- 随机现象

- 随机现象

- 随机现象

(1) 确定性现象

一个标准大气压下，水100度沸腾，0度结冰

- 随机现象

(1) 确定性现象

一个标准大气压下，水100度沸腾，0度结冰

向上抛一枚硬币，受地球引力作用，硬币总会落到地上

- 随机现象

(1) 确定性现象

一个标准大气压下，水100度沸腾，0度结冰

向上抛一枚硬币，受地球引力作用，硬币总会落到地上

(2) 随机现象— 不确定性现象

- 随机现象

(1) 确定性现象

一个标准大气压下，水100度沸腾，0度结冰

向上抛一枚硬币，受地球引力作用，硬币总会落到地上

(2) 随机现象— 不确定性现象

硬币落到地上，观察正面向上或反面向上

- 随机现象

(1) 确定性现象

一个标准大气压下，水100度沸腾，0度结冰

向上抛一枚硬币，受地球引力作用，硬币总会落到地上

(2) 随机现象— 不确定性现象

硬币落到地上，观察正面向上或反面向上

从一副扑克中，抽一张扑克，记录其花色

(3) 随机现象的基本属性

(3) 随机现象的基本属性

(i) 该试验可重复进行或该现象可重复观察

(3) 随机现象的基本属性

(i) 该试验可重复进行或该现象可重复观察

(ii) 试验之前(或现象发生之前)，并不知道会出现何种结果

(3) 随机现象的基本属性

(i) 该试验可重复进行或该现象可重复观察

(ii) 试验之前(或现象发生之前)，并不知道会出现何种结果

(iii) 该试验(该现象)所有可能的结果是已知的

(3) 随机现象的基本属性

(i) 该试验可重复进行或该现象可重复观察

(ii) 试验之前(或现象发生之前)，并不知道会出现何种结果

(iii) 该试验(该现象)所有可能的结果是已知的

(i), (ii) 是随机现象的定性描述

(3) 随机现象的基本属性

(i) 该试验可重复进行或该现象可重复观察

(ii) 试验之前(或现象发生之前)，并不知道会出现何种结果

(iii) 该试验(该现象)所有可能的结果是已知的

(i), (ii) 是随机现象的定性描述

(iii) 是随机现象的定量描述

- 样本空间和样本点

- 样本空间和样本点

- 样本空间和样本点

考虑某随机现象。

记所有可能的结果为Ω，并称Ω该随机现象的样本空间

记每一个结果为ω，并称为样本点。

- 样本空间和样本点

考虑某随机现象。
记所有可能的结果为Ω，并称Ω该随机现象的样本空间
记每一个结果为ω，并称为样本点。
显然$\omega \in \Omega$

- 样本空间和样本点

考虑某随机现象。

记所有可能的结果为Ω，并称Ω该随机现象的样本空间

记每一个结果为ω，并称为样本点。

显然$\omega \in \Omega$

不同的样本空间表示不同的随机现象

- 样本空间和样本点

考虑某随机现象。

记所有可能的结果为Ω，并称Ω该随机现象的样本空间

记每一个结果为ω，并称为样本点。

显然$\omega \in \Omega$

不同的样本空间表示不同的随机现象

例如，抛掷一枚硬币，样本空间$\Omega = \{H, T\}$ (通常这样认为)

- 样本空间和样本点

考虑某随机现象。

记所有可能的结果为Ω，并称Ω该随机现象的样本空间

记每一个结果为ω，并称为样本点。

显然$\omega \in \Omega$

不同的样本空间表示不同的随机现象

例如，抛掷一枚硬币，样本空间$\Omega = \{H, T\}$ (通常这样认为)

但如果硬币较厚，样本空间可能为$\Omega = \{H, T, S\}$，S表示硬币垂立

- 事件和事件的发生

- 事件和事件的发生

- 事件和事件的发生

具有某种属性的基本结果构成事件。通常用A, B, C等表示，可以写成$A \subseteq \Omega$

- 事件和事件的发生

具有某种属性的基本结果构成事件。通常用A, B, C等表示，可以写成$A \subseteq \Omega$

例1. 投掷一颗骰子，样本空间$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{2, 4, 6\}$，$B = \{1, 3, 5\}$，$C = \{4, 5, 6\}$

- 事件和事件的发生

具有某种属性的基本结果构成事件。通常用A, B, C等表示，可以写成$A \subseteq \Omega$

例1. 投掷一颗骰子，样本空间$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{2, 4, 6\}$，$B = \{1, 3, 5\}$，$C = \{4, 5, 6\}$

例2. 考虑某零件的寿命，样本空间$\Omega = [0, \infty)$.

$A = [100, 1000]$，$B = [100, \infty)$.

- 事件和事件的发生

具有某种属性的基本结果构成事件。通常用A, B, C等表示，可以写成$A \subseteq \Omega$

例1. 投掷一颗骰子，样本空间$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A = \{2, 4, 6\}$，$B = \{1, 3, 5\}$，$C = \{4, 5, 6\}$

例2. 考虑某零件的寿命，样本空间$\Omega = [0, \infty)$.

$A = [100, 1000]$，$B = [100, \infty)$.

如果某次试验的结果$\omega \in A$，那么称A发生；

否则，称A不发生。

- 概率

- 概率

- 概率

概率：用于描述随机现象的规律

- 概率

概率：用于描述随机现象的规律

随机现象具有不确定性：每次试验之前，并不知道会出现何种结果。

- 概率

概率：用于描述随机现象的规律

随机现象具有不确定性：每次试验之前，并不知道会出现何种结果。

用某结果出现的频繁程度或一次试验中某结果出现的可能性大小，来作为随机现象规律性的刻画

- 概率

概率：用于描述随机现象的规律
随机现象具有不确定性：每次试验之前，并不知道会出现何种结果。
用某结果出现的频繁程度或一次试验中某结果出现的可能性大小，来作为随机现象规律性的刻画

