Universidad Nacional de Rosario

Tesina de grado
para la obtención del grado de
Licenciado en Ciencias de la Computación

Titulo de tu Tesina

Autor:
Federico Badaloni

Director:
Ariel

Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe, Argentina

15 de noviembre de 2020

Resumen

El resumen de tu tesina.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivos

Intro

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Convergencia del Juego Ficticio

El proceso de aprendizaje de juego ficticio fue propuesto por primera vez por Brown en 1951 [1] como un algoritmo para encontrar el valor de un juego de suma cero finito. Hacia finales del mismo año, Robinson [2] demostró que el proceso converge para todos los juegos de esta clase.

Desde entonces, se han publicado numerosos trabajos analizando la convergencia del juego ficticio en juegos que no sean de suma cero. Miyazawa [3] demostró que esta propiedad vale para todos los juegos de 2×2 pero, su demostración depende de la incorporación de una regla de desempate particular sin la cual, Monderer y Sela [4] demostraron que no se cumple. Por su parte, Shapley [5] mostró un ejemplo de un juego de 3×3 para el cuál no es válida.

Además, la convergencia del juego ficticio fue demostrada para juegos de intereses identicos [6], juegos potenciales con pesos [7], juegos no degenerados con estrategias complementarias y ganancias disminuyentes [8] y ciertas clases de juegos compuestos [9].

Por otro lado, se han estudiado muchas variantes del juego ficticio. Una de las mas analisadas es el juego ficticio continuo, definida originalmente en la publicación original de Brown [1], aunque este no la exploró en detalle. Monderer y Sela [10] demostraron que esta converge para juegos no degenerados de 2×3 y Berger luego extendio este resultado a $2 \times N$ [11] y aportó la convergencia de los juegos de potencial ordinal y quasi-supermodulares con ganancias disminuyentes. Otros ejemplos de variantes propuestas peuden verse en [12] y [13].

Una variante de particular interes este trabajo es el juego ficticio con actualización alternante de creencias. Berger [14] planteó que esta versión alternante es en realidad la original que definió Brown en [14] y que si bien el proceso con actualización simultanea de creencias que usan todos los investigadores de teoría de juegos en la actualidad puede resultar mas intuitivo, es también menos potente y da como ejemplo la clase de los juegos no degenerados con potencial ordinal para la cuál la version alternante converge, pero la simultanea no.

2.2. Velocidad de Convergencia del Juego Ficticio

Los trabajos mencionados hasta ahora se enfocan en el estudio de la eventual convergencia global a un equilibrio de Nash de las distintos clases de juegos. Otra enfoque de investigación es la velocidad de convergencia en los casos en la que esta ocurre. El interés por este se debe en gran medida a la equivalencia entre los juegos de suma cero y los problemas de programación lineal, demostrada por Dantzig, Gale y Von Neumann [15] [16]. En 1994, Gass y Zafra [17] planteaban que hasta la fecha, lo más eficiente para resolver un juego de suma cero era plantearlo como un problema de programación lineal y aplicar el método simplex. En el mismo artículo plantean un meotodo mixto con simplex y una variante de juego ficticio y concluyen que permite acelerar la convergencia en ciertos problemas de programación lineal. Lambert y Smith [18] plantean también una variante (con muestreo) y discuten su eficiencia en problemas de optimización a gran escala.

Vale la pena mencionar en este punto lo que en la literatura del tema se conoce como la Conjetura de Karlin. En 1959, Samuel Karlin [19] conjeturó que la velocidad de convergencia del juego ficticio es $O(t^{-\frac{1}{2}})$ para todos los juegos. La idea de proviene de que esta cota superior se corresponde con la de la velocidad de convergencia de otro método de aprendizaje muy relacionado con el juego ficticio, las dinámicas de no-arrepentimiento [20] [21]. Daskalakis y Pan [22] probaron falsa una versión fuerte de la Conjetura de Karlin (usando una regla de desempate arbitraria) pero dejaron abierta la pregunta sobre la versión general, que ellos llaman débil, de la conjetura.

