高二数学练习 12.30

一、单选题

1. 已知直线$l_1: x+(2-k)y+1=0$与$l_2: 2y+3=0$垂直，则$k=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【分析】利用一般式方程下两直线垂直的公式代入求解即可得到结果.

【详解】因为直线$l_1: x+(2-k)y+1=0$与$l_2: 2y+3=0$垂直，

所以$0+2(2-k)=0$，解得$k=2$.

2. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为S_n.若$S_3=6$，$S_6=3$，则$S_9=$（　　）

A. -18　　B. -9　　C. 9　　D. 18

【答案】B

【分析】利用等差数列片段和的性质可求得S_9的值.

【详解】由等差数列片段和的性质可知，S_3、S_6-S_3、S_9-S_6成等差数列，

所以，$(S_9-S_6)+S_3=2(S_6-S_3)$，则$S_9=3S_6-3S_3=3\times3-3\times6=-9$，

3. 已知点$A(3,\sqrt{21})$，抛物线$C: y^2=4x$上有一点$P(x_0,y_0)$，则$\frac{y_0^2}{2}+2|PA|$的最小值是（　　）

A. 10　　B. 8　　C. 5　　D. 4

【答案】B

【分析】结合坐标运算和焦半径公式，转化$\frac{y_0^2}{2}+2|PA|=2(|PF|+|PA|)-2$，再利用数形结合求最值.

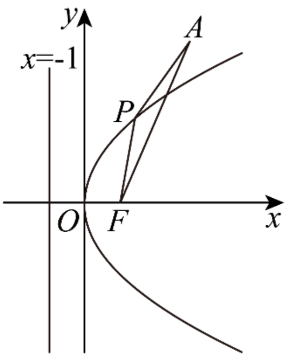
【详解】已知抛物线$C: y^2=4x$上有一点$P(x_0,y_0)$，则$y_0^2=4x_0$，即$\frac{y_0^2}{4}=x_0$.

又$(\sqrt{21})^2>4\times3$，故$A(3,\sqrt{21})$在抛物线$C: y^2=4x$的外部，

则 $\frac{y_0^2}{2}+2|PA|=2\left(\frac{y_0^2}{4}+|PA|\right)=2\left(x_0+|PA|\right)=2\left(x_0+1+|PA|\right)-2$，

因为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，则 $|PF|=x_0+1$，故

$\frac{y_0^2}{2}+2|PA|=2\left(x_0+1+|PA|\right)-2=2\left(|PF|+|PA|\right)-2$.



由于 $|PF|+|PA|\geq|AF|$，当 A,P,F 三点共线（P 在 A,F 之间）时，$|PF|+|PA|$ 取到最小值

$|AF|=\sqrt{(3-1)^2+(\sqrt{21})^2}=5$，

则 $\frac{y_0^2}{2}+2|PA|=2\left(|PF|+|PA|\right)-2$ 的最小值为 $2\times5-2=8$.

4. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}\left(x-a-1\right)$（e 为自然对数的底数），$g\left(x\right)=\ln\left(x\mathrm{e}^x\right)-a$ 的零点分别为 x_1，x_2，则 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值为（　　）

A. e　　B. $\frac{1}{\mathrm{e}}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{\mathrm{e}}$

【答案】C

【分析】利用同构化得出 x_1,x_2 的关系：$x_2=\mathrm{e}^{x_1-1}$，则 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1-1}}$，然后引入函数 $h(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x-1}}$，由导数求得函数最大值即得.

【详解】由已知 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}(x_1-a-1)=0$，即 $\mathrm{e}^{x_1-1}+(x_1-1)=a$，

$\ln(x_2\mathrm{e}^{x_2})-a=0$，即 $\ln x_2+x_2=a$，令 $x_2=\mathrm{e}^t$，则 $\ln x_2+x_2=t+\mathrm{e}^t=a$，

又函数 $y=x+\mathrm{e}^x$ 是 R 上的增函数，因此 $x_2=\mathrm{e}^{x_1-1}$，

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1-1}}$，令 $h(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x-1}}$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^{x-1}}$，

$x<1$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递增，$x>1$时，$h'(x)<0$，$h(x)$递减，

所以$x=1$时，$h(x)_{\max}=h(1)=1$，

所以$\frac{x_1}{x_2}$的最大值是 1.

