



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

TESINA DE GRADO
PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Propiedades de Secuencias de Juego Ficticio

Autor:
Federico Badaloni

Director:
Ariel Arbiser

Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe, Argentina

27 de noviembre de 2020

Resumen

El resumen de tu tesina.

esto sobre el
final

Índice general

Índice general	IV
1 Introducción	1
1.1. Objetivos	1
2 Estado del Arte	3
2.1. Convergencia del Juego Ficticio	3
2.2. Velocidad de Convergencia del Juego Ficticio	4
3 Conceptos Previos	5
3.1. Juegos Bimatriaciales y Equilibrios de Nash	5
3.2. Categorías de Juegos	6
3.3. Juego Ficticio	6
4 Resultados	9
4.1. Equivalencia de las distintas definiciones	9
4.2. Conservación del Juego Ficticio	10
4.3. Convergencia de Juego Ficticio	12
4.4. Velocidad de Convergencia de AFP	14
5 Conclusiones y Trabajo Futuro	19
Bibliografía	21

Capítulo 1

Introducción

Creada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern, la teoría de juegos surgió en la década de 1940 motivada en parte por la Segunda Guerra Mundial. Estudia una variedad de situaciones en las que diversos agentes interactúan y toman decisiones estratégicas con el fin de obtener beneficios con interdependencias. Para ello, la teoría estudia los comportamientos, la posibilidad de maximizar esas ganancias según variados criterios y los casos de equilibrio, a la vez que formula y analiza modelos.

1.1. Objetivos

Intro

estoy en proceso de revisar la propuesta y los intros de los papers para armar esta

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Convergencia del Juego Ficticio

El proceso de aprendizaje de juego ficticio fue propuesto por primera vez por Brown en 1951 [1] como un algoritmo para encontrar el valor de un juego de suma cero finito. Hacia finales del mismo año, Robinson [2] demostró que el proceso converge para todos los juegos de esta clase.

Desde entonces, se han publicado numerosos trabajos analizando la convergencia del juego ficticio en juegos que no sean de suma cero. Miyazawa [3] demostró que esta propiedad vale para todos los juegos de 2×2 pero, su demostración depende de la incorporación de una regla de desempate particular sin la cual, Monderer y Sela [4] demostraron que no se cumple. Por su parte, Shapley [5] mostró un ejemplo de un juego de 3×3 para el cuál no es válida.

Además, la convergencia del juego ficticio fue demostrada para juegos de intereses identicos [6], juegos potenciales con pesos [7], juegos no degenerados con estrategias complementarias y ganancias disminuyentes [8] y ciertas clases de juegos compuestos [9].

Por otro lado, se han estudiado muchas variantes del juego ficticio. Una de las mas analizadas es el juego ficticio continuo, definida originalmente en la publicación original de Brown [1], aunque este no la exploró en detalle. Monderer y Sela [10] demostraron que esta converge para juegos no degenerados de 2×3 y Berger luego extendio este resultado a $2 \times N$ [11] y aportó la convergencia de los juegos de potencial ordinal y quasi-supermodulares con ganancias disminuyentes. Otros ejemplos de variantes propuestas pueden verse en [12] y [13].

Una variante de particular interes este trabajo es el juego ficticio con actualización alternante de creencias. Berger [14] planteó que esta versión alternante es en realidad la original que definió Brown en [14] y que si bien el proceso con actualización simultanea de creencias que usan todos los investigadores de teoría de juegos en la actualidad puede resultar mas intuitivo, es también menos potente y da como ejemplo la clase de los juegos no degenerados con potencial ordinal para la cuál la version alternante converge, pero la simultanea no.

quizas detallar estas ultimas

exapndir con otros trabajos que mencionen AFP o al menos decir que hay pocos

2.2. Velocidad de Convergencia del Juego Ficticio

Los trabajos mencionados hasta ahora se enfocan en el estudio de la eventual convergencia global a un equilibrio de Nash de las distintas clases de juegos. Otra enfoque de investigación es la velocidad de convergencia en los casos en la que esta ocurre. El interés por este se debe en gran medida a la equivalencia entre los juegos de suma cero y los problemas de programación lineal, demostrada por Dantzig, Gale y Von Neumann [15] [16]. En 1994, Gass y Zafra [17] planteaban que hasta la fecha, lo más eficiente para resolver un juego de suma cero era plantearlo como un problema de programación lineal y aplicar el método simplex. En el mismo artículo plantean un método mixto con simplex y una variante de juego ficticio y concluyen que permite acelerar la convergencia en ciertos problemas de programación lineal. Lambert y Smith [18] plantean también una variante (con muestreo) y discuten su eficiencia en problemas de optimización a gran escala.

Vale la pena mencionar en este punto lo que en la literatura del tema se conoce como la Conjetura de Karlin. En 1959, Samuel Karlin [19] conjeturó que la velocidad de convergencia del juego ficticio es $O(t^{-\frac{1}{2}})$ para todos los juegos. La idea proviene de que esta cota superior se corresponde con la de la velocidad de convergencia de otro método de aprendizaje muy relacionado con el juego ficticio, las dinámicas de no-arrepentimiento [20] [21]. Daskalakis y Pan [22] probaron falsa una versión fuerte de la Conjetura de Karlin (usando una regla de desempate arbitraria) pero dejaron abierta la pregunta sobre la versión general, que ellos llaman débil, de la conjetura.

