1.采样过程与采样定理

(1) 周期单位脉冲序列:

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega_s t}$$

~~频域~~ 采样信号:

$$e^*(t)=e(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=e(t)\delta_T(t)$$

$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}E(s-j\omega_s k)$$

(2) 零阶保持器:

传递函数 $H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$

幅频: 使振幅增加了T倍, 补偿了$\frac{1}{T}$衰减

相频: 正比于频率的相位滞后, 闭环稳定性下降。

二、Z变换:

(1) 定义: $Y^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)e^{-kTs}$, 令 $z=e^{sT}$

则 $Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)z^{-k}$

(2) Z变换方法:

① 定义法, 级数求和。② 部分分式, 查表

③ 留数法, $Y(z)=\hat{Y}(z)+\beta$

$$\hat{Y}(z)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(r_i-1)!}\times\frac{d^{r_i-1}}{ds^{r_i-1}}\left[(s-p_i)^{r_i}Y(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\right\}\Bigg|_{s=p_i}$$

其中 $\beta=\lim_{s\to\infty}sY(s)-\lim_{z\to\infty}\hat{Y}(z)$

(3) Z变换性质:

① 若当 $t<0$ 时 $y(t)=0$, 则 $Z[y(t-kT)]=z^{-k}Y(z)$

② $Z[y(t+kT)]=z^kY(z)-z^ky(0)-z^{k-1}y(T)-\cdots-zy[(k-1)T]$.

③ 复位移: $Z[e^{\mp at}y(t)]=Y[ze^{\pm at}]$

④ 初值定理: 当 $\lim_{z\to\infty}Y(z)$ 存在时, 有 $y(0)=\lim_{z\to\infty}Y(z)$

⑤ 终值定理: 若 $(1-z^{-1})Y(z)$ 在单位圆上和单位圆外无极点, 则 $y(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)Y(z)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})Y(z)$

(4) Z反变换:

① 长除法: 例如 $Y(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=z^{-1}+3z^{-2}+7z^{-3}+\cdots$

则 $y^*(t)=0+\delta(t-T)+3\delta(t-2T)+7\delta(t-3T)$

② 部分分式展开, 查表.

③ 留数法:

$y(kT)=\sum_{i=1}\mathrm{Res}\left[Y(z)z^{k-1}\right]_{z=p_i}$

单极点: $\lim_{z\to p_i}\left[(z-p_i)Y(z)z^{k-1}\right]$

重极点, $\lim_{z\to p_r}\frac{1}{(r-1)!}\times\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[(z-p_r)^rY(z)\cdot z^{k-1}\right]$

(5) 常用Z变换:

Y(s)	Y(z)	y(kT)	Y(s)	y(kT)	Y(z)
1	1	$\delta(kT)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
e^{-nTs}	z^{-n}	$\delta[(k-n)T]$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akT$	$\frac{z^2-z\cos aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
	$\frac{z}{z-1}$	1			
	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	kT			
	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{(kT)^2}{2!}$			
	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	e^{-akT}			

差分方程的求解: Z变换法求解

零阶保持器的Z变换:

$\boxed{ZOH}\rightarrow\boxed{G_p(s)}\rightarrow$

$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$

离散状态方程求解:

$zX(z)-zX(0)=AX(z)+BU(z)$

$\Rightarrow X(z)=(zI-A)^{-1}zX(0)+(zI-A)^{-1}BU(z)$

6.脉冲传递函数求状态方程

① 直接分解: $Y(z)=b_2U(z)+\tilde{Y}(z)$

$$\frac{\tilde{Y}(z)}{(b_1-a_1b_2)z^{-1}+(b_0-a_0b_2)z^{-2}}=\frac{U(z)}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}=Q(z)$$

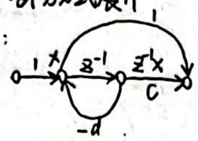
输入端: $Q(z)=U(z)-a_1z^{-1}Q(z)-a_0z^{-2}Q(z)$

