Universidad Nacional de Rosario

Tesina de grado
para la obtención del grado de
Licenciado en Ciencias de la Computación

Propiedades de Secuencias de Juego Ficticio

Autor:
Federico Badaloni

Director:
Ariel Arbiser

Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe, Argentina

15 de junio de 2021

Resumen

El resumen de tu tesina.

esto sobre el final

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Creada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern, la teoría de juegos surgió en la década de 1940 motivada en parte por la Segunda Guerra Mundial. Estudia una variedad de situaciones en las que diversos agentes interactúan y toman decisiones estratégicas con el fin de obtener beneficios con interdependencias. Para ello, la teoría estudia los comportamientos, la posibilidad de maximizar esas ganancias según variados criterios y los casos de equilibrio, a la vez que formula y analiza modelos.

1.1. Objetivos

Intro

Esto

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Convergencia del Juego Ficticio

El proceso de aprendizaje de juego ficticio fue propuesto por primera vez por Brown en 1951 [1] como un algoritmo para encontrar el valor de un juego de suma cero finito. Hacia finales del mismo año, Robinson [2] demostró que el proceso converge para todos los juegos de esta clase.

Desde entonces, se han publicado numerosos trabajos analizando la convergencia del juego ficticio en juegos que no sean de suma cero. Miyazawa [3] demostró que esta propiedad vale para todos los juegos de 2×2 pero, su demostración depende de la incorporación de una regla de desempate particular sin la cual, Monderer y Sela [4] demostraron que no se cumple. Por su parte, Shapley [5] mostró un ejemplo de un juego de 3×3 para el cuál no es válida.

Además, la convergencia del juego ficticio fue demostrada para juegos de intereses idénticos [6], juegos potenciales con pesos [7], juegos no degenerados con estrategias complementarias y ganancias disminuyentes [8] y ciertas clases de juegos compuestos [9].

Por otro lado, se han estudiado muchas variantes del juego ficticio. Una de las mas analizadas es el juego ficticio continuo, definida originalmente en la publicación original de Brown [1], aunque este no la exploró en detalle. Monderer y Sela [10] demostraron que esta converge para juegos no degenerados de 2×3 y Berger luego extendió este resultado a $2 \times N$ [11] y aportó la convergencia de los juegos de potencial ordinal y quasi-supermodulares con ganancias disminuyentes. Otros ejemplos de variantes propuestas pueden verse en [12] y [13].

quizas detallar estas ultimas

Una variante de particular interes este trabajo es el juego ficticio con actualización alternante de creencias. Berger [14] planteó que esta versión alternante es en realidad la original que definió Brown en [14] y que si bien el proceso con actualización simultanea de creencias que usan todos los investigadores de teoría de juegos en la actualidad puede resultar mas intuitivo, es también menos potente y da como ejemplo la clase de los juegos no degenerados con potencial ordinal para la cuál la version alternante converge, pero la simultanea no.

exapndir con otros trabajos que mencionen AFP o al menos decir que hay pocos

2.2. Velocidad de Convergencia del Juego Ficticio

Los trabajos mencionados hasta ahora se enfocan en el estudio de la eventual convergencia global a un equilibrio de Nash de las distintos clases de juegos. Otra enfoque de investigación es la velocidad de convergencia en los casos en la que esta ocurre. El interés por este se debe en gran medida a la equivalencia entre los juegos de suma cero y los problemas de programación lineal, demostrada por Dantzig, Gale y Von Neumann [15] [16]. En 1994, Gass y Zafra [17] planteaban que hasta la fecha, lo más eficiente para resolver un juego de suma cero era plantearlo como un problema de programación lineal y aplicar el método simplex. En el mismo artículo plantean un meotodo mixto con simplex y una variante de juego ficticio y concluyen que permite acelerar la convergencia en ciertos problemas de programación lineal. Lambert y Smith [18] plantean también una variante (con muestreo) y discuten su eficiencia en problemas de optimización a gran escala.

Vale la pena mencionar en este punto lo que en la literatura del tema se conoce como la Conjetura de Karlin. En 1959, Samuel Karlin [19] conjeturó que la velocidad de convergencia del juego ficticio es $O(t^{-\frac{1}{2}})$ para todos los juegos. La idea de proviene de que esta cota superior se corresponde con la de la velocidad de convergencia de otro método de aprendizaje muy relacionado con el juego ficticio, las dinámicas de no-arrepentimiento [20] [21]. Daskalakis y Pan [22] probaron falsa una versión fuerte de la Conjetura de Karlin (usando una regla de desempate arbitraria) pero dejaron abierta la pregunta sobre la versión general, que ellos llaman débil, de la conjetura.

La utilidad del juego ficticio como método para computar equilibrios de Nash fue puesta en duda cuándo Brandt, Fischer y Harrenstein [23] demostraron que para los juegos de suma cero, los no degenerados de $2 \times N$ y los potenciales (tres de las clases mas estudiadas), existen casos en los que el proceso de juego ficticio puede requerir una cantidad de rondas exponencial en el tamaño de representación en bits de las utilidades del juego antes de que se juegue algún equilibrio. En esta publicación mencionan que su resultado puede ser extendido al juego ficticio alternante pero no demuestran esto.

casos de uso (poker IA segun bramdt, redes de trafico (en pattern matching?) y alguno mas)

este EdA hay que revisarlo de nuevo cuando termine la intro y los conceptos previos para ver si hay que cambiar algun termino

Capítulo 3

Conceptos Previos

3.1. Juegos Bimatriciales y Equilibrios de Nash

Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, es decir un juego de dos jugadores finito en el que el jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ y el jugador 2 (jugador columna) tiene acciones $j \in M = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$. A, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son las matrices de pago de los jugadores 1 y 2. Si el jugador 1 elige la acción i y el jugador 2 elige la acción j, la ganancia del jugador 1 será $a_{i,j}$ y la ganancia del jugador 2 será $b_{i,j}$. Describiremos los juegos en forma bimatricial con una matriz de pares como la siguiente:

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\
\hline
i_1 & (a_{1,1}, b_{1,1}) & (a_{1,2}, b_{1,2}) & \cdots & (a_{1,2}, b_{1,m}) \\
i_2 & (a_{2,1}, b_{2,1}) & (a_{2,2}, b_{2,2}) & \cdots & (a_{2,m}, b_{2,m}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
i_n & (a_{n,1}, b_{n,1}) & (a_{n,2}, b_{n,2}) & \cdots & (a_{n,m}, b_{n,m}) \\
\hline
\end{array}
$$

Notaremos con $\Delta(X)$ al espacio de probabilidades sobre el conjunto X y llamaremos **estrategias mixtas** a los vectores de la forma $x \in \Delta(N)$ y $y \in \Delta(M)$. A las estrategias que asignan probabilidad 1 a una acción y 0 a todas las otras, las llamaremos **estrategias puras**. Notaremos con $\widetilde{h}$ a la estrategia pura correspondiente a la acción h.

La ganancia esperada del jugador 1 al jugar la acción i contra la estrategia mixta y del jugador 2 será $\widetilde{i}Ay$. Análogamente, la ganancia esperada del jugador 2 al jugar la acción j contra la estrategia mixta x del jugador 2 será $xB\widetilde{j}$. Si ambos jugadores juegan las estrategias mixtas x e y respectivamente, sus ganancias esperadas pueden calcularse como xAy para el jugador 1 e yB^tx para el jugador 2.

Si y es una estrategia mixta del jugador 2, definimos el **conjunto de mejores respuestas** a y como $BR_1(y) = argmax_{i \in N}\{\widetilde{i}Ay\}$ y, análogamente, si x es una estrategia mixta del jugador 2, el conjunto de mejores respuestas a x será $BR_2(x) = argmax_{j \in M}\{xB\widetilde{j}\}$. Es decir, son los conjuntos de índices que maximizan las ganancias esperadas contra una estrategia dada.