二、多选题

5. 已知曲线$C:\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{3-m}=1\left(x\in\mathbf{R}\right)$，下列说法正确的是（　　）

A. 若$1<m<3$，则曲线 C 为椭圆

B. 若$m<1$，则曲线 C 为双曲线

C. 若曲线 C 为椭圆，则其长轴长一定大于 2

D. 若曲线 C 为焦点在 x 轴上的双曲线，则其离心率小于$\sqrt{2}$大于 1

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据曲线C所表示的图形求出对应的参数m的取值范围，可判断 AB 选项的正误；求出椭圆长轴长的表达式，可判断 C 选项的正误；利用双曲线的离心率公式可判断 D 选项的正误.

【详解】对于 A 选项，若C为椭圆，则$\begin{cases}m-1>0\\3-m>0\\m-1\neq 3-m\end{cases}\Rightarrow m\in\left(1,2\right)\cup\left(2,3\right)$，A 不正确；

对于 B 选项，若C为双曲线，等价于$\left(m-1\right)\left(3-m\right)<0$，即$m>3$或$m<1$，B 正确；

对于 C 选项，当$m\in\left(1,2\right)$时，椭圆长轴长$2a=2\sqrt{3-m}>2$，

当$m\in\left(2,3\right)$时，椭圆长轴长$2a=2\sqrt{m-1}>2$，C 正确；

对于 D 选项，若C为焦点在x轴上的双曲线，则$\begin{cases}m-1>0\\3-m<0\end{cases}$，解得$m>3$，

双曲线C的离心率为$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{m-1+m-3}}{\sqrt{m-1}}=\sqrt{2-\frac{2}{m-1}}<\sqrt{2}$，

且双曲线的离心率$e>1$，故 D 正确.

故选：BCD.

6. 函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$.下列说法中正确的有（　　）

A. 当 $a=3,b=1$ 时，有 $f(-2-x)+f(x)=0$ 恒成立

B. $\exists a,b\in\mathbf{R}$，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减

C. 当 $b=0$ 时，存在唯一的实数 a，使 $f(x)$ 恰有两个零点

D. 当 $b=0,x\in[-2,0]$ 时，$x-6\le f(x)\le x$ 恒成立，则 $a\in\left[\frac{1}{4},1\right]$

【答案】ACD

【分析】利用函数表达式计算 $f(-2-x)$，可得选项 A 正确；求 $f'(x)$，可知 $f'(x)$ 为开口向上的二次函数，在 $(-\infty,1)$ 上 $f'(x)\le 0$ 不可能恒成立，选项 B 错误；零点问题转化为函数图象交点个数问题可得选项 C 正确；分离参数 a，恒成立问题转化为 a 大于等于函数的最大值或小于等于函数的最小值，分析函数即可得到选项 D 正确.

【详解】A. 当 $a=3,b=1$ 时，$f(x)=x^3+3x^2+x-1,\ f(-2-x)=-x^3-3x^2-x+1$，

$\therefore f(-2-x)+f(x)=0$，选项 A 正确.

B.由题意得，$f'(x)=3x^2+2ax+b$，为开口向上的二次函数，

故 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 为增函数，

所以不存在 $a,b\in\mathbf{R}$，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减.

C. 当 $b=0$ 时，$f(x)=x^3+ax^2-1$，

由 $f(0)=-1$ 得，0 不是函数 $f(x)$ 的零点.

当 $x\ne 0$ 时，由 $x^3+ax^2-1=0$ 得，$a=\frac{1}{x^2}-x$，

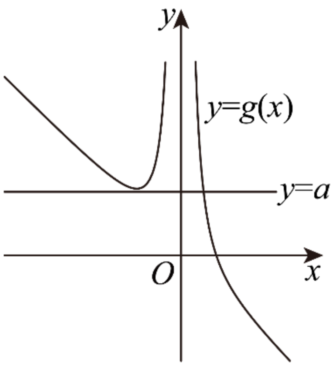
令 $g(x)=\frac{1}{x^2}-x(x\ne 0)$，则 $g'(x)=-\frac{x^3+2}{x^3}$，由 $g'(x)=0$ 得 $x=-\sqrt[3]{2}$，

当 $x\in(-\infty,-\sqrt[3]{2})$ 时，$x^3<0,x^3+2<0,g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，

当 $x\in(-\sqrt[3]{2},0)$ 时，$x^3<0,x^3+2>0,g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x^3>0,x^3+2>0,g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，

$g(x)$图象如图所示：



由图象可知，存在唯一的实数a，使直线$y=a$与$g(x)$图象恰有两个交点，即$f(x)$恰有两个零点，选项C正确.

