回顾:

1. 随机现象可由概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$描述;

2. 随机事件的规律通过随机变量的分布来刻画:

包括取值和取每个值的概率大小

回顾:

1. 随机现象可由概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$描述;

2. 随机事件的规律通过随机变量的分布来刻画：

包括取值和取每个值的概率大小

问题：

(1) 有时随机变量的分布很难获得，特别是取每个值的概率大小

(2) 即使知道了随机变量的分布，也不容易把握随机变量的特征。

回顾:

1. 随机现象可由概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$描述;

2. 随机事件的规律通过随机变量的分布来刻画：

包括取值和取每个值的概率大小

问题：

(1) 有时随机变量的分布很难获得，特别是取每个值的概率大小

(2) 即使知道了随机变量的分布，也不容易把握随机变量的特征。

需要研究随机变量的数字特征：平均值，围绕平均值的波动等

- 平均值

(1) 算术平均

考虑n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$。算术平均值为

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

- 平均值

(1) 算术平均

考虑n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$。算术平均值为

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

(2) 加权平均

考虑n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$;

加权系数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \geq 0 : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$

加权平均值为

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_k$$

应用：体育比赛成绩计算

大学生四年平均成绩计算

公务员绩效工资计算

………

- 平均值

(3) 概率平均

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 概率空间

$X : \Omega \to R$ 随机变量

X的平均值是随机变量的取值按概率大小进行平均

- 平均值

(3) 概率平均

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 概率空间

$X:\Omega \to R$ 随机变量

X的平均值是随机变量的取值按概率大小进行平均

以下详细介绍。

- (1) 离散型随机变量

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_N \end{pmatrix}$$

数学期望

$$EX = \sum_{k=1}^{N} x_k p_k$$

- 例子

1. 退化变量

$$X \sim \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

那么

$$EX = c \cdot P(X = c) = 1$$

2. 两点分布

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

那么

$$EX = 1 \cdot P(X=1) + 0 \cdot P(X=0) = p$$

- 例子

3. 二项Bernoulli分布

$$X \sim B(n,p), \quad P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

那么

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np
\end{aligned}
$$

- 例子

4. Poisson 分布

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

那么

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

平均值等于参数

$$EX = \lambda$$

- 例子

5. 几何分布

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

那么

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

- 绝对可求和

考虑随机变量

$$P(X=(-1)^{k+1}k)=\frac{c}{k^2}, \qquad k=1,2,\cdots$$

(1). 令$x_k=(-1)^{k+1}k, \quad p_k=\frac{c}{k^2}$

那么

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \\ &= c\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k\cdot\frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX &= c\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \\ &= c\ln 2 \end{aligned}$$

(2). 令

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -2, x_4 = -4, x_5 = 5, x_6 = 7,$$

$$x_7 = -6, x_8 = -8, \cdots$$

$$p_1 = c, p_2 = \frac{c}{3^2}, x_3 = \frac{c}{2^2}, x_4 = \frac{c}{4^2}, x_5 = \frac{c}{5^2}, x_6 = \frac{c}{7^2},$$

$$x_7 = \frac{c}{6^2}, x_8 = \frac{c}{8^2}, \cdots$$

那么

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \\
&= c\left[1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\right] \\
&= ?
\end{aligned}
$$

那么

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \\ &= c\left[1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\right] \\ &= ? \end{aligned}$$

- 同一个随机变量取值如果编号不同，会引起平均值不同。
- 为避免不唯一或混乱，要求

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

绝对可和，即$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<\infty$

- (2) 连续型随机变量

假设$X \sim p(x)$,

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

- (2) 连续型随机变量

假设$X \sim p(x)$，

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

正如离散型一样，需要绝对可积性

绝对可积:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx < \infty.$$

- 1. 均匀分布

$$X \sim U(a,b), \quad a < b$$

那么

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \\ &= \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

- 1. 均匀分布

$$X \sim U(a,b), \quad a < b$$

那么

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \\ &= \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

平均值等于区间中点

- 2. 正态分布

$$X \sim N(0,1), \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

那么

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx & \\
&= 2\int_0^{\infty} x p(x) dx \\
&= 2\int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

X的密度函数绝对可积

X的密度函数绝对可积

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 3. 指数分布

$$X \sim \exp(\lambda), \quad p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

那么

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

X的密度函数绝对可积

X的密度函数绝对可积

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

- 数学期望的性质

1.

$$a \le X \le b \quad \Rightarrow \quad a \le EX \le b$$

2. 线性运算

$$E(a+bX) = a + bEX$$

- 数学期望的性质

1.

