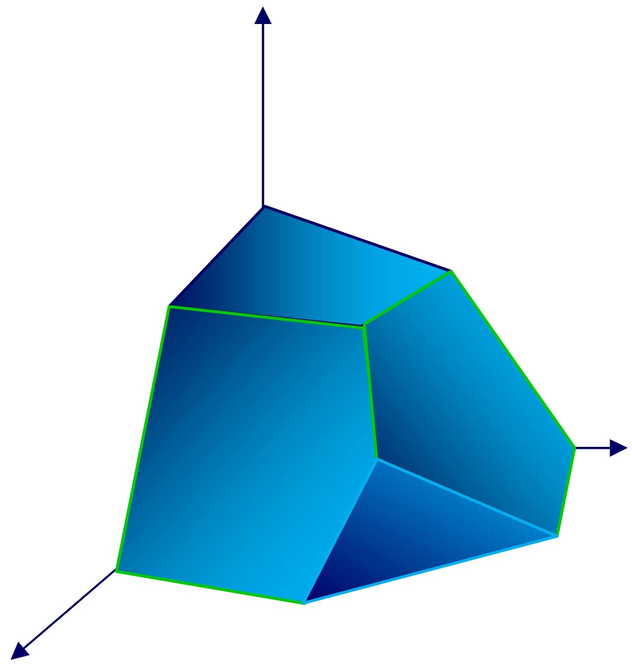
第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划问题的图解分析
- 线性规划问题的代数分析
- 单纯形法的原理与步骤
- 应用举例



线性规划问题举例

例1.　某工厂在计划期内要安排甲、乙两种产品的生产，已知生产单位产品所需的电力消耗、对污染指数的影响、相关限制以及单位产品利润如下表：

	甲	乙	相关限制
耗　电（千瓦）	1	1	6
污染指数	-1	2	8
利润（万元）	3	1	

根据工艺要求，如果乙产品的产量必须是甲产品的2倍以上，问工厂应分别生产多少单位甲、乙产品才能使工厂获利最多？

例1的数学表示

- 设变量x_1、x_2分别代表甲、乙两种产品的数量，z代表生产两种产品的利润总和。

- 目标函数： max　　　$z=3x_1+x_2$

- 约束条件：

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &\le 6\\
-x_1+2x_2 &\le 8\\
2x_1-x_2 &\le 0\\
x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

一般情况下的数学模型

$$\max(\min) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \le (=, \ge) b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \le (=, \ge) b_2 \\
& \cdots\cdots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \le (=, \ge) b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \ge (\le) 0, \; free
\end{aligned}
$$

简写形式

$$\max(\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge) b_i \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

$$x_j \ge (\le) 0, free \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

矩阵形式

$$\max(\min) z = \boldsymbol{cx}$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{Ax} \le (=, \ge) \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \ge (\le) 0, \; free$$

其中：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

向量形式

$$\max(\min) z = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

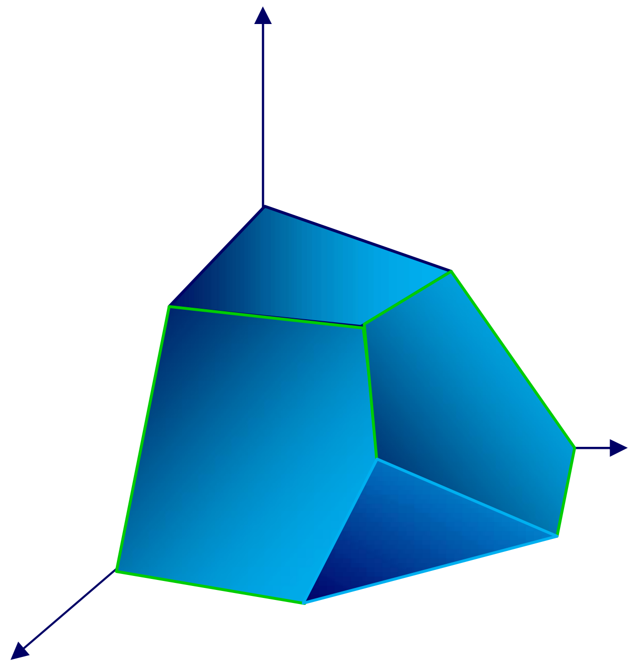
$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j \leq (=, \geq) \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq (\leq) 0, \ free$$

其中： $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{p}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