Este concepto puede expandirse de índices a estrategias mixtas. Si x es una estrategia mixta del jugador 1 e y es una estrategia mixta del jugador 2, decimos que $x \in BR_1(y)$ si $\forall i \in N, x_i > 0 \implies i \in BR_1(y)$.

Llamaremos **equilibrio de Nash** a todo perfil de estrategias mixtas $(x^*, y^*) \in \Delta(A) \times \Delta(B)$ tal que $x^* \in BR_1(y^*)$ e $y^* \in BR_2(x^*)$. En el caso particular de que las estrategias sean puras, al equilibrio lo llamaremos también **equilibrio de Nash puro**.

3.2. Categorías de Juegos

Es útil clasificar a los juegos en distintas categorías según sus propiedades. Presentamos a continuación algunas de las categorías de juegos mas estudiadas en la literatura sobre juego ficticio.

Definición 3.2.1. *Un juego (A, B) de tamaño $n \times m$ es un **juego de suma cero** si $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = -b_{ij}$. Para estos casos, nos referiremos al juego usando solo la matriz A.*

Los juegos de suma cero son una de las categorías más estudiadas en teoría de juegos. Representan los juegos en los que un jugador siempre gana tanto como pierde el otro. Uno de los teoremas fundacionales del área, conocido como el Teorema de Minimax [24] establece que todos poseen al menos un equilibrio de Nash puro y a la ganancia para el jugador fila en un equilibrio la llamamos **valor del juego** (pues es la misma en todos los equilibrios).

Definición 3.2.2. *Llamamos **degenerado** a un juego bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- *Existen $i, i' \in N$ y $j \in M$ con $i \neq i$' tales que $a_{ij} = a_{i'j}$*
- *Existen $j, j' \in M$ e $i \in N$ con $j \neq j$' tales que $b_{ij} = b_{ij'}$*

*En caso contrario, decimos que el juego es **no degenerado**.*

Los juegos no degenerados son de particular interés porque capturan el concepto de un juego en el que, para cada acción del rival, no existen dos acciones con el mismo pago. Por lo tanto, el conjunto de mejor respuesta contra una acción dada es siempre unitario.

Las siguientes definiciones corresponden a otras dos categorías de juegos que han sido muy estudiados por sus propiedades de convergencia en los procesos de juego ficticio. Nos serán útiles en la sección 4.4 cuando discutamos los resultados sobre su velocidad de convergencia.

Definición 3.2.3. *Un juego bimatricial (A, B) de tamaño $n \times n$ es un **juego simétrico** si $\forall i, j \in N : a_{ij} = -b_{ji}$*

Definición 3.2.4. *Un juego (A, B) de tamaño $n \times m$ es un **juego de intereses idénticos** si $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = b_{ij}$. En este caso también nos referiremos al juego usando solo la matriz A.*

aca pueden ir comentarios sobre cuales de los juegos ejemplo caen en cuales categorías

3.3. Juego Ficticio

El algoritmo de juego ficticio consiste en una repetición iterada de un juego en la que en cada instancia los jugadores juegan una jugada que sea mejor respuesta a al historial de jugadas de su oponente, tomada como una distribución empírica. En esta sección presentaremos dos definiciones formales que podemos encontrar en la literatura sobre juego ficticio, a las cuales incorporaremos el concepto de **reglas de desempate**. Este concepto nos permitirá precisar las definiciones, removiendo una ambigüedad que ocurre en los casos en los que los conjuntos de mejor respuesta no son unitarios.

Definición 3.3.1. *Llamamos* ***reglas de desempate*** *de un juego ficticio a un par de funciones $d_1 : \mathbb{P}^+(N) \to N$ y $d_2 : \mathbb{P}^+(M) \to M$ que a cada subconjunto de acciones de un jugador en un eventual empate le asignan la acción que elegirá el proceso, cumpliendo la condición de Hauthakker:*

$$\forall N_a, N_b \in P^+(N),\ \textit{si } N_b \subseteq N_a, i \in N_b \textit{ y } d_1(N_a) = i \textit{ entonces } d_1(N_b) = i$$

$$\forall M_a, M_b \in P^+(M),\ \textit{si } M_b \subseteq M_a, j \in M_b \textit{ y } d_2(M_a) = j \textit{ entonces } d_2(M_b) = j$$

Algunos autores como Berger, Monderer, Sela, Shapley, Daskalakis y Pan [14] [10] [4] [6] [22] utilizan una definición del estilo de la siguiente, que resulta cómoda para estudiar convergencia y es la que veremos primero. Presentaremos dos variantes, correspondientes a la versión simultanea y a la alternante.

Definición 3.3.2. *Sean (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$ y una secuencia (i^τ, j^τ) con $i^\tau \in N$, $j^\tau \in M$ para todo $\tau \in \mathbb{N}$. Si d_1 y d_2 son reglas de desempate y tenemos unas secuencias de creencias x^τ e y^τ tales que para todo $\tau \in \mathbb{N}$:*

$$x^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}}{\tau}$$
$$y^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}}{\tau}$$

Entonces:

- *(i^τ, j^τ) es una secuencia de juego ficticio simultáneo si (i^1, j^1) es un elemento arbitrario de $N \times M$ y para todo $\tau \in \mathbb{N}$ se cumplen $i^{\tau+1} = d_1(BR_1(y^\tau))$ y $j^{\tau+1} = d_2(BR_2(x^\tau))$.*
- *(i^τ, j^τ) es una secuencia de juego ficticio alternante si i^1 es un elemento arbitrario de N y para todo $\tau \in \mathbb{N}$ se cumplen $i^{\tau+1} = d_1(BR_1(y^\tau))$ y $j^\tau = d_2(BR_2(x^\tau))$.*

Vale la pena hacer algunos comentarios sobre esta primera definición. Para empezar, observando las secuencias de creencias, x^τ e y^τ, veremos que se componen de sumas de vectores unitarios, pero normalizados por el tiempo, por lo que son estrategias mixtas que se corresponden con la distribución empírica de las acciones de cada jugador. Por otro lado, como los elementos iniciales son arbitrarios, un mismo juego puede tener tantos procesos de juego ficticio válidos como jugadas iniciales existan.

Las definiciones que usan autores previamente mencionados establecen una condición mas débil sobre las jugadas, pidiendo solo que pertenezcan al conjunto de menor respuesta a la estrategia mixta percibida. Esto implica, como mencionamos recientemente, que aparecen ambigüedades en los casos en los que el conjunto de menor respuesta no es unitario. Una forma de eliminar esta ambigüedad fue centrarse en el estudio de los juegos no degenerados [14]. En este trabajo, tomamos el enfoque alternativo de eliminar la ambigüedad introduciendo las reglas de desempate.

Sobre la variante alternante vale aclarar que efectivamente, el jugador columna toma su decisión incorporando en sus creencias la información sobre qué jugó el jugador fila en la ronda actual, si bien esto puede resultar poco intuitivo ya que normalmente en teoría de juegos se representa jugadores eligiendo simultánea e independientemente. Otra observación relevante es que su acción inicial no es arbitraria sino que ya se encuentra fijada por la mejor respuesta o mejores respuestas a la acción del jugador fila.

Diremos que un proceso de juego ficticio (simultaneo o alternante) converge de forma pura en la iteración k si (i^k, j^k) es un equilibrio de Nash puro. En el capítulo 4 veremos que cuando esto ocurre, (i^k, j^k) se repetirá infinitamente desde este punto en el tiempo. Diremos también que el proceso converge de forma mixta si existe un equilibrio de Nash mixto tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x^* - x^k| < \epsilon$ y $|y^* - y^k| < \epsilon$.

Alternativamente, Brandt, Fischer y Harrenstein utilizan una definición similar a la de Robinson [2] pero simplificada. Es más cómoda para estudiar velocidades de convergencia en juegos que se sabe que convergen. A continuación, presentamos también esta definición.

