écran qui est rarement suffisante pour obtenir une amélioration très importante.

## **L'efficacité d'un capot**

L'efficacité d'un encoffrement est liée à l'atténuation du bruit qu'il apporte. Elle se définit par la **perte par insertion** qui est la différence entre la puissance acoustique de la source sans capot et la puissance acoustique de la source capotée :

$$D = L_W \text{ sans} - L_W \text{ avec} \quad [\text{dB}]$$



Les parois de l'encoffrement constituent une barrière au bruit aérien rayonné par la source, mais il ne faut pas oublier que c'est **l'ensemble des chemins de transmission** qui doit être maîtrisé afin d'optimiser les performances :

- la propagation à travers les parois : assure l'isolement acoustique. L'indice d'affaiblissement acoustique en est la caractéristique principale.
- l'étanchéité : elle doit être assurée au niveau des assemblages et des ouvertures fonctionnelles par des joints, des silencieux, des chicanes, etc....
- la propagation solidienne : les attaches du capot sur la source, les éléments de machine solidaires du capot ou le traversant doivent être isolés sur le plan vibratoire. Il est indispensable de **désolidariser le capotage de toute source d'excitation**, que ce soit la machine ou le sol.

## Comportement acoustique d'un encoffrement

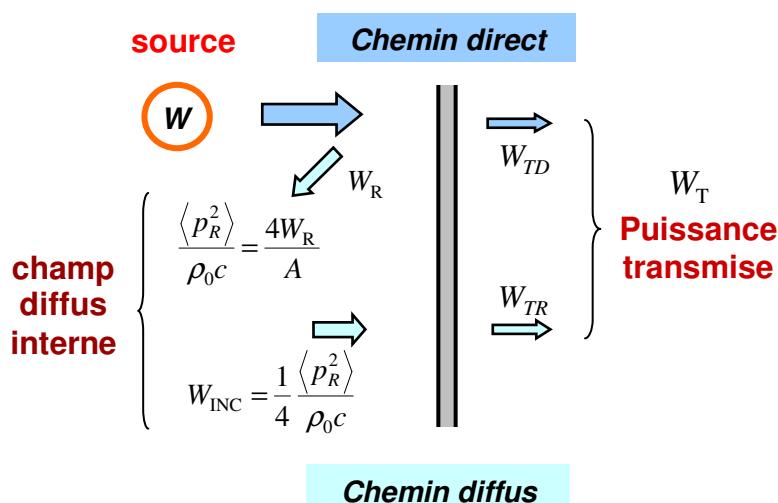
C'est l'indice d'affaiblissement acoustique global des parois qui va avoir une influence prépondérante sur la valeur des pertes par insertion. Mais la transparence acoustique n'est pas le seul phénomène concerné : le confinement créé par le capot autour de la source aura tendance à accroître le niveau de sonore à l'intérieur et à augmenter le bruit transmis. Pour cette raison, il est souvent nécessaire de disposer un matériau absorbant sur la face interne des parois.

L'indice d'affaiblissement global des panneaux  $R = \log 1/\tau$  est obtenu en considérant l'indice d'affaiblissement en champ diffus de chaque paroi en tenant compte des ouvertures éventuelles. Le facteur de transmission en champ diffus est

$$\tau = 10^{-R/10}$$

Pour définir un modèle qui nous permette de prédire simplement l'efficacité d'un capotage de machine, on considère

- le rayonnement direct de la source dont une partie de la puissance est transmise par les panneaux ( $W_{TD}$ ), une autre dissipée par les matériaux absorbants disposés sur la face interne et une troisième partie réfléchie ( $W_R$ ).
- l'effet de réverbération qui dépend de l'absorption totale (parois + source) sous le capot. La puissance incidente sur les parois ( $W_{INC}$ ) créée par le champ diffus est en partie transmise vers l'extérieur du capot ( $W_{TR}$ ).



## Modèle simple pour la prévision des performances d'un capot

Le niveau de puissance de la source sans encoffrement est

$$L_W \text{ sans} = 10 \log \frac{W}{W_0}.$$

### 1) Rayonnement direct

La puissance acoustique incidente sur les parois correspond à la puissance de la source  $W$ . La puissance transmise  $W_{TD}$  est proportionnelle au coefficient de transmission moyen des panneaux. Puisqu'il s'agit d'un champ direct, les angles d'incidence des ondes sont proches de la normale et c'est le coefficient de transmission en incidence normale  $\tau_0$  qui est pris en compte

$$W_{TD} = W \tau_0$$

Puisque l'indice d'affaiblissement acoustique en champ diffus  $R = 10 \log 1/\tau$ , qui est généralement la valeur connue, est de 5 dB inférieur à l'indice d'affaiblissement en incidence normale  $R_0 = 10 \log 1/\tau_0$  (loi de masse)

$$\tau_0 = 0,316 \tau$$

### 2) Effet de la réverbération

C'est la puissance réfléchie par les parois  $W_R$  après absorption partielle due au matériau qui les recouvre qui vient alimenter le champ réverbéré sous le capot

$$W_R = W(1 - \bar{\alpha})$$

$\bar{\alpha}$  est le coefficient d'absorption moyen à l'intérieur du capot. Pour connaître le niveau de pression acoustique du champ réverbéré  $\langle p_R^2 \rangle / \rho c$  à l'intérieur du capot (produit par les réflexions sur les panneaux et les parois de la machine), le modèle de Sabine est employé

$$\frac{\langle p_R^2 \rangle}{\rho c} = \frac{4 W_R}{A}$$

$A$  est l'aire d'absorption du volume intérieur qui correspond au produit du coefficient d'absorption moyen  $\bar{\alpha}$  par la surface totale intérieure  $S_i$  (panneaux + source)

$$A = \bar{\alpha} S_i$$

Le flux de puissance incident sur les parois dû au champ réverbéré est

$$W_{inc} = \frac{\langle p_R^2 \rangle}{4 \rho c} S = \frac{W_R S}{A} = \frac{W(1 - \bar{\alpha})S}{\bar{\alpha} S_i}$$

et la puissance transmise correspond à

$$W_{\text{TR}} = W_{\text{inc}} \tau.$$

### 3) Puissance totale transmise et perte par insertion

La puissance transmise totale est la somme des deux contributions : la puissance transmise due au champ direct  $W_{TD}$  et celle due au champ réverbéré  $W_{\text{TR}}$

$$W_T = W_{TD} + W_{\text{TR}} = W \tau_0 + W_{\text{inc}} \tau.$$

Le rapport  $W_T / W$  s'écrit alors

$$\frac{W_T}{W} = \tau \left[ 0,3 + \frac{1 - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \frac{S}{S_i} \right]$$

et la perte par insertion

$$D = 10 \log \frac{W}{W_T} = 10 \log \frac{1}{\tau} - 10 \log \left( 0,3 + \frac{1 - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \frac{S}{S_i} \right)$$

Cette formule, qui permet de calculer une efficacité globale du capot, est souvent donnée sous une forme encore simplifiée, où il est considéré que

- la surface intérieure  $S_i$  est équivalente à l'aire du capot  $S$  :  $S/S_i \approx 1$ ,
- le coefficient d'absorption moyen  $\bar{\alpha}$  est sensiblement inférieur à 1 pour que

$$\frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}} \approx \bar{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{\alpha}} \gg 0,3.$$

Ces approximations conduisent à la relation

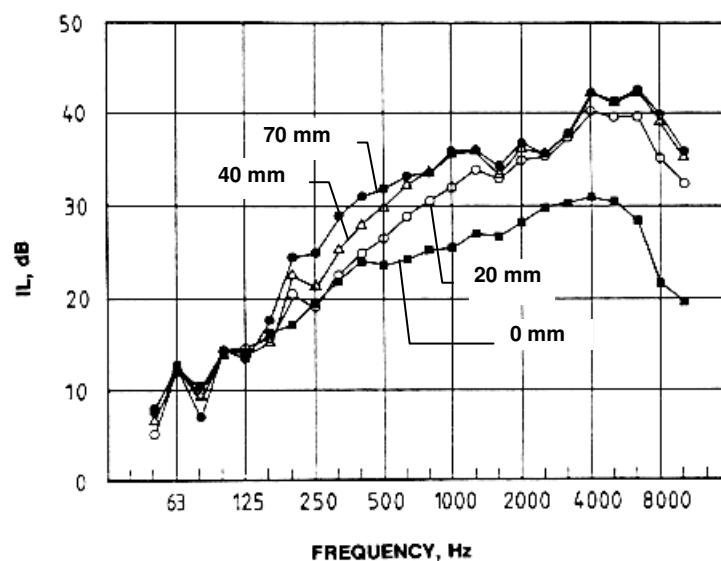
$$D' = R + 10 \log \bar{\alpha}$$

Le tableau suivant compare les pertes par insertion  $D$  et  $D'$  pour différentes valeurs de  $\bar{\alpha}$  et en considérant que  $S/S_i = 0,8$ .

$\bar{\alpha}$	$D$	$D'$	$D' - D$
1	$R + 5$	$R$	-5
0.8	$R + 3$	$R - 1$	-4
0.6	$R + 0.8$	$R - 2.2$	-3
0.4	$R - 1.8$	$R - 4$	-2.2
0.2	$R - 5.5$	$R - 7$	-1.5
0.1	$R - 8.8$	$R - 10$	-1.2
0.05	$R - 12$	$R - 13$	-1

Les résultats ci-dessus permettent de faire les constatations suivantes :

- a) le modèle utilisé montre qu'un coefficient moyen  $\bar{\alpha}$  d'environ 0,6 est nécessaire pour obtenir des performances équivalentes à l'indice d'affaiblissement moyen  $R$  des parois qui composent le capot. Au-delà, un accroissement du coefficient  $\bar{\alpha}$  de 0,1 apportera un gain d'environ 1 dB jusqu'à  $\bar{\alpha} = 1$  ( $D = R + 5$  dB). Cependant, cette rapidité d'accroissement des performances au-dessus de  $\bar{\alpha} = 0,4$  ne correspond pas aux résultats expérimentaux de Fischer et Veres rapportés par Vér [Vér 1992, p.509] et représentés sur la figure 1.3



**Figure** - Perte par insertion mesurée sur un encoffrement constitué de panneaux d'acier de 1,5 mm et de matériaux absorbants d'épaisseur variable.

b) la formule simplifiée sous-évalue le modèle d'autant plus sérieusement que  $\bar{\alpha}$  s'approche de 1. Compte tenu des remarques faites juste au-dessus, il est souvent considéré qu'elle corrige les excès du modèle.



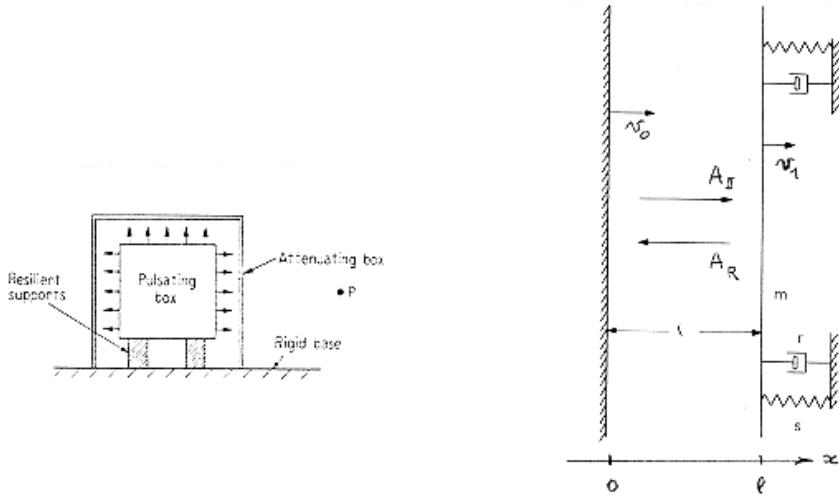
**Figure** - Structure typique d'un encoffrement : carcasse support, panneaux avec trappes de visite, encoffrement monté sur socle avec ouvertures pour passages et aération.

## Modèle monodimensionnel de Jackson

Le modèle couramment employé, basé sur la théorie statistique des salles (modèle de Sabine) n'est pas toujours bien adapté pour traiter les problèmes de prédition des performances acoustiques des encoffrements. En effet,

- la géométrie des sources crée souvent des champs très complexes dans les cavités qui ne peuvent être considérés comme des champs diffus,
- les dimensions des cavités ne sont pas suffisamment importantes (devant la longueur d'onde) pour adopter un modèle statistique,
- la source et le capot sont couplés par la cavité et l'impédance de rayonnement de la source dépend de la distance source-capot et du comportement dynamique du capot.

Devant toute les difficultés à créer un modèle exact trop complexe, Jackson a proposé un modèle unidimensionnel qui reste simple et qui permette de mettre en évidence certains (mais pas tous) des mécanismes mis en jeu [Jackson 1962][Jackson 1966][Byrne et al 1988]. Ce modèle est bien adapté aux cas où les panneaux de l'encoffrement se trouvent à faible distance des parois de la machine. La principale différence entre le modèle et la réalité est que le capotage ajouté ne modifie pas les vibrations de la source (mais seulement son impédance de rayonnement). Cette hypothèse est acceptable parce que l'impédance interne de la machine est généralement grande devant celle du capotage [Fahy 1986].