$$a \le X \le b \quad \Rightarrow \quad a \le EX \le b$$

2. 线性运算

$$E(a+bX) = a + bEX$$

从求和或求积分的运算性质容易得到。

3. 加法定理

$$E(X+Y) = EX + EY$$

左右两边同时存在

3. 加法定理

$$E(X+Y)=EX+EY$$

左右两边同时存在

证明：以连续型为例。

假设$(X,Y)\sim p(x,y)$，那么$Z=:X+Y$具有密度

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,z-x)dx$$

所以

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}zp_Z(z)dz$$

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} z p_Z(z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} z \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x) dx dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) p(x,y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x,y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y p(x,y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dx \\
&= EX + EY
\end{aligned}
$$

推广：

$$E(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_mX_m) = a_1EX_1+a_2EX_2+\cdots+a_mEX_m$$

- 应用

例. 假设$X_1, X_2, \cdots, X_m$是非负、独立同分布的随机变量，求

$$E\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_m}$$

解：

$$E\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_m}=\cdots=E\frac{X_m}{X_1+\cdots+X_m}$$

存在，有限

另外，

$$\begin{aligned}1 &= E\frac{X_1+\cdots+X_m}{X_1+\cdots+X_m} \\ &= E\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_m}+\cdots+E\frac{X_m}{X_1+\cdots+X_m} \\ &= m\cdot E\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_m}\end{aligned}$$

所以，

$$E\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_m}=\frac{1}{m}$$

$$E\frac{X_1+\cdots+X_m}{X_1+\cdots+X_k}=\frac{k}{m}$$

- 4. 随机变量函数的数学期望

假设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是一个概率空间，$X : \Omega \to R$—r.v.

$$f : R \to R \qquad \text{实值可测函数}$$

求$Ef(X) =?$

(1) 假设X 是离散型随机变量，

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots, N,$$

$N < \infty$ 或$N = \infty$

那么

$$Ef(X) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)p_k$$

证明：令$Y=f(X)$，按定义计算EY。
Y的取值为$\{f(x_k),k=1,2,\cdots,N\}$。
重新编号记为$\{y_1,y_2,\cdots,y_M\}$。令

$$A_l=:\{k:f(x_k)=y_l\},\quad 1\le l\le M$$

$$P(Y=y_l)=\sum_{k\in A_l}p_k$$

$$
\begin{aligned}
EY &= \sum_{l=1}^{M} y_l P(Y = y_l) \\
&= \sum_{l=1}^{M} y_l \sum_{k\in A_l} p_k \\
&= \sum_{l=1}^{M} \sum_{k\in A_l} f(x_k) p_k \\
&= \sum_{k=1}^{N} f(x_k) p_k
\end{aligned}
$$

(2) 假设X 是连续型随机变量，

$$X \sim p(x), \quad -\infty < x < \infty$$

那么

$$Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$$

(3) 假设X具有分布函数$F(x)$，那么

$$Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)$$

- 方差的定义

考察两个学生的成绩：

(1)

$$75, 80, 80, 85, 80$$

(2)

$$55, 90, 60, 100, 85$$

注:

(1) 两个学生的平均成绩都是80

(2) 第一个学生成绩波动很小；第二个学生成绩波动很大

除退化变量外，一般随机变量都取多个不同的值
用平均值单个数字去刻画随机变量，肯定会有偏差。
如何衡量偏差的大小？

除退化变量外，一般随机变量都取多个不同的值
用平均值单个数字去刻画随机变量，肯定会有偏差。
如何衡量偏差的大小？

自然地考虑

$$|X - EX| \qquad \text{绝对偏差}$$

这仍是一个随机变量。因此进一步考虑

$$E|X - EX| \qquad \text{平均偏差}$$

然而，绝对值通常很难计算。

普遍采用

$$\left(E(X-EX)^2\right)^{1/2}$$

称为X的标准差。

普遍采用

$$\left(E(X-EX)^2\right)^{1/2}$$

称为X的标准差。记

$$Var(X) =: E(X-EX)^2$$

称为X的方差。

方差(标准差)反映随机变量取值偏离平均值的平均程度。

- 方差的计算

方差公示:

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$

- 方差的计算

方差公示:

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = Var(X) + (EX)^2$$

- 例子

1. 退化分布

$$X \sim \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

那么

$$EX = c \cdot P(X = c) = 1$$

- 例子

1. 退化分布

$$X \sim \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

那么

$$EX = c \cdot P(X = c) = 1$$

$$EX^2 = c^2$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = 0$$

2. 二项Bernoulli分布

$$X \sim B(n,p), \quad P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 0, 1, \cdots, n$

$$EX = np$$

2. 二项Bernoulli分布

$$X \sim B(n,p), \quad P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 0, 1, \cdots, n$

$$EX = np$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)} p^k (1-p)^{n-k} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)} p^k(1-p)^{n-k} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)
\end{aligned}
$$

