About this presentation

- Sacrificed Math rigurosity in in favor of asd.
- This is practice for my thesis defense. Remember to record.
- Didn't get to fit everything I wanted. Making slides is hard.

About this presentation

- Sacrificed Math rigurosity in in favor of asd.
- This is practice for my thesis defense. Remember to record.
- Didn't get to fit everything I wanted. Making slides is hard.
- Remember to turn pauses on.

Example: Fede's Dilemma

An original example invented by me. You have never heard of it before.

General definition

El Problema: modelar situaciones en las que jugadores tratan de maximizar ganancias co-dependientes eligiendo en sus respectivos conjuntos de acciones in una forma racional, egoísta, simultanea e independiente.

modeling situations where players try to maximize their co-dependent scores by choosing from their respective sets of actions in a rational, selfish simultaneous and independent way.

General definition

El Problema: modelar situaciones en las que jugadores tratan de maximizar ganancias co-dependientes eligiendo en sus respectivos conjuntos de acciones in una forma racional, egoísta, simultanea e independiente.
modeling situations where players try to maximize their co-dependent scores by choosing from their respective sets of actions in a rational, selfish simultaneous and independent way.

Definition (Strategic Game)

Un juego estratégico es una tupla $(P, (A_p)_{p \in P}, (u_p)_{p \in P})$ donde:

- P es el conjunto de jugadores.
- $\forall p \in P$, A_p es el conjunto de acciones del jugador p. Los elementos de $\prod_{p \in P} A_p$ se llaman perfiles de acciones.
- $\forall p \in P$, $u_p : \prod_{\widehat{p} \in P} A_{\widehat{p}} \to \mathbb{R}$ es la función de utilidades o función de pagos del jugador p.

Fede's Dilemma with the general definition

- $P = \{f, b\}$

Fede's Dilemma with the general definition

- $P = \{f, b\}$
- $A_f = A_b = \{Confesar, Silencio\}$

Fede's Dilemma with the general definition

- $P = \{f, b\}$
- $A_f = A_b = \{Confesar, Silencio\}$
- $u_f : A_f \times A_b \to \mathbb{R}$
  - $u_f(S, S) = -1$
  - $u_f(S, C) = -3$
  - $u_f(C, S) = 0$
  - $u_f(C, S) = -2$

Juegos en forma matricial

Smaller scope: Nos enfocaremos en juegos de 2 jugadores. Podemos representarlos con una matriz de tuplas (A, B) de esta forma:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\
\hline
i_1 & (a_{1,1}, b_{1,1}) & (a_{1,2}, b_{1,2}) & \cdots & (a_{1,2}, b_{1,m}) \\
i_2 & (a_{2,1}, b_{2,1}) & (a_{2,2}, b_{2,2}) & \cdots & (a_{2,m}, b_{2,m}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
i_n & (a_{n,1}, b_{n,1}) & (a_{n,2}, b_{n,2}) & \cdots & (a_{n,m}, b_{n,m}) \\
\hline
\end{array}$$

- El jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

Juegos en forma matricial

Smaller scope: Nos enfocaremos en juegos de 2 jugadores. Podemos representarlos con una matriz de tuplas (A, B) de esta forma:

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\
\hline
i_1 & (a_{1,1}, b_{1,1}) & (a_{1,2}, b_{1,2}) & \cdots & (a_{1,2}, b_{1,m}) \\
i_2 & (a_{2,1}, b_{2,1}) & (a_{2,2}, b_{2,2}) & \cdots & (a_{2,m}, b_{2,m}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
i_n & (a_{n,1}, b_{n,1}) & (a_{n,2}, b_{n,2}) & \cdots & (a_{n,m}, b_{n,m}) \\
\hline
\end{array}
$$

- El jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.
- El jugador 2 (jugador columna) tiene acciones $j \in M = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$.

Juegos en forma matricial

Smaller scope: Nos enfocaremos en juegos de 2 jugadores. Podemos representarlos con una matriz de tuplas (A, B) de esta forma:

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\
\hline
i_1 & (a_{1,1}, b_{1,1}) & (a_{1,2}, b_{1,2}) & \cdots & (a_{1,2}, b_{1,m}) \\
i_2 & (a_{2,1}, b_{2,1}) & (a_{2,2}, b_{2,2}) & \cdots & (a_{2,m}, b_{2,m}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
i_n & (a_{n,1}, b_{n,1}) & (a_{n,2}, b_{n,2}) & \cdots & (a_{n,m}, b_{n,m}) \\
\hline
\end{array}
$$

- El jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.
- El jugador 2 (jugador columna) tiene acciones $j \in M = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$.
- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son llamadas matrices de pago.

