



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

GUSTAVO LUCAS MARQUES

Fases topológicas em líquidos de spin quânticos

Goiânia
2021

GUSTAVO LUCAS MARQUES

Fases topológicas em líquidos de spin quânticos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Área de pesquisa: Física da Matéria Condensada

Orientador: Prof. Dr. Vanuildo Silva de Carvalho

Goiânia
2021

GUSTAVO LUCAS MARQUES

Fases topológicas em líquidos de spin quânticos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física, aprovada em 26 de junho de 2021, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Vanuildo Silva de Carvalho

Instituto de Física – Universidade Federal de Goiás
Presidente da Banca

Prof. Dr. Hermann Freire Ferreira Lima e Silva

Instituto de Física – Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Renato Borges Pontes

Instituto de Física – Universidade Federal de Goiás

AGRADECIMENTOS

A conclusão dessa longa etapa contou com a ajuda de várias pessoas, dentre as quais agradeço: aos meus pais, José Ferreira e Ana Meire, que me apoiaram incondicionalmente durante todos esses anos e fizeram possíveis essa conquista e as próximas. Eles são meus exemplos de seres humanos em tantos níveis que nem a mais fértil imaginação conseguiria replicá-los.

À Isabela Rodrigues, que por todos esses anos tem sido a rocha que quebra a onda de toda pressão imposta pelo cotidiano, sendo uma das peças mais importantes nessa minha graduação; a melhor amiga e companheira que eu poderia ter, uma das melhores pessoas que conheço. Aos meus irmãos Fernando, Geovanne e Yasmin, que direta e indiretamente contribuíram em muito para essa realização.

Aos amigos da faculdade que tornaram essa minha difícil e problemática trajetória menos tortuosa e cada vez mais produtiva, ora com os debates filosóficos protagonizados pelos queridos Pedro (Preguiça) e Gabriel Boscolo, ora com as conversas desprentensiosas nos espaços de convivência. Aos que conheci exatamente por ter atrasado a conclusão da graduação, dentre eles meu amigo Igor, cuja ajuda com as disciplinas mais complicadas foi fundamental para que eu conseguisse concluir o curso; o grande Ronaldão, sempre presente e pronto pra resolver qualquer problema, com uma amizade que tranquilizou e fortaleceu meu psicológico; o João Gabriel e o Rafael Alexandre pelo apoio e força nos vários momentos de estudo em que era preciso permanecer no IF-UFG até de noite.

Àqueles que deixaram o IF, mas que tiveram grande influência em como esse meu ciclo se encerrou, em especial ao Rodrigo Freire, cuja indicação para substituí-lo no programa de iniciação científica foi o que me possibilitou trocar trabalhos informais por mais tempo dentro da universidade; e à Dimitria, talvez a pessoa de melhor desempenho que vi nesses anos de graduação, que me impulsionou e me ensinou bastante em um momento em que eu não tinha a quem recorrer.

Aos professores com quem aprendi nesse longo período, em especial os professores Dr. José Rildo (Rildão), Dr. José Nicodemos, Dr. Jesiel F. Carvalho, e o Professor Dr. Ardiley Torres (que na minha opinião deveria estar em um quadro no corredor do IF), que foi quem me trouxe de volta de um mar crescente de frustração e desesperança.

Por fim, ao professor Dr. Vanuildo Silva Carvalho, que aceitou orientar esse trabalho apesar de todas as dificuldades de tempo e repertório que mostrei.

RESUMO

A proposta desse trabalho é fornecer um breve apanhado sobre a literatura dos líquidos de spin quânticos e a moderna ascensão da aplicação de topologia na física da matéria condensada. Nesse sentido, fazemos inicialmente uma exposição detalhada sobre o surgimento da fase de Berry a partir do teorema adiabático e a ligação dessa fase com um invariante topológico, conhecido como número de Chern. Após isso, discutimos os vários aspectos dos estados de líquidos de spin quânticos a partir de sua primeira proposta na literatura. Por fim, finalizamos o nosso estudo com uma exposição sucinta do modelo de Kitaev, a sua solução para o estado fundamental, e uma discussão dos possíveis materiais que são candidatos a realizar esse modelo.

Palavras - chave: Fase topológica, líquidos de spin quântico, modelo de Kitaev.

ABSTRACT

The purpose of this work is to provide a brief overview of the literature on quantum spin liquids and the modern rise of the application of topology in condensed matter physics. In this sense, we initially make a detailed exposition about the emergence of the Berry phase from the adiabatic theorem and the connection of this phase with a topological invariant known as the Chern number. After that, we discuss the various aspects of the states of quantum spin liquids from their first proposal in the literature. Finally, we end our study with a succinct exposition of the Kitaev model, its ground-state solution, and a discussion of the materials that are candidates to realize this model.

Key - words: Topological phase, quantum spin liquid, Kitaev model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Nesse caso, uma caneca pode ser continuamente deformada em um toroide.	10
Figura 3.1:	Célula unitária de uma rede triangular com um spin em cada vértice.	24
Figura 4.1:	Esquema que mostra uma rede hexagonal com três tipos diferentes de ligação.	27
Figura 4.2:	Os três tipos de ligação na rede hexagonal.	28
Figura 4.3:	Diagrama de fases do modelo de Kitaev.	33
Figura 4.4:	Candidatos a líquido de spin quântico. Estrutura cristalina dos materiais a : Na_2IrO_3 e $\alpha - \text{Li}_2\text{IrO}_3$. b : $\text{A}'_3\text{LiIr}_2\text{O}_6$ ($\text{A}' = \text{H}, \text{Cu}$ e Ag). c : $\alpha - \text{RuCl}_3$. d : $\beta - \text{Li}_2\text{IrO}_3$	34
Figura 4.5:	Condutividade térmica Hall semi-quantizada em função de um campo magnético inclinado de 60° em relação ao plano da rede hexagonal.	35

SUMÁRIO

Capítulo 1: A ascensão da topologia	9
1.1 Topologia na física	9
Capítulo 2: Fase de Berry	12
2.1 Teorema adiabático	12
2.2 Fase de Berry	15
2.3 Degenerescência e invariância de gauge	16
2.4 A curvatura de Berry e o número de Chern	17
2.5 Efeito Hall quântico e o número de Chern	18
Capítulo 3: Líquidos de spin quânticos	22
3.1 Fases exóticas da matéria	22
3.2 Líquidos de spin quânticos: uma breve discussão	23
Capítulo 4: Modelo de Kitaev	26
4.1 O modelo de Kitaev	26
4.2 Uma solução exata	28
4.3 Energia do estado fundamental	31
4.4 Candidatos a líquidos de spin quânticos	33
Capítulo 5: Considerações finais	36
Referências bibliográficas	38

A ASCENSÃO DA TOPOLOGIA

1.1 Topologia na física

Existem vários pilares conceituais que temos para a forma que pensamos em física, e dois desses pilares são: simetria e topologia. Simetria é provavelmente a ideia mais familiar, principalmente na física, em que aprendemos desde sempre que elas são essencialmente partes do problema ou da solução. Considere por exemplo o problema de calcular o potencial eletrostático no interior de uma esfera oca. O que fazemos é partir da simetria esférica do problema e fazer uso das coordenadas esféricas no processo resolução da equação de Laplace. Dessa forma, aprendemos que se entendemos a simetria de um problema podemos simplificá-lo e dividi-lo em partes e teremos profundas simplificações conceituais e analíticas. É fato que se entendemos simetrias então entendemos ideias profundas tais como leis de conservação [1] e transições de fase [2]. Vemos ainda que considerações acerca de simetrias nos permite entender as diferentes fases da matéria a partir dos padrões que uma fase tem ou não tem, por meio da análise do parâmetro de ordem do sistema [2].

Em uma transição de fase contínua descrita pela teoria de Landau¹, ocorre a quebra de simetria do sistema e podemos, por meio desse parâmetro de ordem, atestar tal transição. Como exemplo, a magnetização espontânea é o parâmetro de ordem de um sistema magnético [2], cujo ordenamento dos spins no material quebra a simetria rotacional, ou ainda, a solidificação da água em gelo, que quebra a simetria de translação.

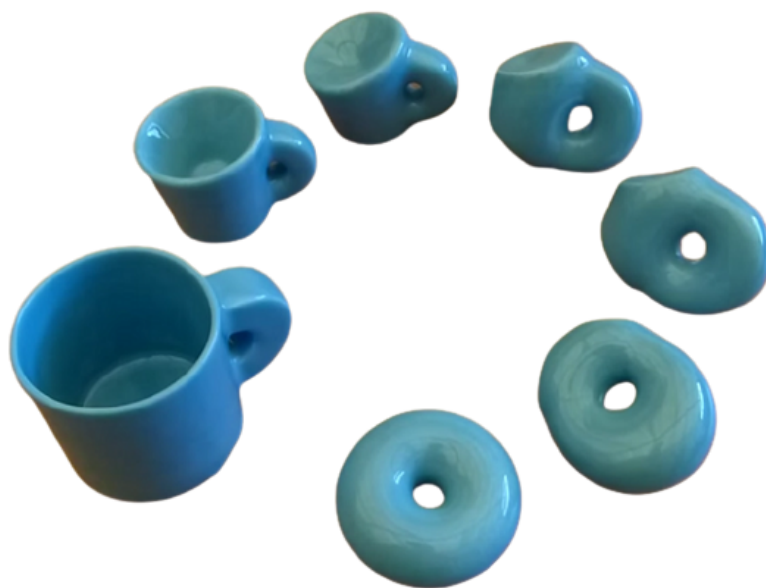
Dito isso, pensamos em simetria como sendo essencialmente sobre responder a pergunta: De que forma pode-se mudar um sistema de forma a mantê-lo o mesmo? Podemos por exemplo, translacionar um sistema, rotacioná-lo, ou refleti-lo, de forma que

1. Uma exposição sobre a teoria de Landau para transições de fase pode ser encontrada na referência [3]

o sistema permaneça o mesmo? O entendimento desse mecanismo fornece uma poderosa ferramenta para o entendimento da física da matéria condensada.