La utilidad del juego ficticio como método para computar equilibrios de Nash fue puesta en duda cuándo Brandt, Fischer y Harrenstein [23] demostraron que para los juegos de suma cero, los no degenerados de $2 \times N$ y los potenciales (tres de las clases mas estudiadas), existen casos en los que el proceso de juego ficticio puede requerir una cantidad de rondas exponencial en el tamaño de representación en bits de las utilidades del juego antes de que se juegue algún equilibrio. En esta publicación mencionan que su resultado puede ser extendido al juego ficticio alternante pero no demuestran esto.

Capítulo 3

Conceptos Previos

3.1. Juegos Bimatriciales y Equilibrios de Nash

Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, es decir un juego de dos jugadores finito en el que el jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ y el jugador 2 (jugador columna) tiene acciones $j \in M = \{1, 2, ..., m\}$. A, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son las matrices de pago de los jugadores 1 y 2. Si el jugador 1 elige la acción i y el jugador 2 elige la acción 2, la utilidad del jugador 1 será a_{ij} y la utilidad del jugador 2 será b_{ij}.

Notaremos con $\Delta(X)$ al espacio de probabilidades sobre el conjunto X y llamaremos estrategias mixtas a los vectores de la forma $x \in \Delta(N)$ y $y \in \Delta(M)$. A las estrategias que asigna probabilidad 1 a una acción y 0 a todas las otras, las llamaremos estrategias puras. Notaremos con $\widetilde{h}$ a la estrategia pura correspondiente a la acción h.

La utilidad esperada del jugador 1 al jugar la acción i contra la estrategia mixta y del jugador 2 será $(Ay)_i$. Analogamente, la utilidad esperada del jugador 2 al jugar la acción j contra la estrategia mixta x del jugador 2 será $(xB)_j$. Si ambos jugadores juegan estrategias mixtas x e y respectivamente, sus utilidades esperadas podrán calcularse como xAy para el jugador 1 y yB^tx para el jugador 2.

Si y es una estrategia mixta del jugador 2, definimos el conjunto de mejores respuestas a y como $BR_1(y) = \{i \in N : (Ay)_i = \text{máx}_{i' \in N}(Ay)'_i\}$ y análogamente, si x es una estrategia mixta del jugador 2, el conjunto de mejores respuestas a x será $BR_2(x) = \{j \in N : (xB)_j = \text{máx}_{j' \in M}(xB)_{j'}\}$.

Llamaremos equilibrio de Nash a todo perfil de estrategias mixtas $(x*, y*) \in \Delta(A) \times \Delta(B)$ que cumpla:

$$\forall i \in N, x_i^* > 0 \implies i \in BR_1(y^*) \tag{3.1}$$

$$\forall j \in M, y_j^* > 0 \implies j \in BR_1(x^*) \tag{3.2}$$

En el caso particular de que las estrategias sean puras, al equilibrio lo llamaremos también equilibrio de Nash puro.

3.2. Categorías de Juegos

Es útil clasificar a los juegos en distintas categorías según sus propiedades. Presentamos a continuación algunas de las categorías de juegos mas estudiadas en la literatura sobre juego ficticio.

Definición 3.2.0.1. *Un juego* (A, B) *de tamaño* $n \times m$ *es un juego de suma cero si* $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = -b_{ij}$*. Para estos casos, nos referiremos al juego usando solo la matriz* A*.*

Los juegos de suma cero son una de las categorías mas estudiadas en teoría de juegos. Representan los juegos en los que un jugador siempre gana tanto como pierde el otro. Uno de los teoremas fundacionales del area, conocido como el Teorema de Minimax [**nash:minmax**] establece que todos poseen un equilibrio de Nash puro y a la utilidad para el jugador fila de este perfil la llama el **valor del juego**.