Juegos en forma matricial

Smaller scope: Nos enfocaremos en juegos de 2 jugadores. Podemos representarlos con una matriz de tuplas (A, B) de esta forma:

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\
\hline
i_1 & (a_{1,1}, b_{1,1}) & (a_{1,2}, b_{1,2}) & \cdots & (a_{1,2}, b_{1,m}) \\
i_2 & (a_{2,1}, b_{2,1}) & (a_{2,2}, b_{2,2}) & \cdots & (a_{2,m}, b_{2,m}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
i_n & (a_{n,1}, b_{n,1}) & (a_{n,2}, b_{n,2}) & \cdots & (a_{n,m}, b_{n,m}) \\
\hline
\end{array}
$$

- El jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.
- El jugador 2 (jugador columna) tiene acciones $j \in M = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$.
- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son llamadas matrices de pago.
- Si el jugador 1 juega i y el jugador 2 juega j, la ganancia del jugador 1 será $a_{i,j}$ y la ganancia del jugador 2 será $b_{i,j}$

Fede's Dilemma in bi-matrix form

	Silence	Confess
Silence	$(-1, -1)$	$(-3, 0)$
Confess	$(0, -3)$	$(-2, -2)$

Que ocurre si los jugadores son no-deterministas?

- Una estrategia mixta para el jugador 1 es una distribución de probabilidaddes sobre N, que representaremos con un vector $x \in \Delta(N)$ de tamaño n. Una estrategia mixta que asigna probabildiad 1 a la acción $i \in N$ se representa como $\widetilde{i}$ y se llama estrategia pu. La ganancias esperadas del jugador 2 contra una estrategia mixta x del jugador 1 son xB.

Que ocurre si los jugadores son no-deterministas?

- Una estrategia mixta para el jugador 1 es una distribución de probabilidaddes sobre N, que representaremos con un vector $x \in \Delta(N)$ de tamaño n. Una estrategia mixta que asigna probabildiad 1 a la acción $i \in N$ se representa como $\widetilde{i}$ y se llama estrategia pu. La ganancias esperadas del jugador 2 contra una estrategia mixta x del jugador 1 son xB.
- Una estrategia mixta para el jugador 2 es una distribución de probabilidaddes sobre M, que representaremos con un vector $y \in \Delta(M)$ de tamaño m. Una estrategia mixta que asigna probabildiad 1 a la acción $j \in M$ se representa como $\widetilde{j}$ y se llama estrategia pura. La ganancias esperadas del jugador 2 contra una estrategia mixta x del jugador 1 son xB.

Que ocurre si los jugadores son no-deterministas?

- Una estrategia mixta para el jugador 1 es una distribución de probabilidaddes sobre N, que representaremos con un vector $x \in \Delta(N)$ de tamaño n. Una estrategia mixta que asigna probabildiad 1 a la acción $i \in N$ se representa como $\widetilde{i}$ y se llama estrategia pu. La ganancias esperadas del jugador 2 contra una estrategia mixta x del jugador 1 son xB.
- Una estrategia mixta para el jugador 2 es una distribución de probabilidaddes sobre M, que representaremos con un vector $y \in \Delta(M)$ de tamaño m. Una estrategia mixta que asigna probabildiad 1 a la acción $j \in M$ se representa como $\widetilde{j}$ y se llama estrategia pura. La ganancias esperadas del jugador 2 contra una estrategia mixta x del jugador 1 son xB.
- Si el jugador 1 juega la estrategia mixta x y el jugador 2 juega la estrategia mixta y entonces sus ganancias esperadas serán xAy y xBy respectivamente.

