一、绪论

1. 概念：一种能够进行编程并在自动控制下执行某些操作和移动作业任务的机械装置（美国国家标准局（NSB））

2. 机械臂：通过关节将连杆连接，末端执行器安装在操作臂的自由端

▲结构分为：直角坐标、圆柱坐标、球面坐标、转动关节、SCARA（平行）

3. 第二代工业机器人：具有感受功能的机械臂人。包括具有视觉、力觉、声觉等

4. 工业机器人公司（四大家族）：ABB（瑞典）、KUKA（德 美的）、Yaskawa、FANUC（日）

5. 工业机器人体系结构三部分：机电部分、传感部分、控制部分 **6. 工业机器人体系结构六大系统**：驱动、机械结构、感受、机器人-环境交互、人机交互、控制

7. 机械臂主要技术参数：自由度、工作精度、工作范围、工作速度、承载能力

二、空间描述与正逆运动学

1. 旋转矩阵的定义：$\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^A_BR$。旋转矩阵是一个 SO(3) 矩阵。

$$SO(3)=\left\{\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\r_{21}&r_{22}&r_{23}\\r_{31}&r_{32}&r_{33}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}\left|\begin{bmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{bmatrix}=1,\begin{bmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{bmatrix}=1,\begin{bmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{13}\\r_{23}\\r_{33}\end{bmatrix}\right.\right\}$$

$${}^BO_A=-{}^B_AR\,{}^AO_B$$

2. 齐次变换矩阵 ${}^A_BT=\begin{bmatrix}{}^A_BR & {}^AO_B\\0\ 0\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ${}^B_AT=\begin{bmatrix}{}^B_AR & {}^BO_A\\0\ 0\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^A_BR^T & -{}^A_BR^T\,{}^AO_B\\0\ 0\ 0 & 1\end{bmatrix}$

3. 不同坐标系下点的变换：${}^AP={}^AO_B+{}^A_BR\,{}^BP$ 链乘法则：${}^A_CR={}^A_BR\,{}^B_CR$

4. 描述运动的三个角：绕 z 轴偏摆（yaw） 绕 y 轴俯仰（pitch） 绕 x 轴横滚（roll）

$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ Z-Y-X 欧拉角：${}^A_DR={}^A_BR\,{}^B_CR\,{}^C_DR=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$ （右乘联体）

X-Y-Z 固定角：${}^A_DR=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$ （左乘基）

欧拉角和固定角各有 12 种

ZYX XYZ XZY YXZ YZX ZXY ZYZ XYX XZX YXY YZY ZXZ

Z-Y-X 欧拉角表示方法：
$$\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma\\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma\end{bmatrix}$$

右乘联体左乘基：操作相对联体坐标系或是基坐标系

5. 一个姿态若能被一组俯仰角绝对值大于 90° 的 Z-Y-X 欧拉角或 X-Y-Z 固定角描述，那么也能被另一组俯仰角绝对值不大于 90° 的 Z-Y-X 欧拉角或 X-Y-Z 固定角描述。俯仰角等于 90° 时只能得到 $\alpha-\gamma=\mathrm{Atan2}(r_{23},r_{22})$，欧拉角不唯一。

ABA 型欧拉角或固定角：$0<\beta<\pi$

6. 姿态的等效轴角表示：绕某个向量旋转某个角度

$\{B\}$绕${}^AK$旋转θ后的${}^A_BR(1)$ ${}^A_BR(1)=R_K(\theta)\,{}^A_BR(0)$

$${}^A_BR=\begin{bmatrix}k_x^2v\theta+c\theta & k_xk_yv\theta-k_zs\theta & k_xk_zv\theta+k_ys\theta\\ k_xk_yv\theta+k_zs\theta & k_y^2v\theta+c\theta & k_yk_zv\theta-k_xs\theta\\ k_xk_zv\theta-k_ys\theta & k_yk_zv\theta+k_xs\theta & k_z^2v\theta+c\theta\end{bmatrix}=R_K(\theta)\quad v\theta=1-c\theta$$

$\{B\}$绕${}^BK$旋转θ后的${}^A_BR(1)$ ${}^A_BR(1)={}^A_BR(0)R_K(\theta)$

右乘联体左乘基：$T_1{}^A_BTT_2=T_{d1}T_{K1}(\theta_1){}^A_BTT_{d2}T_{K2}(\theta_2)$

7. 已知旋转矩阵求等效轴角的方法： θ∈(0,pi) θ=pi

θ=0 无穷组解

$$\theta=\mathrm{Acos}\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right)\quad\begin{bmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{bmatrix}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix}r_{32}-r_{23}\\r_{13}-r_{31}\\r_{21}-r_{12}\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{bmatrix}=\pm\begin{bmatrix}\sqrt{(r_{11}+1)/2}\\r_{12}/\sqrt{2(r_{11}+1)}\\r_{13}/\sqrt{2(r_{11}+1)}\end{bmatrix}$$ 两组解

8. 四元数：在等效轴角的基础上，定义**欧拉参数** $[\eta,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]^T$ $\eta^2+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2=1$

$\eta=\cos\theta/2$，$\varepsilon=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]^T=[k_x\sin\theta/2,k_y\sin\theta/2,k_z\sin\theta/2]^T$