Definición 3.3.3. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$:*

- *Una secuencia de juego ficticio simultaneo en (A, B) es una secuencia $(x^0, y^0), (x^1, y^1), (x^2, y^2), \ldots$ de pares de vectores no negativos $(x^i, y^i) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ tal que:*

$$x^0 = 0, y^0 = 0$$
$$x^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{i} \textit{ donde } i = d_1(argmax_{i \in N}\{\widetilde{i} A y^\tau\})$$
$$y^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{j} \textit{ donde } j = d_2(argmax_{j \in M}\{x^\tau B \widetilde{j}\})$$

- *Una secuencia de juego ficticio alternante en (A, B) es una secuencia $(x^0, y^0), (x^1, y^1), (x^2, y^2), \ldots$ de pares de vectores no negativos $(x^i, y^i) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ tal que:*

$$x^0 = 0, y^0 = 0$$
$$x^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{i} \textit{ donde } i = d_1(argmax_{i \in N}\{\widetilde{i} A y^\tau\})$$
$$y^{\tau+1} = y^\tau + \widetilde{j} \textit{ donde } j = d_2(argmax_{j \in M}\{x^\tau B \widetilde{j}\})$$

Como podemos observar, la principal diferencia con la primera definición es que mientras en aquella se define una secuencia de jugadas que cumple una condición contra

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	(1, 1)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)
2	(2, 2)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)
3	(2, 2)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)
4	(2, 2)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)
5	(2, 2)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)

Tabla 3.1: Proceso de juego ficticio simultaneo sobre el Dilema del Prisionero

un historial de creencias sobre la estrategia mixta del otro jugador, en esta la secuencia es de pares de contadores de jugadas (sin normalizar, por lo que no son estrategias mixtas), que cumplen en cada iteración una condición de maximizar el producto de la matriz de pagos contra el contador del rival (sin ser este tampoco la ganancia esperada por no estar el resultado normalizado). En el capítulo 4 se demostrará que estas dos definiciones son equivalentes.

3.4. Ejemplos

Veamos como se aplican todos estos conceptos a algunos juegos clásicos de la literatura. Comenzaremos por el Dilema de los Prisioneros:

$$\begin{array}{c|cc|} & j_1 & j_2 \\ \cline{2-3} i_1 & (2,2) & (0,3) \\ i_2 & (3,0) & (1,1) \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Este juego es muy estudiado por su propiedad de que si bien la mayor ganancia para ambos jugadores se encuentra en que se juegue el perfil (i_1, j_1), su único equilibrio de Nash puro es el perfil (i_2, j_2). En la tabla 3.1 podemos observar como se desarrolla un proceso de juego ficticio simultáneo sobre este juego, comenzando desde (i_1, j_1). Para las primeras 5 iteraciones, se muestra el perfil jugado, cómo se actualizan las creencias sobre la estrategia de los jugadores y las consecuentes ganancias esperadas de cada jugador para sus jugadas a lo largo de la secuencia.

Como vemos, si ambos jugadores empiezan cooperando, en la segunda ronda la mejor respuesta individualmente para cada uno será desviarse de este perfil, jugando respectivamente i_2 y j_2. Las creencias, que como mencionamos previamente son observaciones empíricas de una estrategia mixta supuesta según el historial del oponente, ahora indican que cada jugador juega cada una de las acciones con probabilidad $0,5$. Como veremos en la sección 4.3, dado que (i_2, j_2) es un equilibrio de Nash puro, podemos asegurar que se jugará infinitamente.

La tabla 3.2 muestra el mismo juego pero en un proceso de juego ficticio alternante. Como vemos, ya en la primera iteración el jugador 2 reacciona a i_1 jugando j_2 como

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	(1, 2)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
2	(2, 2)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
3	(2, 2)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
4	(2, 2)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
5	(2, 2)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)

Tabla 3.2: Proceso de juego ficticio alternante sobre el Dilema de los Prisioneros

mejor respuesta. El proceso continúa de forma similar, aunque el jugador fila cree que el jugador columna está siguiendo una estrategia pura.

Pasando al siguiente ejemplo, vemos en esta matriz el clásico juego de Piedra, Papel o Tijera. Dado que es un juego de suma cero, lo representamos solamente con las ganancias del jugador 1. Además, para facilitar la lectura, nombramos las jugadas con R, P y S (por las iniciales en inglés).

$$\begin{array}{c|ccc|} & j_R & j_P & j_S \\ \hline i_R & 0 & -1 & 1 \\ i_P & 1 & 0 & -1 \\ i_S & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

En las tablas 3.3 y 3.4 respectivamente podemos ver respectivamente un desarrollo de juego ficticio simultáneo y alternante. Para el caso simultáneo, el proceso comienza con el jugador fila jugando piedra y el columna jugando papel. Inmediatamente el jugador fila cambia su estrategia a jugar tijera, mientras el columna se mantiene en papel porque lo proyecta exitoso. En la tercera iteración el jugador 2, esperando que el jugador 1 juegue piedra o tijera con iguales probabilidades pero descartando que pueda jugar papel, maximizará su ganancia esperada jugando piedra. Estos cambios continuaran infinitamente pero lentamente, las creencias convergen al único equilibrio de Nash mixto de esto juego, que consiste en que cada jugador juegue cada acción con $\frac{1}{3}$ de probabilidad.

ajustar tamaño de estas tablas

El caso alternante es similar, aunque con una clara ventaja del jugador columna, que comienza ya reaccionando a la piedra del jugador fila con papel. Esta ventaja sin embargo va disminuyendo con el paso de las iteraciones y eventualmente también converge en creencias.

Veamos por último un ejemplo bien conocido en la literatura de juego ficticio.

$$\begin{array}{c|ccc|} & j_1 & j_2 & j_3 \\ \hline i_1 & (1,0) & (0,-1) & (0,1) \\ i_2 & (0,1) & (1,0) & (0,-1) \\ i_3 & (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ \hline \end{array}$$

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_R,\ j_P)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 1,00, −1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00
2	$(i_S,\ j_P)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,00, −0,50)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00
3	$(i_S,\ j_R)$	(0,33, 0,00, 0,67)	(0,67, −0,33, −0,33)	(0,33, 0,67, 0,00)	(−0,67, 0,33, 0,33
4	$(i_P,\ j_R)$	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, −0,25, 0,00)	(0,50, 0,50, 0,00)	(−0,50, 0,50, 0,00
5	$(i_P,\ j_R)$	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,00, −0,20, 0,20)	(0,60, 0,40, 0,00)	(−0,40, 0,60, −0,2
6	$(i_P,\ j_S)$	(0,17, 0,50, 0,33)	(−0,17, −0,17, 0,33)	(0,50, 0,33, 0,17)	(−0,17, 0,33, −0,1
7	$(i_P,\ j_S)$	(0,14, 0,57, 0,29)	(−0,29, −0,14, 0,43)	(0,43, 0,29, 0,29)	(0,00, 0,14, −0,14
8	$(i_P,\ j_S)$	(0,12, 0,62, 0,25)	(−0,38, −0,12, 0,50)	(0,38, 0,25, 0,38)	(0,12, 0,00, −0,12
9	$(i_R,\ j_S)$	(0,22, 0,56, 0,22)	(−0,33, 0,00, 0,33)	(0,33, 0,22, 0,44)	(0,22, −0,11, −0,1
10	$(i_R,\ j_S)$	(0,30, 0,50, 0,20)	(−0,30, 0,10, 0,20)	(0,30, 0,20, 0,50)	(0,30, −0,20, −0,1