**Figure 3.4 - Modèle monodimensionnel de capotage.**

Le modèle utilisé est décrit par la figure 3.4. Entre la source et le capot, la pression peut se représenter comme une onde quasi stationnaire

$$p = A_I e^{-j k x} + A_R e^{j k x}, \quad 0 < x < l.$$

Au niveau de la source ( $x = 0$ ), la pression et la vitesse associée sont

$$p_0 = A_I + A_R \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{A_I}{\rho_o c} - \frac{A_R}{\rho_o c}.$$

La relation de continuité entre les vitesses acoustique et vibratoire permet d'écrire

$$v_0 = u_0,$$

où  $v_0$  est la vitesse vibratoire de la source. Dans la cavité, la pression qui agit sur le capot ( $x = l$ ) est

$$p_l = A_I e^{-j k l} + A_R e^{j k l},$$

et la vitesse particulière associée correspond à la vitesse  $v_1$  du capot

$$v_1 = u_1 = \frac{A_I}{\rho_o c} e^{-j k l} - \frac{A_R}{\rho_o c} e^{j k l},$$

L'impédance mécanique du panneau qui constitue le capot est représentée par

$$z_p = j \left( \omega m - \frac{s}{\omega} \right) + r$$

A cette impédance, on doit mettre en série l'impédance de rayonnement qui est ici supposée égale à  $\rho_o c$  (vibration d'un panneau infini rigide). Donc l'impédance totale est

$$z_t = z_p + \rho_o c,$$

et la relation qui décrit la dynamique du panneau est

$$p_1 = z_t v_1.$$

En exprimant  $p_1$  dans cette équation et en opérant des substitutions, on obtient

$$\begin{aligned} z_t v_1 &= A_I e^{-jkl} + A_I e^{jkl} - \rho_o c u_0 e^{jkl}, \\ &= 2 A_I \cos kl - \rho_o c u_0 e^{jkl}. \end{aligned}$$

On dispose également d'une seconde équation obtenue à partir de l'équation de continuité des vitesses

$$\begin{aligned} \rho_o c v_1 &= A_I e^{-jkl} - A_I e^{jkl} + \rho_o c u_0 e^{jkl}, \\ &= -j2 A_I \sin kl + \rho_o c u_0 e^{jkl}. \end{aligned}$$

ce qui permet d'éliminer  $A_I$

$$\frac{\rho_o c u_0 e^{jkl} + z_t v_1}{2 \cos kl} = \frac{\rho_o c u_0 e^{jkl} - \rho_o c v_1}{2 j \sin kl},$$

et, en remplaçant  $u_0$  par  $v_0$ , d'obtenir

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{\cos kl + j \frac{z_t}{\rho_o c} \sin kl}.$$

On traduit la performance du capot par la perte par insertion  $D = 10 \log \frac{W_0}{W_1}$ , avec  $W_0$  la puissance acoustique rayonnée par la source en l'absence de capotage et  $W_1$  la puissance acoustique rayonnée par le capot. Comme les deux surfaces vibrantes sont chargées par l'impédance caractéristique  $\rho_o c$  du fluide, l'équation précédente se traduit par

$$D = 10 \log \left| \frac{v_0}{v_1} \right|^2.$$

A l'aide de l'expression du rapport  $v_1/v_0$ , l'équation précédente fournit les **pertes par insertion**

$$D = 10 \log \left\{ \left[ \cos kl - \sin kl \frac{\omega m - s/\omega}{\rho_o c} \right]^2 + \sin^2 kl \left[ 1 + \frac{r}{\rho_o c} \right]^2 \right\}.$$

D'après cette expression, la perte par insertion est minimale quand

$$\tan k_1 l = \frac{\rho_o c}{\omega_1 m - s/\omega_1} = \frac{\rho_o c \omega_1}{m(\omega_1^2 - \omega_0^2)},$$

où  $\omega_0^2 = s/m$  est la fréquence propre du panneau constituant le capot dans les conditions de montage. Dans les **basses fréquences**, alors  $\tan k_1 l \approx k_1 l$  et

$$k_1 l = \frac{\omega_1}{c} l = \frac{\rho_0 c \omega_1}{m(\omega_1^2 - \omega_0^2)}$$

d'où

$$\omega_1^2 = \frac{\rho_0 c^2}{ml} + \omega_0^2$$

A la raideur de la cavité  $\rho_0 c^2 / l$  vient s'ajouter la raideur mécanique du capot. A la fréquence de résonance  $\omega_1$  ( $k_1 l \ll 1$ )

$$\begin{aligned} D &\equiv 10 \log \left[ k_1 l \left( 1 + \frac{r}{\rho_0 c} \right) \right]^2 \\ &\equiv 10 \log \left( 1 + \frac{r}{\rho_0 c} \right)^2 + 10 \log \left( \frac{\rho_0 l}{m} + k_0^2 l^2 \right) \end{aligned}$$

Si  $k_0^2 l^2 \ll 1$  et  $\rho_0 l / m < 1$ , comme c'est généralement le cas, le second terme est **négatif**. Ainsi, pour éviter que les performances se dégradent (dans les basses fréquences) autour de la fréquence de résonance  $\omega_1$ , le capot doit présenter une **raideur importante**, un **amortissement important** et une **faible masse**. L'impédance mécanique du capot n'est significative que si elle est sensiblement plus importante que celle de la cavité

$$s = \omega_0^2 m > \frac{\rho_0 c^2}{l}$$

Pour augmenter  $D$  à  $\omega_1$ , il est possible d'augmenter la profondeur  $l$  de la cavité.

Dans les **hautes fréquences**, les minima de  $L_{IL}$  apparaissent quand

$$\tan kl = \rho_0 c / (\omega m - s/\omega)$$

En posant  $\tan kl = \alpha$  et en utilisant les relations

$$\tan^2 kl = \frac{\sin^2 kl}{\cos^2 kl} = \frac{\sin^2 kl}{1 - \sin^2 kl} \Rightarrow \alpha^2 (1 - \sin^2 kl) = \sin^2 kl \Rightarrow \sin^2 kl = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}$$

la perte par insertion peut s'exprimer par

$$D = 10 \log \alpha^2 - 10 \log (1 + \alpha^2) + 10 \log \left( 1 + \frac{r}{\rho_0 c} \right)^2.$$

Comme ces résonances sont bien supérieures à la résonance du capot dans le vide

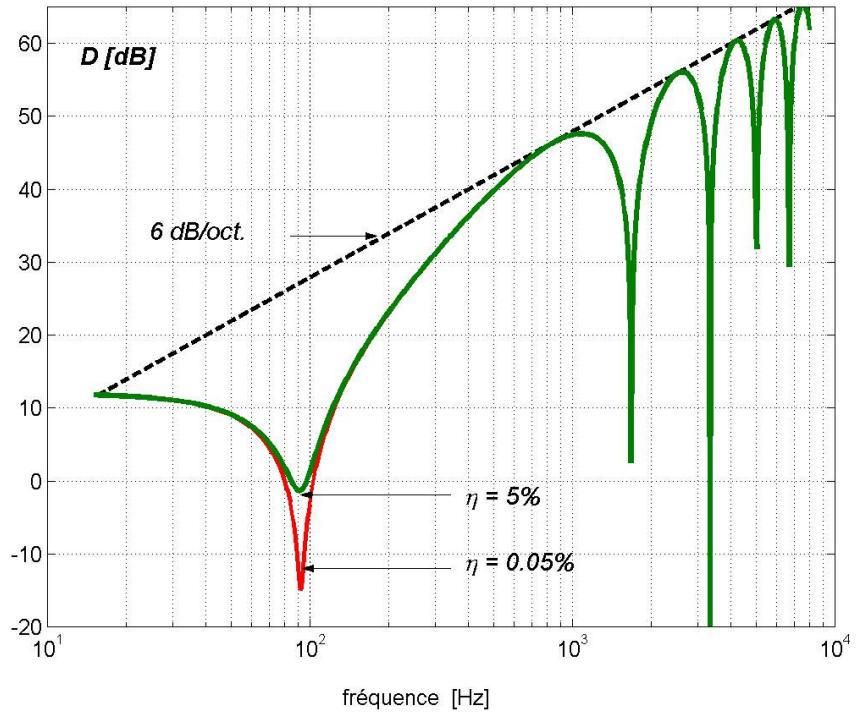
$$\alpha \approx \frac{\rho_0 c}{\omega m}$$

et

$$D = 20 \log \left( \frac{\rho_0 c}{\omega m} \right) - 10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\rho_0 c}{\omega m} \right)^2 \right] + 20 \log \left( 1 + \frac{r}{\rho_0 c} \right)$$

qui peut être négatif (les fréquences de ces minima sont très proches de celles pour lesquelles  $\sin kl = 0$ ).

Le modèle utilisé ici est basé sur une simplification de la source et du capot. Il fournit cependant de résultats donnant les grandes tendances de comportement des systèmes plus complexes. Par rapport aux constatations qui ont été faites, on a pu remarquer que les performances sont augmentées par l'ajout de matériaux absorbants à l'intérieur du capot, et dégradées si le capot n'est pas désolidarisé de la source (montage souple).



**Figure 3.5 - Perte par insertion calculée à l'aide du modèle de Jackson.**

La Figure 3.5 représente la perte par insertion d'un capot en acier de 2 mm placé à 0.1 m d'une surface vibrante

$$m = 15.6 \text{ kg/m}^2, \quad l = 0.1 \text{ m}, \quad f_0 = 80 \text{ Hz}, \quad f_1 = 92.4 \text{ Hz}$$

## Références bibliographiques

- D.A. Bies, C.H. Hansen, (1996), *Engineering Noise Control*, (Spon).
- K.P. Byrne, H.M. Fisher, H.V. Fuchs, (1988), "Sealed, close-fitting, machine-mounted acoustic enclosures with predictable performance", *Noise Control Eng. J.* **31**(1), 7-15.
- F.J. Fahy, (1985), *Sound and Structural Vibration*, (Academic Press).
- R.S. Jackson, (1962), "The performance of acoustic hoods at low frequencies", *Acustica* **12**, 139-152.
- R.S. Jackson, (1966), "Some aspect of the performance of acoustic hoods", *J. Sound Vib.* **3** (1), 82-97.
- R.K. Miller, W.V. Montone, (1978), *Handbook of Acoustical Enclosures and Barriers*, (The Fairmont Press).
- N. Trompette, T. Loyau, G. Lovat, (2001), "Encoffrements de machines : aide à la conception", Cahiers de notes documentaires de l'INRS, N° 182.
- N.P. Norton, (1989), *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*, (Cambridge Univ. Press), p. 290.
- L.W. Tweed, D.R. Tree, (1976), "Three methods for predicting the insertion loss of close fitting acoustical enclosures", *Noise Control Eng. J.* **10**, 74-79.
- I. Vér (1992), "Enclosures and wrappings (Ch.13)", in *Noise and Vibration Control Engineering*, (L.L. Beranek and I. Vér, Ed.), (Wiley).
- Norme NF EN ISO 3746, "Détermination des niveaux de puissance acoustique émis par des sources de bruit à partir de la pression acoustique", (AFNOR, 1996).
- Norme VDI 2711, "Noise reduction by enclosures", (VDI, 1978). (en allemand).
- pr Norme NF EN ISO 15667, "Lignes directrices pour la réduction du bruit au moyen d'encoffrements et de cabines", (Draft ISO/DIS 15667, "Guidelines for noise control by enclosures and cabins"), (AFNOR, 1998).



## IV - INTRODUCTION AU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE

1. SOURCES VIBROACOUSTIQUES ELEMENTAIRES
2. RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DES SOURCES PLANES
3. PISTON CIRCULAIRE
4. RAYONNEMENT MODALE DES PLAQUES
5. REPRESENTATION INTEGRALE 3D



## 1 - SOURCES VIBROACOUTIQUES ELEMENTAIRES

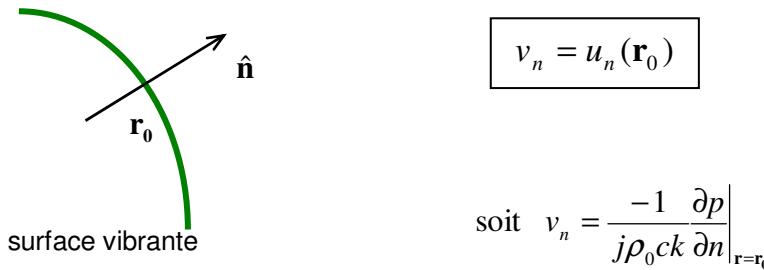
### 1.1. Relation fondamentale de la vibroacoustique

Un grand nombre de sources acoustiques sont constituée par des structures vibrantes. Il est important de connaître les relations entre champ vibratoire et champ acoustique rayonné, qu'il s'agisse d'améliorer ce transfert pour les sources désirables (haut-parleurs, instruments de musique ...) ou qu'il s'agisse de la réduire pour les sources indésirable ("bruiteurs" industriels).

L'étude des relations entre structures vibrantes et champ acoustique rayonné est souvent désigné par le terme **vibroacoustique**. Ces relations dépendent de la géométrie des sources et de la longueur d'onde acoustique.