D. 当$b=0$时，$f(x)=x^3+ax^2-1$，

$\because x\in[-2,0]$，$x-6\le f(x)\le x$恒成立，

$\therefore x^3+ax^2-x+5\ge 0$恒成立且$x^3+ax^2-x-1\le 0$.

对于不等式$x^3+ax^2-x+5\ge 0, x\in[-2,0]$，

当$x=0$时，不等式成立，

当$x\in[-2,0)$时，$a\ge -x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}$恒成立，即$a\ge\left(-x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)_{\max}$，

令$h(x)=-x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}, x\in[-2,0)$，则$h'(x)=\dfrac{-x^3-x+10}{x^3}$，

$\because x\in[-2,0)$，$\therefore -x^3-x+10>0, x^3<0$，$\therefore h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$在$[-2,0)$上为减函数，$h(x)_{\max}=h(-2)=\dfrac{1}{4}$，$\therefore \mathrm{a}\ge\dfrac{1}{4}$.

对于不等式$x^3+ax^2-x-1\le 0, x\in[-2,0]$，

当$x=0$时，不等式成立，

当$x\in[-2,0)$时，$a\le -x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$恒成立，即$a\le\left(-x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)_{\min}$，

令$\varphi(x)=-x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}, x\in[-2,0)$，则$\varphi'(x)=\dfrac{-x^3-x-2}{x^3}$，

当 $x\in(-2,-1)$ 时，$-x^3-x\in(2,10)$，$-x^3-x-2>0,x^3<0$，$\varphi'(x)<0$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$-x^3-x\in(0,2)$，$-x^3-x-2<0,x^3<0$，$\varphi'(x)>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上为减函数，在 $(-1,0)$ 上为增函数，

$\therefore \varphi(x)_{\min}=\varphi(-1)=1$，$\therefore a\le 1$.

综上得，$a\in\left[\frac{1}{4},1\right]$，选项 D 正确.

故选：ACD.

三、填空题

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4+a_8=-3,a_5a_7=2$，则 $a_6=$______.

【答案】$-\sqrt{2}$

【分析】利用等比数列的通项性质可得 $a_6^2=2$，再判断出 a_4,a_8 的正负，从而可知等比数列 $\{a_n\}$ 中偶数项均为负，从而得出结论.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，由 $a_5a_7=2\Rightarrow a_4a_8=2$，

所以 $a_6^2=2$，$a_6=\pm\sqrt{2}$，

由 $a_4+a_8=-3<0$，$a_4a_8=2>0$，知 a_4,a_8 均为负数，

所以等比数列 $\{a_n\}$ 中偶数项均为负，即 $a_6=-\sqrt{2}$

故答案为：$-\sqrt{2}$.

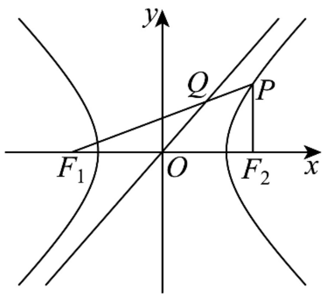
8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在双曲线 C 上，且满足 $\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，倾斜角为锐角的渐近线与线段 PF_1 交于点 Q，且 $\overrightarrow{F_1P}=4\overrightarrow{QP}$，则 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值为______.

【答案】$\frac{7}{2}$## 3.5

【分析】双曲线 C 的半焦距为 c，根据给定条件求出点 P、Q 坐标，再由点 Q 在渐近线

$y=\frac{b}{a}x$ 上求出 a，b 的关系，然后结合双曲线定义计算作答.