La utilidad del juego ficticio como método para computar equilibrios de Nash fue puesta en duda cuándo Brandt, Fischer y Harrenstein [23] demostraron que para los juegos de suma cero, los no degenerados de $2 \times N$ y los potenciales (tres de las clases más estudiadas), existen casos en los que el proceso de juego ficticio puede requerir una cantidad de rondas exponencial en el tamaño de representación en bits de las utilidades del juego antes de que se juegue algún equilibrio. En esta publicación mencionan que su resultado puede ser extendido al juego ficticio alternante pero no demuestran esto.

casos de uso
(poker IA según brandt,
redes de tráfico (en pattern matching?) y alguno más)

este EdA hay que revisarlo de nuevo cuando termine la intro y los conceptos previos para ver si hay que cambiar algún término

Capítulo 3

Conceptos Previos

3.1. Juegos Bimatrixiales y Equilibrios de Nash

Sea (A, B) un juego en forma bimatrixial de $n \times m$, es decir un juego de dos jugadores finito en el que el jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ y el jugador 2 (jugador columna) tiene acciones $j \in M = \{1, 2, \dots, m\}$. $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son las matrices de pago de los jugadores 1 y 2. Si el jugador 1 elige la acción i y el jugador 2 elige la acción j , la utilidad del jugador 1 será a_{ij} y la utilidad del jugador 2 será b_{ij} .

Notaremos con $\Delta(X)$ al espacio de probabilidades sobre el conjunto X y llamaremos **estrategias mixtas** a los vectores de la forma $x \in \Delta(N)$ y $y \in \Delta(M)$. A las estrategias que asignan probabilidad 1 a una acción y 0 a todas las otras, las llamaremos **estrategias puras**. Notaremos con \tilde{h} a la estrategia pura correspondiente a la acción h .

La utilidad esperada del jugador 1 al jugar la acción i contra la estrategia mixta y del jugador 2 será $(Ay)_i$. Análogamente, la utilidad esperada del jugador 2 al jugar la acción j contra la estrategia mixta x del jugador 1 será $(xB)_j$. Si ambos jugadores juegan estrategias mixtas x e y respectivamente, sus utilidades esperadas podrán calcularse como xAy para el jugador 1 e yB^tx para el jugador 2.

Si y es una estrategia mixta del jugador 2, definimos el **conjunto de mejores respuestas** a y como $BR_1(y) = \{i \in N : (Ay)_i = \max_{i' \in N} (Ay)_{i'}\}$ y análogamente, si x es una estrategia mixta del jugador 1, el conjunto de mejores respuestas a x será $BR_2(x) = \{j \in M : (xB)_j = \max_{j' \in M} (xB)_{j'}\}$. Es decir, son los conjuntos de índices que maximizan las utilidades esperadas contra una estrategia dada.

Llamaremos **equilibrio de Nash** a todo perfil de estrategias mixtas $(x^*, y^*) \in \Delta(A) \times \Delta(B)$ que cumpla:

$$\forall i \in N, x_i^* > 0 \implies i \in BR_1(y^*) \quad (3.1)$$

$$\forall j \in M, y_j^* > 0 \implies j \in BR_2(x^*) \quad (3.2)$$

En el caso particular de que las estrategias sean puras, al equilibrio lo llamaremos también **equilibrio de Nash puro**.

aca tiene que ir algunos ejemplos de juegos conocidos

3.2. Categorías de Juegos

Es útil clasificar a los juegos en distintas categorías según sus propiedades. Presentamos a continuación algunas de las categorías de juegos mas estudiadas en la literatura sobre juego ficticio.

Definición 3.2.0.1. Un juego (A, B) de tamaño $n \times m$ es un **juego de suma cero** si $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = -b_{ij}$. Para estos casos, nos referiremos al juego usando solo la matriz A .

Los juegos de suma cero son una de las categorías mas estudiadas en teoría de juegos. Representan los juegos en los que un jugador siempre gana tanto como pierde el otro. Uno de los teoremas fundacionales del area, conocido como el Teorema de Minimax [nash:minmax] establece que todos poseen un equilibrio de Nash puro y a la utilidad para el jugador fila de este perfil la llama el **valor del juego**.

Definición 3.2.0.2. Llamamos **degenerado** a un juego bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- Existen $i, i' \in N$ y $j \in M$ con $i \neq i'$ tales que $a_{ij} = a_{i'j}$
- Existen $j, j' \in M$ e $i \in N$ con $j \neq j'$ tales que $b_{ij} = b_{ij'}$

En caso contrario, decimo que el juego es **no degenerado**.

Los juegos no degenerados son de particular interes porque capturan el concepto de un juego en el que, para cada acción del rival, no existen dos acciones con el mismo pago. Por lo tanto, el conjunto de mejor respuesta contra una acción dada es siempre unitario.

Las siguientes definiciones corresponden a otras dos categorías de juegos que han sido muy estudiados por sus propiedades de convergencia en los procesos de juego ficticio. Nos seran útiles en la sección 4.4 cuando discutamos los resultados sobre su velocidad de convergencia.

Definición 3.2.0.3. Un juego bimatricial (A, B) de tamaño $n \times n$ es un **juego simétrico** si $\forall i, j \in N : a_{ij} = -b_{ji}$

Definición 3.2.0.4. Un juego (A, B) de tamaño $n \times m$ es un **juego de intereses idénticos** si $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = b_{ij}$.

3.3. Juego Ficticio

Mas intro acá. Explicación coloquial. Capaz algo de la division del algoritmo en decision y actualizacion como dice en pattern:matching

breve comentario acá de por qué incluimos a estas dos

aca pueden ir comentarios sobre cuales de los juegos ejemplo caen en cuales categorías

Existen en la literatura dos formas de definir el juego ficticio. Algunos autores como Berger, Monderer, Sela, Shapley, Daskalakis y Pan [14] [10] [4] [6] [22] utilizan un definición del estilo de la siguiente, que resulta cómoda para estudiar convergencia y es la que veremos primero. Presentaremos dos variantes, correspondientes a la versión simultánea y a la alternante.