Fede's Dilemma: payoffs

Planilla

Best Response and Nash Equilibrium

- Definimos el conjunto de mejores respuestas del jugador 1 contra la estrategia mixta y del jugador 2 como $BR_1(y) = \text{argmax}_{i \in N}\{\widetilde{i}Ay\}$

- Definimos el conjunto de mejores respuestas del jugador 1 contra la estrategia mixta y del jugador 2 como $BR_1(y) = \text{argmax}_{i \in N}\{\widetilde{i}Ay\}$
- similarmente, el conjunto de mejores respuestas del jugador 2 contra la estrategia mixta x del jugador 1 es $BR_2(x) = \text{argmax}_{j \in M}\{xB\widetilde{j}\}$

Best Response and Nash Equilibrium

- Definimos el conjunto de mejores respuestas del jugador 1 contra la estrategia mixta y del jugador 2 como $BR_1(y) = \text{argmax}_{i \in N}\{\widetilde{i}Ay\}$
- similarmente, el conjunto de mejores respuestas del jugador 2 contra la estrategia mixta x del jugador 1 es $BR_2(x) = \text{argmax}_{j \in M}\{xB\widetilde{j}\}$
- Un equilibrio de Nash puro es un perfil de estrategias $(\widetilde{i^*}, \widetilde{j^*})$ tal que $i^* \in BR_1(\widetilde{j^*})$ y $j^* \in BR_2(\widetilde{i^*})$

New Example

Clip from a 90s cartoon

New Example

Clip from a 90s cartoon

$$\begin{array}{c|ccc|} & j_R & j_P & j_S \\ \hline i_R & 0 & -1 & 1 \\ i_P & 1 & 0 & -1 \\ i_S & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

New Example

Clip from a 90s cartoon

$$\begin{array}{c|ccc|} & j_R & j_P & j_S \\ \hline i_R & 0 & -1 & 1 \\ i_P & 1 & 0 & -1 \\ i_S & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- Bart and Lisa have played this game many times before in an iterative process.

New Example

Clip from a 90s cartoon

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & j_R & j_P & j_S \\
\hline
i_R & 0 & -1 & 1 \\
i_P & 1 & 0 & -1 \\
i_S & -1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

- Bart and Lisa have played this game many times before in an iterative process.
- Bart has a constant pure Rock strategy.

New Example

Clip from a 90s cartoon

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & j_R & j_P & j_S \\
\hline
i_R & 0 & -1 & 1 \\
i_P & 1 & 0 & -1 \\
i_S & -1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

- Bart and Lisa have played this game many times before in an iterative process.
- Bart has a constant pure Rock strategy.
- Lisa is doing something smarter. She's playing the Best Response to what she perceives as Bart's strategy over the previous iterations of the game. She knows that $BR_1(\widetilde{j_R}) = \{i_P\}$ so she plays Paper.

New Example

Clip from a 90s cartoon

$$\begin{array}{c|ccc|} & j_R & j_P & j_S \\ \hline i_R & 0 & -1 & 1 \\ i_P & 1 & 0 & -1 \\ i_S & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- Bart and Lisa have played this game many times before in an iterative process.
- Bart has a constant pure Rock strategy.
- Lisa is doing something smarter. She's playing the Best Response to what she perceives as Bart's strategy over the previous iterations of the game. She knows that $BR_1(\widetilde{j_R}) = \{i_P\}$ so she plays Paper.
- What happen's if we make Lisa play against herself?

Juego Ficticio

Definition

Dado un juego (A, B) de tamaño $n \times m$, una sequencia de perfiles de acciones (i^τ, j^τ), y un par de seuencias x^τ y y^τ (llamadas secuencias de creencias) tales que para cada $\tau \in \mathbb{N}$:

$$x^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}}{\tau}$$
$$y^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}}{\tau}$$

Entonces (i^τ, j^τ) es una secuencia de juego fictiocio si (i^1, j^1) es un elemento arbitrario de $N \times M$ y para todo $\tau \in \mathbb{N}$, $i^{\tau+1} \in BR_1(y^\tau)$ y $j^{\tau+1} \in BR_2(x^\tau)$.

Cada jugador considera el historial del otro como una estrategia mixta y juega la mejor respuesta en cada ronda.

El principio de estabilidad

Theorem (Principio de estabilidad)

Dada una secuencia de juego ficticio $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ *en* (A, B) *con secuencias de creencias* x^τ *y* y^τ*. Si* (i^k, j^k) *es un equilibrio de Nash puro, entonces* $(i^{k+1}, j^{k+1}) = (i^k, j^k)$*.*

El principio de estabilidad

Theorem (Principio de estabilidad)

Dada una secuencia de juego ficticio $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ en (A, B) con secuencias de creencias x^τ y y^τ. Si (i^k, j^k) es un equilibrio de Nash puro, entonces $(i^{k+1}, j^{k+1}) = (i^k, j^k)$.