例. 甲、乙两人下棋。

- 概率

概率：用于描述随机现象的规律

随机现象具有不确定性：每次试验之前，并不知道会出现何种结果。

用某结果出现的频繁程度或一次试验中某结果出现的可能性大小，来作为随机现象规律性的刻画

例. 甲、乙两人下棋。

通过多次反复观察甲、乙两人下棋，可以判定甲、乙两人的棋艺。

事件A发生的概率：一次试验中事件A发生的可能性大小，用$P(A)$表示。

事件A发生的概率：一次试验中事件A发生的可能性大小，用$P(A)$表示。

事件A发生的概率是随机现象固有的属性，与实验者或实验的次数无关。

- 概率的计算

- 概率的计算

- 概率的计算

物理方法

- 概率的计算

物理方法

(1) 抛掷均匀硬币

- 概率的计算

物理方法

(1) 抛掷均匀硬币

(2) 随机抽取一张扑克

- 概率的计算

物理方法

(1) 抛掷均匀硬币

(2) 随机抽取一张扑克

统计方法

- 概率的计算

物理方法

(1) 抛掷均匀硬币

(2) 随机抽取一张扑克

统计方法

基本思想：用频率估计概率

- 概率的计算

物理方法

(1) 抛掷均匀硬币

(2) 随机抽取一张扑克

统计方法

基本思想：用频率估计概率

通过重复试验N次，计算事件A发生的次数N_A，得频率$f_N(A)=\frac{N_A}{N}$

- 概率的计算

物理方法

(1) 抛掷均匀硬币

(2) 随机抽取一张扑克

统计方法

基本思想：用频率估计概率

通过重复试验N次，计算事件A发生的次数N_A，得频率$f_N(A)=\frac{N_A}{N}$

令$N\to\infty$，$f_N(A)$的极限即为事件A的概率$P(A)$.

the coin to flip it-1.pdf

Click the coin to flip it--or enter a number and click Auto Flip.

1000 Auto Play

Results: Session

Historical

Explain Back

Results:

Flip	Session	Expected
Heads	49.5% (495/1000)	50% (1/2)
Tails	50.5% (505/1000)	50% (1/2)

the coin to flip it-2.pdf

Click the coin to flip it--or enter a number and click Auto Flip.

5000 Auto Play

Results: Session

Historical

Explain Back

Results:

Flip	Session	Expected
Heads	49.06% (2453/5000)	50% (1/2)
Tails	50.94% (2547/5000)	50% (1/2)

the coin to flip it-3.pdf

Click the coin to flip it--or enter a number and click Auto Flip.

10000 Auto Play

Results: Session

Historical

Explain Back

Results:

Flip	Session	Expected
Heads	49.46% (4946/10000)	50% (1/2)
Tails	50.54% (5054/10000)	50% (1/2)

the dice to roll.pdf

Click the dice to roll--or enter a number and click Auto Roll.

Number of dice:

1

1000

Auto Play

Results: Session

Historical

Explain Back

Results:

Roll	Session	Expected
1	17. 1% (513/3000)	16. 67% (1/6)
2	16. 33% (490/3000)	16. 67% (1/6)
3	17. 1% (513/3000)	16. 67% (1/6)
4	17. 2% (516/3000)	16. 67% (1/6)
5	16. 87% (506/3000)	16. 67% (1/6)
6	15. 4% (462/3000)	16. 67% (1/6)

关于统计方法的说明

关于统计方法的说明

(1) 统计方法具体、可计算

关于统计方法的说明

(1) 统计方法具体、可计算

(2) 统计方法的基本出发点：频率极限存在；并且不依赖于具体的试验环境

关于统计方法的说明

(1) 统计方法具体、可计算

(2) 统计方法的基本出发点：频率极限存在；并且不依赖于具体的试验环境

(3) 概率论发展的早期，许多人做了大量试验，从而相信这一点。Bernoulli和Borel 将给出它的数学证明

关于统计方法的说明

(1) 统计方法具体、可计算

(2) 统计方法的基本出发点：频率极限存在；并且不依赖于具体的试验环境

(3) 概率论发展的早期，许多人做了大量试验，从而相信这一点。Bernoulli和Borel 将给出它的数学证明

概率论学科的主要目的：计算随机事件的概率

从简单事件到复杂事件；

涉及事件的运算和概率的运算性质

- 事件的运算

- 事件的运算

- 事件的运算

与集合运算类似

- 事件的运算

与集合运算类似

注意概率术语的正确使用

- 事件的运算

与集合运算类似

注意概率术语的正确使用

$\emptyset$ — 不可能事件

Ω — 必然事件

$A \subseteq B$ — 事件A发生意味着事件B发生

$A \cap B$ — 事件A和B同时发生，有时写作AB

$A \cup B$ — 事件A或者B 发生

$\bar{A}$ — A的对立事件，即A不发生

$\bar{A}$ — A的对立事件，即A不发生

$A \setminus B$ — 事件A发生，但B不发生

$\bar{A}$ — A的对立事件，即A不发生

$A\setminus B$ — 事件A发生，但B不发生

$A\cap B=\emptyset$ — A和B互不相交

当A,B 互不相交时，写$A\cup B=A+B$

$\bar{A}$ — A的对立事件，即A不发生

$A \setminus B$ — 事件A发生，但B不发生

$A \cap B = \emptyset$ — A和B互不相交

当A, B 互不相交时，写$A \cup B = A + B$

De Morgan对偶运算原理

$$\overline{(\cap A_n)} = \cup \bar{A}_n, \quad \overline{(\cup A_n)} = \cap \bar{A}_n$$

- 概率运算的基本性质

- 概率运算的基本性质

- 概率运算的基本性质

由频率和极限的运算性质得到:

- 概率运算的基本性质

由频率和极限的运算性质得到:

(1) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

- 概率运算的基本性质

由频率和极限的运算性质得到:

(1) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

(2)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- 概率运算的基本性质

由频率和极限的运算性质得到：

(1) $P(\emptyset)=0, P(\Omega)=1$

(2)

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

(3) 如果$A\cap B=\emptyset$，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果$A_1, A_2, \cdots, A_m$互不相交，那么