Definición 3.3.0.1. Sean (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$ y una secuencia (i^τ, j^τ) con $i^\tau \in N$, $j^\tau \in M$ para todo $\tau \in \mathbb{N}$. Si tenemos unas secuencias de creencias x^τ e y^τ tales que para todo $\tau \in \mathbb{N}$:

$$x^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \tilde{i}^s}{t}$$

$$y^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \tilde{j}^s}{t}$$

Entonces:

- (i^τ, j^τ) es una secuencia de juego ficticio simultáneo si (i^1, j^1) es un elemento arbitrario de $N \times M$ y para todo $\tau \in \mathbb{N}$ se cumplen $i^{\tau+1} \in BR_1(y^\tau)$ y $j^{\tau+1} \in BR_2(x^\tau)$.
- (i^τ, j^τ) es una secuencia de juego ficticio alternante si i^1 es un elemento arbitrario de N y para todo $\tau \in \mathbb{N}$ se cumplen $i^{\tau+1} \in BR_1(y^\tau)$ y $j^\tau \in BR_2(x^\tau)$.

Vale la pena hacer algunos comentarios sobre esta primera definición. Para empezar, si observamos las secuencias de creencias, x^τ e y^τ , veremos que se componen de sumas de vectores unitarios, pero normalizados por el tiempo, por lo que son estrategias mixtas que se corresponden con la distribución empírica de las acciones de cada jugador.

Por otro lado, como los elementos iniciales son arbitrarios, un mismo juego puede tener tantos procesos de juego ficticio válidos como jugadas iniciales existan. Mas aún, existe una ambigüedad en cuanto que acciones elige el proceso en los casos en los que uno o ambos de los conjuntos de mejor respuesta no son unitarios¹. Cada posible decisión configura un proceso distinto y válido pero es normal hablar de **reglas de desempate** para referirse a criterios uniformes para resolver estas ambigüedades. Más formalmente, podemos definir una regla de desempate como un par de funciones $d_1 : \mathbb{P}(N) \rightarrow N$ y $d_2 : \mathbb{P}(M) \rightarrow M$ que a cada subconjunto de acciones de un jugador en un eventual empate le asignan la acción que elegirá el proceso.

Sobre la variante alternante vale aclarar que efectivamente, el jugador columna toma su decisión incorporando en sus creencias la información sobre qué jugó el jugador fila en la ronda actual, si bien esto puede resultar poco intuitivo ya que normalmente en teoría de juegos se representa jugadores eligiendo simultánea e independientemente. Otra observación interesante es que su acción inicial no es arbitraria sino que ya se encuentra fijada por la mejor respuesta o mejores respuestas a la acción del jugador fila.

¹Es por esto que es tan importante en el estudio del juego ficticio la categoría de los juegos no degenerados, para los cuáles el conjunto de mejor respuesta es unitario.

Diremos que un proceso de juego ficticio (simultaneo o alternante) converge de forma pura en la iteración k si (i^k, j^k) es un equilibrio de Nash puro. En el capítulo 4 veremos que cuando esto ocurre, (i^k, j^k) se repetirá infinitamente desde este punto en el tiempo. Diremos también que el proceso converge de forma mixta si existe un equilibrio de Nash mixto tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x^* - x^k| < \epsilon$ y $|y^* - y^k| < \epsilon$.

esto podría ir en una sección propia y de paso meter ahí representación de bits y convergencia en función de que

Alternativamente, Brandt, Fischer y Harrenstein utilizan una definición similar a la de Robinson [2] pero simplificada. Es más cómoda para estudiar velocidades de convergencia en juegos que se sabe que convergen.

Definición 3.3.0.2. Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$:

- Una secuencia de juego ficticio simultaneo en (A, B) es una secuencia $(x^0, y^0), (x^1, y^1), (x^2, y^2), \dots$ de pares de vectores no negativos $(x^i, y^i) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ tal que:

$$x^0 = 0, y^0 = 0$$

$$x^{\tau+1} = x^\tau + \tilde{i} \text{ donde } i \text{ es el índice de una componente máxima de } Ay^\tau$$

$$y^{\tau+1} = y^\tau + \tilde{j} \text{ donde } j \text{ es el índice de una componente máxima de } x^\tau B$$

- Una secuencia de juego ficticio alternante en (A, B) es una secuencia $(x^0, y^0), (x^1, y^1), (x^2, y^2), \dots$ de pares de vectores no negativos $(x^i, y^i) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ tal que:

$$x^0 = 0, y^0 = 0$$

$$x^{\tau+1} = x^\tau + \tilde{i} \text{ donde } i \text{ es el índice de una componente máxima de } Ay^\tau$$

$$y^{\tau+1} = y^\tau + \tilde{j} \text{ donde } j \text{ es el índice de una componente máxima de } x^{\tau+1} B$$

Como podemos observar, la principal diferencia con la primera definición es que mientras en aquella se define una secuencia de jugadas que cumple una condición contra un historial de creencias sobre la estrategia mixta del otro jugador, en esta la secuencia es de duplas de contadores de jugadas (sin normalizar, por lo que no son estrategias mixtas), que cumplen en cada iteración una condición contra producto de un elemento de la otra contra las matrices de pago, pero sin ser este tampoco el valor esperado de la jugada. En el capítulo 4 se demostrará que estas dos definiciones son equivalentes. Como en esta definición aparecen también casos ambiguos y aplica la misma noción de reglas de desempate.

aca puede ir un desarrollo de un FP para simultaneo y alternante con algun juego de los ejemplos

aca puede ir el mismo ejemplo de la def anterior, pero con esta

Capítulo 4

Resultados

4.1. Equivalencia de las distintas definiciones

Como mencionamos en la sección 3.3, existen dos formas de definir el juego ficticio entre los distintos autores de la literatura. Ambas simplifican de distintas formas la definición original de Brown y si bien son similares, su equivalencia no es inmediatamente evidente, por lo que uno podría dudar de si un teorema expresado para una de las definiciones es válido con la otra. Por lo tanto, presentamos a continuación dos lemas sobre esta equivalencia, para el caso simultaneo y alternante respectivamente. La idea será probar que los historiales de la definición 3.3.0.2 suman en cada iteración la estrategia pura correspondiente a la acción elegida por la definición 3.3.0.1. Comenzamos con el caso simultaneo.

