Universidad Nacional de Rosario

Tesina de grado
para la obtención del grado de
Licenciado en Ciencias de la Computación

Propiedades de Secuencias de Juego Ficticio

Autor:
Federico Badaloni

Director:
Ariel Arbiser

Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe, Argentina

30 de marzo de 2021

Resumen

El resumen de tu tesina.

esto sobre el final

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Creada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern, la teoría de juegos surgió en la década de 1940 motivada en parte por la Segunda Guerra Mundial. Estudia una variedad de situaciones en las que diversos agentes interactúan y toman decisiones estratégicas con el fin de obtener beneficios con interdependencias. Para ello, la teoría estudia los comportamientos, la posibilidad de maximizar esas ganancias según variados criterios y los casos de equilibrio, a la vez que formula y analiza modelos.

1.1. Objetivos

Intro

estoy en proceso de revisar la propuesta y las intros de los papers para armar esta

Capítulo 2

Estado del Arte

2.1. Convergencia del Juego Ficticio

El proceso de aprendizaje de juego ficticio fue propuesto por primera vez por Brown en 1951 [1] como un algoritmo para encontrar el valor de un juego de suma cero finito. Hacia finales del mismo año, Robinson [2] demostró que el proceso converge para todos los juegos de esta clase.

Desde entonces, se han publicado numerosos trabajos analizando la convergencia del juego ficticio en juegos que no sean de suma cero. Miyazawa [3] demostró que esta propiedad vale para todos los juegos de 2×2 pero, su demostración depende de la incorporación de una regla de desempate particular sin la cual, Monderer y Sela [4] demostraron que no se cumple. Por su parte, Shapley [5] mostró un ejemplo de un juego de 3×3 para el cuál no es válida.

Además, la convergencia del juego ficticio fue demostrada para juegos de intereses identicos [6], juegos potenciales con pesos [7], juegos no degenerados con estrategias complementarias y ganancias disminuyentes [8] y ciertas clases de juegos compuestos [9].

Por otro lado, se han estudiado muchas variantes del juego ficticio. Una de las mas analisadas es el juego ficticio continuo, definida originalmente en la publicación original de Brown [1], aunque este no la exploró en detalle. Monderer y Sela [10] demostraron que esta converge para juegos no degenerados de 2×3 y Berger luego extendio este resultado a $2 \times N$ [11] y aportó la convergencia de los juegos de potencial ordinal y quasi-supermodulares con ganancias disminuyentes. Otros ejemplos de variantes propuestas peuden verse en [12] y [13].

quizas detallar estas ultimas

Una variante de particular interes este trabajo es el juego ficticio con actualización alternante de creencias. Berger [14] planteó que esta versión alternante es en realidad la original que definió Brown en [14] y que si bien el proceso con actualización simultanea de creencias que usan todos los investigadores de teoría de juegos en la actualidad puede resultar mas intuitivo, es también menos potente y da como ejemplo la clase de los juegos no degenerados con potencial ordinal para la cuál la version alternante converge, pero la simultanea no.

exapndir con otros trabajos que mencionen AFP o al menos decir que hay pocos

2.2. Velocidad de Convergencia del Juego Ficticio

Los trabajos mencionados hasta ahora se enfocan en el estudio de la eventual convergencia global a un equilibrio de Nash de las distintos clases de juegos. Otra enfoque de investigación es la velocidad de convergencia en los casos en la que esta ocurre. El interés por este se debe en gran medida a la equivalencia entre los juegos de suma cero y los problemas de programación lineal, demostrada por Dantzig, Gale y Von Neumann [15] [16]. En 1994, Gass y Zafra [17] planteaban que hasta la fecha, lo más eficiente para resolver un juego de suma cero era plantearlo como un problema de programación lineal y aplicar el método simplex. En el mismo artículo plantean un meotodo mixto con simplex y una variante de juego ficticio y concluyen que permite acelerar la convergencia en ciertos problemas de programación lineal. Lambert y Smith [18] plantean también una variante (con muestreo) y discuten su eficiencia en problemas de optimización a gran escala.

Vale la pena mencionar en este punto lo que en la literatura del tema se conoce como la Conjetura de Karlin. En 1959, Samuel Karlin [19] conjeturó que la velocidad de convergencia del juego ficticio es $O(t^{-\frac{1}{2}})$ para todos los juegos. La idea de proviene de que esta cota superior se corresponde con la de la velocidad de convergencia de otro método de aprendizaje muy relacionado con el juego ficticio, las dinámicas de no-arrepentimiento [20] [21]. Daskalakis y Pan [22] probaron falsa una versión fuerte de la Conjetura de Karlin (usando una regla de desempate arbitraria) pero dejaron abierta la pregunta sobre la versión general, que ellos llaman débil, de la conjetura.

La utilidad del juego ficticio como método para computar equilibrios de Nash fue puesta en duda cuándo Brandt, Fischer y Harrenstein [23] demostraron que para los juegos de suma cero, los no degenerados de $2 \times N$ y los potenciales (tres de las clases mas estudiadas), existen casos en los que el proceso de juego ficticio puede requerir una cantidad de rondas exponencial en el tamaño de representación en bits de las utilidades del juego antes de que se juegue algún equilibrio. En esta publicación mencionan que su resultado puede ser extendido al juego ficticio alternante pero no demuestran esto.

casos de uso (poker IA segun bramdt, redes de trafico (en pattern matching?) y alguno mas)

este EdA hay que revisarlo de nuevo cuando termine la intro y los conceptos previos para ver si hay que cambiar algun termino

Capítulo 3

Conceptos Previos

3.1. Juegos Bimatriciales y Equilibrios de Nash

Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, es decir un juego de dos jugadores finito en el que el jugador 1 (jugador fila) tiene acciones $i \in N = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ y el jugador 2 (jugador columna) tiene acciones $j \in M = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$. A, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son las matrices de pago de los jugadores 1 y 2. Si el jugador 1 elige la acción i y el jugador 2 elige la acción j, la utilidad del jugador 1 será $a_{i,j}$ y la utilidad del jugador 2 será $b_{i,j}$. Describiremos los juegos en forma bimatricial con una matriz de duplas como la siguiente:

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (a_{1,1}, b_{1,1}) & (a_{1,2}, b_{1,2}) & \cdots & (a_{1,m}, b_{1,m}) \\ (a_{2,1}, b_{2,1}) & (a_{2,2}, b_{2,2}) & \cdots & (a_{2,m}, b_{2,m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n,1}, b_{n,1}) & (a_{n,2}, b_{n,2}) & \cdots & (a_{n,m}, b_{n,m}) \end{bmatrix}$$

	j_1	j_2	$\cdots$	j_m
i_1	$(a_{1,1}, b_{1,1})$	$(a_{1,2}, b_{1,2})$	$\cdots$	$(a_{1,2}, b_{1,m})$
i_2	$(a_{2,1}, b_{2,1})$	$(a_{2,2}, b_{2,2})$	$\cdots$	$(a_{2,m}, b_{2,m})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i_n	$(a_{n,1}, b_{n,1})$	$(a_{n,2}, b_{n,2})$	$\cdots$	$(a_{n,m}, b_{n,m})$

Notaremos con $\Delta(X)$ al espacio de probabilidades sobre el conjunto X y llamaremos **estrategias mixtas** a los vectores de la forma $x \in \Delta(N)$ y $y \in \Delta(M)$. A las estrategias que asignan probabilidad 1 a una acción y 0 a todas las otras, las llamaremos **estrategias puras**. Notaremos con $\widetilde{h}$ a la estrategia pura correspondiente a la acción h.

La utilidad esperada del jugador 1 al jugar la acción i contra la estrategia mixta y del jugador 2 será $(Ay)_i$. Analogamente, la utilidad esperada del jugador 2 al jugar la acción j contra la estrategia mixta x del jugador 2 será $(xB)_j$. Si ambos jugadores juegan estrategias mixtas x e y respectivamente, sus utilidades esperadas podrán calcularse como xAy para el jugador 1 e $yB^t x$ para el jugador 2.

Si y es una estrategia mixta del jugador 2, definimos el **conjunto de mejores respuestas** a y como $BR_1(y) = \{i \in N : (Ay)_i = \max_{i' \in N}(Ay)_{i'}\}$ y análogamente, si x es una estrategia mixta del jugador 2, el conjunto de mejores respuestas a x será $BR_2(x) = \{j \in N : (xB)_j = \max_{j' \in M}(xB)_{j'}\}$. Es decir, son los conjuntos de índices que maximizan las utilidades esperadas contra una estrategia dada.