$$P(\sum_{k=1}^{m}A_k)=\sum_{k=1}^{m}P(A_k)$$

问题：如果$A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$互不相交，那么

$$P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

吗？

- 古典概率模型

- 古典概率模型
- 几何概率模型

- 古典概率模型
- 几何概率模型
- 其他概率模型

- 古典概率模型
- 几何概率模型
- 其他概率模型

- 古典概率模型
- 几何概率模型
- 其他概率模型

  概率模型— 随机现象的数学描述，包括样本空间、所关心的事件、每个事件的概率大小

- 模型特征：

- 模型特征：

(1) 有限个基本结果

- 模型特征：

(1) 有限个基本结果

(2) 每个结果等可能地发生

- 模型特征：

(1) 有限个基本结果

(2) 每个结果等可能地发生

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\},\quad N<\infty$$

- 模型特征：

(1) 有限个基本结果

(2) 每个结果等可能地发生

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}, \quad N < \infty$$

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \cdots N$$

- 模型特征：

(1) 有限个基本结果

(2) 每个结果等可能地发生

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}, \quad N < \infty$$

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \cdots N$$

如果A是一个事件，那么

$$P(A) = \frac{|A|}{N}$$

其中，$|A|$表示A中所含基本结果的个数

例. 抛掷一枚均匀硬币；随机抽取一张扑克

例. 抛掷一枚均匀硬币；随机抽取一张扑克

对于一个古典概率模型，关键在于计算N和事件A所包含的基本结果个数。通常，需要一些技巧

例. 抛掷一枚均匀硬币；随机抽取一张扑克

对于一个古典概率模型，关键在于计算N和事件A所包含的基本结果个数。通常，需要一些技巧

- 乘法原理、排列、组合

例. 抛掷一枚均匀硬币；随机抽取一张扑克

对于一个古典概率模型，关键在于计算N和事件A所包含的基本结果个数。通常，需要一些技巧

- 乘法原理、排列、组合

(1) 乘法原理：完成一件任务需要分k步，其中第i步有m_i种方案。那么完成这件任务共有$\prod_{i=1}^{k} m_i$ 种不同方案

(2) 排列: 从N个不同物体种随机抽取k个进行排序，共有P_N^k种不同结果

(2) 排列: 从N个不同物体种随机抽取k个进行排序，共有P_N^k种不同结果

(3) 组合: 从N个不同物体种随机抽取k个组成一组，共有C_N^k种不同结果

(2) 排列: 从N个不同物体种随机抽取k个进行排序，共有P_N^k种不同结果

(3) 组合: 从N个不同物体种随机抽取k个组成一组，共有C_N^k种不同结果

(4) 一些常用的关系式

$$P_N^0 = 1, C_N^0 = 1$$

$$P_N^k = N(N-1)(N-2)\cdots(N-k+1)$$

$$C_N^k = \frac{P_N^k}{k!}$$

$$C_N^k + C_N^{k-1} = C_N^{k+1}$$

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N, \quad N \to \infty$$

- 古典概率模型的例子例1. 一个袋子中装有8个黑球，2个红球。现随机抽出一球，问所得的是红球的概率为多少？

(1) 将球标号：1，2，3，4，5，6，7，8，9，10. 其中号码为9，10的是红球。

(2)随机抽一个球，样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

(3) 事件A表示所得的是红球

(4)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

例2. 一个袋子中装有8个黑球，2个红球。现随机抽出两球，问所得为一个红球，一个黑球的概率为多少？

(1) 将球标号：1，2，3，4，5，6，7，8，9，10. 其中号码为9，10的是红球。

(2)随机抽2个球，样本空间为

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \{1,2\},\{1,3\}\{1,4\}\{1,5\}\{1,6\}\{1,7\}\{1,8\}\{1,9\},\{1,10\} \\ \{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{2,7\},\{2,8\},\{2,9\},\{2,10\} \\ \{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{3,7\},\{3,8\},\{3,9\},\{3,10\} \\ \{4,5\},\{4,6\},\{4,7\},\{4,8\},\{4,9\},\{4,10\} \\ \{5,6\},\{5,7\},\{5,8\},\{5,9\},\{5,10\} \\ \{6,7\},\{6,8\},\{6,9\},\{6,10\} \\ \{7,8\},\{7,9\},\{7,10\} \\ \{8,9\},\{8,10\} \\ \{9,10\} \end{array} \right\}$$

(3) 事件A表示所得为一个红球，一个黑球

$$A=\left\{\begin{array}{c}\{1,9\},\{1,10\}\\ \{2,9\},\{2,10\}\\ \{3,9\},\{3,10\}\\ \{4,9\},\{4,10\}\\ \{5,9\},\{5,10\}\\ \{6,9\},\{6,10\}\\ \{7,9\},\{7,10\}\\ \{8,9\},\{8,10\}\end{array}\right\}$$

(4)

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{16}{45}$$

例3 甲乙两人各投掷一颗骰子，问甲的点数比乙大的概率？

一颗骰子有六面，分别刻有1，2，3，4，5，6个点。

(1) 用(x, y)表示甲出现x点，乙出现y点。

(2) 样本空间

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array} \right\}$$

(3) 事件

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (2,1) \\ (3,1),(3,2) \\ (4,1),(4,2),(4,3) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) \end{array} \right\}$$

(4)

$$P(A) = \frac{15}{36}$$

- 模型特征：样本空间是一个区域，所有基本结果均等可能发生。

- 模型特征：样本空间是一个区域，所有基本结果均等可能发生。

(1) 样本空间含有不可数个基本结果，每个基本结果出现的概率为0

- 模型特征：样本空间是一个区域，所有基本结果均等可能发生。

(1) 样本空间含有不可数个基本结果，每个基本结果出现的概率为0

严格地说，

Ω 是$R, R^2, \cdots, R^k$上的可求长，可求面积，可求体积的区域。或者说，Ω 是$R, R^2, \cdots, R^k$上的可测区域。

(2) 事件A是Ω的可测子集

(3) 事件A的概率

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

对于几何模型，关键在于计算$|\Omega|$和$|A|$.

对于几何模型，关键在于计算$|\Omega|$和$|A|$.

例1. Buffon 投针问题(Buffon's Needle Problem)

对于几何模型，关键在于计算$|\Omega|$和$|A|$.

例1. Buffon 投针问题(Buffon's Needle Problem)

- Georges Buffon (1707 - 1788) was a French scientist who was important in the area of natural history. His needle experiment caused much discussion about probability.

对于几何模型，关键在于计算$|\Omega|$和$|A|$.

例1. Buffon 投针问题(Buffon's Needle Problem)

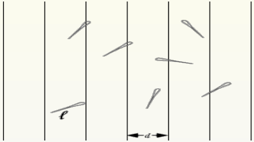
- Georges Buffon (1707 - 1788) was a French scientist who was important in the area of natural history. His needle experiment caused much discussion about probability.
- http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html

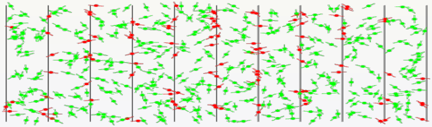
对于几何模型，关键在于计算$|\Omega|$和$|A|$.