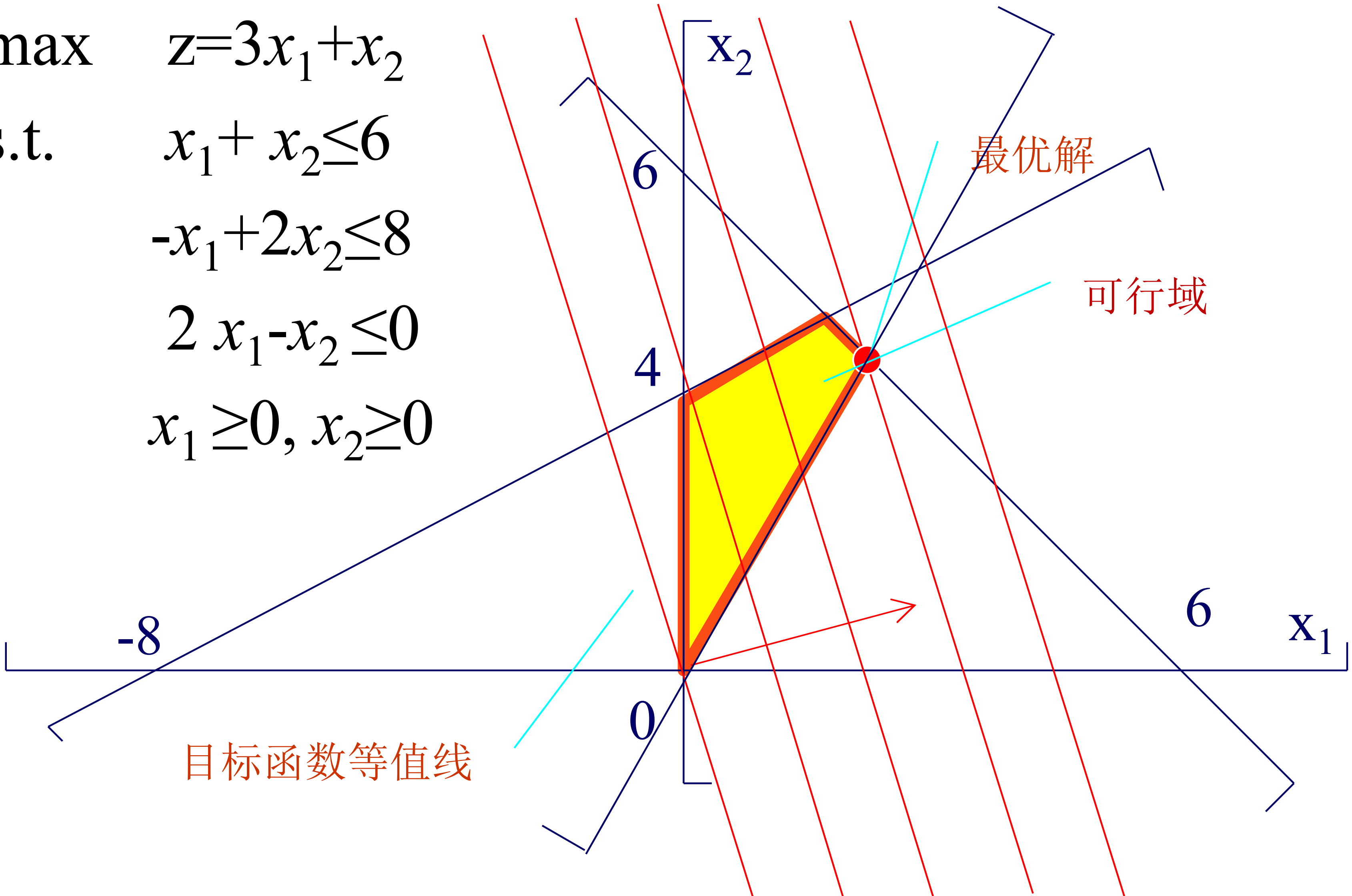
第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划问题的图解分析
- 线性规划问题的代数分析
- 单纯形法的原理与步骤
- 应用举例



线性规划的图解法

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=3x_1+x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1+x_2\leq 6 \\
& -x_1+2x_2\leq 8 \\
& 2x_1-x_2\leq 0 \\
& x_1\geq 0,\ x_2\geq 0
\end{aligned}
$$