Llamaremos **equilibrio de Nash** a todo perfil de estrategias mixtas $(x*, y*) \in \Delta(A) \times \Delta(B)$ que cumpla:

$$\forall i \in N, x_i^* > 0 \implies i \in BR_1(y^*) \tag{3.1}$$

$$\forall j \in M, y_j^* > 0 \implies j \in BR_1(x^*) \tag{3.2}$$

En el caso particular de que las estrategias sean puras, al equilibrio lo llamaremos también **equilibrio de Nash puro**.

3.2. Categorías de Juegos

Es útil clasificar a los juegos en distintas categorías según sus propiedades. Presentamos a continuación algunas de las categorías de juegos mas estudiadas en la literatura sobre juego ficticio.

Definición 3.2.1. *Un juego (A, B) de tamaño $n \times m$ es un **juego de suma cero** si $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = -b_{ij}$. Para estos casos, nos referiremos al juego usando solo la matriz A.*

Los juegos de suma cero son una de las categorías mas estudiadas en teoría de juegos. Representan los juegos en los que un jugador siempre gana tanto como pierde el otro. Uno de los teoremas fundacionales del area, conocido como el Teorema de Minimax [**nash:minmax**] establece que todos poseen al menos un equilibrio de Nash puro y a la utilidad para el jugador fila en un equilibrio la llamamos **valor del juego** (pues es la misma en todos los equilibrios).

Definición 3.2.2. *Llamamos **degenerado** a un juego bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- *Existen $i, i' \in N$ y $j \in M$ con $i \neq i$' tales que $a_{ij} = a_{i'j}$*
- *Existen $j, j' \in M$ e $i \in N$ con $j \neq j$' tales que $b_{ij} = b_{ij'}$*

*En caso contrario, decimo que el juego es **no degenerado**.*

Los juegos no degenerados son de particular interes porque capturan el concepto de un juego en el que, para cada acción del rival, no existen dos acciones con el mismo pago. Por lo tanto, el conjunto de mejor respuesta contra una acción dada es siempre unitario.

Las siguientes definiciones corresponden a otras dos categorías de juegos que han sido muy estudiados por sus propiedades de convergencia en los procesos de juego ficticio. Nos seran útiles en la sección 4.5 cuando discutamos los resultados sobre su velocidad de convergencia.

Definición 3.2.3. *Un juego bimatricial* (A, B) *de tamaño* $n \times n$ *es un* ***juego simétrico*** *si* $\forall i, j \in N : a_{ij} = -b_{ji}$

Definición 3.2.4. *Un juego* (A, B) *de tamaño* $n \times m$ *es un* ***juego de intereses idénticos*** *si* $\forall i \in N, j \in M : a_{ij} = b_{ij}$*. En este caso también nos referiremos al juego usando solo la matriz* A*.*

aca pueden ir comentarios sobre cuales de los juegos ejemplo caen en cuales categorías

3.3. Juego Ficticio

Mas intro acá. Explicación coloquial. Capaz algo de la division del algoritmo en decision y actualizacion como dice en pattern:matching

Existen en la literatura dos formas de definir el juego ficticio. Algunos autores como Berger, Monderer, Sela, Shapley, Daskalakis y Pan [14] [10] [4] [6] [22] utilizan una definición del estilo de la siguiente, que resulta cómoda para estudiar convergencia y es la que veremos primero. Presentaremos dos variantes, correspodientes a la versión simultanea y a la alternante.

Definición 3.3.1. *Sean* (A, B) *un juego en forma bimatricial de* $n \times m$ *y una secuencia* (i^τ, j^τ) *con* $i^\tau \in N$*,* $j^\tau \in M$ *para todo* $\tau \in \mathbb{N}$*. Si tenemos unas secuencias de creencias* x^τ *e* y^τ *tales que para todo* $\tau \in \mathbb{N}$*:*

$$x^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}}{\tau}$$

$$y^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}}{\tau}$$

Entonces:

- (i^τ, j^τ) *es una secuencia de juego ficticio simultaneo si* (i^1, j^1) *es un elemento arbitrario de* $N \times M$ *y para todo* $\tau \in \mathbb{N}$ *se cumplen* $i^{\tau+1} \in BR_1(y^\tau)$ *y* $j^{\tau+1} \in BR_2(x^\tau)$*.*
- (i^τ, j^τ) *es una secuencia de juego ficticio alternante si* i^1 *es un elemento arbitrario de* N *y para todo* $\tau \in \mathbb{N}$ *se cumplen* $i^{\tau+1} \in BR_1(y^\tau)$ *y* $j^\tau \in BR_2(x^\tau)$*.*

Vale la pena hacer algunos comentarios sobre esta primer definición. Para empezar, si observamos las secuencias de creencias, x^τ e y^τ, veremos que se componen de sumas de vectores unitarios, pero normalizados por el tiempo, por lo que son estrategias mixtas que se corresponden con la distribución empírica de las acciones de cada jugador.

Por otro lado, como los elementos iniciales son arbitrarios, un mismo juego puede tener tantos procesos de juego ficticio válidos como jugadas iniciales existan. Mas aún, existe una ambigüedad en cuanto a que acciones elige el proceso en los casos en los que uno o ambos de los conjuntos de mejor respuesta no son unitarios[1]. Cada posible

[1]Es por esto que es tan imporante en el estudio del juego ficticio la categoría de los juegos no degenerados, para los cuáles el conjunto de mejor respuesta es unitario.

decisión configura un proceso distinto y válido, por lo que algunos autores mencionan informalmente el concepto de **reglas de desempate**. En el capítulo 4 definiremos formalmente este concepto y presentaremos una definición aumentada de Juego Ficticio que elimina esta ambigüedad.

Sobre la variante alternante vale aclarar que efectivamente, el jugador columna toma su decisión incorporando en sus creencias la información sobre qué jugó el jugador fila en la ronda actual, si bien esto puede resultar poco intuitivo ya que normalmente en teoría de juegos se representa jugadores eligiendo simutanea e independientemente. Otra observación interesante es que su acción inicial no es arbitraria sino que ya se encuentra fijada por la mejor respuesta o mejores respuestas a la acción del jugador fila.

Diremos que un proceso de juego ficticio (simultaneo o alternante) converge de forma pura en la iteración k si (i^k, j^k) es un equilibrio de Nash puro. En el capítulo 4 veremos que cuando esto ocurre, (i^k, j^k) se repetirá infinitamente desde este punto en el tiempo. Diremos también que el proceso converge de forma mixta si existe un equilibrio de Nash mixto tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x^* - x^k| < \epsilon$ y $|y^* - y^k| < \epsilon$.

Alternativamente, Brandt, Fischer y Harrenstein utilizan una definición similar a la de Robinson [2] pero simplificada. Es más cómoda para estudiar velocidades de convergencia en juegos que se sabe que convergen. A continuación, presentamos tambien esta definición.

Definición 3.3.2. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$:*

- *Una secuencia de juego ficticio simultaneo en (A, B) es una secuencia $(x^0, y^0), (x^1, y^1), (x^2, y^2), \ldots$ de pares de vectores no negativos $(x^i, y^i) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ tal que:*

$$x^0 = 0, y^0 = 0$$

$$x^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{i} \text{ donde } i \text{ es el índice de una componente máxima de } Ay^\tau$$

$$y^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{j} \text{ donde } j \text{ es el índice de una componente máxima de } x^\tau B$$

- *Una secuencia de juego ficticio alternante en (A, B) es una secuencia $(x^0, y^0), (x^1, y^1), (x^2, y^2), \ldots$ de pares de vectores no negativos $(x^i, y^i) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ tal que:*

$$x^0 = 0, y^0 = 0$$

$$x^{\tau+1} = x^\tau + \widetilde{i} \text{ donde } i \text{ es el índice de una componente máxima de } Ay^\tau$$

$$y^{\tau+1} = y^\tau + \widetilde{j} \text{ donde } j \text{ es el índice de una componente máxima de } x^{\tau+1} B$$

Como podemos observar, la principal diferencia con la primer definición es que mientras en aquella se define una secuencia de jugadas que cumple una condicion contra un historial de creencias sobre la estrategia mixta del otro jugador, en esta la secuencia es de duplas de contadores de jugadas (sin normalizar, por lo que no son estrategias mixtas), que cumplen en cada iteración una condición contra producto de un elemento de la otra contra las matrices de pago, pero sin ser este tampoco el valor esperado de la jugada. En el capítulo 4 se demostrará que estas dos definiciones son equivalentes. Como en esta definición aparecen también casos ambigüos y aplica la misma noción de reglas de desempate.