Le premier principe appliqué pour caractériser le rayonnement d'un corps vibrant est:

Pour un fluide parfait *non visqueux* comme l'air, il y a continuité entre les **composantes normales** de la vitesse vibratoire et de la vitesse particulière acoustique



Attention : cette relation s'applique seulement entre les composantes normales. En général

$$v \neq \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)$$

Dans le milieu fluide, l'équation de propagation des ondes doit être satisfait

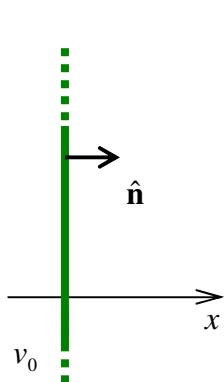
$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

### 1.2. Piston plan infini

Un piston plan infini est animé d'un mouvement vibratoire uniforme  $v(t) = v_0 e^{j\omega t}$ . Par la relation continuité des vitesses vibratoire et acoustique (normales), ce mouvement va produire une onde plane acoustique de pression

$$p(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

et de vitesse particulière



$$u_x(x, t) = \frac{A}{\rho_0 c} e^{j(\omega t - kx)}$$

La relation de continuité des vitesses à la surface du piston conduit à

$$u_x(0, t) = v_0 e^{j\omega t}$$

Donc en posant  $x = 0$  dans l'équation de  $u_x(x, t)$ , on identifie le coefficient  $A$

$$A = \rho_0 c v_0$$

d'où l'expression de la pression acoustique rayonnée

$$p(x, t) = \rho_0 c v_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

La puissance acoustique rayonnée par unité de surface est  $W = S I_x$  avec  $S = 1 \text{ m}^2$ . L'intensité acoustique dans la direction normale est indépendante de la distance

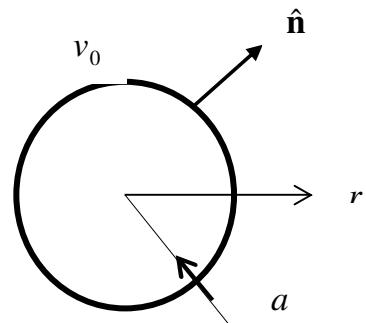
$$I_x(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p u_x^* \} = \frac{|A|^2}{2 \rho_0 c}$$

d'où

$$W = S I_x = \rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2} S \quad (S = 1 \text{ m}^2)$$

### 1.3. Sphère pulsante

C'est une sphère de rayon  $a$  dont chaque point de l'enveloppe vibre en phase. Il est évident que la pression acoustique rayonnée correspond à la solution de l'équation d'onde en coordonnées sphériques. Si la vitesse vibratoire est harmonique ( $v(t) = v_0 e^{j\omega t}$ ), c'est l'équation de Helmholtz qui est considérée



$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Comme  $\frac{\partial p}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial p}{\partial \phi}$  sont nuls,  $\nabla^2 p$  se conduit à

$$\nabla^2 p(r, \theta, \phi) = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r}$$

et la solution est de la forme

$$p(r, t) = A \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi r}, \quad (\text{rayonnement monopole})$$

La vitesse particulière se calcule à partir de cette relation

$$u_r(r, t) = -\frac{1}{j\rho_0 c k} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{A}{\rho_0 c} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi r} \left( 1 - \frac{j}{kr} \right)$$

(la composante tangentielle est nulle).

Quand  $r = a$ , il y a continuité entre la vitesse vibratoire  $v_0 e^{j\omega t}$  et la vitesse particulière  $u_r(a, t)$

$$v_0 e^{j\omega t} = u_r(a, t) = \frac{A}{\rho_0 c} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi r} \left( 1 - \frac{j}{kr} \right)$$

Cette équation permet d'exprimer l'amplitude  $A$  dans l'équation de la pression en fonction de  $v_0$

$$A = \frac{4\pi a \rho_0 c v_0 e^{jka}}{1 - j/ka}$$

où bien en multipliant numérateur et dénominateur par  $jka$

$$A = jka \frac{4\pi a \rho_0 c v_0 e^{jka}}{1 + jka}$$

Expression de la pression

$$p(r, t) = \rho_0 c v_0 \frac{ka^2 (ka + j)}{1 + (ka)^2} \frac{e^{-jk(r-a)}}{r} e^{j\omega t}$$

Intensité acoustique: composante uniquement dans la direction radiale

$$I_r(r) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p u_r^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|A|^2}{\rho_0 c} \frac{1 + j/kr}{16\pi^2 r^2} \right\} = \frac{|A|^2}{32\rho_0 c \pi^2 r^2}$$

On vérifie que  $I_r(r) = \frac{|p(r)|^2}{2\rho_0 c} \rightarrow \underline{\text{source monopolaire.}}$

Puissance acoustique:  $W = SI_r(r)$

$S = 4\pi r^2$  est la surface de la sphère de rayon  $r$ . La puissance acoustique est invariante avec la distance  $r$ .

On choisit  $r = a$  et  $S_0 = 4\pi a^2$  est la surface de la sphère pulsante

$$W = 4\pi a^2 I_r(a) = \frac{4\pi a^2 |p(a)|^2}{2\rho_0 c}$$

soit

$$W = \frac{2\pi \rho_0 c k^2 a^4 |v_0|^2}{1 + (ka)^2}$$

### Remarque:

- En haute fréquences, quand  $ka \gg 1$ ,  $W \approx 4\pi a^2 \rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2}$ . La puissance acoustique est proportionnelle à la vitesse vibratoire quadratique  $|v_0|^2$
- En basse fréquences, quand  $ka \ll 1$ ,  $W \approx 4\pi a^2 \rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2} (ka)^2$ . La puissance acoustique est en plus proportionnelle au facteur  $(ka)^2$ , c'est à dire qu'à vitesse vibratoire constante, elle va décroître comme le carré de la fréquence. C'est pour rendre compte de ces modifications de puissance rayonnée que l'on définit le "facteur de rayonnement".
- En définissant le débit de volume de la sphère pulsante par  $Q = S_0 v_0 = 4\pi a^2 v_0$ , la pression acoustique s'écrit

$$p(r, t) = j\omega \rho_0 Q \frac{1 - jka}{1 + (ka)^2} \frac{e^{-jk(r-a)}}{4\pi r} e^{j\omega t}$$

si  $a \rightarrow 0$ , on retrouve le champ de pression d'une source monopolaire ponctuelle.

$$p(r, t) = j\omega \rho_0 Q \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi r}$$

## Facteur de rayonnement

**Définition :** grandeur sans dimension

$$\sigma = \frac{\text{Puissance rayonnée par unité de surface pour une structure vibrante quelconque}}{\text{Puissance rayonnée par le piston plan infini de vitesse vibratoire équivalente}} = \frac{\frac{W}{S_0}}{\rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2}}$$

*Dans le cas où la vitesse n'est pas constante sur  $S_0$ , c'est la **vitesse quadratique moyenne** qui est considérée*

$$\frac{|v_0|^2}{2} \equiv \frac{1}{S_0} \iint_{S_0} \frac{|v(\mathbf{r}_0)|^2}{2} dS = \left\langle v_n^2 \right\rangle_{S_0}$$

1

## Facteur de rayonnement

**Notation générale**

$$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c \iint_{S_0} \frac{|v_n(\mathbf{r}_0)|^2}{2} dS} = \frac{W}{\rho_0 c S_0 \left\langle v_n^2 \right\rangle_{S_0}}$$

*Le facteur de rayonnement s'exprime aussi en dB*

$$L_\sigma = 10 \log \sigma$$

*Pour une vitesse uniforme*

$$\boxed{\sigma = \frac{W}{\rho_0 c S_0 \frac{|v_n(\mathbf{r}_0)|^2}{2}}}$$

**Piston infini**    $\sigma = 1$    ou    $L_\sigma = 0 \text{ dB}$

2

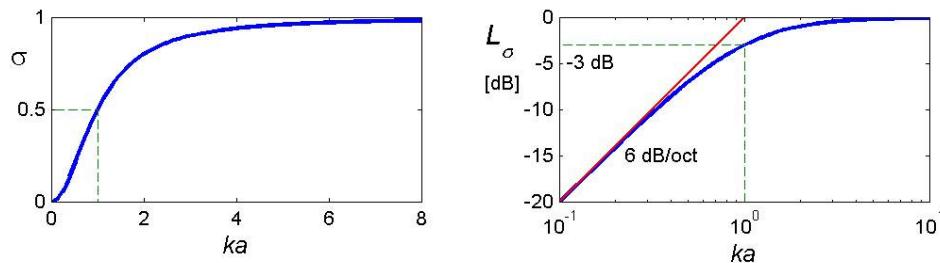
## Facteur de rayonnement de la sphère pulsante

$$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c S_0} \frac{|v_n(\mathbf{r}_0)|^2}{2}$$

$$\sigma = \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2}$$

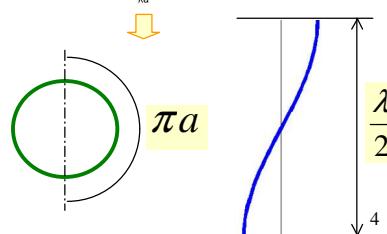
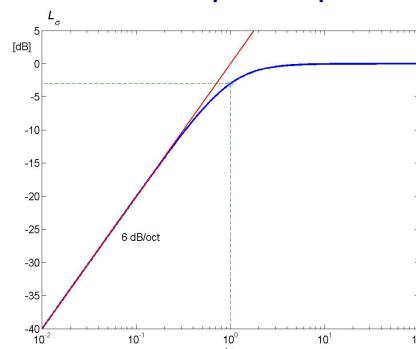
Basses fréquences :  $ka \ll 1 \Rightarrow \sigma \approx (ka)^2$

Hautes fréquences :  $ka \gg 1 \Rightarrow \sigma \approx 1$



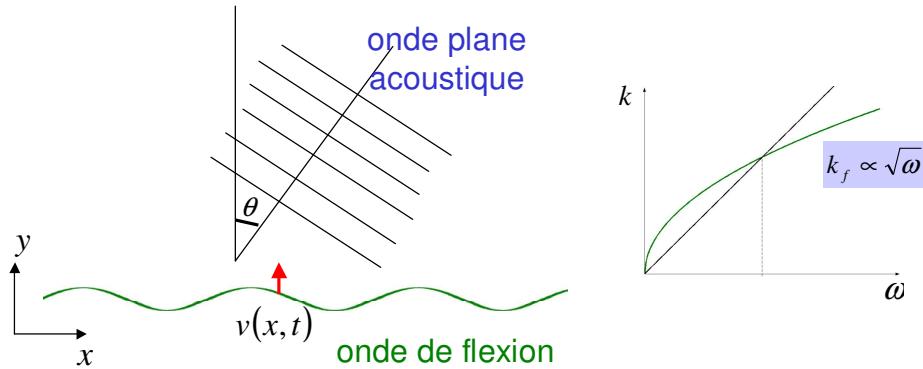
## Facteur de rayonnement de la sphère pulsante

$$ka = 1 \Rightarrow \pi a = \frac{\lambda}{2}$$



L'efficacité de rayonnement optimal est atteint quand la **dimension de la sphère** correspond un peu près à la **demi-longueur d'onde acoustique**

## Onde de flexion dans une plaque infinie

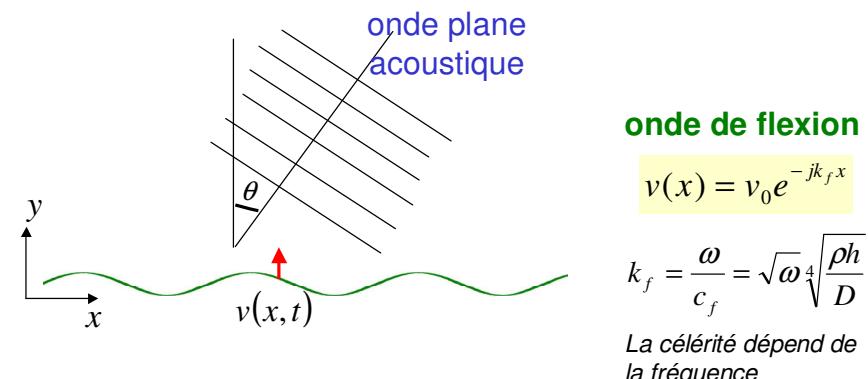


**Onde de flexion** avec un front d'onde plan

On suppose qu'une **onde plane est rayonnée** avec un angle d'incidence  $\theta$

5

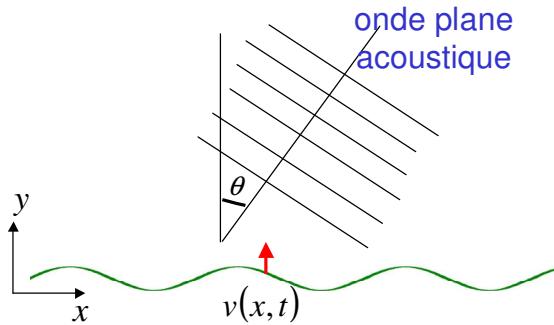
## Onde de flexion dans une plaque infinie



$$\text{Onde plane acoustique} \quad p(x, y) = A e^{-j(k_x x + k_y y)}$$

6

## Onde de flexion dans une plaque infinie



L'onde plane acoustique

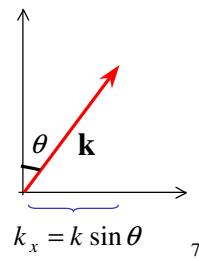
$$p(x, y) = A e^{-j(k_x x + k_y y)}$$

doit vérifier l'équation d'onde

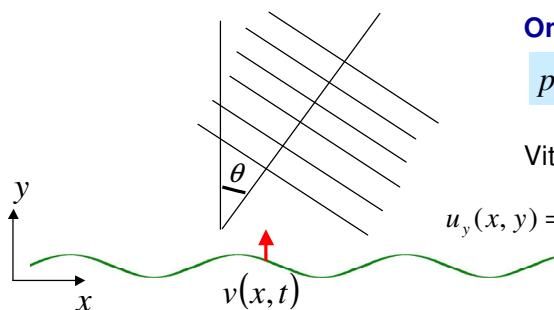
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0$$

il faut que  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$   
(relation de dispersion)

$k_y = k \cos \theta$



## Onde de flexion dans une plaque infinie



Onde plane acoustique

$$p(x, y) = A e^{-j(k_x x + k_y y)}$$

Vitesse particulière

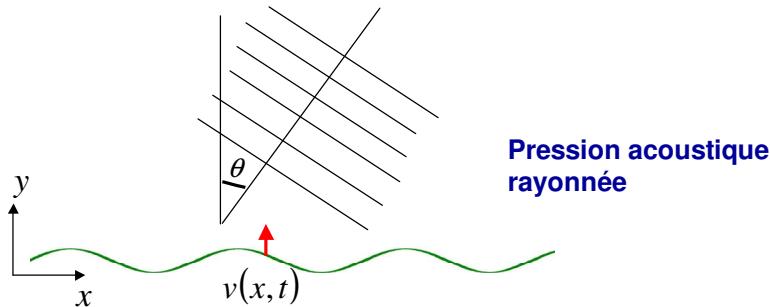
$$u_y(x, y) = \frac{-1}{j\rho_0 c k} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{k_y}{k} \frac{A}{\rho_0 c} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y}$$