Tabla 3.3: Proceso de juego ficticio simultaneo sobre Piedra, Papel o Tijera

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_R,\ j_P)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 1,00, −1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00
2	$(i_S,\ j_R)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,00, −0,50)	(0,50, 0,50, 0,00)	(−0,50, 0,50, 0,00
3	$(i_P,\ j_R)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,00, 0,00, 0,00)	(0,67, 0,33, 0,00)	(−0,33, 0,67, −0,3
4	$(i_P,\ j_S)$	(0,25, 0,50, 0,25)	(−0,25, 0,00, 0,25)	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,00, 0,25, −0,25
5	$(i_P,\ j_S)$	(0,20, 0,60, 0,20)	(−0,40, 0,00, 0,40)	(0,40, 0,20, 0,40)	(0,20, 0,00, −0,20
6	$(i_R,\ j_S)$	(0,33, 0,50, 0,17)	(−0,33, 0,17, 0,17)	(0,33, 0,17, 0,50)	(0,33, −0,17, −0,1
7	$(i_R,\ j_P)$	(0,43, 0,43, 0,14)	(−0,29, 0,29, 0,00)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,14, −0,14, 0,00
8	$(i_R,\ j_P)$	(0,50, 0,38, 0,12)	(−0,25, 0,38, −0,12)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,00, −0,12, 0,12
9	$(i_S,\ j_P)$	(0,44, 0,33, 0,22)	(−0,11, 0,22, −0,11)	(0,22, 0,44, 0,33)	(−0,11, −0,11, 0,2
10	$(i_S,\ j_P)$	(0,40, 0,30, 0,30)	(0,00, 0,10, −0,10)	(0,20, 0,50, 0,30)	(−0,20, −0,10, 0,3

Tabla 3.4: Proceso de juego ficticio alternante sobre Piedra, Papel o Tijera

Este el juego de Shapley [5]. Es muy conocido por por ser el primer ejemplo publicado de un juego que no converge, de forma pura ni mixta, tanto para juego ficticio simultáneo como alternante. En las tablas 3.5 y 3.6 vemos como se desarrollan estos procesos.

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_1,\ j_2)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(0,00, 1,00, 0,00)
2	$(i_2,\ j_3)$	(0,50, 0,50, 0,00)	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)
3	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,67, 0,00)	(0,67, 0,00, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
4	$(i_1,\ j_1)$	(0,50, 0,50, 0,00)	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,50, 0,25, 0,25)
5	$(i_1,\ j_1)$	(0,60, 0,40, 0,00)	(0,40, 0,00, 0,60)	(0,60, 0,20, 0,20)	(0,60, 0,20, 0,20)
6	$(i_1,\ j_3)$	(0,67, 0,33, 0,00)	(0,33, 0,00, 0,67)	(0,50, 0,17, 0,33)	(0,50, 0,17, 0,33)
7	$(i_1,\ j_3)$	(0,71, 0,29, 0,00)	(0,29, 0,00, 0,71)	(0,43, 0,14, 0,43)	(0,43, 0,14, 0,43)
8	$(i_1,\ j_3)$	(0,75, 0,25, 0,00)	(0,25, 0,00, 0,75)	(0,38, 0,12, 0,50)	(0,38, 0,12, 0,50)
9	$(i_3,\ j_3)$	(0,67, 0,22, 0,11)	(0,22, 0,11, 0,67)	(0,33, 0,11, 0,56)	(0,33, 0,11, 0,56)
10	$(i_3,\ j_3)$	(0,60, 0,20, 0,20)	(0,20, 0,20, 0,60)	(0,30, 0,10, 0,60)	(0,30, 0,10, 0,60)

Tabla 3.5: Proceso de juego ficticio simultaneo en el ejemplo de Shapley, comenzando por (i_1, j_2).

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_1,\ j_3)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 0,00, 1,00)
2	$(i_3,\ j_2)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)
3	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
4	$(i_1,\ j_3)$	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, 0,25, 0,50)
5	$(i_3,\ j_2)$	(0,40, 0,20, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)
6	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
7	$(i_1,\ j_3)$	(0,43, 0,29, 0,29)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,29, 0,29, 0,43)
8	$(i_3,\ j_2)$	(0,38, 0,25, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)
9	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
10	$(i_1,\ j_3)$	(0,40, 0,30, 0,30)	(0,30, 0,30, 0,40)	(0,30, 0,30, 0,40)	(0,30, 0,30, 0,40)

Tabla 3.6: Proceso de juego ficticio alternante en el ejemplo de Shapley, comenzando por i_1.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Equivalencia de las distintas definiciones

Como mencionamos en la sección 3.3, existen dos formas de definir el juego ficticio entre los distintos autores de la literatura. Ambas simplifican de distintas formas la definición original de Brown y si bien son similares, su equivalencia no es inmediatamente evidente, por lo que uno podría dudar de si un teorema expresado para una de las definiciones es válido con la otra. Por lo tanto, presentamos a continuación dos lemas sobre esta equivalencia, para el caso simultáneo y alternante respectivamente. La idea será probar que los historiales de la definición 3.3.3 suman en cada iteración la estrategia pura correspondiente a la acción elegida por la definición 3.3.2. Comenzamos con el caso simultáneo.

Lema 4.1.1. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, $(\widetilde{i^\tau}, \widetilde{j^\tau})_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultáneo (según la definición 3.3.2) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultáneo (según la definición 3.3.3), tales que $p^1 = \widetilde{i^1}$, $q^1 = \widetilde{j^1}$ y ambas usan la misma regla de desempate. Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, $\forall \tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre τ.

Para $\tau = 1$, tenemos $p^1 = \widetilde{i^1} = \sum_{s=1}^{1} \widetilde{i^s}$ y $q^1 = \widetilde{j^1} = \sum_{s=1}^{1} \widetilde{j^s}$.

Veamos ahora el caso de un $\tau = k > 1$, suponiendo que $p^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s}$ y $q^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}$. Por la definición 3.3.3, $p^k = p^{k-1} + \widetilde{i}$ donde $i = d_1(argmax_{i\in N}\{\widetilde{i}Ap^{k-1}\})$. Pero también sabemos, por la definición 3.3.2 que $i^k \in BR_1(y^{k-1}) = BR_1(\frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}}{k-1}) =$

$argmax_{i\in N}\{A\frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k-1})\}$. Es decir que i^k es el índice de una componente máxima de $A\frac{q^{k-1}}{k-1}$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, podemos afirmar que también es una componente máxima de Aq^{k-1}. Incluso si hubiera otras componentes máximas, estamos usando en ambos procesos la misma regla de desempate. Luego, $p^k = p^{k-1} + \widetilde{i^k} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{i^s} + \widetilde{i^k} = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}$. Análogamente, $q^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{j^s}$. □

En el caso alternante, la jugada del jugador columna ya no es análoga a la del jugador fila, y el análisis es un poco mas complejo.

Lema 4.1.2. *Sea (A,B) un juego en forma bimatricial de $n\times m$, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definición 3.3.2) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definición 3.3.3), tales que $p^1 = \widetilde{i^1}$ y ambas usan la misma regla de desempate. Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, para todo $\tau\in\mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{j^s}$$

Demostración. Nuevamente, procederemos por inducción sobre τ.

Para $\tau = 1$, sabemos que $p^1 = \widetilde{i^1} = \sum_{s=1}^{1}\widetilde{i^s}$. Por la definición 3.3.3, $q^1 = q^0 + \widetilde{j}$ donde q^0 es el vector nulo y j es el índice de una componente máxima de $p^1B = \widetilde{i^1}B$ y, por la definición 3.3.2, sabemos que $j^1 \in BR_2(x^1) = BR_2(\frac{\sum_{s=1}^{1}\widetilde{i^s}}{\tau}) = BR_2(i^1) = \{j \in N : (i^1B)_j = \max_{j'\in M}(i^1B)_{j'}\}$. Es decir, j^1 es el índice de una componente máxima de i^1B. Luego, $q^1 = \widetilde{j^1} = \sum_{s=1}^{1}\widetilde{j^s}$.