例1. Buffon 投针问题(Buffon's Needle Problem)

- Georges Buffon (1707 - 1788) was a French scientist who was important in the area of natural history. His needle experiment caused much discussion about probability.
- http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html
- Question: To find the probability that a needle of length l will land on a line, given a floor with equally spaced parallel lines a distance d apart.

Buffon's Needle Problem





The above figure shows the result of 500 tosses of a needle of length parameter $x = 1/3$, where needles crossing a line are shown in red and those missing are shown in green. 107 of the tosses cross a line, giving $\hat{\pi} = 3.116 \pm 0.073$.

- The problem was first posed by the French naturalist Buffon in 1733, and reproduced with solution by Buffon in 1777

- The problem was first posed by the French naturalist Buffon in 1733, and reproduced with solution by Buffon in 1777

先建立模型。

假设$l \leq d$

令θ 表示针与平行线的夹角，$\theta \leq \frac{\pi}{2}$

令a表示针的中心离平行线的距离，$a < \frac{d}{2}$

$\Omega=[0,\frac{d}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

用A表示针与平行线相交

$$A\text{发生}\Leftrightarrow a\le\frac{l}{2}\sin\theta$$

$\Omega = [0, \frac{d}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

用A表示针与平行线相交

$$A\text{发生} \Leftrightarrow a \leq \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\sin\theta d\theta}{\frac{d}{2}\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2l}{\pi d} \end{aligned}$$

- π的计算

$$\pi = \frac{2l}{d \cdot P(A)}$$

- π的计算

$$\pi = \frac{2l}{d \cdot P(A)}$$

给定d, l，用频率估计概率，可以计算π。

- Mario Lazzarini, an Italian mathematician, performed the Buffon's needle experiment in 1901. Tossing a needle 3408 times, he attained the well-known estimate $\frac{355}{113}$ for π, which is a very accurate value, differing from π by no more than 3×10^{-7}.

This is an impressive result, but is something of a cheat, as follows.

Lazzarini chose needles whose length was $\frac{5}{6}$ of the width of the strips of wood. In this case, the probability that the needles will cross the lines is $\frac{5}{3\pi}$. Thus if one were to drop n needles and get x crossings, one would estimate π as

$$\pi \sim \frac{5}{3} \times \frac{n}{x}$$

π is very nearly $\frac{355}{113}$.

in fact, there is no better rational approximation with fewer than 5 digits in the numerator and denominator. So if one had n and x such that:

$$\frac{355}{113} = \frac{5}{3} \times \frac{n}{x}$$

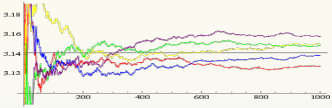
or equivalently,

$$x = \frac{113n}{213}$$

one would derive an unexpectedly accurate approximation to π, simply because the fraction $\frac{355}{113}$ happens to be so close to the correct value. But this is easily arranged.

Buffon's Needle Problem

The above figure shows the result of 500 tosses of a needle of length parameter $x = 1/3$, where needles crossing a line are shown in red and those missing are shown in green. 107 of the tosses cross a line, giving $\hat{\pi} = 3.116 \pm 0.073$.



Several attempts have been made to experimentally determine π by needle-tossing. π calculated from five independent series of tosses of a (short) needle are illustrated above for one million tosses in each trial $x = 1/3$. For a discussion of the relevant statistics and a critical analysis of one of the more accurate (and least believable) needle-tossings, see Badger (1994). Uspensky (1937, pp. 112-113) discusses experiments conducted with 2520, 3204, and 5000 trials.

To do this, one should pick n as a multiple of 213, because then $\frac{113n}{213}$ is an integer; one then drops n needles, and hopes for exactly $x = \frac{113n}{213}$ successes.
If one drops 213 needles and happens to get 113 successes, then one can triumphantly report an estimate of π accurate to six decimal places. If not, one can just do 213 more trials and hope for a total of 226 successes; if not, just repeat as necessary. Lazzarini performed
$3408 = 213 \times 16$trials, making it seem likely that this is the strategy he used to obtain his "estimate".

例2. 约会问题

例2. 约会问题

甲、乙两人相约，晚上7:00至8:00在电影院门口见面，每人最多等候20分钟。假定甲、乙二人在7:00至8:00之间随时可能出现，问两人能见面的可能性是多少？

例2. 约会问题

甲、乙两人相约，晚上7:00至8:00在电影院门口见面，每人最多等候20分钟。假定甲、乙二人在7:00至8:00之间随时可能出现，问两人能见面的可能性是多少？

- 先进行如下约化。考虑正方形区域

$$\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$$

甲、乙二人随机到达，到达时刻为(x, y)，等可能地落在该区域Ω

令A表示两人相见。

令A表示两人相见。

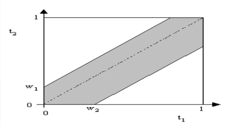
$$A\text{发生} \Leftrightarrow |x-y| \le 20$$

令A表示两人相见。

$$A\text{发生} \Leftrightarrow |x-y| \le 20$$

因此，

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2}$$



例1. 抛掷一枚非均匀硬币

例1. 抛掷一枚非均匀硬币

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$P(\{H\}) \neq P(\{T\})$$

例1. 抛掷一枚非均匀硬币

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$P(\{H\}) \neq P(\{T\})$$

例2. 某口袋里装有中奖彩票50张，其中一等奖5张，二等奖10张，三等奖15张，余下的没有奖。现随机抽取一张彩票，记录中奖情况。

例1. 抛掷一枚非均匀硬币

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$P(\{H\}) \neq P(\{T\})$$

例2. 某口袋里装有中奖彩票50张，其中一等奖5张，二等奖10张，三等奖15张，余下的没有奖。现随机抽取一张彩票，记录中奖情况。

$$\Omega = \{\text{一等奖、二等奖、三等奖、没有奖}\}$$

例1. 抛掷一枚非均匀硬币

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$P(\{H\}) \neq P(\{T\})$$

例2. 某口袋里装有中奖彩票50张，其中一等奖5张，二等奖10张，三等奖15张，余下的没有奖。现随机抽取一张彩票，记录中奖情况。

$$\Omega = \{\text{一等奖、二等奖、三等奖、没有奖}\}$$

一等奖概率为$\frac{1}{10}$，二等奖概率为$\frac{1}{5}$，三等奖概率为$\frac{3}{10}$，没有奖概率为$\frac{2}{5}$

- Kolmogorov

- Kolmogorov的著作

- 概率空间

19世纪末-20世纪初，在Lebesgue, Hilbert, Frechet, Wiener等人的努力下，抽象的测度和积分理论已经建立起来。受此启发，Kolmogorv建立了概率论的公理化体系。