Definición 3.2.0.2. *Llamamos degenerado a un juego bimatricial* (A, B) *de tamaño* $n \times m$ *si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- *Existen* $i, i' \in N$ *y* $j \in M$ *con* $i \neq i$*' tales que* $a_{ij} = a_{i'j}$
- *Existen* $j, j' \in M$ *e* $i \in N$ *con* $j \neq j$*' tales que* $b_{ij} = b_{ij'}$

Los juegos no degenerados son de particular interes porque capturan el concepto de un juego en el que, para cada acción del rival, no existen dos acciones con el mismo pago. Por lo tanto, el conjunto de mejor respuesta contra una acción dada es siempre unitario.

Definición 3.2.0.3. *Un juego bimatricial* (A, B) *de tamaño* $n \times n$ *es simétrico si* $\forall i, j \in N : a_{ij} = -b_{ji}$

Definición 3.2.0.4. *Un juego* (A, B) *de tamaño* $n \times m$ *es de intereses idénticos si* $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = b_{ij}$*.*

3.3. Juego Ficticio

Existen en la literatura dos formas de definir el juego ficticio. Algunos autores como Berger, Monderer, Sela, Shapley, Daskalakis y Pan [14] [10] [4] [6] [22] utilizan un definición del estilo de la siguiente, que resulta cómoda para estudiar convergencia.

Definición 3.3.0.1. *Sean* (A, B) *un juego en forma bimatricial de* $n \times m$ *y una secuencia* $(i^k, j^k)_{t \in \mathbb{N}}$ *de perfiles de estrategias puras sobre el juego. Si tenemos unas secuencias de creencias*

$$x^k = \frac{\sum_{s=1}^{k} \widetilde{i^s}}{t}$$

$$y^k = \frac{\sum_{s=1}^{k} \widetilde{j^s}}{t}$$

- $(i^k, j^k)_{t\in\mathbb{N}}$ *es una secuencia de juego ficticio simultaneo si* $(i^1, j^1) \in N \times M$ *y* $\forall t \in \mathbb{N}, i^{k+1} \in BR_1(y^k) \wedge j^{k+1} \in BR_2(x^k)$
- $(i^k, j^k)_{t\in\mathbb{N}}$ *es una secuencia de juego ficticio alternante si* $i^1 \in N$ *y* $\forall t \in \mathbb{N}, i^{k+1} \in BR_1(y^k) \wedge j^k \in BR_2(x^k)$

Alternativamente, Brandt, Fischer y Harrenstein utilizan una definición similar a la de Robinson [2] pero simplificada. Es más comoda para estudiar velocidades de convergencia en juegos que se sabe que convergen.

Definición 3.3.0.2. *Sea* (A, B) *un juego en forma bimatricial de* $n \times m$*:*

- *Una secuencia de juego ficticio simultaneo en* (A, B) *es una secuencia* $(x^0, y^0), (x^1, y^1), (x^2, y^2), \ldots$ *de pares de vectores no negativos* $(x^i, y^i) \in \mathbb{N}^{n\times m}$ *tal que:*

$$x^0 = 0, y^0 = 0$$
$$x^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{i} \text{ donde } i \text{ es el índice de una componente máxima de } Ay^\tau$$
$$y^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{j} \text{ donde } j \text{ es el índice de una componente máxima de } x^\tau B$$

- *Una secuencia de juego ficticio alternante en* (A, B) *es una secuencia* $(x^0, y^0), (x^1, y^1), (x^2, y^2), \ldots$ *de pares de vectores no negativos* $(x^i, y^i) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *tal que:*

$$x^0 = 0, y^0 = 0$$
$$x^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{i} \text{ donde } i \text{ es el índice de una componente máxima de } Ay^\tau$$
$$y^{\tau+1} = y^\tau + \widetilde{j} \text{ donde } j \text{ es el índice de una componente máxima de } x^{\tau+1} B$$

Como vemos, en la primera se define una secuencia de jugadas que cumple una condicion contra un historial de creencias sobre la estrategia mixta del otro jugador, mientras que en la segunda la secuencia es de duplas de contadores de jugadas (sin normalizar, por lo que no son estrategias), que cumplen una condición contra el valor esperado de cada jugada. En el capítulo 4 se demostrará que estas dos definiciones son equivalentes. Durante el resto de este capitulo se utilizará la primera definición.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Equivalencia de las disntitas definiciones

