Universidad Nacional de Rosario

Tesina de grado
para la obtención del grado de
Licenciado en Ciencias de la Computación

Velocidad De Convergencia Del Juego Ficticio Alternante

Autor:
Federico Badaloni

Director:
Ariel Arbiser

Co-director:
Maximiliano Cristiá

Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe, Argentina

26 de agosto de 2021

Resumen

El proceso de aprendizaje de juego ficticio, propuesto por primera vez por Brown en 1951 [1] como un método para encontrar equilibrios a través de la repetición de un juego en un proceso iterativo, nos provee una posible explicación de como un grupo de jugadores racionales pueden llegar a un equilibrio de Nash. Brown propuso dos variantes de juego ficticio: simultáneo y alternante, que se diferencian en la información que en cada iteración tienen los jugadores al momento de tomar su decisión.

Desde la teoría de juegos algorítmica, la utilidad del juego ficticio fue cuestionada en publicaciones que argumentan que en los casos que converge, su velocidad de convergencia puede ser muy inferior a la de metodos alternativos para encontrar equilibrios de Nash, como las mecánicas de no arrepentimiento o la resolución del problema de optimización lineal equivalente [2]. Sin embargo, estos trabajos se refieren solo al juego ficticio simultáneo y no existen en la literatura actual estudios sobre la velocidad de convergencia del juego ficticio alternante y su comparación contra la variante simultánea.

En este trabajo, extenderemos el estudio realizado en 2013 por Brandt, Fischer y Harrenstein [3] sobre la velocidad de convergencia del juego ficticio simultáneo a la variante alternante y aportaremos algunos resultados que indican que esta podría tener una utilidad práctica superior a su contraparte simultánea como mecanismo para encontrar equilibrios de Nash.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

la intro tuvo varios cambios menores

Creada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern, la teoría de juegos surgió en la década de 1940 motivada en parte por la Segunda Guerra Mundial. Estudia una variedad de situaciones en las que diversos agentes interactúan y toman decisiones estratégicas con el fin de obtener beneficios con interdependencias. Para ello, la teoría estudia los comportamientos, la posibilidad de maximizar esas ganancias según variados criterios y los casos de equilibrio, a la vez que formula y analiza modelos.

La teoría de juegos ha estado también históricamente muy ligada a la economía. En esta ciencia, juega un rol fundamental en el estudio de la toma de decisiones y el modelado de actores económicos como agentes racionales. Tal es así que se han concedido más de 10 premios Nobel de Economía en reconocimiento a investigaciones sobre teoría de juegos. Hoy en día, la mayor parte de la investigación en teoría de juegos es publicada en revistas de ciencias económicas.

No hay una única forma de introducir la teoría de juegos. El enfoque clásico trata sobre juegos en forma normal (en particular los matriciales), estrategias puras y mixtas, la existencia de equilibrios y los procesos de negociación y arbitraje, especialmente a partir de planteos axiomáticos. Interesa asimismo el estudio abstracto de funciones de utilidad, loterías, modelos de subastas, esquemas de votación a partir de preferencias en la sociedad y más recientemente, los juegos combinatorios, que pueden construirse algebraicamente.

En este trabajo nos interesan particularmente los juegos de dos jugadores en forma normal y el estudio de sus equilibrios. Existen en la literatura varios conceptos que capturan la noción de equilibrio, pero sin duda el más estudiado es el equilibrio de Nash: una combinación de jugadas en la que todos los jugadores están jugando lo mejor que pueden dadas las jugadas de los otros o, dicho de otra forma, ninguno tiene un incentivo para jugar de forma distinta, desviándose del equilibrio. Sin embargo, una crítica muy común al equilibrio de Nash es que falla en capturar una noción sobre como jugadores racionales llegan a un estado estable a través de un proceso de deliberación.

En la intersección entre la teoría de juegos y las ciencias de la computación, se encuentra la teoría de juegos algorítmica. Esta rama, que se caracteriza por su enfoque más cuantitativo y concreto, típicamente modela aplicaciones como problemas de optimización y busca resultados de imposibilidad, cotas de complejidad, garantías de aproximación, etc. La teoría de juegos algorítmica asume la necesidad de complejidades algorítmicas razonables (polinomiales) como condición necesaria sobre el comportamiento de los participantes de un sistema. Algunos de los problemas que estudia esta rama son el diseño de mecanismos de incentivos, el cálculo del costo asociado a anarquía previa a un equilibrio durante la búsqueda del mismo y el problema en el que nos enfocaremos en este trabajo: la velocidad de convergencia de algoritmos para calcular equilibrios.

El proceso de aprendizaje de juego ficticio, propuesto por primera vez por George Brown en 1951 [1] como un método para encontrar equilibrios a través de la repetición de un juego en un proceso iterativo, nos provee una posible explicación de como un grupo de jugadores racionales pueden llegar a un equilibrio de Nash. Consiste en que cada uno de los jugadores lleve una cuenta de la frecuencia de las jugadas realizadas por el otro, decidiendo la propia en cada turno como su mejor respuesta posible contra la jugada "media"del otro (tomando su historial de jugadas como una distribución empírica y maximizando su ganancia esperada). Entre sus aplicaciones prácticas actuales podemos mencionar el cómputo de equilibrios en juegos póker [4] y las subastas secuenciales [5].

Brown propuso originalmente dos variantes de juego ficticio: simultáneo y alternante, que se diferencian en la información que en cada iteración tienen los jugadores al momento de tomar su decisión. En la simultánea, ambos jugadores tienen el historial de jugadas hasta la iteración anterior, mientras que en la alternante, el historial del segundo jugador contiene también la jugada del primero en la iteración actual. Este segundo enfoque es un poco contra-intuitivo, pues rompe uno de los principios de la teoría de juegos: la toma de decisiones de cada jugador se considera siempre como procesos independientes uno del otro. Más aun, la variante simultánea permite tratar a los jugadores de forma simétrica, simplificando significativamente la demostración de propiedades del proceso. Es quizás por estos motivos que el estudio posterior en juego ficticio se focalizó principalmente en la variante simultánea mientras que la alternante se desvaneció gradualmente de la literatura, para resurgir recién en 2007, cuando Ulrich Berger [6] planteó que esta última puede ser más potente y dio como ejemplo una clase de juegos para la cuál la variante alternante converge a un equilibrio de Nash, pero la simultánea no.

Desde la teoría de juegos algorítmica, la utilidad del juego ficticio fue cuestionada en publicaciones que argumentan que en los casos que converge, su velocidad de convergencia puede ser muy inferior a la de metodos alternativos para encontrar equilibrios de Nash, como las mecánicas de no arrepentimiento o la resolución del problema de optimización lineal equivalente [2]. Sin embargo, estos trabajos se refieren solo al juego ficticio simultáneo y no existen en la literatura actual estudios sobre la velocidad de convergencia del juego ficticio alternante y su comparación contra la variante simultánea.

En este trabajo, presentaremos algunos resultados con los que proponemos que el juego ficticio alternante es, desde un punto de vista computacional, un mecanismo al menos tan eficiente como el simultáneo y, en algunos casos, incluso mejor para computar equilibrios de Nash.

1.1. Organización de este trabajo

En el capítulo 2 haremos un repaso de la literatura existente en juego ficticio, comenzando por el estudio de su convergencia y luego enfocándonos en los resultados sobre su velocidad de convergencia.

En el capítulo 3 presentaremos los conceptos teóricos fundamentales necesarios para este estudio. Definiremos los juegos en forma normal, los equilibrios de Nash, el juego ficticio en sus dos variantes y algunas de las categorías de juegos mas estudias en la literatura sobre el tema. Daremos también algunos ejemplos sobre juegos clásicos.

En el capítulo 4 presentaremos los resultados encontrados. Extenderemos el estudio que hicieron Brandt, Fischer y Harrenstein [3] sobre la velocidad de convergencia del juego ficticio simultáneo a la variante alternante. Para esto, comenzaremos por demostrar la equivalencia entre la definición de juego ficticio que ellos utilizan y la convencional que podemos encontrar en el resto de la literatura. Luego, extenderemos el principio de estabilidad (Monderer y Sela [7]) al juego ficticio alternante. Además presentaremos un lema sobre la conservación del juego ficticio al expandir juegos, que nos permitirá generalizar los resultados.

Capítulo 2

Estado del arte

2.1. Convergencia del juego ficticio

El proceso de aprendizaje de juego ficticio fue propuesto por primera vez por Brown en 1951 [1] como un algoritmo para encontrar el valor de un juego de suma cero finito. Hacia finales del mismo año, Robinson [8] demostró que el proceso converge al equilibrio de Nash para todos los juegos de esta clase.

Desde entonces, se han publicado numerosos trabajos analizando la convergencia del juego ficticio en juegos que no sean de suma cero. Miyazawa [9] demostró que esta propiedad vale para todos los juegos de 2×2 pero, su demostración depende de la incorporación de una regla de desempate particular sin la cual, Monderer y Sela [10] demostraron que no se cumple. Por su parte, Shapley [11] mostró un ejemplo de un juego de 3×3 con una secuencia que no converge.

Además, la convergencia del juego ficticio fue demostrada para juegos de intereses idénticos [12], juegos potenciales con pesos [13], juegos no degenerados con estrategias complementarias y ganancias disminuyentes [14] y ciertas clases de juegos compuestos [15].

Por otro lado, se han estudiado muchas variantes del juego ficticio. Una de las mas analizadas es el juego ficticio continuo, definida originalmente en la publicación original de Brown [1], aunque este no la exploró en detalle. Monderer y Sela demostraron que esta converge para juegos no degenerados de 2×3 [7] y Berger luego extendió este resultado a $2 \times N$ [16] y aportó la convergencia de los juegos de potencial ordinal y quasi-supermodulares con ganancias disminuyentes [17]. Otros ejemplos de variantes propuestas pueden verse en [18] y [19].

La variante en la que nos enfocaremos particularmente en este trabajo es el juego ficticio con actualización alternante de creencias. Berger [6] planteó que esta versión alternante es en realidad la original que definió Brown en [1] y que si bien el proceso con actualización simultánea de creencias que se usa actualmente en al investigación de juego ficticio puede resultar mas intuitivo, es también menos potente y da como ejemplo la clase de los juegos no degenerados con potencial ordinal, para la cuál la versión alternante converge, pero la simultánea no.

2.2. Velocidad de convergencia del juego ficticio

Los trabajos mencionados hasta ahora se enfocan en el estudio de la eventual convergencia global a un equilibrio de Nash de las distintas clases de juegos. Desde un enfoque computacional, interesa estudiar la velocidad de convergencia en los casos en la que esta ocurre. Este interés se debe en gran medida a la equivalencia entre los juegos de suma cero y los problemas de programación lineal, demostrada por Dantzig, Gale y Von Neumann [20] [21].