Continuité des vitesses en  $y = 0$   $u_y(x, 0) = v(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{k_y}{k} \frac{A}{\rho_0 c} e^{-jk_x x}}_{= v_0} = v_0 e^{-jk_f x} \Rightarrow \frac{k_x}{k} = k_f$$

c.a.d.  $k_y^2 = k^2 - k_f^2$

## Pression rayonnée par une plaque infinie



**Pression acoustique rayonnée**

$$p(x, y) = \rho_0 c v_0 \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} e^{-jk_f x} e^{-j\sqrt{k^2 - k_f^2} y}$$

$$= \frac{\rho_0 c v_0}{\sqrt{1 - (k_f/k)^2}} e^{-jk_f x} e^{-jk\sqrt{1 - (k_f/k)^2} y}$$

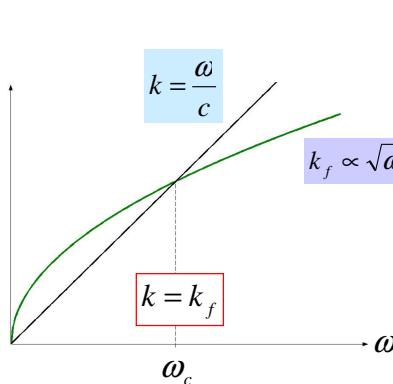
9

## Pression rayonnée par une plaque infinie

### Pression acoustique rayonnée

$$p(x, y) = \rho_0 c v_0 \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} e^{-jk_f x} e^{-j\sqrt{k^2 - k_f^2} y}$$

$\sqrt{k^2 - k_f^2}$  est imaginaire pur  
évanescant



$\sqrt{k^2 - k_f^2}$  est réel  
propagatif

10

## Onde propagative rayonnée par une plaque infinie

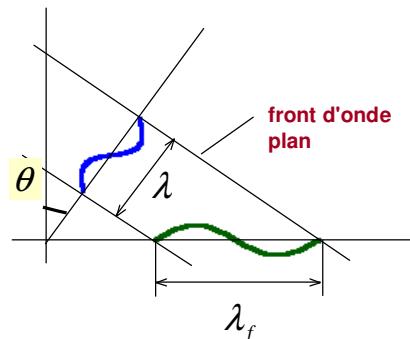
**Au-dessus de la fréquence critique**

$$k > k_f \quad \omega > \omega_c$$

$$k_y = \sqrt{k^2 - k_f^2}$$

puisque  $k_f = k_x = k \sin \theta$

donc  $k_y = \sqrt{k^2 - k_f^2} = k \cos \theta$



Onde plane **propagative** avec une direction  $\theta$

$$p(x, y) = \frac{\rho_0 c v_0}{\cos \theta} e^{-jk_f x} e^{-jk y \cos \theta}$$

$$\lambda_f > \lambda$$

11

## Onde propagative rayonnée par une plaque infinie

**Au-dessus de la fréquence critique**

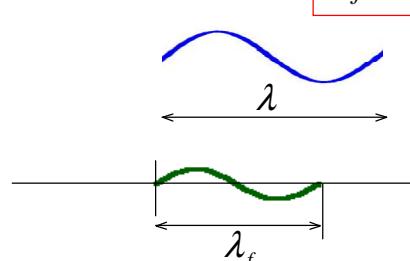
$$k < k_f \quad \omega < \omega_c$$

$$\lambda_f < \lambda$$

$$k_y = \sqrt{k^2 - k_f^2} = \sqrt{-1} \sqrt{k_f^2 - k^2}$$

puisque  $\sqrt{-1} = -j$

donc  $k_y = -j \sqrt{k_f^2 - k^2}$

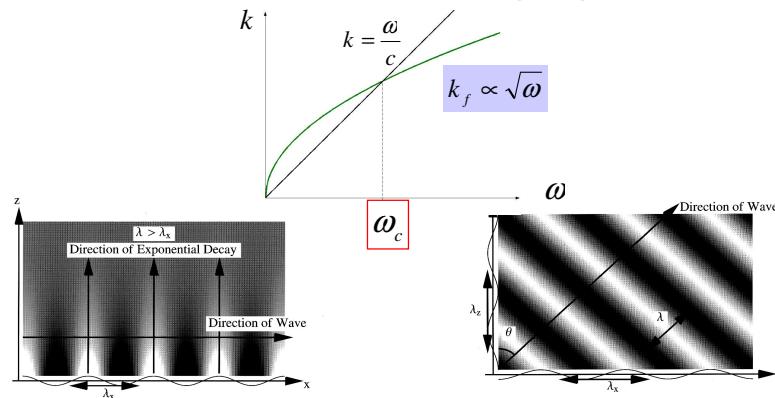


Onde plane **évanescante**  $e^{-jk_y y} = e^{-j(-j|k_y|)y} = e^{-|k_y|y}$

$$p(x, y) = -\frac{j\rho_0 c v_0}{\sqrt{\left(\frac{k_f}{k}\right)^2 - 1}} e^{-jk_f x} e^{-\sqrt{k_f^2 - k^2} y}$$

12

## Onde de flexion dans une plaque infinie



$$\exp(\pm jk_z z) = \exp(\pm \sqrt{k_f^2 - k^2} z)$$

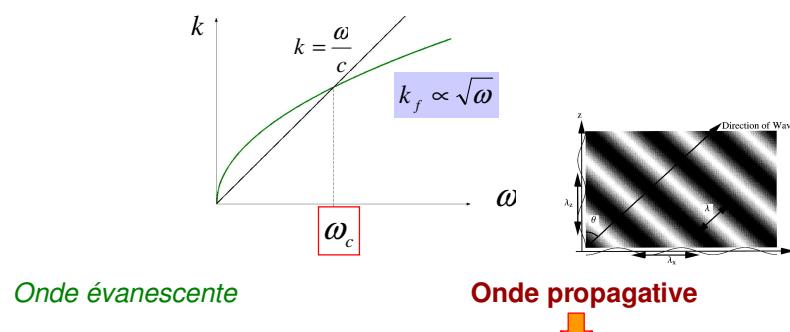
Onde évanescante

$$\exp(\pm jk_z z) = \exp(\pm j\sqrt{k^2 - k_f^2} z) = \exp(\pm jk \cos \theta)$$

Onde propagative

13

## Intensité acoustique pour une plaque infinie

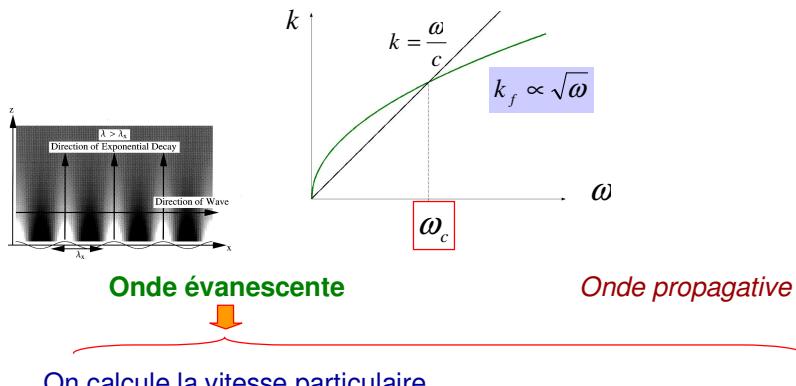


C'est l'intensité d'une onde plane dans la direction de propagation

$$|I| = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c} = \frac{\rho_0 c}{2} \frac{|v_0|^2}{\cos^2 \theta} \Rightarrow I_n = I_y = |I| \cos \theta = \frac{\rho_0 c}{2} \frac{|v_0|^2}{\cos \theta}$$

14

## Intensité acoustique pour une plaque infinie



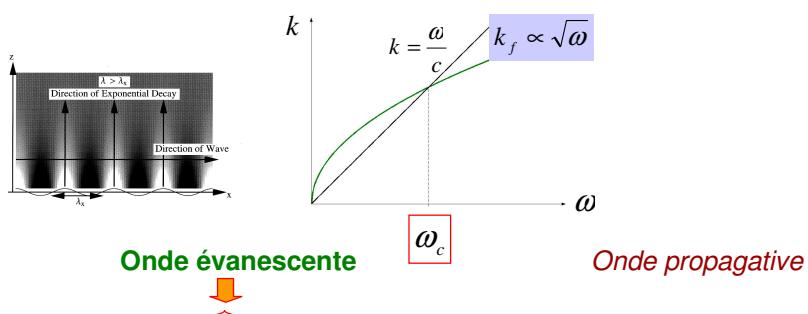
On calcule la vitesse particulière

$$u_x = \frac{-1}{j\rho_0 c} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{j v_0 (k_f / k)}{\sqrt{\left(\frac{k_f}{k}\right)^2 - 1}} e^{-jk_f x} e^{-\sqrt{k_f^2 - k^2} y}$$

$$u_y = \frac{-1}{j\rho_0 c} \frac{\partial p}{\partial y} = v_0 e^{-jk_f x} e^{-\sqrt{k_f^2 - k^2} y}$$

15

## Intensité acoustique pour une plaque infinie

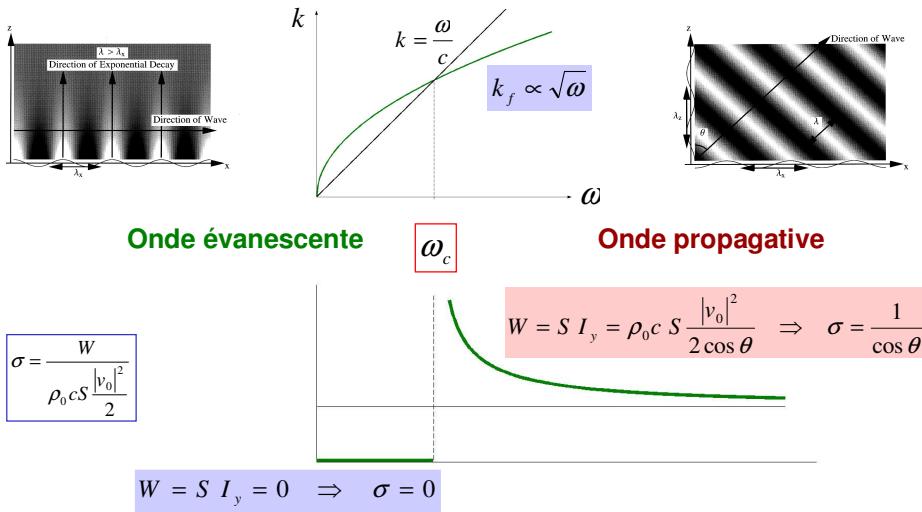


$$I_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p u_x^* \} = \rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2} \frac{(k_f / k)}{\left(\frac{k_f}{k}\right)^2 - 1} e^{-2\sqrt{k_f^2 - k^2} y}$$

$$I_y = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p u_y^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{j\rho_0 c |v_0|^2}{\sqrt{\left(\frac{k_f}{k}\right)^2 - 1}} e^{-2\sqrt{k_f^2 - k^2} y} \right\} = 0$$

La composante normale  $I_n = I_y$  est nulle : **pas d'énergie rayonnée**

## Facteur de rayonnement pour une plaque infinie



pas d'énergie rayonnée en dessous de la fréquence critique<sup>17</sup>

## Rayonnement acoustique des sources planes

Si la distribution de la **vitesse vibratoire est quelconque** sur la surface, on ne peut faire **aucune hypothèse** sur la forme du **champ rayonné**.