输出端: $\tilde{Y}(z)=\cdots$

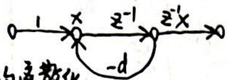
② 并联分解: 部分分式展开

③ 串联分解:

$\frac{z+c}{z+d}=\frac{1+cz^{-1}}{1+dz^{-1}}$:



$\frac{1}{z+d}=\frac{z^{-1}}{1+dz^{-1}}$:



7. 连续状态方程的离散化:

$x(k+1)=G(T)x(k)+H(T)u(k)$

其中 $G(T)=e^{AT}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$

$H(T)=\int_0^T e^{A\tau}Bd\tau$

8. 离散系统稳态误差: 利用终值定理计算

稳态误差系数: $K_p=\lim_{z\to1}G(z)$,

$K_v=\frac{1}{T}\lim_{z\to1}\left[\frac{z-1}{z}G(z)\right]$, $K_a=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to1}\left[\frac{(z-1)^2}{z^2}G(z)\right]$

9. Z域分析设计

(1) 双线性变换: 令 $z=\frac{w+1}{w-1}$ 即 $w=\frac{z+1}{z-1}$

变换后可对w采用劳斯判据判断稳定性。

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & c_1=-\frac{a_na_{n-3}-a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1}} \\ s^{n-2} & c_1 & c_2 & & c_2=-\frac{1}{a_{n-1}}(a_na_{n-5}-a_{n-1}a_{n-4}) \end{array}$$

(2) 根轨迹: 分支数为 $\max(m,n)$, 实轴上某一区域, 若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数, 则该区域必为根轨迹。渐近线: $\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$, $\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}$

分离点: 令 $W(s)=-K^*$, 则 $\frac{dW(s)}{ds}\Big|_{s=d}=0$ 的解为~

~~与虚轴~~ (3) 频域分析: 令 $z=\frac{w+1}{w-1}$, $1+G(w)=0$

再令 $w=jw'$ 代入 (w'为伪频率), 得 $1+G(jw')=0$

$N=P-Z$, $N<0$为顺时针, P为开环不稳定极点个数. 圆弧上频率顺时针增加.

相位裕度γ, w_c为截止频率, $|G(jw_c)H(jw_c)|=1$

$\gamma=180^\circ+\angle G(jw_c)H(jw_c)$, ※最小相位$\gamma>0$稳定

幅值裕度h: 穿越频率w_x. $\angle G(jw_x)H(jw_x)=(2k+1)\pi$

$h=\frac{1}{|G(jw_x)H(jw_x)|}$, $h>1$稳定

(3) 指标:

谐振峰值: $M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$, $\zeta\le0.707$

上升时间 $T_r=\frac{\pi-\arccos\zeta}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, 峰 $T_p=\frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\sigma=\exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$, $T_s=\frac{3}{\zeta w_n}$ (Δ取5%)

$T_s\approx\frac{4}{\zeta w_n}$ (Δ取2%), 衰减比 $n=\exp\left(\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

10. 最小拍系统: 闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$

偏差脉冲传递函数 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$

$e(\infty)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\Phi_e(z)X(z)$, $X(z)=\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}$

取 $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^m$

11. 能控性

(1) 定义: 对系统(A,B,C,D)如果~~存在~~任意初始状态 $x(0)\in R^n$ 和任意终端状态 $x_f\in R^n$, 存在 $t_f\in(0,+\infty)$ 和控制作用 $u(t)$ 使得 $x(t_f)=x_f$. 称系统(A,B,C,D)完全能控.