Iteración	(i, j)	x	xB	y	Ay
1	(1, 1)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)
2	(2, 2)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)
3	(2, 2)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)
4	(2, 2)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)
5	(2, 2)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)

Tabla 3.1: Proceso de juego ficticio simultaneo sobre el Dilema de los Prisioneros

3.4. Ejemplos

Veamos como se aplican todos estos conceptos a algunos juegos clásicos de la literatura. Comenzaremos por el Dilema de los Prisioneros:

$$\begin{array}{c|cc|} & j_1 & j_2 \\ \cline{2-3} i_1 & (2,2) & (0,3) \\ i_2 & (3,0) & (1,1) \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Este juego es muy estudiado por su propiedad de que si bien la mayor utilidad para ambos jugadores se encuentra en que se juegue el perfil (i_1, j_2), su único equilibrio de Nash puro es el perfil (i_2, j_2). En la tabla 3.1 podemos observar como se desarrolla un proceso de juego ficticio simultaneo sobre este juego, comenzando desde (i_1, j_1). Para las primeras 5 iteraciones, se muestra el perfil jugado, cómo se actualizan las creencias sobre la estrategia de los jugadores y las consecuentes utilidades esperadas de cada jugador para sus jugadas.

Como vemos, si ambos jugadores empiezan cooperando, en la segunda ronda la mejor respuesta individualmente para cada uno será desviarse de este perfil, jugando respectivamente i_2 y j_2. Las creencias, que como mencionamos previamente son observaciones empíricas de una estrategia mixta supuesta según el historial del oponente, ahora indican que este juega cada una de las acciones con probabilidad $0,5$. Como veremos en la seccion 4.4, dado que (i_2, j_2) es un equilibrio de Nash puro, podemos asegurar que se jugará infinitamente.

La tabla 3.2 muestra el mismo juego pero en un proceso de juego ficticio alternante. Como vemos, ya en la primera iteración el jugador 2 reacciona a i_1 jugando j_2 como mejor respuesta. El proceso continúa de forma similar, aunque el jugador fila cree que el jugador columna está siguiendo una estrategia pura.

Pasando al siguiente ejemplo, vemos en esta matriz el clásico juego de Piedra, Papel o Tijera. Dado que es un juego de suma cero, lo representamos solamente con las utilidades del jugador 1. Además, para facilitar la lectura, nombramos las jugadas con R, P y S (por las iniciales en inglés).

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	(1, 2)	(1,00, 0,00)	(2,00, 3,00)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
2	(2, 2)	(0,50, 0,50)	(1,00, 2,00)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
3	(2, 2)	(0,33, 0,67)	(0,67, 1,67)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
4	(2, 2)	(0,25, 0,75)	(0,50, 1,50)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)
5	(2, 2)	(0,20, 0,80)	(0,40, 1,40)	(0,00, 1,00)	(0,00, 1,00)

Tabla 3.2: Proceso de juego ficticio alternante sobre el Dilema de los Prisioneros

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_R,\ j_P)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 1,00, −1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00)
2	$(i_S,\ j_P)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,00, −0,50)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00)
3	$(i_S,\ j_R)$	(0,33, 0,00, 0,67)	(0,67, −0,33, −0,33)	(0,33, 0,67, 0,00)	(−0,67, 0,33, 0,33)
4	$(i_P,\ j_R)$	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, −0,25, 0,00)	(0,50, 0,50, 0,00)	(−0,50, 0,50, 0,00)
5	$(i_P,\ j_R)$	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,00, −0,20, 0,20)	(0,60, 0,40, 0,00)	(−0,40, 0,60, −0,2
6	$(i_P,\ j_S)$	(0,17, 0,50, 0,33)	(−0,17, −0,17, 0,33)	(0,50, 0,33, 0,17)	(−0,17, 0,33, −0,1
7	$(i_P,\ j_S)$	(0,14, 0,57, 0,29)	(−0,29, −0,14, 0,43)	(0,43, 0,29, 0,29)	(0,00, 0,14, −0,14)
8	$(i_P,\ j_S)$	(0,12, 0,62, 0,25)	(−0,38, −0,12, 0,50)	(0,38, 0,25, 0,38)	(0,12, 0,00, −0,12)
9	$(i_R,\ j_S)$	(0,22, 0,56, 0,22)	(−0,33, 0,00, 0,33)	(0,33, 0,22, 0,44)	(0,22, −0,11, −0,1
10	$(i_R,\ j_S)$	(0,30, 0,50, 0,20)	(−0,30, 0,10, 0,20)	(0,30, 0,20, 0,50)	(0,30, −0,20, −0,1

Tabla 3.3: Proceso de juego ficticio simultaneo sobre Piedra, Papel o Tijera

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & j_R & j_P & j_S \\
\hline
i_R & 0 & -1 & 1 \\
i_P & 1 & 0 & -1 \\
i_S & -1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

En las tablas 3.3 y 3.4 podemos ver respectivamente un desarrollo de juego ficticio simultaneo y altenernante. Para el caso simultaneo, el proceso comienza con el jugador fila jugando piedra y el columna jugando papel. Inmediatamente el jugador fila cambia su estrategia a jugar tijera, mientras el columna se mantiene en papel porque lo proyecta exitoso. En la tercera iteración el jugador 2, esperando que el jugador 1 juegue piedra o tijera con iguales probabilidades pero descartando que pueda jugar papel, maximizará su utilidad esperada jugando piedra. Estos cambios continuaran infinitamente pero lentamente, las creencias convergeran al unico equilibrio de Nash mixto de esto juego, que es que cada jugador juegue cada acción con $\frac{1}{3}$ de probabilidad.

ajustar tamaño de estas tablas

El caso alternante es similar, aunque con una clara ventaja del jugador columna, que comienza ya reaccionando a la piedra del jugador fila con papel. Esta ventaja sin embargo va disminuyendo con el paso de las iteraciones y eventualmente también converge en

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_R,\ j_P)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 1,00, −1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(−1,00, 0,00, 1,00
2	$(i_S,\ j_R)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,00, −0,50)	(0,50, 0,50, 0,00)	(−0,50, 0,50, 0,00
3	$(i_P,\ j_R)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,00, 0,00, 0,00)	(0,67, 0,33, 0,00)	(−0,33, 0,67, −0,3
4	$(i_P,\ j_S)$	(0,25, 0,50, 0,25)	(−0,25, 0,00, 0,25)	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,00, 0,25, −0,25
5	$(i_P,\ j_S)$	(0,20, 0,60, 0,20)	(−0,40, 0,00, 0,40)	(0,40, 0,20, 0,40)	(0,20, 0,00, −0,20
6	$(i_R,\ j_S)$	(0,33, 0,50, 0,17)	(−0,33, 0,17, 0,17)	(0,33, 0,17, 0,50)	(0,33, −0,17, −0,1
7	$(i_R,\ j_P)$	(0,43, 0,43, 0,14)	(−0,29, 0,29, 0,00)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,14, −0,14, 0,00
8	$(i_R,\ j_P)$	(0,50, 0,38, 0,12)	(−0,25, 0,38, −0,12)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,00, −0,12, 0,12
9	$(i_S,\ j_P)$	(0,44, 0,33, 0,22)	(−0,11, 0,22, −0,11)	(0,22, 0,44, 0,33)	(−0,11, −0,11, 0,2
10	$(i_S,\ j_P)$	(0,40, 0,30, 0,30)	(0,00, 0,10, −0,10)	(0,20, 0,50, 0,30)	(−0,20, −0,10, 0,3

Tabla 3.4: Proceso de juego ficticio alternante sobre Piedra, Papel o Tijera

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_1,\ j_2)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 1,00, 0,00)	(0,00, 1,00, 0,00)
2	$(i_2,\ j_3)$	(0,50, 0,50, 0,00)	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)
3	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,67, 0,00)	(0,67, 0,00, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
4	$(i_1,\ j_1)$	(0,50, 0,50, 0,00)	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,50, 0,25, 0,25)
5	$(i_1,\ j_1)$	(0,60, 0,40, 0,00)	(0,40, 0,00, 0,60)	(0,60, 0,20, 0,20)	(0,60, 0,20, 0,20)
6	$(i_1,\ j_3)$	(0,67, 0,33, 0,00)	(0,33, 0,00, 0,67)	(0,50, 0,17, 0,33)	(0,50, 0,17, 0,33)
7	$(i_1,\ j_3)$	(0,71, 0,29, 0,00)	(0,29, 0,00, 0,71)	(0,43, 0,14, 0,43)	(0,43, 0,14, 0,43)
8	$(i_1,\ j_3)$	(0,75, 0,25, 0,00)	(0,25, 0,00, 0,75)	(0,38, 0,12, 0,50)	(0,38, 0,12, 0,50)
9	$(i_3,\ j_3)$	(0,67, 0,22, 0,11)	(0,22, 0,11, 0,67)	(0,33, 0,11, 0,56)	(0,33, 0,11, 0,56)
10	$(i_3,\ j_3)$	(0,60, 0,20, 0,20)	(0,20, 0,20, 0,60)	(0,30, 0,10, 0,60)	(0,30, 0,10, 0,60)

Tabla 3.5: Proceso de juego ficticio simultaneo en el ejemplo de Shapley, comenzando por (i_1, j_2).

creencias.