Lema 4.1.0.1. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, $(\tilde{i}^\tau, \tilde{j}^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultaneo (según la definición 3.3.0.1) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultaneo (según la definición 3.3.0.2), tales que $p^1 = \tilde{i}^1, q^1 = \tilde{j}^1$ y ambas usan la misma regla de desempate. Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, $\forall \tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \tilde{i}^s$$
$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \tilde{j}^s$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre τ .

Para $\tau = 1$, tenemos $p^1 = \tilde{i}^1 = \sum_{s=1}^1 \tilde{i}^s$ y $q^1 = \tilde{j}^1 = \sum_{s=1}^1 \tilde{j}^s$.

Veamos ahora el caso de un $\tau = k > 1$, suponiendo que $p^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{i}^s$ y $q^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s$. Por la definición 3.3.0.2, $p^k = p^{k-1} + \tilde{i}$ donde i es un índice de una componente máxima de $Aq^{k-1} = A \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s$. Pero también sabemos, por la definición 3.3.0.1 que

$i^k \in BR_1(y^{k-1}) = BR_1(\frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s}{k-1}) = \{i \in N : (A \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s}{k-1})_p = \max_{i' \in N} (A \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s}{k-1})_{i'}\}$. Es decir que i^k es el índice de una componente máxima de $A \frac{q^{k-1}}{k-1}$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, podemos afirmar que también es una componente máxima de Aq^{k-1} . Incluso si hubiera otras componentes máximas, estamos usando en ambos procesos la misma regla de desempate. Luego, $p^k = p^{k-1} + \tilde{i}^k = \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{i}^s + \tilde{i}^k = \sum_{s=1}^k \tilde{i}^s$. Análogamente, podemos afirmar que $q^k = \sum_{s=1}^k \tilde{j}^s$. \square

El caso alternante es un poco más complejo ya que el caso del jugador columna ya no es análogo al del jugador fila.

Lema 4.1.0.2. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definición 3.3.0.1) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definición 3.3.0.2), tales que $p^1 = \tilde{i}^1$ y ambas usan la misma regla de desempate. Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, para todo $\tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \tilde{i}^s$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \tilde{j}^s$$

Demostración. Nuevamente, procederemos por inducción sobre τ .

Para $\tau = 1$, sabemos que $p^1 = \tilde{i}^1 = \sum_{s=1}^1 \tilde{i}^s$. Por la definición 3.3.0.2, $q^1 = q^0 + \tilde{j}$ donde q^0 es el vector nulo y j es el índice de una componente máxima de $p^1 B = \tilde{i}^1 B$ y, por la definición 3.3.0.1, sabemos que $j^1 \in BR_2(x^1) = BR_2(\frac{\sum_{s=1}^1 \tilde{i}^s}{1}) = BR_2(\tilde{i}^1) = \{j \in N : (i^1 B)_j = \max_{j' \in M} (i^1 B)_{j'}\}$. Es decir, j^1 es el índice de una componente máxima de $i^1 B$. Luego, $q^1 = j^1 = \sum_{s=1}^1 \tilde{j}^s$.

Veamos ahora el caso de un $\tau = k > 1$, suponiendo que $p^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{i}^s$ y $q^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s$. Podemos afirmar, con el mismo argumento que en el caso inductivo del lema 4.1.0.1 que $p^k = \sum_{s=1}^k \tilde{i}^s$. Por otro lado, $q^k = y^k + \tilde{j}$ donde j es el índice de una componente máxima de $p^k B = \sum_{s=1}^k \tilde{i}^s B$. Sabemos además, por la definición 3.3.0.1, que $j^k \in BR_2(x^k) = BR_2(\frac{\sum_{s=1}^k \tilde{i}^s}{k}) = \{j \in N : (\frac{\sum_{s=1}^k \tilde{i}^s}{k} B)_j = \max_{j' \in M} (\frac{\sum_{s=1}^k \tilde{i}^s}{k} B)_{j'}\}$. Es decir que j^k es el índice de una componente máxima de $\frac{p^k}{k} B$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, podemos afirmar que también es una componente máxima de $p^k B$. Como ambos procesos desempatan igual, podemos afirmar entonces que $q^k = q^{k-1} + j^k = \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s + j^k = \sum_{s=1}^k \tilde{j}^s$. \square

4.2. Conservación del Juego Ficticio

toda esta sección

En esta sección estudiaremos cómo las transformaciones a un juego afectan las secuencias de juego ficticio sobre el mismo. Esto nos es de intereses porque mas adelante nos permitirá encarar con mas claridad el estudio de la velocidad de convergencia del algoritmo. También, razonar un poco sobre esto nos permite entender mejor los resultados sobre convergencia de la literatura.

Claramente, transformaciones que conserven las relaciones de orden de los pagos de las acciones en juegos del mismo tamaño (como escalar todos los pagos por un mismo factor o sumarle a todos una constante) conservarán las secuencias de juego ficticio.

Pero veamos que pasa cuándo cambia el tamaño del juego. La motivación para esto es que en general, los investigadores de teoría de juegos buscan dos tipos de resultados de convergencia sobre juego ficticio. Por la positiva, clases de juegos de tamaño lo mas grande posible (o incluso mejor, tamaño arbitrario) para los que toda secuencia converga. Por la negativa, contraejemplos de tamaño tan pequeño como sea posible que no converjan. Esto es porque en estos estudios se entiende implícitamente que un contraejemplo puede ser expandido a un juego de tamaño mas grande que presente la misma secuencia de juego ficticio y por tanto todos los juegos de ese tamaño o mayor ya presentan casos que no convergen.

En los siguientes lemas, demostraremos esto para algunas de las clases de juegos mas estudiadas en la literatura. Vale la pena aclarar que si bien podríamos demostrar un solo lema general que diga que todo juego puede expandirse conservando las secuencias de juego ficticio, este resultado no nos sería útil, ya que es importante que la expansión conserve las propiedades que definen a la clase de juegos en cuestión.

