



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

TESINA DE GRADO  
PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE  
LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

---

Titulo de tu Tesina

---

*Autor:*  
Federico Badaloni

*Director:*  
Ariel

Departamento de Ciencias de la Computación  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Av. Pellegrini 250, Rosario, Santa Fe, Argentina

24 de octubre de 2020



# Resumen

El resumen de tu tesina.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>IV</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	1
<b>2 Estado del Arte</b>	<b>3</b>
2.1. Convergencia del Juego Ficticio . . . . .	3
2.2. Velocidad de Convergencia del Juego Ficticio . . . . .	4
<b>3 Conceptos Previos</b>	<b>5</b>
3.1. Teoría de Juegos . . . . .	5
3.2. Juego Ficticio . . . . .	5
3.3. Propiedad del Juego Ficticio . . . . .	5
<b>4 Aportes</b>	<b>7</b>
<b>5 Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>9</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>11</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Objetivos

Intro



## Capítulo 2

# Estado del Arte

### 2.1. Convergencia del Juego Ficticio

El proceso de aprendizaje de juego ficticio fue propuesto por primera vez por Brown en 1951 [1] como un algoritmo para encontrar el valor de un juego de suma zero finito. Hacia finales del mismo año, Robinson [2] demostró que el proceso converge para todos los juegos de esta clase.

Desde entonces, se han publicado numerosos trabajos analizando la convergencia del juego ficticio en juegos que no sean de suma zero. Miyazawa [3] demostró que esta propiedad vale para todos los juegos de  $2 \times 2$  pero, su demostración depende de la incorporación de una regla de desempate particular sin la cual, Monderer y Sela [4] demostraron que no se cumple. Por su parte, Shapley [5] mostró un ejemplo de un juego de  $3 \times 3$  para el cuál no es válida.

Además, la convergencia del juego ficticio fue demostrada para juegos de intereses identicos [6], juegos potenciales con pesos [7], juegos no degenerados con estrategias complementarias y ganancias disminuyentes [8] y ciertas clases de juegos compuestos [9].

Por otro lado, se han estudiado muchas variantes del juego ficticio. Una de las mas analizadas es el juego ficticio continuo, definida originalmente en la publicación original de Brown [1], aunque este no la exploró en detalle. Monderer y Sela [10] demostraron que esta converge para juegos no degenerados de  $2 \times 3$  y Berger luego extendió este resultado a  $2 \times N$  [11] y aportó la convergencia de los juegos de potencial ordinal y quasi-supermodulares con ganancias disminuyentes. Otros ejemplos de variantes propuestas pueden verse en [12] y [13].

Una variante de particular interes este trabajo es el juego ficticio con actualización alternante de creencias. Berger [14] planteó que esta versión alternante es en realidad la original que definió Brown en [14] y que si bien el proceso con actualización simultanea de creencias que usan todos los investigadores de teoría de juegos en la actualidad puede resultar mas intuitivo, es también menos potente y da como ejemplo la clase de los juegos no degenerados con potencial ordinal para la cuál la version alternante converge, pero la simultanea no.

## 2.2. Velocidad de Convergencia del Juego Ficticio

Los trabajos mencionados hasta ahora se enfocan en el estudio de la eventual convergencia global a un equilibrio de Nash de las distintas clases de juegos. Otra enfoque de investigación es la velocidad de convergencia en los casos en la que esta ocurre. El interés por este se debe en gran medida a la equivalencia entre los juegos de suma cero y los problemas de programación lineal, demostrada por Dantzig, Gale y Von Neumann [15] [16]. En 1994, Gass y Zafra [17] planteaban que hasta la fecha, lo más eficiente para resolver un juego de suma cero era plantearlo como un problema de programación lineal y aplicar el método simplex. En el mismo artículo plantean un método mixto con simplex y una variante de juego ficticio y concluyen que permite acelerar la convergencia en ciertos problemas de programación lineal. Lambert y Smith [18] plantean también una variante (con muestreo) y discuten su eficiencia en problemas de optimización a gran escala.

Vale la pena mencionar en este punto lo que en la literatura del tema se conoce como la Conjetura de Karlin. En 1959, Samuel Karlin [19] conjeturó que la velocidad de convergencia del juego ficticio es  $O(t^{-\frac{1}{2}})$  para todos los juegos. La idea proviene de que esta cota superior se corresponde con la de la velocidad de convergencia de otro método de aprendizaje muy relacionado con el juego ficticio, las dinámicas de no-arrepentimiento [20] [21]. Daskalakis y Pan [22] probaron falsa una versión fuerte de la Conjetura de Karlin (usando una regla de desempate arbitraria) pero dejaron abierta la pregunta sobre la versión general, que ellos llaman débil, de la conjetura.

La utilidad del juego ficticio como método para computar equilibrios de Nash fue puesta en duda cuándo Brandt, Fischer y Harrenstein [23] demostraron que para los juegos de suma cero, los no degenerados de  $2 \times N$  y los potenciales (tres de las clases más estudiadas), existen casos en los que el proceso de juego ficticio puede tomar una cantidad de pasos exponencial en el tamaño de representación del juego antes de que se juegue algún equilibrio. En esta publicación mencionan que su resultado puede ser extendido al juego ficticio alternante pero no demuestran esto.



## Capítulo 3

# Conceptos Previos

### 3.1. Teoría de Juegos

[TODO: Juegos en forma normal] [TODO: Juegos en forma bimatricial]

### 3.2. Juego Ficticio

Presentaremos ahora, la definición de Juego Ficticio Simultaneo (SFP) que usan Berger, Shapley, Monderer y Sela [14] [8] [TODO: citar shapley:counter] [10], [6].