▲旋转矩阵欧拉参数表示：对角线和-1 改 sgn(0, r_{12}, r_{13})

$$R=\begin{bmatrix}2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\eta\\\varepsilon\end{bmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}\\ \mathrm{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}\\ \mathrm{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1}\\ \mathrm{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1}\end{bmatrix}$$

▲Grassmann积

$$\begin{bmatrix}\eta\\\varepsilon\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\xi\\\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta\xi-\varepsilon^T\delta\\\eta\delta+\xi\varepsilon+\varepsilon\times\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta&-\varepsilon_1&-\varepsilon_2&-\varepsilon_3\\\varepsilon_1&\eta&-\varepsilon_3&\varepsilon_2\\\varepsilon_2&\varepsilon_3&\eta&-\varepsilon_1\\\varepsilon_3&-\varepsilon_2&\varepsilon_1&\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\end{bmatrix}$$

U 中的 Grassmann 积相当于 SO(3) 中的乘法

定义$[\xi,\delta]^T\in U$，再定义

$\zeta=\eta\xi-\varepsilon^T\delta=\eta\xi-\varepsilon_1\delta_1-\varepsilon_2\delta_2-\varepsilon_3\delta_3$ 可证得 $R_\varepsilon(\eta)R_\delta(\xi)=R_\rho(\zeta)$

$$\rho=\begin{bmatrix}\rho_1\\\rho_2\\\rho_3\end{bmatrix}=\eta\delta+\xi\varepsilon+\varepsilon\times\delta=\begin{bmatrix}\eta\delta_1+\varepsilon_1\xi+\varepsilon_2\delta_3-\varepsilon_3\delta_2\\\eta\delta_2-\varepsilon_1\delta_3+\varepsilon_2\xi+\varepsilon_3\delta_1\\\eta\delta_3+\varepsilon_1\delta_2-\varepsilon_2\delta_1+\varepsilon_3\xi\end{bmatrix}$$

基于 Grassmann 积，欧拉参数在 U 中直接描述 3 维姿态和 3 维坐标系旋转

▲四元数：对任意$[\eta,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]^T$，其对应的四元数为$\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3$

$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ $ij=k,ji=-k,jk=i,kj=-i,ki=j,ik=-j$

加法：各实部虚部相加。乘法相当于 U 中的 Grassmann 积。共轭：虚部取反

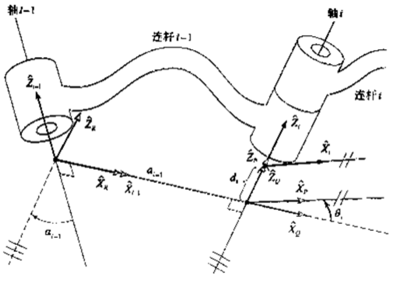
四元数的坐标变换：$ix_2+jy_2+kz_2=(\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3)(ix_1+jy_1+kz_1)(\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3)^*$

9. 关节：使两个刚体直接接触而又能产生一定相对运动的联接称为运动副，机器人运动副也称关节。面与面接触为低副 六种低副：转动 移动 圆柱 平面 螺旋 球面

▲串联机构：多个连杆通过关节以串联形式连接成首尾不封闭的机械结构

▲为了确定末端执行器在 3 维空间的位置和姿态，串联机器人至少需要 6 个关节

10. 运动学参量：连杆长度a_{i-1}、连杆转角α_{i-1}、连杆偏距d_i、关节角θ_i



▲轴 i-1 和 i 的公垂线长度为连杆长度

▲$\overline{O_{i-1}P_i}$称为几何连杆

▲连杆长度为 0，选共同垂直轴方向

▲关节 1：3 个 0 关节 n：1 个 0

▲改进 D-H 方法：联体坐标系{i-1}，Z 轴为轴 i-1 的方向，X 轴为连杆 i-1 的方向，Y 右手定则确定

▲改进 D-H 方法建立的连杆联体坐标系不唯一

11. 正运动学

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_i&-\sin\theta_i&0&a_{i-1}\\\sin\theta_i\cos\alpha_{i-1}&\cos\theta_i\cos\alpha_{i-1}&-\sin\alpha_{i-1}&-\sin\alpha_{i-1}d_i\\\sin\theta_i\sin\alpha_{i-1}&\cos\theta_i\sin\alpha_{i-1}&\cos\alpha_{i-1}&\cos\alpha_{i-1}d_i\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad{}^{i-1}_iT=R_X(\alpha_{i-1})D_X(a_{i-1})R_Z(\theta_i)D_Z(d_i)\quad{}^0_nT={}^0_1T\,{}^1_2T\cdots{}^{n-1}_nT$$

关节空间→笛卡尔空间

12. 关于工作空间和多重解的几个结论

▲工作空间：机器人末端工具联体坐标系原点所能到达的范围。

▲灵巧工作空间：末端以任何姿态到达区域；可达工作空间：以至少一种姿态到达。

▲目标在灵巧空间内，逆运动学解存在；不在可达空间内，逆运动学解不存在。

▲当操作臂少于 6 自由度时，它在三维空间内不能达到全部位姿。

▲两连杆操作臂，l1=l2，可达空间是 2l 半径的圆，灵巧空间是原点；l1≠l2，可达空间是外径 l1+l2、内径|l1-l2|的圆环。

▲若同一位姿有多个解，比较合理的一种选择是取“最短行程”解。

▲多重解，解的个数取决于操作臂的关节数量，解的个数也是连杆参数和关节运动范围的函数。所有包含转动关节和移动关节的串联型 6 自由度操作臂都是可解的，但这种解一般是数值解。