【详解】设双曲线 C 的半焦距为 c，即有 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，



因 $\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $\overrightarrow{F_1F_2}\perp\overrightarrow{PF_2}$，

即直线 $x=c$ 与双曲线 C 交于点 P，且点 P 在第一象限，

由 $\begin{cases}x=c\\b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\end{cases}$ 得点 $P(c,\frac{b^2}{a})$，由 $\overrightarrow{F_1P}=(2c,\frac{b^2}{a})$，

而 $\overrightarrow{F_1P}=4\overrightarrow{QP}$，得 $Q\left(\frac{c}{2},\frac{3b^2}{4a}\right)$，

代入 $y=\frac{b}{a}x$ 得：$\frac{3b^2}{4a}=\frac{bc}{2a}$，即 $3b=2c$，不妨 $b=2k,c=3k$，则 $a=\sqrt{5}k$，

故 $|PF_2|=\frac{b^2}{a}=\frac{4}{\sqrt{5}}k$，则 $|PF_1|=|PF_2|+2a=\frac{14}{\sqrt{5}}k$，因此 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{7}{2}$.

故答案为：$\frac{7}{2}$.

四、解答题

9. 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$a_n=(-1)^n+2^n$，$b_n=a_{n+1}-\lambda a_n(\lambda>0)$，且 $\{b_n\}$ 为等比数列.

（1）求 λ 的值；

（2）记数列 $\{b_n\cdot n^2\}$ 的前 n 项和为 T_n.若 $T_i\cdot T_{i+2}=15T_{i+1}\left(i\in\mathrm{N}^*\right)$，求 i 的值.

【答案】（1）2　　（2）2

【分析】（1）计算出 $a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=7$，$a_4=17$.，进而得到 b_1,b_2,b_3，根据等比数列得到方程，求出 $\lambda=2$，验证后得到答案；

（2）求出 $b_n\cdot n^2=-3\times(-1)^n\cdot n^2$，分 n 为偶数和 n 为奇数时，得到 T_n，$T_i\cdot T_{i+2}>0$，又

$T_i \cdot T_{i+2} = 15T_{i+1}$，故$T_{i+1} > 0$，所以$i$为偶数，从而得到方程，求出$i = 2$.

【小问1详解】

因为$a_n = (-1)^n + 2^n$，则$a_1 = 1$，$a_2 = 5$，$a_3 = 7$，$a_4 = 17$.

又$b_n = a_{n+1} - \lambda a_n$，则$b_1 = a_2 - \lambda a_1 = 5 - \lambda$，$b_2 = a_3 - \lambda a_2 = 7 - 5\lambda$，

$b_3 = a_4 - \lambda a_3 = 17 - 7\lambda$.

因为$\{b_n\}$为等比数列，则$b_2^2 = b_1 \cdot b_3$，所以$(7-5\lambda)^2 = (5-\lambda)(17-7\lambda)$，

整理得$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$，解得$\lambda = -1$或2.

因为$\lambda > 0$，故$\lambda = 2$.

当$\lambda = 2$时，$b_n = a_{n+1} - 2a_n = (-1)^{n+1} + 2^{n+1} - 2\left[(-1)^n + 2^n\right]$

$= (-1) \times (-1)^n + 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n - 2^{n+1} = -3 \times (-1)^n$.

则$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{-3 \times (-1)^{n+1}}{-3 \times (-1)^n} = -1$，故$\{b_n\}$为等比数列，所以$\lambda = 2$符合题意.

【小问2详解】

$b_n \cdot n^2 = -3 \times (-1)^n \cdot n^2$，

当n为偶数时，$T_n = -3 \times \left[-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - \cdots - (n-1)^2 + n^2\right]$

$= -3 \times (1 + 2 + \cdots + n) = -\dfrac{3}{2}n(n+1)$；

当n为奇数时，$T_n = T_{n+1} - b_{n+1}(n+1)^2 = -\dfrac{3}{2}(n+1)(n+2) + 3(n+1)^2 = \dfrac{3}{2}n(n+1)$.