Como mencionamos en la sección 3.3, existen dos formas de definir el juego ficticio entre los distintos autores de la literatura. Ambas simplifican de distintas formas la definición original de Brown y si bien son similares, su equivalencia no es inmediatamente evidente, por lo que uno podría dudar de si un teorema expresado para una de las definiciones es válido con la otra. Por lo tanto, presentamos a continuación dos lemas sobre esta equivalencia, para el caso simultaneo y alternante respesctivamente. La idea será probar que los historiales de la definición 3.3.0.2 suman en cada iteracion la estrategia pura correspondiente a la acción elegida por la definicion 3.3.0.1. Comenzamos con el caso simulaneo.

Lema 4.1.0.1. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, $(\widetilde{i^\tau}, \widetilde{j^\tau})_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultaneo (según la definicioón 3.3.0.1) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultaneo (según la definicion 3.3.0.2), tales que $p^1 = \widetilde{i^1}$, $q^1 = \widetilde{j^1}$ y ambas usan la misma regla de desempate. Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, $\forall \tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre τ.

Para $\tau = 1$, tenemos $p^1 = \widetilde{i^1} = \sum_{s=1}^{1} \widetilde{i^s}$ y $q^1 = \widetilde{j^1} = \sum_{s=1}^{1} \widetilde{j^s}$.

Veamos ahora el caso de un $\tau = k > 1$, suponiendo que $p^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s}$ y $q^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}$. Por la definición 3.3.0.2, $p^k = p^{k-1} + \widetilde{i}$ donde i es un índice de una componente máxima de $Aq^{k-1} = A \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}$. Pero también sabemos, por la definición 3.3.0.1 que

aca tengo duda de si es mejor suponer k y probar para k+1

$i^k \in BR_1(y^{k-1}) = BR_1(\frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k-1}) = \{i \in N : (A\frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k-1})_p = \text{máx}_{i' \in N}(A\frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k-1})_{i'}\}$. Es decir que i^k es el índice de una componente máxima de $A\frac{q^{k-1}}{k-1}$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, podemos afirmar que también es una componente máxima de Aq^{k-1} . Incluso si hubiera otras componentes máximas, estamos usando en ambos procesos la misma regla de desempate. Luego, $p^k = p^{k-1} + \widetilde{i^k} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{i^s} + \widetilde{i^k} = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}$. Análogamente, podemos afirmar que $q^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{j^s}$. □

lo del escalado esta bien?

El caso alternante es un poco más complejo ya que el caso del jugador columna ya no es análogo al del jugador fila.

Lema 4.1.0.2. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definicioón 3.3.0.1) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definicion 3.3.0.2), tales que $p^1 = \widetilde{i^1}$ y ambas usan la misma regla de desempate. Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, para todo $\tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{j^s}$$

Demostración. Nuevamente, procederemos por inducción sobre τ.

Para $\tau = 1$, sabemos que $p^1 = \widetilde{i^1} = \sum_{s=1}^{1}\widetilde{i^s}$. Por la definición 3.3.0.2, $q^1 = q^0 + \widetilde{j}$ donde q^0 es el vector nulo y j es el índice de una componente máxima de $p^1B = \widetilde{i^1}B$ y, por la definición 3.3.0.1, sabemos que $j^1 \in BR_2(x^1) = BR_2(\frac{\sum_{s=1}^{1}\widetilde{i^s}}{\tau}) = BR_2(i^1) = \{j \in N : (i^1B)_j = \text{máx}_{j' \in M}(i^1B)_{j'}\}$. Es decir, j^1 es el índice de una componente máxima de i^1B. Luego, $q^1 = \widetilde{j^1} = \sum_{s=1}^{1}\widetilde{j^s}$.