▲具有 6 个旋转关节的操作臂存在封闭解的充分条件是相邻的三个关节轴线相交于一点。存在解析解的操作臂：几个正交关节轴或多个连杆转角为 0° 或 90° 。

13. 逆运动学的代数解法：使得已知所有 12 个参数的的变换矩阵 T 与 D-H 参数表所求得的末端位姿对应，解出各个关节角。**几何解法**：利用平面几何直接求解。

三、微分运动学与静力学

${}^A\upsilon_C={}^A_UR\upsilon_C={}^A_UR\,{}^UV_{CORG}\neq{}^AV_{CORG}$

1. ${}^BV_Q$ Q 在{B}中的速度 ${}^A({}^BV_Q)={}^A_BR\,{}^BV_Q$ 速度在{A}系中的描述 $\upsilon_C={}^UV_{CORG}$

2. ${}^A_DR=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$ X-Y-Z 固定角，角位移向量$[\gamma,\beta,\alpha]^T$，没有物理意义

3. 不同坐标系下点的速度：${}^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BR\,{}^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ$

4. 定义$S=\dot{R}R^T$，S 为反对称阵，即$S+S^T=0_n$，定义 ${}^A_BS=\begin{bmatrix}0&-\Omega_z&\Omega_y\\\Omega_z&0&-\Omega_x\\-\Omega_y&\Omega_x&0\end{bmatrix}$

有 ${}^A_BS={}^A_B\dot{R}\,{}^A_BR^{-1}={}^A_B\dot{R}\,{}^A_BR^T$，${}^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_B\dot{R}\,{}^BQ+{}^A_BR\,{}^BV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BS\,{}^A_BR\,{}^BQ+{}^A_BR\,{}^BV_Q$

5. 可以证明 ${}^A\Omega_C={}^A\Omega_B+{}^A_BR\,{}^B\Omega_C$，于是可以得到连杆间速度和角速度传递公式

转动关节

$${}^{i+1}\omega_{i+1}={}^{i+1}_iR\,{}^i\omega_i+\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$
$${}^{i+1}\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_iR({}^i\upsilon_i+{}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})$$

移动关节

$${}^{i+1}\omega_{i+1}={}^{i+1}_iR\,{}^i\omega_i$$
$${}^{i+1}\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_iR({}^i\upsilon_i+{}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})+\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

利用向外迭代法，最终 $\upsilon_N={}^0_NR\,{}^N\upsilon_N$ $\omega_N={}^0_NR\,{}^N\omega_N$

6. 雅可比 $\begin{bmatrix}v\\\omega\end{bmatrix}=J(\Theta)\dot{\Theta}$ 几何雅可比 $\begin{bmatrix}{}^i\upsilon_N\\{}^i\omega_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^i_0R&0\\0&{}^i_0R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon_N\\\omega_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^i_0R&0\\0&{}^i_0R\end{bmatrix}J(\Theta)\dot{\Theta}$

移动关节 $\upsilon_N^{(i)}=\dot{d}_i\hat{Z}_i$ $\omega_N^{(i)}=0$

转动关节 $\upsilon_N^{(i)}=\dot{\theta}_i\hat{Z}_i\times(P_N-P_i)$ $\omega_N^{(i)}=\dot{\theta}_i\hat{Z}_i$

$$v_N=\begin{bmatrix}\hat{Z}_1\times(P_N-P_1)&\hat{Z}_2\times(P_N-P_2)&\cdots&\hat{Z}_{N-1}\times(P_N-P_{N-1})&0\\\hat{Z}_1&\hat{Z}_2&\cdots&\hat{Z}_{N-1}&\hat{Z}_N\end{bmatrix}\dot{\Theta}$$

7. 奇异性：使雅可比不可逆的θ值。对应的位姿称为机构的奇异位形或奇异状态

分为：边界奇异性：工作空间边界的奇异位形（操作臂完全展开或者收回）；

内点奇异性：工作空间内部的奇异位形（两个或两个以上的关节轴线共线）。

8. 分析雅可比：设刚体姿态矩阵为 R，由$S=\dot{R}R^T$可以解得 $\omega_x=\dot{r}_{31}r_{21}+\dot{r}_{32}r_{22}+\dot{r}_{33}r_{23}$

$\omega_y=\dot{r}_{11}r_{31}+\dot{r}_{12}r_{32}+\dot{r}_{13}r_{33}$

$\omega_z=\dot{r}_{21}r_{11}+\dot{r}_{22}r_{12}+\dot{r}_{23}r_{13}$

$\dot{X}=\begin{bmatrix}\dot{d}\\\dot{\alpha}\end{bmatrix}=J_a(\Theta)\dot{\Theta}$ $\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'}=\begin{bmatrix}\dot{\alpha}&\dot{\beta}&\dot{\gamma}\end{bmatrix}^T$ $\omega=\begin{bmatrix}0&-s\alpha&c\alpha s\beta\\0&c\alpha&s\alpha s\beta\\1&0&c\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\\dot{\beta}\\\dot{\gamma}\end{bmatrix}=B(\phi)\dot{\phi}$