En 1994, Gass y Zafra [2] planteaban que hasta la fecha, lo más eficiente para resolver un juego de suma cero era plantearlo como un problema de programación lineal y aplicar el método simplex. En el mismo artículo, plantean un meotodo mixto con simplex y una variante de juego ficticio y concluyen que permite acelerar la convergencia en ciertos problemas de programación lineal. Lambert y Smith [22] plantean también una variante (con muestreo) y discuten su eficiencia en problemas de optimización a gran escala.

En 1959, Samuel Karlin conjeturó que la velocidad de convergencia del juego ficticio tiene una cota superior general de $O(t^{-\frac{1}{2}})$, en lo que pasaría a referirse en adelante como la conjetura de Karlin [23]. La idea proviene de que esta cota superior se corresponde con la de la velocidad de convergencia de otro método de aprendizaje muy relacionado con el juego ficticio, las dinámicas de no-arrepentimiento [24] [25]. Daskalakis y Pan [26] probaron falsa una versión fuerte de la Conjetura de Karlin (usando una regla de desempate adversarial) pero dejaron abierta la pregunta sobre la versión general de la conjetura, con reglas de desempate arbitrarias, a la que ellos llaman conjetura de Karlin débil.

La utilidad del juego ficticio como método para computar equilibrios de Nash fue puesta en duda cuándo Brandt, Fischer y Harrenstein [3] demostraron que para los juegos de suma cero, los no degenerados de $2 \times N$ y los potenciales (tres de las clases mas estudiadas), existen casos en los que el proceso de juego ficticio puede requerir una cantidad de rondas exponencial en el tamaño de representación en bits de las utilidades del juego antes de que se juegue algún equilibrio. En esta publicación, los autores mencionan brevemente (p. 6) que sus resultados pueden ser extendidos al juego ficticio alternante, pero no profundizan en esto.

estos ultimos dos parrafos tiene cambios de redaccion

Capítulo 3

Conceptos previos

3.1. Juegos en forma normal y equilibrios de Nash

Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, es decir un juego de dos jugadores finito en el que el jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ y el jugador 2 (jugador columna) tiene acciones $j \in M = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. A, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son las matrices de pago de los jugadores 1 y 2. Si el jugador 1 elige la acción i y el jugador 2 elige la acción j, la ganancia del jugador 1 será $a_{i,j}$ y la ganancia del jugador 2 será $b_{i,j}$. Describiremos los juegos en forma bimatricial con una matriz de pares como la siguiente:

$$
\begin{array}{c|llll|}
 & j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\
\hline
i_1 & (a_{1,1}, b_{1,1}) & (a_{1,2}, b_{1,2}) & \cdots & (a_{1,2}, b_{1,m}) \\
i_2 & (a_{2,1}, b_{2,1}) & (a_{2,2}, b_{2,2}) & \cdots & (a_{2,m}, b_{2,m}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
i_n & (a_{n,1}, b_{n,1}) & (a_{n,2}, b_{n,2}) & \cdots & (a_{n,m}, b_{n,m}) \\
\hline
\end{array}
$$

Llamaremos estrategias mixtas del jugador 1 a las distribuciones de probabilidades sobre su conjunto de acciones N y las representaremos con vectores fila $x \in \Delta(N)$ de tamaño n. Similarmente, las estrategias mixtas del jugador 2 serán distribuciones de probabilidad sobre M que notaremos con vectores columna $y \in \Delta(M)$ de tamaño m. A las estrategias que asignan probabilidad 1 a una acción y 0 a todas las otras las llamaremos **estrategias puras**. Notaremos con $\widetilde{i} \in \Delta(N)$ a la estrategia pura del jugador fila correspondiente a la acción i y con $\widetilde{j} \in \Delta(M)$ a la estrategia pura del jugador columna correspondiente a la acción j.

Esto lo reescribi como una mezcla entre el paper y lo que habia aca. No me convencía ponerlo con $\mathbb{R}$ redefiniendo espacio de probabilidad. Lo mas importante, saque la generalizacion inutil.

La ganancia esperada del jugador 1 al jugar la acción i contra la estrategia mixta y del jugador 2 será $\widetilde{i}Ay$. Análogamente, la ganancia esperada del jugador 2 al jugar la acción j contra la estrategia mixta x del jugador 2 será $xB\widetilde{j}$. Si ambos jugadores juegan las estrategias mixtas x e y respectivamente, sus ganancias esperadas pueden calcularse como xAy para el jugador 1 y xBy para el jugador 2.

Si y es una estrategia mixta del jugador 2, definimos el **conjunto de mejores respuestas** a y como $BR_1(y) = argmax_{i \in N}\{\widetilde{i}Ay\}$ y, análogamente, si x es una estrategia mixta del jugador 2, el conjunto de mejores respuestas a x será $BR_2(x) = argmax_{j\in M}\{xB\widetilde{j}\}$. Es decir, son los conjuntos de acciones que maximizan las ganancias esperadas contra una estrategia dada.

Este concepto puede expandirse de acciones a estrategias mixtas. Si x es una estrategia mixta del jugador 1 e y es una estrategia mixta del jugador 2, decimos que $x \in BR_1(y)$ si $\forall i \in N, x_i > 0 \implies i \in BR_1(y)$.

Llamaremos **equilibrio de Nash** a todo perfil de estrategias mixtas $(x^*, y^*) \in \Delta(A) \times \Delta(B)$ tal que $x^* \in BR_1(y^*)$ e $y^* \in BR_2(x^*)$. En el caso particular de que las estrategias sean puras, al equilibrio lo llamaremos también **equilibrio de Nash puro**.

3.2. Categorías de juegos

Es útil clasificar a los juegos en distintas categorías según sus propiedades. Presentamos a continuación algunas de las categorías de juegos mas estudiadas en la literatura sobre juego ficticio.

Definición 3.2.1. *Un juego (A, B) de tamaño $n \times m$ es un* ***juego de suma cero*** *si $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = -b_{ij}$. Para estos casos, nos referiremos al juego usando solo la matriz A.*

Los juegos de suma cero son una de las categorías más estudiadas en teoría de juegos. Representan los juegos en los que un jugador siempre gana tanto como pierde el otro. Uno de los teoremas fundacionales del área, conocido como el Teorema de Minimax [27] establece que todos poseen al menos un equilibrio de Nash puro y a la ganancia para el jugador fila en un equilibrio la llamamos **valor del juego** (pues es la misma en todos los equilibrios).

Definición 3.2.2. *Llamamos* ***degenerado*** *a un juego bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- *Existen $i, i' \in N$ y $j \in M$ con $i \neq$ i' tales que $a_{ij} = a_{i'j}$*
- *Existen $j, j' \in M$ e $i \in N$ con $j \neq$ j' tales que $b_{ij} = b_{ij'}$*

En caso contrario, decimos que el juego es ***no degenerado****.*

Los juegos no degenerados son de particular interés porque capturan el concepto de un juego en el que, para cada acción del rival, no existen dos acciones con el mismo pago. Por lo tanto, el conjunto de mejor respuesta contra una estrategia pura dada es siempre unitario.

Las siguientes definiciones corresponden a otras dos categorías de juegos que han sido muy estudiados por sus propiedades de convergencia en los procesos de juego ficticio. Nos serán útiles en la sección 4.4 cuando discutamos los resultados sobre su velocidad de convergencia.

Definición 3.2.3. *Un juego bimatricial (A, B) de tamaño $n \times n$ es un **juego simétrico** si $\forall i, j \in N : a_{ij} = -b_{ji}$. En este caso también nos referiremos al juego usando solo la matriz A.*

Definición 3.2.4. *Un juego (A, B) de tamaño $n \times m$ es un **juego de intereses idénticos** si $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = b_{ij}$. En este caso también nos referiremos al juego usando solo la matriz A.*

3.3. Juego ficticio

El algoritmo de juego ficticio consiste en una repetición iterada de un juego en la que en cada instancia los jugadores juegan una acción que sea mejor respuesta a al historial de jugadas de su oponente, tomada como una distribución empírica. En esta sección presentaremos dos definiciones formales que podemos encontrar en la literatura sobre juego ficticio, a las cuales incorporaremos el concepto de **reglas de desempate**. Este concepto nos permitirá precisar las definiciones, removiendo una ambigüedad que ocurre en los casos en los que los conjuntos de mejor respuesta no son unitarios.

Definición 3.3.1. *Llamamos **reglas de desempate** a un par de funciones $d_1 : \mathbb{P}^+(N) \to N$ y $d_2 : \mathbb{P}^+(M) \to M$ que a cada subconjunto de acciones de un jugador le asignan una acción perteneciente a este, cumpliendo la condición de Hauthakker:*

$$\forall N_a, N_b \in P^+(N),\ \text{si } N_b \subseteq N_a, i \in N_b \text{ y } d_1(N_a) = i \text{ entonces } d_1(N_b) = i$$

$$\forall M_a, M_b \in P^+(M),\ \text{si } M_b \subseteq M_a, j \in M_b \text{ y } d_2(M_a) = j \text{ entonces } d_2(M_b) = j$$

Algunos autores como Berger, Monderer, Sela, Shapley, Daskalakis y Pan [6] [7] [10] [12] [26] utilizan una definición de juego ficticio del estilo de la siguiente, que resulta cómoda para estudiar convergencia y es la que veremos primero. Incluiremos en la definición las variantes con actualización simultánea y alternante de creencias.

Definición 3.3.2. *Sean (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$ y una secuencia (i^τ, j^τ) con $i^\tau \in N$, $j^\tau \in M$ para todo $\tau \in \mathbb{N}$. Si d_1 y d_2 son reglas de desempate y tenemos unas secuencias de creencias x^τ e y^τ tales que para todo $\tau \in \mathbb{N}$:*

$$x^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}}{\tau}$$

$$y^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}}{\tau}$$

Entonces:

- *(i^τ, j^τ) es una secuencia de juego ficticio simultáneo si (i^1, j^1) es un elemento arbitrario de $N \times M$ y para todo $\tau \in \mathbb{N}$ se cumplen $i^{\tau+1} = d_1(BR_1(y^\tau))$ y $j^{\tau+1} = d_2(BR_2(x^\tau))$.*

- *(i^τ, j^τ) es una secuencia de juego ficticio alternante si i^0 es un elemento arbitrario de N y para todo $\tau \in \mathbb{N}$ se cumplen $i^{\tau+1} = d_1(BR_1(y^\tau))$ y $j^\tau = d_2(BR_2(x^\tau))$.*

Vale la pena hacer algunos comentarios sobre esta primera definición. Para empezar, observando las secuencias de creencias, x^τ e y^τ, veremos que se componen de sumas de vectores unitarios, pero normalizados por el tiempo, por lo que son estrategias mixtas que se corresponden con la distribución empírica de las acciones de cada jugador. Por otro lado, como los elementos iniciales son arbitrarios, un mismo juego puede tener tantos procesos de juego ficticio válidos como jugadas iniciales existan.