- 3. Poisson 分布

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$,

$$EX = \lambda$$

- 3. Poisson 分布

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$,

$$EX = \lambda$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!} + \lambda \end{aligned}$$

$$EX^2 = \lambda^2 + \lambda$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \lambda$$

- 4. 均匀分布

$$X \sim U(a,b), \quad p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

- 4. 均匀分布

$$X \sim U(a,b), \quad p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\
&= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

- 5. 指数分布

$$X \sim exp(\lambda), \quad p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

- 5. 指数分布

$$X \sim exp(\lambda), \quad p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

- 6. 正态分布

$$X \sim N(0,1), \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$EX = 0$$

- 6. 正态分布

$$X \sim N(0,1), \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$EX = 0$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$Var(X) = 1$$

$$Var(X) = 1$$

可以类似证明：当$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Var(X) = \sigma^2$$

$$Var(X) = 1$$

可以类似证明：当$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Var(X) = \sigma^2$$

注：σ越小，方差越小，取值集中在μ附近；
σ越大，方差越大，取值围绕μ散开

- 方差的性质

1.
$$Var(X+a)=Var(X), \quad a \text{ 为常数}$$

2.
$$Var(bX)=b^2Var(X), \quad b \text{ 为常数}$$

3.
$$Var(a+bX)=b^2Var(X), \quad a,b \text{ 为常数}$$

4.
$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2E(X-EX)(Y-EY)$$

5. 当X, Y相互独立时，

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

5. 当X, Y相互独立时，

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

推广：当$X_1, \cdots, X_m$相互独立时，

$$Var(\sum_{k=1}^{m} X_k) = \sum_{k=1}^{m} Var(X_k))$$

独立和的方差等于方差的和

假设$S_n \sim B(n,p)$。令

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \ \text{i.i.d.}$$

那么

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(\xi_i) = np(1-p)$$

6. 当$c \neq EX$时，

$$Var(X) < E(X-c)^2$$

证明：

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X-EX)^2 \\ &= E(X-c-(EX-c))^2 \\ &= E(X-c)^2 + (EX-c)^2 - 2E(X-c)(EX-c) \\ &= E(X-c)^2 - (EX-c)^2 \\ &< E(X-c)^2, \qquad c \neq EX \end{aligned}$$

- Chebyschev

- Chebyschev不等式:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$概率空间, $X : \Omega \to R$随机变量

那么$\varepsilon > 0$,

$$P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

证明：仅就$X \sim p(x)$加以证明。

$$\begin{aligned} P(|X - EX| > \varepsilon) &= \int_{x:|x-EX|>\varepsilon} p(x)dx \\ &\leq \int_{x:|x-EX|>\varepsilon} \frac{|x - EX|^2}{\varepsilon^2} p(x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(|X-EX|>\varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}|x-EX|^2 p(x)dx \\
&= \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(|X-EX|>\varepsilon) &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}|x-EX|^2 p(x)dx \\
&= \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

推广：f是单调不减函数，那么

$$P(X>\varepsilon)\le \frac{Ef(X)}{f(\varepsilon)}$$

事实上，

$$P(X>\varepsilon)\le P(f(X)\ge f(\varepsilon))\le \frac{Ef(X)}{f(\varepsilon)}$$

- Chebyschev不等式的应用

(1)假设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，那么

$$P(|X-\mu| > 3\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

注：上述误差上界与真实值的大小比较相差甚远。

- Chebyschev不等式的应用

(1)假设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，那么

$$P(|X-\mu| > 3\sigma) \le \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

注：上述误差上界与真实值的大小比较相差甚远。

(2) 假设$S_n \sim B(n,p)$，那么

$$\begin{aligned} P(|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon) &\le \frac{Var(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{p(1-p)}{n\varepsilon} \end{aligned}$$

(3) 如果$Var(X)=0$，那么

$$P(X=EX)=1$$

证明：不妨设$EX=0$, 需要证明：$P(X=0)=1$.
往证$P(|X|>0)=0$
根据Chebyschev不等式，对任何$\varepsilon>0$

$$P(|X|>\varepsilon)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}=0$$

所以，

$$\begin{aligned} P(|X|>0) &= P(\cup_{n=1}^{\infty}\{|X|>\frac{1}{n}\}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>\frac{1}{n})=0 \end{aligned}$$