Lema 4.2.0.1. *Sea A un juego de suma cero de tamaño n , existe un juego de suma cero A' de tamaño n tal que toda secuencia $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ de juego ficticio (secuencial o alternante) en A lo es también en A' .*

Demostración. Definimos el juego A' como

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & \max_{j \in N} a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & \max_{j \in N} a_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & \max_{j \in N} a_{n,j} \\ \min_{i \in N} a_{i,1} & \min_{i \in N} a_{i,2} & \cdots & \min_{i \in N} a_{i,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio secuencial sobre A , con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$. En la iteración τ , sabemos que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A . Como el pago de $n+1$ para el jugador 1 es siempre el mínimo de la columna, para cualquier acción j del jugador 2 tendremos que $a_{i^\tau, j} > a_{n+1, j}$ y por tanto podemos afirmar que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A' .

Para j^τ podemos razonar de forma análoga, solo que considerando la pertenencia a $BR_2(x^{\tau-1})$ o $BR_2(x^\tau)$ según si hablamos de juego ficticio secuencial o alternante.

Podemos afirmar entonces que $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ es también una secuencia de juego ficticio válida en A' . \square

Saqué el sí y solo sí porque generan problemas los empates cuando reducís.

así o detalle mas?

Lema 4.2.0.2. Sea (A, B) un juego simétrico de tamaño $n \times m$, existe un juego de intereses idénticos (A', B') de tamaño $n + 1$ tal que toda secuencia $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ de juego ficticio (secuencial o alternante) en (A, B) lo es también en (A', B') .

Demostración. Definimos el juego A' como

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & \max_{j \in N} a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & \max_{j \in N} a_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & \max_{j \in N} a_{n,j} \\ \min_{i \in N} a_{i,1} & \min_{i \in N} a_{i,2} & \cdots & \min_{i \in N} a_{i,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio secuencial sobre A , con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$. En la iteración τ , sabemos que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A . Como el pago de $k + 1$ para el jugador 1 es siempre el mínimo de la columna, para cualquier acción j del jugador 2 tendremos que $a_{i^\tau, j} > a_{k+1, j}$ y por tanto podemos afirmar que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A' .

Para j^τ podemos razonar de forma análoga, solo que considerando la pertenencia a $BR_2(x^{\tau-1})$ o $BR_2(x^\tau)$ según si hablamos de juego ficticio secuencial o alternante.

Podemos afirmar entonces que $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ es también una secuencia de juego ficticio (secuencial o alternante) válida en A' . \square

Observemos que no valen lemas similares para la reducción en tamaño de los juegos. Agregar estados con poco incentivo no modifica las secuencias de juego ficticio, pero para un juego puede haber secuencias que pasen por todas las acciones de cada un jugador y que por tanto este no pueda reducirse a uno mas chico.

4.3. Convergencia de Juego Ficticio

En su publicación de 1997, Monderer y Sela [10] enuncian un resultado que nos da una intuición interesante sobre el comportamiento del juego ficticio. Al ser el este un mecanismo utilizado para encontrar equilibrios de Nash, uno esperaría observar un comportamiento estable alrededor de los mismo. Monderer y Sela llaman a esto el Principio de Estabilidad. La demostración que presentan es mediante otros principios y conceptos que presentan en esa publicación, pero este resultado puede probarse de forma más directa. Presentaremos entonces a continuación una demostración alternativa. Agregamos además, una prueba para el caso del juego ficticio alternante.

Teorema 4.3.1. Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultaneo en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^t, y^t)_{t \in \mathbb{N}}$. Si en la iteración k se juega el perfil de estrategias (i^*, j^*) y este es un equilibrio de Nash puro, entonces (i^*, j^*) será también el perfil jugado en todas las iteraciones posteriores.

así o detalle mas?

Demostración. Si en la iteración k se jugó el perfil (i^*, j^*) , por la definición 3.3.0.1, sabemos que $i^* \in BR_1(y^{k-1})$ y $j^* \in BR_1(x^{k-1})$. Sabemos también, por la definición de equilibrio de Nash, que $i^* \in BR_1(\tilde{j}^*)$ y $j^* \in BR_2(\tilde{i}^*)$.

Veamos entonces que sucederá en la iteración $k + 1$. Las creencias se actualizarán como

$$x^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{i}^s + \tilde{i}^*}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{i}^s}{k} + \frac{\tilde{i}^*}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{i}^s (k-1)}{k(k-1)} + \frac{\tilde{i}^*}{k} = \frac{k-1}{k} x^{k-1} + \frac{\tilde{i}^*}{k}$$

$$y^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s + \tilde{j}^*}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s}{k} + \frac{\tilde{j}^*}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s (k-1)}{k(k-1)} + \frac{\tilde{j}^*}{k} = \frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\tilde{j}^*}{k}$$

Luego, tendremos que

$$\begin{aligned} BR_1(y^k) &= BR_1\left(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\tilde{j}^*}{k}\right) \\ &= \{i \in N : (A(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\tilde{j}^*}{k}))_i = \max_{i' \in N} (A(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\tilde{j}^*}{k}))_{i'}\} \\ &= \{i \in N : (\frac{k-1}{k} Ay^{k-1} + A\frac{\tilde{j}^*}{k})_i = \max_{i' \in N} (\frac{k-1}{k} Ay^{k-1} + A\frac{\tilde{j}^*}{k})_{i'}\} \end{aligned}$$

Como sabemos que i^* es índice máximo tanto de Ay^{k-1} como de $A\tilde{j}^*$, podemos afirmar que lo es también de esta combinación lineal de ambos y por tanto que $i^* \in BR_1(y^k)$. Analogamente, $j^* \in BR_1(x^k)$. Si hubiera mas acciones en los conjuntos de mejor respuesta, podemos asumir que aplica la misma regla de desempate que en la iteración anterior y serán estas las elegidas. Por lo tanto, por la definición de juego ficticio, en la iteración k se jugará nuevamente (i^*, j^*) y este proceso se repetirá infinitamente. \square

se me ocurrió esto para los empates en este teorema

Teorema 4.3.2. Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alterna en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^t, y^t)_{t \in \mathbb{N}}$. Si en la iteración k se juega el perfil de estrategias (i^*, j^*) y este es un equilibrio de Nash puro, entonces (i^*, j^*) será también el perfil jugado en todas las iteraciones posteriores.