解的分析

- 有几种最优解的可能？
- 这些最优解的共同特点是什么？

1、单个最优解

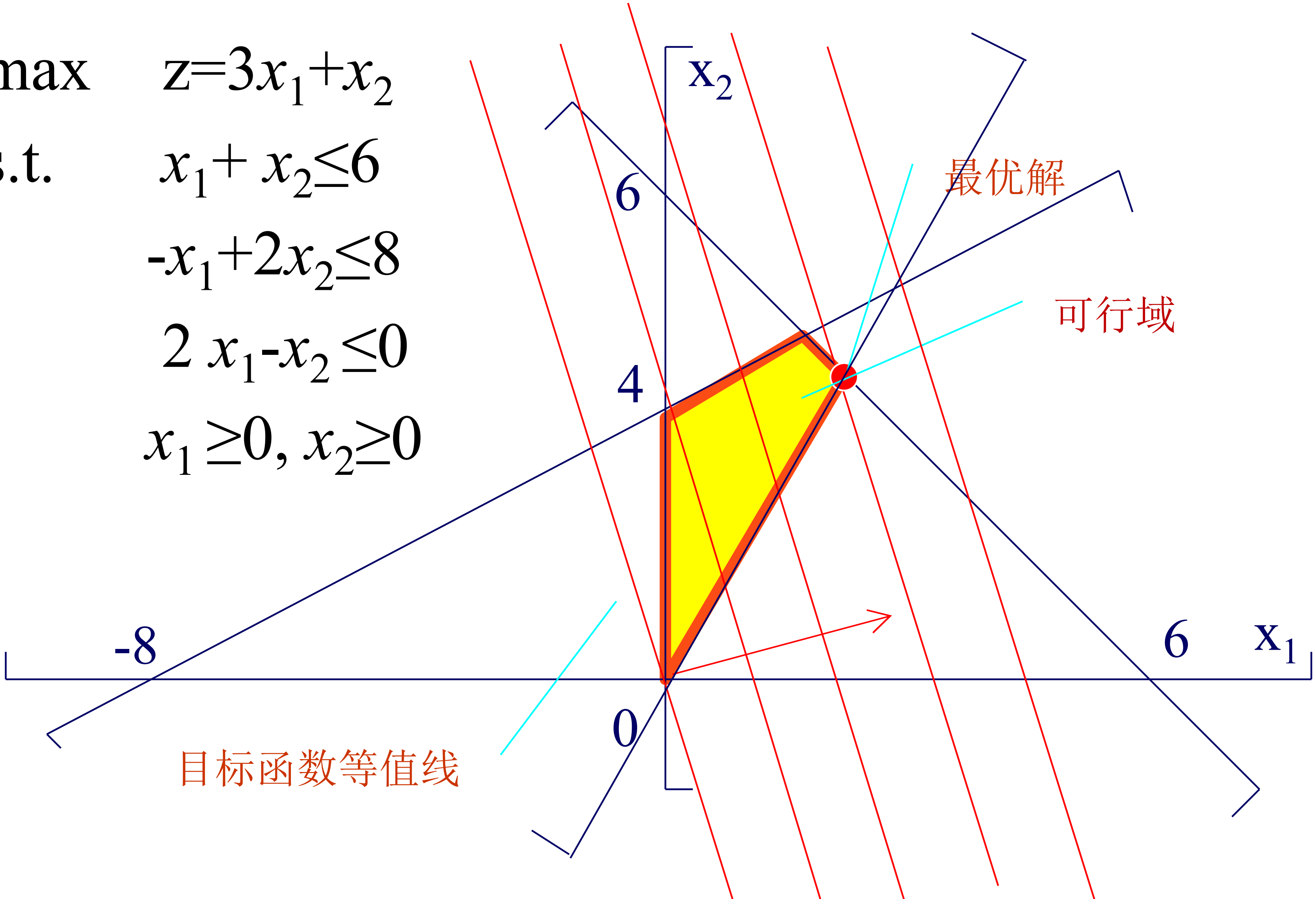
$$\max \quad z=3x_1+x_2$$

s.t. $x_1+x_2\le 6$

$-x_1+2x_2\le 8$

$2x_1-x_2\le 0$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$



2、无穷多个最优解

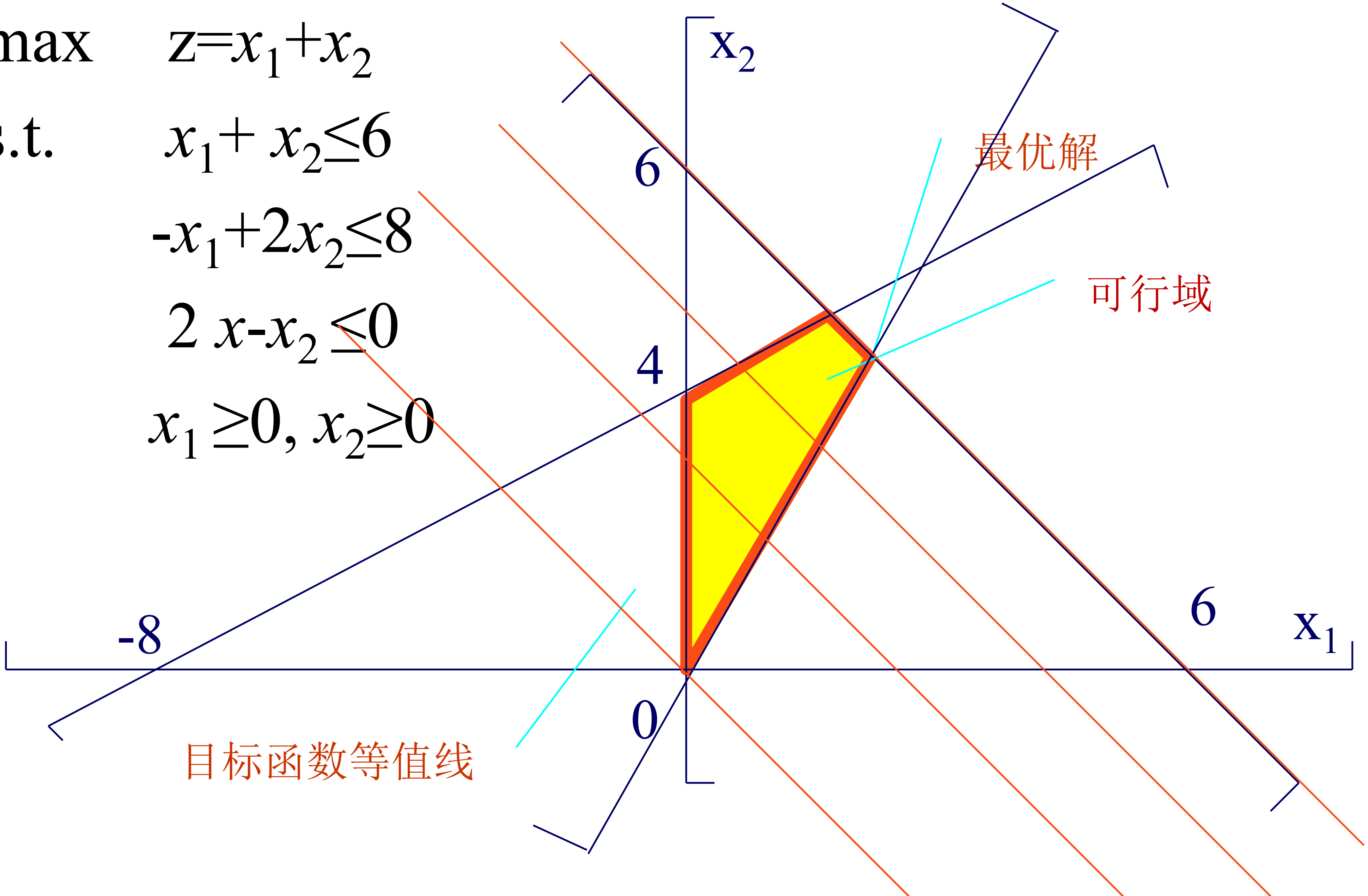
$$\max \quad z=x_1+x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+x_2\le 6$$

