华东理工大学 2024-2025 学年第一学期

《数学分析（上）》课程期末考试试卷 A 2025.1

开课学院：数学学院　专业：数、信计　考试形式：闭卷　所需时间：120 分钟

姓　名：＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿　班级：＿＿＿＿＿　任课教师：靳勇飞

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
评卷人											

注意事项：

1. 考试过程中不可以使用计算器，也不可以使用任何其他机械或电子辅助计算工具。
2. 在试卷中，$\mathbb{N}$ 表示非负整数集合；$\mathbb{N}^+$ 表示正整数集合；$\mathbb{R}$ 表示实数集合。作为区间端点的符号 a, b 满足 $a < b$.
3. 使用任何没有在课本或者课堂上证明过的结论前，都必须先证明该结论。
4. 所有题目的解答都需写出主要步骤。

以下为试卷内容

一、 (每小题 5 分，共 10 分) 叙述下列定理或定义。

1. 符号 $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = -\infty$ 的定义

2. L' Hospital 法则

二、 (本题 5 分) 简答。设函数 $f(x) = x + x(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, 求 $\mathrm{d}f|_{x=1}$.

三、 (每小题 5 分，共 10 分) 计算。

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\pi-2\arctan n)^{\frac{1}{\ln n}}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}{\ln(x^2-e)+x-1}$

四、 (每小题 5 分，共 15 分) 计算。

1. $\displaystyle\int(x^3+3x)e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-2\cos x}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int\frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

五、 (本题 10 分) 函数 f 在开区间 (a,b) 内连续，$a < x_1 < x_2 < b$. 证明：对任意的两个正实数 t_1, t_2, 存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(\xi) = \frac{t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)}{t_1 + t_2}.$$

六、 (本题 10 分) 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$.

1. 举例说明：存在满足前面条件的 f, 使得 $|f|$ 在 (a,b) 内某一点处不可导。
2. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = f(\xi)\sin\xi$.

七、 (本题 10 分) 对任意的正自然数 n, 求 x^2e^x 的 n 阶导函数，以及在 $x = 1$ 的 n 阶导数。

八、 (本题 10 分) 已知函数 f 在 $(-1, 1)$ 内有 2 阶以上的导数，且 f 在 $(-1, 1)$ 有反函数 f^{-1}. f^{-1} 在 0 的 2 阶 Taylor 多项式是

$$x - x^2$$

求 f 在 0 的 2 阶 Taylor 多项式。

九、 (本题 10 分) 证明：如果 f, g 都在集合 I 上一致连续，则 $\max(f, g)$ 在集合 I 上一致连续。

十、 (本题 10 分) 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \dfrac{x+3}{2}$, $f_1(x) = \dfrac{3x+3}{4}$. $\{k_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 是由 $\{0, 1\}$ 中元素组成的数列。$F_0 = f_{k_0}$, 对任意的自然数 n, $F_{n+1} = F_n \circ f_{k_{n+1}}$. 证明：对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.

(本题 8 分，选做) x_0 是实数，对任意的自然数 n, $x_{n+1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使得 $x_n = 2\tan x_{n+1}$.
证明：数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.