Veamos ahora el caso de $\tau = k > 1$, suponiendo que $p^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{i^s}$ y $q^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}$. Podemos afirmar, con el mismo argumento que en el caso inductivo del lema 4.1.1, que $p^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}$. Por otro lado, $q^k = y^k + \widetilde{j}$ donde j es el índice de una componente máxima de $p^kB = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}B$. Sabemos además, por la definición 3.3.2, que $j^k \in BR_2(x^k) = BR_2(\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}) = \{j \in N : (\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}B)_j = \max_{j'\in M}(\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}B)_{j'}\}$. Es decir que j^k es el índice de una componente máxima de $\frac{p^k}{k}B$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, podemos afirmar que también es una componente máxima de p^kB. Como ambos procesos desempatan igual, entonces que $q^k = q^{k-1} + j^k = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s} + j^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{j^s}$.

□

4.2. Preservación del Juego Ficticio

En esta sección estudiaremos cómo las transformaciones a un juego afectan las secuencias de juego ficticio sobre el mismo. Esto nos resulta de interés porque más adelante nos permitirá encarar con más claridad el estudio de la velocidad de convergencia del algoritmo. También, razonar sobre esto nos permite entender mejor los resultados sobre convergencia de la literatura.

Claramente, transformaciones que preserven las relaciones de orden de los pagos de las acciones en juegos del mismo tamaño (como escalar todos los pagos por un mismo factor o sumarle a todos una constante) preservarán las secuencias de juego ficticio.

Pero veamos qué pasa cuándo cambia el tamaño del juego. La motivación para esto es que, en general, los investigadores de teoría de juegos buscan dos tipos de resultados de convergencia sobre juego ficticio. Por la positiva, clases de juegos de tamaño lo ms grande posible (o incluso mejor, tamaño arbitrario) para los que toda secuencia converja. Por la negativa, contra-ejemplos de tamaño tan pequeño como sea posible que no converjan. Esto se debe a que en estos estudios se entiende implícitamente que un contra-ejemplo puede ser expandido a un juego de tamaño más grande que presente la misma secuencia de juego ficticio y por tanto todos los juegos de ese tamaño o mayor ya presentan casos que no convergen.

En los siguientes lemas, demostraremos esto para algunas de las clases de juegos más estudiadas en la literatura. Vale la pena aclarar que si bien podríamos demostrar un solo lema general que afirme que todo juego puede expandirse conservando las secuencias de juego ficticio, este resultado no nos sería útil, ya que es importante que la expansión conserve las propiedades que definen a la clase de juegos en cuestión.

Lema 4.2.1. *Sea A un juego de suma cero de tamaño n, existe un juego de suma cero A' de tamaño $n+1$ tal que toda secuencia $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ de juego ficticio (secuencial o alternante) en A lo es también en A'.*

Demostración. Definimos el juego A' como

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & max_{j\in N} a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & max_{j\in N} a_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & max_{j\in N} a_{n,j} \\ min_{i\in N} a_{i,1} & min_{i\in N} a_{i,2} & \cdots & min_{i\in N} a_{i,n} & 0 \end{pmatrix}$$

cambiar esto a las matrices nuevas

Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio secuencial sobre A, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$. En la iteración τ, sabemos que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A. Como el pago de $n+1$ para el jugador 1 es siempre el mínimo de la columna, para cualquier acción j del jugador 2 tendremos que $a_{i^\tau,j} > a_{n+1,j}$ y por tanto podemos afirmar que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A'.

Para j^τ podemos razonar de forma análoga, solo que considerando la pertenencia a $BR_2(x^{\tau-1})$ o $BR_2(x^\tau)$ según si hablamos de juego ficticio secuencial o alternante.

Claramente $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ es también una secuencia de juego ficticio válida en A'. $\square$

Lema 4.2.2. *Sea A un juego intereses idénticos de tamaño $n \times m$, existe un juego de intereses idénticos A' de tamaño $(n+1) \times m$ tal que toda secuencia $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ de juego ficticio (secuencial o alternante) en (A, B) lo es también en (A', B').*

Demostración. Definimos el juego A' como

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

cambiar esto a las matrices nuevas

con $\lambda = min(A) - 1$.

Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio secuencial sobre A, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$. En la iteración τ, sabemos que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A. Como el pago de $n+1$ para el jugador 1 es siempre el mínimo de la columna, para cualquier acción j del jugador 2 tendremos que $a_{i^\tau,j} > a_{n+1,j}$ y por tanto podemos afirmar que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A'. □

Observemos que no valen lemas similares para la reducción en tamaño de los juegos. Agregar estados con poco incentivo no modifica las secuencias de juego ficticio, pero para un juego puede haber secuencias que pasen por todas las acciones de cada un jugador y que por tanto este no pueda reducirse a uno más chico.

4.3. Convergencia de Juego Ficticio

En su publicación de 1997, Monderer y Sela [10] enuncian un resultado que nos da una intuición interesante sobre el comportamiento del juego ficticio. Al ser el este un mecanismo utilizado para encontrar equilibrios de Nash, uno esperaría observar un comportamiento estable alrededor de los mismos. Monderer y Sela llaman a esto el Principio de Estabilidad. La demostración que presentan es mediante otros principios y conceptos que desarrollan en esa publicación, pero este resultado puede probarse de forma más directa. Presentaremos entonces a continuación una demostración alternativa. Agregamos además, una prueba para el caso del juego ficticio alternante e incluimos consideraciones sobre los posibles empates.

hay que reescribir este párrafo

Lema 4.3.1. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultáneo en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ y reglas de desempate (d_1, d_2). Si en la iteración k se jugó el equilibrio de Nash puro (i^*, j^*), entonces $i^* \in BR_1(y^k)$ y $j^* \in BR_2(x^k)$.*

Demostración. Comencemos con el caso del jugador fila. Queremos probar que i^* es una mejor respuesta a las creencias del jugador fila sobre la estrategia del jugador columna. Veamos primero entonces que forma tienen estas creencias según como se actualizan.

$$y^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s} + \widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}(k-1)}{k(k-1)} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}$$

Luego, tendremos que el conjunto de mejor respuesta será

$$\begin{aligned} BR_1(y^k) &= BR_1(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}) \\ &= \underset{i\in N}{\text{argmax}}\{\widetilde{i}A(\frac{(k-1)y^{k-1}}{k} + \frac{j^*}{k})\} \\ &= \underset{i\in N}{\text{argmax}}\{\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i}Aj^*\} \end{aligned}$$

Como en la iteración k se jugó el perfil (i^*, j^*), por la definición **??**, sabemos que $i^* \in BR_1(y^{k-1}) = \text{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i}Ay^{k-1}\}$. Es decir que para cualquier $i \in N$, podemos afirmar que $\widetilde{i^*}Ay^{k-1} \geq \widetilde{i}Ay^{k-1}$ y también (multiplicando en ambos lados por una constante positiva) que $\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i^*}Ay^{k-1} > \frac{(k-1)}{k}\widetilde{i}Ay^{k-1}$.

Sabemos también, al ser un equilibrio de Nash, que $i^* \in BR_1(\widetilde{j^*}) = \text{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i}Aj^*\}$. Es decir que para cualquier $i \in N$, $\widetilde{i^*}Aj^* \geq \widetilde{i}Aj^*$ y consecuentemente $\frac{1}{k}\widetilde{i^*}Aj^* \geq \frac{1}{k}\widetilde{i}Aj^*$.

Podemos sumar estas dos desigualdades para afirmar que $\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i^*}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i^*}Aj^* \geq \frac{(k-1)}{k}\widetilde{i}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i}Aj^*$ para cualquier $i \in N$ y por lo tanto $i^* \in BR_1(y^k)$.