Veamos por último un ejemplo bastante famoso en la literatura de juego ficticio.

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & j_1 & j_2 & j_3 \\
\hline
i_1 & (1,0) & (0,-1) & (0,1) \\
i_2 & (0,1) & (1,0) & (0,-1) \\
i_3 & (0,0) & (0,1) & (1,0) \\
\hline
\end{array}
$$

Este el juego de Shapley [5]. Es muy conocido por por ser el primer juego de 3×3 publicado que no converge, de forma pura ni mixta, tanto para juego ficticio simultaneo como alternante. En las tablas 3.5 y 3.6 vemos como se desarrollan estos procesos.

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_1,\ j_3)$	(1,00, 0,00, 0,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 0,00, 1,00)	(0,00, 0,00, 1,00)
2	$(i_3,\ j_2)$	(0,50, 0,00, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)	(0,00, 0,50, 0,50)
3	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
4	$(i_1,\ j_3)$	(0,50, 0,25, 0,25)	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, 0,25, 0,50)	(0,25, 0,25, 0,50)
5	$(i_3,\ j_2)$	(0,40, 0,20, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)	(0,20, 0,40, 0,40)
6	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
7	$(i_1,\ j_3)$	(0,43, 0,29, 0,29)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,29, 0,29, 0,43)	(0,29, 0,29, 0,43)
8	$(i_3,\ j_2)$	(0,38, 0,25, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)	(0,25, 0,38, 0,38)
9	$(i_2,\ j_1)$	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)	(0,33, 0,33, 0,33)
10	$(i_1,\ j_3)$	(0,40, 0,30, 0,30)	(0,30, 0,30, 0,40)	(0,30, 0,30, 0,40)	(0,30, 0,30, 0,40)

Tabla 3.6: Proceso de juego ficticio alternante en el ejemplo de Shapley, comenzando por i_1.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Equivalencia de las distintas definiciones

Como mencionamos en la sección 3.3, existen dos formas de definir el juego ficticio entre los distintos autores de la literatura. Ambas simplifican de distintas formas la definición original de Brown y si bien son similares, su equivalencia no es inmediatamente evidente, por lo que uno podría dudar de si un teorema expresado para una de las definiciones es válido con la otra. Por lo tanto, presentamos a continuación dos lemas sobre esta equivalencia, para el caso simultaneo y alternante respesctivamente. La idea será probar que los historiales de la definición 3.3.2 suman en cada iteracion la estrategia pura correspondiente a la acción elegida por la definicion 3.3.1. Comenzamos con el caso simulaneo.

Lema 4.1.1. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, $(\widetilde{i^\tau}, \widetilde{j^\tau})_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultaneo (según la definicioón 3.3.1) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio simultaneo (según la definicion 3.3.2), tales que $p^1 = \widetilde{i^1}$, $q^1 = \widetilde{j^1}$ y ambas usan la misma regla de desempate. Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, $\forall \tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre τ.

Para $\tau = 1$, tenemos $p^1 = \widetilde{i^1} = \sum_{s=1}^{1} \widetilde{i^s}$ y $q^1 = \widetilde{j^1} = \sum_{s=1}^{1} \widetilde{j^s}$.

Veamos ahora el caso de un $\tau = k > 1$, suponiendo que $p^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s}$ y $q^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}$. Por la definición 3.3.2, $p^k = p^{k-1} + \widetilde{i}$ donde i es un índice de una componente máxima de $Aq^{k-1} = A \sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}$. Pero también sabemos, por la definición 3.3.1 que

$i^k \in BR_1(y^{k-1}) = BR_1(\frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k-1}) = \{i \in N : (A\frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k-1})_p = \max_{i' \in N}(A\frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k-1})_{i'}\}$. Es decir que i^k es el índice de una componente máxima de $A\frac{q^{k-1}}{k-1}$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, podemos afirmar que también es una componente máxima de Aq^{k-1}. Incluso si hubiera otras componentes máximas, estamos usando en ambos procesos la misma regla de desempate. Luego, $p^k = p^{k-1} + \widetilde{i^k} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{i^s} + \widetilde{i^k} = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}$. Análogamente, podemos afirmar que $q^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{j^s}$. □

El caso alternante es un poco más complejo ya que el caso del jugador columna ya no es análogo al del jugador fila.

Lema 4.1.2. *Sea (A, B) un juego en forma bimatricial de $n \times m$, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definicioón 3.3.1) con secuencias de creencias y^τ, x^τ y sea $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio alternante (según la definicion 3.3.2), tales que $p^1 = \widetilde{i^1}$ y ambas usan la misma regla de desempate. Entonces, $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ y $(p^\tau, q^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ representan el mismo proceso de aprendizaje. Es decir, para todo $\tau \in \mathbb{N}$, se cumplen:*

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{i^s}$$

$$q^\tau = \sum_{s=1}^{\tau}\widetilde{j^s}$$

Demostración. Nuevamente, procederemos por inducción sobre τ.

Para $\tau = 1$, sabemos que $p^1 = \widetilde{i^1} = \sum_{s=1}^{1}\widetilde{i^s}$. Por la definición 3.3.2, $q^1 = q^0 + \widetilde{j}$ donde q^0 es el vector nulo y j es el índice de una componente máxima de $p^1 B = \widetilde{i^1}B$ y, por la definición 3.3.1, sabemos que $j^1 \in BR_2(x^1) = BR_2(\frac{\sum_{s=1}^{1}\widetilde{i^s}}{\tau}) = BR_2(i^1) = \{j \in N : (i^1 B)_j = \max_{j' \in M}(i^1 B)_{j'}\}$. Es decir, j^1 es el índice de una componente máxima de $i^1 B$. Luego, $q^1 = \widetilde{j^1} = \sum_{s=1}^{1}\widetilde{j^s}$.

Veamos ahora el caso de un $\tau = k > 1$, suponiendo que $p^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{i^s}$ y $q^{k-1} = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}$. Podemos afirmar, con el mismo argumento que en el caso inductivo del lema 4.1.1 que $p^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}$. Por otro lado, $q^k = y^k + \widetilde{j}$ donde j es el índice de una componente máxima de $p^k B = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}B$. Sabemos además, por la definición 3.3.1, que $j^k \in BR_2(x^k) = BR_2(\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}) = \{j \in N : (\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}B)_j = \max_{j' \in M}(\frac{\sum_{s=1}^{k}\widetilde{i^s}}{k}B)_{j'}\}$. Es decir que j^k es el índice de una componente máxima de $\frac{p^k}{k}B$. Como escalar un vector no afecta la relación de orden entre sus componentes, podemos afirmar que también es una componente máxima de $p^k B$. Como ambos procesos desempatan igual, podemos afirmar entonces que $q^k = q^{k-1} + j^k = \sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s} + j^k = \sum_{s=1}^{k}\widetilde{j^s}$.