Veamos ahora el caso de un $\tau = k > 1$, suponiendo que $p^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{i^s}$ y $q^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}$. Podemos afirmar, con el mismo argumento que en el caso inductivo del lema 4.1.0.1 que $p^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}$. Por otro lado, $q^k = y^k + \widetilde{j}$ donde j es el índice de una componente máxima de $p^kB = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}B$. Sabemos además, por la definición 3.3.0.1, que $j^k \in BR_2(x^k) = BR_2(\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}) = \{j \in N : (\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}B)_j = \text{máx}_{j' \in M}(\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}B)_{j'}\}$. Es decir que j^k es el índice de una componente máxima de $\frac{p^k}{k}B$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, podemos afirmar que también es una componente máxima de p^kB. Como ambos procesos desempatan igual, podemos afirmar entonces que $q^k = q^{k-1} + j^k = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s} + j^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{j^s}$.

□

4.2. Convergencia de Juego Ficticio

En su publicación de 1997, Monderer y Sela [10] enuncian un resultado que nos da una intuición interesante sobre el comportamiento del juego ficticio. Al ser el este un mecanismo utilizado para encontrar equilibrios de Nash, uno esperaría observar un comportamiento estable alrededor de los mismo. Monderer y Sela llaman a esto el Principio de Estabilidad. La demostración que presentan es mediante otros principios y conceptos que presentan en esa publicación, pero este resultado puede probarse de forma más directa. Presentamos entonces a continuación una demostración alternativa. Agregamos además, una prueba para el caso del juego ficticio alternante. mejor?

Teorema 4.2.1. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultaneo en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^t, y^t)_{\tau\in\mathbb{N}}$. Si en la iteración k se juega el perfil de estrategias $(i*, j*)$ y este es un equilibrio de Nash puro, entonces $(i*, j*)$ será también el perfil jugado en todas las iteraciones posteriores.*

Demostración. Si en la iteracion k se jugó el perfil (i^*, j^*), por la definición 3.3.0.1, sabemos que $i^* \in BR_1(y^{k-1})$ y $j^* \in BR_1(x^{k-1})$. Sabemos también, por la definición de equilibrio de Nash, que $i^* \in BR_1(\widetilde{j^*})$ y $j^* \in BR_2(\widetilde{i^*})$.

Veamos entonces que sucederá en la iteración $k + 1$. Las creencias se actualizaran como

$$x^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s} + \widetilde{i^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s}}{k} + \frac{\widetilde{i^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s}(k-1)}{k(k-1)} + \frac{\widetilde{i^*}}{k} = \frac{k-1}{k}x^{k-1} + \frac{\widetilde{i^*}}{k}$$

$$y^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s} + \widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}}{k} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}(k-1)}{k(k-1)} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}$$

Luego, tendremos que

$$\begin{aligned} BR_1(y^k) &= BR_1(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}) \\ &= \{i \in N : (A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}))_i = \max_{i'\in N}(A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}))'_i\} \\ &= \{i \in N : (\frac{k-1}{k}Ay^{k-1} + \frac{Aj^*}{k})_i = \max_{i'\in N}(\frac{k-1}{k}Ay^{k-1} + \frac{Aj^*}{k})'_i\} \end{aligned}$$

Como sabemos que i^* es indice máximo tanto de Ay^{k-1} como de Aj^*, podemos afirmar que lo es también de esta combinación lineal de ambos y por tanto que $i^* \in BR_1(y^k)$. Analogamente, $j^* \in BR_1(x^k)$. Por lo tanto, por la definición de juego ficticio, en la iteración k se jugará nuevamente (i^*, j^*) y este proceso se repetirá infinitamente . □

este argumento?

que hacer aca con empates? agregar en el enunciado que haya un solo equilibrio?

Teorema 4.2.2. *Sea* $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ *una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante en el juego en forma bimatricial* (A, B) *de tamaño* $n \times m$*, con secuencias de creencias* $(x^t, y^t)_{\tau\in\mathbb{N}}$*. Si en la iteración* k *se juega el perfil de estrategias* $(i*, j*)$ *y este es un equilibrio de Nash puro, entonces* $(i*, j*)$ *será también el perfil jugado en todas las iteraciones posteriores.*

creo que sale parecida a la simultanea, pero quiero ver bien esa antes de probar esta

Demostración. asd □

4.3. Velocidad de Convergencia de AFP

En esta sección nos enfocaremos en estudiar más detalladamente los resultados de Brandt, Fischer y Harrenstein [23]. Como dijimos en el capítulo 2, los autores mencionan la posibilidad de expandir sus resultados a la variante alternante de juego ficticio. Presentamos a continuación nuestro análisis para los casos de los juegos de suma constante simétricos y los no degenerados de 2×3.