O segundo pilar, a topologia, é uma ideia matemática, mais precisamente uma área da matemática, tão profunda quanto a simetria. A topologia é sobre responder a pergunta: O que se mantém inalterado quando mudamos o sistema? Assim, a topologia é interessada nas propriedades matemáticas de um objeto que se mantêm as mesmas quando deformamos esse objeto. Um exemplo é mostrado na Figura 1.1.

Figura 1.1: Nesse caso, uma caneca pode ser continuamente deformada em um toroide.



Fonte: Plataforma Quora²

Note que na Figura 1.1, a caneca pode ser transformada no toroide via deformações suaves e contínuas, preservando o buraco, propriedade invariante sob tais deformações. Contudo, de forma alguma poderíamos, via deformações suaves e contínuas, transformar um dos objetos da Figura 1.1 em uma esfera, tampouco uma esfera em um dos objetos da Figura 1.1.

Nota-se então que há algo diferente nesses objetos e essa diferença se dá de forma discreta —o número de buracos— sugerindo a ideia de números topológicos quantizados (inteiros) que diferenciam esses objetos. Assim como as simetrias são usadas na física, o uso da topologia para descrever fases da matéria se tornou uma das poderosas ferramentas da física da matéria condensada.

2. Disponível em : <<https://www.quora.com/What-is-topology-in-maths-and-physics>>

A topologia é utilizada na física de matéria condensada, principalmente na descrição das fases que não podem ser caracterizadas pela teoria de Landau³. O teorema de Mermin-Wagner [5], por exemplo, mostra que não existem fases ordenadas em duas dimensões, e por muito tempo acreditou-se que sistemas bidimensionais, mesmo a uma temperatura próxima do zero absoluto, não poderiam apresentar fases ordenadas. Entretanto, em 1972, Michael Kosterlitz e David Thouless mostraram que a fase desordenada em baixas temperaturas tem propriedades diferentes daquela fase desordenada em altas temperaturas, identificando um novo tipo de transição de fase caracterizado por um novo conceito, o de excitações topológicas.

A fundamentação teórica das fases topológicas da matéria rendeu o prêmio nobel de Física de 2016 a Michael Kosterlitz, David Thouless e Duncan Haldane [6]. Thouless havia lançado mão de argumentos topológicos na explicação do efeito Hall⁴ quântico [7], descoberto em 1980 pelo físico alemão Klaus von Klitzing. Klitzing investigou um material condutor bidimensional confinado entre dois semicondutores a temperatura próxima ao zero absoluto e na presença de um forte campo magnético. Ele encontrou que a condutividade Hall é quantizada em valores discretos e muito específicos, o que é explicado pelo fato dessa condutividade ser, na verdade, proporcional a um invariante topológico [8].

A conexão entre a matemática e a física das condições de determinação de um invariante topológico se dá por meio de mudanças adiabáticas. Na matemática, um invariante topológico é uma quantidade que caracteriza um objeto e que não se altera mesmo se houver deformações suaves e contínuas no objeto (veja Figura 1.1). A referida conexão das condições para um invariante topológico— o conceito de deformação suave e contínua— no contexto da física se dá por meio de uma variação adiabática na função hamiltoniana do sistema ou ainda de seus parâmetros. Essa mudança adiabática na função hamiltoniana do sistema dá origem ao conceito mais importante da teoria de bandas topológicas, a fase de Berry [9].

3. Lev Davidovich Landau. Foi um físico soviético que fez descobertas fundamentais em diversas áreas da física teórica. É juntamente com Evgueny Lifshitz autor da famosa e ainda atual coleção “Curso de Física Teórica” [4].

4. O efeito Hall foi descoberto em 1879 por Edwin Herbert Hall. Esse efeito foi importante na determinação do portador majoritário de carga na corrente elétrica.

FASE DE BERRY

2.1 Teorema adiabático

A fase de Berry foi proposta em 1984 pelo físico inglês Michael Victor Berry [10]. A fase de Berry surge devido à evolução adiabática de um sistema, que na mecânica quântica pode ser expresso por meio de um teorema [11]. De acordo com o teorema adiabático, um sistema começando no n -ésimo autoestado $|\psi_n(t)\rangle$, irá evoluir com a hamiltoniana $H[\mathbf{R}(t)]$ e permanecerá no n -ésimo autoestado absorvendo apenas um fator de fase

$$|\Psi_n(t)\rangle = |\psi_n(t)\rangle e^{-E_n t/\hbar}. \quad (2.1)$$

Note que a hamiltoniana depende implicitamente do tempo, dependência essa dada pelos parâmetros $\mathbf{R}(t) = (R_1, R_2, R_3, \dots)$, que representam coordenadas no espaço de parâmetros. Dessa forma, uma evolução adiabática cíclica modifica o hamiltoniano num intervalo de tempo muito maior que o intervalo característico necessário para transições eletrônicas.

A evolução no tempo do sistema é dada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (2.2)$$

As soluções dessa equação é dada pela combinação linear

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)}, \quad (2.3)$$

em que $\theta_n(t)$ é uma quantidade que generaliza o fator de fase, incluindo o caso em que $E_n = E_n(t)$.

Substituindo a equação 2.3 na equação de Schrödinger (2.2) temos o seguinte:

$$i\hbar \sum_n \left[\dot{c}_n |\psi_n\rangle + c_n |\dot{\psi}_n\rangle + i c_n |\psi_n\rangle \dot{\theta}_n \right] e^{i\theta_n} = \sum_n c_n (H \psi_n) e^{i\theta_n}. \quad (2.4)$$

Uma vez que

$$\dot{\theta}_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t E_n(t') dt' = -\frac{1}{\hbar} E_n(t), \quad (2.5)$$

e usando $H(t)|\psi_n(t)\rangle = E_n(t)|\psi_n(t)\rangle$, temos que os dois últimos termos se cancelam, restando

$$\sum_n \dot{c}_n |\psi_n\rangle e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n |\dot{\psi}_n\rangle e^{i\theta_n}. \quad (2.6)$$

Note que se o hamiltoniano depende do tempo, então seus autovalores bem como suas autofunções também dependem, fato esse utilizado no desenvolvimento até o momento, mas o autoestado inicial que evolui com $H[\mathbf{R}(t)]$ permanecerá como um autoestado instantâneo [9] de $H[\mathbf{R}(t)]$. Portanto, em qualquer instante determinado, as autofunções ainda constituirão um conjunto ortonormal. Daí, tiramos que $\langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle = \delta_{nm}$.

Tomando o produto interno da (2.6) com um autoestado $|\psi_m\rangle$, temos:

$$\sum_n \dot{c}_n \delta_{mn} e^{i\theta_n} = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i\theta_n}. \quad (2.7)$$

Veja que no lado esquerdo da igualdade, apenas o coeficiente com $n = m$ não se anula, portanto,

$$\dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle e^{i(\theta_n - \theta_m)}. \quad (2.8)$$

O produto interno $\langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle$ é uma incógnita, mas podemos determiná-la a partir da diferenciação da equação $H(t)|\psi_n(t)\rangle = E_n(t)|\psi_n(t)\rangle$, o que resulta em

$$\dot{H}|\psi_n\rangle + H|\dot{\psi}_n\rangle = \dot{E}_n|\psi_n\rangle + E_n|\dot{\psi}_n\rangle. \quad (2.9)$$

Tomando novamente o produto interno com $|\psi_m\rangle$, temos:

$$\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle + \langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = \dot{E}_n \delta_{mn} + E_n \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle. \quad (2.10)$$

Usando o fato de que o operador $H(t)$ é hermitiano, no segundo termo do lado esquerdo da igualdade, podemos fazê-lo atuar à esquerda, o que fornece

$$\langle \psi_m | H | \dot{\psi}_n \rangle = E_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle. \quad (2.11)$$

Então,

$$\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle = (E_n - E_m) \langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle, \quad (2.12)$$

ou ainda (para $n \neq m$)

$$\langle \psi_m | \dot{\psi}_n \rangle = \frac{\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle}{(E_n - E_m)}. \quad (2.13)$$

Substituindo esse resultado na (2.8), obtemos

$$\dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle - \sum_{n \neq m} c_n \frac{\langle \psi_m | \dot{H} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} e^{(-i/\hbar) \int_0^t [E_n(t') - E_m(t')] dt'}. \quad (2.14)$$

Note que estamos supondo uma mudança adiabática no sistema, de modo que a variação no tempo do hamiltoniano seja tão pequena que possa ser descartada. Sendo assim,

$$\dot{c}_m(t) = -c_m \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle. \quad (2.15)$$

Então

$$\frac{dc_m(t)}{c_m} = -\langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle \Rightarrow \int_0^t \frac{dc_m(t')}{c_m} = -\int_0^t \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle dt' \quad (2.16)$$

$$\ln \frac{c_m(t)}{c_m(0)} = -\int_0^t \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle dt' \Rightarrow \frac{c_m(t)}{c_m(0)} = \exp \left\{ -\int_0^t \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle dt' \right\} \quad (2.17)$$

Fazendo

$$-\int_0^t \langle \psi_m | \dot{\psi}_m \rangle dt' = i^2 \int_0^t \left\langle \psi_m(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_m(t') \right. \right\rangle dt', \quad (2.18)$$

e

$$\gamma_m(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_m(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_m(t') \right. \right\rangle dt' \quad (2.19)$$

chega-se ao resultado:

$$c_m(t) = c_m(0) e^{i\gamma_m(t)} \quad (2.20)$$

Sendo assim, o vetor que descreve o sistema (2.3) pode ser escrito como sendo

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(0) e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} |\psi_n(t)\rangle. \quad (2.21)$$

Se o sistema se encontra no n-ésimo autoestado, então,

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} |\psi_n(t)\rangle. \quad (2.22)$$

Esse resultado nos diz que, se inicialmente o sistema se encontra no n-ésimo autoestado do hamiltoniano inicial e esse sofre uma mudança adiabática por meio da mudança de seus parâmetros, ele será levado ao n-ésimo estado do hamiltoniano final, absorvendo apenas alguns fatores de fase.