Si el proceso alcanza un equilibrio de Nash entonces seguirá jugando ese equilibrio de Nash.

El principio de estabilidad

Theorem (Principio de estabilidad)

Dada una secuencia de juego ficticio $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ *en* (A, B) *con secuencias de creencias* x^τ *y* y^τ*. Si* (i^k, j^k) *es un equilibrio de Nash puro, entonces* $(i^{k+1}, j^{k+1}) = (i^k, j^k)$*.*

Si el proceso alcanza un equilibrio de Nash entonces seguirá jugando ese equilibrio de Nash.

Intuición: Si el proceso juega un perfil de acciones, entonces los incentivos de cada jugador para jugar la mejor respuesta contra la acción del oponente en ese perfil crece. Pero si el perfil es un equilibrio de Nash entonces la mejor respuesta es la acción que acaba de jugar.

Demostración del principio de estabilidad

Lemma (1)

Dada una secuencia de juego ficticio $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ *con secuencias de creencias* x^τ *y* y^τ*. Si* (i^k, j^k) *es un equilibrio de Nash, entonces* $i^k \in BR_1(y^k)$ *y* $j^k \in BR_2(x^{k+1})$*.*

Proof of the Stability Principle

$$
\begin{aligned}
BR_1(y^k) &= BR_1\left(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) \\
&= \operatorname*{argmax}_{i \in N}\left\{\widetilde{i}A\left(\frac{(k-1)y^{k-1}}{k} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right)\right\} \\
&= \operatorname*{argmax}_{i \in N}\left\{\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i}A\widetilde{j^*}\right\}
\end{aligned}
$$

Proof of the Stability Principle

$$
\begin{aligned}
BR_1(y^k) &= BR_1\left(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) \\
&= \operatorname*{argmax}_{i \in N}\{\widetilde{i}A\left(\frac{(k-1)y^{k-1}}{k} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right)\} \\
&= \operatorname*{argmax}_{i \in N}\{\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i}A\widetilde{j^*}\}
\end{aligned}
$$

- The definition of Fictitious Play implies that $i^k \in BR_1(y^{k-1}) = \text{argmax}_{i \in N}\{\widetilde{i}Ay^{k-1}\}$.

Proof of the Stability Principle

$$
\begin{aligned}
BR_1(y^k) &= BR_1\left(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) \\
&= \operatorname*{argmax}_{i \in N} \left\{ \widetilde{i} A \left(\frac{(k-1) y^{k-1}}{k} + \frac{\widetilde{j^k}}{k} \right) \right\} \\
&= \operatorname*{argmax}_{i \in N} \left\{ \frac{(k-1)}{k} \widetilde{i} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i} A \widetilde{j^*} \right\}
\end{aligned}
$$

- The definition of Fictitious Play implies that $i^k \in BR_1(y^{k-1}) = \operatorname{argmax}_{i \in N} \{\widetilde{i} A y^{k-1}\}$.
- The definition of Nash Equilibrium implies that $i^k \in BR_1(\widetilde{j^k}) = \operatorname{argmax}_{i \in N} \{\widetilde{i} A \widetilde{j^k}\}$.

Proof of the Stability Principle

$$
\begin{aligned}
BR_1(y^k) &= BR_1\left(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) \\
&= \underset{i \in N}{\operatorname{argmax}} \left\{ \widetilde{i} A \left(\frac{(k-1) y^{k-1}}{k} + \frac{\widetilde{j^k}}{k} \right) \right\} \\
&= \underset{i \in N}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{(k-1)}{k} \widetilde{i} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i} A \widetilde{j^*} \right\}
\end{aligned}
$$

- The definition of Fictitious Play implies that $i^k \in BR_1(y^{k-1}) = \operatorname{argmax}_{i \in N} \{\widetilde{i} A y^{k-1}\}$.
- The definition of Nash Equilibrium implies that $i^k \in BR_1(\widetilde{j^k}) = \operatorname{argmax}_{i \in N} \{\widetilde{i} A \widetilde{j^k}\}$.
- $\frac{(k-1)}{k} \widetilde{i} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i} A \widetilde{j^k}$ is just a linear combination.