Veamos primero que para el caso de los juegos de suma constante simétricos, el teorema de estos autores efectivamente es expandible de forma bastante directa a la variante alternante.

Teorema 4.3.1. *En juegos de suma constante simétricos de dos jugadores, un proceso de juego ficticio alternante puede requerir una cantidad exponencial (en el tamaño de representación en bits de los valores de las utilidades del juego) de rondas antes de que un equilibrio sea jugado.*

Demostración. Consideremos un juego en forma normal con la siguiente matriz de pagos:

.	a^1	a^2	a^3
a^1	0	-1	$-\epsilon$
a^2	1	0	$-\epsilon$
a^3	ϵ	ϵ	0

Si $\epsilon < 1$, vemos que (a^3, a^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario y sea $\epsilon = 2^{-k}$. Para estos valores, ϵ puede codificarse en $O(k)$ bits, mientras que las otras utilidades del juego son constantes, por lo que podemos afirmar que la representación del juego será tambien del orden de $O(k)$ bits. Por lo tanto, si probamos que un proceso de juego ficticio alternante puede requerir 2^k rondas antes de que se juegue (a^3, a^3), el teorema estará demostrado.

Si el proceso de AFP comienza con el jugador fila jugando a^1, entonces $x^1Q = (0, 1, 2^{-k})$ y por lo tanto el jugador columna elegirá a_2.

Luego, en las siguentes $2^k - 1$ rondas tendremos que $Py^i = (-i + 1, 0, 2^{-k}i)$ y $x^{i+1}Q = (-2^{-k}i, 1 - 2^{-k}i, 2^{-k})$.Claramente, el jugador fila elegirá a^3. Por su parte, como $1 - 2^{-k}i \geq 2^{-k}$, el jugador columna jugará a^2 en la ronda $i + 1$.

La siguiente tabla muestra como se desarrolla este proceso:

. Round i	(a^i, a^i)	Py^i	$x^{i+1}Q$
0	-	-	$(0, 1, 2^{-k})$
1	(a^1, a^2)	$(0, 0, 2^{-k})$	$(-2^{-k}, 1 - 2^{-k}, 2^{-k})$
2	(a^3, a^2)	$(-1, 0, 2^{-k}2)$	$(-2^{-k}2, 1 - 2^{-k}2, 2^{-k})$
3	(a^3, a^2)	$(-2, 0, 2^{-k}3)$	$(-2^{-k}3, 1 - 2^{-k}3, 2^{-k})$
	.		
	.		
	.		
$2^k - 1$	(a^3, a^2)	$(-2^k + 3, 0, 2^{-k}(2^k - 1))$	$(-2^{-k}(2^k - 1), 1 - 2^{-k}(2^k - 1), 2^{-k})$
2^k	(a^3, a^2)	$(-2^k + 2, 0, 1)$	$(-1, 0, 2^{-k})$

Por lo tanto, la secuencia

$$(a^1, a^2), \underbrace{(a^3, a^2), ...(a^3, a^2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cúal no se juega ningún equilibrio. $\square$

Por su parte, la demostración para el caso de los juegos no degenerados de 2×3 es un poco menos directa y requiere plantear una ligera variante del juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein.