- 概率空间

19世纪末-20世纪初，在Lebesgue, Hilbert, Frechet, Wiener等人的努力下，抽象的测度和积分理论已经建立起来。受此启发，Kolmogorv建立了概率论的公理化体系。

- 概率空间

19世纪末-20世纪初，在Lebesgue, Hilbert, Frechet, Wiener等人的努力下，抽象的测度和积分理论已经建立起来。受此启发，Kolmogorv建立了概率论的公理化体系。

样本空间：Ω

事件类：σ-域$\mathcal{A}$

概率：P

- 概率空间

19世纪末-20世纪初，在Lebesgue, Hilbert, Frechet, Wiener等人的努力下，抽象的测度和积分理论已经建立起来。受此启发，Kolmogorv建立了概率论的公理化体系。

样本空间：Ω

事件类：σ-域$\mathcal{A}$

概率：P

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$构成概率空间，是随机现象的数学描述

- $\mathcal{A}$ 满足下列条件:

- $\mathcal{A}$ 满足下列条件:

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

(2) 如果$A \in \mathcal{A}$，那么$\bar{A} \in \mathcal{A}$

(3) 如果$A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$，那么$\cup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$

- P 满足下列条件:

- P 满足下列条件:

(1) $P(\emptyset)=0, P(\Omega)=1$

(2) 对任意$A \in \mathcal{A}$，$P(A) \geq 0$

(3) 如果$A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ 互不相交，那么

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

- 概率P的运算性质

- 概率P的运算性质

(1) 如果$A \subseteq B$，那么$P(A) \leq P(B)$

- 概率P的运算性质

(1) 如果$A \subseteq B$，那么$P(A) \leq P(B)$

(2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- 概率P的运算性质

(1) 如果$A \subseteq B$，那么$P(A) \leq P(B)$

(2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(3) 对任意一列$A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$，

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(4) 如果$A, B \in \mathcal{A}$，那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

(4) 如果$A, B \in \mathcal{A}$，那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般地，对任意$A_k \in \mathcal{A}, 1 \leq k \leq m$，

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=1}^{m} A_k) &= \sum_{k=1}^{m} P(A_k) - \sum_{k \neq l}^{m} P(A_k A_l) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{m-1} P(\bigcap_{k=1}^{m} A_k) \end{aligned}$$

例. 匹配问题

例. 匹配问题

某人写n封信，n个信封。现随机地将n封信放入n个信封，每个信封装一封信。求至少有一封信装入正确的信封里的概率？

例. 匹配问题

某人写n封信，n个信封。现随机地将n封信放入n个信封，每个信封装一封信。求至少有一封信装入正确的信封里的概率？

令A_i表示第i封信装入了正确的信封里。

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = ?$$

例. 匹配问题

某人写n封信，n个信封。现随机地将n封信放入n个信封，每个信封装一封信。求至少有一封信装入正确的信封里的概率？

令A_i表示第i封信装入了正确的信封里。

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = ?$$

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, i \neq j$$

$$\cdots$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \frac{1}{n!}$$

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \\ &\sim e^{-1} \end{aligned}$$

- 条件概率是计算概率的一个重要技巧

- 条件概率是计算概率的一个重要技巧

例1. 从52张扑克种随机抽取一张，让你猜。

- 条件概率是计算概率的一个重要技巧

例1. 从52张扑克种随机抽取一张，让你猜。

如果没有任何提示，那么猜“红桃5”的可能性为$\frac{1}{52}$。

- 条件概率是计算概率的一个重要技巧

例1. 从52张扑克种随机抽取一张，让你猜。

如果没有任何提示，那么猜“红桃5”的可能性为$\frac{1}{52}$。
如果给出暗示：抽出的扑克是红色，那么猜“红桃5”的可能性为$\frac{1}{26}$。

- 条件概率是计算概率的一个重要技巧

例1. 从52张扑克种随机抽取一张，让你猜。

如果没有任何提示，那么猜“红桃5”的可能性为$\frac{1}{52}$。
如果给出暗示：抽出的扑克是红色，那么猜“红桃5”的可能性为$\frac{1}{26}$。

- 暗示“抽出的扑克是红色”意味着这件事已经发生了，它对另一事件的发生产生影响。

- 条件概率

- 条件概率

- 条件概率

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，A, B是两个事件，$P(B) > 0$。令

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

称$P(A|B)$是在B发生的条件下，A发生的条件概率

- 条件概率

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，A, B是两个事件，$P(B) > 0$。令

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

称$P(A|B)$是在B发生的条件下，A发生的条件概率

- $P(B) > 0$:

(1) 上式中分母不能为0

(2) 零概率事件无法观察到

例1. 一家有三个孩子，其中已知两个是男孩，问另一个也是男孩的概率？

例1. 一家有三个孩子，其中已知两个是男孩，问另一个也是男孩的概率？

$$\Omega = \{bbb, bbg, bgb, gbb, bgg, gbg, ggb, ggg\}$$

例1. 一家有三个孩子，其中已知两个是男孩，问另一个也是男孩的概率？

$$\Omega = \{bbb, bbg, bgb, gbb, bgg, gbg, ggb, ggg\}$$

令B表示其中两个是男孩；A表示其中三个全是男孩。

例1. 一家有三个孩子，其中已知两个是男孩，问另一个也是男孩的概率？

$$\Omega = \{bbb, bbg, bgb, gbb, bgg, gbg, ggb, ggg\}$$

令B表示其中两个是男孩；A表示其中三个全是男孩。

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- 乘法公式

- 乘法公式

- 乘法公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

可改写成

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

- 乘法公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

可改写成

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

- 链式法则

- 乘法公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

可改写成

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

- 链式法则

- 乘法公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

可改写成

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

- 链式法则

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(A|BC)P(BC) \\ &= P(A|BC)P(B|C)P(C) \end{aligned}$$

- 乘法公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

可改写成

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

- 链式法则

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(A|BC)P(BC) \\ &= P(A|BC)P(B|C)P(C) \end{aligned}$$

上式可推广到多个情形

例1. n张彩票中有一张中奖彩票。求第k个人中奖的概率？

例1. n张彩票中有一张中奖彩票。求第k个人中奖的概率？

令A_i表示第i个人中奖。

例1. n张彩票中有一张中奖彩票。求第k个人中奖的概率？
令A_i表示第i个人中奖。

$$P(A_k \cdot \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1}) = ?$$

例1. n张彩票中有一张中奖彩票。求第k个人中奖的概率？令A_i表示第i个人中奖。

$$P(A_k \cdot \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1}) = ?$$

$$\begin{aligned} P(A_k \cdot \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1}) &= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \\ &\quad P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2) \cdots P(A_k|\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1}) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{n-(k-1)} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

例1. 现有100枚均匀硬币，其中一枚两面都是正面，其余硬币一面是正面，一面是反面。随机从中挑选一枚硬币并连续掷两次，求两次均出现正面的概率？

例1. 现有100枚均匀硬币，其中一枚两面都是正面，其余硬币一面是正面，一面是反面。随机从中挑选一枚硬币并连续掷两次，求两次均出现正面的概率?