Demostración. Si en la iteración k se jugó el perfil (i^*, j^*) , por la definición 3.3.0.1, sabemos que $i^* \in BR_1(y^{k-1})$ y $j^* \in BR_1(x^k)$. Sabemos también, por la definición de equilibrio de Nash, que $i^* \in BR_1(\tilde{j}^*)$ y $j^* \in BR_2(\tilde{i}^*)$.

demonstracion nueva

Veamos entonces que sucederá en la iteración $k + 1$, comenzando por el jugador fila. Sus creencias se actualizarán como

$$y^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s + \tilde{j}^*}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s}{k} + \frac{\tilde{j}^*}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \tilde{j}^s (k-1)}{k(k-1)} + \frac{\tilde{j}^*}{k} = \frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\tilde{j}^*}{k}$$

Y su conjunto de mejor respuesta será

$$\begin{aligned} BR_1(y^k) &= BR_1\left(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}\right) \\ &= \{i \in N : (A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}))_i = \max_{i' \in N} (A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}))_{i'}\} \\ &= \{i \in N : (\frac{k-1}{k}Ay^{k-1} + A\frac{j^*}{k})_i = \max_{i' \in N} (\frac{k-1}{k}Ay^{k-1} + A\frac{j^*}{k})_{i'}\} \end{aligned}$$

por lo que podemos afirmar, al igual que en el caso simultaneo, que jugará i^* en la iteración $k+1$. Ahora, sabiendo la jugada del jugador fila, podemos analizar qué jugará el jugador columna. Sus creencias se actualizaran como

$$x^{k+1} = \frac{\sum_{s=1}^k \tilde{i}^s + \tilde{i}^*}{k+1} = \frac{\sum_{s=1}^k \tilde{i}^s}{k+1} + \frac{\tilde{i}^*}{k+1} = \frac{k \sum_{s=1}^k \tilde{i}^s}{k(k+1)} + \frac{\tilde{i}^*}{k+1} = \frac{k}{k+1}x^k + \frac{\tilde{i}^*}{k+1}$$

Y su conjunto de mejor respuesta será

$$\begin{aligned} BR_2(x^{k+1}) &= BR_2\left(\frac{k}{k+1}x^k + \frac{\tilde{i}^*}{k+1}\right) \\ &= \{j \in M : ((\frac{k}{k+1}x^k + \frac{\tilde{i}^*}{k+1})B)_j = \max_{j' \in M} ((\frac{k}{k+1}x^k + \frac{\tilde{i}^*}{k+1})B)_{j'}\} \\ &= \{j \in M : (\frac{k}{k+1}x^k B + \frac{\tilde{i}^*}{k+1}B)_j = \max_{j' \in M} (\frac{k}{k+1}x^k B + \frac{\tilde{i}^*}{k+1}B)_{j'}\} \end{aligned}$$

Y podemos afirmar que como j^* es índice máximo de $x^{k+1}B$ y de i^*B , lo es también de su combinación lineal. Asumiendo nuevamente que aplica la misma regla de desempate que en la iteración anterior, concluimos que en la iteración $k+1$ y por tanto en todas las siguientes, se jugará nuevamente (i^*, j^*) . □

4.4. Velocidad de Convergencia de AFP

En esta sección nos enfocaremos en estudiar más detalladamente los resultados de Brandt, Fischer y Harrenstein [23]. Como dijimos en el capítulo 2, los autores mencionan la posibilidad de expandir sus resultados a la variante alternante de juego ficticio. Presentamos a continuación nuestro análisis para los casos de los juegos de suma constante simétricos y los no degenerados de 2×3 .

Pero antes, nos parece oportuno hablar mas detalladamente sobre algunas cuestiones respecto a las métricas contra las que se estudia la velocidad de convergencia de un proceso de aprendizaje en juegos. Puede llamar la atención que si bien en toda la bibliografía previa al trabajo de Brandt, Fischer y Harrenstein se habla sobre la velocidad de convergencia en función del tamaño del juego, los autores prefieren estudiarla en función del tamaño de representación en bits de los valores de las utilidades del juego. Este tipo

de resultados es en realidad más general. Observemos que un juego que tenga k acciones para un jugador necesitará, en cualquier codificación capaz de representar juegos bimatriciales finitos arbitrarios, $O(k)$ bits, ya que deberá codificar cada una de estas k acciones con al menos un bit. Por otro lado, a efectos del estudio de la convergencia del juego ficticio, un juego con conjuntos de acciones de tamaños menores a k pero que requiere $O(k)$ bits para ser representado, puede expandirse a uno con comportamiento equivalente de tamaño k . Esto lo mostraremos en los siguientes lemas:

Lema 4.4.0.1. Sea (A, B) un juego representable $O(k)$, de tamaño $n \times m$ con $n, m < k$, entonces existe un juego (A', B') de tamaño $k \times k$ tal que toda secuencia $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ es un proceso de juego ficticio simultaneo en (A, B) sí y solo sí lo es también en (A', B') .

Demostración. asd □

Lema 4.4.0.2. Sea (A, B) un juego representable $O(k)$, de tamaño $n \times m$ con $n, m < k$, entonces existe un juego (A', B') de tamaño $k \times k$ tal que toda secuencia $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ es un proceso de juego ficticio alternante en (A, B) sí y solo sí lo es también en (A', B') .

Veamos primero que para el caso de los juegos de suma constante simétricos, el teorema de estos autores efectivamente es expandible de forma bastante directa a la variante alternante.

Teorema 4.4.1. Existe un juego simétrico A representable en $O(k)$ bits y una secuencia de juego ficticio alternante $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$

En juegos de suma constante simétricos de dos jugadores, un proceso de juego ficticio alternante puede requerir una cantidad exponencial (en el tamaño de representación en bits de los valores de las utilidades del juego) de rondas antes de que un equilibrio sea jugado.