$$\omega_x=\dot{r}_{31}r_{21}+\dot{r}_{32}r_{22}+\dot{r}_{33}r_{23}$$
$$=\left(\frac{\partial r_{31}}{\partial\alpha}r_{21}+\frac{\partial r_{32}}{\partial\alpha}r_{22}+\frac{\partial r_{33}}{\partial\alpha}r_{23}\right)\dot{\alpha}+\left(\frac{\partial r_{31}}{\partial\beta}r_{21}+\frac{\partial r_{32}}{\partial\beta}r_{22}+\frac{\partial r_{33}}{\partial\beta}r_{23}\right)\dot{\beta}+\left(\frac{\partial r_{31}}{\partial\gamma}r_{21}+\frac{\partial r_{32}}{\partial\gamma}r_{22}+\frac{\partial r_{33}}{\partial\gamma}r_{23}\right)\dot{\gamma}$$
$$=-s\alpha\dot{\beta}+c\alpha s\beta\dot{\gamma}=\begin{bmatrix}0&-s\alpha&c\alpha s\beta\end{bmatrix}\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'}$$

（Z-Y-Z 欧拉角求分析雅可比的例子）

9. 力偶：两大小相等方向相反不共线平行力组成的力系 $\overrightarrow{OA}\times\vec{f}+\overrightarrow{OB}\times(-\vec{f})=\overrightarrow{BA}\times\vec{f}$

力的平移：刚体上作用于 A 点的力 ↔ 刚体上作用于 B 点的力附加$\overrightarrow{BA}\times\vec{f}$

刚体静态平衡的条件：$\overrightarrow{f_\sigma}=0,\overrightarrow{n_\sigma}=0$

10. 向内迭代法 静力传递式中的矩阵是速度雅可比的转置

${}^if_i={}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}$

${}^in_i={}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1}+{}^iP_{i+1}\times{}^if_i$

转动关节 $\tau_i=|{}^in_i|\cos\theta=|{}^in_i||{}^i\hat{Z}_i|\cos\theta={}^in_i^T\,{}^i\hat{Z}_i$

移动关节 $\tau_i={}^if_i^T\,{}^i\hat{Z}_i$

关于这个的转置： ${}^3\upsilon_3=\begin{bmatrix}u_x&u_y&0\end{bmatrix}^T$

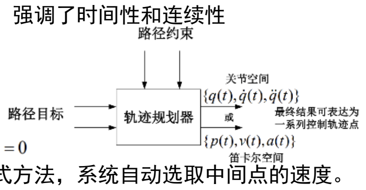
雅可比的转置将作用于操作臂的笛卡尔力映射成等效关节力矩

四、轨迹规划

1. 路径：机器人位形的一个特定序列，而不考虑机器人位形的时间因素

轨迹：与何时到达路径中的每个部分有关，强调了时间性和连续性

轨迹规划的任务是在用户只需给定机械臂末端目标位姿的条件下，确定机械臂末端到达目标的准确路径、时间历程、速度曲线等。



2. 三次多项式 $\theta(0)=\theta_0,\theta(t_f)=\theta_f,\dot{\theta}(0)=0,\dot{\theta}(t_f)=0$

在笛卡尔空间或关节空间使用适当的启发式方法，系统自动选取中间点的速度。

3. 样条曲线：两条三次曲线，起始时间都为 0，中间 v、a 连续，可以求得参数：

起始角为θ_0，中间点为 θ_v，目标点为θ_g

$$a_{10}=\theta_0\quad a_{11}=0\quad a_{12}=\frac{12\theta_v-3\theta_g-9\theta_0}{4t_f^2}\quad a_{13}=\frac{-8\theta_v+3\theta_g+5\theta_0}{4t_f^3}$$
$$a_{20}=\theta_v\quad a_{21}=\frac{3\theta_g-3\theta_0}{4t_f}\quad a_{22}=\frac{-12\theta_v+6\theta_g+6\theta_0}{4t_f^2}\quad a_{23}=\frac{8\theta_v-5\theta_g-3\theta_0}{4t_f^3}$$

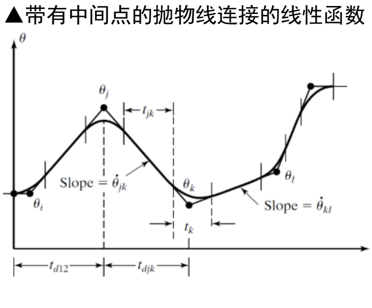
4. 五次多项式：指定首末 θ、v、a

5. 带抛物线连接的线性函数

▲两端加速中间匀速，加速时间

$$t_b=\frac{t_f}{2}-\frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2t_f^2-4\ddot{\theta}(\theta_f-\theta_0)}}{2\ddot{\theta}}\quad\ddot{\theta}\geq\frac{4(\theta_f-\theta_0)}{t_f^2}$$

▲带有中间点的抛物线连接的线性函数 内部路径点 第一个路径段



内部路径点：

$$\dot{\theta}_{jk}=\frac{\theta_k-\theta_j}{t_{djk}}\qquad\ddot{\theta}_k=SGN(\dot{\theta}_{kl}-\dot{\theta}_{jk})|\ddot{\theta}_k|$$
$$t_k=\frac{\dot{\theta}_{kl}-\dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k}\qquad t_{jk}=t_{djk}-\frac{1}{2}t_j-\frac{1}{2}t_k$$