Razonando análogamente para el jugador columna, podemos afirmar también que $j^* \in BR_2(x^k)$.

□

Lema 4.3.2. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultáneo en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ y reglas de desempate (d_1, d_2). Si en la iteración k se jugó el equilibrio de Nash puro (i^*, j^*), entonces $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ y $BR_2(x^k) \subseteq BR_2(x^{k-1})$.*

Demostración. Comencemos por el caso del jugador fila. Para probar que $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$, debemos probar que para todo $i \in N$, se cumple que $i \in BR_1(y^k) \implies i \in BR_1(y^{k-1})$, o por contra-recíproco, que $i \notin BR_1(y^{k-1}) \implies i \notin BR_1(y^k)$. Supongamos entonces un $i' \in N$ tal que $i' \notin BR_1(y^{k-1})$.

Como $BR_1(y^{k-1}) = \text{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i}Ay^{k-1}\}$, si $i^* \in BR_1(y^{k-1})$ pero $i' \notin BR_1(y^{k-1})$, entonces podemos afirmar que $\widetilde{i^*}Ay^{k-1} > \widetilde{i'}Ay^{k-1}$ y luego (multiplicando ambos lados por una constante positiva) que $\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i^*}Ay^{k-1} > \frac{(k-1)}{k}\widetilde{i'}Ay^{k-1}$.

Además, como (i^*, j^*) es equilibrio de Nash puro, sabemos que $i^* \in BR_1(\widetilde{j*}) = \text{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i}Aj^*\}$. Es decir que $\widetilde{i^*}Aj^* \geq \widetilde{i'}Aj^*$ y también $\frac{k-1}{k}\widetilde{i^*}A\widetilde{j^*} \geq \frac{k-1}{k}\widetilde{i'}A\widetilde{j^*}$.

Entonces, podemos razonar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \widetilde{i^*}Ay^k &= \widetilde{i^*}A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}) = \frac{(k-1)}{k}\widetilde{i^*}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i^*}A\widetilde{j^*} \\ &> \frac{(k-1)}{k}\widetilde{i'}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i'}A\widetilde{j^*} = \widetilde{i'}A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}) = \widetilde{i'}Ay^k \end{aligned}$$

Puesto que sabemos por el lema anterior, que $i^* \in BR_1(y^k) = \text{argmax}_{i \in N}\{\widetilde{i}Ay^k\}$, podemos afirmar que $i' \notin BR_1(y^k)$. Podemos razonar análogamente para el jugador columna para demostrar también que $BR_2(x^k) \subseteq BR_2(x^{k-1})$. □

Teorema 4.3.1. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultáneo en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ y reglas de desempate (d_1, d_2). Si en la iteración k se jugó el equilibrio de Nash puro $(i*, j*)$, entonces este perfil se repetirá en la iteración siguiente.*

Demostración. Nuevamente, comencemos por el jugador fila. Sabemos que en la iteración k se jugó $(i*, j*)$, lo cual nos asegura que $d_1(BR_1(y^{k-1})) = i^*$. Pero sabemos también por los lemas anteriores que $i^* \in BR_1(y^k)$ y que $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$. Luego, por la definición de reglas de desempate, debe ser que $d_1(BR_1(y^k)) = i^*$. Es decir, volverá a jugar i^*.

Análogamente, podemos afirmar también que el jugador columna jugará j^*. □

4.4. Velocidad de Convergencia de AFP

En esta sección nos enfocaremos en estudiar más detalladamente los resultados de Brandt, Fischer y Harrenstein [23]. En su paper, los autores presentan cotas superiores para la velocidad de convergencia del juego ficticio simultáneo en clases de juegos que se

checkear esto

sabe que siempre convergen de forma pura . Como dijimos en el capítulo 2, los autores mencionan la posibilidad de expandir sus resultados a la variante alternante de juego ficticio. Presentamos a continuación nuestro análisis para los casos de los juegos de suma constante simétricos y los no degenerados de intereses idénticos.

Veamos primero que para el caso de los juegos de suma constante simétricos, el teorema de estos autores efectivamente es expandible de forma bastante directa a la variante alternante. Vale la pena notar que formulamos el teorema en términos de que el último perfil no sea un equilibrio de Nash puro, en vez de pedir que ninguno en la secuencia lo sea como hacen Brandt, Fischer y Harrenstein ya que por el principio de estabilidad, si alguno de los perfiles jugados en la secuencia fuera un equilibrio de Nash puro, todos los siguientes lo serían.

Teorema 4.4.1. *Existe un juego simétrico A representable en $O(k)$ bits, con al menos un equilibrio de Nash puro y una secuencia de juego ficticio alternante $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ sobre A tal que (i^{2^k}, j^{2^k}) no es un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Consideremos un juego en forma bimatricial con la siguiente matriz de pagos:

.	j^1	j^2	j^3
i^1	0	-1	$-\epsilon$
i^2	1	0	$-\epsilon$
i^3	ϵ	ϵ	0

Ronda	(i,j)	x	$x^\tau B$	y	Ay^τ
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1,\ 0,\ 0)$	$(0,1,2^{-k})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
2	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2})$	$-2^{-(k+1)},\ \frac{1-2^{-k}}{2},\ 2^{-(k+1)})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
3	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3})$	$(-\frac{2^{-k+1}}{3},\ \frac{1-2^{-k+1}}{3},\ \frac{2^{-k}}{3})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
	$\vdots$				
τ	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{\tau},\ 0,\ \frac{\tau-1}{\tau})$	$(-\frac{(\tau-1)2^{-k}}{\tau},\ \frac{1-(\tau-1)2^{-k}}{\tau},\ \frac{2^{-k}}{\tau})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
	$\vdots$				
2^k	$(i_3,\ j_2)$	$2^{-k},\ 0,\ \frac{2^k-1}{2^k})$	$(-1,\ \frac{1+2^{-k}}{2^k},\ 1)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$

Tabla 4.1: Proceso de juego ficticio alternante en el juego del teorema 4.4.1

Si $\epsilon < 1$, vemos que (i^3, j^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Esto no explicamos qué es. Supongo que a los conceptos previos?

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario y sea $\epsilon = 2^{-k}$. Para estos valores, ϵ puede codificarse en $O(k)$ bits, mientras que las otras utilidades del juego son constantes, por lo que podemos afirmar que la representación del juego será tambien del orden de $O(k)$ bits. Por lo tanto, si probamos que un proceso de juego ficticio alternante puede requerir 2^k rondas antes de que se juegue (i^3, j^3), el teorema estará demostrado.

Si el proceso comienza con el jugador fila jugando i^1, entonces las utilidades esperadas del jugador columna serán $-x^1A = (0, 1, \epsilon)$ y elegirá j_2.

En la siguiente ronda, el jugador 1 reaccionará con i_3, dando que el jugador 2 tendrá una creencia sobre su estrategia de $x^2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, por lo que las utilidades esperadas del jugador 2 serán $-x^2A = (\frac{-\epsilon}{2}, \frac{1-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$y volverá a elegir j_2.