令A表示两次均出现正面，B表示所选硬币的两面都是正面。

例1. 现有100枚均匀硬币，其中一枚两面都是正面，其余硬币一面是正面，一面是反面。随机从中挑选一枚硬币并连续掷两次，求两次均出现正面的概率？

令A表示两次均出现正面，B表示所选硬币的两面都是正面。

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{99}{100} \\ &= 0.2575 \end{aligned}$$

- 全概率公式

- 全概率公式

- 全概率公式

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，$B_k, 1 \leq k \leq N$是N个互不相交事件，且$\Omega = \sum_{k=1}^{N} B_k$. 那么事件$A$的概率可如下计算

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(A|B_k)P(B_k)$$

- 全概率公式

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，$B_k, 1 \le k \le N$是N个互不相交事件，且$\Omega = \sum_{k=1}^{N} B_k$. 那么事件$A$的概率可如下计算

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(A|B_k)P(B_k)$$

- N可以是$+\infty$

- 全概率公式

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，$B_k, 1 \le k \le N$是N个互不相交事件，且$\Omega = \sum_{k=1}^{N} B_k$. 那么事件$A$的概率可如下计算

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N} P(A|B_k)P(B_k)$$

- N可以是$+\infty$
- 全概率公式可如下理解，事件A可以在N个不同条件下发生，因此其概率大小为各种条件下的加权平均

例. 播种用的小麦种子中，一等品占95.5%, 二等品占2%, 三等品占1.5%，四等品占1%。经验表明，一、二、三、四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率分别为0.5、0.15、0.1、0.05。现任选一颗种子，求它所结的穗含50颗以上麦粒的概率?

例. 播种用的小麦种子中，一等品占95.5%, 二等品占2%, 三等品占1.5%，四等品占1%。经验表明，一、二、三、四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率分别为0.5、0.15、0.1、0.05。现任选一颗种子，求它所结的穗含50颗以上麦粒的概率？

令A表示所结的穗含50颗以上麦粒

B_i表示所选的种子为第i等品

例. 播种用的小麦种子中，一等品占95.5%, 二等品占2%, 三等品占1.5%，四等品占1%。经验表明，一、二、三、四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率分别为0.5、0.15、0.1、0.05。现任选一颗种子，求它所结的穗含50颗以上麦粒的概率？

令A表示所结的穗含50颗以上麦粒

B_i表示所选的种子为第i等品

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{4} P(A|B_i)P(B_i) \\ &= 0.4825 \end{aligned}$$

- Bayes公式

- Bayes公式

- Bayes公式

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，$B_k, 1 \leq k \leq N$是N个互不相交事件，且$\Omega = \sum_{k=1}^{N} B_k$. 那么

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^{N} P(A|B_k)P(B_k)}$$

- Bayes公式

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，$B_k, 1 \leq k \leq N$是N个互不相交事件，且$\Omega = \sum_{k=1}^{N} B_k$. 那么

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^{N} P(A|B_k)P(B_k)}$$

- 称$P(B_k)$为先验概率；$P(B_k|A)$为后验概率

例. 某公司下设甲、乙、丙、丁四家分厂，他们生产同一种商品，产量分别占$18\%, 28\%, 20\%, 34\%$. 经验表明甲、乙、丙、丁四家分厂次品率分别为$0.5\%, 1\%, 0.8\%, 0.5\%$. 现某顾客购买了该公司产品，发现为次品，向公司索赔10000元。该公司希望追究厂家责任，问各厂家应赔付多少？

例. 某公司下设甲、乙、丙、丁四家分厂，他们生产同一种商品，产量分别占18%, 28%, 20%, 34%. 经验表明甲、乙、丙、丁四家分厂次品率分别为0.5%, 1%, 0.8%, 0.5%. 现某顾客购买了该公司产品，发现为次品，向公司索赔10000元。该公司希望追究厂家责任，问各厂家应赔付多少？

次品率为

$$\frac{0.5\times 18+1\times 28+0.8\times 20+0.5\times 34}{10000}=0.70\%$$

例. 某公司下设甲、乙、丙、丁四家分厂，他们生产同一种商品，产量分别占18%, 28%, 20%, 34%. 经验表明甲、乙、丙、丁四家分厂次品率分别为0.5%, 1%, 0.8%, 0.5%. 现某顾客购买了该公司产品，发现为次品，向公司索赔10000元。该公司希望追究厂家责任，问各厂家应赔付多少？

次品率为

$$\frac{0.5 \times 18 + 1 \times 28 + 0.8 \times 20 + 0.5 \times 34}{10000} = 0.70\%$$

甲厂应赔付

$$\frac{0.5\% \times 18\%}{0.70\%} \times 10000 = \frac{9000}{7}$$

其它类似

例. 用血清甲胎蛋白法诊断肝癌。B表示被检验者确实患有肝癌，A表示判断被检验者患有肝癌。已知

$$P(A|B)=0.95,\quad P(\bar{A}|\bar{B})=0.90,\quad P(B)=0.0004$$

现若有一人被此法诊断为患有肝癌，求此人确实患有肝癌的概率？

- 甲胎蛋白是一种糖蛋白，英文缩写AFP。正常情况下，这种蛋白主要来自胚胎的肝细胞，胎儿出生约两周后甲胎蛋白从血液中消失，因此正常人血清中甲胎蛋白的含量尚不到20微克／升。但当肝细胞发生癌变时，却又恢复了产生这种蛋白质的功能，而且随着病情恶化它在血清中的含量会急剧增加，甲胎蛋白就成了诊断原发性肝癌的一个特异性临床指标。