□

4.2. Reglas de Desempate

Haremos foco ahora en otra cuestión mencionada en la sección 3.3 sobre las definiciones de juego ficticio. La definición de que de Berger deja implicita la ambigüedad de los casos en los que los conjuntos de mejor respuesta no son unitarios. Presentaremos entonces una definición mejorada que mejora este aspecto. Comenzaremos por formalizar el concepto de **reglas de desempate**:

Definición 4.2.1. *Llamamos* ***reglas de desempate*** *de un juego ficticio a un par de funciones* $d_1 : \mathbb{P}^+(N) \to N$ *y* $d_2 : \mathbb{P}^+(M) \to M$ *que a cada subconjunto de acciones de un jugador en un eventual empate le asignan la acción que elegirá el proceso.*

Usando este concepto, presentaremos ahora la definición de juego ficticio que utilizaremos durante el resto de este trabajo:

Definición 4.2.2. *Sean* (A, B) *un juego en forma bimatricial de* $n \times m$ *y una secuencia* (i^τ, j^τ) *con* $i^\tau \in N$, $j^\tau \in M$ *para todo* $\tau \in \mathbb{N}$. *Si* d_1 *y* d_2 *son reglas de desmpate y tenemos unas secuencias de creencias* x^τ *e* y^τ *tales que para todo* $\tau \in \mathbb{N}$:

$$x^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{i^s}}{\tau}$$
$$y^\tau = \frac{\sum_{s=1}^{\tau} \widetilde{j^s}}{\tau}$$

Entonces:

- (i^τ, j^τ) *es una secuencia de juego ficticio simultaneo si* (i^1, j^1) *es un elemento arbitrario de* $N \times M$ *y para todo* $\tau \in \mathbb{N}$ *se cumplen* $i^{\tau+1} = d_1(BR_1(y^\tau))$ *y* $j^{\tau+1} = d_2(BR_2(x^\tau))$.
- (i^τ, j^τ) *es una secuencia de juego ficticio alternante si* i^1 *es un elemento arbitrario de* N *y para todo* $\tau \in \mathbb{N}$ *se cumplen* $i^{\tau+1} = d_1(BR_1(y^\tau))$ *y* $j^\tau = d_2(BR_2(x^\tau))$.

4.3. Conservación del Juego Ficticio

En esta sección estudiaremos cómo las transformaciones a un juego afectan las secuencias de juego ficticio sobre el mismo. Esto nos es de intereses porque mas adelante nos permitirá encarar con mas claridad el estudio de la velocidad de convergencia del algoritmo. También, razonar un poco sobre esto nos permite entender mejor los resultados sobre convergencia de la literatura.

Claramente, transformaciones que conserven las relaciones de orden de los pagos de las acciones en juegos del mismo tamaño (como escalar todos los pagos por un mismo factor o sumarle a todos una constante) conservararán las secuencias de juego ficticio.

Pero veamos que pasa cuándo cambia el tamaño del juego. La motivacón para esto es que en general, los investigadores de teoría de juegos buscan dos tipos de resultados de convergencia sobre juego ficticio. Por la positiva, clases de juegos de tamaño lo mas grande posible (o incluso mejor, tamaño arbitrario) para los que toda secuencia converga. Por la negativa, contraejemplos de tamaño tan pequeño como sea posible que no converjan. Esto es porque en estos estudios se entiende implícitamente que un contraejemplo puede ser expandido a un juego de tamaño mas grande que presente la misma secuencia de juego ficticio y por tanto todos los juegos de ese tamaño o mayor ya presentan casos que no convergen.

En los siguientes lemas, demostraremos esto para algunas de las clases de juegos mas estudiadas en la literatura. Vale la pena aclarar que si bien podríamos demostrar un solo lema general que diga que todo juego puede expandirse conservando las secuencias de juego ficticio, este resultado no nos sería útil, ya que es importante que la expansión conserve las propiedades que definen a la clase de juegos en cuestión.

Lema 4.3.1. *Sea A un juego de suma cero de tamaño n, existe un juego de suma cero A' de tamaño n tal que toda secuencia $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ de juego ficticio (secuencial o alternante) en A lo es también en A'.*

Demostración. Definimos el juego A' como

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & max_{j\in N} a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & max_{j\in N} a_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & max_{j\in N} a_{n,j} \\ min_{i\in N} a_{i,1} & min_{i\in N} a_{i,2} & \cdots & min_{i\in N} a_{i,n} & 0 \end{pmatrix}$$

cambiar esto a las matrices nuevas

Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio secuencial sobre A, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$. En la iteración τ, sabemos que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A. Como el pago de $n+1$ para el jugador 1 es siempre el mínimo de la columna, para cualquier acción j del jugador 2 tendremos que $a_{i^\tau,j} > a_{n+1,j}$ y por tanto podemos afirmar que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A'.

Para j^τ podemos razonar de forma análoga, solo que considerando la pertenencia a $BR_2(x^{\tau-1})$ o $BR_2(x^\tau)$ según si hablamos de juego ficticio secuencial o alternante.

Podemos afirmar entonces que $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ es también una secuencia de juego ficticio válida en A'. □

Lema 4.3.2. *Sea A un juego intereses idénticos de tamaño $n \times m$, existe un juego de intereses idénticos A' de tamaño $n+1 \times m$ tal que toda secuencia $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ de juego ficticio (secuencial o alternante) en (A, B) lo es también en (A', B').*

Demostración. Definimos el juego A' como

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

cambiar esto a las matrices nuevas

con $\lambda = min(A) - 1$.

Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de juego ficticio secuencial sobre A, con secuencias de creencias $(x^\tau, y^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$. En la iteración τ, sabemos que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A. Como el pago de $n+1$ para el jugador 1 es siempre el mínimo de la columna, para cualquier acción j del jugador 2 tendremos que $a_{i^\tau,j} > a_{n+1,j}$ y por tanto podemos afirmar que $i^\tau \in BR_1(y^{\tau-1})$ en A'. $\square$

Observemos que no valen lemas similares para la reducción en tamaño de los juegos. Agregar estados con poco incentivo no modifica las secuencias de juego ficticio, pero para un juego puede haber secuencias que pasen por todas las acciones de cada un jugador y que por tanto este no pueda reducirse a uno mas chico.

4.4. Convergencia de Juego Ficticio

En su publicación de 1997, Monderer y Sela [10] enuncian un resultado que nos da una intuición interesante sobre el comportamiento del juego ficticio. Al ser el este un mecanismo utilizado para encontrar equilibrios de Nash, uno esperaría observar un comportamiento estable alrededor de los mismos. Monderer y Sela llaman a esto el Principio de Estabilidad. La demostración que presentan es mediante otros principios y conceptos que desarollan en esa publicación, pero este resultado puede probarse de forma más directa. Presentaremos entonces a continuación una demostración alternativa. Agregamos además, una prueba para el caso del juego ficticio alternante e incluímos casos de empates.

Teorema 4.4.1. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultaneo en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^t, y^t)_{\tau \in \mathbb{N}}$ y reglas de desempate (d_1, d_2). Si en la iteración k se juega el perfil de estrategias $(i*, j*)$ y este es un equilibrio de Nash puro, entonces $(i*, j*)$ será también el perfil jugado en todas las iteraciones posteriores.*

Demostración. Si en la iteracion k se jugó el perfil (i^*, j^*), por la definición 3.3.1, sabemos que $i^* \in BR_1(y^{k-1})$ y $j^* \in BR_2(x^{k-1})$ y por la definición de las reglas de desempate, $i^* = d_1(BR_1(y^{k-1}))$ y $j^* = d_2(BR_2(x^{k-1}))$. Sabemos también, por la definición de equilibrio de Nash, que $i^* \in BR_1(\widetilde{j^*})$ y $j^* \in BR_2(\widetilde{i^*})$.

Veamos entonces que sucederá en la iteración $k+1$. Las creencias se actualizaran como

$$x^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s} + \widetilde{i^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s}}{k} + \frac{\widetilde{i^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{i^s}(k-1)}{k(k-1)} + \frac{\widetilde{i^*}}{k} = \frac{k-1}{k} x^{k-1} + \frac{\widetilde{i^*}}{k}$$

$$y^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s} + \widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}}{k} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1} \widetilde{j^s}(k-1)}{k(k-1)} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{k-1}{k} y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}$$

Luego, tendremos que

$$\begin{aligned}
BR_1(y^k) &= BR_1(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}) \\
&= \{i \in N : (A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}))_i = \max_{i' \in N}(A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}))'_i\} \\
&= \{i \in N : (\frac{k-1}{k}Ay^{k-1} + A\frac{j^*}{k})_i = \max_{i' \in N}(\frac{k-1}{k}Ay^{k-1} + A\frac{j^*}{k})'_i\}
\end{aligned}$$

Como sabemos que i^* es indice máximo tanto de Ay^{k-1} como de Aj^*, podemos afirmar que lo es también de esta combinación lineal de ambos y por tanto que $i^* \in BR_1(y^k)$.