(2) 能控判据: 能控矩阵 $Q_c=(b,Ab,A^2b\cdots A^{n-1}b)$

① 完全能控 $\Leftrightarrow$ Q_c行满秩

② $G_{xu}=(sI-A)^{-1}b$ 没有零极点相消

③ PBH秩判据: 对A的所有特征值λ_i有 $\mathrm{rank}[\lambda_iI-A\ \ B]=n$

④ A为对角形, 完全能控 $\Leftrightarrow$ B不含全0行

⑤ A为约当形, 完全能控 $\Leftrightarrow$ B_{i1}末行. B_{i2}末行…B_{ir}末行线性无关, 即同一特征值的不同约当块末行, 全0相关

12. 能观性:

(1) 定义: 对系统A.B.C.D, 如果存在 $t_f\in(0,+\infty)$ 根据$[0,t_f]$间的输出$y(t)$和控制作用$u(t)$能确定初始状态$x(0)$, 则称~完全~

(2) 能观判据: 能观矩阵 $Q_o=[C\ CA\ CA^2\cdots]^T$

① Q_o列满秩

② PBH秩判据: 对所有特征值 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}C\\ \lambda I-A\end{bmatrix}=n$

③ 对角形A: C不含全0列

④ 约当型A: C_{i1}. $C_{i2}\cdots$ 首列线性无关.

13. 非奇异线性变换:

① 令 $x(t)=T\bar{x}(t)$, 则 $\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}\bar{x}(t)+\bar{B}u(t)$

$y(t)=\bar{C}\bar{x}(t)+Du(t)$, 其中 $\bar{A}=T^{-1}AT$,

$\bar{B}=T^{-1}B$, $\bar{C}=CT$

② 化为能控标准型 $A_c=\begin{bmatrix}0&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}$

$b_c=T_c^{-1}b=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$

$$T_c=Q_cL=Q_c\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_{n-1}&1\\ \alpha_2&\alpha_3&&\cdot&\\ \alpha_3&&\cdot&&\\ \vdots&\cdot&&0&\\ \alpha_{n-1}&1&&&\\ 1&&&&\end{bmatrix}$$

③ 化为能观标准型

$A_o=\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&-\alpha_0\\1&&&-\alpha_1\\&\ddots&&\vdots\\0&&1&-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$, $c_o=CT_o=[0\cdots0\ 1]$

$T_o^{-1}=LQ_o=\begin{bmatrix}\alpha_1\ \alpha_2\\ \text{同上}L\end{bmatrix}Q_o$

14. 能控子空间分解:

$$\hat{A}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\hat{A}_c&\hat{A}_{c\bar{c}}\\0&\hat{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{array}{l}p\\n-p\end{array}\\ \ \ p\qquad n-p\end{array};\quad \hat{B}=\begin{bmatrix}\hat{B}_c\\0\end{bmatrix}\begin{array}{l}p\\n-p\end{array}$$

$$\hat{C}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\hat{C}_c&\hat{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\\ p\qquad n-p\end{array}$$ 设Q_c秩为p

从Q_c选取p列向量, 再构造n-p列向量使 $T=[T_1\ T_2]$ 满秩.

15. 能观子空间分解:

$$\hat{A}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\hat{A}_o&0\\ \hat{A}_{o\bar{o}}&\hat{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{array}{l}q\\n-q\end{array}\\ \ \ q\qquad n-q\end{array}\quad \hat{B}=\begin{bmatrix}\hat{B}_o\\ \hat{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{array}{l}q\\n-q\end{array}$$

$\hat{C}=[\hat{C}_o\ \ 0]$ 设Q_o秩为q

$T^{-1}=\begin{bmatrix}T_1\\T_2\end{bmatrix}$ 构造类似, 选行向量

16. 内稳定与外稳定:

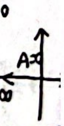
传递函数G(s)为系统能控能观子空间的传递函数, G(s)稳定为外稳定(A,B,C,D)稳定为内稳定($|\lambda I-A|=0$的根

17. 状态反馈与状态观测:

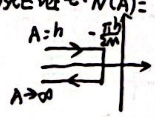
$K_p=K_cT_c^{-1}$, $H=T_oH_o$

18. 描述函数法:

(1) 理想继电: $N(A)=\frac{4M}{\pi A}$

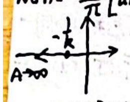


(2) 死区继电: $N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2}$ $(A\ge h)$



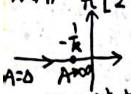
(3) 饱和特性：

$N(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\ (A\geq a)$



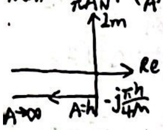
(4) 死区特性：

$N(A)=\frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\Delta}{A}-\frac{\Delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right]\ (A\geq\Delta)$



(5) 滞环继电：

$N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{A}\right)^2}-j\frac{4Mh}{\pi A^2}$



19. 视察法.