在实际问题中，我们经常需要研究随机向量。

假设(X, Y)为2-维随机向量，联合分布函数为$F(x, y)$

作为1-维随机变量，我们可以分别讨论X和Y的期望和方差以及其它矩。

但我们更关心X, Y之间的内在联系。

除了联合分布外，也可以通过数字特征来反映它们之间的联系。

- 均值向量

假设X和Y的数学期望存在，那么令

$$\vec{\mu} = (EX, EY)$$

表示向量均值

- 均值向量

假设X和Y的数学期望存在，那么令

$$\vec{\mu} = (EX, EY)$$

表示向量均值

- 协方差

假设X和Y的方差存在，即$EX^2 < \infty$，$EY^2 < \infty$。令

$$Cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY)$$

表示X和Y之间的协方差。

一个方便的计算公式：$Cov(X, Y) = EXY - EXEY$

- Cauchy-Schwarz不等式

$$E|X - EX||Y - EY| \leq \left(E(X - EX)^2 E(Y - EY)^2\right)^{1/2}$$

- Cauchy-Schwarz不等式

$$E|X-EX||Y-EY| \leq \left(E(X-EX)^2E(Y-EY)^2\right)^{1/2}$$

证明：不妨设，$EX=0, EY=0$, 需要证明：$E|XY| \leq (EX^2EY^2)^{1/2}$.
注意到，对任何实数t，

$$\begin{aligned} 0 &\leq E(|X|+t|Y|)^2 \\ &= EX^2+2tE|X|\cdot|Y|+t^2EY^2, \quad \forall t \in R \qquad (1) \end{aligned}$$

所以$EX^2+2tE|X|\cdot|Y|+t^2EY^2\geq 0, \quad \forall t\in R$

$$4t^2(E|X|\cdot|Y|)^2\leq 4t^2EX^2EY^2$$

即

$$(E|X|\cdot|Y|)^2\leq EX^2EY^2$$

$$E|X|\cdot|Y|\leq (EX^2EY^2)^{1/2}$$

- 协方差阵

假设X和Y的方差存在，令

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

称Σ为协方差阵。

- 1：协方差阵是非负定的，

即对任意实数x, y，

$$(x, y)\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

- 1：协方差阵是非负定的，

即对任意实数x, y，

$$(x, y)\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

事实上，进行展开可得

$$x^2E(X-EX)^2+2xyE(X-EX)(Y-EY)+y^2E(Y-EY)^2 \geq 0$$

$$x^2Var(X)+2xyCov(X,Y)+y^2Var(Y) \geq 0$$

- 2. 如果X,Y独立，那么

$$Cov(X,Y)=0$$

反过来，$Cov(X,Y)=0$ 并不意味着X,Y独立.

- 定义: 如果

$$Cov(X,Y)=0$$

称X,Y是不相关的

- 2. 如果X, Y独立，那么

$$Cov(X,Y)=0$$

反过来，$Cov(X,Y)=0$ 并不意味着X, Y独立.

- 定义: 如果

$$Cov(X,Y)=0$$

称X, Y是不相关的

显然，

如果X, Y独立，那么X, Y 不相关。

- 3. X, Y 不相关并不意味X, Y独立。

例1. 假设$\theta \sim U(0, 2\pi)$，$X = \sin\theta, Y = \cos\theta$，那么

$$EX = 0, EY = 0, \quad Var(X) = \frac{1}{2}, Var(Y) = \frac{1}{2}$$

并且

$$Cov(X, Y) = 0 \quad \Rightarrow \gamma = 0$$

但明显，

$$X^2 + Y^2 \equiv 1$$

例2. 二元联合正态分布

假设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

例2. 二元联合正态分布

假设$(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

注意，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，　$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

例2. 二元联合正态分布

假设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

注意，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

为简单起见，先假设$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-\rho xy+y^2)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2}dy \\
&= \rho\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \rho
\end{aligned}
$$

一般情况下，

$$Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$$

- 相关系数

假设X, Y为二元随机向量，

$$\vec{\mu} = (EX, EY), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

- 相关系数

假设X,Y为二元随机向量，

$$\vec{\mu}=(EX,EY),\quad \Sigma=\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

定义

$$\gamma=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$$

并称作X和Y的相关系数。γ 的大小反映X和Y相关程度。

(1)根据Cauchy-Schwarz 不等式，

$$|\gamma| \leq 1$$

(2) 如果$\gamma = 1$，那么存在$t_0 = \left(\frac{Var(X)}{Var(Y)}\right)^{1/2}$

$$P(X = t_0(Y - EY) + EX) = 1$$

即，X和Y是正线性相关的：

$$X = t_0 Y + EX - t_0 EY$$

类似地如果$\gamma = -1$，那么存在$t_0 = -\left(\frac{Var(X)}{Var(Y)}\right)^{1/2}$

$$P(X = t_0(Y - EY) + EX) = 1$$

即，X和Y是负线性相关的：

$$X = t_0 Y + EX - t_0 EY$$

证明：假设$\gamma = 1$，那么

$$Cov(X, Y) = [Var(X) \cdot Var(Y)]^{1/2}$$

取

$$t_0 = \left(\frac{Var(X)}{Var(Y)}\right)^{1/2}$$

则

$$\begin{aligned}
&E((X - EX) - t_0(Y - EY))^2 \\
&= E(X - EX)^2 - 2t_0 E(X - EX)(Y - EY) + t_0^2 E(Y - EY)^2 \\
&= Var(X) - 2tCov(X, Y) + t_0^2 Var(Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以，

$$X - EX = t_0(Y - EY)$$

即

$$\begin{aligned} X &= t_0(Y - EY) + EX \\ &= t_0 Y + EX - t_0 EY \end{aligned}$$