Las definiciones originales que usan autores previamente mencionados establecen una condición mas débil sobre las jugadas, pidiendo solo que pertenezcan al conjunto de menor respuesta a la estrategia mixta percibida. Esto implica, como mencionamos recientemente, que aparecen ambigüedades en los casos en los que el conjunto de menor respuesta no es unitario. Una forma de eliminar esta ambigüedad fue centrarse en el estudio de los juegos no degenerados [6]. En este trabajo, tomamos el enfoque alternativo de eliminar la ambigüedad introduciendo las reglas de desempate, que deciden con algún criterio fijo que acción elige el proceso en eventuales empates. El uso de distintas reglas puede determinar, incluso para las mismas jugadas iniciales, distintos procesos válidos de juego ficticio.

aca exapndí un poco más sobre reglas de desempate

Sobre la variante alternante vale aclarar que efectivamente, el jugador columna toma su decisión incorporando en sus creencias la información sobre qué jugó el jugador fila en la ronda actual, si bien esto puede resultar poco intuitivo ya que normalmente en teoría de juegos se representa jugadores eligiendo simultánea e independientemente. Otra observación relevante es que su acción inicial no es arbitraria sino que ya se encuentra fijada por la mejor respuesta a la acción del jugador fila.

Alternativamente, Brandt, Fischer y Harrenstein [3] utilizan una definición similar a la de Robinson [8] pero simplificada. Es más cómoda para estudiar velocidades de convergencia en juegos que se sabe que convergen. A continuación, presentamos también esta definición.

Definición 3.3.3. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$:*

- *Una secuencia de juego ficticio simultáneo en (A, B) es una secuencia $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ de pares de vectores no negativos $(p^i, q^i) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ tal que:*

$$p^0 = 0, q^0 = 0$$
$$p^{\tau+1} = p^\tau + \widetilde{i} \text{ donde } i = d_1(argmax_{i'\in N}\{\widetilde{i'}Aq^\tau\})$$
$$q^{\tau+1} = q^\tau + \widetilde{j} \text{ donde } j = d_2(argmax_{j'\in M}\{p^\tau B\widetilde{j'}\})$$

- *Una secuencia de juego ficticio alternante en (A, B) es una secuencia $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ de pares de vectores no negativos $(x^i, y^i) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ tal que:*

$$p^0 = 0, q^0 = 0$$
$$p^{\tau+1} = p^\tau + \widetilde{i} \text{ donde } i = d_1(argmax_{i'\in N}\{\widetilde{i'}Aq^\tau\})$$
$$q^{\tau+1} = q^\tau + \widetilde{j} \text{ donde } j = d_2(argmax_{j'\in M}\{p^{\tau+1}B\widetilde{j'}\})$$

Como podemos observar, la principal diferencia con la primera definición es que mientras en aquella se define una secuencia de jugadas que cumple una condición contra un historial de creencias sobre la estrategia mixta del otro jugador, en esta la secuencia es de pares de contadores de jugadas (sin normalizar, por lo que no son estrategias mixtas), que cumplen en cada iteración una condición de maximizar el producto de la matriz de pagos contra el contador del rival (sin ser este producto tampoco la ganancia esperada por no estar el resultado normalizado). En el capítulo 4 se demostrará que estas dos definiciones son equivalentes.

3.4. Convergencia del juego ficticio

Esta seccion no se si la viste. Creo que me olvide de avisarte en el mail anterior que la agregué.

El interés por el estudio del juego ficticio recae en su utilidad como mecanismo para calcular equilibrios de Nash. Para esto, se analiza la convergencia del proceso.

Definición 3.4.1. *Sea (i^τ, j^τ) una secuencia de juego ficticio (simultáneo o alternante). Diremos que (i^τ, j^τ)* ***converge en jugadas*** *en la iteración k si (i^k, j^k) es un equilibrio de Nash puro.*

En el capítulo 4 veremos que cuando esto ocurre, (i^k, j^k) se repetirá infinitamente en las siguientes iteraciones. Es decir, la secuencia de jugadas convergerá en ese equilibrio de Nash. Esta propiedad del juego ficticio es conocida como el **principio de estabilidad**.

Existe otra noción de convergencia muy estudiada en la literatura de juego ficticio. Esta es la convergencia en forma mixta o convergencia en creencias.

Definición 3.4.2. *Sea (i^τ, j^τ) una secuencia de juego ficticio (simultáneo o alternante) con secuencias de creencias x^τ e y^τ. Diremos que (i^τ, j^τ)* ***converge en creencias*** *si existe un equilibrio de Nash mixto tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x^* - x^k| < \epsilon$ y $|y^* - y^k| < \epsilon$.*

Diremos también que un juego tiene la **propiedad del juego ficticio** (comúnmente referida por sus siglas en inglés **FPP**) si toda secuencia de juego ficticio en el juego (es decir, comenzando desde cualquier jugada inicial y con cualquier regla de desempate) converge en creencias.

Obviamente, todo juego que converge en jugadas, converge también en creencias, ya que todo equilibrio puro es un equilibrio mixto y si la secuencia de jugadas converge a un equilibrio puro, las secuencias de creencias lo harán también. Si bien esta es también una definición muy potente, en el presente trabajo nos enfocaremos en la convergencia en jugadas. A partir del capítulo siguiente, cuando digamos que un proceso de juego ficticio converge, el lector deberá interpretarlo siempre como que converge en jugadas.

Mediremos la velocidad de convergencia en función del tamaño de representación de un juego. Sea (A, B) un juego en forma normal donde A y B son matrices de $n \times m$ y cada uno de sus valores es representable en $O(k)$ dígitos binarios, entonces (A, B) es representable en $O(n \times m \times k)$ bits.

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	(1, 1)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)
2	(2, 2)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)
3	(2, 2)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)
4	(2, 2)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)
5	(2, 2)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)

Tabla 3.1: Proceso de juego ficticio simultáneo sobre el Dilema del Prisionero

3.5. Ejemplos

Veamos como se aplican todos estos conceptos a algunos juegos clásicos de la literatura. Comenzaremos por el Dilema de los Prisioneros:

$$\begin{array}{c} \\ i_1 \\ i_2 \end{array} \begin{array}{cc} j_1 & j_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{(2,2)} & \multicolumn{1}{c|}{(0,3)} \\ \multicolumn{1}{|c}{(3,0)} & \multicolumn{1}{c|}{(1,1)} \\ \hline \end{array}$$

Este juego es muy estudiado por su propiedad de que si bien la mayor ganancia para ambos jugadores se encuentra en que se juegue el perfil (i_1, j_1), su único equilibrio de Nash puro es el perfil (i_2, j_2). En la tabla 3.1 podemos observar como se desarrolla un proceso de juego ficticio simultáneo sobre este juego, comenzando desde (i_1, j_1). Para las primeras 5 iteraciones, se muestra el perfil jugado, cómo se actualizan las creencias sobre la estrategia de los jugadores y las consecuentes ganancias esperadas de cada jugador para sus jugadas a lo largo de la secuencia.

Como vemos, si ambos jugadores empiezan cooperando, en la segunda ronda la mejor respuesta individualmente para cada uno será desviarse de este perfil, jugando respectivamente i_2 y j_2. Las creencias, que como mencionamos previamente son observaciones empíricas de una estrategia mixta supuesta según el historial del oponente, ahora indican que cada jugador juega cada una de las acciones con probabilidad $0,5$. Como veremos en la sección 4.2, dado que (i_2, j_2) es un equilibrio de Nash puro, podemos asegurar que se jugará infinitamente.

La tabla 3.2 muestra el mismo juego pero en un proceso de juego ficticio alternante. Vemos que, ya en la primera iteración el jugador 2 reacciona a i_1 jugando j_2 como mejor respuesta. El proceso continúa de forma similar, aunque el jugador fila cree que el jugador columna está siguiendo una estrategia pura.

Pasando al siguiente ejemplo, vemos en esta matriz el clásico juego de Piedra, Papel o Tijeras. Dado que es un juego de suma cero, lo representamos solamente con las ganancias del jugador 1. Además, para facilitar la lectura, nombramos las jugadas con R, P y S (por las iniciales en inglés).

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	(1, 2)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
2	(2, 2)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
3	(2, 2)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
4	(2, 2)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
5	(2, 2)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)

Tabla 3.2: Proceso de juego ficticio alternante sobre el Dilema de los Prisioneros

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	$(i_R,\ j_P)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 1,00, −1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00)
2	$(i_S,\ j_P)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,00, −0,50)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00)
3	$(i_S,\ j_R)$	(0,33, 0,00, 0,67)	(0,67, −0,33, −0,33)	(0,33, 0,67, 0,00)	(−0,67, 0,33, 0,33)
4	$(i_P,\ j_R)$	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, −0,25, 0,00)	(0,50, 0,50, 0,00)	(−0,50, 0,50, 0,00)
5	$(i_P,\ j_R)$	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,00, −0,20, 0,20)	(0,60, 0,40, 0,00)	(−0,40, 0,60, −0,20)
6	$(i_P,\ j_S)$	(0,17, 0,50, 0,33)	(−0,17, −0,17, 0,33)	(0,50, 0,33, 0,17)	(−0,17, 0,33, −0,17)
7	$(i_P,\ j_S)$	(0,14, 0,57, 0,29)	(−0,29, −0,14, 0,43)	(0,43, 0,29, 0,29)	(0,00, 0,14, −0,14)
8	$(i_P,\ j_S)$	(0,12, 0,62, 0,25)	(−0,38, −0,12, 0,50)	(0,38, 0,25, 0,38)	(0,12, 0,00, −0,12)
9	$(i_R,\ j_S)$	(0,22, 0,56, 0,22)	(−0,33, 0,00, 0,33)	(0,33, 0,22, 0,44)	(0,22, −0,11, −0,11)
10	$(i_R,\ j_S)$	(0,30, 0,50, 0,20)	(−0,30, 0,10, 0,20)	(0,30, 0,20, 0,50)	(0,30, −0,20, −0,10)

Tabla 3.3: Proceso de juego ficticio simultáneo sobre Piedra, Papel o Tijera

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & j_R & j_P & j_S \\
\hline
i_R & 0 & -1 & 1 \\
i_P & 1 & 0 & -1 \\
i_S & -1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

En las tablas 3.3 y 3.4 respectivamente podemos ver respectivamente un desarrollo de juego ficticio simultáneo y alternante. Para el caso simultáneo, el proceso comienza con el jugador fila jugando piedra y el columna jugando papel. Inmediatamente el jugador fila cambia su estrategia a jugar tijera, mientras el columna se mantiene en papel porque lo proyecta exitoso. En la tercera iteración el jugador 2, esperando que el jugador 1 juegue piedra o tijera con iguales probabilidades pero descartando que pueda jugar papel, maximizará su ganancia esperada jugando piedra. Estos cambios continuaran infinitamente pero, lentamente las creencias convergerán al único equilibrio de Nash mixto de este juego, que consiste en que cada jugador juegue cada acción con $\frac{1}{3}$ de probabilidad.