**Definición 3.2.0.1.** Sea  $(A, B)$  un juego en forma bimatricial de  $n \times m$ .

Alternativamente, Brandt, Fischer y Harrenstein utilizan una definición equivalente que resulta más cómoda para estudiar velocidades de convergencia:

**Definición 3.2.0.2.** Sea  $(A, B)$  un juego en forma bimatricial de  $n \times m$ .

Esta definición es a su vez muy similar a la que utiliza Robinson [2]

### 3.3. Propiedad del Juego Ficticio



## Capítulo 4

# Aportes

Aportes.



## Capítulo 5

# Conclusiones y Trabajo Futuro

Conclusiones y trabajo futuro.



# Bibliografía

- [1] G. Brown. «Iterative solution of games by fictitious play». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* 13 (ene. de 1951).
- [2] J. Robinson. «An Iterative Method of Solving a Game». En: *Annals of Mathematics. Second Series* 54 (sep. de 1951). DOI: 10.2307/1969530.
- [3] K. Miyasawa. «On the Convergence of Learning Processes in a 2x2 Non-Zero-Person Game». En: (oct. de 1961).
- [4] D. Monderer y A. Sela. «A 2x2 Game without the Fictitious Play Property». En: *Games and Economic Behavior* 14 (feb. de 1996), págs. 144-148. DOI: 10.1006/game.1996.0045.
- [5] L. Shapley. «Some Topics in Two-Person Games». En: *Annals of Mathematics Studies*. 52 (ene. de 1964).
- [6] D. Monderer y L. Shapley. «Fictitious Play Property for Games with Identical Interests». En: *Journal of Economic Theory* 68 (feb. de 1996), págs. 258-265. DOI: 10.1006/jeth.1996.0014.
- [7] D. Monderer y L. S. Shapley. «Potential Games». En: *Games and Economic Behavior* 14.1 (1996), págs. 124-143. ISSN: 0899-8256. DOI: <https://doi.org/10.1006/game.1996.0044>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825696900445>.
- [8] U. Berger. «Learning in games with strategic complementarities revisited». En: *Journal of Economic Theory* 143 (nov. de 2008), págs. 292-301. DOI: 10.1016/j.jet.2008.01.007.
- [9] A. Sela. «Fictitious play in ‘one-against-all’ multi-player games». En: *Economic Theory* 14 (nov. de 1999), págs. 635-651. DOI: 10.1007/s001990050345.
- [10] D. Monderer y A. Sela. *Fictitious play and- no-cycling conditions*. Sonderforschungsbereich 504 Publications 97-12. Sonderforschungsbereich 504, Universität Mannheim; Sonderforschungsbereich 504, University of Mannheim, jun. de 1997. URL: <https://ideas.repec.org/p/xrs/sfbmaa/97-12.html>.
- [11] U. Berger. «Fictitious play in 2xn games». En: (abr. de 2003).
- [12] R. Chu y G. Vreeswijk. «Extending fictitious play with pattern recognition». En: *CEUR Workshop Proceedings* 1113 (ene. de 2013), págs. 40-53.

- [13] A. Washburn. «A new kind of fictitious play». En: *Naval Research Logistics (NRL)* 48 (jun. de 2001), págs. 270-280. DOI: 10.1002/nav.7.
- [14] U. Berger. «Brown's original fictitious play». En: *Journal of Economic Theory* 135 (feb. de 2007), págs. 572-578. DOI: 10.1016/j.jet.2005.12.010.
- [15] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1963. DOI: 10.7249/R366.
- [16] G. Dantzig. «A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem». En: *Activity Analysis of Production and Allocation* (oct. de 2020), págs. 330-335.
- [17] S. I. Gass y P. M. Zafra. «Modified fictitious play for solving matrix games and linear-programming problems». En: *Computers & Operations Research* 22.9 (1995), págs. 893-903. ISSN: 0305-0548. DOI: [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(94\)00075-J](https://doi.org/10.1016/0305-0548(94)00075-J). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030505489400075J>.
- [18] T. III, M. Epelman y R. Smith. «A Fictitious Play Approach to Large-Scale Optimization». En: *Operations Research* 53 (jun. de 2005), págs. 477-489. DOI: 10.1287/opre.1040.0178.
- [19] S. Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games*. Vol. 1-2. Addison-Wesley, 1959.
- [20] Y. Viossat y A. Zapechelnyuk. «No-regret Dynamics and Fictitious Play». En: *Journal of Economic Theory* 148 (jul. de 2012). DOI: 10.1016/j.jet.2012.07.003.
- [21] A. Jafari, A. Greenwald, D. Gondek y G. Ercal. «On No-Regret Learning, Fictitious Play, and Nash Equilibrium». En: (jul. de 2001).
- [22] C. Daskalakis y Q. Pan. «A Counter-Example to Karlin's Strong Conjecture for Fictitious Play». En: *Proceedings - Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS* (dic. de 2014). DOI: 10.1109/FOCS.2014.10.
- [23] F. Brandt, F. Fischer y P. Harrenstein. «On the Rate of Convergence of Fictitious Play». En: *Theory of Computing Systems* 53.1 (jul. de 2013), págs. 41-52. ISSN: 1433-0490. DOI: 10.1007/s00224-013-9460-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s00224-013-9460-5>.