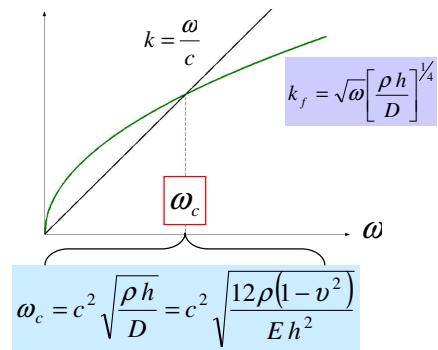
**Solution de Rayleigh (1896)** : le champ rayonné est créé par une distribution de **sources élémentaires ponctuelles** disposées sur le plan  $S_0$

Amplitude du **débit** proportionnelle  
aux **vitesses vibratoires**

18

## Facteur de rayonnement pour une plaque infinie

**pulsation critique**  $k = k_f$



Au-dessus de la fréquence critique

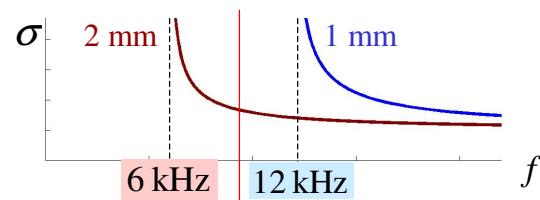
$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{k}{k_y} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_f^2}{k^2}}}$$

➡

$$\sigma = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f_c}{f}}} & k_f < k \\ 0 & k_f > k \end{cases}$$

## Facteur de rayonnement pour une plaque infinie

$$f_c = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{12\rho h(1-v^2)}{Eh^3}} = \frac{c}{2\pi h} \sqrt{\frac{\rho 12(1-v^2)}{E}}$$

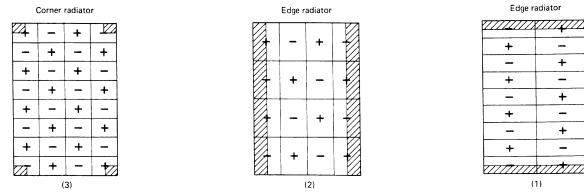


Excitation 9 kHz



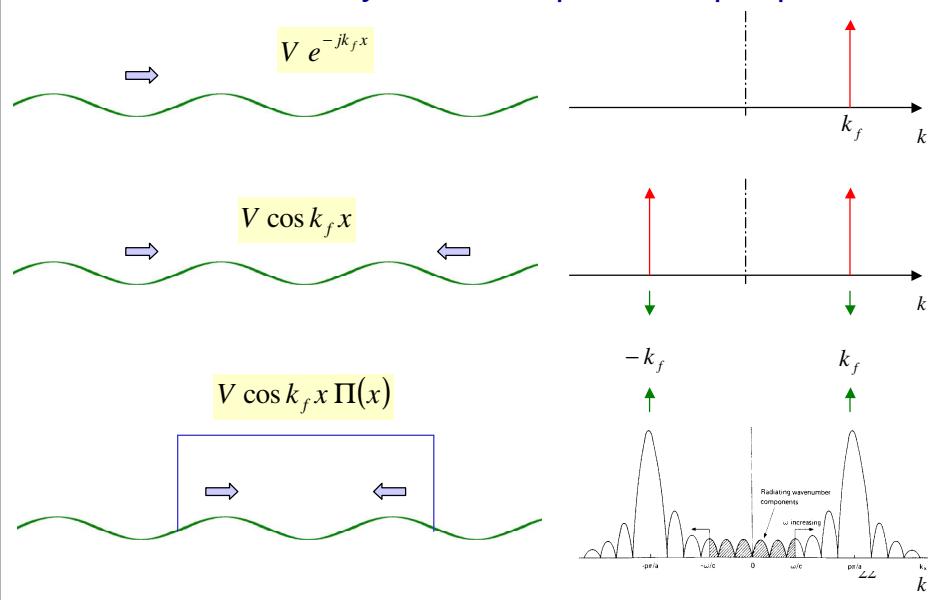
20

## Facteur de rayonnement pour une plaque infinie

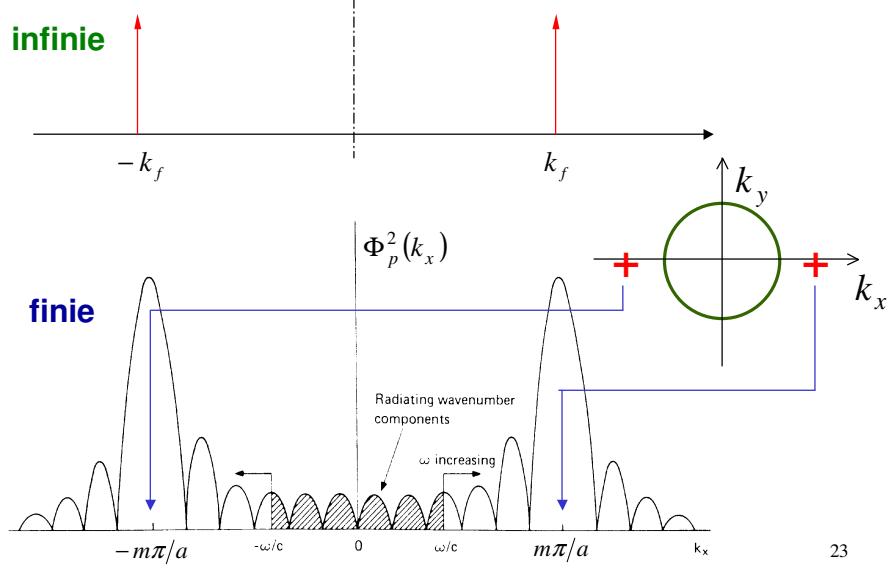


21

## Facteur de rayonnement pour une plaque

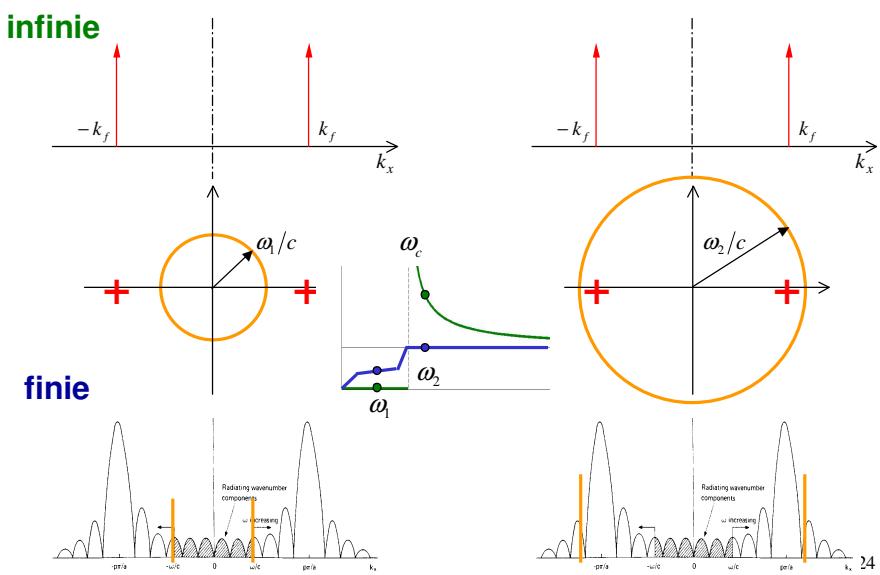


## Facteur de rayonnement pour une plaque



23

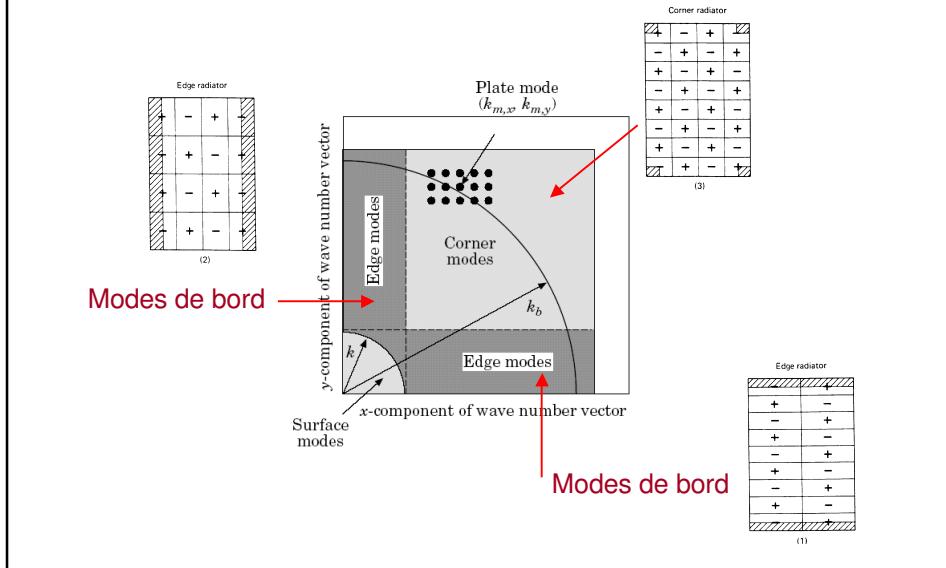
## Facteur de rayonnement pour une plaque



24

## Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire

quatre bords simplement supportés



## Facteur de rayonnement approché pour une plaque rectangulaire

Formule de Maidanik

$$\sigma = \begin{cases} 2r(\lambda_c/a)^2 g_1(\alpha) + 2(1+r)(\lambda_c/a)g_2(\alpha), & f < f_c \\ \sqrt{a/\lambda_c} (1 + 1/\sqrt{r}), & f \approx f_c \\ (1 - f_c/f)^{-1/2}, & f > f_c \end{cases}$$

rapport dimensions	longueur d'onde critique	fréquence critique
$r = a/b$	$\lambda_c = c/f_c$	$f_c = (c^2/2\pi)\sqrt{\rho h/D}$

où les deux fonctions sont définies par

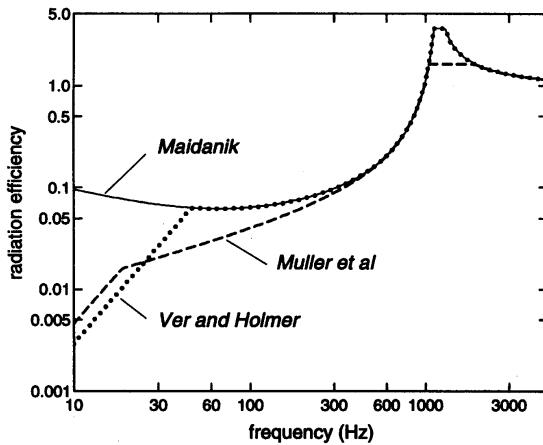
$$g_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^4} \frac{1-2\alpha^2}{\alpha\sqrt{(1-\alpha^2)}} & f < 0.5f_c \\ 0 & f > 0.5f_c \end{cases} \quad g_2(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(1-\alpha^2)\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + 2\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}}$$

$$\alpha^2 = f/f_c$$

26

## Facteur de rayonnement approché pour une plaque rectangulaire

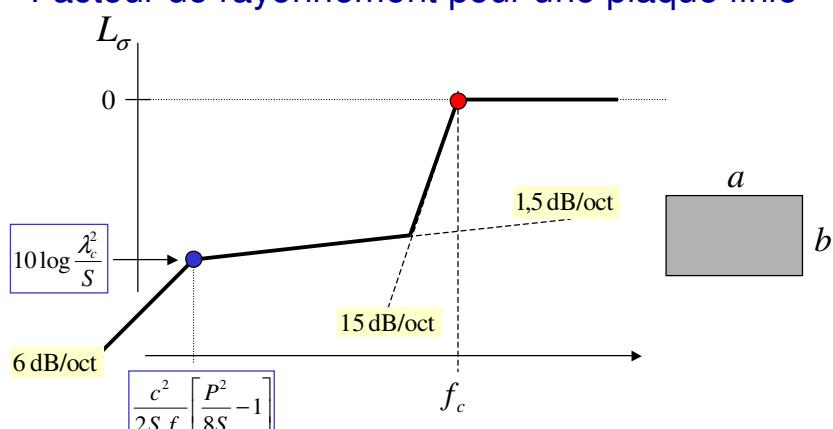
*Formule de Maidanik*



27

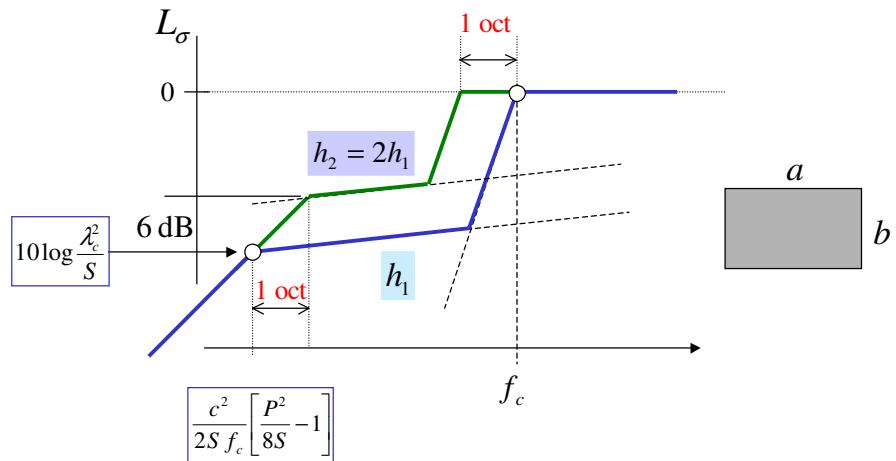
## Méthode simplifiée de Müller et al

Facteur de rayonnement pour une plaque finie



$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} \quad f_c = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad P = 2(a+b) \quad S = a b \quad 28$$

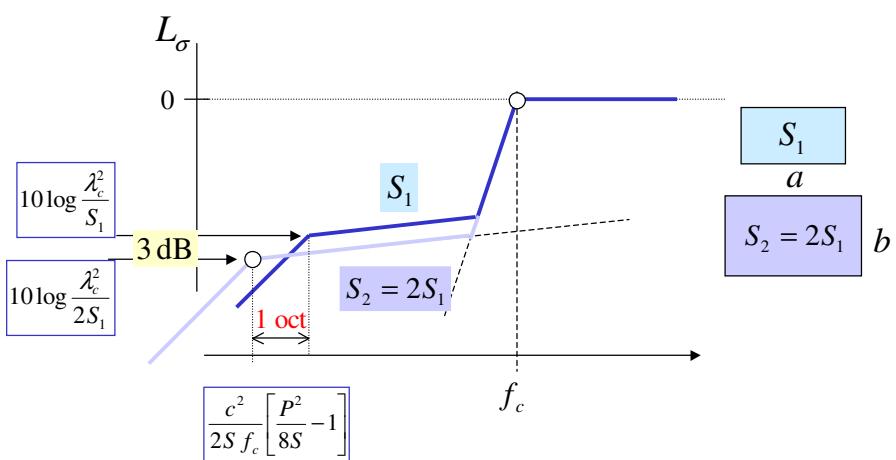
## Facteur de rayonnement pour une plaque finie



Influence de l'épaisseur  $h_2 = 2h_1$

29

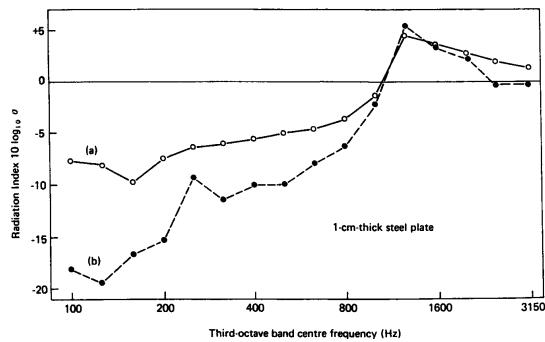
## Facteur de rayonnement pour une plaque finie