$$-x_1+2x_2\le 8$$

$$2\,x-x_2\le 0$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$



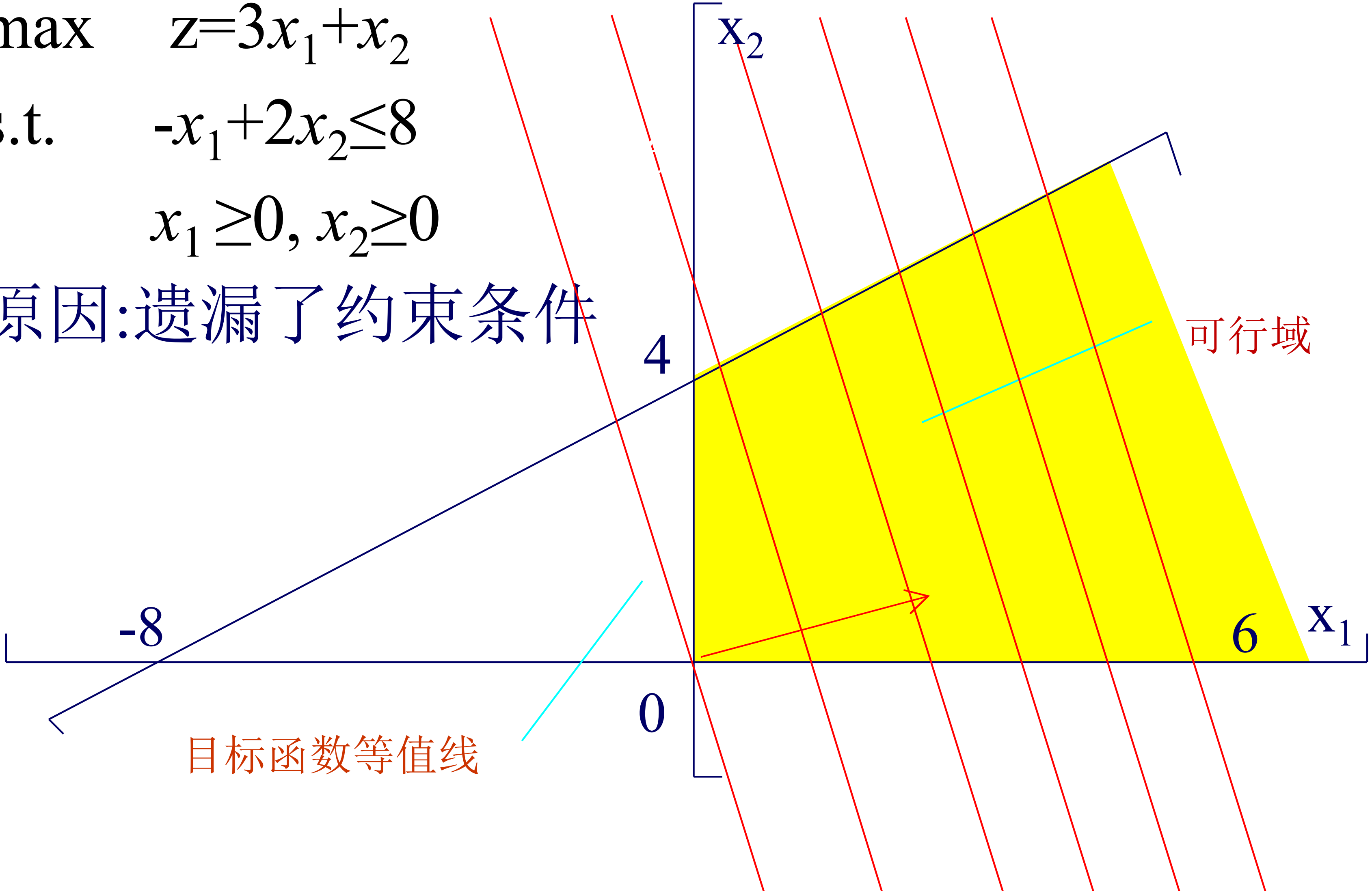
3、无界解

max $\quad z=3x_1+x_2$

s.t. $\quad -x_1+2x_2\leq 8$

$\quad x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$

原因:遗漏了约束条件



4、无可行解

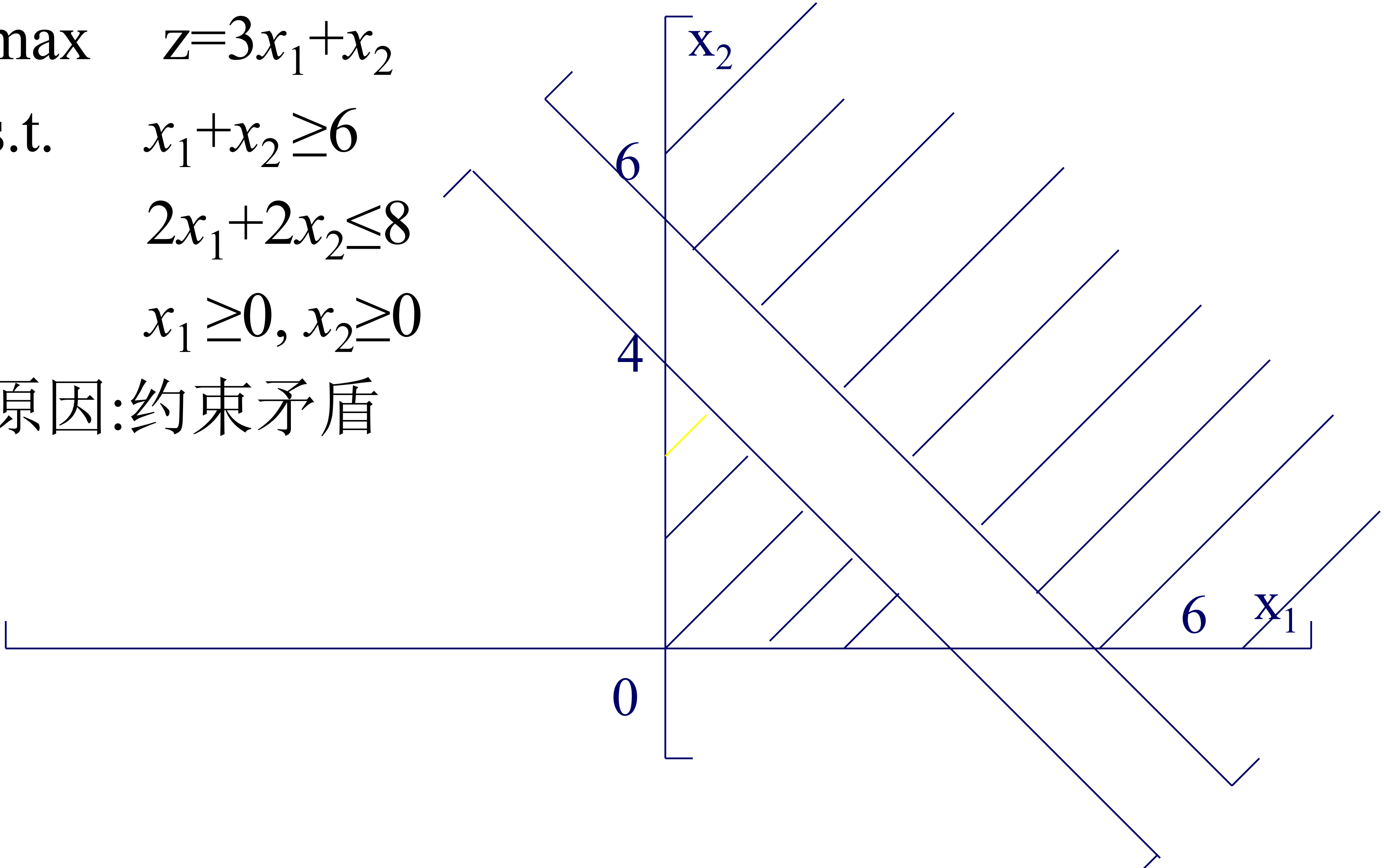
max $z=3x_1+x_2$

s.t. $x_1+x_2\geq 6$

$2x_1+2x_2\leq 8$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$

原因:约束矛盾



图解法启示

1。解的类型：唯一最优解、无穷最优解、无界解、无可行解

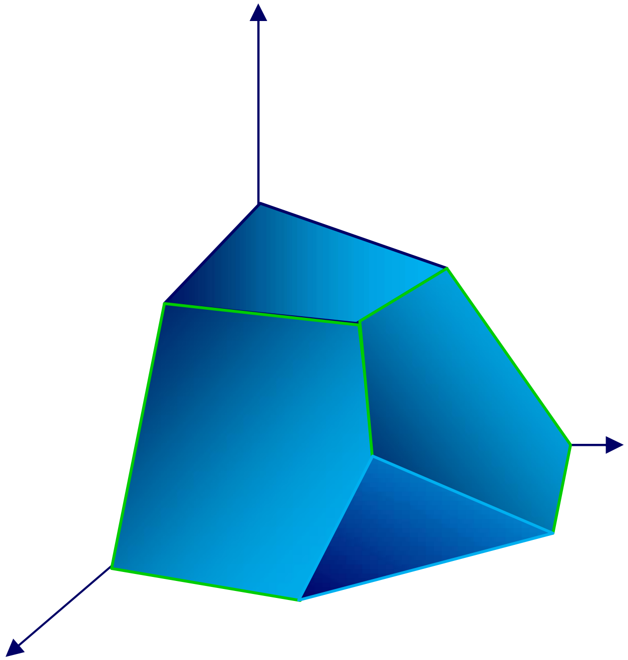
2。可行域很可能是一个凸集

3。最优解若存在，很可能就是可行域的顶点

4。必须寻找一种代数方法，来解决高维的情况。

第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划问题的图解分析
- 线性规划问题的代数分析
- 单纯形法的原理与步骤
- 应用举例



线性规划问题的代数分析

- 线性规划模型的标准形式
- 可行域的代数分析
- 顶点的代数分析

线性规划问题的标准形式

线性规划模型的结构
目标函数： max， min
约束条件：≥,=,≤
变量符号：： ≥0, unr, ≤0

$$\max(\min) \quad z = \boldsymbol{cx}$$
$$s.t. \quad \boldsymbol{Ax} \geq (=, \leq) \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq (\leq) 0, \textit{free}$$

线性规划的标准形式
目标函数：max
约束条件 ： =
变量符号 ： ≥0

$$\max \quad z = \boldsymbol{cx}$$
$$s.t. \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

