Teorema 1. *En juegos de suma constante simétricos de dos jugadores, AFP puede requerir una cantidad exponencial de rondas (en el tamaño de representación del juego) antes de que un equilibrio sea jugado.*

Demostración. Consideremos un juego con la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{array}{c|ccc|} . & a^1 & a^2 & a^3 \\ \hline a^1 & 0 & \text{-1} & -\epsilon \\ a^2 & 1 & 0 & -\epsilon \\ a^3 & \epsilon & \epsilon & 0 \\ \hline \end{array}$$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (a^3, a^3) es el único equilibrio de Nash por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estados estrictamente dominados.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, AFP puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (a^3, a^3). Como el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, esto demuestra el teorema.

Si el proceso de AFP comienza con el jugador fia jugando a^1, entonces $x^1 Q = (0, 1, 2^{-k})$ y por lo tanto el jugador columna elegirá a_2.

Luego, en las siguentes $2^k - 1$ rondas tendremos que $Py^i = (-i + 1, 0, 2^{-k} i)$ y $x^{i+1} Q = (-2^{-k} i, 1 - 2^{-k} i, 2^{-k})$. Claramente, el jugador fila elegirá a^3. Por su parte, como $1 - 2^{-k} i \geq 2^{-k}$, el jugador columna jugará a^2 en la ronda $i + 1$.

La siguiente tabla muestra como se desarrolla este proceso:

. Round i	(a^i, a^i)	$x^{i+1} Q$
0	-	$(0, 1, 2^{-k})$
1	(a^1, a^2)	$(-2^{-k}, 1 - 2^{-k}, 2^{-k})$
2	(a^3, a^2)	$(-2^{-k} 2, 1 - 2^{-k} 2, 2^{-k})$
3	(a^3, a^2)	$(-2^{-k} 3, 1 - 2^{-k} 3, 2^{-k})$
	.	
	.	
	.	
2^k	(a^3, a^2)	$(-1, 0, 2^{-k})$

Por lo tanto, la secuencia

$$(a^1, a^2), \underbrace{(a^3, a^2), ...(a^3, a^2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje AFP válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en al cúal no se juega ningún equilibrio. $\square$

Teorema 2. *En juegos no degenerativos de 2×3, AFP puede requerir una cantidad exponencial de rondas (en el tamaño de representación del juego) antes de que un equilibrio sea jugado.*

Demostración. Consideremos un juego con la siguiente matriz de pagos:

.	b^1	b^2	b^3
a^1	$(1,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$
a^2	$(0,0)$	$(2+\epsilon, 2+\epsilon)$	$(2+2\epsilon, 2+2\epsilon)$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (a^2, a^3) es el único equilibrio de Nash por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estados estrictamente dominados.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, AFP puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (a^2, a^3). Como el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, esto demuestra el teorema.

Si el proceso de AFP comienza con el jugador fila jugando a^1, entonces $x^1Q = (1, 2, 0)$ y por lo tanto el jugador columna elegirá a_2.

Luego, en las siguentes $2^k - 1$ rondas tendremos que $Py^i = (2i, (2 + 2^{-k})i)$ y $x^{i+1}Q = (1, 2 + (2 + 2^{-k})i, (2 + 2^{-k+1})i)$. Claramente, el jugador fila elegirá a^2. Por su parte, como $2 + (2+2^{-k})i \geq (2+2^{-k+1})i$, el jugador columna jugará a^3 en la ronda $i + 1$.

La siguiente tabla muestra como se desarrolla este proceso:

. Round i	(a^i, a^i)	$x^{i+1}Q$
0	-	$(1, 2, 0)$
1	(a^1, a^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k}), (2 + 2^{-k+1}))$
2	(a^3, a^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k})2, (2 + 2^{-k+1})2)$
3	(a^3, a^2)	$(1, 2 + (2 + 2^{-k})3, (2 + 2^{-k+1})3)$
	.	
	.	
	.	
$2^k - 1$	(a^3, a^2)	$(1, 2^{k+1} + 3, 2^{k+1} + 2)$
2^k	(a^3, a^2)	

Por lo tanto, la secuencia

$$(a^1, a^2), \underbrace{(a^2, a^2), ...(a^2, a^2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje AFP válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en al cúal no se juega ningún equilibrio.

$\square$