Influence de la surface  $S_2 = 2S_1$

30

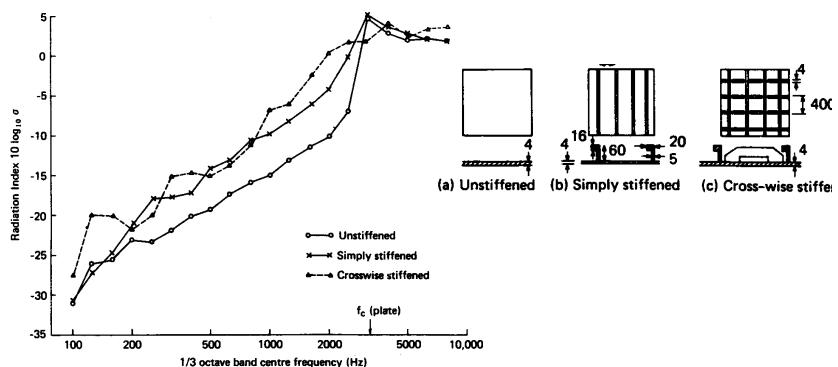
## Facteur de rayonnement excitation mécaniques / excitation acoustique



(d'après Macadam, 1976)

31

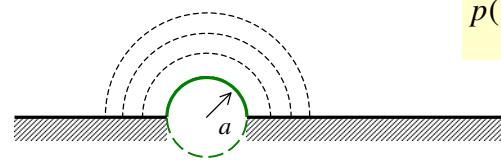
## Facteur de rayonnement plaques raidies



32

## Rayonnement acoustique des sources planes

**La source élémentaire est une sphère pulsante**



$$p(r) = \frac{j\omega Q}{1 + jka} \frac{e^{-jk(r-a)}}{4\pi r}$$

Symétrie du rayonnement

Débit de masse  $Q = \rho_0 S v_0 = 4\rho_0 \pi a^2 v_0$

Quand le rayon est plus petit que la longueur d'onde

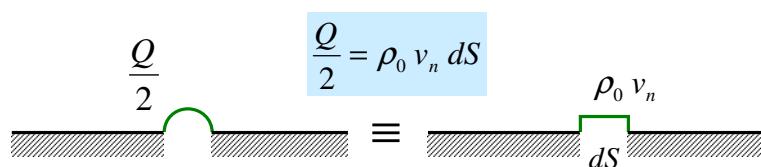
$$p(r) = j\omega Q \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

33

## Rayonnement acoustique des sources planes

**Pression rayonnée**

$$p(r) = j\omega Q \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

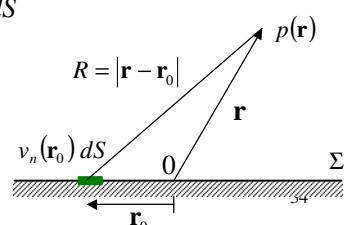


Champ de pression produit par la source élémentaire

$$dp(r) = j\omega \rho_0 v_n \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} dS$$

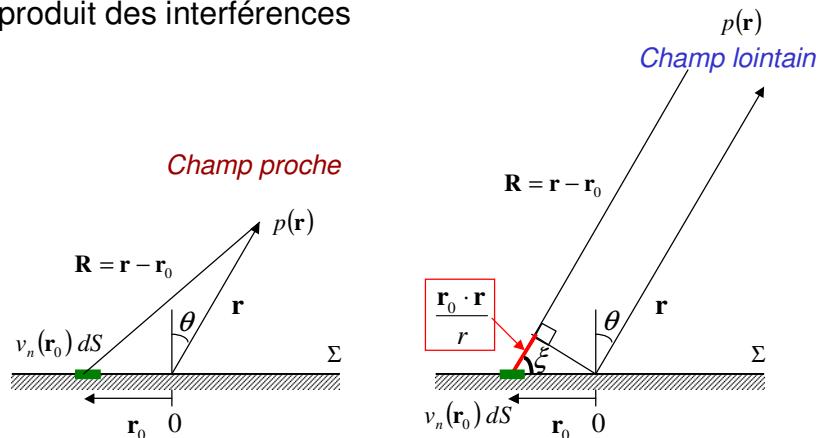
et sur la totalité de la surface

$$p(\mathbf{r}) = \frac{j\omega \rho_0}{2\pi} \iint_{\Sigma} v_n(\mathbf{r}_0) \frac{e^{-jkR}}{R} dS$$



## Rayonnement acoustique des sources planes

Les différences de parcours entre deux points du plan produit des interférences



35

## Rayonnement acoustique des sources planes

La pression est approchée en champ lointain

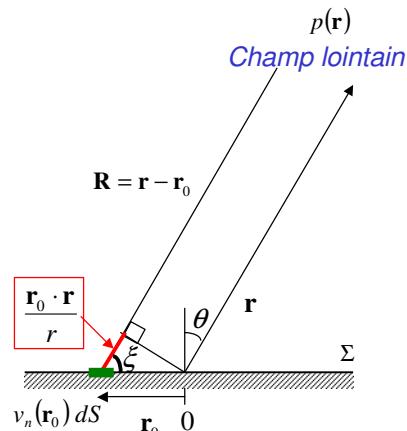
- $\mathbf{R}$  est parallèle à  $\mathbf{r}$
- la différence de distance est

$$-r_0 \cos \xi = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{r}$$

si  $r \gg r_0$  alors

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \approx r - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R} \approx \frac{1}{r}$$

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}/r}$$



36

## Rayonnement acoustique des sources planes

Deuxième intégrale de Rayleigh

$$p(\mathbf{r}) \approx j\omega\rho_0 \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \iint_{\Sigma} v_n(\mathbf{r}_0) e^{jk\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}/r} dS$$

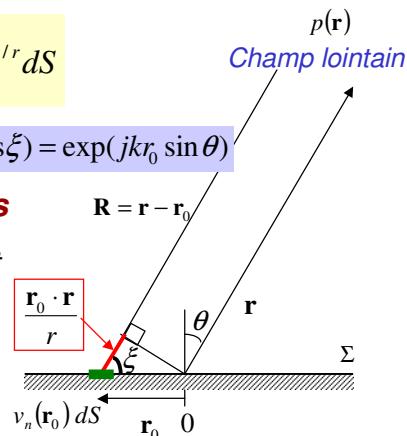
Le terme  $\exp(jk\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}/r) = \exp(jkr_0 \cos\zeta) = \exp(jkr_0 \sin\theta)$

représente l'influence des **phases**

relatives de chaque point qui sont

à l'origine des interférences :

elles dépendent de  $\theta$



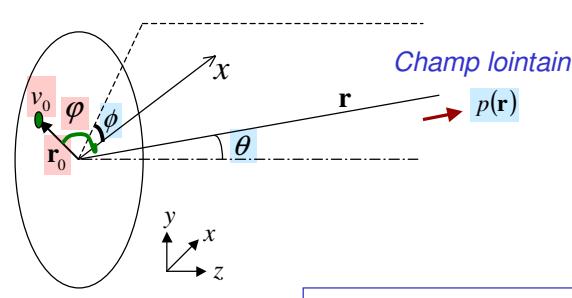
DIRECTIVITE DES SOURCES ETENDUES

37

## Piston circulaire

Exemple de calcul utilisant l'intégrale de Rayleigh

$$p(\mathbf{r}) \approx j\omega\rho_0 \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \iint_{\Sigma} v_n(\mathbf{r}_0) e^{jk\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}/r} dS$$



Le point  $\mathbf{r}$  est repéré par des coordonnées sphériques  $(\theta, \phi)$

L'élément de surface vibrante  $dS$  est repéré par les coordonnées polaires  $(\mathbf{r}_0, \varphi)$

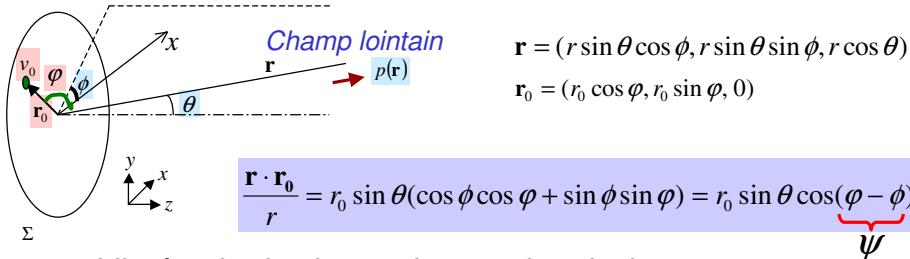
évaluer le terme  $\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{r}$

38

## Piston circulaire

Exemple de calcul utilisant l'intégrale de Rayleigh

$$p(\mathbf{r}) \approx j\omega\rho_0 \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \iint_{\Sigma} v_n(\mathbf{r}_0) e^{jk\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}/r} dS$$



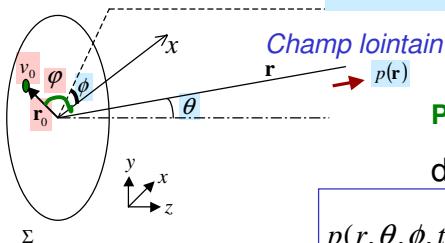
L'intégrale du champ de pression devient

$$p(r, \theta, \phi) = j\omega\rho_0 v_0 \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{jkr_0 \sin \theta \cos \psi} r_0 d\psi dr_0 \quad 39$$

## Piston circulaire

Calcul de l'intégrale

$$p(r, \theta) = j\omega\rho_0 v_0 \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{jkr_0 \sin \theta \cos \psi} r_0 d\psi dr_0$$



Par définition  $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \psi} d\psi$

d'où

$$p(r, \theta, \phi, t) = j\omega\rho_0 v_0 \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^a J_0(kr_0 \sin \theta) r_0 dr_0$$

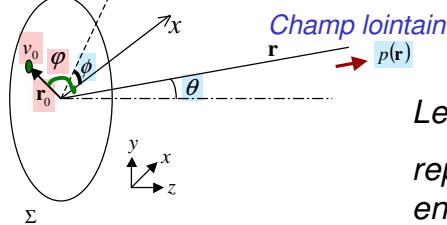
Par définition  $\int \mu J_0(\mu) d\mu = \mu J_1(\mu)$

et avec le changement de variable  $\mu = kr_0 \sin \theta$

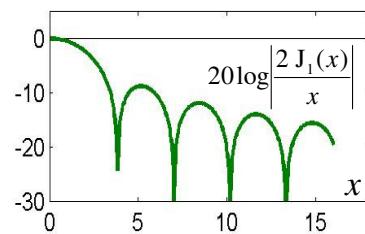
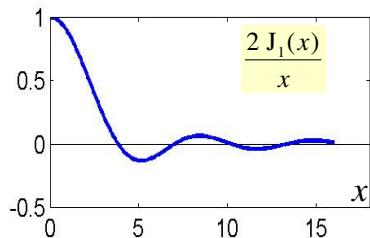
$$\int_0^a J_0(kr_0 \sin \theta) r_0 dr_0 = \frac{1}{(k \sin \theta)^2} \int_0^{k \sin \theta} J_0(\mu) \mu d\mu = \frac{1}{(k \sin \theta)^2} [\mu J_1(\mu)]_0^{k \sin \theta} = a^2 \frac{J_1(k \sin \theta)}{k \sin \theta}$$

## Pression rayonnée en champ lointain par le piston circulaire

$$p(r, \theta) = j\rho_0 c v_0 \frac{ka^2}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]$$



Le terme  $\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} = \frac{2J_1(x)}{x}$  représente la **directivité** du piston en champ lointain



## Intensité rayonnée en champ lointain par le piston circulaire

$$p(r, \theta) = j\rho_0 c v_0 \frac{ka^2}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]$$

Le diagramme de rayonnement dépend aussi de  $ka$   
c.a.d. de la **dimension du piston** devant la **longueur d'onde**

Quand  $ka < 1$  , alors  $\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \approx 1 - \frac{(ka \sin \theta)^2}{8}$

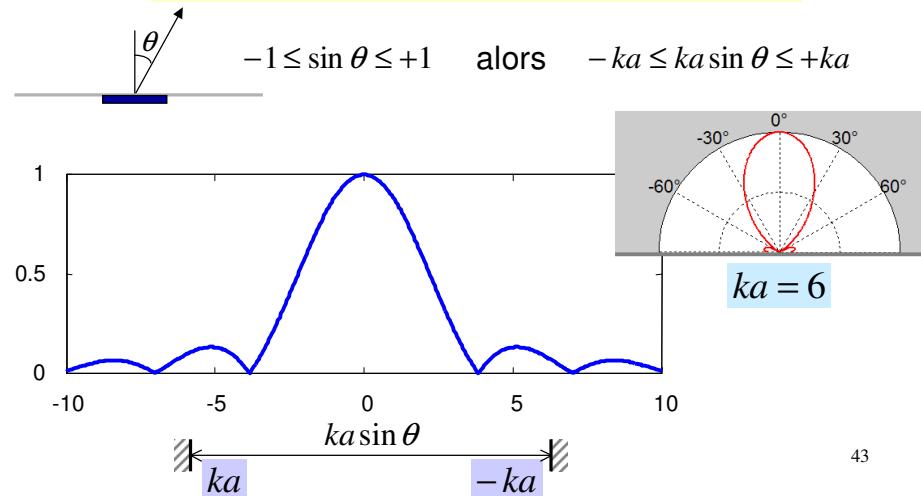
Rayonnement **omnidirectionnel** dans les **basses fréquence**