(3)

$$\gamma = 0 \Leftrightarrow \text{不相关}$$

事实上，“不相关”解释为“不线性相关”似乎更合理些。

例1（续）．假设$\theta \sim U(0, 2\pi)$，$X = \sin\theta, Y = \cos\theta$，那么

$$EX = 0, EY = 0, \quad Var(X) = \frac{1}{2}, Var(Y) = \frac{1}{2}$$

并且

$$Cov(X, Y) = 0 \quad \Rightarrow \gamma = 0$$

但明显，

$$X^2 + Y^2 \equiv 1, \qquad (X, Y)\text{在圆周上}$$

- 条件期望和全期望公式

回忆条件分布

(1) 离散型随机变量的条件分布

假设

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

那么边际分布为

$$X \sim p_{i,\cdot}, \qquad Y \sim p_{\cdot,j}$$

给定$Y = y_j$，X的条件分布为

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot,j}}, i = 1, 2, 3, \cdots$$

给定$Y=y_j$，X的条件期望定义为

$$E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(X=x_i|Y=y_j)$$

当然要求：

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|P(X=x_i|Y=y_j)<\infty$$

否则，认为条件期望不存在。

给定$Y = y_j$，X的条件期望定义为

$$E(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i|Y = y_j)$$

当然要求：

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X = x_i|Y = y_j) < \infty$$

否则，认为条件期望不存在。

类似地，给定$X = x_j$，Y的条件期望定义为

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(Y = y_j|X = x_i)$$

当然要求：

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(Y = y_j|X = x_i) < \infty$$

例1. 假设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$独立同分布，

$$P(\xi_1 = 1) = p, \quad P(\xi_1 = 0) = 1 - p$$

记$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.
求$E(\xi_k | S_n = m), \quad 0 \le m \le n$?

$$P(\xi_k = 0 | S_n = m) = \frac{P(\xi_k = 0, S_n = m)}{P(S_n = m)}$$ ，略

$$P(\xi_k = 1 | S_n = m) = \frac{P(\xi_k = 1, S_n = m)}{P(S_n = m)}$$

$$E(\xi_k | S_n = m) = 0 \cdot P(\xi_k = 0 | S_n = m) + 1 \cdot P(\xi_k = 0 | S_n = m)$$

(2) 连续型随机变量的条件分布

假设$(X,Y)\sim p(x,y)$，那么

$$X\sim p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy$$

$$Y\sim p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx$$

给定$Y=y$，X的条件分布密度

$$P(X=x|Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

给定$Y=y$，X的条件期望

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xP(X=x|Y=y)dx$$

当然要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|P(X=x|Y=y)dx<\infty$$

给定$Y=y$，X的条件期望

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xP(X=x|Y=y)dx$$

当然要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|P(X=x|Y=y)dx<\infty$$

类似地，给定$X=x$，Y的条件期望

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty}yP(Y=y|X=x)dy$$

例2. $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$
那么，

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

给定$Y=y$下，

$$X\sim N\left(\mu_1+\frac{\rho\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(y-\mu_2),(1-\rho^2)\sigma_1^2\right)$$

那么

$$E(X|Y=y)=\mu_1+\frac{\rho\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(y-\mu_2)$$

例2. $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$
那么，

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

给定$Y=y$下，

$$X\sim N\left(\mu_1+\frac{\rho\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(y-\mu_2),(1-\rho^2)\sigma_1^2\right)$$

那么

$$E(X|Y=y)=\mu_1+\frac{\rho\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(y-\mu_2)$$

类似地，

$$E(Y|X=x)=\mu_2+\frac{\rho\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(x-\mu_1)$$

- 全期望公式

回忆条件期望：

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

每一个y_j，对应一个条件期望$E(X|Y=y_j)$，即

$$y_j \to E(X|Y=y_j)$$

定义

$$g(y_j)=E(X|Y=y_j)$$

即

$$g(Y)=E(X|Y)$$

它是Y的函数，所以是随机变量。求$Eg(Y)=?$

$$
\begin{aligned}
Eg(Y) &= \sum_{j=1}^{\infty} g(y_j)P(Y=y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(X=x_i) \\
&= EX
\end{aligned}
$$

结论：

$$E(E(X|Y)) = EX$$

类似地，

$$E(E(Y|X)) = EY$$

以上结论对离散，连续或一般随机变量都成立。

例2(续). $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

给定$Y=y$，X的条件期望

$$g(y)=E(X|Y=y)=\mu_1+\frac{\rho\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(y-\mu_2)$$

因此，

$$g(Y)=\mu_1+\frac{\rho\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(Y-\mu_2)$$

所以，

$$\begin{aligned} Eg(Y) &= E\mu_1+\frac{\rho\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(Y-\mu_2) \\ &= \mu_1 \\ &= EX \end{aligned}$$

例. Suppose the number of children in a family is a random variable X with mean μ, and given $X=n$ for $n \geq 1$, each of the n children in the family is a girl with probability $p$and a boy with probability $1-p$.