Este perfil (i_3, j_2) se repetirá $2^k - 1$ rondas, ya que tendremos que mientras $2 \leq \tau \leq 2^k$, se cumplirán:

$$
\begin{aligned}
x^\tau &= \frac{\widetilde{i_1} + (\tau-1)\widetilde{i_3}}{\tau} = (\frac{1}{\tau}, 0, \frac{\tau-1}{\tau}) \\
-x^\tau A &= (-\frac{(\tau-1)\epsilon}{\tau}, \frac{1-(\tau-1)\epsilon}{\tau}, \frac{\epsilon}{\tau}) \\
y^\tau &= \widetilde{j_2} = (0,1,0) \\
Ay^\tau &= (-1,0,\epsilon)
\end{aligned}
$$

La tabla 4.1, muestra como se desarrolla este proceso. Para el jugador fila, justificar su decisión es trivial ya que la estrategia percibida de su oponente es pura e i_3 es la única acción con utilidad esperada positiva. Para entender por qué el jugador columna no cambia su estrategia, debemos notar que:

$$
\begin{aligned}
\tau \leq 2^k &= \frac{1}{\epsilon} \\
\epsilon\tau &\leq 1 \\
\epsilon(\tau - 1 + 1) &\leq 1 \\
(\tau - 1)\epsilon + \epsilon &\leq 1 \\
1 - (\tau - 1)\epsilon &\geq \epsilon \\
\frac{1 - (\tau - 1)\epsilon}{\tau} &\geq \frac{\epsilon}{\tau}
\end{aligned}
$$

Esto podemos interpretarlo como que si bien en las iteraciones recientes el jugador 1 jugó i_3, el incentivo resultante de la única vez que jugó i_1 es muy fuerte por la gran diferencia de utilidades para el jugador 2 entre (i_1, j_2) e (i_2, j_3), por lo que deberán pasar 2^{k-1} iteraciones de i_3 luego de ese único i_1 para que las utilidades esperadas se compensen.

Concluimos entonces que la secuencia

$$(i_1, j_2), \underbrace{(i_3, j_2), ...(i_3, j_2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cual no se juega ningún equilibrio de Nash puro.

□

Por su parte, la demostración para el caso de los juegos no degenerados de 2×3 es un poco menos directa y requiere plantear una ligera variante del juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein.

discutir un poco como afecta el cambio de la matriz

Teorema 4.4.2. *Existe un juego no degenerado de intereses idénticos A representable en $O(k)$ bits, con al menos un equilibrio de Nash puro y una secuencia de juego ficticio alternante $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ sobre A tal que para todo $\tau < 2^k$, (i^τ, j^τ) no es un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Consideremos un juego en forma bimatricial con la siguiente matriz de pagos:

$$
\begin{array}{c|ccc|}
. & j^1 & j^2 & j^3 \\
\hline
i^1 & 1 & 2 & 0 \\
i^2 & 0 & 2+\epsilon & 2+2\epsilon \\
\hline
\end{array}
$$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (i^2, j^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, un proceso de juego ficticio alternante puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (i^2, j^3).

Ronda	(i,j)	x	$x^\tau B$	y	Ay
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
2	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},2+\frac{\epsilon}{2},1+\epsilon)$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
3	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3},2+\frac{2}{3}\epsilon,\frac{4+4\epsilon)}{3})$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
	$\vdots$				
τ	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{\tau},\frac{\tau-1}{\tau})$	$(\frac{1}{\tau},\frac{2+(\tau-1)(2+\epsilon)}{\tau},\frac{(\tau-1)(2+2\epsilon)}{\tau})$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
	$\vdots$				
2^k	$(i_2,\ j_2)$	$(\epsilon,1-\epsilon)$	$(\epsilon,1-\epsilon-\epsilon^2,2-\epsilon^2)$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$

Tabla 4.2: Proceso de juego ficticio alternante en el juego del teorema 4.4.2

Al igual que en la demostración anterior, el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, por lo que esto demuestra el teorema.

Si el proceso comienza con el jugador fila jugando i^1, entonces $x^1B = (1,2,0)$ y por lo tanto el jugador columna elegirá j_2.

En la siguiente ronda, el jugador 1 reaccionará con i_2, dando que el jugador 2 tendrá una creencia sobre su estrategia de $x^2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, por lo que las utilidades esperadas del jugador 2 serán $-x^2A = (\frac{1}{2},2+\frac{\epsilon}{2},1+\epsilon)$ y volverá a elegir j_2.

Este perfil (i_2,j_2) se repetirá 2^k-1 rondas, ya que tendremos que mientras $2\leq\tau\leq 2^k$, se cumplirán:

$$
\begin{aligned}
x^\tau &= \frac{\widetilde{i_1}+(\tau-1)\widetilde{i_2}}{\tau} = (\frac{1}{\tau},\frac{\tau-1}{\tau})\\
x^\tau A &= (\frac{1}{\tau},\frac{2+(\tau-1)(2+\epsilon)}{\tau},\frac{(\tau-1)(2+2\epsilon)}{\tau})\\
y^\tau &= \widetilde{j_2} = (0,1,0)\\
Ay^\tau &= (2,2+\epsilon)
\end{aligned}
$$

La tabla 4.2, muestra como se desarrolla este proceso. Para el jugador fila, justificar su decisión es trivial ya que la estrategia percibida de su oponente es pura y la utilidad esperada de i_2 es siempre marginalmente mayor que la de i_1. Para entender por qué el jugador columna no cambia su estrategia, debemos notar que:

$$
\begin{aligned}
\tau \leq 2^k &= \frac{1}{\epsilon} \\
\tau &\leq \frac{2}{\epsilon} + 1 \\
\frac{2}{\epsilon} &\geq \tau - 1 \\
\frac{2}{\tau - 1} &\geq \epsilon \\
\frac{2}{(\tau - 1)} + 2 + \epsilon &\geq 2 + 2\epsilon \\
2 + (\tau - 1)(2 + \epsilon) &\geq (\tau - 1)(2 + 2\epsilon)
\end{aligned}
$$

Similarmente al teorema anterior, esto podemos interpretarlo como que si bien en las iteraciones recientes el jugador 1 jugó i_2, el incentivo resultante de la única vez que jugó i_1 es muy fuerte por la gran diferencia de utilidades para el jugador 2 entre (i_1, j_2) checkear esto e (i_2, j_3), por lo que deberán pasar 2^{k-1} iteraciones de i_3 luego de ese único i_1 para que las utilidades esperadas se compensen.

Concluimos entonces que la secuencia

$$
(i_1, j_2), \underbrace{(i_2, j_2), ...(i_2, j_2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}
$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cual no se juega ningún equilibrio de Nash puro. $\square$

El detalle de que el juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein no nos sirva para demostrar el teorema anterior no es para nada menor. En efecto, como veremos en el siguiente teorema, es un ejemplo de un juego en el un proceso de juego ficticio simultáneo puede requerir una cantidad de rondas exponenciales mientras que, toda secuencia de juego ficticio alternante convergerá rápidamente.

Teorema 4.4.3. *Existe un juego no degenerado de intereses idénticos A representable en $O(k)$ bits y una secuencia de juego ficticio simultáneo $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ sobre A y una constante C tal que*

- *Para todo $\tau < 2^k$, (i^τ, j^τ) no es un equilibrio de Nash puro.*
- *Para todo proceso de juego ficticio alternante $(\widehat{i^\tau}, \widehat{j^\tau})_{\tau \in \mathbb{N}}$ en A, $(\widehat{i^C}, \widehat{j^C})$ es un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Consideremos el juego en forma bimatricial con la siguiente matriz de pagos:

.	j^1	j^2	j^3
i^1	1	2	0
i^2	0	$2+\epsilon$	3

Si $\epsilon < 1$, (i^2, j^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, un proceso de juego ficticio simultáneo puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (i^2, j^3), mientras que todo proceso de juego ficticio alternante converge de forma pura en un número constante de rondas. Al igual que los teoremas anteriores, el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, por lo que esto demuestra el teorema.

Veamos primero el caso alternante. Existen dos posibles secuencias de juego ficticio alternante para este juego, dado que el jugador 1 elegirá primero y el jugador 2 reaccionara según esta decisión.

Si el jugador fila juega i^2, el jugador columna responderá con j^3, siendo este el equilibrio puro. Si el jugador fila comienza con i^1, el jugador columna responderá con j^2. Esto hará que el jugador fila juegue i^2 en la segunda ronda por ser $A\widetilde{j^2} = (2, 2+\epsilon)$, mientras que el jugador continuará fila continuara jugando j^2. Esta situación se repetirá una ronda más, tras la cuál, la jugador columna se verá incentivado a jugar j^3. Los desarrollos de estos dos procesos pueden verse en las tablas 4.4 y 4.3. Vemos entonces que, independientemente del valor de k, ambos procesos convergen de forma pura en 4 rondas o menos.