- 甲胎蛋白是一种糖蛋白，英文缩写AFP。正常情况下，这种蛋白主要来自胚胎的肝细胞，胎儿出生约两周后甲胎蛋白从血液中消失，因此正常人血清中甲胎蛋白的含量尚不到20微克／升。但当肝细胞发生癌变时，却又恢复了产生这种蛋白质的功能，而且随着病情恶化它在血清中的含量会急剧增加，甲胎蛋白就成了诊断原发性肝癌的一个特异性临床指标。
- http://baike.baidu.com/view/139910.htm

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.0004}{0.95 \times 0.0004 + 0.10 \times 0.9996} \\
&= 0.0038
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.0004}{0.95 \times 0.0004 + 0.10 \times 0.9996} \\
&= 0.0038
\end{aligned}
$$

注：该例说明大批健康人群中会有一定数量的人被误诊。原因可能是该方法不够精确。

- Thomas Bayes (c. 1702 – 7 April 1761) was a British mathematician and Presbyterian minister, known for having formulated a specific case of the theorem that bears his name: Bayes' theorem, which was published posthumously.
Bayes' solution to a problem of "inverse probability" was presented in the Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances (1764), published posthumously by his friend Richard Price in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London. This essay contains a statement of a special case of Bayes' theorem.

- In the first decades of the eighteenth century, many problems concerning the probability of certain events, given specified conditions, were solved. For example, given a specified number of white and black balls in an urn, what is the probability of drawing a black ball? These are sometimes called "forward probability" problems. Attention soon turned to the converse of such a problem: given that one or more balls has been drawn, what can be said about the number of white and black balls in the urn? The Essay of Bayes contains his solution to a similar problem, posed by Abraham de Moivre, author of The Doctrine of Chances (1718).

- In addition to the Essay Towards Solving a Problem, a paper on asymptotic series was published posthumously. Bayesian probability is the name given to several related interpretations of probability, which have in common the notion of probability as something like a partial belief, rather than a frequency. This allows the application of probability to all sorts of propositions rather than just ones that come with a reference class. "Bayesian" has been used in this sense since about 1950.

- It is not at all clear that Bayes himself would have embraced the very broad interpretation now called Bayesian. It is difficult to assess Bayes' philosophical views on probability, as the only direct evidence is his essay, which does not go into questions of interpretation. In the essay, Bayes defines probability.

The probability of any event is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon its happening

- 独立事件

- 独立事件

- 独立事件

- 独立性是概率论中最重要的概念之一

- 独立事件

- 独立性是概率论中最重要的概念之一

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，A, B是两个事件。如果$P(B) > 0$，并且

$$P(A|B) = P(A)$$

称A和B 独立

- 独立事件

- 独立性是概率论中最重要的概念之一

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$是一个概率空间，A, B是两个事件。如果$P(B) > 0$，并且

$$P(A|B) = P(A)$$

称A和B 独立

- 上式表明：事件B是否发生对事件A发生的概率大小不产生影响

- 按条件概率定义，上式可写成

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

- 按条件概率定义，上式可写成

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

注：

(1) 即使$P(B) = 0$，乘积公式仍有意义

- 按条件概率定义，上式可写成

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

注：

(1) 即使$P(B) = 0$，乘积公式仍有意义

(2) 容易看出，A, B关系对等，即如果A和B 独立，那么B和A 独立。亦即相互独立

- 按条件概率定义，上式可写成

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

注：

(1) 即使$P(B) = 0$，乘积公式仍有意义

(2) 容易看出，A, B关系对等，即如果A和B 独立，那么B和A 独立。亦即相互独立

(3) 如果A和B 独立，那么$A, \bar{B}$独立；$\bar{A}, \bar{B}$独立；$\bar{A}, B$独立

例. 放回摸球和无放回摸球

例. 放回摸球和无放回摸球

一罐子里装有a个白球，b个红球。现依此抽取两个球，用B表示第一次抽取红球，用A表示第二次抽取红球，问A, B事件的独立性如何？

例. 放回摸球和无放回摸球

一罐子里装有a个白球，b个红球。现依此抽取两个球，用B表示第一次抽取红球，用A表示第二次抽取红球，问A, B事件的独立性如何？

分两种方法：(1) 放回；(2) 无放回

例. 放回摸球和无放回摸球

一罐子里装有a个白球，b个红球。现依此抽取两个球，用B表示第一次抽取红球，用A表示第二次抽取红球，问A, B事件的独立性如何？

分两种方法：(1) 放回；(2) 无放回

- (1) 放回: 即抽取第一个球，记录下颜色后，将其放回罐子里；并接着抽取第二个球。

$$P(A|B) = \frac{b}{a+b}$$

$$P(A) = \frac{b}{a+b}$$

- A, B事件独立。

- (2) 无放回：即抽取第一个球，记录下颜色后，不放回罐子里；并接着抽取第二个球。

$$P(A|B) = \frac{b-1}{a+b-1}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$

- A, B事件不独立。

独立性：

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 是一个概率空间，$A, B \in \mathcal{A}$。如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

称A和B独立

注：

(1) 如果$P(B) = 0$，那么B与任何事件独立；

(ii) 如果A, B独立，那么A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B独立；

(iii) 注意与加法的区别：

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \qquad A \cap B = \emptyset$$

$$P(AB) = P(A)P(B), \qquad A, B\text{独立}$$

- 三个事件独立

- 三个事件独立

- 三个事件独立

假设A, B, C是三个事件，如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

称A, B, C两两独立

例. 一个正四面体的三面分别涂成红、黑、白三种颜色，而另一面则涂成三色。现随机一扔，底面涂有红色、黑色、白色的可能性分别是多少？这三个事件两两独立吗？

用A, B, C分别表示底面涂有红色、黑色、白色。那么

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

用A, B, C分别表示底面涂有红色、黑色、白色。那么

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

所以，A, B, C两两独立

用A, B, C分别表示底面涂有红色、黑色、白色。那么

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

所以，A, B, C两两独立

- 但是

$$P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$$

- 三个事件相互独立

- 三个事件相互独立

- 三个事件相互独立

假设A, B, C是三个事件，如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

称A, B, C相互独立

- 注:

(1) 两两独立不一定相互独立；相互独立一定两两独立

(2) 如果A, B, C相互独立，那么$\bar{A}, B, C$相互独立；$A \cup B$和C 独立；其它类似成立。

- m个事件相互独立

假设$A_k, 1 \le k \le m$是m个事件，如果$A_k, 1 \le k \le m$中任意$r < m$个都相互独立，并且

$$P(\bigcap_{1\le k\le m} A_k) = \prod_{1\le k\le m} P(A_k)$$

称$A_k, 1 \le k \le m$相互独立

- 注：$A_k, 1 \le k \le m$中任意$l < m$个事件与另外$m - l$事件相互独立. 其它类似。

例. Flow in a circuit

Suppose that each of the switches S_i in the following circuits is closed with probability p_i, and open with probability $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2, \cdots, 5$

Calculate the probability that a current will flow through the circuit, assuming that the switches act independently.