### Intensité acoustique radiale

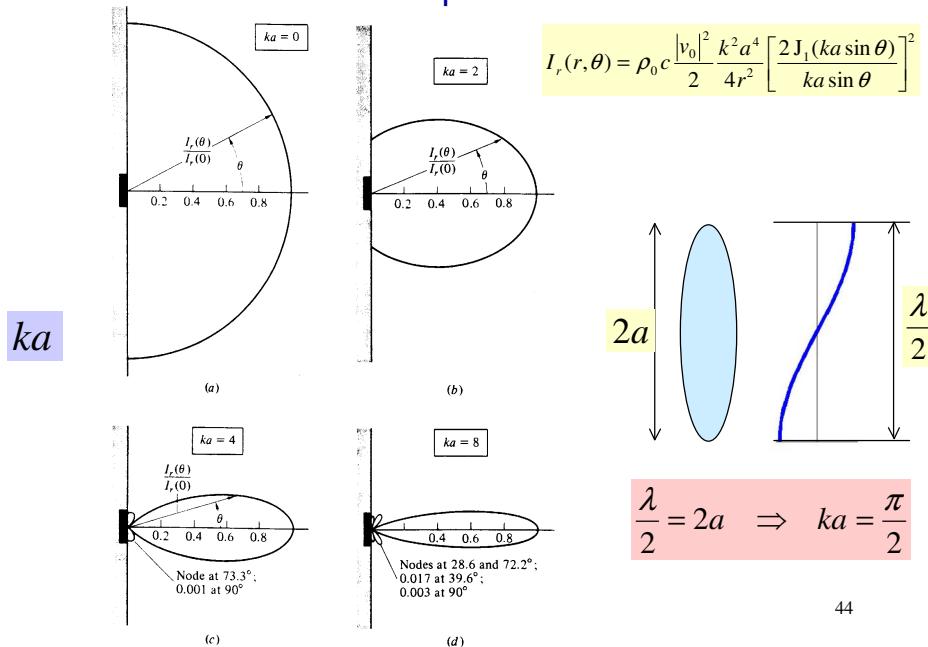
$$I_r(r, \theta) = \frac{|p(r, \theta)|^2}{2\rho_0 c} = \rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2} \frac{k^2 a^4}{4r^2} \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2$$

## Directivité du piston circulaire

$$I_r(r, \theta) = \frac{|p(r, \theta)|^2}{2\rho_0 c} = \rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2} \frac{k^2 a^4}{4r^2} \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2$$



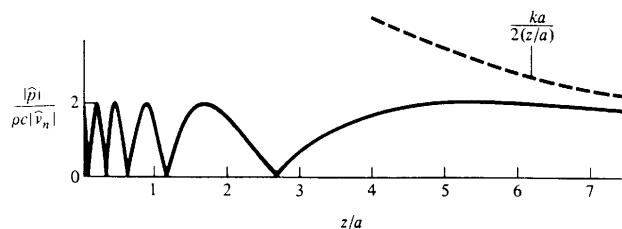
## Directivité du piston circulaire



## Pression dans l'axe du piston circulaire

Dans ce cas l'approximation en champ lointain n'est plus utilisable et l'intégrale suivante doit être calculée

$$p(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \iint_{\Sigma} v_n(\mathbf{r}_0) \frac{e^{-jkR}}{R} dS$$



Le résultat traduit les interférences présentent dans le champ proche d'une source étendue

45

## Facteur de rayonnement du piston circulaire

$$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c S_0 \frac{|v_n(\mathbf{r}_0)|^2}{2}} \quad \leftarrow \quad S_0 = \pi a^2$$

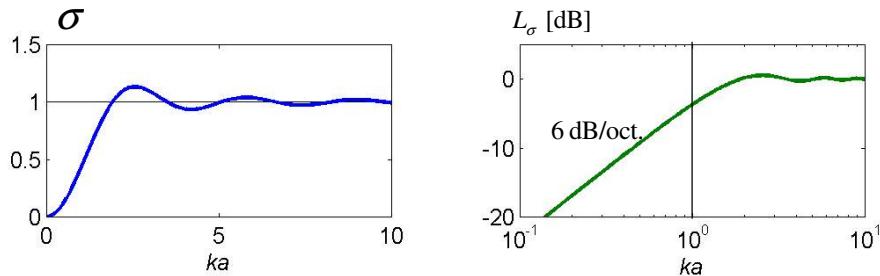
La puissance acoustique rayonnée par le piston se calcule en intégrant la composante radiale de l'intensité acoustique sur une **demi-sphère** de rayon  $r$  située dans le **champ lointain**

$$\begin{aligned} W &= \iint_{\Omega} I_r(\mathbf{r}) ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_r(r, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_r(r, \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2} \pi a^2 \frac{(ka)^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{2 J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta \\ &= \rho_0 c \frac{|v_0|^2}{2} \pi a^2 \left[ 1 - \frac{2 J_1(2ka)}{2ka} \right] \end{aligned}$$

46

## Facteur de rayonnement du piston circulaire

$$\sigma = 1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka}$$



Basses fréquences :  $ka \ll 1 \Rightarrow \sigma \approx (ka)^2$

Hautes fréquences :  $ka \gg 1 \Rightarrow \sigma \approx 1$

47

## Méthodes intégrales pour le calcul du rayonnement

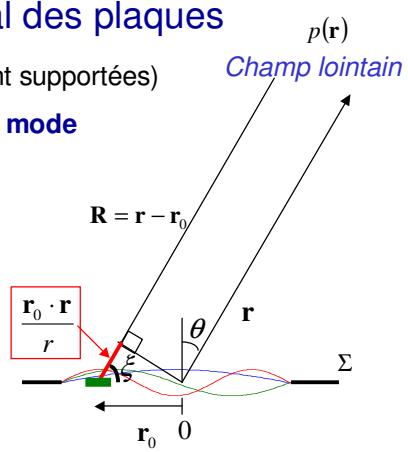
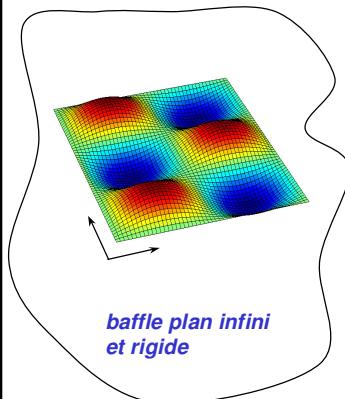
- Utilisation de la méthode de Rayleigh pour les plaques rectangulaires bafflées (Walace 1972)
- Utilisation du principe de Huyghens et de l'intégrale de Kichhoff pour les vibrateurs de forme quelconque

48

## Rayonnement modal des plaques

Plaque rectangulaire bafflée (simplement supportées)

**Vitesse vibratoire correspondant à un mode**

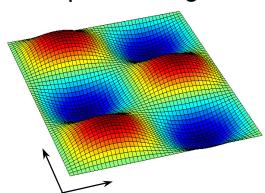


Utilisation de l'intégrale de Rayleigh pour calculer la pression en champ lointain

$$p(\mathbf{r}) \approx j\omega\rho_0 \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \iint_{\Sigma} v_n(\mathbf{r}_0) e^{jk\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}/r} dS \quad 49$$

## Rayonnement modal des plaques

Plaque rectangulaire bafflée



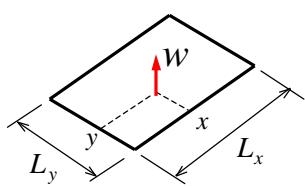
$$\sigma_{mn} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho_0 c \iint_S |v_{mn}(x, y, \omega)|^2 dS}$$

vitesse du mode  $(m, n)$

$$v_{mn}(x, y, \omega) = j\omega w_{mn}(x, y, \omega) = j\omega A_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y)$$

propriété des déformées modales (orthogonalité)

$$\iint_S |v_{mn}(\omega, x, y)|^2 dS = \omega^2 \iint_S |A_{mn}(\omega) \phi_{mn}(x, y)|^2 dS = \omega^2 |A_{mn}(\omega)|^2$$

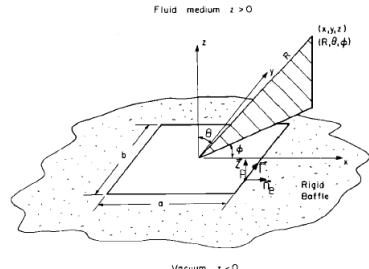


Facteur de rayonnement pour le mode  $(m, n)$

$$\sigma_{mn} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho_0 c \omega^2 |A_{mn}(\omega)|^2} \quad 50$$

## Rayonnement modal des plaques

**Calcul de la puissance acoustique : intégrale de la pression quadratique sur un hémisphère en champ lointain**



$$W(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|p(r, \theta, \phi, \omega)|^2}{2\rho_0 c} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Pour une plaque **simplement supportée** Wallace (1972) obtient

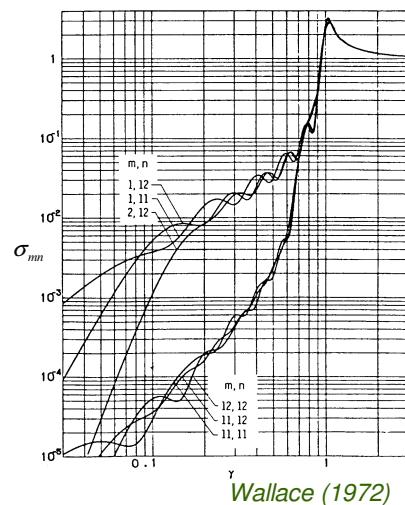
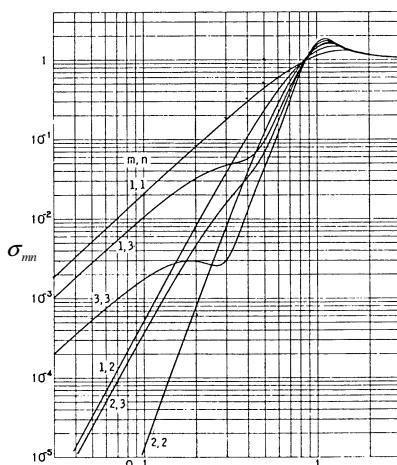
$$p(r, \theta, \phi) = -\omega^2 \rho_0 \frac{e^{-jkr}}{r} 2mn\pi \sqrt{L_x L_y} A_{mn}(x, y) \left[ \frac{(-1)^m e^{jkl_x \sin \theta \cos \phi} - 1}{(kl_x \sin \theta \cos \phi)^2 - (m\pi)^2} \right] \left[ \frac{(-1)^n e^{jkl_y \sin \theta \sin \phi} - 1}{(kl_y \sin \theta \sin \phi)^2 - (n\pi)^2} \right]$$

Facteur de rayonnement pour le mode  $(m, n)$

$$\sigma_{mn}(\omega) = \frac{64k^2 L_x L_y}{\pi^6 m^2 n^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos \{(kL_x \sin \theta \cos \phi)/2\} \cos \{(kL_y \sin \theta \sin \phi)/2\}}{[(kL_x \sin \theta \cos \phi/m\pi)^2 - 1][(kL_y \sin \theta \sin \phi/n\pi)^2 - 1]} \right)^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

## Facteur de rayonnement modal

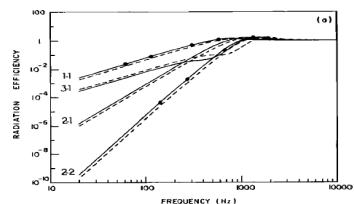
plaque rectangulaire simplement supportée



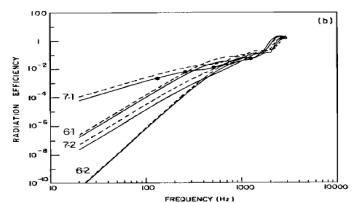
Wallace (1972)

## Influence des conditions aux limites

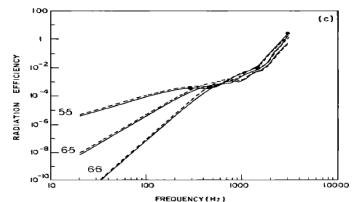
*résultats par mode*



— ···· encastrée  
— — simply supported



acier  
0.55 m x 0.45 m  
( $r = 1.2$ ),  
épaisseur 1 mm,  
fréquence critique 12 kHz

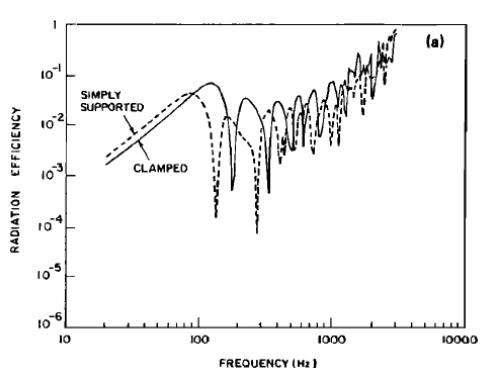


Le facteur de rayonnement d'une plaque encastrée est pratiquement le **double** de celui d'une plaque simplement supportée