El caso alternante es similar, aunque con una clara ventaja del jugador columna, que comienza ya reaccionando a la piedra del jugador fila con papel. Esta ventaja sin embargo va disminuyendo con el paso de las iteraciones y eventualmente también converge en creencias.

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	$(i_R,\ j_P)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 1,00, −1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00)
2	$(i_S,\ j_R)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,00, −0,50)	(0,50, 0,50, 0,00)	(−0,50, 0,50, 0,00)
3	$(i_P,\ j_R)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,00, 0,00, 0,00)	(0,67, 0,33, 0,00)	(−0,33, 0,67, −0,33)
4	$(i_P,\ j_S)$	(0,25, 0,50, 0,25)	(−0,25, 0,00, 0,25)	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,00, 0,25, −0,25)
5	$(i_P,\ j_S)$	(0,20, 0,60, 0,20)	(−0,40, 0,00, 0,40)	(0,40, 0,20, 0,40)	(0,20, 0,00, −0,20)
6	$(i_R,\ j_S)$	(0,33, 0,50, 0,17)	(−0,33, 0,17, 0,17)	(0,33, 0,17, 0,50)	(0,33, −0,17, −0,17)
7	$(i_R,\ j_P)$	(0,43, 0,43, 0,14)	(−0,29, 0,29, 0,00)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,14, −0,14, 0,00)
8	$(i_R,\ j_P)$	(0,50, 0,38, 0,12)	(−0,25, 0,38, −0,12)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,00, −0,12, 0,12)
9	$(i_S,\ j_P)$	(0,44, 0,33, 0,22)	(−0,11, 0,22, −0,11)	(0,22, 0,44, 0,33)	(−0,11, −0,11, 0,22)
10	$(i_S,\ j_P)$	(0,40, 0,30, 0,30)	(0,00, 0,10, −0,10)	(0,20, 0,50, 0,30)	(−0,20, −0,10, 0,30)

Tabla 3.4: Proceso de juego ficticio alternante sobre Piedra, Papel o Tijera

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	$(i_1,\ j_2)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(0,00, 1,00, 0,00)
2	$(i_2,\ j_3)$	(0,50, 0,50, 0,00)	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)
3	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,67, 0,00)	(0,67, 0,00, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
4	$(i_1,\ j_1)$	(0,50, 0,50, 0,00)	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,50, 0,25, 0,25)
5	$(i_1,\ j_1)$	(0,60, 0,40, 0,00)	(0,40, 0,00, 0,60)	(0,60, 0,20, 0,20)	(0,60, 0,20, 0,20)
6	$(i_1,\ j_3)$	(0,67, 0,33, 0,00)	(0,33, 0,00, 0,67)	(0,50, 0,17, 0,33)	(0,50, 0,17, 0,33)
7	$(i_1,\ j_3)$	(0,71, 0,29, 0,00)	(0,29, 0,00, 0,71)	(0,43, 0,14, 0,43)	(0,43, 0,14, 0,43)
8	$(i_1,\ j_3)$	(0,75, 0,25, 0,00)	(0,25, 0,00, 0,75)	(0,38, 0,12, 0,50)	(0,38, 0,12, 0,50)
9	$(i_3,\ j_3)$	(0,67, 0,22, 0,11)	(0,22, 0,11, 0,67)	(0,33, 0,11, 0,56)	(0,33, 0,11, 0,56)
10	$(i_3,\ j_3)$	(0,60, 0,20, 0,20)	(0,20, 0,20, 0,60)	(0,30, 0,10, 0,60)	(0,30, 0,10, 0,60)

Tabla 3.5: Proceso de juego ficticio simultáneo en el ejemplo de Shapley, comenzando por (i_1, j_2).

Veamos por último un ejemplo bien conocido en la literatura de juego ficticio.

	j_1	j_2	j_3
i_1	$(1,0)$	$(0,-1)$	$(0,1)$
i_2	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,-1)$
i_3	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$

Este el juego de Shapley [11]. Esta variante de Piedra, Papel o Tijeras es el primer ejemplo publicado de un juego con una secuencia que no converge, ni siquiera en creencias, tanto para juego ficticio simultáneo como alternante, independientemente de la regla de desempate elegida. En las tablas 3.5 y 3.6 vemos como se desarrollan estos procesos.

Acá detallé un poco más.

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	$(i_1,\ j_3)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 0,00, 1,00)
2	$(i_3,\ j_2)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)
3	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
4	$(i_1,\ j_3)$	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, 0,25, 0,50)
5	$(i_3,\ j_2)$	(0,40, 0,20, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)
6	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
7	$(i_1,\ j_3)$	(0,43, 0,29, 0,29)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,29, 0,29, 0,43)
8	$(i_3,\ j_2)$	(0,38, 0,25, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)
9	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
10	$(i_1,\ j_3)$	(0,40, 0,30, 0,30)	(0,30, 0,30, 0,40)	(0,30, 0,30, 0,40)	(0,30, 0,30, 0,40)

Tabla 3.6: Proceso de juego ficticio alternante en el ejemplo de Shapley, comenzando por i_1.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Equivalencia de las distintas definiciones

Como mencionamos en la sección 3.3, existen dos formas de definir el juego ficticio entre los distintos autores de la literatura. Ambas simplifican de distintas formas la definición original de Brown y si bien son similares, su equivalencia no es inmediatamente evidente, por lo que uno podría dudar de si un teorema expresado para una de las definiciones es válido con la otra. Por lo tanto, presentamos a continuación dos lemas sobre esta equivalencia, para el caso simultáneo y alternante respectivamente. La idea será probar que los historiales de la definición 3.3.3 suman en cada iteración la estrategia pura correspondiente a la acción elegida por la definición 3.3.2. Comenzamos con el caso simultáneo.

Lema 4.1.1. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, $(\widetilde{i^\tau}, \widetilde{j^\tau})_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultáneo (según la definición 3.3.2) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultáneo (según la definición 3.3.3), tales que $p^1 = \widetilde{i^1}$, $q^1 = \widetilde{j^1}$ y ambas usan las mismas reglas de desempate (d_1, d_2). Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, $\forall \tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre τ.

Para $\tau = 1$, tenemos $p^1 = \widetilde{i^1} = \sum_{s=1}^{1} \widetilde{i^s}$ y $q^1 = \widetilde{j^1} = \sum_{s=1}^{1} \widetilde{j^s}$.

Veamos ahora el caso de un $\tau > 1$, suponiendo que $p^{\tau-1} = \sum_{s=1}^{\tau-1} \widetilde{i^s}$ y $q^{\tau-1} = \sum_{s=1}^{\tau-1} \widetilde{j^s}$. Por la definición 3.3.3, $p^\tau = p^{\tau-1} + \widetilde{i}$ donde $i = d_1(argmax_{i\in N}\{\widetilde{i}Ap^{\tau-1}\})$. Pero también sabemos, por la definición 3.3.2 que $i^\tau = d_1(BR_1(y^{\tau-1})) = d_1(BR_1(\frac{\sum_{s=1}^{\tau-1} \widetilde{j^s}}{\tau-1})) =$

$d_1(argmax_{i\in N}\{A\frac{\sum_{s=1}^{\tau-1}\widetilde{j^s}}{\tau-1})\}) = d_1(argmax_{i\in N}\{A\frac{q^{\tau-1}}{\tau-1})\})$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, $i^\tau = d_1(argmax_{i\in N}\{Aq^{\tau-1})\})$. Luego, aplicando esto a la definición 3.3.3, $p^\tau = p^{\tau-1} + \widetilde{i^\tau} = \sum_{s=1}^{\tau-1}\widetilde{i^s} + \widetilde{i^\tau} = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}$.

Análogamente, $q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{j^s}$. □

En el caso alternante, la jugada del jugador columna ya no es análoga a la del jugador fila, y el análisis es un poco mas complejo.

Lema 4.1.2. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n\times m$, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definición 3.3.2) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definición 3.3.3), tales que $p^1 = \widetilde{i^1}$ y ambas usan las mismas reglas de desempate (d_1, d_2). Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, para todo $\tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{j^s}$$

Demostración. Nuevamente, procederemos por inducción sobre τ.

Para $\tau = 1$, sabemos que $p^1 = \widetilde{i^1} = \sum_{s=1}^{1}\widetilde{i^s}$. Por la definición 3.3.3, $q^1 = q^0 + \widetilde{j}$ donde q^0 es el vector nulo y $j = d_2(argmax_{j\in M}\{p^1B\widetilde{j}\}) = d_2(argmax_{j\in M}\{\widetilde{i^1}B\widetilde{j}\})$. Además, por la definición 3.3.2, sabemos que $j^1 = d_2(BR_2(x^1)) = d_2(BR_2(\frac{\sum_{s=1}^{1}\widetilde{i^s}}{\tau})) = d_2(BR_2(i^1)) = d_2(argmax_{j\in M}\{\widetilde{i^1}B\widetilde{j}\})$. Luego, $q^1 = \widetilde{j^1} = \sum_{s=1}^{1}\widetilde{j^s}$.

Veamos ahora el caso de $\tau > 1$, suponiendo que $p^{\tau-1} = \sum_{s=1}^{\tau-1}\widetilde{i^s}$ y $q^{\tau-1} = \sum_{s=1}^{\tau-1}\widetilde{j^s}$. Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso inductivo del lema 4.1.1, $p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}$. Por otro lado, $q^\tau = y^\tau + \widetilde{j}$ donde $j = d_2(argmax_{j'\in M}\{p^{\tau+1}B\widetilde{j'}\}) = d_2(argmax_{j'\in M}\{\sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}B\widetilde{j'}\})$. Sabemos además, por la definición 3.3.2, que $j^\tau = d_2(BR_2(x^\tau)) = d_2(BR_2(\frac{\sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}}{\tau})) = d_2(argmax_{j'\in N}\{\frac{\sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}}{\tau}B\widetilde{j}\}) = d_2(argmax_{j'\in N}\{\frac{p^\tau}{\tau}B\widetilde{j}\})$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, $j^\tau = d_2(argmax_{j'\in N}\{p^\tau B\widetilde{j}\})$. Luego, aplicando esto a la definición 3.3.3, $q^\tau = q^{\tau-1} + j^\tau = \sum_{s=1}^{\tau-1}\widetilde{j^s} + j^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{j^s}$. □

4.2. Convergencia de juego ficticio

En su publicación de 1997, Monderer y Sela [7] enuncian un resultado que nos da una intuición interesante sobre el comportamiento del juego ficticio. Al ser este un mecanismo utilizado para encontrar equilibrios de Nash, uno esperaría observar un comportamiento estable alrededor de los mismos, es decir, que una vez que se juegue un equilibrio de Nash, este se repita infinitamente y la secuencia de jugadas converja en el mismo.