- Bernoulli试验，也称为二项试验(Binomial Trial)

试验E，包括若干个基本结果。
事件A，具有某种属性的基本结果集合，A发生的概率为

$$P(A) = p_A$$

独立重复进行n次，并观察记录其结果，
判断事件A发生与否。统计事件A发生的次数，记为n_A
n_A是随机数，可为0，1，2，....，n

- Bernoulli试验

固定试验E，事件A。

每次试验，A发生，记为1；A不发生，记为0

这样，每次试验有两个结果，$\{0,1\}$

独立重复n次试验，所得结果为

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n),\qquad \omega_i=0,1$$

用Ω_n表示所有ω的全体

$$\Omega_n=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n),\qquad \omega_i=0,1\}$$

- Bernoulli试验

这样，Ω_n中含有2^n个不同的ω

显然，每个ω出现的概率不同，依赖于A发生的次数

$$P_n(\{\omega\}) = p_A^{\sum \omega_i}(1-p_A)^{n-\sum \omega_i}$$

这样，我们得到一个新的概率空间

$$(\Omega_n, P_n)$$

这是n-重Bernoulli试验的概率模型。

- Bernoulli试验给定概率空间

$$(\Omega_n, P_n)$$

考虑事件B，如

$$B = \{\omega : n_A(\omega) = k\}$$

那么

$$P_n(B) = \binom{n}{k} p_A^k (1 - p_A)^{n-k}$$

- 乘积概率空间

考虑两个试验E_1，E_2。相应的概率空间分别为

$$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), \qquad (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$$

现独立地做试验E_1和E_2，记录其结果

$$\omega = (\omega_1, \omega_2)$$

考虑E_1, E_2所有基本结果的全体

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$$

并考虑事件

$$A = A_1 \times A_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\}$$

- 乘积概率空间

定义其概率

$$P(A) = P(A_1 \times A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

得到新的概率空间: 乘积概率空间

$$(\Omega, P)$$

例:

- 概率的连续性

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 是概率空间：

(1) Ω 样本空间

(2) $\mathcal{A}$ σ-域

(3) $P : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$

可加性：如果$A_n, n \geq 1$是一列互不相交的事件，那么

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

简单地说，

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

除可加性之外，概率还具有连续性。

- 事件的极限

(i) 假设A_n是一列增加事件，

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq$$

那么定义

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(ii) 假设A_n是一列递减事件，

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq$$

那么定义

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

- 概率的极限

假设A_n是一列增加事件，那么

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

证明：令$B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$，那么

$$B_1, B_2, \cdots, B_n \qquad ,互不相交$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

因此，

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\sum_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

注意到，

$$P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n-1})$$

这样，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

总结：概率P 是定义在σ域$\mathcal{A}$上的规范化集函数，具有可加性和连续性。

- 条件概率具有概率的运算性质

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 是概率空间，B是一个事件，$P(B) > 0$。对任意事件$A \in \mathcal{A}$，给定B发生的条件下，事件A发生的概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

这样，

$$P(\cdot|B) : \mathcal{A} \mapsto [0,1] \quad 是一个概率$$

比如，

$$P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

$$P(A_1 \setminus A_2|B) = P(A_1|B) - P(A_2|B), \quad A_2 \subseteq A_1$$

例1. The gambler's rule.

Suppose that you play a game over and over again, each time with chance $\frac{1}{N}$ of winning the game, no matter what the results of previous games.

How many times n must you play to have a better that $\frac{1}{2}$ chance of at least one win in the n games?

Solution: According to a very old gambler's rule, n is about $\frac{2}{3}N$.

WHY?

To check this, notice that

$$P(\text{at least one win in } n \text{ games}) = 1 - P(\text{no win in } n \text{ games})$$

$$P(\text{no win in } n \text{ games}) = (1 - \frac{1}{N})^n$$

We are looking for the least n such that

$$1 - (1 - \frac{1}{N})^n > \frac{1}{2}, \qquad (1 - \frac{1}{N})^n \leq \frac{1}{2}$$

(i) For small N, you can find n by repeated multiplication by $1 - \frac{1}{N}$ until the product is less than $\frac{1}{2}$.

For $N = 1, 2, \cdots, 27$, n is the least integer greater than $\frac{2}{3}N$.

(ii) For $N \geq 28$, look for the least n such that

$$n \log(1 - \frac{1}{N}) < \log \frac{1}{2}$$

Take

$$n \sim \frac{\log \frac{1}{2}}{\log(1 - \frac{1}{N})} \sim N \log 2$$

Note

$$\log 2 \approx 0.69 \approx \frac{2}{3}$$

例2. The Birthday Problem

Suppose that there are n students in a class. What is the probability that at least two students in the class have the same birthday?

Solution:

First order the students in some arbitrary way, say alphabetically;

Then go through the list of students's birthdays in that order, and check whether or not each birthday is one that appeared previously.

Let B_n be the event that there are at least two students in the class with same birthday;
Let D_j be the event that the first j birthdays are different;
Let R_j be the event that the checking process stops with a repeat birthday at the j-th student on the list.
Then
(i)

$$P(B_n) = P(R_2) + P(R_3) + \cdots + P(R_n)$$

(ii)

$$P(B_n) = 1 - P(D_n)$$

Note

$$D_j \subseteq D_i, \quad D_n = D_2 D_3 \cdots D_n$$

Then

$$P(D_n) = P(D_2 D_3 \cdots D_n) = P(D_2)P(D_3|D_2) \cdots P(D_n|D_{n-1})$$

Also,

$$P(D_2) = \frac{364}{365}, \quad P(D_{j+1}|D_j) = \frac{365-j}{365}$$

So

$$P(D_n) = (1 - \frac{1}{365}) \cdots (1 - \frac{n-1}{365})$$

Conclusion:

(i) $n = 23$

$$P(B_{23}) = 50.6$$

(ii) $n = 45$

$$P(B_{45}) = 94$$

(ii) $n = 65$

$$P(B_{65}) = 99.8$$