标准形式的转化

变量条件的转化

$x_j \geq 0$ 不变

$x_j \leq 0$ 取 $x_j' = -x_j$

x_j 无约束 取 $x_j' \geq 0 \quad x_j'' \geq 0$

$$x_j = x_j' - x_j''$$

约束条件的转化

约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{si} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{si} = b_i$$

$x_{si} \ge 0$ 称为松弛变量

目标函数的转化

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

不变

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

取$z'=-z$

加入松弛变量x_s时

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+0x_{si}$$

非齐次线性方程组解

标准形式：

$$\max \quad z = \boldsymbol{cx}$$
$$s.t. \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

令：$\overline{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$

$rank(\boldsymbol{A}) = rank(\overline{\boldsymbol{A}}) = n$ ： 唯一解

$rank(\boldsymbol{A}) = rank(\overline{\boldsymbol{A}}) < n$ ： 无穷多个解

$rank(\boldsymbol{A}) < rank(\overline{\boldsymbol{A}})$ ： 无解

一般情况

假定：

$$rank(A) = rank(\bar{A}) = m < n$$

1、没有冗余约束

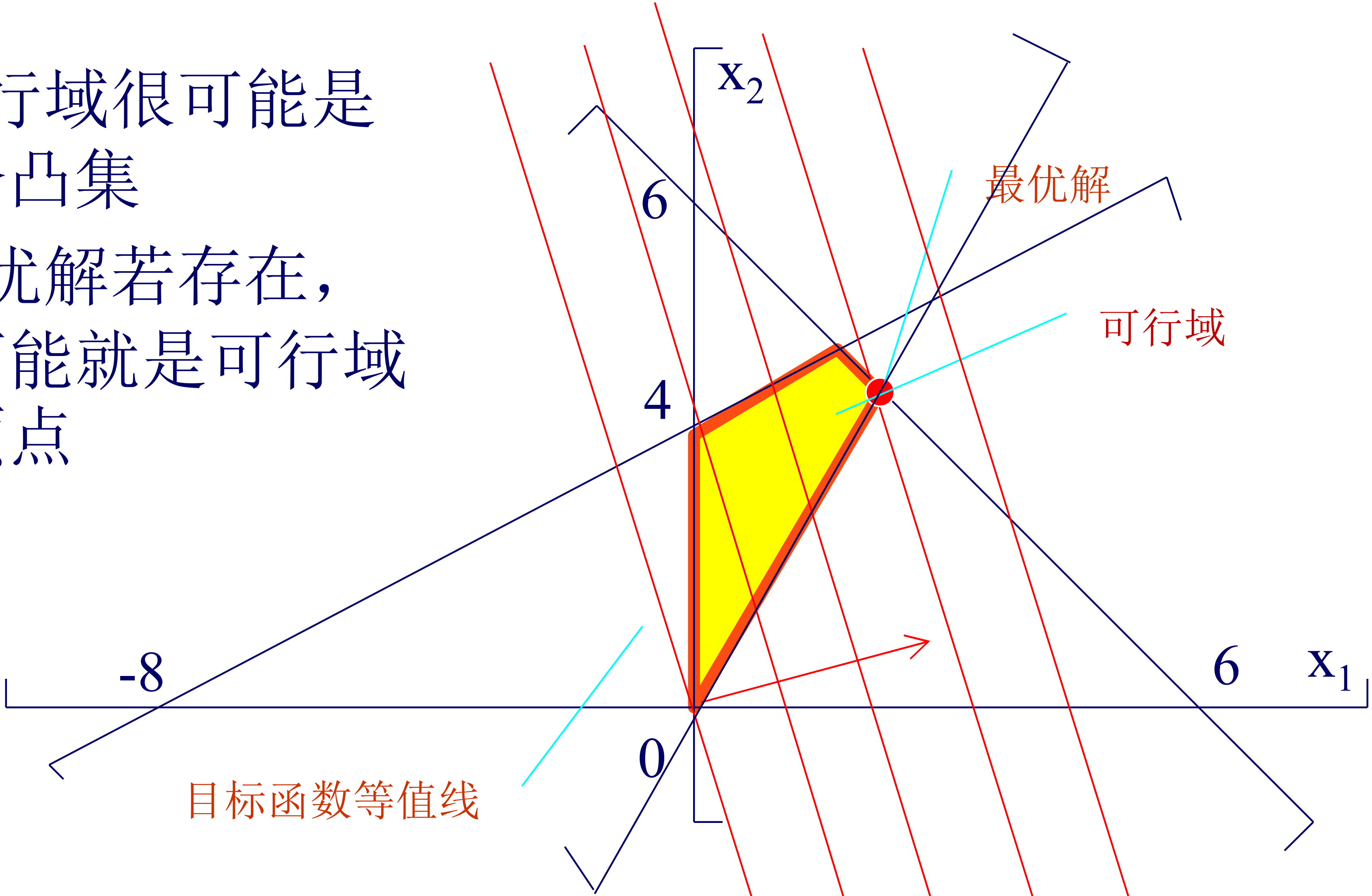
2、解有无穷多个

直接求解约束方程不可行，需要寻找其他寻优的方法！

图解法启示

1。可行域很可能是一个凸集

2。最优解若存在，很可能就是可行域的顶点



可行域的定义与性质

- 可行解：同时满足两类所有约束条件的解$\boldsymbol{x}$
- 可行域：全部可行解的集合
- 标准形式下的可行域：

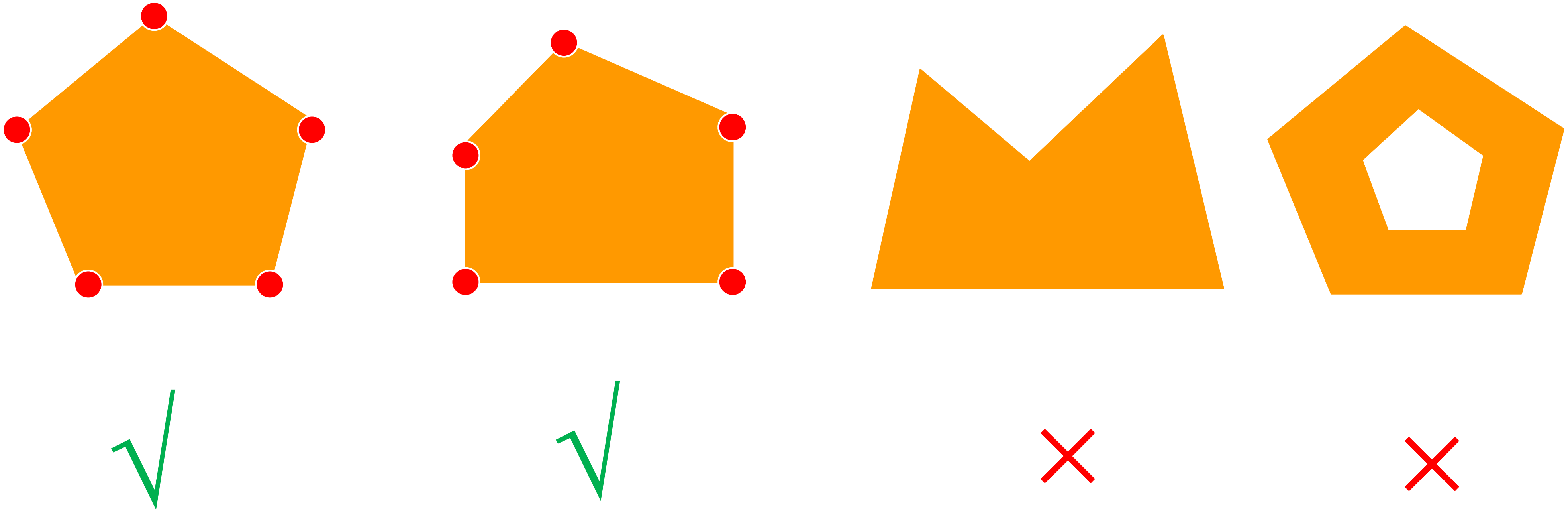
$$\Omega=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geq 0\right\}$$

定理1：线性规划问题的可行域是凸集

凸集的定义

- 凸集：$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in C$，满足$a\boldsymbol{x}_1+(1-a)\,\boldsymbol{x}_2 \in C,\ 0 \le a \le 1$

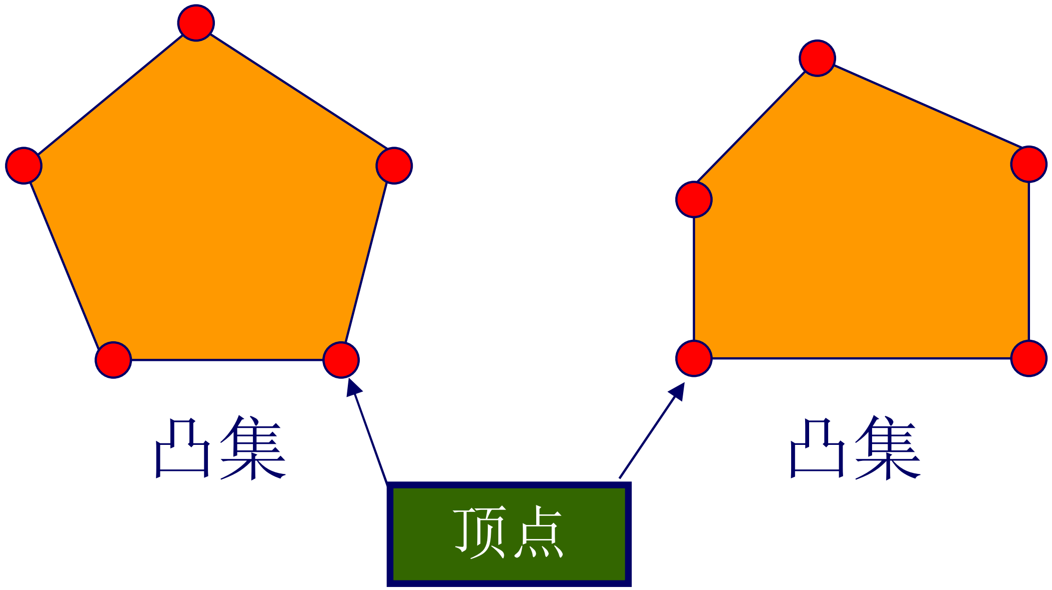
（凸组合）



定理1可根据凸集直接证明。

顶点的定义

● 顶点：如果$\boldsymbol{x}$是凸集$\boldsymbol{C}$的顶点，则不存在 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2 \in C$，使 $\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}_1+(1-a)\,\boldsymbol{x}_2$, $0< a <1$满足$\boldsymbol{x} \in C$。