Teorema 4.4.2. En juegos de suma constante simétricos de dos jugadores, un proceso de juego ficticio alternante puede requerir una cantidad exponencial (en el tamaño de representación en bits de los valores de las utilidades del juego) de rondas antes de que un equilibrio sea jugado.

Demostración. Consideremos un juego en forma normal con la siguiente matriz de pagos:

.	a^1	a^2	a^3
a^1	0	-1	$-\epsilon$
a^2	1	0	$-\epsilon$
a^3	ϵ	ϵ	0

Si $\epsilon < 1$, vemos que (a^3, a^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario y sea $\epsilon = 2^{-k}$. Para estos valores, ϵ puede codificarse en $O(k)$ bits, mientras que las otras utilidades del juego son constantes, por lo que podemos afirmar que la representación del juego será también del orden de $O(k)$

Mi idea es demostrar estos expandiendo con las acciones con mínima ganancia y ver el proceso sigue igual porque no hay incentivo para jugar esas salvo empates.

Este párrafo y estos lemas. No estoy seguro aun de si es la mejor formulación o de si así aportan.

estos los tengo que re-escribir con los conceptos nuevos y de paso mas formal

en general, se le puede agregar más explicación coloquial a estos teoremas

estos los tengo que re-escribir con

bits. Por lo tanto, si probamos que un proceso de juego ficticio alternante puede requerir 2^k rondas antes de que se juegue (a^3, a^3) , el teorema estará demostrado.

Si el proceso de AFP comienza con el jugador fila jugando a^1 , entonces $x^1Q = (0, 1, 2^{-k})$ y por lo tanto el jugador columna elegirá a_2 .

Luego, en las siguientes $2^k - 1$ rondas tendremos que $Py^i = (-i + 1, 0, 2^{-k}i)$ y $x^{i+1}Q = (-2^{-k}i, 1 - 2^{-k}i, 2^{-k})$. Claramente, el jugador fila elegirá a^3 . Por su parte, como $1 - 2^{-k}i \geq 2^{-k}$, el jugador columna jugará a^2 en la ronda $i + 1$.

La siguiente tabla muestra como se desarrolla este proceso:

Round i	(a^i, a^i)	Py^i	$x^{i+1}Q$
0	-	-	$(0, 1, 2^{-k})$
1	(a^1, a^2)	$(0, 0, 2^{-k})$	$(-2^{-k}, 1 - 2^{-k}, 2^{-k})$
2	(a^3, a^2)	$(-1, 0, 2^{-k}2)$	$(-2^{-k}2, 1 - 2^{-k}2, 2^{-k})$
3	(a^3, a^2)	$(-2, 0, 2^{-k}3)$	$(-2^{-k}3, 1 - 2^{-k}3, 2^{-k})$
.	.	.	.
$2^k - 1$	(a^3, a^2)	$(-2^k + 3, 0, 2^{-k}(2^k - 1))$	$(-2^{-k}(2^k - 1), 1 - 2^{-k}(2^k - 1), 2^{-k})$
2^k	(a^3, a^2)	$(-2^k + 2, 0, 1)$	$(-1, 0, 2^{-k})$

Por lo tanto, la secuencia

$$(a^1, a^2), \underbrace{(a^3, a^2), \dots (a^3, a^2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cual no se juega ningún equilibrio. \square

Por su parte, la demostración para el caso de los juegos no degenerados de 2×3 es un poco menos directa y requiere plantear una ligera variante del juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein.

Teorema 4.4.3. *En juegos no degenerados de 2×3 , un proceso de juego ficticio alternante puede requerir una cantidad exponencial (en el tamaño de representación en bits de los valores de las utilidades del juego) de rondas antes de que un equilibrio sea jugado.*

Demostración. Consideremos un juego con la siguiente matriz de pagos:

.	b^1	b^2	b^3
a^1	$(1, 1)$	$(2, 2)$	$(0, 0)$
a^2	$(0, 0)$	$(2 + \epsilon, 2 + \epsilon)$	$(2 + 2\epsilon, 2 + 2\epsilon)$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (a^2, b^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, un proceso de juego ficticio alternante puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (a^2, b^3) . Al igual que en el teorema anterior, el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, por lo que esto demuestra el teorema.

Si el proceso de AFP comienza con el jugador fila jugando a^1 , entonces $x^1Q = (1, 2, 0)$ y por lo tanto el jugador columna elegirá a_2 .

Luego, en las siguientes $2^k - 1$ rondas tendremos que $Py^i = (2i, (2 + 2^{-k})i)$ y $x^{i+1}Q = (1, 2 + (2 + 2^{-k})i, (2 + 2^{-k+1})i)$. Claramente, el jugador fila elegirá a^2 . Por su parte, como $2 + (2 + 2^{-k})i \geq (2 + 2^{-k+1})i$, el jugador columna jugará b^3 en la ronda $i + 1$.

La siguiente tabla muestra como se desarrolla este proceso:

Round i	(a^i, b^i)	$x^{i+1}Q$
0	-	$(1, 2, 0)$
1	(a^1, b^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k}), (2 + 2^{-k+1}))$
2	(a^2, b^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k})2, (2 + 2^{-k+1})2)$
3	(a^2, b^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k})3, (2 + 2^{-k+1})3)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$2^k - 1$	(a^2, b^2)	$(1, 2^{k+1} + 3, 2^{k+1} + 2)$
2^k	(a^2, b^2)	

Por lo tanto, la secuencia

$$(a^1, b^2), \underbrace{(a^2, b^2), \dots, (a^2, b^2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cual no se juega ningún equilibrio.

□

El detalle de que el juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein no nos sirva para demostrar el teorema anterior no es para nada menor. En efecto, como veremos en el siguiente teorema, es un ejemplo de un juego en el un proceso de juego ficticio simultaneo puede requerir una cantidad de rondas exponenciales mientras que, toda secuencia de juego ficticio alternante convergerá rápidamente.