What is the expected number of girls in a family?

令G是该家庭中女孩的个数，求EG

例. Suppose the number of children in a family is a random variable X with mean μ, and given $X = n$ for $n \geq 1$, each of the n children in the family is a girl with probability $p$and a boy with probability $1 - p$.

What is the expected number of girls in a family?

令G是该家庭中女孩的个数，求EG

$$E(G|X = n) = np$$

例. Suppose the number of children in a family is a random variable X with mean μ, and given $X = n$ for $n \geq 1$, each of the n children in the family is a girl with probability $p$and a boy with probability $1 - p$.

What is the expected number of girls in a family?

令G是该家庭中女孩的个数，求EG

$$E(G|X = n) = np$$

$$\begin{aligned} EG &= \sum_{n=1}^{\infty} E(G|X = n)P(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} npP(X = n) = \mu p \end{aligned}$$

- k阶矩，k阶中心矩:

假设$(\Omega, \mathcal{A}, P)$概率空间，$X:\Omega \to R$随机变量

如果$E|X|^k < \infty, k \geq 1$，那么称

$$EX^k, \qquad k \text{ 阶矩} \quad k \geq 1$$

$$E(X-EX)^k, \qquad k \text{ 阶中心矩} \quad k \geq 1$$

例. $X \sim N(0, \sigma^2)$，那么

$$E|X|^k < \infty, \quad k \geq 1$$

并且

$$EX^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}, \qquad EX^{2k+1} = 0, \quad k \geq 1$$

- 问题：随机变量X的分布是否由它的矩所唯一确定？

假设X, Y为随机变量，并且

$$EX^k = EY^k, \qquad k \geq 1$$

问：

$$X \stackrel{d}{=} Y?$$

一般情况下，不能断定$X \stackrel{d}{=} Y$。

例. 假设$\xi\sim N(0,1)$，并且$X=e^{\xi}$. 那么$X\sim p_X(x)$:

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2},\quad x>0$$

$$p_X(x)=0,\quad x\le 0$$

定义$Y\sim p_Y(y)$:

$$p_Y(y)=p_X(y)(1+\sin(2\pi\log y)),\quad y>0$$

试证（作为课外练习）

(1) $p_Y(y)$确实是概率密度函数

(2) $EX^k=EY^k,\quad k\ge 0$

- 特征函数

$$\varphi(t) = Ee^{itX}, \qquad t \in R$$

其中

$$Ee^{itX} = E\cos tX + iE\sin tX$$

一定存在有限。

- 特征函数

$$\varphi(t) = Ee^{itX}, \qquad t \in R$$

其中

$$Ee^{itX} = E\cos tX + iE\sin tX$$

一定存在有限。

$$\varphi(t) : R \to \mathbb{C}$$

实变量复值函数

- 特征函数

$$\varphi(t) = Ee^{itX}, \qquad t \in R$$

其中

$$Ee^{itX} = E\cos tX + iE\sin tX$$

一定存在有限。

$$\varphi(t) : R \to \mathbb{C}$$

实变量复值函数

目的：利用复分析研究随机变量的分布性质。

意义：对概率论的发展起着重要作用

- 典型分布的特征函数

假设$X \sim F(x)$，那么

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

- 典型分布的特征函数

假设$X \sim F(x)$，那么

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

(1) 退化分布

$$P(X = c) = 1$$

那么

$$\varphi(t) = e^{ict}$$

(2) 两点分布

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p$$

那么

$$\varphi(t)=pe^{it}+1-p$$

(3) n-Bernoulli 分布

$$X \sim B(n, p)$$

那么

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= Ee^{itX} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= (1 - p + pe^{it})^n
\end{aligned}$$

(4) Poisson 分布

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

那么

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= Ee^{itX} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= e^{\lambda e^{it} - \lambda} \\
&= e^{\lambda(e^{it} - 1)}
\end{aligned}$$

(5) 均匀分布

$$X \sim U(a,b)$$

那么

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= Ee^{itX} \\ &= \int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx \\ &= \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}\end{aligned}$$

(6) 指数分布

$$X \sim exp(\lambda)$$

那么

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= Ee^{itX} \\ &= \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - it} \end{aligned}$$