Más aun, sabemos que $i^* = d_1(BR_1(y^{k-1}))$. Y como $BR_1(y^k) \subseteq BR_1(y^{k-1})$, diremos que $i^* = d_1(BR_1(y^k))$.

Analogamente, podemos afirmar que $j^* \in BR_2(x^k)$ y $j^* = d_2(BR_2(x^k))$.

Por lo tanto, por la definición de juego ficticio, en la iteración k se jugará nuevamente (i^*, j^*) y este proceso se repetirá infinitamente.

□

Teorema 4.4.2. *Sea $(i^\tau, j^\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$ una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante en el juego en forma bimatricial (A, B) de tamaño $n \times m$, con secuencias de creencias $(x^t, y^t)_{\tau\in\mathbb{N}}$ y reglas de desempate (d_1, d_2). Si en la iteración k se juega el perfil de estrategias $(i*, j*)$ y este es un equilibrio de Nash puro, entonces $(i*, j*)$ será también el perfil jugado en todas las iteraciones posteriores.*

Demostración. Si en la iteracion k se jugó el perfil (i^*, j^*), por la definición 3.3.1, sabemos que $i^* \in BR_1(y^{k-1})$ y $j^* \in BR_2(x^{k-1})$ y por la definición de las reglas de desempate, $i^* = d_1(BR_1(y^{k-1}))$ y $j^* = d_2(BR_2(x^{k-1}))$. Sabemos también, por la definición de equilibrio de Nash, que $i^* \in BR_1(\widetilde{j^*})$ y $j^* \in BR_2(\widetilde{i^*})$.

Veamos entonces que sucederá en la iteración $k+1$, comenzando por el jugador fila. Sus creencias se actualizaran como

$$y^k = \frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s} + \widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}}{k} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{\sum_{s=1}^{k-1}\widetilde{j^s}(k-1)}{k(k-1)} + \frac{\widetilde{j^*}}{k} = \frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{\widetilde{j^*}}{k}$$

Y su conjunto de mejor respuesta será

$$\begin{aligned}
BR_1(y^k) &= BR_1(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}) \\
&= \{i \in N : (A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}))_i = \max_{i' \in N}(A(\frac{k-1}{k}y^{k-1} + \frac{j^*}{k}))'_i\} \\
&= \{i \in N : (\frac{k-1}{k}Ay^{k-1} + A\frac{j^*}{k})_i = \max_{i' \in N}(\frac{k-1}{k}Ay^{k-1} + A\frac{j^*}{k})'_i\}
\end{aligned}$$

por lo que podemos afirmar, al igual que en el caso simultaneo, que jugará i^* en la iteración $k+1$. Ahora, sabiendo la jugada del jugador fila, podemos analizar qué jugará el jugador columna. Sus creencias se actualizaran como

$$x^{k+1} = \frac{\sum_{s=1}^{k} \widetilde{i^s} + \widetilde{i^*}}{k+1} = \frac{\sum_{s=1}^{k} \widetilde{i^s}}{k+1} + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1} = \frac{k\sum_{s=1}^{k} \widetilde{i^s}}{k(k+1)} + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1} = \frac{k}{k+1}x^k + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1}$$

Y su conjunto de mejor respuesta será

$$\begin{aligned} BR_2(x^{k+1}) &= BR_2\left(\frac{k}{k+1}x^k + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1}\right) \\ &= \{j \in M : \left(\left(\frac{k}{k+1}y^k + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1}\right)B\right)_j = \max_{j' \in M}\left(\left(\frac{k}{k+1}x^k + \frac{\widetilde{i^*}}{k+1}\right)B\right)'_j\} \\ &= \{j \in M : \left(\frac{k}{k+1}x^k B + \frac{i^*}{k+1}B\right)_j = \max_{j' \in M}\left(\frac{k}{k+1}x^k B + \frac{j^*}{k+1}B\right)'_j\} \end{aligned}$$

Y podemos afirmar que como j^* es índice máximo de $x^{k+1}B$ y de i^*B, lo es también de su combinación lineal. Como sabemos que d_2 desempatá en favor de j^*, concluímos que en la iteración $k+1$ y por tanto en todas las sigueintes, se jugará nuevamente (i^*, j^*).

□

4.5. Velocidad de Convergencia de AFP

En esta sección nos enfocaremos en estudiar más detalladamente los resultados de Brandt, Fischer y Harrenstein [23]. En su paper, los autores presentan cotas superiores para la velocidad de convergencia del juego ficticio simultaneo en clases de juegos que se sabe que siempre convergen de forma pura . Como dijimos en el capítulo 2, los autores checkear esto
mencionan la posibilidad de expandir sus resultados a la variante alternante de juego ficticio. Presentamos a continuación nuestro análisis para los casos de los juegos de suma constante simétricos y los no degenerados de intereses idénticos.

Veamos primero que para el caso de los juegos de suma constante simétricos, el teorema de estos autores efectivamente es expandible de forma bastante directa a la variante alternante. Vale la pena notar que formulamos el teorema en términos de que el último perfil no sea un equilibrio de Nash puro, en vez de pedir que ninguno en la secuencia lo sea como hacen Brandt, Fischer y Harrenstein ya que por el principio de estabilidad, si alguno de los perfiles jugados en la secuencia fuera un equilibrio de Nash puro, todos los siguientes lo serían.

Teorema 4.5.1. *Existe un juego simétrico A representable en $O(k)$ bits, con al menos un equilibrio de Nash puro y una secuencia de juego ficticio alternante $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ sobre A tal que (i^{2^k}, j^{2^k}) no es un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Consideremos un juego en forma bimatricial con la siguiente matriz de pagos:

Ronda	(i, j)	x	$x^\tau B$	y	Ay^τ
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1,\ 0,\ 0)$	$(0, 1, 2^{-k})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
2	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2})$	$-2^{-(k+1)},\ \frac{1-2^{-k}}{2},\ 2^{-(k+1)})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
3	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3})$	$(-\frac{2^{-k+1}}{3},\ \frac{1-2^{-k+1}}{3},\ \frac{2^{-k}}{3})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
	$\vdots$				
τ	$(i_3,\ j_2)$	$(\frac{1}{\tau},\ 0,\ \frac{\tau-1}{\tau})$	$(-\frac{(\tau-1)2^{-k}}{\tau},\ \frac{1-(\tau-1)2^{-k}}{\tau},\ \frac{2^{-k}}{\tau})$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$
	$\vdots$				
2^k	$(i_3,\ j_2)$	$2^{-k},\ 0,\ \frac{2^k-1}{2^k})$	$(-1,\ \frac{1+2^{-k}}{2^k},\ 1)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 2^{-k})$

Tabla 4.1: Proceso de juego ficticio alternante en el juego del teorema 4.5.1

.	j^1	j^2	j^3
i^1	0	-1	$-\epsilon$
i^2	1	0	$-\epsilon$
i^3	ϵ	ϵ	0

Si $\epsilon < 1$, vemos que (i^3, j^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Esto no explicamos qué es. Supongo que a los conceptos previos?

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario y sea $\epsilon = 2^{-k}$. Para estos valores, ϵ puede codificarse en $O(k)$ bits, mientras que las otras utilidades del juego son constantes, por lo que podemos afirmar que la representación del juego será tambien del orden de $O(k)$ bits. Por lo tanto, si probamos que un proceso de juego ficticio alternante puede requerir 2^k rondas antes de que se juegue (i^3, j^3), el teorema estará demostrado.

Si el proceso comienza con el jugador fila jugando i^1, entonces las utilidades esperadas del jugador columna serán $-x^1 A = (0, 1, \epsilon)$ y elegirá j_2.

En la siguiente ronda, el jugador 1 reaccionará con i_3, dando que el jugador 2 tendrá una creencia sobre su estrategia de $x^2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, por lo que las utilidades esperadas del jugador 2 serán $-x^2 A = (\frac{-\epsilon}{2}, \frac{1-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$y volverá a elegir j_2.