2.2 Fase de Berry

Vimos que pelo teorema adiabático, um sistema começando em um autoestado $|\psi(t)\rangle$ irá evoluir com $H[\mathbf{R}(t)]$ e permanecerá, sob condições adiabáticas, como um autoestado instantâneo de $H[\mathbf{R}(t)]$ ao longo do processo. Sua função de onda é dada pela equação (2.22), em que

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt', \quad (2.23)$$

e

$$\gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right. \right\rangle dt'. \quad (2.24)$$

Os termos $\theta_n(t)$ e $\gamma_n(t)$ são as fases dinâmica e geométrica, respectivamente.

A fase geométrica γ_n , também conhecida por fase de Berry, surge do fato de que os autoestados em t e em $t + dt$ não são idênticos. A dependência do hamiltoniano com os parâmetros $\mathbf{R}(t)$ é o que cria a dependência dos autoestados com o tempo, uma vez que os parâmetros $R(t)$ dependem implicitamente do tempo. Dessa forma, o tempo pode ser removido da equação para a fase de Berry (γ_n).

Veja que

$$\frac{\partial |\psi_n(t)\rangle}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial |\psi_n(t)\rangle}{\partial R_i(t)} \frac{dR_i(t)}{dt} = (\nabla_R |\psi_n\rangle) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}. \quad (2.25)$$

Então,

$$\int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right. \right\rangle dt' = \sum_i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial R_i} \psi_n(t') \right. \right\rangle \frac{\partial R_i}{\partial t} dt' \quad (2.26)$$

$$= \int_{\mathbf{R}_i}^{\mathbf{R}_f} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (2.27)$$

Note que a integral se torna uma integral de linha no espaço dos parâmetros quando supomos a mudança adiabática cíclica. Assim, quando o hamiltoniano retornar à sua forma original, após um intervalo de tempo, a mudança na fase geométrica será

$$\gamma_n(i) = i \oint_{\mathcal{C}} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\mathbf{R}, \quad (2.28)$$

onde consideramos o conjunto de parâmetros como um vetor \mathbf{R} e \mathcal{C} uma curva fechada no espaço dos parâmetros. Esse tipo de integral é bastante comum quando se trabalha com campos eletromagnéticos em mecânica quântica [9]. Da expressão para a fase de Berry (2.28), vê-se o porquê do nome “fase geométrica”, uma vez que γ_n depende tão somente do caminho percorrido pelo sistema no espaço dos parâmetros e não do tempo, como a

fase dinâmica θ_n . A fase de Berry é também insensível com respeito à velocidade com que o caminho é percorrido no espaço dos parâmetros, desde que seja suficientemente lenta para validar a aproximação adiabática. Apesar do sistema retornar ao ponto de partida ao longo da curva no espaço dos parâmetros, a fase de Berry em geral é diferente de zero [11].

Por analogia com o transporte de elétrons em um campo eletromagnético, podemos, por meio da equação da fase de Berry definir uma função que chamamos de *conexão de Berry* ou *potencial de Berry* [9]. Definimos então:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = i \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle, \quad (2.29)$$

onde,

$$\gamma_n = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}. \quad (2.30)$$

De acordo com o teorema de Stokes generalizado para o espaço de parâmetros de \mathbf{R} [9], decorre o seguinte:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \int \nabla_R \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.31)$$

Assim a fase de Berry é determinada por uma espécie de *fluxo* de um campo generalizado

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{R}) \equiv \nabla_R \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \quad (2.32)$$

através de uma superfície delimitada pela curva \mathcal{C} , que descreve o circuito percorrido por \mathbf{R} no espaço dos parâmetros.

2.3 Degenerescência e invariância de gauge

Vimos que uma forma de escrever a fase de Berry é em termos da curvatura de Berry,

$$\gamma_n = \oint \mathbf{F}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.33)$$

e entendê-la como o fluxo do campo \mathbf{F}_n através da superfície delimitada pela curva \mathcal{C} no espaço dos parâmetros. Com auxílio do tensor de Levi-Civita, podemos reescrever o campo \mathbf{F}_n como

$$\mathbf{F}_n = i ((\nabla_R \langle \psi_n |) \times (|\nabla_R \psi_n \rangle)). \quad (2.34)$$

Inserindo uma identidade de completude¹ para cada R , temos que

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{R}) = i \sum_{n \neq m} ((\nabla_{\mathbf{R}} \langle \psi_n |) | \psi_m \rangle \times \langle \psi_m | (\nabla_{\mathbf{R}} | \psi_n \rangle)). \quad (2.35)$$

Os termos onde $n = m$ foram omitidos na soma por se anularem. Para encontrar $\langle \psi_m | (\nabla_{\mathbf{R}} | \psi_n \rangle)$, basta calcular o gradiente da equação de autovalores nos autoestados da base $\{ | \psi_m \rangle \}$ ($H(t) | \psi_m(t) \rangle = E_m(t) | \psi_m(t) \rangle$) e tomar o produto interno com os autoestados $| \psi_n \rangle$, o que fornece

$$\langle \psi_n | \nabla H | \psi_m \rangle + \langle \psi_n | H | \nabla \psi_m \rangle = \langle \psi_n | \nabla E_m | \psi_m \rangle + \langle \psi_n | E_m | \nabla \psi_m \rangle. \quad (2.36)$$

Uma vez que o hamiltoniano é um operador hermitiano², podemos escrever $\langle \psi_n | H = E_n \langle \psi_n |$ e obter

$$\langle \psi_n | \nabla \psi_m \rangle = \frac{\langle \psi_n | \nabla H | \psi_m \rangle}{E_n - E_m}, \quad (n \neq m) \quad (2.37)$$

Substituindo esse resultado na equação 2.35, obtemos a segunda forma da curvatura de Berry:

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{R}) = i \sum_{n \neq m} \frac{\langle \psi_m | \nabla H | \psi_n \rangle \times \langle \psi_n | \nabla H | \psi_m \rangle}{(E_n - E_m)^2} \quad (2.38)$$

Essa forma particular mostra que $\mathbf{F}_n(\mathbf{R})$ apresenta uma singularidade, se considerarmos a possibilidade de degenerescência, uma vez que os denominadores serão nulos mesmo se os elementos da matriz ∇H não forem³ [12]. Uma outra consideração importante é que a equação (2.38) é invariante sob transformações de gauge⁴, tendo vantagem sobre as equações que dependem do gauge [9], como o potencial de Berry $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$.

2.4 A curvatura de Berry e o número de Chern

Vários estudos e abordagens sobre a fase de Berry foram feitos desde sua publicação. O destaque nesse trabalho é dado ao artigo do autor Garg [12], em que esse justifica o nome *curvatura de Berry* e o relaciona com o chamado número de Chern.

1. Completude ou mais precisamente, um conjunto completo de autoestados é a descrição da seguinte identidade: $\sum_m | \psi_m \rangle \langle \psi_m | = 1$.

2. Um operador H é hermitiano se $H = H^\dagger$, e ele atua tanto à esquerda (bras) quanto à direita (kets).

3. Geralmente os elementos da matriz ∇H não são nulos.

4. Transformações de gauge também são conhecidas por transformações de calibre.

Para justificar o termo *curvatura*, Garg toma um ponto arbitrário numa superfície como sendo a origem de um sistema de coordenadas e alinha o vetor normal dessa superfície ao eixo z . Garg também impõe que os eixos x e y estejam nas direções das chamadas curvaturas principais (κ_1 e κ_2), cujo produto resulta na curvatura gaussiana $\mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2$. A equação dessa superfície próximo à origem será dada por [12]:

$$z = -\frac{1}{2} (\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2), \quad (2.39)$$

Mas Garg ainda argumenta que pode-se obter \mathcal{K} a partir do vetor normal à superfície da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} + \kappa_1 x \hat{\mathbf{x}} + \kappa_2 y \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.40)$$

Assim, diferenciando essa direção com respeito aos eixos x e y , obtemos respectivamente:

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dx} = \kappa_1 \hat{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dy} = \kappa_2 \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.41)$$

Dessa forma a curvatura \mathcal{K} será dada pelo produto vetorial desses termos,

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dx} \times \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dy} = \mathcal{K} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.42)$$

Garg destaca a semelhança dessa expressão com a expressão (2.34) e conclui assim o porquê de $\mathbf{F}_n(\mathbf{R})$ ser chamado de curvatura de Berry.

Uma outra analogia feita no trabalho de Garg [12] é com respeito ao fluxo do campo $\mathbf{F}_n(\mathbf{R})$ através de uma superfície no espaço dos parâmetros com um importante teorema da matemática, o teorema de Gauss-Bonnet. De fato, o teorema de Gauss-Bonnet diz que a integral da curvatura gaussiana sobre uma superfície fechada é igual ao produto de 2π por um número χ , conhecido por ser um invariante topológico, chamado de característica de Euler.

$$\oint_S K dA = 2\pi\chi. \quad (2.43)$$

Garg argumenta que o análogo dessa expressão utilizando a curvatura de Berry é

$$\oint \mathbf{F}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{a} = 2\pi\mathcal{C}_n, \quad (2.44)$$

em que \mathcal{C}_n é o análogo topológico da característica de Euler e é chamado de número de Chern. Observe o índice n , que significa que o número de Chern é definido para qualquer autoestado instantâneo do hamiltoniano. O resultado expresso pela equação (2.44) é mostrado na referência [9].