Teorema 4.4.4. *Existe un juego para el cuál un proceso de juego ficticio simultaneo puede requerir una cantidad exponencial (en el tamaño de representación en bits de los valores de las utilidades del juego) de rondas antes de que un equilibrio sea jugado, mientras que en todo proceso de juego ficticio alternado se jugará un equilibrio en una cantidad de rondas acotada por una constante.*

Demostración. Consideremos el juego con la siguiente matriz de pagos:

.	b^1	b^2	b^3
a^1	(1, 1)	(2, 2)	(0, 0)
a^2	(0, 0)	(2 + ϵ , 2 + ϵ)	(3, 3)

Al igual que en los teoremas, si $\epsilon < 1$, (a^2, b^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Veamos ahora el caso alternante. Existen dos posibles secuencias de juego ficticio alternante para este juego, dado que el jugador fila elegirá primero y el jugador columna reaccionará según esta decisión.

Si el jugador fila juega a^2 , el jugador columna responderá con b^3 , siendo este el equilibrio. Si el jugador fila juega a^1 , el jugador columna responderá con b^2 . Esto hará que el jugador fila juegue a^2 en la siguiente ronda por ser $Py^i =$, mientras que el jugador continuará fila continuará jugando b^2 . Esta situación se repetirá una ronda más, tras la cuál, la jugador columna se verá incentivado a jugar b^3 .

□

hay que completar esta prueba

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

Conclusiones y trabajo futuro.

Bibliografía

- [1] G. Brown. «Iterative solution of games by fictitious play». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* 13 (ene. de 1951).
- [2] J. Robinson. «An Iterative Method of Solving a Game». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 54 (sep. de 1951). DOI: 10.2307/1969530.
- [3] K. Miyasawa. «On the Convergence of Learning Processes in a 2x2 Non-Zero-Person Game». En: (oct. de 1961).
- [4] D. Monderer y A. Sela. «A 2x2 Game without the Fictitious Play Property». En: *Games and Economic Behavior* 14 (feb. de 1996), págs. 144-148. DOI: 10.1006/game.1996.0045.
- [5] L. Shapley. «Some Topics in Two-Person Games». En: *Annals of Mathematics Studies*. 52 (ene. de 1964).
- [6] D. Monderer y L. Shapley. «Fictitious Play Property for Games with Identical Interests». En: *Journal of Economic Theory* 68 (feb. de 1996), págs. 258-265. DOI: 10.1006/jeth.1996.0014.
- [7] D. Monderer y L. S. Shapley. «Potential Games». En: *Games and Economic Behavior* 14.1 (1996), págs. 124-143. ISSN: 0899-8256. DOI: <https://doi.org/10.1006/game.1996.0044>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825696900445>.
- [8] U. Berger. «Learning in games with strategic complementarities revisited». En: *Journal of Economic Theory* 143 (nov. de 2008), págs. 292-301. DOI: 10.1016/j.jet.2008.01.007.
- [9] A. Sela. «Fictitious play in ‘one-against-all’ multi-player games». En: *Economic Theory* 14 (nov. de 1999), págs. 635-651. DOI: 10.1007/s001990050345.
- [10] D. Monderer y A. Sela. *Fictitious play and- no-cycling conditions*. Sonderforschungsbereich 504 Publications 97-12. Sonderforschungsbereich 504, Universität Mannheim; Sonderforschungsbereich 504, University of Mannheim, jun. de 1997. URL: <https://ideas.repec.org/p/xrs/sfbmaa/97-12.html>.
- [11] U. Berger. «Fictitious play in 2xn games». En: (abr. de 2003).
- [12] R. Chu y G. Vreeswijk. «Extending fictitious play with pattern recognition». En: *CEUR Workshop Proceedings* 1113 (ene. de 2013), págs. 40-53.

- [13] A. Washburn. «A new kind of fictitious play». En: *Naval Research Logistics (NRL)* 48 (jun. de 2001), págs. 270-280. DOI: 10.1002/nav.7.
- [14] U. Berger. «Brown's original fictitious play». En: *Journal of Economic Theory* 135 (feb. de 2007), págs. 572-578. DOI: 10.1016/j.jet.2005.12.010.
- [15] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1963. DOI: 10.7249/R366.
- [16] G. Dantzig. «A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* (oct. de 2020), págs. 330-335.
- [17] S. I. Gass y P. M. Zafra. «Modified fictitious play for solving matrix games and linear-programming problems». En: *Computers & Operations Research* 22.9 (1995), págs. 893-903. ISSN: 0305-0548. DOI: [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(94\)00075-J](https://doi.org/10.1016/0305-0548(94)00075-J). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030505489400075J>.
- [18] T. III, M. Epelman y R. Smith. «A Fictitious Play Approach to Large-Scale Optimization». En: *Operations Research* 53 (jun. de 2005), págs. 477-489. DOI: 10.1287/opre.1040.0178.
- [19] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games*. Vol. 1-2. Addison-Wesley, 1959.
- [20] Y. Viossat y A. Zapechelnyuk. «No-regret Dynamics and Fictitious Play». En: *Journal of Economic Theory* 148 (jul. de 2012). DOI: 10.1016/j.jet.2012.07.003.
- [21] A. Jafari, A. Greenwald, D. Gondek y G. Ercal. «On No-Regret Learning, Fictitious Play, and Nash Equilibrium». En: (jul. de 2001).
- [22] C. Daskalakis y Q. Pan. «A Counter-Example to Karlin's Strong Conjecture for Fictitious Play». En: *Proceedings - Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS* (dic. de 2014). DOI: 10.1109/FOCS.2014.10.
- [23] F. Brandt, F. Fischer y P. Harrenstein. «On the Rate of Convergence of Fictitious Play». En: *Theory of Computing Systems* 53.1 (jul. de 2013), págs. 41-52. ISSN: 1433-0490. DOI: 10.1007/s00224-013-9460-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s00224-013-9460-5>.