Monderer y Sela llaman a esto el **principio de estabilidad**. La demostración que presentan es mediante otros principios y conceptos que desarrollan en esa publicación, pero este resultado puede probarse de forma más directa aplicando el concepto de reglas de desempate.

Este principio nos será útil en el capítulo siguiente para simplificar las demostraciones sobre la velocidad de convergencia, pero Monderer y Sela demostraron el principio solo para la variante simultánea. Por lo tanto, presentaremos a continuación una demostración del principio de estabilidad para el juego ficticio alternante.

Empezaremos por un lema que nos dice que si el proceso juega un equilibrio de Nash, entonces las jugadas de este estarán en los conjuntos de mejor respuesta de la iteración siguiente.

Lema 4.2.1. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$. Si en la iteración k se jugó el equilibrio de Nash puro (i^*, j^*), entonces $i^* \in BR_1(y^k)$ y $j^* \in BR_2(x^{k+1})$.*

Demostración. Comencemos con el caso del jugador fila. Queremos probar que i^* es una mejor respuesta a las creencias del jugador fila sobre la estrategia del jugador columna. Veamos primero entonces que forma tienen estas creencias según como se actualizan.

$$y^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s} + \widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}}{k} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}(k-1)}{k(k-1)} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}$$

Luego, tendremos que el conjunto de mejor respuesta será:

$$\begin{aligned} BR_1(y^k) &= BR_1(\frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{j^*}{k}) \\ &= \operatorname*{argmax}_{i\in N} \{\widetilde{i} A (\frac{(k-1)y^{k-1}}{k} + \frac{j^*}{k})\} \\ &= \operatorname*{argmax}_{i\in N} \{\frac{(k-1)}{k} \widetilde{i} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i} A j^*\} \end{aligned}$$

Como en la iteración k se jugó el perfil (i^*, j^*), por la definición 3.3.2, sabemos que $i^* \in BR_1(y^{k-1}) = \operatorname{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i} A y^{k-1}\}$. Es decir que para cualquier $i \in N$, $\widetilde{i^*} A y^{k-1} \geq \widetilde{i} A y^{k-1}$ y también (multiplicando en ambos lados por una constante positiva) que $\frac{(k-1)}{k} \widetilde{i^*} A y^{k-1} > \frac{(k-1)}{k} \widetilde{i} A y^{k-1}$.

Sabemos también, al ser un equilibrio de Nash, que $i^* \in BR_1(\widetilde{j^*}) = \operatorname{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i} A j^*\}$. Es decir que para cualquier $i \in N$, $\widetilde{i^*} A j^* \geq \widetilde{i} A j^*$ y consecuentemente $\frac{1}{k} \widetilde{i^*} A j^* \geq \frac{1}{k} \widetilde{i} A j^*$.

Podemos sumar estas dos desigualdades para afirmar que $\frac{(k-1)}{k} \widetilde{i^*} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i^*} A j^* \geq \frac{(k-1)}{k} \widetilde{i} A y^{k-1} + \frac{1}{k} \widetilde{i} A j^*$ para cualquier $i \in N$ y por lo tanto $i^* \in BR_1(y^k)$.

El caso del jugador columna será similar. Queremos probar que j^* es una mejor respuesta a sus creencias sobre la estrategia del jugador fila, pero incluyendo la última iteración. Las creencias se actualizan como:

$$x^{k+1} = \frac{\sum_{s=1}^{k} \widetilde{i^s} + \widetilde{i^*}}{k+1} = \frac{\sum_{s=1}^{k} \widetilde{i^s}}{k+1} + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1} = \frac{\sum_{s=1}^{k} k(\widetilde{i^s})}{k(k+1)} + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1} = \frac{k}{k+1}x^k + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1}$$

Luego, tendremos que el conjunto de mejor respuesta será:

$$\begin{aligned} BR_2(x^{k+1}) &= BR_2(\frac{k}{k+1}x^k + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1}) \\ &= \operatorname*{argmax}_{j\in M}\{(\frac{kx^k}{k+1} + \frac{i^*}{k+1})B\widetilde{j}\} \\ &= \operatorname*{argmax}_{j\in M}\{\frac{k}{k+1}x^k B\widetilde{j} + \frac{1}{k+1}i^* B\widetilde{j}\} \end{aligned}$$

Como en la iteración k se jugó el perfil (i^*, j^*), por la definición 3.3.2, sabemos que $j^* \in BR_2(x^k) = \text{argmax}_{j\in M}\{x^k B\widetilde{j}\}$. Es decir que para cualquier $j \in M$, $x^k B\widetilde{j*} \geq x^k B\widetilde{j}$ y también (multiplicando en ambos lados por una constante positiva) que $\frac{k}{k+1}x^k B\widetilde{j*} \geq \frac{k}{k+1}x^k B\widetilde{j}$.

Sabemos también, al ser un equilibrio de Nash, que $j^* \in BR_2(\widetilde{i^*}) = \text{argmax}_{j\in M}\{i^* B\widetilde{j}\}$. Es decir que para cualquier $j \in M$, $i^* B\widetilde{j^*} \geq i^* B\widetilde{j}$ y consecuentemente $\frac{1}{k+1}i^* B\widetilde{j^*} \geq \frac{1}{k+1}i^* B\widetilde{j}$.

Podemos, nuevamente, sumar estas dos desigualdades para afirmar que $\frac{k}{k+1}x^k B\widetilde{j*} + j \in M$, $i^* B\widetilde{j^*} \geq \frac{k}{k+1}x^k B\widetilde{j} + i^* B\widetilde{j}$ para cualquier $j \in M$ y por lo tanto $j^* \in BR_2(x^{k+1})$. □

El siguiente lema nos dice que si el proceso juega un equilibrio de Nash, entonces los conjuntos de mejor respuesta en la siguiente iteración no tienen nuevos elementos.

Lema 4.2.2. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultáneo en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$. Si en la iteración k se jugó el equilibrio de Nash puro (i^*, j^*), entonces $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$ y $BR_2(x^{k+1}) \subseteq BR_2(x^k)$.*

Demostración. Comencemos por el caso del jugador fila. Para probar que $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$, debemos probar que para todo $i \in N$, se cumple que $i \in BR_1(y^k) \implies i \in BR_1(y^{k-1})$, o por contra-recíproco, que $i \notin BR_1(y^{k-1}) \implies i \notin BR_1(y^k)$. Supongamos entonces un $i' \in N$ tal que $i' \notin BR_1(y^{k-1})$.

Como $BR_1(y^{k-1}) = \text{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i}Ay^{k-1}\}$, si $i^* \in BR_1(y^{k-1})$ pero $i' \notin BR_1(y^{k-1})$, entonces sabemos que $\widetilde{i^*}Ay^{k-1} > \widetilde{i'}Ay^{k-1}$ y luego (multiplicando ambos lados por una constante positiva) que $\frac{(k-1)}{k}\widetilde{i^*}Ay^{k-1} > \frac{(k-1)}{k}\widetilde{i'}Ay^{k-1}$.

Además, como (i^*, j^*) es equilibrio de Nash puro, sabemos que $i^* \in BR_1(\widetilde{j*}) = \text{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i}A\widetilde{j^*}\}$. Es decir que $\widetilde{i^*}A\widetilde{j^*} \geq \widetilde{i'}A\widetilde{j^*}$ y también $\frac{k-1}{k}\widetilde{i^*}A\widetilde{j^*} \geq \frac{k-1}{k}\widetilde{i'}A\widetilde{j^*}$.

Entonces, podemos razonar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\widetilde{i^*}Ay^k &= \widetilde{i^*}A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}) = \frac{(k-1)}{k}\widetilde{i^*}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i^*}A\widetilde{j^*} \\ &> \frac{(k-1)}{k}\widetilde{i'}Ay^{k-1} + \frac{1}{k}\widetilde{i'}A\widetilde{j^*} = \widetilde{i'}A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}) = \widetilde{i'}Ay^k\end{aligned}$$

Puesto que sabemos por el lema anterior que $i^* \in BR_1(y^k) = \text{argmax}_{i\in N}\{\widetilde{i}Ay^k\}$, entoces $i' \notin BR_1(y^k)$.

Veamos ahora el caso del jugador columna. Similarmente, probaremos que para todo $j \in M$, $j \notin BR_2(x^k) \implies j \notin BR_2(x^{k+1})$. Supongamos entonces un $j' \in M$ tal que $j' \notin BR_2(x^k)$.

Como $BR_2(x^k) = \text{argmax}_{j\in M}\{x^kB\widetilde{j}\}$, si $j^* \in BR_2(x^k)$ pero $j^* \notin BR_2(x^k)$ entonces sabemos que $x^kB\widetilde{j^*} > x^kB\widetilde{j'}$ y luego (multiplicando ambos lados por una constante positiva) que $\frac{k}{k+1}x^kB\widetilde{j^*} > \frac{k}{k+1}x^kB\widetilde{j'}$.

Además, como (i^*, j^*) es equilibrio de Nash puro, sabemos que $j^* \in BR_2(\widetilde{i^*}) = \text{argmax}_{j\in N}\{\widetilde{i^*}B\widetilde{j}\}$. Es decir que $\widetilde{i^*}B\widetilde{j*} \geq \widetilde{i^*}B\widetilde{j'}$ y también $\frac{k}{k+1}\widetilde{i^*}B\widetilde{j*} \geq \frac{k}{k+1}\widetilde{i^*}B\widetilde{j'}$. Entonces:

$$\begin{aligned}x^{k+1}B\widetilde{j^*} &= (\frac{k}{k+1}x^k + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1})B\widetilde{j^*} = \frac{k}{k+1}x^kB\widetilde{j^*} + \frac{1}{k+1}\widetilde{i^*}B\widetilde{j^*} \\ &> \frac{k}{k+1}x^kB\widetilde{j'} + \frac{1}{k+1}\widetilde{i^*}B\widetilde{j'} = (\frac{k}{k+1}x^k + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1})B\widetilde{j'} = x^{k+1}B\widetilde{j'}\end{aligned}$$

Y como sabemos por el lema anterior que $j^* \in BR_2(x^{k+1}) = \text{argmax}_{j\in M}\{x^{k+1}B\widetilde{j'}\}$, entonces $j' \notin BR_2(x^{k+1})$

□

Combinando estos dos lemas podemos ahora sí, demostrar el principio de estabilidad en el juego ficticio alternante.