Proof of the Stability Principle

$$
\begin{aligned}
BR_1(y^k) &= BR_1\left(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) \\
&= \underset{i \in N}{\operatorname{argmax}}\{\widetilde{i}A\left(\frac{(k-1)y^{k-1}}{k} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right)\} \\
&= \underset{i \in N}{\operatorname{argmax}}\{\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i}A\widetilde{j^*}\}
\end{aligned}
$$

- The definition of Fictitious Play implies that $i^k \in BR_1(y^{k-1}) = \operatorname{argmax}_{i \in N}\{\widetilde{i}Ay^{k-1}\}$.
- The definition of Nash Equilibrium implies that $i^k \in BR_1(\widetilde{j^k}) = \operatorname{argmax}_{i \in N}\{\widetilde{i}A\widetilde{j^k}\}$.
- $\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i}A\widetilde{j^k}$ is just a linear combination.
- Analogous for player 2.

Proof of the Stability Principle

Lemma (2)

Given a Fictitious Play sequence $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ with belief sequences x^τ and y^τ. If (i^k, j^k) is a Nash Equilibrium then $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ and $BR_2(x^{k+1}) \subseteq BR_2(x^k)$.

Proof of the Stability Principle

Lemma (2)

Given a Fictitious Play sequence $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ with belief sequences x^τ and y^τ. If (i^k, j^k) is a Nash Equilibrium then $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ and $BR_2(x^{k+1}) \subseteq BR_2(x^k)$.

If the process plays a Nash equilibrium then there are no new actions in the best response sets in the next iteration.

Proof of the Stability Principle

- We can prove $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ by proving $i \notin BR_1(y^{k-1}) \implies i \notin BR_1(y^k)$.

Proof of the Stability Principle

- We can prove $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ by proving $i \notin BR_1(y^{k-1}) \implies i \notin BR_1(y^k)$.
- If $i^k \in BR_1(y^{k-1})$ but $i' \notin BR_1(y^{k-1})$ then $\widetilde{i^k} A y^{k-1} > \widetilde{i'} A y^{k-1}$

Proof of the Stability Principle

- We can prove $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ by proving $i \notin BR_1(y^{k-1}) \implies i \notin BR_1(y^k)$.
- If $i^k \in BR_1(y^{k-1})$ but $i' \notin BR_1(y^{k-1})$ then $\widetilde{i^k} A y^{k-1} > \widetilde{i'} A y^{k-1}$
- (i^k, j^k) is a Nash Equilibrium so $\widetilde{i^k} A \widetilde{j^k} \geq \widetilde{i'} A \widetilde{j^k}$.

Proof of the Stability Principle

- We can prove $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ by proving $i \notin BR_1(y^{k-1}) \implies i \notin BR_1(y^k)$.
- If $i^k \in BR_1(y^{k-1})$ but $i' \notin BR_1(y^{k-1})$ then $\widetilde{i^k} A y^{k-1} > \widetilde{i'} A y^{k-1}$
- (i^k, j^k) is a Nash Equilibrium so $\widetilde{i^k} A \widetilde{j^k} \geq \widetilde{i'} A \widetilde{j^k}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{i^k} A y^k &= \widetilde{i^k} A\left(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) = \frac{(k-1)}{k} \widetilde{i^k} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i^k} A \widetilde{j^k} \\
&> \frac{(k-1)}{k} \widetilde{i'} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i'} A \widetilde{j^k} = \widetilde{i'} A\left(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) = \widetilde{i'} A y^k
\end{aligned}$$

Proof of the Stability Principle

- We can prove $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ by proving $i \notin BR_1(y^{k-1}) \implies i \notin BR_1(y^k)$.
- If $i^k \in BR_1(y^{k-1})$ but $i' \notin BR_1(y^{k-1})$ then $\widetilde{i^k} A y^{k-1} > \widetilde{i'} A y^{k-1}$
- (i^k, j^k) is a Nash Equilibrium so $\widetilde{i^k} A \widetilde{j^k} \geq \widetilde{i'} A \widetilde{j^k}$.

$$\widetilde{i^k} A y^k = \widetilde{i^k} A\left(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) = \frac{(k-1)}{k} \widetilde{i^k} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i^k} A \widetilde{j^k}$$
$$> \frac{(k-1)}{k} \widetilde{i'} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i'} A \widetilde{j^k} = \widetilde{i'} A\left(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^k}}{k}\right) = \widetilde{i'} A y^k$$

If the expected payoff for i^k is greater than for i' and i^k is in the best response set, then i' is not.

[Player 2] omg, same!