若仅有单回路，且前向通路上有采样

可用～法，$Y(z)=\frac{G_f(z)}{1+G_0(z)}$（负反馈）

$G_f(z)$：前向通路输出量的z变换，包括$R(s)$

$G_0(z)$：开环脉冲传递函数，从任一采样器断开，走一周

20. 能控、能观标准型实现

$G(s)=b_n+\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$

能控：A_c略，$b_c=[0\cdots 0\ 1]^T$

$C_c=[\beta_0\ \beta_1\cdots\beta_{n-1}]$

能观：A_o略，$b_o=[\beta_0\ \beta_1\cdots\beta_{n-1}]^T$

$C_o=[0\cdots 0\ 1]$

正则：$Y(s)=\sum\frac{C_i}{s-\lambda_i}\times U(s)$

$A=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$，$C=[C_1\ C_2\cdots C_n]$

21. L变换的终值定理

$e(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)$

22. 能观，全维观测器

$|sI-(A-HC)|$ 直接$\Delta\alpha l$法

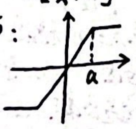
23. 状态观测反馈系统（分离定理）

$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{\hat{x}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&-BK\\HC&A-BK-HC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\\hat{x}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}u(t)$

$y(t)=[C\ \ -DK]\begin{bmatrix}x(t)\\\hat{x}(t)\end{bmatrix}+Du(t)$

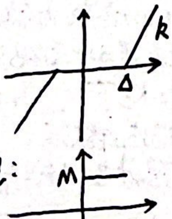
24. 非线性环节：

1) 饱和特性：

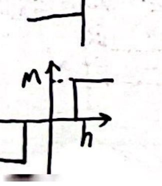


斜率k

2) 死区特性：



3) 理想继电：



4) 死区继电：

25. 李雅普诺夫稳定性

(1) 定义：设x_e是自治系统的平衡状态，如果对任意小的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对任意初始状态$x_0\in S_\delta(x_e)$和任意$t\in[0,+\infty)$有$x(t,x_0)\in S_\varepsilon(x_e)$则称$x_e$是李雅普诺夫意义下稳定的

(2) 渐近稳定：$\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t,x_0)-x_e\|\to 0$

(3) 判定方法：

① 间接法：将非线性系统在x_e处泰勒展开，

令$\tilde{x}=x-x_e$，则$\dot{\tilde{x}}=A\tilde{x}$

$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1}{\partial x_2}&\cdots\\\frac{\partial f_2}{\partial x_1}&&\\\vdots&&\end{bmatrix}$ 雅可比矩阵

渐近稳定$\Leftrightarrow$A的全部特征值位于复平面左半平面

若有0 则由高阶项$B(x,x_e)$决定

② 直接法：

$P=\begin{bmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1n}\\\vdots&&\\p_{n1}&&\end{bmatrix}$，$V(x)=x^TPx$

P正定$\Leftrightarrow$P的各阶顺序主子式均大于0

即$p_{11}>0$，$\begin{vmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{vmatrix}>0$，…$|P|>0$

若$V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，则系统在原点渐近稳定；若随着$\|x\|\to\infty$有$V(x,t)\to\infty$ 则在原点全局渐近稳定

若$V(x)$正定，$\dot{V}(x)$正定，则在原点不稳定

P负定$\Leftrightarrow$P的各阶顺序主子式负、正相间

即$p_{11}<0$，…