Teorema 4.3.2. *En juegos no degenerados de 2×3, un proceso de juego ficticio alternante puede requerir una cantidad exponencial (en el tamaño de representación en bits de los valores de las utilidades del juego) de rondas antes de que un equilibrio sea jugado.*

Demostración. Consideremos un juego con la siguiente matriz de pagos:

.	b^1	b^2	b^3
a^1	$(1, 1)$	$(2, 2)$	$(0, 0)$
a^2	$(0, 0)$	$(2 + \epsilon, 2 + \epsilon)$	$(2 + 2\epsilon, 2 + 2\epsilon)$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (a^2, b^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, un proceso de juego ficticio alternante puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (a^2, b^3). Al igual que en el teorema anterior, el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, por lo que esto demuestra el teorema.

Si el proceso de AFP comienza con el jugador fila jugando a^1, entonces $x^1Q = (1, 2, 0)$ y por lo tanto el jugador columna elegirá a_2.

Luego, en las siguentes $2^k - 1$ rondas tendremos que $Py^i = (2i, (2+2^{-k})i)$ y $x^{i+1}Q = (1, 2+(2+2^{-k})i, (2+2^{-k+1})i)$. Claramente, el jugador fila elegirá a^2. Por su parte, como $2 + (2 + 2^{-k})i \geq (2 + 2^{-k+1})i$, el jugador columna jugará b^3 en la ronda $i + 1$.

La siguiente tabla muestra como se desarrolla este proceso:

. Round i	(a^i, b^i)	$x^{i+1}Q$
0	-	$(1, 2, 0)$
1	(a^1, b^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k}), (2 + 2^{-k+1}))$
2	(a^2, b^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k})2, (2 + 2^{-k+1})2)$
3	(a^2, b^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k})3, (2 + 2^{-k+1})3)$
	.	
	.	
	.	
$2^k - 1$	(a^2, b^2)	$(1, 2^{k+1} + 3, 2^{k+1} + 2)$
2^k	(a^2, b^2)	

Por lo tanto, la secuencia

$$(a^1, b^2), \underbrace{(a^2, b^2), ...(a^2, b^2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cúal no se juega ningún equilibrio.

□

El detalle de que el juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein no nos sirva para demostrar el teorema anterior no es para nada menor. En efecto, como veremos en el siguiente teorema, es un ejemplo de un juego en el un proceso de juego ficticio simultaneo puede requerir una cantidad de rondas exponenciales mientras que, toda secuencia de juego ficticio alternante convergerá rápidamente.

Teorema 4.3.3. *Existe un juego para el cuál un proceso de juego ficticio simultaneo puede requerir una cantidad exponencial (en el tamaño de representación en bits de los valores de las utilidades del juego) de rondas antes de que un equilibrio sea jugado, mientras que en todo proceso de juego ficticio alternado se jugará un equilibrio en una cantidad de rondas acotada por una constante.*

Demostración. Consideremos el juego con la siguiente matriz de pagos:

.	b^1	b^2	b^3
a^1	$(1, 1)$	$(2, 2)$	$(0, 0)$
a^2	$(0, 0)$	$(2 + \epsilon, 2 + \epsilon)$	$(3, 3)$

Al igual que en los teoremas, si $\epsilon < 1$, (a^2, b^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Veamos ahora el caso alternante. Existen dos posibles secuencias de juego ficticio alternante para este juego, dado que el jugador fila elegirá primero y el jugador columna reaccionara según esta decisión.

Si el jugador fila juega a^2, el jugador columna responderá con b^3, siendo este el equilibrio. Si el jugador fila juega a^1, el jugador columna respondera con b^2. Esto hará que el jugador fila juegue a^2 en la siguiente ronda por ser $Py^i =$, mientras que el jugador continuará fila continuara jugando b^2. Esta situacion se repetirá una ronda más, tras la cuál, la jugador columna se verá incentivado a jugar b^3.

$\square$

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

Conclusiones y trabajo futuro.

Bibliografía

[1] G. Brown. «Iterative solution of games by fictitious play». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* 13 (ene. de 1951).

[2] J. Robinson. «An Iterative Method of Solving a Game». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 54 (sep. de 1951). DOI: 10.2307/1969530.

[3] K. Miyasawa. «On the Convergence of Learning Processes in a 2x2 Non-Zero-Person Game». En: (oct. de 1961).