Rate of convergence: Example

How fast is Fictitious Play as an algorithm to find Nash Equilibriums?

Rate of convergence: Example

How fast is Fictitious Play as an algorithm to find Nash Equilibriums?

Consider this game with $\epsilon = 2^{-k}$:

.	j_1	j_2	j_3
i_1	$(1, 1)$	$(2, 2)$	$(0, 0)$
i_2	$(0, 0)$	$(2+\epsilon, 2+\epsilon)$	$(3, 3)$

Rate of convergence: Example

How fast is Fictitious Play as an algorithm to find Nash Equilibriums?
Consider this game with $\epsilon = 2^{-k}$:

.	j_1	j_2	j_3
i_1	$(1,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$
i_2	$(0,0)$	$(2+\epsilon, 2+\epsilon)$	$(3,3)$

- (i_2, j_3) is the only Nash Equilibrium. We can prove this by iterated elimination of strictly dominated action (jargon for "discard bad choices")

Rate of convergence: Example

How fast is Fictitious Play as an algorithm to find Nash Equilibriums?
Consider this game with $\epsilon = 2^{-k}$:

.	j_1	j_2	j_3
i_1	$(1,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$
i_2	$(0,0)$	$(2+\epsilon, 2+\epsilon)$	$(3,3)$

- (i_2, j_3) is the only Nash Equilibrium. We can prove this by iterated elimination of strictly dominated action (jargon for "discard bad choices")
- This game can be codified in $O(k)$ bits.

Rate of convergence: Example

How fast is Fictitious Play as an algorithm to find Nash Equilibriums?
Consider this game with $\epsilon = 2^{-k}$:

$$\begin{array}{c|ccc|}
. & j_1 & j_2 & j_3 \\ \hline
i_1 & (1,1) & (2,2) & (0,0) \\
i_2 & (0,0) & (2+\epsilon, 2+\epsilon) & (3,3) \\ \hline
\end{array}$$

- (i_2, j_3) is the only Nash Equilibrium. We can prove this by iterated elimination of strictly dominated action (jargon for "discard bad choices")
- This game can be codified in $O(k)$ bits.
- If we start a Fictitious Play process with (i_1, j_1), the sequence will play 2^k iterations before playing (i_2, j_3).

Rate of convergence: Example

How fast is Fictitious Play as an algorithm to find Nash Equilibriums?
Consider this game with $\epsilon = 2^{-k}$:

.	j_1	j_2	j_3
i_1	$(1,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$
i_2	$(0,0)$	$(2+\epsilon, 2+\epsilon)$	$(3,3)$

- (i_2, j_3) is the only Nash Equilibrium. We can prove this by iterated elimination of strictly dominated action (jargon for "discard bad choices")
- This game can be codified in $O(k)$ bits.
- If we start a Fictitious Play process with (i_1, j_1), the sequence will play 2^k iterations before playing (i_2, j_3).
- For some reason I can't render tables in beamer, so I'll show them in my thesis. Ignore the spanish.

Alternating Fictitious Play

Definition

Given a game (A, B) of size $n \times m$, a sequence of action profiles (i^τ, j^τ), and a pair of sequences x^τ and y^τ (called belief sequences) such that for every $\tau \in \mathbb{N}$:

$$x^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}}{\tau}$$

$$y^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}}{\tau}$$

Then (i^τ, j^τ) is an Alternating Fictitious Play sequence if i^1 is an arbitrary element of $N \times M$ and for every $\tau \in \mathbb{N}$ it's true that $i^{\tau+1} \in BR_1(y^\tau)$ and $j^\tau \in BR_2(x^\tau)$.

Alternating Fictitious Play

Definition

Given a game (A, B) of size $n \times m$, a sequence of action profiles (i^τ, j^τ), and a pair of sequences x^τ and y^τ (called belief sequences) such that for every $\tau \in \mathbb{N}$:

$$x^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}}{\tau}$$

$$y^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}}{\tau}$$

Then (i^τ, j^τ) is an Alternating Fictitious Play sequence if i^1 is an arbitrary element of $N \times M$ and for every $\tau \in \mathbb{N}$ it's true that $i^{\tau+1} \in BR_1(y^\tau)$ and $j^\tau \in BR_2(x^\tau)$.

We break the principle of simultaneous decision making.

Alternating Fictitious Play in the example

For both starting actions of the row player, AFP converges in just 4 moves, independently of ϵ.