2.5 Efeito Hall quântico e o número de Chern

Como exemplo de quantidades que são dadas por invariantes topológicos, temos a condutância Hall. Essa demonstração será feita conforme a referência [13]. Considere um experimento típico para detecção do efeito Hall. Um gás de elétrons bidimensional na região de um campo magnético perpendicular ao plano bidimensional.

O hamiltoniano para uma partícula nesse sistema é

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + \phi, \quad (2.45)$$

em que o operador \mathbf{P} é o momento canônico, \mathbf{A} é o potencial vetor, e ϕ é um potencial escalar periódico da rede. Para manter a periodicidade do potencial escalar, é razoável escolher um gauge para o campo elétrico tal que

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.46)$$

temos o seguinte:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - e\mathbf{E}t)^2 + \phi. \quad (2.47)$$

Usando estados de Bloch⁵, obtemos a seguinte equação

$$H|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle. \quad (2.48)$$

Pode-se tratar do problema usando teoria de perturbação de primeira ordem, em que o campo elétrico é considerado uma perturbação, então

$$|u_n(t)\rangle = |\psi_n\rangle - i\hbar \sum_{n \neq m} \frac{\langle \psi_m | \frac{\partial}{\partial t} | \psi_n \rangle | \psi_m \rangle}{E_n - E_m}, \quad (2.49)$$

em que $|\psi_n\rangle = |u_n^0(t)\rangle$ e $E_n = E_n^0(t)$.

A velocidade de um elétron no nível de Bloch é dado por [14]:

$$\mathbf{v}_n(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{k}} = \left\langle u_n \left| \frac{1}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} \right| u_n \right\rangle. \quad (2.50)$$

Substituindo a equação (2.49) na equação (2.50), ficamos com

5. Estados de Bloch: são funções de onda que descrevem as partículas sujeitas a um potencial periódico, como os elétrons em um cristal.

$$\mathbf{v}_n(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial \mathbf{k}} - i \sum_{n \neq m} \left[\left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} \right| \psi_m \right\rangle \frac{\langle \psi_m | \frac{\partial}{\partial t} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} - \left\langle \psi_m \left| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} \right| \psi_n \right\rangle \frac{\langle \psi_n | \frac{\partial}{\partial t} | \psi_m \rangle}{E_n - E_m} \right]. \quad (2.51)$$

Utilizando agora a identidade

$$\left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} \right| \psi_m \right\rangle = (E_n - E_m) \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} \right| \psi_m \right\rangle, \quad (2.52)$$

Obtemos a seguinte expressão para a velocidade

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial \mathbf{k}} - i \sum_{n \neq m} & \left((E_n - E_m) \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right| \psi_m \right\rangle \frac{\langle \psi_m | \frac{\partial}{\partial t} | \psi_n \rangle}{E_n - E_m} \right. \\ & \left. - (E_n - E_m) \frac{\langle \psi_n | \frac{\partial}{\partial t} | \psi_m \rangle}{E_n - E_m} \left\langle \psi_m \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right| \psi_n \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Então, resulta o seguinte

$$\mathbf{v}_n(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial \mathbf{k}} - i \left(\left\langle \frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{k}} \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{k}} \right\rangle \right). \quad (2.54)$$

O termo entre parênteses é uma representação alternativa da curvatura de Berry no espaço dos parâmetros [13]. Assim

$$\mathbf{v}_n(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial \mathbf{k}} - \mathbf{F}. \quad (2.55)$$

Da relação $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -e \frac{\mathbf{E}}{\hbar}$ tiramos que $\frac{d}{dt} = -e \frac{\mathbf{E}}{\hbar} \cdot \nabla_{\mathbf{k}}$ e após algumas operações algébricas, reescrevemos a expressão pra velocidade como sendo

$$\mathbf{v}_n(k) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E_n - \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \times \mathbf{F}. \quad (2.56)$$

Escrevemos agora a expressão para a densidade de corrente elétrica na presença de um campo elétrico, que é dada por [14]:

$$\mathbf{j} = -\frac{e}{(2\pi)^2} \sum_n \int_{(BZ)} \mathbf{v}_n(k) d^2 \mathbf{k}, \quad (2.57)$$

onde a integral é sobre a primeira zona de Brillouin (BZ). Então,

$$\mathbf{j}_n = \frac{e^2}{(2\pi)^2 \hbar} \sum_n \int_{(BZ)} \mathbf{E} \times \mathbf{F} d^2 \mathbf{k}, \quad (2.58)$$

ou ainda

$$\mathbf{j}_n = \frac{e^2}{(2\pi)^2 \hbar} \mathbf{E} \times \sum_n \int_{BZ} \mathbf{F} d^2 \mathbf{k}. \quad (2.59)$$

Usando a expressão para respostas lineares $j_i = \sigma_H \epsilon_{ij} E_j$ [9], em que σ_H é a condutância Hall, E_j o campo elétrico, e notando a operação de produto vetorial por meio do tensor de Levi-Civita⁶ podemos compará-la à equação (2.59) e concluir que

$$\sigma_H = \frac{e^2}{(2\pi)^2 \hbar} \sum_n \int_{BZ} F_z d^2 \mathbf{k}. \quad (2.60)$$

Do resultado descrito na equação (2.44), concluimos que

$$\sigma_H = \frac{e^2}{2\pi \hbar} \mathcal{C}_n \quad \text{ou} \quad \sigma_H = \frac{e^2}{h} \mathcal{C}_n. \quad (2.61)$$

Isto é, a condutância Hall é dada por constantes fundamentais e por um número inteiro (número de Chern) que é um invariante topológico. Não importa a forma da amostra ou defeitos, a condutância é uma quantidade que depende apenas da topologia do sistema.

6. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, $c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, onde $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{de outra maneira: } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i \end{cases}$

LÍQUIDOS DE SPIN QUÂNTICOS

3.1 Fases exóticas da matéria

Na seção 1.1 foi brevemente comentado sobre alguns conceitos acerca de fases e transições de fase. Entre esses conceitos se encontram as ideias de parâmetros de ordem locais na teoria de Landau. A teoria de Landau nos direciona na forma como pensamos as diferentes fases da matéria por meio de um parâmetro de ordem que caracteriza um estado de quebra de simetria relativamente a um estado de preservação de simetria que aparece. Entretanto, nem todas as fases da matéria são contempladas por essa teoria. Esses conceitos falham na explicação do efeito Hall quântico, dos isolantes topológicos e de outros estados quânticos recém descobertos. Alguns desses estados apresentam quebra de simetria de reversão temporal e tem sido caracterizados por meio de excitações topológicas— quasipartículas que carregam frações racionais de partículas elementares ou de spins — que se mostram como propriedades topológicas dos sistemas em questão.

Como exemplo de quebra de simetria de reversão temporal, considere o efeito Hall quântico. Quando invertemos o tempo o sistema não permanece invariante. Se assistíssemos a uma animação ilustrando o efeito, seríamos perfeitamente capazes de dizer se o filme está sendo tocado de trás para frente ou não, uma vez que a trajetória das partículas carregadas tem uma clara dependência da direção do campo magnético externo. Sistemas em que não somos capazes de fazer essa distinção são ditos invariantes por reversão temporal, isto é, não quebram a simetria de reversão temporal. Considere ainda o fator que promove essa quebra. Em sistemas convencionais, algumas quebras de simetria ocorrem espontaneamente, como uma consequência da evolução do sistema para o estado de menor energia, por exemplo. Entretanto, no efeito Hall, a quebra de simetria de reversão temporal se dá pela aplicação do campo magnético, sendo ele e apenas ele o responsável pela quebra.

Ihm mostrou em 1991 [15,16] que a fase de Berry em geral está associada à quebra de simetria de reversão temporal do sistema, e dado que a fase de Berry é associada

à curvatura de Berry, que por conseguinte leva ao número de Chern, um invariante topológico, é razoável concluir que sistemas que apresentam quebra de simetria de reversão temporal apresentam fases topológicas que podem ser descritas pelo invariante topológico número de Chern. Exemplos são o próprio efeito Hall quântico para sistemas metálicos e o efeito Hall quântico térmico para líquidos de spin, como por exemplo, no modelo de Kitaev [17].

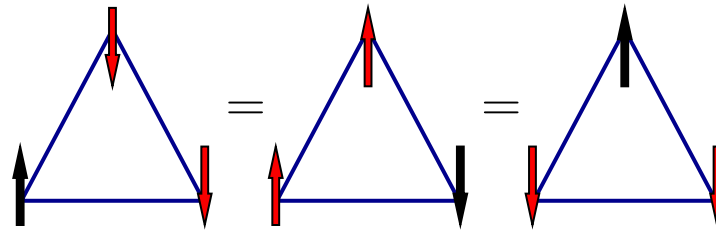
Outra relação importante nesses estados descritos em termos do número de Chern é que qualquer sistema com número de Chern diferente de zero apresenta modos de borda quirais de gap zero, evidentes no efeito Hall por exemplo [17].

3.2 Líquidos de spin quânticos: uma breve discussão

A história dos líquidos de spin começa com o entendimento dado por Heisenberg aos ferromagnetos. Nos sólidos, se não houvesse interações entre os spins, os momentos magnéticos individuais dos íons seriam completamente desordenados em qualquer temperatura na ausência de um campo magnético externo e, portanto, o momento magnético de cada íon seria nulo [14]. Entretanto, em alguns sólidos o momento magnético líquido dos íons não é nulo abaixo de uma temperatura específica. Esses sólidos são ditos ordenados magneticamente. Quando os momentos magnéticos individuais se acumulam fornecendo um momento magnético líquido para o sólido como um todo, magnetização espontânea, podemos ter um material ferromagnético ou ainda um material ferrimagnético [14]. Por outro lado, existem sólidos que, apesar de apresentarem esse estado de ordenamento magnético, não apresentam nenhuma magnetização espontânea. Esses estados são conhecidos como antiferromagnéticos [14].