综上，$T_n = \begin{cases} \dfrac{3}{2}n(n+1), n = 2k-1, k \in \mathrm{N}^* \\ -\dfrac{3}{2}n(n+1), n = 2k, k \in \mathrm{N}^* \end{cases}$，

因为$T_i \cdot T_{i+2} > 0$，又$T_i \cdot T_{i+2} = 15T_{i+1}$，

故$T_{i+1} > 0$，所以i为偶数.

所以$\left[-\dfrac{3}{2}i(i+1)\right] \cdot \left[-\dfrac{3}{2}(i+2)(i+3)\right] = 15 \times \dfrac{3}{2}(i+1)(i+2)$，

整理得$i^2 + 3i - 10 = 0$，解得$i = 2$或$i = -5$（舍），所以$i = 2$.

10. 已知 $f(x)=\ln(x+1)$

（1）设 $h(x)=xf(x-1)$，求 $h(x)$ 的极值.

（2）若 $f(x)\le ax$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

（3）若存在常数 M，使得对任意 $x\in I$，$f(x)\le M$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 I 上有上界 M，函数 $f(x)$ 称为有上界函数．如 $y=e^x$ 是在 R 上没有上界的函数，$y=\ln x$ 是在 $(0,+\infty)$ 上没有上界的函数；函数 $y=-e^x, y=-x^2$ 都是在 R 上有上界的函数．如果 $g(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\left(n\in N^*\right)$，则 $g(n)$ 是否在 N^* 上有上界?若有，求出上界；若没有，给出证明.

【答案】（1）极小值 $h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，没有极大值

（2）$a\ge 1$

（3）没有，证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用导数求得 $h(x)$ 的极值.

（2）构造函数 $m(x)=\ln(x+1)-ax$，利用导数以及不等式恒成立的知识求得 a 的取值范围.

（3）根据（1）的结论，利用放缩法、综合法证得 $g(n)$ 没有上界.

【小问 1 详解】

$h(x)=xf(x-1)=x\ln x(x>0), h'(x)=\ln x+1$，

令 $h'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{e}$.

所以在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上 $h'(x)<0, h(x)$ 单调递减；

在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上，$h'(x)>0, h(x)$ 单调递增；

所以函数 $h(x)$ 有极小值 $h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，没有极大值.

【小问 2 详解】

依题意，$f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)\le ax$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上恒成立，

设 $m\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-ax\left(x\ge 0\right), m\left(0\right)=0$，$m'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a$，

当 $a\le 0$ 时，$m'\left(x\right)>0, m\left(x\right)$ 单调递增，$m\left(x\right)\ge 0$，不符合题意.

当 $0<a<1$ 时，$m'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a=\dfrac{1-a\left(x+1\right)}{x+1}=\dfrac{-ax+1-a}{x+1}$，

令 $m'\left(x\right)=0$，解得 $x_0=\dfrac{1}{a}-1$，

即 $\exists x_0$ 使 $m'\left(x_0\right)=0$，在 $\left(0,x_0\right)$ 上，$m'\left(x\right)>0, m\left(x\right)$ 单调递增；

在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上，$m'\left(x\right)<0, m\left(x\right)$ 单调递减，不符合题意；

当 $a\ge 1$ 时，$m'\left(x\right)<0, m\left(x\right)$ 单调递减，$m\left(x\right)\le m\left(0\right)=0$，符合题意；

综上：$a\ge 1$.

小问 3 详解】

没有上界，理由如下：

由（2）可知，$\ln\left(x+1\right)\le x$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上恒成立，

令 $x=\dfrac{1}{n}$，则 $\ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)\le\dfrac{1}{n}$，

所以 $\ln\left(\dfrac{1}{1}+1\right)<\dfrac{1}{1}, \ln\left(\dfrac{1}{2}+1\right)<\dfrac{1}{2}, \ln\left(\dfrac{1}{3}+1\right)<\dfrac{1}{3}, \ldots, \ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)<\dfrac{1}{n}$，

将上述式子相加得 $\ln(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}=g(n)$

由于 $\ln\left(n+1\right)$ 没有上界，故 $g\left(n\right)$ 也没有上界.

【点睛】本题涵盖了导数应用、单调性分析、不等式恒成立及放缩法等知识点，能够有效考查学生的综合能力. 通过不等式在区间上的恒成立条件，构造辅助函数，再利用单调性分析得出适合的取值范围.