Este perfil (i_3, j_2) se repetirá $2^k - 1$ rondas, ya que tendremos que mientras $2 \leq \tau \leq 2^k$, se cumplirán:

$$
\begin{aligned}
x^\tau &= \frac{\widetilde{i_1} + (\tau - 1)\widetilde{i_3}}{\tau} = (\frac{1}{\tau}, 0, \frac{\tau - 1}{\tau}) \\
-x^\tau A &= (-\frac{(\tau - 1)\epsilon}{\tau}, \frac{1 - (\tau - 1)\epsilon}{\tau}, \frac{\epsilon}{\tau}) \\
y^\tau &= \widetilde{j_2} = (0, 1, 0) \\
Ay^\tau &= (-1, 0, \epsilon)
\end{aligned}
$$

La tabla 4.1, muestra como se desarrolla este proceso. Para el jugador fila, justificar su decisión es trivial ya que la estrategia percibida de su oponente es pura e i_3 es la única acción con utilidad esperada positiva. Para entender por qué el jugador columna no cambia su estrategia, debemos notar que:

$$\begin{aligned}
\tau \leq 2^k &= \frac{1}{\epsilon} \\
\epsilon\tau &\leq 1 \\
\epsilon(\tau - 1 + 1) &\leq 1 \\
(\tau - 1)\epsilon + \epsilon &\leq 1 \\
1 - (\tau - 1)\epsilon &\geq \epsilon \\
\frac{1 - (\tau - 1)\epsilon}{\tau} &\geq \frac{\epsilon}{\tau}
\end{aligned}$$

Esto podemos interpretarlo como que si bien en las iteraciones recientes el jugador 1 jugó i_3, el incentivo resultante de la única vez que jugó i_1 es muy fuerte por la gran diferencia de utilidades para el jugador 2 entre (i_1, j_2) e (i_2, j_3), por lo que deberán pasar 2^{k-1} iteraciones de i_3 luego de ese único i_1 para que las utilidades esperadas se compensen.

Concluímos entonces que la secuencia

$$(i_1, j_2), \underbrace{(i_3, j_2), ...(i_3, j_2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cúal no se juega ningún equilibrio de Nash puro. $\square$

Por su parte, la demostración para el caso de los juegos no degenerados de 2×3 es un poco menos directa y requiere plantear una ligera variante del juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein.

discutir un poco como afecta el cambio de la matriz

Teorema 4.5.2. *Existe un juego no degenerado de intereses identicos A representable en $O(k)$ bits, con al menos un equilibrio de Nash puro y una secuencia de juego ficticio alternante $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ sobre A tal que para todo $\tau < 2^k$, (i^τ, j^τ) no es un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Consideremos un juego en forma bimatricial con la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{array}{c|ccc|}
. & j^1 & j^2 & j^3 \\
\hline
i^1 & 1 & 2 & 0 \\
i^2 & 0 & 2+\epsilon & 2+2\epsilon \\
\hline
\end{array}$$

Ronda	(i,j)	x	$x^{\tau}B$	y	Ay
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
2	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},2+\frac{\epsilon}{2},1+\epsilon)$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
3	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3},2+\frac{2}{3}\epsilon,\frac{4+4\epsilon)}{3})$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
	$\vdots$				
τ	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{\tau},\frac{\tau-1}{\tau})$	$(\frac{1}{\tau},\frac{2+(\tau-1)(2+\epsilon)}{\tau},\frac{(\tau-1)(2+2\epsilon)}{\tau})$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$
	$\vdots$				
2^k	$(i_2,\ j_2)$	$(\epsilon,1-\epsilon)$	$(\epsilon,1-\epsilon-\epsilon^2,2-\epsilon^2)$	$(0,1,0)$	$(2,2+\epsilon)$

Tabla 4.2: Proceso de juego ficticio alternante en el juego del teorema 4.5.2

Si $\epsilon < 1$, vemos que (i^2, j^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, un proceso de juego ficticio alternante puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (i^2, j^3). Al igual que en la demostración anterior, el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, por lo que esto demuestra el teorema.

Si el proceso comienza con el jugador fila jugando i^1, entonces $x^1B = (1, 2, 0)$ y por lo tanto el jugador columna elegirá j_2.

En la siguiente ronda, el jugador 1 reaccionará con i_2, dando que el jugador 2 tendrá una creencia sobre su estrategia de $x^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, por lo que las utilidades esperadas del jugador 2 serán $-x^2A = (\frac{1}{2}, 2 + \frac{\epsilon}{2}, 1 + \epsilon)$ y volverá a elegir j_2.

Este perfil (i_2, j_2) se repetirá $2^k - 1$ rondas, ya que tendremos que mientras $2 \leq \tau \leq 2^k$, se cumplirán:

$$
\begin{aligned}
x^{\tau} &= \frac{\widetilde{i_1} + (\tau-1)\widetilde{i_2}}{\tau} = (\frac{1}{\tau}, \frac{\tau-1}{\tau}) \\
x^{\tau}A &= (\frac{1}{\tau}, \frac{2+(\tau-1)(2+\epsilon)}{\tau}, \frac{(\tau-1)(2+2\epsilon)}{\tau}) \\
y^{\tau} &= \widetilde{j_2} = (0,1,0) \\
Ay^{\tau} &= (2, 2+\epsilon)
\end{aligned}
$$

La tabla 4.2, muestra como se desarrolla este proceso. Para el jugador fila, justificar su decisión es trivial ya que la estrategia percibida de su oponente es pura y la utlidad esperada de i_2 es siempre marginalmente mayor que la de i_1. Para entender por qué el jugador columna no cambia su estrategia, debemos notar que:

$$\begin{aligned}
\tau \leq 2^k &= \frac{1}{\epsilon} \\
\tau &\leq \frac{2}{\epsilon} + 1 \\
\frac{2}{\epsilon} &\geq \tau - 1 \\
\frac{2}{\tau - 1} &\geq \epsilon \\
\frac{2}{(\tau - 1)} + 2 + \epsilon &\geq 2 + 2\epsilon \\
2 + (\tau - 1)(2 + \epsilon) &\geq (\tau - 1)(2 + 2\epsilon)
\end{aligned}$$

Similarmente al teorema anterior, esto podemos interpretarlo como que si bien en las iteraciones recientes el jugador 1 jugó i_2, el incentivo resultante de la única vez que jugó i_1 es muy fuerte por la gran diferencia de utilidades para el jugador 2 entre (i_1, j_2) e (i_2, j_3) , por lo que deberán pasar 2^{k-1} iteraciones de i_3 luego de ese único i_1 para que checkear esto las utilidades esperadas se compensen.

Concluímos entonces que la secuencia

$$(i_1, j_2), \underbrace{(i_2, j_2), ...(i_2, j_2)}_{2^k - 1 \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio alternante válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cúal no se juega ningún equilibrio de Nash puro. □

El detalle de que el juego originalmente propuesto por Brandt, Fischer y Harrenstein no nos sirva para demostrar el teorema anterior no es para nada menor. En efecto, como veremos en el siguiente teorema, es un ejemplo de un juego en el un proceso de juego ficticio simultaneo puede requerir una cantidad de rondas exponenciales mientras que, toda secuencia de juego ficticio alternante convergerá rápidamente.

Teorema 4.5.3. *Existe un juego no degenerado de intereses idénticos A representable en $O(k)$ bits y una secuencia de juego ficticio simultaneo $(i^\tau, j^\tau)_{\tau \in \mathbb{N}}$ sobre A y una constante C tal que*

- *Para todo $\tau < 2^k$, (i^τ, j^τ) no es un equilibrio de Nash puro.*
- *Para todo proceso de juego ficticio alternante $(\widehat{i^\tau}, \widehat{j^\tau})_{\tau \in \mathbb{N}}$ en A, $(\widehat{i^C}, \widehat{j^C})$ es un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Consideremos el juego en forma bimatricial con la siguiente matriz de pagos:

.	j^1	j^2	j^3
i^1	1	2	0
i^2	0	$2+\epsilon$	3

Si $\epsilon < 1$, (i^2, j^3) es el único equilibrio de Nash puro por ser el único perfil restante luego de realizar eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Consideremos un número $k > 1$ arbitrario. Mostraremos que para $\epsilon = 2^{-k}$, un proceso de juego ficticio simultaneo puede tomar 2^k rondas antes de que se juegue (i^2, j^3), mientras que todo proceso de juego ficticio alternante converge de forma pura en un número constante de rondas. Al igual que los teoremas anteriores, el juego puede codificarse en $O(k)$ bits, por lo que esto demuestra el teorema.

Veamos primero el caso alternante. Existen dos posibles secuencias de juego ficticio alternante para este juego, dado que el jugador 1 elegirá primero y el jugador 2 reaccionara según esta decisión.