Os ferromagnetos possuem um estado fundamental unívoco, que se apresenta por ser um estado em que todos os spins estão alinhados entre si e com o campo externo, na mesma direção [14]. Por outro lado, alguns sistemas apresentam uma dificuldade de determinação do estado fundamental, que em geral está intimamente ligada à frustração geométrica – a incapacidade do sistema de encontrar um único estado fundamental dada sua geometria. Para o entendimento da ideia de frustração geométrica, considere por exemplo um triângulo equilátero, onde em cada vértice será fixado um spin (Figura 3.1). Cada spin tem apenas duas configurações possíveis, para cima e para baixo. O estado em que todos os três spins apontam para cima ou para baixo tem energia maior que os outros seis estados que combinam as outras direções dos spins.

Numa rede como essa é que começa a história dos líquidos de spin quânticos. Quando spins interagentes são colocados em uma rede triangular, as interações em diferentes ligações serão frustradas devido à geometria do sistema, o que sugere mais de um modo dos spins quebrarem a simetria de rotação. Em 1973, Philip Anderson propôs que o estado fundamental desse sistema (antiferromagneto de Heisenberg) é na verdade

Figura 3.1: Célula unitária de uma rede triangular com um spin em cada vértice.

Fonte: Figura do autor.

uma superposição de estados singletos formados por pares de spin $s = 1/2$ [18] que não apresentam nenhum ordenamento, como uma espécie de líquido, e chamou esse estado de *resonant valence bond*, hoje conhecido por líquido de spin quântico. A abordagem de Anderson se mostrou errada para esse sistema em particular, que foi provado ordenado algum tempo depois [18].

Mais de uma década depois, a ideia de líquidos de spin ressurgiu pelo próprio Anderson, mas agora no contexto dos supercondutores de altas temperaturas, bem como uma proposta de um líquido de spin quiral por Kalmeyer e Laughlin [19] e a descoberta feita por Kivelson, Rokhsar, e Sethna de que as excitações do líquido de spin são essencialmente topológicas [20].

Dessa forma, entendemos as principais assinaturas dos líquidos de spin. Nos materiais magnéticos convencionais, com a diminuição da temperatura do sistema, observa-se a transição de um fase desordenada para uma fase ordenada pela quebra espontânea de simetria e uma redução na entropia de spin, conforme o sistema entra no estado fundamental [19], que, por ser de estado de ordenamento magnético, é unívoco. Contudo, em algumas situações, a entropia de spin pode reduzir sem a quebra espontânea da simetria mesmo com o sistema próximo do zero absoluto, sendo a razão disso a formação de um estado de spin com emaranhamento de longo alcance [19], que é diferente do parâmetro de ordem de longo alcance que descreve as fases pela quebra de simetria. Essa é a assinatura de um líquido de spin.

Assim como existem diferentes fases magnéticas, isto é, diferentes tipos de ordenamentos magnéticos, existem também diferentes tipos de padrões de emaranhamento de longo alcance para os líquidos de spin [21]. Uma distinção não muito precisa porém útil para o propósito desse trabalho de conclusão de curso consiste em separar os líquidos de spin em duas classes: Os que apresentam um gap de energia entre o estado fundamental (que é degenerado) e estados excitados e os que não apresentam esse gap.

Os líquidos de spin quânticos que apresentam um gap são caracterizados por uma ordem topológica e de longo alcance pelo surgimento de excitações elementares que são criadas em pares [19]. Então, tais excitações possuem interações estatísticas não locais (como uma carga se movendo em torno de um fluxo magnético). Em duas dimensões, essas

quasipartículas são *anyons*, o que significa que elas tomam uma fase não trivial (fase de Berry) quando orbitam entre si [21]. A não localidade associada com as excitações de quasipartículas é o que causa a fracionalização de números quânticos associados com uma simetria global. Um exemplo desse fenômeno é o surgimento de tais excitações elementares descritas por quasipartículas fermiônicas de $s = 1/2$ chamadas de spinons. Nos materiais magnéticos convencionais as excitações tem $s = 1$ e são detectadas em experimentos de espalhamento como sendo picos de energia, já nos líquidos de spin, a excitação de $s = 1$ se fracionaliza em pares de spinons de $s = 1/2$.

MODELO DE KITAEV

4.1 O modelo de Kitaev

Vimos no capítulo 3 que os líquidos de spin quânticos consistem em sistemas de spins arranjados em redes que favorecem à frustração geométrica e que as flutuações mesmo em baixas temperaturas impedem o ordenamento de longo alcance. Vimos ainda que essas fases não podem ser caracterizadas em termos de quebras espontâneas de simetria, mas por excitações fracionalizadas e emaranhamento de longo alcance.

Até o ano de 2006 não existia nenhum modelo realista de líquidos de spin que apresentasse uma solução exata. Nesse ano, o físico russo-estadunidense Alexei Kitaev propôs pela primeira vez um modelo exatamente solúvel de um líquido de spin, que é descrito por um invariante topológico. Essencialmente, o modelo proposto inicialmente por Kitaev descreve um sistema de spins interagentes numa rede hexagonal cujas interações são anisotrópicas do tipo Ising ao longo das ligações de redes. Atualmente esse modelo é estudado em diversos tipos de rede.

Para o entendimento do modelo de Kitaev, precisamos primeiramente entender como se constrói o operador hamiltoniano de um sistema de spins.

Considere por um momento apenas duas partículas de spin $s = 1/2$. Quando as duas estão longe uma da outra, o estado fundamental descreve duas partículas independentes e tem degenerescência $g_n = 4$, sendo uma configuração singleto e três configurações tripleto. Por outro lado, quando colocadas uma perto da outra, os quatro estados serão importantes para o estudo das propriedades do produto dessa ligação. Assim dá-se origem à hamiltoniana de spin. Para essas duas partículas, temos que a hamiltoniana de spin é

$$H_{1,2} = -J\mathbf{S}_{(1)} \cdot \mathbf{S}_{(2)}, \quad (4.1)$$

Em que $J > 0$ para spins paralelos e $J < 0$ para spins antiparalelos.

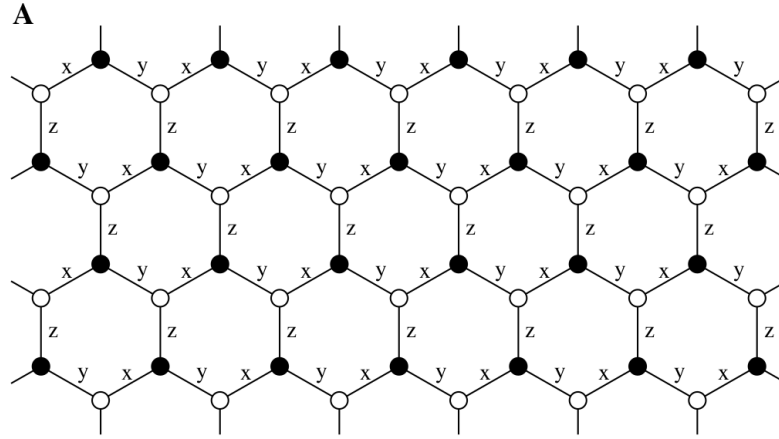
Estendendo nosso modelo para um sistema composto por várias partículas de spin, devemos apenas somar esse operador a todos os pares de partículas de spin. Teremos assim o hamiltoniano de Heisenberg:

$$H_{1,2} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (4.2)$$

em que $\langle ij \rangle$ denota dois sítios i e j de uma rede que são primeiros vizinhos.

Agora que esse tipo de construção está claro, podemos descrever o hamiltoniano do modelo de Kitaev. O sistema idealizado por Kitaev abriga em cada sítio de uma rede hexagonal um elétron localizado de spin $s = 1/2$ e todos esses elétrons interagem entre si por meio de três ligações diferentes, conforme mostrado na Figura 4.1.

Figura 4.1: Esquema que mostra uma rede hexagonal com três tipos diferentes de ligação.



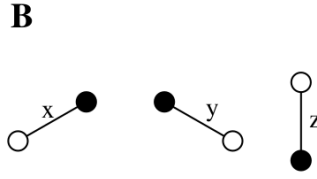
Fonte: Anyons in an exactly solved model and beyond [17]

Uma ligação na vertical é dita ligação do tipo z . A ligação que ocorre com inclinação positiva em relação a um sistema de coordenadas cujo eixo z é paralelo a uma ligação do tipo z é dita ligação do tipo x , e uma ligação com inclinação negativa com respeito a esse sistema de coordenadas é dita ligação do tipo y , como mostrado na Figura 4.2

A interação entre os spins de dois sítios vizinhos depende do tipo de ligação que os conecta, de forma que o operador $\sigma_j^\gamma \sigma_l^\gamma$ fornece a interação entre spins em dois sítios consecutivos, em que S_j^γ com $\gamma = x, y, z$ denota uma componente de spin. Portanto, o hamiltoniano do modelo de Kitaev pode ser escrito como

$$H_K = - \sum_{\langle jl \rangle_\gamma} J_\gamma \sigma_j^\gamma \sigma_l^\gamma \quad (4.3)$$

ou de forma mais explícita

Figura 4.2: Os três tipos de ligação na rede hexagonal.

Fonte: Anyons in an exactly solved model and beyond [17]

$$H_K = -J_x \sum_{\langle jl \rangle_x} \sigma_j^x \sigma_l^x - J_y \sum_{\langle jl \rangle_y} \sigma_j^y \sigma_l^y - J_z \sum_{\langle jl \rangle_z} \sigma_j^z \sigma_l^z, \quad (4.4)$$

onde J_x , J_y e J_z são as constantes de acoplamento do modelo.