Pasemos ahora al caso simultáneo, para el cual nos basaremos en la prueba de Brandt, Fischer Y Harrenstein. Si el proceso comienza con el perfil (i^1, j^1), entonces las utilidades esperadas serán $Ay^1 = (1, 0)$ e $x^1B = (1, 2, 0)$ respectivamente. Luego, en la segunda iteración el jugador fila elegirá i^1 y el jugador columna j^2. Las utilidades esperadas se actualizarán entonces como $Ay^2 = (\frac{3}{2}, \frac{2+\epsilon}{2})$ y $x^2B = (1, 2, 0)$.

A continuación, por al menos 2^k rondas, los jugadores elegirán las mismas jugadas que en la iteración 2, dado que para todo τ tal que $2 \leq i \leq 2^k$, tendremos $Ay^\tau = (2 - \frac{1}{\tau}, 2 - \frac{2+\epsilon}{\tau})$ e $x^\tau B = (1, 2, 0)$. La tabla 4.5 muestra como se desarrolla este proceso.

Concluimos entonces que la secuencia de perfiles

$$(i_1, j_1), \underbrace{(i_1, j_2), ...(i_1, j_2)}_{2^k \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultáneo válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cual no se juega ningún equilibrio de Nash puro.

□

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	(i_2, j_3)	$(0,1)$	$(0, 2+\epsilon, 3)$	$(0,0,1)$	$(0,3)$

Tabla 4.3: Proceso de juego ficticio alternante sobre el juego del teorema 4.4.3 comenzando por i_2

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(0,1,0)$	$(2, 2+\epsilon)$
2	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(0,1,0)$	$(2, 2+\epsilon)$
3	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3}, 2+\frac{2}{3}, 2)$	$(0,1,0)$	$(2, 2+\epsilon)$
4	$(i_2,\ j_3)$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$	$(\frac{1}{4}, 2+\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$	$(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3(2+\epsilon)}{4})$

Tabla 4.4: Proceso de juego ficticio alternante sobre el juego del teorema 4.4.3 comenzando por i_1

Iteración	(i,j)	$x\ x^\tau B$	y	Ay	
1	(i_1, j_1)	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(1,0,0)$	$(1,0)$
2	(i_1, j_2)	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{3}{2}, \frac{2+\epsilon}{2})$
3	(i_1, j_2)	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$	$(0,3)$
	$\vdots$				
τ	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(\frac{1}{\tau}, \frac{\tau-1}{\tau}, 0)$	$(2-\frac{1}{\tau}, 2-\frac{2+\epsilon}{\tau})$
	$\vdots$				
2^k	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(\frac{1}{2^k}, \frac{2^k-1}{2^k}, 0)$	$(2-\frac{1}{2^k}, 2-\frac{2+\epsilon}{2^k})$

Tabla 4.5: Proceso de juego ficticio simultáneo sobre el juego del teorema 4.4.3 comenzando por (i_1, j_1)

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

Conclusiones y trabajo futuro.

Bibliografía

[1] G. Brown. «Iterative solution of games by fictitious play». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* 13 (ene. de 1951).

[2] J. Robinson. «An Iterative Method of Solving a Game». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 54 (sep. de 1951). DOI: 10.2307/1969530.

[3] K. Miyasawa. «On the Convergence of Learning Processes in a 2x2 Non-Zero-Person Game». En: (oct. de 1961).

[4] D. Monderer y A. Sela. «A 2x2 Game without the Fictitious Play Property». En: *Games and Economic Behavior* 14 (feb. de 1996), págs. 144-148. DOI: 10.1006/game.1996.0045.

[5] L. Shapley. «Some Topics in Two-Person Games». En: *Annals of Mathematics Studies.* 52 (ene. de 1964).

[6] D. Monderer y L. Shapley. «Fictitious Play Property for Games with Identical Interests». En: *Journal of Economic Theory* 68 (feb. de 1996), págs. 258-265. DOI: 10.1006/jeth.1996.0014.

[7] D. Monderer y L. S. Shapley. «Potential Games». En: *Games and Economic Behavior* 14.1 (1996), págs. 124-143. ISSN: 0899-8256. DOI: https://doi.org/10.1006/game.1996.0044. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825696900445.

[8] U. Berger. «Learning in games with strategic complementarities revisited». En: *Journal of Economic Theory* 143 (nov. de 2008), págs. 292-301. DOI: 10.1016/j.jet.2008.01.007.

[9] A. Sela. «Fictitious play in 'one-against-all' multi-player games». En: *Economic Theory* 14 (nov. de 1999), págs. 635-651. DOI: 10.1007/s001990050345.

[10] D. Monderer y A. Sela. *Fictitious play and- no-cycling conditions.* Sonderforschungsbereich 504 Publications 97-12. Sonderforschungsbereich 504, Universität Mannheim;Sonderforschungsbereich 504, University of Mannheim, jun. de 1997. URL: https://ideas.repec.org/p/xrs/sfbmaa/97-12.html.

[11] U. Berger. «Fictitious play in 2xn games». En: (abr. de 2003).

[12] R. Chu y G. Vreeswijk. «Extending fictitious play with pattern recognition». En: *CEUR Workshop Proceedings* 1113 (ene. de 2013), págs. 40-53.

[13] A. Washburn. «A new kind of fictitious play». En: *Naval Research Logistics (NRL)* 48 (jun. de 2001), págs. 270-280. DOI: `10.1002/nav.7`.

[14] U. Berger. «Brown's original fictitious play». En: *Journal of Economic Theory* 135 (feb. de 2007), págs. 572-578. DOI: `10.1016/j.jet.2005.12.010`.

[15] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1963. DOI: `10.7249/R366`.

[16] G. Dantzig. «A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* (oct. de 2020), págs. 330-335.

[17] S. I. Gass y P. M. Zafra. «Modified fictitious play for solving matrix games and linear-programming problems». En: *Computers & Operations Research* 22.9 (1995), págs. 893-903. ISSN: 0305-0548. DOI: `https://doi.org/10.1016/0305-0548(94)00075-J`. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030505489400075J`.

[18] T. III, M. Epelman y R. Smith. «A Fictitious Play Approach to Large-Scale Optimization». En: *Operations Research* 53 (jun. de 2005), págs. 477-489. DOI: `10.1287/opre.1040.0178`.

[19] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games*. Vol. 1-2. Addison-Wesley, 1959.

[20] Y. Viossat y A. Zapechelnyuk. «No-regret Dynamics and Fictitious Play». En: *Journal of Economic Theory* 148 (jul. de 2012). DOI: `10.1016/j.jet.2012.07.003`.

[21] A. Jafari, A. Greenwald, D. Gondek y G. Ercal. «On No-Regret Learning, Fictitious Play, and Nash Equilibrium». En: (jul. de 2001).

[22] C. Daskalakis y Q. Pan. «A Counter-Example to Karlin's Strong Conjecture for Fictitious Play». En: *Proceedings - Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS* (dic. de 2014). DOI: `10.1109/FOCS.2014.10`.

[23] F. Brandt, F. Fischer y P. Harrenstein. «On the Rate of Convergence of Fictitious Play». En: *Theory of Computing Systems* 53.1 (jul. de 2013), págs. 41-52. ISSN: 1433-0490. DOI: `10.1007/s00224-013-9460-5`. URL: `https://doi.org/10.1007/s00224-013-9460-5`.

[24] J. Nash. «Non-Cooperative Games». En: *Annals of Mathematics* 54.2 (1951), págs. 286-295. ISSN: 0003486X. URL: `http://www.jstor.org/stable/1969529`.