Berry, Guyader, Nicolas, JASA 1990<sup>53</sup>

## Influence des conditions aux limites

*résultats globaux*



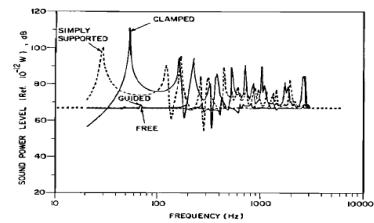
— ···· encastrée  
— — simply supported

acier  
0.55 m x 0.45 m  
( $r = 1.2$ ),  
épaisseur 1 mm,

fréquence critique 12 kHz

amortissement 1%

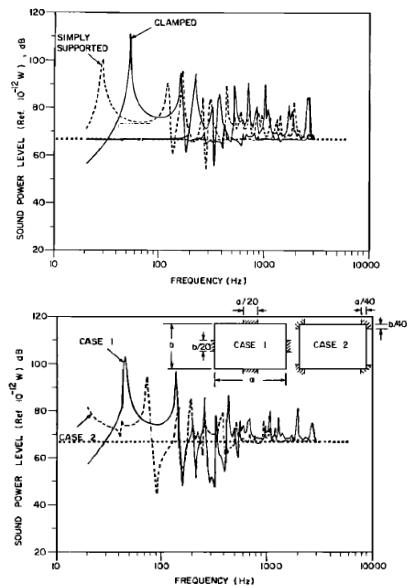
Force ponctuelle au centre



Berry, Guyader, Nicolas, JASA 1990

## Influence des conditions aux limites

*Plaque libre partiellement encastrée*



acier

0.55 m x 0.45 m

( $r = 1.2$ ),

épaisseur 1 mm,

fréquence critique 12 kHz

amortissement 1%

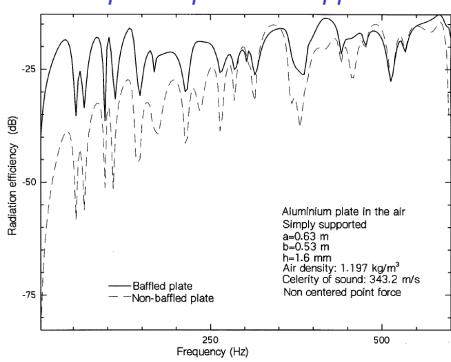
Force ponctuelle au centre

55

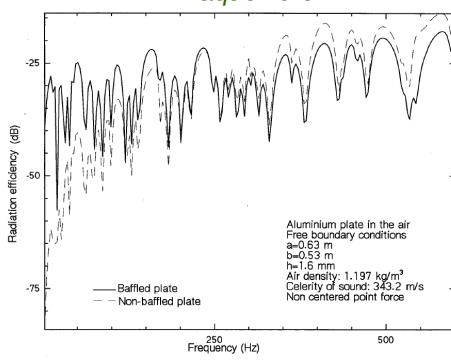
Berry, Guyader, Nicolas, JASA 1990

## Influence du baffle

*Plaque simplement supportée*



*Plaque libre*

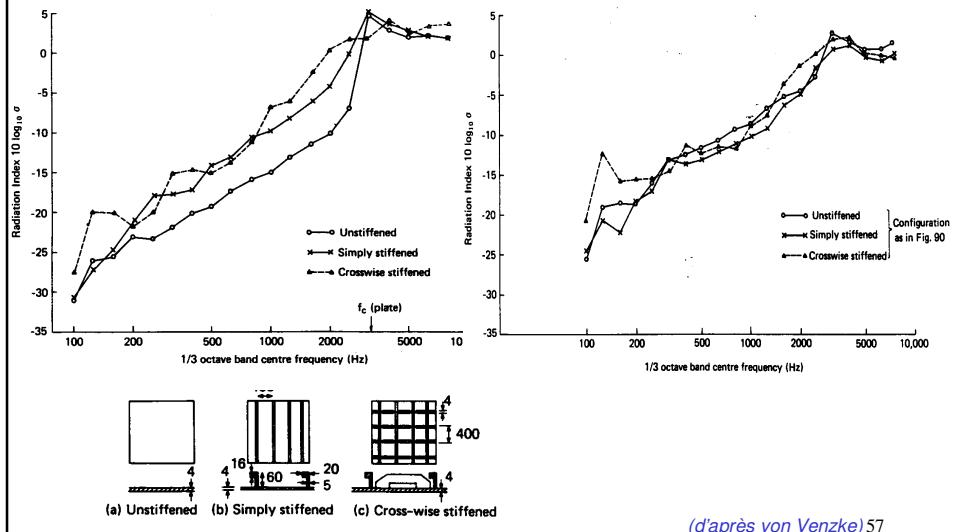


— bafflée

- - - non bafflée

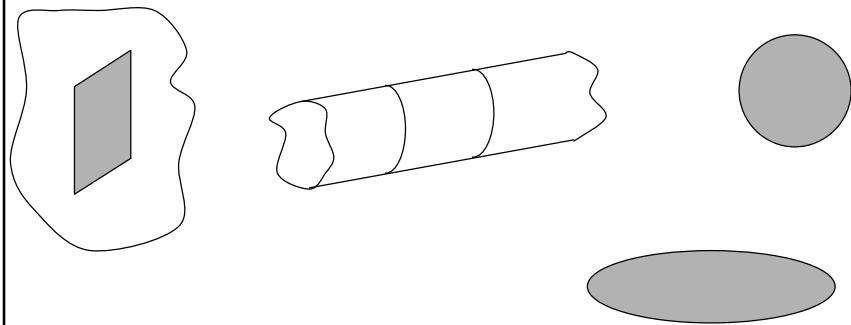
Atalla, Nicolas, Gauthier JASA 1996 <sup>56</sup>

## Facteur de rayonnement excitation mécaniques / excitation acoustique



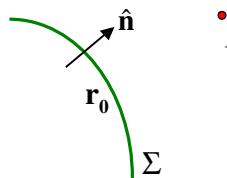
### Extension de cette approche

Cette approche peut être étendue pour des géométries particulières



## Formulation générale du problème de rayonnement

Un problème de rayonnement peut se représenter par



$$\begin{aligned} & \bullet p(\mathbf{r}) \\ & \Omega \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \text{ dans } \Omega \\ \text{conditions aux limites sur la surface } \Sigma \end{array} \right. \\ & \Sigma \quad f(\mathbf{r}) \text{ terme de sources} \end{aligned}$$

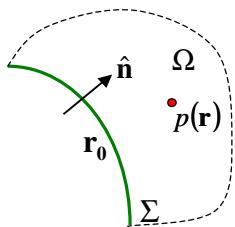
Le champ de pression rayonné peut être obtenu principalement par deux méthodes :

- la méthode **modale** : les fonctions propres de l'opérateur  $(\nabla^2 + k^2)$
- la méthode **intégrale** (basée sur les fonction de Green)

59

## Conditions aux limites

Deux types de conditions aux limites sont utilisées sur  $\Sigma$



$p(\mathbf{r}_0) = 0 \Rightarrow Z(\mathbf{r}_0) = 0$ , Dirichlet homogène
$\frac{\partial p(\mathbf{r}_0)}{\partial n} = 0 \Rightarrow Z(\mathbf{r}_0) = \infty$ , Neumann homogène
$p(\mathbf{r}_0) - Z(\mathbf{r}_0) \frac{\partial p(\mathbf{r}_0)}{\partial n} = 0$ , mixte homogène

D'autres conditions aux limites dites **inhomogènes** pourront se rencontrer.  
Par exemple  $\alpha \partial p(\mathbf{r}_0) / \partial n = \beta$

L'utilisation des formules de Green pour résoudre ce problème, impose un **milieu fermé** par une enveloppe : pour le **problème extérieur**, une condition aux limites à l'infini est utilisée

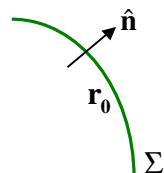
**condition de Sommerfeld**

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ \frac{\partial p}{\partial R} + jkp \right] = 0$$

60

## Généralisation avec les fonctions de Green

Une solution consiste à rechercher une solution en utilisant des fonction de Green :



$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + k^2 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \text{conditions aux limites sur la surface } \Sigma \end{array} \right.$$

la solution peut s'exprimer comme la somme de 3 composantes de pression

$$p = p_f + p_s + p_d$$

$$p_f(\mathbf{r}) = \iiint_{\Omega} f(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) d\Omega$$

$$p_s(\mathbf{r}) = - \iint_{\Sigma} \mu_s(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) d\Sigma$$

$$p_d(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \mu_d(\mathbf{r}_0) \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial n} d\Sigma$$

*intégrale de Rayleigh*

61

## Généralisation avec les fonctions de Green

L'utilisation de la formule de Green       $\iiint_{\Omega} (G \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 G) d\Omega = \iint_{\Sigma} \left( G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Sigma$   
permet de donner une représentation intégrale à l'aide de fonction Green  
en **espace infini**

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + k^2 g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \text{pas de conditions aux limites autre que Sommerfeld} \end{array} \right.$$

$$g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

Cette solution qui permet de représenter le rayonnement d'une source quelconque est **l'équation de Kirchhoff**

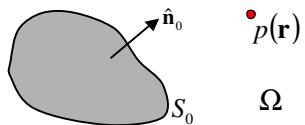
62

## Intégrale de Kirchhoff

Représentation de la pression pour un **problème extérieur**

$$h(\mathbf{r}) \quad p(\mathbf{r}) = \iint_{S_0} \left[ j\omega \rho_0 v_n(\mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + p(\mathbf{r}_0) \frac{\partial g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \right] dS$$

*pas de source dans le domaine  $\Omega$*



$$g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = g(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

$h(\mathbf{r})$  opérateur de découpage

$$h(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \text{quand } \mathbf{r} \text{ est extérieur à } S_0 \\ \frac{1}{2}, & \text{quand } \mathbf{r} \text{ est sur } S_0 (\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) \\ 0, & \text{quand } \mathbf{r} \text{ est intérieur à } S_0 \end{cases}$$

64

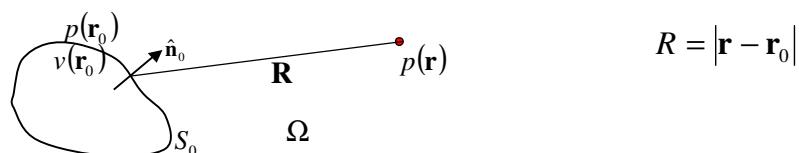
## Principe de Huyghens

Permet d'expliquer l'intégrale de Kirchhoff **comme la contribution de sources secondaires élémentaires**

$$p(\mathbf{r}) = \iint_{S_0} \left[ j\omega \rho_0 v_n(\mathbf{r}_0) g(R) + p(\mathbf{r}_0) \frac{\partial g(R)}{\partial n_0} \right] dS$$



$$g(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad \frac{\partial g(R)}{\partial n} = jkg(R) \left( 1 - \frac{j}{kR} \right) \cos(\hat{n}, \mathbf{R})$$



## Cas particuliers

Si on ne choisit pas à priori la fonction de Green en espace infini, une technique permet de calculer une fonction de Green

$$G = g + X$$

$g$  est la fonction de Green en espace infini (ne vérifie que les conditions de Sommerfeld)

$X$  est une autre fonction qui permet de vérifier les autres conditions du problème : elle est souvent construite par la **méthode des images**

*Exemple de la source ponctuelle placée à proximité d'un plan réfléchissant*

$$X(R') \rightarrow g(R)$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } S_0$$

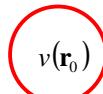
$$p(r) = \iint_{S_0} j\omega\rho_0 v_n(r_0) G(R) dS = \iint_{S_0} j\omega\rho_0 v_n(r_0) 2g(R) dS$$

## Approximations

### Basses fréquences

Le terme dipolaire  $\frac{\partial g(R)}{\partial n} = jkg(R)\left(1 - \frac{j}{kR}\right)\cos(\hat{n}, \mathbf{R})$  peut être négligé

$$p(r) = \iint_{S_0} j\omega\rho_0 v_n(r_0) g(R) dS$$



### Hautes fréquences

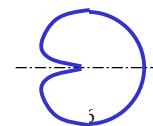
On considère que l'impédance de rayonnement vaut  $\rho_0 c$  donc

$$p(r_0) = \rho_0 c v_n(r_0)$$

$$p(r) = \iint_{S_0} j\omega\rho_0 v_n(r_0) g(R) \left[ 1 + \left(1 - \frac{j}{kR}\right) \cos(\hat{n}, \mathbf{R}) \right] dS$$

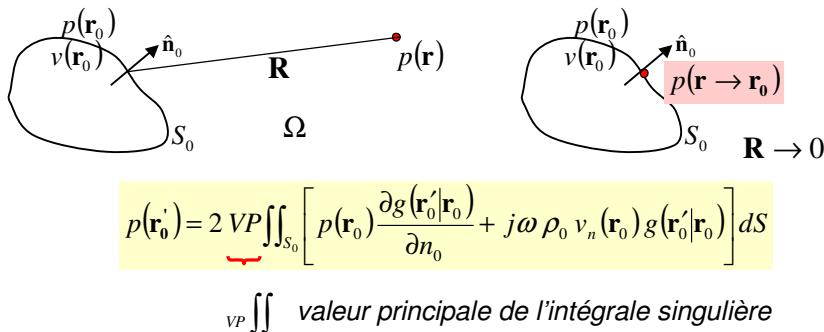
Et en champ lointain :  $1/kR \rightarrow 0$

$$p(r) = \iint_{S_0} j\omega\rho_0 v_n(r_0) g(R) [1 + \cos(\hat{n}, \mathbf{R})] dS$$



## Solution de l'intégrale de Kirchhoff

Formulation de la pression sur la surface :  $h(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}$



En remplaçant l'intégrale par sa forme discrète (éléments de surface)

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}\mathbf{P} + \mathbf{M}\mathbf{V} \Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{P} = \mathbf{M}\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{M}\mathbf{V}$$
67

## Références

*Rayonnement acoustique des structures* (C. Lesueur, Ed.), Eyrolles, 1988.

*Acoustique générale* (P. Filippi, Ed.), Les Editions de Physique, 1994.

M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale*, Hermès, 1998.

F.J. Fahy, *Sound and Structural Vibration*, Academic Press, 1985.  
(nouvelle édition 2007)

M.C. Junger, D. Feit, *Sound, Structures, and their Interaction* (2<sup>nd</sup> ed.), MIT press, 1986. (réédition : Acoustical Society of America, 1993).

A.D. Pierce, *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*, McGraw-Hill, 1981.

E.G. Williams, *Fourier Acoustics, Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*, Academic Press, 1999.