4.2 Uma solução exata

Encontrar uma solução desse problema significa encontrar os autovalores e autovetores da equação (4.4). O estado individual de uma partícula de spin 1/2 pode ser representado por dois autoestados da matriz de Pauli, que tem duas dimensões. Se existem N dessas partículas no sistema, esse terá 2^N dimensões, isto é, o espaço de Hilbert terá 2^N dimensões. Dessa forma, vê-se que o hamiltoniano em (4.4) é descrito por uma matriz hermitiana $2^N \times 2^N$, cuja diagonalização se torna inviável para N grande, mesmo se usados os computadores mais modernos.

Uma forma bastante utilizada para lidar com esse tipo de problema consiste em usar operadores auxiliares para expressar os spins, como por exemplo, operadores de campo fermiônicos. Esse processo é conhecido como fermionização. Kitaev inicia a solução definindo o operador plaqueta:

$$\hat{W}_p = \sigma_1^x \sigma_2^y \sigma_3^z \sigma_4^x \sigma_5^y \sigma_6^z. \quad (4.5)$$

O índice p denota a plaqueta considerada. Da relação

$$[\sigma_j^a, \sigma_k^b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_k^c\delta_{jk} \quad (4.6)$$

vemos que

$$[\hat{W}_p, \hat{W}_q] = 0 \quad e \quad [H, \hat{W}_p] = 0. \quad (4.7)$$

Dessa forma, vê-se que os operadores \hat{W}_p são constantes de movimento que comutam entre

si. Ainda de $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$ podemos obter os autovalores de \hat{W}_p :

$$\hat{W}_p^2 = 1 \Rightarrow W_p = \pm 1. \quad (4.8)$$

Portanto, o espaço de Hilbert pode ser decomposto em subespaços bem definidos de W_p . Para encontrar os autoestados do hamiltoniano, primeiro dividimos o espaço total em subespaços (setores) de W_p :

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{W_1, \dots, W_m} \varepsilon_{W_1, \dots, W_m}, \quad (4.9)$$

em que m é o número de plaquetas. Uma vez que cada operador \hat{W}_p tem autovalores $W_p = \pm 1$, a cada setor considerado corresponde uma escolha de $W_p = \pm 1$ entre as plaquetas. Uma estratégia é resolver o hamiltoniano (4.4) restrito a um setor particular $\varepsilon_{W_1, \dots, W_m}$. Sendo o espaço de Hilbert total de dimensão 2^N , a dimensão para o espaço de cada setor $\varepsilon_{W_1, \dots, W_m}$ é $\sim \frac{2^N}{2^m} \sim 2^{N-N/2} \sim 2^{N/2}$.

Para resolver exatamente o modelo de Kitaev, vamos utilizar os operadores fermiônicos de Majorana b_j^γ e c_j , que obedecem as relações

$$\{b_j^\gamma, b_{j'}^{\gamma'}\} = 2\delta_{\gamma\gamma'}\delta_{jj'}, \quad (4.10)$$

$$\{c_j, c_{j'}\} = 2\delta_{jj'}, \quad (4.11)$$

$$\{b_j^\gamma, c_{j'}\} = 0. \quad (4.12)$$

Esses operadores têm a seguinte propriedade: $(b_j^\gamma)^\dagger = b_j^\gamma$ e $(c_j)^\dagger = c_j$. A partir desses operadores, podemos reescrever os operadores de spin da seguinte forma:

$$\sigma_j^\gamma = ib_j^\gamma c_j. \quad (4.13)$$

Como esperado, obtém-se facilmente $(\sigma_j^\gamma)^2 = 1$.

Substituindo a equação (4.13) na equação (4.4), ficamos com:

$$H_K = -J_x \sum_{\langle jl \rangle_x} (ib_j^x c_j) (ib_l^x c_l) - J_y \sum_{\langle jl \rangle_y} (ib_j^y c_j) (ib_l^y c_l) - J_z \sum_{\langle jl \rangle_z} (ib_j^z c_j) (ib_l^z c_l). \quad (4.14)$$

Em seguida definimos o operador de ligação:

$$\hat{u}_{\langle jl \rangle_\gamma} \equiv ib_j^\gamma b_l^\gamma. \quad (4.15)$$

Pode-se mostrar então que o mesmo satisfaz as relações de comutação:

$$[\hat{u}_{\langle jl \rangle_\gamma}, \hat{u}_{\langle j'l' \rangle_{\gamma'}}] = 0, \quad (4.16)$$

$$[H, \hat{u}_{\langle jl \rangle_\gamma}] = 0. \quad (4.17)$$

Como um resultado, os operadores $\hat{u}_{\langle jl \rangle_\gamma}$ são constantes de movimento com autovalores $u_{\langle jl \rangle_\gamma} = \pm 1$, uma vez que $(\hat{u}_{\langle jl \rangle_\gamma})^2 = 1$.

Sendo os $\hat{u}_{\langle jl \rangle_\gamma}$ constantes de movimento, podemos substituir esses operadores por seus autovalores. Podemos agora subdividir o espaço de Hilbert total em subespaços de $\hat{u}_{\langle jl \rangle_\gamma}$: $\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_u \varepsilon_u$ e diagonalizar o hamiltoniano em um desses subespaços com autovalores bem definidos, ou seja,

$$H_K = -J_x \sum_{\langle jl \rangle_x} u_{\langle jl \rangle_x} i c_{j,A} c_{l,B} - J_y \sum_{\langle jl \rangle_y} u_{\langle jl \rangle_y} i c_{j,A} c_{l,B} - J_z \sum_{\langle jl \rangle_z} u_{\langle jl \rangle_z} i c_{j,A} c_{l,B}. \quad (4.18)$$

Esse hamiltoniano é representado por uma matriz bloco-diagonal em que cada bloco corresponde a uma certa configuração dos $u_{\langle jl \rangle}$ bem como dos W_p para cada plaqueta. Aqui, os índices “A” e “B” denotam as duas subredes triangulares que compõem a rede hexagonal, ilustradas pelos pontos pretos e brancos da Figura (4.1). Pode ser mostrado por meio do chamado teorema de Lieb, que a configuração dos $u_{\langle jl \rangle}$ que gera o estado fundamental desse modelo é aquela em que

$$\hat{W}_p = \prod_{\langle jl \rangle_\gamma \in p} u_{\langle jl \rangle_\gamma} = 1. \quad (4.19)$$

Essa configuração é obtida fazendo $u_{\langle jl \rangle} = 1$ para cada ligação em que $j \in A$ e $l \in B$. Dessa forma, podemos substituí-los por esse autovalor e diagonalizar o hamiltoniano e obter o estado fundamental. Porém devemos fazer uma observação. Na situação original, pensando em uma partícula de spin-1/2, o espaço de Hilbert tinha duas dimensões por sítio e o autovetor que representa o estado fundamental representaria de fato um estado físico. Contudo, com o processo de fermionização esse espaço foi ampliado.

A função de onda do estado físico real $|\Psi\rangle_{físico}$ é obtida através da projeção:

$$|\Psi\rangle_{físico} = \prod_j \left(\frac{1 + D_j}{2} \right) |\Psi\rangle_{Majorana}, \quad (4.20)$$

onde $D_j \equiv b_j^x b_j^y b_j^z c_j = 1$ projeta sobre os estados físicos a função de onda $|\Psi\rangle_{Majorana}$ obtida com a diagonalização do hamiltoniano de Kitaev escrito em termos dos operadores fermiônicos de Majorana.

4.3 Energia do estado fundamental

Como já mencionado, dado que os $\hat{u}_{\langle jl \rangle_\gamma}$ e os \hat{W}_p são constantes de movimento, podemos substituí-los no hamiltoniano (4.18) pelo seu autovalor $u_{\langle jl \rangle} = 1$, que é o que fornece $W_p = 1$. Ficamos assim com a expressão:

$$H_K = i \sum_{\langle jl \rangle_x} J_x c_{j,A} c_{l,B} + i \sum_{\langle jl \rangle_y} J_y c_{j,A} c_{l,B} + i \sum_{\langle jl \rangle_z} J_z c_{j,A} c_{l,B}. \quad (4.21)$$

Para diagonalizar esse hamiltoniano no espaço de momento \mathbf{k} , vamos utilizar a transformada de Fourier:

$$c_{j,A}(\mathbf{r}_j) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j} c_{\mathbf{k}',A}(\mathbf{k}'), \quad (4.22)$$

$$c_{l,B}(\mathbf{r}_l) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_l} c_{\mathbf{k},B}(\mathbf{k}), \quad (4.23)$$

onde N representa o número de sítios da rede. Substituindo as equações (4.22) e (4.23) na equação (4.21), obtemos

$$H_K = \sum_{\gamma=x,y,z} \sum_{\langle jl \rangle_\gamma} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} J_\gamma \frac{2}{N} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_l} c_{\mathbf{k}',A} c_{\mathbf{k},B}. \quad (4.24)$$

Fixando o índice l , temos que $\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_{l_\gamma} = \mathbf{r}_j + \delta_\gamma$, $\gamma = x, y, z$, em que δ_γ é o vetor relativo entre uma partícula na posição \mathbf{r}_j e seus primeiros vizinhos, chegamos em

$$H_K = i \sum_{\gamma=x,y,z} \sum_{\langle jl \rangle_\gamma} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} J_\gamma \frac{2}{N} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j + \delta_\gamma)} c_{\mathbf{k}',A} c_{\mathbf{k},B} \quad (4.25)$$

$$= i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left[\frac{2}{N} \sum_{\gamma=x,y,z} \sum_{\langle jl \rangle_\gamma} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_j} J_\gamma e^{-i\mathbf{k}' \cdot \delta_\gamma} c_{\mathbf{k}',A} c_{\mathbf{k},B} \right] \quad (4.26)$$

$$= iJ_x \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \delta_x} c_{\mathbf{k}',A} c_{\mathbf{k},B} + iJ_y \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \delta_y} c_{\mathbf{k}',A} c_{\mathbf{k},B} + iJ_z \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \delta_z} c_{\mathbf{k}',A} c_{\mathbf{k},B}. \quad (4.27)$$