Teorema 4.2.1. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultáneo en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ y reglas de desempate (d_1, d_2). Si en la iteración k se jugó el equilibrio de Nash puro (i^*, j^*), entonces este perfil se repetirá en la iteración siguiente.*

Demostración. Nuevamente, comencemos por el jugador fila. Sabemos que en la iteración k se jugó $(i*, j*)$, lo cual nos asegura que $d_1(BR_1(y^{k-1})) = i^*$. Pero sabemos también por los lemas anteriores que $i^* \in BR_1(y^k)$ y que $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$. Luego, por la definición 3.3.1, debe ser que $d_1(BR_1(y^k)) = i^*$. Es decir, volverá a jugar i^*.

Similarmente, para el jugador columna sabemos que $d_2(BR_2(x^k)) = j^*$ y también por los lemas anteriores que $j^* \in BR_2(x^{k+1})$ y $BR_2(x^{k+1}) \subseteq BR_2(x^k)$. Por la definición 3.3.1 tendremos entonces que $d_2(BR_2(x^{k+1})) = i^*$ y, por la definición de juego ficticio alternante, el proceso volverá a jugar el perfil (i^*, j^*) en la iteración $k + 1$. □

4.3. Preservación del juego ficticio

Analizaremos a continuación las operaciones matriciales que preservan secuencias de juego ficticio. Esto es, funciones f sobre matrices que garanticen que, dadas dos matrices A y B y una secuencia (i^τ, j^τ) de juego ficticio cualquiera sobre (A, B), la misma (i^τ, j^τ) sea también una secuencia de juego ficticio sobre $(f(A), f(B))$. Esto nos servirá en la sección siguiente para generalizar los resultados obtenidos sobre velocidad de convergencia.

En primer lugar, cualquier transformación que preserve las relaciones de orden de los pagos manteniendo el tamaño del juego (tales como escalar todos los pagos por un mismo factor o sumarle a todos una constante) claramente preservará las secuencias de juego ficticio. Cuando se varía el tamaño del juego, en cambio, la preservación puede no ser trivial o no valer, según la clase de juego.

¿Qué ocurre, por otro lado, si expandimos la matriz? Una forma evidente de conservar las secuencias de juego ficticio es expandirla con filas y columnas que tengan ganancias muy bajas para ambos jugadores, de manera de asegurarnos de que las nuevas acciones nunca entren en los conjuntos de menor respuesta. Pero sería interesante además, que estas expansiones sean cerradas en la familia de juegos (suma cero, intereses idénticos, etc). La transformación recién descripta, claramente puede romper estas propiedades.

Más aun, nos interesa además que tras el cambio se mantengan la mayoría de los valores presentes en la matriz original. El caso general puede ser complejo, pero a priori damos la siguiente formalización. Llamaremos **rango de imagen** de una matriz A al cardinal del conjunto de los valores tomados por todos sus elementos. Buscamos entonces, de ser posible, expansiones de un juego que tengan rango de imagen mínimo manteniendo las propiedades deseadas. En todos los casos nos interesará, tras el agregado de filas o columnas, no la exactitud del rango de imagen sino el orden de magnitud en función de las dimensiones.

Por último, expandir un juego claramente agrega nuevas secuencias de juego ficticio (aquellas que empiezan en las jugadas nuevas). En estos casos, nos interesará que estas nuevas secuencias no presenten comportamientos nuevos, sino que luego de pocas jugadas pasen a comportarse como secuencias ya presentes en el juego original. Diremos que una secuencia de juego ficticio s termina con una secuencia t (siendo esta finita o no), o que t es un sufijo de s, si existe s' finita tal que $s = s't$.

Presentamos a continuación un lema que muestra como podemos aplicar una transformación que expanda un juego de intereses idénticos cumpliendo estas condiciones.

Lema 4.3.1. *Sea A un juego de intereses idénticos de tamaño $n \times m$ con un único equilibrio de Nash puro, y sean $n' \geq n$, $m' \geq m$. Entonces existe un juego de intereses idénticos A' de tamaño $n' \times m'$ y rango de imagen $O(n+m)$ con un único equilibrio de Nash puro tal que:*

- *Si A es no degenerado, entonces A' es no degenerado.*
- *Toda secuencia de FP (simultáneo o alternante) en A lo es también en A'.*

- *Toda secuencia de FP alternante sobre A' es, a partir del paso 2, una secuencia de FP alternante sobre A.*

Demostración. Demostraremos el lema iterativamente, comenzando por agregar una fila.

Sin pérdida de generalidad y para simplificar la construcción, supondremos[1] que el equilibrio de Nash está en la posición $(1, 1)$. Para obtener un juego de intereses idénticos A' de $(n+1) \times m$ con las propiedades indicadas, basta definir A' de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|cccc|} & j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ \hline i_1 & & & & \\ i_2 & & & A & \\ \vdots & & & & \\ i_n & & & & \\ \hline i_{n+1} & v-n-1 & v-n-2 & \dots & v-n-m \\ \hline \end{array}$$

Donde $v = min(A)$, valor que utilizaremos durante el resto del proceso (no cambia a lo largo de las iteraciones). Los términos $-1, -2, \dots, -m$nos aseguran que las ganancias en la nueva fila son diferentes entre sí y diferentes a todos los valores de sus respectivas columnas y por lo tanto, si A es no degenerado, A' tambinén lo será[2]. Para evitar ambigüedades, notaremos los conjuntos de mejor respuesta con supraíndices según el juego al que corresponden (por ejemplo, $BR_1^A(y)$).

Para cualquier estrategia pura del jugador columna, i_{n+1} es la peor jugada posible del jugador fila. Entonces, contra cualquier estrategia mixta y, i_{n+1} minimizará la ganancia esperada y, como existen otras jugadas provenientes del juego original, $i_{n+1} \notin BR_1^{A'}(y)$.

Sea entonces (i^τ, j^τ) una secuencia de juego ficticio (simultaneo o alternante) sobre A. En cada iteración τ, si $i^\tau \in BR_1^A(y^{\tau-1})$, también $i^\tau \in BR_1^{A'}(y^{\tau-1})$. En el caso del jugador columna, al no existir diferencias en la estrategia empírica del jugador fila y no existir acciones nuevas, el proceso elegirá en cada iteración las mismas jugadas. Por lo tanto, (i^τ, j^τ) es tambien una secuencia de juego ficticio sobre A.

Similarmente, si una secuencia de juego ficticio alterante sobre A' comienza con $i^0 = i_{n+1}$, para cualquier estrategia del jugador 2, los conjuntos de mejor respuesta nunca contendrán a i_{n+1} y por lo tanto la secuencia terminará con una ya existente en A.

Para obtener un juego de intereses idénticos de tamaño $n \times (m+1)$ que cumpla las propiedades deseadas, podemos definir A' como:

$$\begin{array}{c|cccc|c|} & j_1 & j_2 & \dots & j_m & j_{m+1} \\ \hline i_1 & & & & & v-m-1 \\ i_2 & & A & & & v-m-2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ i_n & & & & & v-m-n \\ \hline \end{array}$$

[1]Consecuentemente con el orden relativo de los valores en cada fila y columna a agregar.

[2]Condión que más adelante será requerida por el teorema 4.4.3

El análisis sobre este juego será bastante similar con la salvedad de que al analizar las jugadas del jugador 2 deberemos considerar $BR_2^{A'}(x^{\tau-1})$ o $BR_2^{A'}(x^{\tau})$ dependiendo de si trata de una secuencia de juego ficticio simultaneo o alternante respectivamente.

Finalmente, se itera la construcción anterior $n' - n + m' - m$ veces para obtener un juego de intereses idénticos de $n' \times m'$ con las propiedades deseadas. Los términos $-n$ y $-m$ aseguran un rango de imagen $O(n+m)$.

□

Claramente, no vale un lema similar para la reducción en tamaño de las matrices, ya que quitar una fila o columna podría eliminar una acción por la cuál pasa la secuencia.

4.4. Velocidad de convergencia del juego ficticio alternante

En esta incorporé los cambios del paper.

En esta sección nos enfocaremos en estudiar más detalladamente los resultados de Brandt, Fischer y Harrenstein [3], en el que presentan cotas superiores para la velocidad de convergencia del juego ficticio simultáneo en algunas clases de juegos que resultan de interés. Como dijimos en el capítulo 2, los autores mencionan la posibilidad de expandir sus resultados a la variante alternante de juego ficticio. Presentamos a continuación nuestro análisis para los casos de los juegos simétricos de suma cero y los no degenerados de intereses idénticos. Por claridad, aprovecharemos el hecho de que todos los casos analizados en esta sección resultan en conjuntos de mejores respuestas unitarios para omitir las reglas de desempate, ya que no afectarán los resultados.

Veamos primero que para el caso de los juegos simétricos de suma cero, el teorema de estos autores efectivamente es expandible de forma bastante directa a la variante alternante. Vale la pena notar que formulamos el teorema en términos de que el último perfil no sea un equilibrio de Nash puro, en vez de pedir que ninguno en la secuencia lo sea como hacen Brandt, Fischer y Harrenstein ya que por el principio de estabilidad, si alguno de los perfiles jugados en la secuencia fuera un equilibrio de Nash puro, todos los siguientes lo serían.

Teorema 4.4.1. *Existe un juego simétrico de suma cero A de 3×3 representable en $O(k)$ bits con al menos un equilibrio de Nash puro y una secuencia de FP alternante $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ sobre A tal que (i^{2^k-1}, j^{2^k-1}) no es un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Sea A el juego simétrico siguiente:

$$\begin{array}{c|ccc|} . & j^1 & j^2 & j^3 \\ \hline i^1 & 0 & -1 & -\epsilon \\ i^2 & 1 & 0 & -\epsilon \\ i^3 & \epsilon & \epsilon & 0 \\ \hline \end{array}$$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (i^3, j^3) es el único equilibrio de Nash. [3].