Si el jugador fila juega i^2, el jugador columna responderá con j^3, siendo este el equilibrio puro. Si el jugador fila comienza con i^1, el jugador columna respondera con j^2. Esto hará que el jugador fila juegue i^2 en la segunda ronda por ser $A\widetilde{j^2} = (2, 2+\epsilon)$, mientras que el jugador continuará fila continuara jugando j^2. Esta situacion se repetirá una ronda más, tras la cuál, la jugador columna se verá incentivado a jugar j^3. Los desarrollos de estos dos procesos pueden verse en las tablas 4.4 y 4.3. Vemos entonces que, independientemente del valor de k, ambos procesos convergen de forma pura en 4 rondas o menos.

Pasemos ahora al caso simultaneo, para el cual nos basaremos en la prueba de Brandt, Fischer Y Harrenstein. Si el proceso comienza con el perfil (i^1, j^1), entonces las utilidades esperadas serán $Ay^1 = (1, 0)$ e $x^1 B = (1, 2, 0)$ respectivamente. Luego, en la segunda iteración el jugador fila elegirá i^1 y el jugador columna j^2. Las utilidades esperadas se actualizaran entonces como $Ay^2 = (\frac{3}{2}, \frac{2+\epsilon}{2})$ y $x^2 B = (1, 2, 0)$.

A continuación, por al menos 2^k rondas, los jugadores elegiran las mismas jugadas que en la iteración 2, dado que para todo τ tal que $2 \leq i \leq 2^k$, tendremos $Ay^\tau = (2 - \frac{1}{\tau}, 2 - \frac{2+\epsilon}{\tau})$ e $x^\tau B = (1, 2, 0)$. La tabla 4.5 muestra como se desarolla este proceso.

Concluímos entonces que la secuencia de perfiles

$$(i_1, j_1), \underbrace{(i_1, j_2), ...(i_1, j_2)}_{2^k \text{ veces}}$$

es una secuencia de aprendizaje de juego ficticio simultaneo válida de este juego que es exponencialmente larga en k y en la cúal no se juega ningún equilibrio de Nash puro.

□

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	(i_2, j_3)	$(0,1)$	$(0, 2+\epsilon, 3)$	$(0,0,1)$	$(0,3)$

Tabla 4.3: Proceso de juego ficticio alternante sobre el juego del teorema 4.5.3 comenzando por i_2

Iteración	(i,j)	x	xB	y	Ay
1	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(0,1,0)$	$(2, 2+\epsilon)$
2	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(0,1,0)$	$(2, 2+\epsilon)$
3	$(i_2,\ j_2)$	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3}, 2+\frac{2}{3}, 2)$	$(0,1,0)$	$(2, 2+\epsilon)$
4	$(i_2,\ j_3)$	$(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$	$(\frac{1}{4}, 2+\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$	$(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3(2+\epsilon)}{4})$

Tabla 4.4: Proceso de juego ficticio alternante sobre el juego del teorema 4.5.3 comenzando por i_1

Iteración	(i,j)	x $x^{\tau}B$	y	Ay	
1	(i_1, j_1)	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(1,0,0)$	$(1,0)$
2	(i_1, j_2)	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$	$(\frac{3}{2}, \frac{2+\epsilon}{2})$
3	(i_1, j_2)	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$	$(0,3)$
	$\vdots$				
τ	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(\frac{1}{\tau}, \frac{\tau-1}{\tau}, 0)$	$(2-\frac{1}{\tau}, 2-\frac{2+\epsilon}{\tau})$
	$\vdots$				
2^k	$(i_1,\ j_2)$	$(1,0)$	$(1,2,0)$	$(\frac{1}{2^k}, \frac{2^k-1}{2^k}, 0)$	$(2-\frac{1}{2^k}, 2-\frac{2+\epsilon}{2^k})$

Tabla 4.5: Proceso de juego ficticio simultaneo sobre el juego del teorema 4.5.3 comenzando por (i_1, j_1)

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

Conclusiones y trabajo futuro.

Bibliografía

[1] G. Brown. «Iterative solution of games by fictitious play». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* 13 (ene. de 1951).

[2] J. Robinson. «An Iterative Method of Solving a Game». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 54 (sep. de 1951). DOI: 10.2307/1969530.

[3] K. Miyasawa. «On the Convergence of Learning Processes in a 2x2 Non-Zero-Person Game». En: (oct. de 1961).

[4] D. Monderer y A. Sela. «A 2x2 Game without the Fictitious Play Property». En: *Games and Economic Behavior* 14 (feb. de 1996), págs. 144-148. DOI: 10.1006/game.1996.0045.

[5] L. Shapley. «Some Topics in Two-Person Games». En: *Annals of Mathematics Studies.* 52 (ene. de 1964).

[6] D. Monderer y L. Shapley. «Fictitious Play Property for Games with Identical Interests». En: *Journal of Economic Theory* 68 (feb. de 1996), págs. 258-265. DOI: 10.1006/jeth.1996.0014.

[7] D. Monderer y L. S. Shapley. «Potential Games». En: *Games and Economic Behavior* 14.1 (1996), págs. 124-143. ISSN: 0899-8256. DOI: https://doi.org/10.1006/game.1996.0044. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825696900445.

[8] U. Berger. «Learning in games with strategic complementarities revisited». En: *Journal of Economic Theory* 143 (nov. de 2008), págs. 292-301. DOI: 10.1016/j.jet.2008.01.007.

[9] A. Sela. «Fictitious play in 'one-against-all' multi-player games». En: *Economic Theory* 14 (nov. de 1999), págs. 635-651. DOI: 10.1007/s001990050345.

[10] D. Monderer y A. Sela. *Fictitious play and- no-cycling conditions.* Sonderforschungsbereich 504 Publications 97-12. Sonderforschungsbereich 504, Universität Mannheim;Sonderforschungsbereich 504, University of Mannheim, jun. de 1997. URL: https://ideas.repec.org/p/xrs/sfbmaa/97-12.html.

[11] U. Berger. «Fictitious play in 2xn games». En: (abr. de 2003).

[12] R. Chu y G. Vreeswijk. «Extending fictitious play with pattern recognition». En: *CEUR Workshop Proceedings* 1113 (ene. de 2013), págs. 40-53.

[13] A. Washburn. «A new kind of fictitious play». En: *Naval Research Logistics (NRL)* 48 (jun. de 2001), págs. 270-280. DOI: `10.1002/nav.7`.

[14] U. Berger. «Brown's original fictitious play». En: *Journal of Economic Theory* 135 (feb. de 2007), págs. 572-578. DOI: `10.1016/j.jet.2005.12.010`.

[15] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1963. DOI: `10.7249/R366`.

[16] G. Dantzig. «A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* (oct. de 2020), págs. 330-335.

[17] S. I. Gass y P. M. Zafra. «Modified fictitious play for solving matrix games and linear-programming problems». En: *Computers & Operations Research* 22.9 (1995), págs. 893-903. ISSN: 0305-0548. DOI: `https://doi.org/10.1016/0305-0548(94)00075-J`. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030505489400075J`.

[18] T. III, M. Epelman y R. Smith. «A Fictitious Play Approach to Large-Scale Optimization». En: *Operations Research* 53 (jun. de 2005), págs. 477-489. DOI: `10.1287/opre.1040.0178`.

[19] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games*. Vol. 1-2. Addison-Wesley, 1959.

[20] Y. Viossat y A. Zapechelnyuk. «No-regret Dynamics and Fictitious Play». En: *Journal of Economic Theory* 148 (jul. de 2012). DOI: `10.1016/j.jet.2012.07.003`.

[21] A. Jafari, A. Greenwald, D. Gondek y G. Ercal. «On No-Regret Learning, Fictitious Play, and Nash Equilibrium». En: (jul. de 2001).

[22] C. Daskalakis y Q. Pan. «A Counter-Example to Karlin's Strong Conjecture for Fictitious Play». En: *Proceedings - Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS* (dic. de 2014). DOI: `10.1109/FOCS.2014.10`.

[23] F. Brandt, F. Fischer y P. Harrenstein. «On the Rate of Convergence of Fictitious Play». En: *Theory of Computing Systems* 53.1 (jul. de 2013), págs. 41-52. ISSN: 1433-0490. DOI: `10.1007/s00224-013-9460-5`. URL: `https://doi.org/10.1007/s00224-013-9460-5`.