As somas somente não se anulam para $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$. Sendo assim,

$$H_K = \sum_{\mathbf{k}} \left[iJ_x e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_x} c_{-\mathbf{k},A} c_{\mathbf{k},B} + iJ_y e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_y} c_{-\mathbf{k},A} c_{\mathbf{k},B} + iJ_z e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_z} c_{-\mathbf{k},A} c_{\mathbf{k},B} \right]. \quad (4.28)$$

Mas note que $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger = c_{-\mathbf{k},\lambda}$, com $\lambda \in \{A, B\}$. Então, a expressão do hamiltoniano vem a

se tornar:

$$H_K = \sum_{\mathbf{k}} \left[iJ_x e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_x} c_{\mathbf{k},A}^\dagger c_{\mathbf{k},B} + iJ_y e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_y} c_{\mathbf{k},A}^\dagger c_{\mathbf{k},B} + iJ_z e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_z} c_{\mathbf{k},A}^\dagger c_{\mathbf{k},B} \right]. \quad (4.29)$$

Por fim, simetrizando os termos, isto é, somando o complexo conjugado termo a termo e dividindo por dois, temos

$$\begin{aligned} H_K = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} & \left[iJ_x e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_x} c_{\mathbf{k},A}^\dagger c_{\mathbf{k},B} - iJ_x e^{-i\mathbf{k} \cdot \delta_x} c_{\mathbf{k},B}^\dagger c_{\mathbf{k},A} \right. \\ & + iJ_y e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_y} c_{\mathbf{k},A}^\dagger c_{\mathbf{k},B} - iJ_y e^{-i\mathbf{k} \cdot \delta_y} c_{\mathbf{k},B}^\dagger c_{\mathbf{k},A} \\ & \left. + iJ_z e^{i\mathbf{k} \cdot \delta_z} c_{\mathbf{k},A}^\dagger c_{\mathbf{k},B} - iJ_z e^{-i\mathbf{k} \cdot \delta_z} c_{\mathbf{k},B}^\dagger c_{\mathbf{k},A} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por fim, fazendo a transformação de gauge

$$T : c_{\mathbf{k},B} \longmapsto e^{-i\mathbf{k} \cdot \delta_3} c_{\mathbf{k},B} \quad (4.31)$$

e definindo a função f_k

$$f_k(\mathbf{k}) \equiv J_x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1} + J_y e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2} + J_z \quad (4.32)$$

com $\mathbf{n}_1 = \delta_1 - \delta_3$ e $\mathbf{n}_2 = \delta_2 - \delta_3$ podemos escrever o hamiltoniano na forma matricial:

$$H_K = \sum_{\mathbf{k} \in (BZ)/2} \left(c_{\mathbf{k},A}^\dagger c_{\mathbf{k},B}^\dagger \right) \begin{pmatrix} 0 & if_k \\ -if_k^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k},A} \\ c_{\mathbf{k},B} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

onde a soma sobre o momento é sobre metade da zona de Brillouin. Dessa forma, obtemos um hamiltoniano parametrizado no espaço dos momentos, ou seja

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & if_k \\ -if_k^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

As dispersões são obtidas resolvendo a equação secular $\det[\mathcal{H}(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k})\mathbb{1}] = 0$, cujas soluções são:

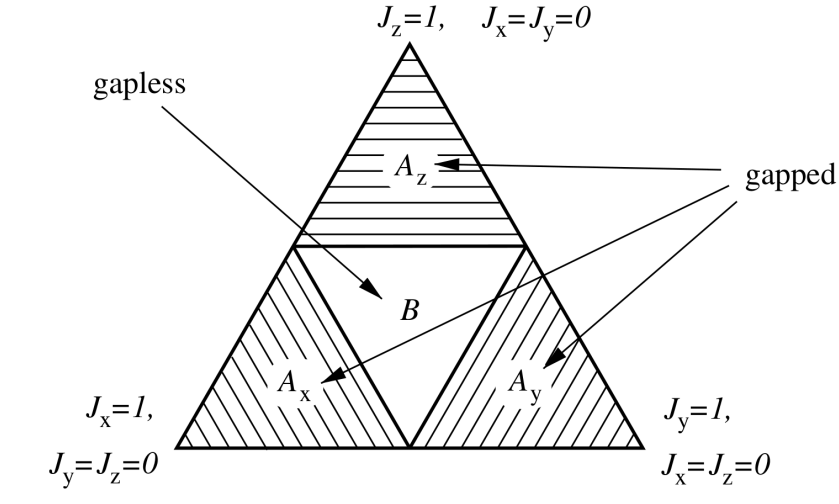
$$E(\mathbf{k}) = \pm |f_k|. \quad (4.35)$$

A partir dessa função para a energia é que é possível saber a energia requerida para que se crie excitações no estado fundamental. Para determinar as condições para o espectro apresentar um *gap* de energia ou não, resolvemos $E(k) = 0$. Kitaev argumenta que $E(k) = 0$ se e somente se as quantidades $|J_x|, |J_y|, |J_z|$ satisfazem às desigualdades triangulares:

$$\begin{aligned}
|J_x| &\leq |J_y| + |J_z|, \\
|J_y| &\leq |J_z| + |J_x|, \\
|J_z| &\leq |J_x| + |J_y|.
\end{aligned}
\tag{4.36}$$

De acordo com isso, ele deriva o diagrama de fase mostrado na Figura (4.3).

Figura 4.3: Diagrama de fases do modelo de Kitaev.



Fonte: Anyons in an exactly solved model and beyond [17].

As regiões demarcadas por A_x , A_y e A_z são regiões do espaço de fase que possuem *gap*. Já a região denotada por B na Figura (4.3) é a região da fase sem *gap*, mas que apresenta um *gap* na presença de um campo magnético.

Essas regiões são topologicamente diferentes, uma vez que o número de Chern da região A é igual a zero e da região B é igual a 1 [17]. O número de Chern, quantidade topológica, determina modos de borda e quirais, uma vez que sistemas bidimensionais de férmions não interagentes que apresentam número de Chern diferente de zero possuem modos de borda sem um *gap* de energia (por exemplo, efeito Hall quântico inteiro). Entretanto, no modelo de Kitaev há uma diferença relevante em comparação com o efeito Hall quântico.

De fato, no caso desse efeito, os férmions que compõem os modos de borda são férmions complexos, enquanto no modelo de Kitaev são férmions reais. Apesar dessa diferença, os modos de borda quirais podem transportar energia, sendo essa uma característica da fase B do diagrama, em que o transporte térmico pode ser medido.

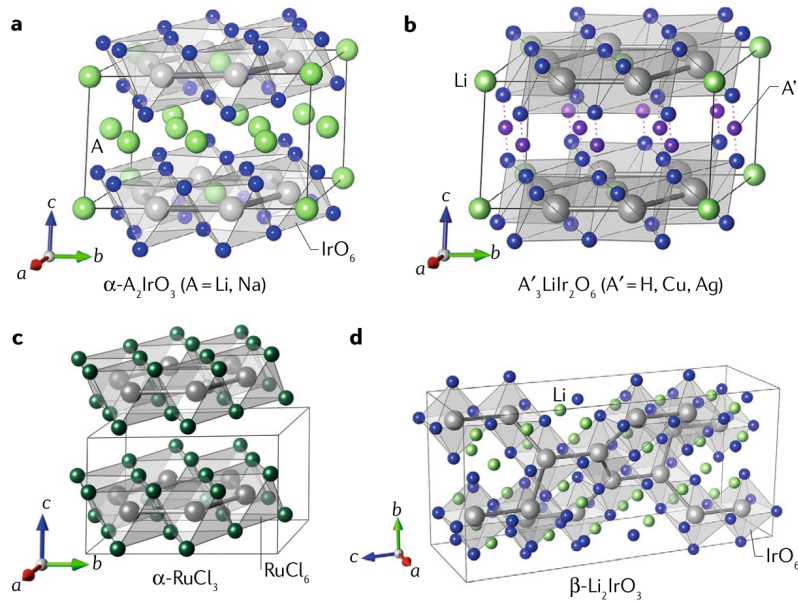
4.4 Candidatos a líquidos de spin quânticos

O modelo de Kitaev foi originalmente pensado com vista em aplicações na computação quântica. Entretanto, alguns estudos sugerem a existência de interações do

tipo do modelo de Kitaev em isolantes de Mott com configuração eletrônica $4d^5$ e $5d^5$ [22].

Alguns antiferromagnetos de Heisenberg e de Kagome têm sido algumas das apostas dos pesquisadores de matéria condensada. De acordo com a literatura, esses sistemas assim como alguns sais orgânicos, herbertsmithite ($\text{ZnCu}_3(\text{OH})_6\text{Cl}_2$), Na_2IrO_3 , $\alpha - \text{Li}_2\text{IrO}_3$, $\beta - \text{Li}_2\text{IrO}_3$, $\gamma - \text{Li}_2\text{IrO}_3$, $\alpha - \text{RuCl}_3$ e $\text{H}_3\text{LiIr}_2\text{O}_6$ podem abrigar o estado de líquido de spin, uma vez que até à temperatura mais baixa, alguns desses materiais não exibem nenhuma característica de ordenamento magnético [18]. Alguns desses materiais estão representados na Figura 4.4 [18].

Figura 4.4: Candidatos a líquido de spin quântico. Estrutura cristalina dos materiais **a:** Na_2IrO_3 e $\alpha - \text{Li}_2\text{IrO}_3$. **b:** $\text{A}'_3\text{LiIr}_2\text{O}_6$ ($\text{A}' = \text{H}, \text{Cu}$ e Ag). **c:** $\alpha - \text{RuCl}_3$. **d:** $\beta - \text{Li}_2\text{IrO}_3$.