(6) 正态分布

$$X \sim N(0,1)$$

那么

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= Ee^{itX} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

- 特征函数的分析性质

(1)

$$\varphi(0) = 1$$

- 特征函数的分析性质

(1)

$$\varphi(0) = 1$$

(2)

$$|\varphi(t)| \leq 1 = \varphi(0)$$

- 特征函数的分析性质

(1)

$$\varphi(0) = 1$$

(2)

$$|\varphi(t)| \leq 1 = \varphi(0)$$

(3)

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$$

(4) $\varphi(t)$在R上一致连续。

证明：对任何$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，

只要$|h| < \delta$，那么对任何$t \in R$，

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

(4) $\varphi(t)$在R上一致连续。

证明：对任何$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，

只要$|h| < \delta$，那么对任何$t \in R$，

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
|\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= |Ee^{i(t+h)X} - Ee^{itX}| \\
&= |E(e^{i(t+h)X} - e^{itX})| \\
&= |Ee^{itX}(e^{ihX} - 1)| \\
&\leq E|(e^{ihX} - 1)|
\end{aligned}$$

现在固定$\varepsilon > 0.$

假设$X \sim F(x)$，那么存在$M > 0$

$$P(|X| > M) = 1 - F(M) + F(-M) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

所以

$$\begin{aligned}
|\varphi(t+h) - \varphi(t)| &\leq E|(e^{ihX} - 1)| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1| dF(x) \\
&= \int_{|x|>M} |e^{ihx} - 1| dF(x) + \int_{|x|\leq M} |e^{ihx} - 1| dF \\
&< 2\frac{\varepsilon}{4} + hM
\end{aligned}$$

选取$\delta > 0$足够小，使得$\delta M < \frac{\varepsilon}{2}$。
这样，当$|h| \le \delta$时，

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < 2\frac{\varepsilon}{4} + hM < \varepsilon$$

(5) Bochner 非负定性对任何实数$t_1, t_2, \cdots, t_n$，任何复数$a_1, a_2, \cdots, a_n$

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_k \bar{a}_l \varphi(t_k - t_l) \geq 0$$

(5) Bochner 非负定性对任何实数$t_1, t_2, \cdots, t_n$，任何复数$a_1, a_2, \cdots, a_n$

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_k \bar{a}_l \varphi(t_k - t_l) \geq 0$$

证明：

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n} a_k \bar{a}_l \varphi(t_k - t_l) &= \sum_{k,l=1}^{n} a_k \bar{a}_l E e^{i(t_k - t_l)X} \\
&= E \sum_{k,l=1}^{n} a_k \bar{a}_l e^{it_k X} \overline{e^{it_l X}} \\
&= E \left| \sum_{k=1}^{n} a_k e^{it_k X} \right|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

(6) 可微性

假设$E|X| < \infty$, $EX = \mu$

那么

$$\varphi(t) \quad 可微$$

并且

$$\varphi'(0) = i\mu$$

(6) 可微性

假设$E|X| < \infty$, $EX = \mu$

那么

$$\varphi(t) \quad \text{可微}$$

并且

$$\varphi'(0) = i\mu$$

事实上，

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$$

所以

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} dF(x) \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} dF(x) \end{aligned}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$$

所以

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} dF(x) \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} dF(x) \end{aligned}$$

$$\varphi'(0) = i\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = i\mu$$

类似地，如果$E|X|^k < \infty$
那么

$$\varphi^{(k)}(t) \qquad 存在$$

特别，如果$E|X|^k < \infty$，那么$\varphi(t)$ 在0处可以进行k次展开：

$$\varphi(t) = 1 + iEXt - \frac{EX^2}{2}t^2 + \cdots + i^k \frac{EX^k}{k!}t^k + o(t^k), \qquad t \to 0.$$

- 特征函数的运算性质

(1)令X的特征函数为$\varphi_X(t)$，那么

$$Ee^{it(aX+c)}=e^{itc}\varphi_X(at)$$

作为应用：

如果$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，那么可写成

$$Y=\sigma X+\mu,\qquad X\sim N(0,1)$$

因此，

$$\varphi_Y(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

(2) 乘法公式：

如果X, Y相互独立，那么$Z =: X + Y$的特征函数为

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

(2) 乘法公式:

如果X, Y相互独立，那么$Z =: X + Y$的特征函数为

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

证明:

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= Ee^{itZ} = Ee^{it(X+Y)} \\
&= Ee^{itX} \cdot e^{itY} \\
&= Ee^{itX} \cdot Ee^{itY} \\
&= \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)
\end{aligned}$$