[3] Puede verse en forma directa o bien al ser el único perfil resultante después de la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas [28]

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1,\ 0,\ 0)$	$(0, 1, 2^{-k})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
2	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2})$	$(-2^{-(k+1)},\ \frac{1-2^{-k}}{2},\ 2^{-(k+1)})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
3	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3})$	$(-\frac{2^{-k+1}}{3},\ \frac{1-2^{-k+1}}{3},\ \frac{2^{-k}}{3})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
	$\vdots$				
τ	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{\tau},\ 0,\ \frac{\tau-1}{\tau})$	$(-\frac{(\tau-1)2^{-k}}{\tau},\ \frac{1-(\tau-1)2^{-k}}{\tau},\ \frac{2^{-k}}{\tau})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
	$\vdots$				
2^k	$(i_3,\ j_2)$	$(\epsilon,\ 0,\ \frac{\epsilon-1}{\epsilon})$	$(\epsilon(\epsilon-1),\ \epsilon^2,\ \epsilon^2)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$

Tabla 4.1: Proceso de juego ficticio alternante en el juego del teorema 4.4.1

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario y sea $\epsilon = 2^{-k}$. Para estos valores, ϵ puede codificarse en $O(k)$ bits, mientras que el tamaño de la matriz y las representaciones de las otras utilidades del juego son constantes, por lo que la representación del juego será tambien del orden de $O(k)$ bits. Por lo tanto, si probamos que un proceso de juego ficticio alternante puede requerir 2^{k-1} rondas antes de que se juegue (i^3, j^3), el teorema estará demostrado.

Si el proceso comienza con el jugador fila jugando i^1, entonces las utilidades esperadas del jugador columna serán $-x^1A = (0, 1, \epsilon)$ y elegirá j_2.

En la siguiente ronda, el jugador 1 reaccionará con i_3, dando que el jugador 2 tendrá una creencia sobre su estrategia de $x^2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, por lo que las utilidades esperadas del jugador 2 serán $-x^2A = (\frac{-\epsilon}{2}, \frac{1-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$y volverá a elegir j_2.

Este perfil (i_3, j_2) se repetirá $2^k - 2$ rondas, ya que tendremos que mientras $2 \le \tau \le 2^k$, se cumplirán:

$$\begin{aligned} x^\tau &= \frac{\widetilde{i_1} + (\tau-1)\widetilde{i_3}}{\tau} = (\frac{1}{\tau}, 0, \frac{\tau-1}{\tau}) \\ -x^\tau A &= (-\frac{(\tau-1)\epsilon}{\tau}, \frac{1-(\tau-1)\epsilon}{\tau}, \frac{\epsilon}{\tau}) \\ y^\tau &= \widetilde{j_2} = (0,1,0) \\ Ay^\tau &= (-1, 0, \epsilon) \end{aligned}$$

La tabla 4.1, muestra como se desarrolla este proceso. Para el jugador fila, justificar su decisión es trivial ya que la estrategia percibida de su oponente es pura e i_3 es la única acción con utilidad esperada positiva. Para entender por qué el jugador columna no cambia su estrategia, debemos notar que:

$$\begin{aligned}
\tau &< 2^k = \frac{1}{\epsilon} \\
(\tau - 1 + 1)\epsilon &< 1 \\
(\tau - 1)\epsilon + \epsilon &< 1 \\
\epsilon &< 1 - (\tau - 1)\epsilon \\
\frac{\epsilon}{\tau} &< \frac{1 - (\tau - 1)\epsilon}{\tau}
\end{aligned}$$

Esto podemos interpretarlo como que si bien en las iteraciones recientes el jugador 1 jugó i_3, el incentivo resultante de la única vez que jugó i_1 es muy fuerte por la gran diferencia de utilidades para el jugador 2 entre (i_1, j_2) e (i_2, j_3), por lo que deberán pasar 2^{k-1} iteraciones de i_3 luego de ese único i_1 para que las utilidades esperadas se compensen.

Concluimos entonces que la secuencia

$$(i_1, j_2), \underbrace{(i_3, j_2), ...(i_3, j_2)}_{2^k - 2 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cual no se juega ningún equilibrio de Nash puro[4]. □

Por su parte, la demostración para el caso de los juegos no degenerados de 2×3 es un poco menos directa y requiere plantear una ligera variante del juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein.

Teorema 4.4.2. *Para todo $n \geq 2$, $m \geq 3$, existe un juego no degenerado de intereses idénticos A de $n \times m$ representable en $O(k + nm.log(max\{n, m\}))$ bits con al menos un equilibrio de Nash puro, con rango de imagen $O(n + m)$, y una secuencia de juego ficticio alternante $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ sobre A tal que (i^{2^k}, j^{2^k}) no es un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Sea A el juego de intereses idénticos siguiente:

.	j^1	j^2	j^3
i^1	1	2	0
i^2	0	$2+\epsilon$	$2+2\epsilon$

Si $\epsilon < 1$, vemos que (i^2, j^3) es el único equilibrio de Nash puro.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, un proceso de juego ficticio alternante puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (i^2, j^3). Al igual que en la demostración anterior, el juego puede codificarse en $O(k)$ bits.

[4]Que en la ronda 2^k se juegue un NE o aún no, dependerá de la regla de desempate usada.

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
2	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},2+\frac{\epsilon}{2},1+\epsilon)$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
3	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3},2+\frac{2}{3}\epsilon,\frac{4+4\epsilon)}{3})$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
	$\vdots$				
τ	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{\tau},\frac{\tau-1}{\tau})$	$(\frac{1}{\tau},2+\frac{\tau-1}{\tau}\epsilon,2\frac{\tau-1}{\tau}(1+\epsilon))$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
	$\vdots$				
2^k	$(i_2,\ j_2)$	$(\epsilon,1-\epsilon)$	$(\epsilon,2+\epsilon-\epsilon^2,2(1-\epsilon)(1+\epsilon))$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$

Tabla 4.2: Proceso de juego ficticio alternante en el juego del teorema 4.4.2

Si el proceso comienza con el jugador fila jugando i^1, entonces $x^1A = (1,2,0)$ y por lo tanto el jugador columna elegirá j_2.

En la siguiente ronda, el jugador 1 reaccionará con i_2, dando que el jugador 2 tendrá una creencia sobre su estrategia de $x^2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, por lo que las utilidades esperadas del jugador 2 serán $x^2A = (\frac{1}{2}, 2+\frac{\epsilon}{2}, 1+\epsilon)$ y volverá a elegir j_2.

Este perfil (i_2, j_2) se repetirá $2^k - 1$ rondas, ya que tendremos que mientras $2 \le \tau \le 2^k$, se cumplirán:

$$\begin{aligned}
x^\tau &= \frac{\widetilde{i_1} + (\tau-1)\widetilde{i_2}}{\tau} = (\frac{1}{\tau}, \frac{\tau-1}{\tau}) \\
x^\tau A &= (\frac{1}{\tau}, 2 + \frac{\tau-1}{\tau}\epsilon, 2\frac{\tau-1}{\tau}(1+\epsilon)) \\
y^\tau &= \widetilde{j_2} = (0,1,0) \\
Ay^\tau &= (2, 2+\epsilon)
\end{aligned}$$

La tabla 4.2, muestra como se desarrolla este proceso. Para el jugador fila, justificar su decisión es trivial ya que la estrategia percibida de su oponente es pura y la utilidad esperada de i_2 es siempre marginalmente mayor que la de i_1. Para entender por qué el jugador columna no cambia su estrategia, debemos notar que:

$$\begin{aligned}
\tau \leq 2^k &= \frac{1}{\epsilon} \\
\tau &< \frac{2}{\epsilon} + 1 \\
\epsilon &< \frac{2}{\tau - 1} \\
2\epsilon + 2 &< \frac{2}{(\tau - 1)} + \epsilon + 2 \\
\frac{2(\tau-1)(1+\epsilon)}{\tau} &< \frac{2 + (\tau-1)(2+\epsilon)}{\tau} \\
2\frac{(\tau-1)}{\tau}(1+\epsilon) &< 2 + \frac{\tau-1}{\tau}\epsilon
\end{aligned}$$

Similarmente al teorema anterior, esto podemos interpretarlo como que si bien en las iteraciones recientes el jugador 1 jugó i_2, el incentivo resultante de la única vez que jugó i_1 es muy fuerte por la gran diferencia de utilidades para el jugador 2 entre (i_1, j_3) e (i_2, j_3), por lo que deberán pasar 2^{k-1} iteraciones de i_2 luego de ese único i_1 para que las utilidades esperadas se compensen.

Concluimos entonces que la secuencia

$$(i_1, j_2), \underbrace{(i_2, j_2), ...(i_2, j_2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k en la que no aparece ningún equilibrio de Nash puro, y el teorema sigue del lema 4.3.1 con a lo sumo nm elementos que requieren $O(log(max\{n, m\}))$ bits cada uno. □

El detalle de que el juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein no nos sirva para demostrar el teorema anterior no es para nada menor. En efecto, como veremos en el siguiente teorema, es un ejemplo de un juego en el que un proceso de juego ficticio simultáneo puede requerir una cantidad de rondas exponenciales, mientras que toda secuencia de juego ficticio alternante converge rápidamente.

Teorema 4.4.3. *Para todo $n \geq 2$, $m \geq 3$, existe un juego no degenerado de intereses idénticos A de $n \times m$ representable en $O(k + nm.log(max\{n, m\}))$ bits, con rango de imagen $O(n + m)$, y una secuencia de juego ficticio simultáneo $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ sobre A tal que, (i^{2^k}, j^{2^k}) no es un equilibrio de Nash puro y para todo proceso de juego ficticio alternante $(\widehat{i}^\tau, \widehat{j}^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ en A, $(\widehat{i}^4, \widehat{j}^4)$ es un equilibrio de Nash puro.*

este teorema y el anterior estaban planteados aca en terminos de toda la secuencia, sin tener en cuenta el principio de estabilidad

Demostración. Sea A el juego de intereses idénticos siguiente:

.	j^1	j^2	j^3
i^1	1	2	0
i^2	0	$2+\epsilon$	3

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	(i_2, j_3)	$(0, 1)$	$(0, 2+\epsilon, 3)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 3)$

Tabla 4.3: Proceso de juego ficticio alternante sobre el juego del teorema 4.4.3 comenzando por i_2

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(2, 2+\epsilon)$
2	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 2+\frac{\epsilon}{2}, \frac{3}{2})$	$(0, 1, 0)$	$(2, 2+\epsilon)$
3	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3}, 2+\frac{2}{3}\epsilon, 2)$	$(0, 1, 0)$	$(2, 2+\epsilon)$
4	$(i_2,\ j_3)$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$	$(\frac{1}{4}, 2+\frac{3}{4}\epsilon, \frac{9}{4})$	$(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3(3+\epsilon)}{4})$

Tabla 4.4: Proceso de juego ficticio alternante sobre el juego del teorema 4.4.3 comenzando por i_1

τ	(i^τ, j^τ)	x^τ	$x^\tau B$	y^τ	Ay^τ
1	(i_1, j_1)	$(1, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(1, 0)$
2	(i_1, j_2)	$(1, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{3}{2}, \frac{2+\epsilon}{2})$
3	(i_1, j_2)	$(1, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$	$(\frac{5}{3}, \frac{4+2\epsilon}{3})$
$\vdots$					
τ	$(i_1,\ j_2)$	$(1, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(\frac{1}{\tau}, \frac{\tau-1}{\tau}, 0)$	$(2-\frac{1}{\tau}, (2+\epsilon)\frac{\tau-1}{\tau})$
$\vdots$					
2^k	$(i_1,\ j_2)$	$(1, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(\epsilon, 1-\epsilon, 0)$	$(2-\epsilon, (2+\epsilon)(1-\epsilon))$

Tabla 4.5: Proceso de juego ficticio simultáneo sobre el juego del teorema 4.4.3 comenzando por (i_1, j_1)

Si $\epsilon < 1$, (i^2, j^3) es el único equilibrio de Nash puro.