第一个路径段：

$$t_1=t_{d12}-\sqrt{t_{d12}^2-\frac{2(\theta_2-\theta_1)}{\ddot{\theta}_1}}\qquad\ddot{\theta}_1=SGN(\theta_2-\theta_1)|\ddot{\theta}_1|$$
$$\dot{\theta}_{12}=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_{d12}-\frac{1}{2}t_1}\qquad t_{12}=t_{d12}-t_1-\frac{1}{2}t_2$$

最后一个路径段

$\ddot{\theta}_n = SGN(\theta_{n-1}-\theta_n)|\ddot{\theta}_n|$ $t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(\theta_n-\theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_n}}$ $\dot{\theta}_{(n-1)n} = \frac{\theta_n-\theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n}-\frac{1}{2}t_n}$

$t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2}t_{n-1}$ 若希望操作臂精确经过某中间点，将该点替换为位于其两侧的两个伪中间点，该点在连接两个伪中间点的直线段上，计算仍用前面的公式

5. 笛卡尔空间规划——四元数插补

▲笛卡尔直线运动，还有圆弧、正弦等形状 不能采用旋转矩阵描述中间点

▲旋转矩阵转化成轴角 ${}^S K_C = \theta_{SC}\,{}^S\hat{K}_C$，由于 $\mathrm{Rot}({}^S\hat{K}_C,\theta_{SC}) = \mathrm{Rot}({}^S\hat{K}_C,\theta_{SC}+n360°)$

{A}的姿态由 ${}^S K_A$ 给出，则必须选择特定的 ${}^S K_B$ 使得 $|{}^S K_B - {}^S K_A|$ 最小（向量间最小距离）

▲对于单位四元数表示的两个姿态 $q_0=[\cos(\theta_0),\ \sin(\theta_0)\mathbf{u}_0]$ $q_1=[\cos(\theta_1),\ \sin(\theta_1)\mathbf{u}_1]$

Lerp: $q_t = Lerp(q_0,q_1,t) = (1-t)q_0 + tq_1$ Nlerp: $q_t = NLerp(q_0,q_1,t) = \frac{(1-t)q_0+tq_1}{\|(1-t)q_0+tq_1\|}$

Nlerp 正规化插值的问题：旋转的角速度不均匀

四元数球面线性插值 Slerp: $\theta = \cos^{-1}(q_0\cdot q_1)$

（若 $q_0\cdot q_1<0$，则将 q_1 改为 $-q_1$）$q_t = Slerp(q_0,q_1,t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}q_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}q_1$

▲笛卡尔空间规划问题：不可到达的中间点、奇异点附近的高关节速率、不同解下的可达起点和终点 ▲连续轨迹记录（示教）：首先示教机器人如何运动

6. 带约束的规划需要在机械臂的 C 空间上进行，机械臂的 C 空间难以计算

五、动力学

1. 线加速度 ${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{BORG} + {}^A_BR\,{}^B\dot{V}_Q + 2\,{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BV_Q + {}^A\dot{\Omega}_B\times{}^A_BR\,{}^BQ + {}^A\Omega_B\times({}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ)$

角加速度公式：${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A_BR\,{}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^B\Omega_C$

2. **惯性张量：** ${}^AI = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz}\end{pmatrix}$

$I_{xx}=\iiint_V (y^2+z^2)\rho dv$ $I_{xy}=\iiint_V xy\rho dv$

$I_{yy}=\iiint_V (x^2+z^2)\rho dv$ $I_{xz}=\iiint_V xz\rho dv$

$I_{zz}=\iiint_V (x^2+y^2)\rho dv$ $I_{yz}=\iiint_V yz\rho dv$

平行移轴定律：

${}^AI_{xx} = {}^CI_{xx} + m(y_c^2+z_c^2)$ ${}^AI_{yy} = {}^CI_{yy} + m(x_c^2+z_c^2)$ ${}^AI_{zz} = {}^CI_{zz} + m(x_c^2+y_c^2)$

${}^AI_{yz} = {}^CI_{yz} - my_cz_c$ ${}^AI_{xz} = {}^CI_{xz} - mx_cz_c$ ${}^AI_{xy} = {}^CI_{xy} - mx_cy_c$

柱坐标变换：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$ ${}^AI = {}^CI + m[P_c^TP_cI_3 - P_cP_c^T]$

球坐标变换：$x=r\sin\phi\cos\theta, y=r\sin\phi\sin\theta, z=r\cos\phi$

照系

${}^AF = m\dot{v}_Q = 2m\omega_B\times{}^A_BR\,{}^BV_Q + m\omega_B\times(\omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ)$

${}^BF = {}^B_AR\,{}^AF = 2m\,{}^B\omega_B\times{}^BV_Q + m\,{}^B\omega_B\times({}^B\omega_B\times{}^BQ)$

${}^BF + {}^BF_C + {}^BF^* = m\,{}^B\dot{V}_Q = 0$

${}^BF^* = -m\,{}^B\omega_B\times({}^B\omega_B\times{}^BQ) = [m\dot{\theta}^2r\ \ 0\ \ 0]^T$ 是离心力

${}^BF_C = -2m\,{}^B\omega_B\times{}^BV_Q = [0\ \ -2m\dot{\theta}\dot{r}\ \ 0]^T$ 称为哥氏力（