推广：

假设$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，令

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

那么

$$\varphi_Z(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$$

推广：

假设$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，令

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

那么

$$\varphi_Z(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$$

应用：

$$S_n \sim B(n, p), \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

所以，

$$Ee^{itS_n} = \prod_{k=1}^{n} Ee^{it\xi_k} = (1 - p + pe^{it})^n$$

- 问题：分布函数和特征函数相互唯一确定吗？

- 问题：分布函数和特征函数相互唯一确定吗？

更具体地说，假设X, Y是两个随机变量

(1) 显然，如果$X \stackrel{d}{=} Y$ (分布相同)，那么

$$\varphi_X(t) \equiv \varphi_Y(t)$$

(2) 反过来，如果

$$\varphi_X(t) \equiv \varphi_Y(t)$$

那么

$$X \stackrel{d}{=} Y, \qquad F_X(x) \equiv F_Y(x)?$$

- 唯一性定理：如果

$$\varphi_X(t) \equiv \varphi_Y(t)$$

那么

$$X \overset{d}{=} Y, \qquad F_X(x) \equiv F_Y(x)$$

- 唯一性定理：如果

$$\varphi_X(t) \equiv \varphi_Y(t)$$

那么

$$X \overset{d}{=} Y, \qquad F_X(x) \equiv F_Y(x)$$

事实上，

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_2} - e^{-itx_1}}{it} \cdot \varphi_X(t) dt$$

证明：略

推论：

(1) 如果X的特征函数$\varphi(t)$绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt$$

那么X具有密度函数$p(x)$，并且

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

例. $\varphi(t) = e^{-|t|}$是一个特征函数，求相应的随机变量的分布？

例. $\varphi(t)=e^{-|t|}$是一个特征函数，求相应的随机变量的分布？

显然，$\varphi(t)$绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}dt < \infty$$

所以

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-|t|}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}[\int_{0}^{\infty} e^{-itx}e^{-t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-itx}e^{t}dt] \end{aligned}$$

得

$$X \sim p(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} \qquad \text{Cauchy r.v.}$$

(2) 假设$\varphi(t)$是一个特征函数，如果

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

并且

$$a_k \geq 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = 1$$

那么

$$P(X = k) = a_k, \quad k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,$$

注意，某些a_k可能为0.

例.

$$\varphi(t) = \cos t$$

那么

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it}$$

所以,

$$P(X=-1) = \frac{1}{2}, \qquad P(X=1) = \frac{1}{2}$$

- 利用唯一性可以计算随机变量的分布

例. 假设$X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2, \cdots, n$

令

$$Z = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

求Z的分布？

- 利用唯一性可以计算随机变量的分布

例. 假设$X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2, \cdots, n$

令

$$Z = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

求Z的分布？

(a) 先求Z的特征函数$\varphi_Z(t)$

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) &= Ee^{itZ} \\ &= \prod_{k=1}^{n} Ee^{itX_k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \prod_{k=1}^{n} e^{it\mu_k - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}} \\
&= e^{it\sum_{k=1}^{n}\mu_k - \frac{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 t^2}{2}}
\end{aligned}
$$

(b) 然后，将所得到的特征函数和熟知的特征函数进行对比，可确定其分布

$$
Z \sim N(\mu, \sigma^2)
$$

其中

$$
\mu = \sum_{k=1}^{n}\mu_k, \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2
$$

- 二元随机向量的特征函数

假设(X,Y)是二元随机向量，那么它的特征函数是一个二元函数：

$$\phi(t_1,t_2)=Ee^{i(t_1X+t_2Y)},\qquad t_1,t_2\in R$$

特别，当X,Y相互独立时，

$$\begin{aligned}\phi(t_1,t_2)&=Ee^{i(t_1X+t_2Y)}\\&=Ee^{it_1X}Ee^{it_2Y}\\&=\phi_X(t_1)\phi_Y(t_2)\end{aligned}$$

- 例：假设(X,Y)是二元联合正态随机变量

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$$

求：$\phi(t_1,t_2)=?$
为简单起见，假设$\mu_1=0,\sigma_1^2=1;\mu_2=0,\sigma_2^2=1$，即

$$(X,Y) \sim N(0,1;0,1;\rho)$$

令

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

作线性变换：

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= \Sigma^{-1/2} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}^{-1/2} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

这样，$(U, V) \sim N(0, 1; 01; 0)$，即$U, V$相互独立。
所以，

$$
\begin{aligned}
\phi_{U,V}(t_1, t_2) &= e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(t_1,t_2)\cdot(t_1,t_2)'}
\end{aligned}
$$

并由此得到

$$
\begin{aligned}
\phi_{X,Y}(t_1, t_2) &= Ee^{i(t_1,t_2)(X,Y)'} \\
&= Ee^{i(t_1,t_2)\Sigma^{1/2}(U,V)'} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(t_1,t_2)\Sigma(t_1,t_2)'}
\end{aligned}
$$