[4] D. Monderer y A. Sela. «A 2x2 Game without the Fictitious Play Property». En: *Games and Economic Behavior* 14 (feb. de 1996), págs. 144-148. DOI: 10.1006/game.1996.0045.

[5] L. Shapley. «Some Topics in Two-Person Games». En: *Annals of Mathematics Studies.* 52 (ene. de 1964).

[6] D. Monderer y L. Shapley. «Fictitious Play Property for Games with Identical Interests». En: *Journal of Economic Theory* 68 (feb. de 1996), págs. 258-265. DOI: 10.1006/jeth.1996.0014.

[7] D. Monderer y L. S. Shapley. «Potential Games». En: *Games and Economic Behavior* 14.1 (1996), págs. 124-143. ISSN: 0899-8256. DOI: https://doi.org/10.1006/game.1996.0044. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825696900445.

[8] U. Berger. «Learning in games with strategic complementarities revisited». En: *Journal of Economic Theory* 143 (nov. de 2008), págs. 292-301. DOI: 10.1016/j.jet.2008.01.007.

[9] A. Sela. «Fictitious play in 'one-against-all' multi-player games». En: *Economic Theory* 14 (nov. de 1999), págs. 635-651. DOI: 10.1007/s001990050345.

[10] D. Monderer y A. Sela. *Fictitious play and- no-cycling conditions.* Sonderforschungsbereich 504 Publications 97-12. Sonderforschungsbereich 504, Universität Mannheim;Sonderforschungsbereich 504, University of Mannheim, jun. de 1997. URL: https://ideas.repec.org/p/xrs/sfbmaa/97-12.html.

[11] U. Berger. «Fictitious play in 2xn games». En: (abr. de 2003).

[12] R. Chu y G. Vreeswijk. «Extending fictitious play with pattern recognition». En: *CEUR Workshop Proceedings* 1113 (ene. de 2013), págs. 40-53.

[13] A. Washburn. «A new kind of fictitious play». En: *Naval Research Logistics (NRL)* 48 (jun. de 2001), págs. 270-280. DOI: 10.1002/nav.7.

[14] U. Berger. «Brown's original fictitious play». En: *Journal of Economic Theory* 135 (feb. de 2007), págs. 572-578. DOI: 10.1016/j.jet.2005.12.010.

[15] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1963. DOI: 10.7249/R366.

[16] G. Dantzig. «A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* (oct. de 2020), págs. 330-335.

[17] S. I. Gass y P. M. Zafra. «Modified fictitious play for solving matrix games and linear-programming problems». En: *Computers & Operations Research* 22.9 (1995), págs. 893-903. ISSN: 0305-0548. DOI: https://doi.org/10.1016/0305-0548(94)00075-J. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030505489400075J.

[18] T. III, M. Epelman y R. Smith. «A Fictitious Play Approach to Large-Scale Optimization». En: *Operations Research* 53 (jun. de 2005), págs. 477-489. DOI: 10.1287/opre.1040.0178.

[19] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games*. Vol. 1-2. Addison-Wesley, 1959.

[20] Y. Viossat y A. Zapechelnyuk. «No-regret Dynamics and Fictitious Play». En: *Journal of Economic Theory* 148 (jul. de 2012). DOI: 10.1016/j.jet.2012.07.003.

[21] A. Jafari, A. Greenwald, D. Gondek y G. Ercal. «On No-Regret Learning, Fictitious Play, and Nash Equilibrium». En: (jul. de 2001).

[22] C. Daskalakis y Q. Pan. «A Counter-Example to Karlin's Strong Conjecture for Fictitious Play». En: *Proceedings - Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS* (dic. de 2014). DOI: 10.1109/FOCS.2014.10.

[23] F. Brandt, F. Fischer y P. Harrenstein. «On the Rate of Convergence of Fictitious Play». En: *Theory of Computing Systems* 53.1 (jul. de 2013), págs. 41-52. ISSN: 1433-0490. DOI: 10.1007/s00224-013-9460-5. URL: https://doi.org/10.1007/s00224-013-9460-5.