3. 牛顿方程 $F = m\dot{v}_c$ **欧拉方程** ${}^CN = {}^CI\,{}^C\dot{\omega} + {}^C\omega\times{}^CI\,{}^C\omega$

外推：i: 0 → n-1 ${}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0$ ${}^0\dot{v}_0 = -{}^0g$

$\theta_i, \dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i$ 均已知

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_iR\,{}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_iR\,{}^i\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_iR\,{}^i\omega_i\times\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_iR({}^i\dot{\omega}_i\times{}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i\times({}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i)$$

$${}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1}\times{}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1}\times({}^{i+1}\omega_{i+1}\times{}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}$$

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}}$$

$${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1}\times{}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\omega_{i+1}$$

内推：i: n → 1 ${}^{n+1}f_{n+1} = 0, {}^{n+1}n_{n+1} = 0$

$${}^if_i = {}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i$$

$${}^in_i = {}^iN_i + {}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^iP_{C_i}\times{}^iF_i + {}^iP_{i+1}\times{}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}$$

$$\tau_i = {}^in_i^T\,{}^i\hat{Z}_i$$

移动关节：

角速度与力矩 $\boxed{{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_iR\,{}^i\dot{\omega}_i}$

$$\boxed{{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_iR[{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i\times{}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i\times({}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})] + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + 2\,{}^{i+1}\omega_{i+1}\times\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}}$$

4. 操作臂动力学方程 $\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta)$ 质量矩阵、离心力哥式力、重力

位形空间方程 $\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + B(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta)$ B 哥氏力 C 离心力

5. 拉格朗日方程： 动能：$k_i = \frac{1}{2}m_iv_{C_i}^Tv_{C_i} + \frac{1}{2}{}^i\omega_i^T\,{}^CI_i\,{}^i\omega_i$ 矩阵 $\dot{M}-2V$ 是反对称的 $k = \sum_{i=1}^n k_i$

势能：$u_i = -m_i\,{}^0g^T\,{}^0P_{C_i} + u_{ref_i}$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial\Theta} = \tau$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial\dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial\Theta} + \frac{\partial u}{\partial\Theta} = \tau$ $u = \sum_{i=1}^n u_i$

拉格朗日函数：$L(\Theta,\dot{\Theta}) = k(\Theta,\dot{\Theta}) - u(\Theta)$

6. 笛卡尔状态空间方程 $F = M_X(\Theta)\ddot{\chi} + V_X(\Theta,\dot{\Theta}) + G_X(\Theta)$

$F = J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta,\dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta)$

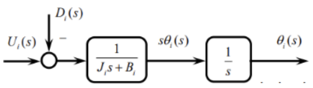
六、运动控制

1. 电枢电路方程：$L_i di_{ai}(t)/dt + R_ii_{ai}(t) = V_i(t) - K_{bi}d\theta_{mi}(t)/dt$ $\frac{\theta_i(s)}{V_i(s)} = \frac{K_{mi}/r_iR_i}{s[J_{mi}s + B_{mi} + K_{bi}K_{mi}/R_i]}$

传动机构模型：$J_{mi}d^2\theta_{mi}(t)/dt^2 + B_{mi}d\theta_{mi}(t)/dt = \tau_{mi}(t) - \tau_i(t)/r_i$ $\frac{\theta_i(s)}{\tau_i(s)} = \frac{-1/r_i^2}{s[J_{mi}s + B_{mi} + K_{bi}K_{mi}/R_i]}$

独立关节模型：

SISO 系统

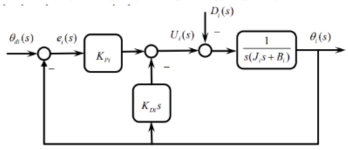


$U_i(t) = (K_{mi}/r_iR_i)V_i(t), D_i(t) = \tau_i(t)/r_i^2$

$J_i = J_{mi}, B_i = B_{mi} + K_{bi}K_{mi}/R_i$

2. ▲PD 控制

$$e_i(s) = \frac{s^2 + s(B_i+K_{Di})/J_i}{s^2 + s(B_i+K_{Di})/J_i + K_{Pi}/J_i}\theta_{di}(s) + \frac{1/J_i}{s^2+s(B_i+K_{Di})/J_i + K_{Pi}/J_i}D_i(s)$$



▲PID 控制

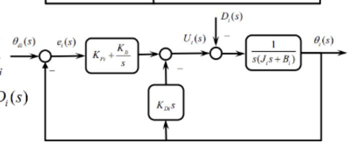
特征方程 $s^3 + s^2(B_i+K_{Di})/J_i + sK_{Pi}/J_i + K_{Ii}/J_i$

闭环系统稳定的充要条件是 $K_{Ii} < (B_i+K_{Di})K_{Pi}/J_i$

消除稳态误差

▲引入前馈可使 $e_i(s) = \frac{1/J_i}{s^2+s(B_i+K_{Di})/J_i + K_{Pi}/J_i}D_i(s)$

偏差与设定值变化无关



3. 多变量模型：$W(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = v$ $W(\theta) = M(\theta) + J$ $\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot{\theta}\\ W^{-1}K_pe - W^{-1}(K_D + C)\dot{\theta}\end{bmatrix}$

