答疑：1.16，1.17，晚上18：00-20：00，西一313

一. 求下列方程的通解或特解（32分）

1. $(4+\frac{2y}{x^2})dx+(\frac{2x}{y}+\frac{3}{x})dy=0.\ (x>0,y>0).$
2. $(1-x^2)y''-2xy'+20y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$
3. $x^3y'''-2x^2y''+2xy'=x^4e^x,\ (x>0).$
4. $\frac{\partial u}{\partial t}+x\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{u},\ u(0,x)=x^4.$

二(16分). (1) 求微分方程组$\frac{dX}{dt}=AX+B$的通解，并计算e^{At}，其中

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 8 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} e^t\\ 0\\ 4te^t\end{pmatrix}$$

(2) 用特征法求微分方程组$\frac{dX}{dt}=AX$的通解，并计算以$X(0)=X_0$的特解，其中

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0\\ -2 & 5 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad X_0=\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

三. (15分) (1). 叙述解的延拓定理

(2) 记方程$y'=y^4-4e^xy^2,\ y(0)=1$最大存在区间为$(-T_2,T_1)$，判断T_1,T_2是否有限？并给出充分理由.

四. (12分) 判断零解的稳定性

$$(1)\begin{cases} x'=2y+6y^5+x^7\\ y'=-x+8x^7+2y^9\end{cases}\qquad (2)\begin{cases} x'=-2xy^2\\ y'=x^2y\end{cases}$$

五. (15分) 求出所有的奇点(平衡点)，在各个奇点附近考虑其线性系统，判

由 扫描全能王 扫描创建

$\begin{pmatrix} z \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

三. (15分) (1). 叙述解的延拓定理

(2) 记方程$y' = y^4 - 4e^x y^2$, $y(0) = 1$最大存在区间为$(-T_2, T_1)$. 判断T_1, T_2是否有限? 并给出充分理由.

四. (12分) 判断零解的稳定性

$$(1)\begin{cases} x' = 2y + 6y^5 + x^7 \\ y' = -x + 8x^7 + 2y^9 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x' = -2xy^2 \\ y' = x^2 y \end{cases}$$

五. (15分) 求出所有的奇点(平衡点). 在各个奇点附近考虑其线性系统, 判断其奇点类型并画出相图草图

$$\begin{cases} x' = x - 4y + 2x^2 - 8xy \\ y' = 2x + 2y + xy + y^2 \end{cases}$$

六. (10分) 假设$f(x)$是区间$[0,1]$上连续函数, $K(x,y)$为$[0,1]\times\mathbb{R}$上关于y满足局部Lipschitz条件的连续函数. 证明存在$\delta > 0$, 使得对于任意的$|\lambda| < \delta$, 如下方程

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y(t))dt$$

在区间$[0,1]$上存在唯一的连续解.

一. 求下列方程(组)的通解或通积分（35分）

(1).
$$(\sin x + \cos x)\cos y\, dx - (\sin x \sin y)dy = 0.$$

(2).
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x,\ x > 0.$$

(3).
$$x^2y'' + (x^2 - 2x)y' - (x-2)y = 0,\ x > 0.$$

(4). 求解初值问题$X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X,\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

二. (10分). 记如下方程的右行饱和解的存在区间为$[0, T)$. 判断T是否有限并给出充足的理由

$$y' = (t-1)^2 - y^2,\ \ y(0) = 0.$$

三(15分). 给定单连通区域G中的连续可微函数$f(x, y)$. 陈述并证明初值问题$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(0) = y_0$, $(0, y_0) \in G$的右行解$y = \phi(x; y_0)$关于初值y_0的连续依赖性定理。

四. (10分) 设$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$是$n$阶齐次线性方程组$\frac{dX}{dt} = A(t)X$的$n$个解。其中$A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$是定义在区间$I$上的$n \times n$矩阵函数，且分量是关于$t$的连续函数。证明：$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$在区间$I$上线性无关的充要条件是朗斯基行列式$W(t)$在区间$I$上恒不等于零。

五. (10分) 求出所有的平衡点，判断其类型并画出相图草图

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x^2 \end{cases}$$

六. (10分) 设$c(t)$在$[0, \infty)$连续可微，满足$\lim\limits_{t\to\infty} c(t) = 0$, $\int_0^\infty |c'(t)|dt < \infty$, 证明方程$x''(t) + (1 - c(t))x(t) = 0$的所有解在$[0, \infty)$上有界。

二. (10分). 记如下方程的右行饱和解的存在区间为$[0,T)$. 判断T是否有限并给出充足的理由

$$y' = (t-1)^2 - y^2, \quad y(0) = 0.$$

三(15分). 给定单连通区域G中的连续可微函数$f(x,y)$. 陈述并证明初值问题$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, $y(0) = y_0$, $(0, y_0) \in G$的右行解$y = \varphi(x; y_0)$关于初值y_0的连续依赖性定理。

四. (10分) 设$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$是$n$阶齐次线性方程组$\frac{dX}{dt} = A(t)X$的$n$个解，其中$A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$是定义在区间$I$上的$n \times n$矩阵函数，且分量是关于$t$的连续函数。证明：$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$在区间$I$上线性无关的充要条件是朗斯基行列式$W(t)$在区间$I$上恒不等于零。

五. (10分) 求出所有的平衡点，判断其类型并画出相图草图

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x^2 \end{cases}$$

六 (10分) 设$c(t)$在$[0,\infty)$连续可微，满足$\lim\limits_{t\to\infty} c(t) = 0$, $\int_0^\infty |c'(t)|dt < \infty$. 证明方程$x''(t) + (1 + c(t))x(t) = 0$的所有解在$[0,\infty)$上有界。

七. (10分). 设$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$连续可微. 考虑自治系统$X' = F(X)$. 已知$X = 0$为特解且在相应的线性化系统$X' = AX$中渐近稳定. 证明自治系统$X' = F(X)$中零解渐近稳定.