Consideremos un $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, un proceso de juego ficticio simultáneo puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (i_2, j_3), mientras que todo proceso de juego ficticio alternante converge de forma pura en un número constante de rondas. Al igual que en los teoremas anteriores, el juego puede codificarse en $O(k)$ bits.

Veamos primero el caso alternante. Existen dos posibles secuencias de juego ficticio alternante para este juego, dado que el jugador 1 elegirá primero y el jugador 2 reaccionara según esta decisión.

Si el jugador fila juega i^2, el jugador columna responderá con j^3, siendo este el equilibrio puro. Si el jugador fila comienza con i^1, el jugador columna responderá con j^2. Esto hará que el jugador fila juegue i^2 en la segunda ronda por ser $\widetilde{Aj^2} = (2, 2+\epsilon)$, mientras que el jugador continuará fila continuara jugando j^2. Esta situación se repetirá una ronda más, tras la cuál, la jugador columna se verá incentivado a jugar j^3. Los desarrollos de estos dos procesos pueden verse en las tablas 4.4 y 4.3. Vemos entonces que, independientemente del valor de k, ambos procesos convergen de forma pura en 4 rondas o menos.

Para el caso simultáneo, nos basamos en la prueba de [3]. Si el proceso comienza con el perfil (i^1, j^1), entonces las utilidades esperadas serán $Ay^1 = (1, 0)$ y $x^1B = (1, 2, 0)$ respectivamente. Luego, en la segunda iteración el jugador fila elegirá i^1 y el jugador columna j^2. Las utilidades esperadas se actualizarán entonces como $Ay^2 = (\frac{3}{2}, \frac{2+\epsilon}{2})$ y $x^2B = (1, 2, 0)$.

A continuación, por al menos 2^{k-1} rondas, los jugadores elegirán las mismas jugadas que en la iteración 2, dado que para todo τ tal que $2 \leq i \leq 2^k$, tendremos $Ay^\tau = (2 - \frac{1}{\tau}, (2+\epsilon)\frac{\tau-1}{\tau})$ y $x^\tau B = (1, 2, 0)$, y $\tau \leq 2^k \Rightarrow 1 > \epsilon(\tau - 1) \Rightarrow 2 - \frac{1}{\tau} > (2+\epsilon)\frac{\tau-1}{\tau}$. La tabla 4.5 muestra como se desarrolla este proceso.

Concluimos entonces que la secuencia de perfiles

$$(i_1, j_1), \underbrace{(i_1, j_2), ...(i_1, j_2)}_{2^{k-1} \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultáneo de este juego exponencialmente larga en k y en la cual no se juega ningún equilibrio de Nash puro, y el teorema sigue del lema 4.3.1 con a lo sumo nm elementos que requieren $O(log(max\{n, m\}))$ bits cada uno.

□

Capítulo 5

Conclusiones

Agregué y reescribí bastante acá

Hemos probado que el juego ficticio alternante puede requerir una cantidad exponencial de rondas antes de alcanzar un equilibrio de Nash puro, pero también puede converger en tiempos razonables para juegos en los que el simultáneo es exponencial. Para esto, hemos definido juegos minimales en tamaño que pueden ser extendidos manteniendo la misma propiedad. Si bien hay mucho para profundizar sobre esta diferencia hallada, creemos que es un posible indicador de que el juego ficticio alternante puede tener potencial práctico en casos donde el juego ficticio simultaneo es poco eficiente como mecanismo computacional para hallar equilibrios de Nash puros.

5.1. Trabajo futuro

Algunas preguntas que pueden formularse para profundizar en este hallazgo son: ¿Que otras clases de juegos presentan ejemplos con esta diferencia? Dado un juego que converge en un número exponencial de iteraciones en el juego ficticio simultáneo, ¿Qué propiedad debe cumplir para converger en un número lineal, o incluso constante, de iteraciones en el alternante? ¿Qué ocurre si consideramos la convergencia en creencias, en lugar de en jugadas? ¿Qué ocurre si consideramos la velocidad de convergencia en función del tamaño del juego en lugar de su tamaño de representación? ¿Como podemos generalizar este resultado a juegos de más de dos jugadores?

Otra línea de trabajo involucra generalizar el juego ficticio considerando $BR(x^{\tau-k})$ con k una constante, es decir, que los jugadores observen las decisiones varias rondas atrás, pero ignorando las recientes.

Bibliografía

[1] G. Brown. «Iterative solution of games by fictitious play». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* 13 (ene. de 1951).

[2] S. I. Gass y P. M. Zafra. «Modified fictitious play for solving matrix games and linear-programming problems». En: *Computers & Operations Research* 22.9 (1995), págs. 893-903. ISSN: 0305-0548. DOI: `https://doi.org/10.1016/0305-0548(94)00075-J`. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030505489400075J`.

[3] F. Brandt, F. Fischer y P. Harrenstein. «On the Rate of Convergence of Fictitious Play». En: *Theory of Computing Systems* 53.1 (jul. de 2013), págs. 41-52. ISSN: 1433-0490. DOI: `10.1007/s00224-013-9460-5`. URL: `https://doi.org/10.1007/s00224-013-9460-5`.

[4] S. Ganzfried y T. Sandholm. «Computing an Approximate Jam/Fold Equilibrium for 3-Player No-Limit Texas Hold'em Tournaments». En: *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems - Volume 2*. AAMAS '08. Estoril, Portugal: International Foundation for Autonomous Agents y Multiagent Systems, 2008, págs. 919-925. ISBN: 9780981738116.

[5] W. Zhu y P. Wurman. «Structural Leverage and Fictitious Play in Sequential Auctions». En: *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence* (jul. de 2002).

[6] U. Berger. «Brown's original fictitious play». En: *Journal of Economic Theory* 135 (feb. de 2007), págs. 572-578. DOI: `10.1016/j.jet.2005.12.010`.

[7] D. Monderer y A. Sela. *Fictitious play and- no-cycling conditions*. Sonderforschungsbereich 504 Publications 97-12. Sonderforschungsbereich 504, Universität Mannheim;Sonderforschungsbereich 504, University of Mannheim, jun. de 1997. URL: `https://ideas.repec.org/p/xrs/sfbmaa/97-12.html`.

[8] J. Robinson. «An Iterative Method of Solving a Game». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 54 (sep. de 1951). DOI: `10.2307/1969530`.

[9] K. Miyasawa. «On the Convergence of Learning Processes in a 2x2 Non-Zero-Person Game». En: (oct. de 1961).

[10] D. Monderer y A. Sela. «A 2x2 Game without the Fictitious Play Property». En: *Games and Economic Behavior* 14 (feb. de 1996), págs. 144-148. DOI: `10.1006/game.1996.0045`.

[11] L. Shapley. «Some Topics in Two-Person Games». En: *Annals of Mathematics Studies.* 52 (ene. de 1964).

[12] D. Monderer y L. Shapley. «Fictitious Play Property for Games with Identical Interests». En: *Journal of Economic Theory* 68 (feb. de 1996), págs. 258-265. DOI: `10.1006/jeth.1996.0014`.

[13] D. Monderer y L. S. Shapley. «Potential Games». En: *Games and Economic Behavior* 14.1 (1996), págs. 124-143. ISSN: 0899-8256. DOI: `https://doi.org/10.1006/game.1996.0044`. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825696900445`.

[14] U. Berger. «Learning in games with strategic complementarities revisited». En: *Journal of Economic Theory* 143 (nov. de 2008), págs. 292-301. DOI: `10.1016/j.jet.2008.01.007`.

[15] A. Sela. «Fictitious play in 'one-against-all' multi-player games». En: *Economic Theory* 14 (nov. de 1999), págs. 635-651. DOI: `10.1007/s001990050345`.

[16] U. Berger. «Fictitious play in 2xn games». En: (abr. de 2003).

[17] U. Berger. «Two More Classes of Games with the Fictitious Play Property». En: (oct. de 2004).

[18] R. Chu y G. Vreeswijk. «Extending fictitious play with pattern recognition». En: *CEUR Workshop Proceedings* 1113 (ene. de 2013), págs. 40-53.

[19] A. Washburn. «A new kind of fictitious play». En: *Naval Research Logistics (NRL)* 48 (jun. de 2001), págs. 270-280. DOI: `10.1002/nav.7`.

[20] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions.* Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1963. DOI: `10.7249/R366`.

[21] G. Dantzig. «A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* (oct. de 2020), págs. 330-335.

[22] T. III, M. Epelman y R. Smith. «A Fictitious Play Approach to Large-Scale Optimization». En: *Operations Research* 53 (jun. de 2005), págs. 477-489. DOI: `10.1287/opre.1040.0178`.

[23] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games.* Vol. 1-2. Addison-Wesley, 1959.

[24] Y. Viossat y A. Zapechelnyuk. «No-regret Dynamics and Fictitious Play». En: *Journal of Economic Theory* 148 (jul. de 2012). DOI: `10.1016/j.jet.2012.07.003`.

[25] A. Jafari, A. Greenwald, D. Gondek y G. Ercal. «On No-Regret Learning, Fictitious Play, and Nash Equilibrium». En: (jul. de 2001).

[26] C. Daskalakis y Q. Pan. «A Counter-Example to Karlin's Strong Conjecture for Fictitious Play». En: *Proceedings - Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS* (dic. de 2014). DOI: `10.1109/FOCS.2014.10`.

[27] J. Nash. «Non-Cooperative Games». En: *Annals of Mathematics* 54.2 (1951), págs. 286-295. ISSN: 0003486X. URL: `http://www.jstor.org/stable/1969529`.

[28] M. Osborne y A. Rubinstein. *A course in Game Theory*. Vol. 63. Ene. de 1994. DOI: `10.2307/2554642`.