▲重力补偿 PD 控制：$v = K_Pe - K_D\dot{\theta} + G(\theta)$ 得到闭环方程

▲李雅普诺夫稳定性判据：对系统 $\dot{x} = f(x)$ 有平衡状态 w=0，若存在 $V(x)$ 满足 $V(x)$ 正定、$\dot{V}(x)$ 半负定、系统任意非零状态出发的轨迹 $\dot{V}(x)$ 不恒为 0、当 $x\to\infty$ 时 $V(x)\to\infty$，则该自治系统在 w=0 是大范围渐近稳定的。

▲引理：若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是反对称矩阵，则 $\forall x\in\mathbb{R}^n$，有 $x^TAx = 0$

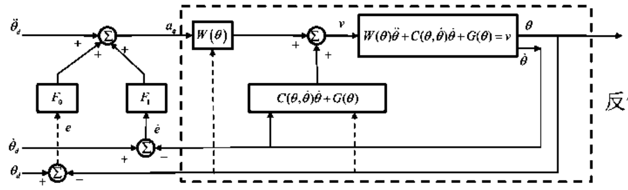
4. 逆动力学控制：$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$ $f = -k_px - k_v\dot{x}$ $m\ddot{x} + (b+k_v)\dot{x} + (k+k_p)x = 0$

α－β 分解运动控制：分解成模型控制 β（反馈线性化）+位置校正 α 两部分

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$ $\beta = -b\dot{x} - kx, \alpha = m, f' = -k_v\dot{x} - k_px$

转化为单位质量模型 $a_q = \ddot{\theta}_d + F_0(\theta_d - \theta) + F_1(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$ $W(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = v$

使用前馈+PD 控制的逆动力学控制 内环↑ 外环→ $v = W(\theta)a_q + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta)$



反馈线性化

▲鲁棒逆动力学控制：内环控制律：$v = \hat{W}(\theta)a_q + \hat{C}(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + \hat{G}(\theta)$

外环控制律：$a_q = \ddot{\theta}_d + F_0(\theta_d - \theta) + F_1(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + \delta a$ 估计值不变 以不变应对不确定性

▲自适应逆动力学控制：测量 $\ddot{\theta}$，$\hat{W}(\theta)$ 可逆 内环控制律 $v = \hat{W}(\theta)a_q + \hat{C}(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + \hat{G}(\theta)$

参数线性化 $W(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = Y(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})\Theta$ 外环控制律 $a_q = \ddot{\theta}_d + F_0(\theta_d - \theta) + F_1(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$

构造 $\hat{W}(\theta)\ddot{\theta} + \hat{C}(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + \hat{G}(\theta) = Y(\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})\hat{\Theta}$ 估计值变化 以变化应对不确定性

▲基于无源性的逆动力学控制：不测量 $\ddot{\theta}$，不要求 $\hat{W}(\theta)$ 可逆

$W(\theta)a_q + C(\theta,\dot{\theta})v_q + G(\theta) = X(\theta,\dot{\theta},v_q,a_q)\Theta$ $\hat{W}(\theta)a_q + \hat{C}(\theta,\dot{\theta})v_q + \hat{G}(\theta) = X(\theta,\dot{\theta},v_q,a_q)\hat{\Theta}$

$W(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = v$ 控制律 $v = \hat{W}(\theta)a_q + \hat{C}(\theta,\dot{\theta})v_q + \hat{G}(\theta) + Kr$

$a_q = \ddot{\theta}_d + \Lambda(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}), v_q = \dot{\theta}_d + \Lambda(\theta_d - \theta), r = (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + \Lambda(\theta_d - \theta)$ K 和 Λ 为有正值增益的对角阵

七、力控制

若机械臂的工作需要末端执行器与工作环境发生接触，考虑力控制

1. 自然约束：由于环境限制导致的约束 人工约束：由于期望运动导致的约束

▲自然约束的力约束在 R^6 定义了一个广义表面，自然力约束沿该表面切向，自然位置约束沿该表面法向；人工力约束沿该表面法向，人工位置约束沿该表面切向。

▲无接触状态，自然约束都是力约束，即所有约束力都是零，可以在 6 个自由度方向上运动。在存在自然力约束的方向进行操作臂的位置控制。

▲黏在墙面上，操作臂不能自由改变位置。有 6 个自然位置约束，可以在 6 个自由度上对目标施加力和力矩。在存在自然位置约束的方向进行操作臂的力控制。

2. 对于系统 $f = m\ddot{x} + k_ex + f_{dist}$，控制 $f_e = k_ex$

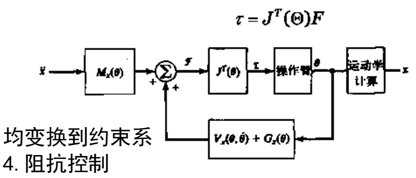
设计控制律 $f = mk_e^{-1}[\ddot{f}_d + k_{vf}\dot{e}_f + k_{pf}e_f] + f_e + f_{dist}$，误差较大

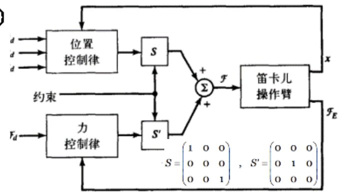
设计控制律 $f = mk_e^{-1}[\ddot{f}_d + k_{vf}\dot{e}_f + k_{pf}e_f] + f_d$ 采用速度测量 $f = m[k_{pf}k_e^{-1}e_f - k_{vf}\dot{x}] + f_d$