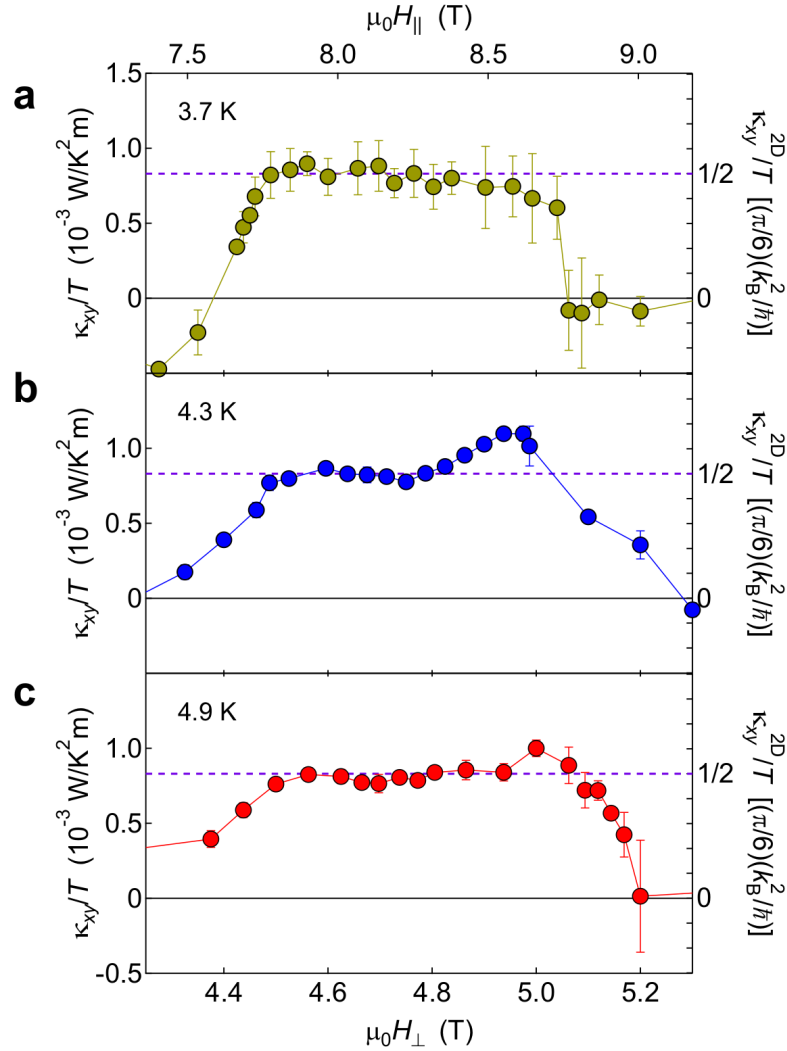


Fonte: Concept and realization of Kitaev quantum spin liquids [18].

Alguns experimentos mostram que materiais como $\text{H}_3\text{LiIr}_2\text{O}_6$ e $\alpha - \text{RuCl}_3$ em uma região de campo magnético aplicado exibem assinaturas do estado de líquido de spin quântico, e ainda que o sistema $\alpha - \text{RuCl}_3$ apresenta propriedades de transporte térmico consistentes com a fase topologicamente não trivial do modelo de Kitaev [18].

No modelo de líquido de spin de Kitaev, quando sob ação de um campo magnético, deve surgir uma condutividade Hall térmica semi-quantizada κ_{xy} [17]. Para o $\alpha - \text{RuCl}_3$, foi mostrado que a aplicação de um campo magnético inclinado destrói o ordenamento magnético de longo alcance, induzindo-o a um líquido de spin quântico [23]. Além disso, foi mostrado que no regime de baixas temperaturas a condutividade térmica Hall κ_{xy} do $\alpha - \text{RuCl}_3$ atinge um valor quantizado de $\kappa_{xy}/T = (\nu/2)(\pi k_B^2/6\hbar)$ que é exatamente a metade do valor para o efeito Hall quântico. Isso é uma assinatura de correntes de borda de cargas neutras protegidas topologicamente, como predito pelo modelo de Kitaev.

Figura 4.5: Condutividade térmica Hall semi-quantizada em função de um campo magnético inclinado de 60° em relação ao plano da rede hexagonal.



Fonte: Majorana quantization and half-integer thermal quantum Hall effect in a Kitaev spin liquid [23].

Pelo exposto, observa-se a existência de vários materiais cujas propriedades se mostram como materializações das previsões dadas pelo modelo de Kitaev a líquidos de spin quânticos, mesmo que esses ainda não tenham sido precisamente identificados como líquidos de spin de Kitaev, como é o caso do $\text{H}_3\text{LiIr}_2\text{O}_6$ que apresentam um estado fundamental de líquido de spin e do material $\alpha\text{-RuCl}_3$ que parece apresentar a assinatura de férmions de Majorana [18].

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, estudamos a recente ascensão da topologia no contexto da física da matéria condensada. Para realização da conexão entre essa ferramenta matemática e sistemas físicos, estudamos o teorema adiabático e a fase de Berry. No contexto de fases topológicas da matéria, fizemos um breve apanhado sobre a literatura dos líquidos de spin bem como do modelo de Kitaev – o primeiro modelo teórico exatamente solucionável para esse estado da matéria – em que tentamos explicar algumas das principais características desse modelo.

O modelo de Kitaev é dito exatamente solucionável no sentido de que todos os autovalores e autoestados podem ser obtidos analiticamente sem a necessidade de métodos aproximativos [17]. Mostramos ainda que na literatura existem diversos materiais que são possíveis candidatos a líquidos de spin de Kitaev, como por exemplo o material α – RuCl_3 que embora necessite de um campo magnético aplicado para quebra do ordenamento magnético, exhibe características de transporte térmico semi-quantizado e assinaturas de férmions de Majorana, como previsto pelo modelo de líquido de spin de Kitaev [18].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SIMETRIAS, I. Simetrias e leis de conservação na mecânica clássica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 21, n. 1, 1999. Citado na página 9.
- [2] NISHIMORI, H.; ORTIZ, G. **Elements of phase transitions and critical phenomena**. [S.l.]: OUP Oxford, 2010. Citado na página 9.
- [3] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Statistical physics: V. 5: course of theoretical physics**. [S.l.]: Pergamon press, 1968. Citado na página 9.
- [4] LIFSHITZ, E. Lev davidovich landau (1908–1968). **Soviet Physics Uspekhi**, IOP Publishing, v. 12, n. 1, p. 135, 1969. Citado na página 11.
- [5] MERMIN, N. D.; WAGNER, H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic heisenberg models. **Physical Review Letters**, APS, v. 17, n. 22, p. 1133, 1966. Citado na página 11.
- [6] RAMAKRISHNAN, T. Nobel prize in physics 2016. **Resonance**, Springer, v. 22, n. 8, p. 781–785, 2017. Citado na página 11.
- [7] THOULESS, D. J. et al. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. **Physical review letters**, APS, v. 49, n. 6, p. 405, 1982. Citado na página 11.
- [8] NIU, Q.; THOULESS, D. J.; WU, Y.-S. Quantized hall conductance as a topological invariant. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 31, p. 3372–3377, Mar 1985. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.31.3372>>. Citado na página 11.
- [9] BERNEVIG, B. A. **Topological insulators and topological superconductors**. [S.l.]: Princeton university press, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 11, 13, 15, 16, 17, 18 e 20.
- [10] BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984. Citado na página 12.
- [11] GRIFFITHS, D. J. **Mecânica Quântica-2ed**. [S.l.]: Pearson, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 16.
- [12] GARG, A. Berry phases near degeneracies: Beyond the simplest case. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 78, n. 7, p. 661–670, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

- [13] FILHO, A. d. B. V. Efeito de tamanho finito em isolantes topológicos z_2 com um termo de acoplamento devido as interações entre segundos e terceiros vizinhos em diferentes tipos de bordas. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.
- [14] ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. **Física do estado sólido**. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 19, 20 e 23.
- [15] IHM, J. Broken time-reversal symmetry and berry's phase. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 7, n. 11, p. 2109–2146, 1993. Citado na página 22.
- [16] IHM, J. Berry's phase originated from the broken time-reversal symmetry: Theory and application to anyon superconductivity. **Physical review letters**, APS, v. 67, n. 2, p. 251, 1991. Citado na página 22.
- [17] KITAEV, A. Anyons in an exactly solved model and beyond. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 321, n. 1, p. 2–111, 2006. Citado 8 vezes nas páginas 23, 27, 28, 33, 34 e 36.
- [18] TAKAGI, H. et al. Concept and realization of kitaev quantum spin liquids. **Nature Reviews Physics**, Nature Publishing Group, v. 1, n. 4, p. 264–280, 2019. Citado 8 vezes nas páginas 24, 34, 35 e 36.
- [19] SAVARY, L.; BALENTS, L. Quantum spin liquids: a review. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 80, n. 1, p. 016502, 2016. Citado na página 24.
- [20] KIVELSON, S.; ROKHSAR, D.; SETHNA, J. Topology of the resonating valence-bond state. In: **Theories of high temperature superconductivity**. [S.l.: s.n.], 1988. Citado na página 24.
- [21] BROHOLM, C. et al. Quantum spin liquids. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 367, n. 6475, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- [22] TREBST, S. Kitaev materials. **arXiv preprint arXiv:1701.07056**, 2017. Citado na página 34.
- [23] KASAHARA, Y. et al. Majorana quantization and half-integer thermal quantum hall effect in a kitaev spin liquid. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 559, n. 7713, p. 227–231, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.