Teorema 1. *En juegos de suma constante simétricos de dos jugadores, AFP puede requerir una cantidad exponencial de rondas (en el tamaño de representación del juego) antes de que un equilibrio sea jugado.*

Demostración. Consideremos un juego con la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{array}{c|ccc|}
. & a^1 & a^2 & a^3 \\ \hline
a^1 & 0 & \text{-1} & -\epsilon \\
a^2 & 1 & 0 & -\epsilon \\
a^3 & \epsilon & \epsilon & 0 \\ \hline
\end{array}$$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (a^3, a^3) es el único equilibrio de Nash por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estados estrictamente dominados.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, AFP puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (a^3, a^3). Como el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, esto demuestra el teorema.

Si el proceso de AFP comienza con el jugador fia jugando a^1, entonces $x^1 Q = (0, 1, 2^{-k})$ y por lo tanto el jugador columna elegirá a_2.

Luego, en las siguentes $2^k - 1$ rondas tendremos que $Py^i = (-i + 1, 0, 2^{-k} i)$ y $x^{i+1} Q = (-2^{-k} i, 1 - 2^{-k} i, 2^{-k})$. Claramente, el jugador fila elegirá a^3. Por su parte, como $1 - 2^{-k} i \geq 2^{-k}$, el jugador columna jugará a^2 en la ronda $i + 1$.

La siguiente tabla muestra como se desarrolla este proceso:

Ronda	Profile	Py_i	x_iQ
0	(1, 2)	(0.0, 0.0, 0.0)	(0.0, 1.0, 0.0625)
1	(3, 2)	(-1.0, 0.0, 0.0625)	(-0.0625, 0.9375, 0.0625)
2	(3, 2)	(-2.0, 0.0, 0.125)	(-0.125, 0.875, 0.0625)
3	(3, 2)	(-3.0, 0.0, 0.1875)	(-0.1875, 0.8125, 0.0625)
4	(3, 2)	(-4.0, 0.0, 0.25)	(-0.25, 0.75, 0.0625)
5	(3, 2)	(-5.0, 0.0, 0.3125)	(-0.3125, 0.6875, 0.0625)
6	(3, 2)	(-6.0, 0.0, 0.375)	(-0.375, 0.625, 0.0625)
7	(3, 2)	(-7.0, 0.0, 0.4375)	(-0.4375, 0.5625, 0.0625)
8	(3, 2)	(-8.0, 0.0, 0.5)	(-0.5, 0.5, 0.0625)
9	(3, 2)	(-9.0, 0.0, 0.5625)	(-0.5625, 0.4375, 0.0625)
10	(3, 2)	(-10.0, 0.0, 0.625)	(-0.625, 0.375, 0.0625)
11	(3, 2)	(-11.0, 0.0, 0.6875)	(-0.6875, 0.3125, 0.0625)
12	(3, 2)	(-12.0, 0.0, 0.75)	(-0.75, 0.25, 0.0625)
13	(3, 2)	(-13.0, 0.0, 0.8125)	(-0.8125, 0.1875, 0.0625)
14	(3, 2)	(-14.0, 0.0, 0.875)	(-0.875, 0.125, 0.0625)
15	(3, 2)	(-15.0, 0.0, 0.9375)	(-0.9375, 0.0625, 0.0625)
16	(3, 3)	(-16.0, 0.0, 1.0)	(-1.0, 0.0, 0.0625)
17	(3, 3)	(-16.0625, -0.0625, 1.0)	(-1.0625, -0.0625, 0.0625)
18	(3, 3)	(-16.125, -0.125, 1.0)	(-1.125, -0.125, 0.0625)
19	(3, 3)	(-16.1875, -0.1875, 1.0)	(-1.1875, -0.1875, 0.0625)

Por lo tanto, la secuencia

$$(a^1, a^2), \underbrace{(a^3, a^2), ...(a^3, a^2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje AFP válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en al cúal no se juega ningún equilibrio. $\square$

Teorema 2. *En juegos no degenerativos de 2×3, AFP puede requerir una cantidad exponencial de rondas (en el tamaño de representación del juego) antes de que un equilibrio sea jugado.*

Demostración. Consideremos un juego con la siguiente matriz de pagos:

.	b^1	b^2	b^3
a^1	$(1,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$
a^2	$(0,0)$	$(2+\epsilon, 2+\epsilon)$	$(2+2\epsilon, 2+2\epsilon)$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (a^2, a^3) es el único equilibrio de Nash por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estados estrictamente dominados.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, AFP puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (a^2, a^3). Como el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, esto demuestra el teorema.

Si el proceso de AFP comienza con el jugador fila jugando a^1, entonces $x^1 Q = (1, 2, 0)$ y por lo tanto el jugador columna elegirá a_2.

Luego, en las siguentes $2^k - 1$ rondas tendremos que $Py^i = (2i, (2 + 2^{-k})i)$ y $x^{i+1}Q = (1, 2 + (2 + 2^{-k})i, (2 + 2^{-k+1})i)$. Claramente, el jugador fila elegirá a^2. Por su parte, como $2 + (2+2^{-k})i \geq (2+2^{-k+1})i$, el jugador columna jugará a^3 en la ronda $i + 1$.

La siguiente tabla muestra como se desarrolla este proceso:

. Round i	(a^i, a^i)	$x^{i+1}Q$
0	-	$(1, 2, 0)$
1	(a^1, a^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k}), (2 + 2^{-k+1}))$
2	(a^3, a^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k})2, (2 + 2^{-k+1})2)$
3	(a^3, a^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k})3, (2 + 2^{-k+1})3)$
	.	
	.	
	.	
$2^k - 1$	(a^3, a^2)	$(1, 2^{k+1} + 3, 2^{k+1} + 2)$
2^k	(a^3, a^2)	

Por lo tanto, la secuencia

$$(a^1, a^2), \underbrace{(a^2, a^2), ...(a^2, a^2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje AFP válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en al cúal no se juega ningún equilibrio.

$\square$