3. 力-位混合控制框图 采用对角矩阵选择控制模式

笛卡尔空间解耦控制 $F = M_\chi(\Theta)\ddot{\chi} + V_\chi(\Theta,\dot{\Theta}) + G_\chi(\Theta)$

$\tau = J^T(\Theta)F$





均变换到约束系

4. 阻抗控制

设计控制器使交互力与机械臂位置之间呈现出期望的关系，从而实现柔顺控制。

适用于要求接触力“保持比较小的状态”，但不要求跟踪力轨迹的任务。

不显式给出环境形变与接触力之间的关系。

▲系统 $M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F$ 的机械阻抗为 $Z(s) = \frac{F(s)}{V(s)} = Ms + B + \frac{K}{s}$

低频时的响应主要由弹性项（K）决定，而高频时的响应主要由惯性项（M）决定。

理想的位置控制器对应高阻抗，理想的力控制器对应低阻抗。

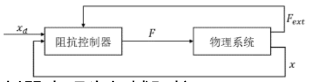
▲考虑运动方程为 $m\ddot{x} = F + F_{ext}$ 的质量块。F 是控制力，Fext 是环境施加的外力。

令 $\tilde{x}(t) = x(t) - x_d(t)$，阻抗控制目标为 $M_d\ddot{\tilde{x}} + B_d\dot{\tilde{x}} + K_d\tilde{x} = F_{ext}$

阻抗控制律可设计为 $F = m\ddot{x}_d + (m - M_d)\ddot{\tilde{x}} - (B_d\dot{\tilde{x}} + K_d\tilde{x})$

通过测量外力，改控制率为

$$F = m\ddot{x}_d - \frac{m}{M_d}(B_d\dot{\tilde{x}} + K_d\tilde{x}) + \left(\frac{m}{M_d} - 1\right)F_{ext}$$



控制器输入为运动信号，输出为力信号，因此控制器表现为机械阻抗

物理系统输入为力信号而输出运动信号，表现出导纳的特性

▲总结：关节空间动力学 $M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta) = \tau + J_a^T(\Theta)F_a$ （分析雅可比）

转化为笛卡尔空间动力学 $M_X(\Theta)\ddot{X} + V_X(\Theta,\dot{\Theta}) + G_X(\Theta) = J_a^{-T}(\Theta)\tau + F_a$

反馈线性化 $\tau = J_a^T(\Theta)[M_X(\Theta)a + V_X(\Theta,\dot{\Theta}) + G_X(\Theta) - F_a] \to \ddot{X} = a$

设计动态阻抗模型 $M_m(\ddot{X} - \ddot{X}_d) + D_m(\dot{X} - \dot{X}_d) + K_m(X - X_d) = F_a$ 期望惯量、阻尼、刚度

设定 $a = \ddot{X}_d + M_m^{-1}[D_m(\dot{X}_d - \dot{X}) + K_m(X_d - X) + F_a]$

以互补的方式匹配环境的动态特征，避免环境的未知几何特征造成的大冲击力

在预期会与环境发生接触的方向上选择较大的 M 和较小的 K，使得接触力不会太大；

在预期能够自由运动的方向上选择较小的 M 和较大的 K，以减小轨迹跟踪的误差

关节空间控制律：$\tau = M(\Theta)J_a^{-1}(\Theta)\{\ddot{X}_d - \dot{J}_a(\Theta)\dot{\Theta} + M_m^{-1}[D_m(\dot{X}_d - \dot{X}) + K_m(X_d - X)]\}$

$+ V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta) + J_a^T(\Theta)[M_X(\Theta)M_m^{-1} - I]F_a$

消除笛卡尔空间量：$J_a^T(\Theta)[M_X(\Theta)M_m^{-1} - I]F_a = [M(\Theta)J_a^{-1}(\Theta)M_m^{-1} - J_a^T(\Theta)]F_a$

若将期望的惯量矩阵取为机械臂的笛卡尔惯量矩阵，消除了接触力反馈项

$\tau = M(\Theta)J_a^{-1}(\Theta)\{\ddot{X}_d - \dot{J}_a(\Theta)\dot{\Theta}\} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta) + J_a^T(\Theta)[D_m(\dot{X}_d - \dot{X}) + K_m(X_d - X)]$

▲导纳控制：基于测量的外力来控制位置 $\ddot{x}_m = \ddot{x}_d + \frac{1}{M_d}(F_{ext} - B_d\dot{\tilde{x}} - K_d\tilde{x})$

5. 力位混合与阻抗控制的对比

机器人与刚性环境的接触限制了运动自由度/环境为发生微小有限形变机械系统

试图违反环境几何约束，受到力/耦合动态系统（机器人和环境）之间交互产生力

任务空间被划分为正交子空间，分别控制/控制器指定力与运动之间动态关系

附录：参考单词

centrifugal 离心的 coefficient 系数 compliant 遵从的 complementary 互补的
configuration 配置 coordinate 坐标 decouple 分离 derive 得到
equilibrium 平衡 horizontal plane 水平面 instantaneous 立即的
impedance 阻抗 orthogonal 正交的 parabolic 抛物线的 perspective 观点
perpendicular 垂直的 prismatic 棱柱体的 proportional 成比例的
quadratic 平方的 rationale 根本原因 redundant 冗余的 revolute 旋转的
spatial 空间的 superimpose 叠加 symbolize 象征 the rest 剩下的