问题：可行域顶点在代数上如何表示？

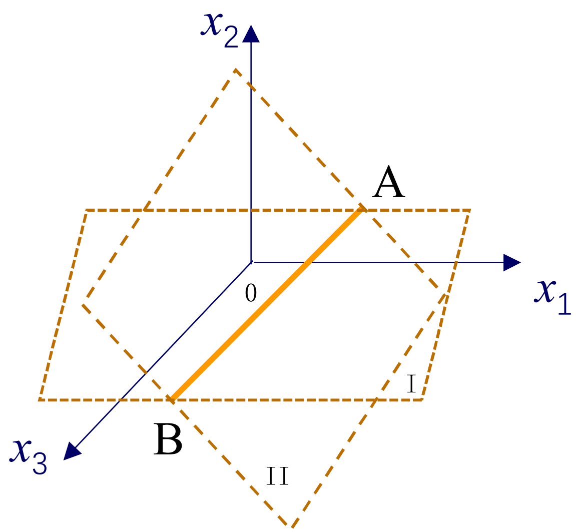
可行域顶点的几何解释

标准形式：

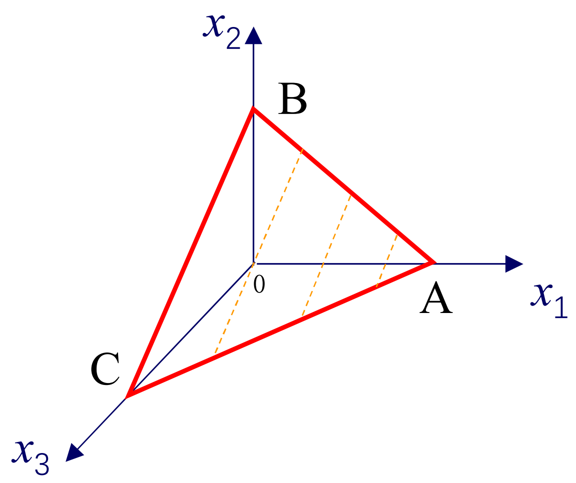
$$\max \quad z = \boldsymbol{cx}$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$ n-m维仿射超平面

$$\boldsymbol{x} \geq 0$$



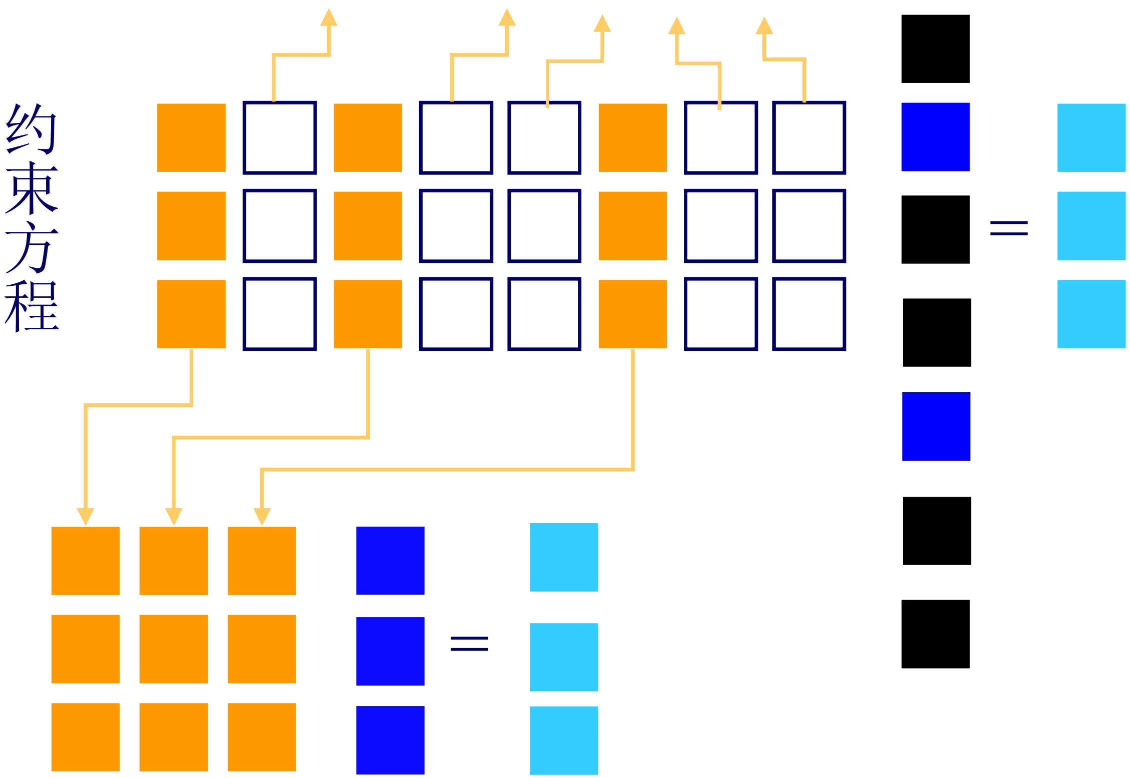
(a) 两个资源约束



(b) 一个资源约束

基与基解

①非基变量$\boldsymbol{x}_N=0$



②

如果$|\boldsymbol{B}|\neq 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{B}$为基

③基变量$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{p}_j=\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{x}_N=0$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B=\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \bar{\boldsymbol{p}}_i=\boldsymbol{b}$$

④基解（重新排序）：$[\boldsymbol{x}_B^T,\boldsymbol{x}_N^T]^T=[x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0]^T$

问题

1、非基变量有几个？

2、基变量有几个？

3、基解有几个？

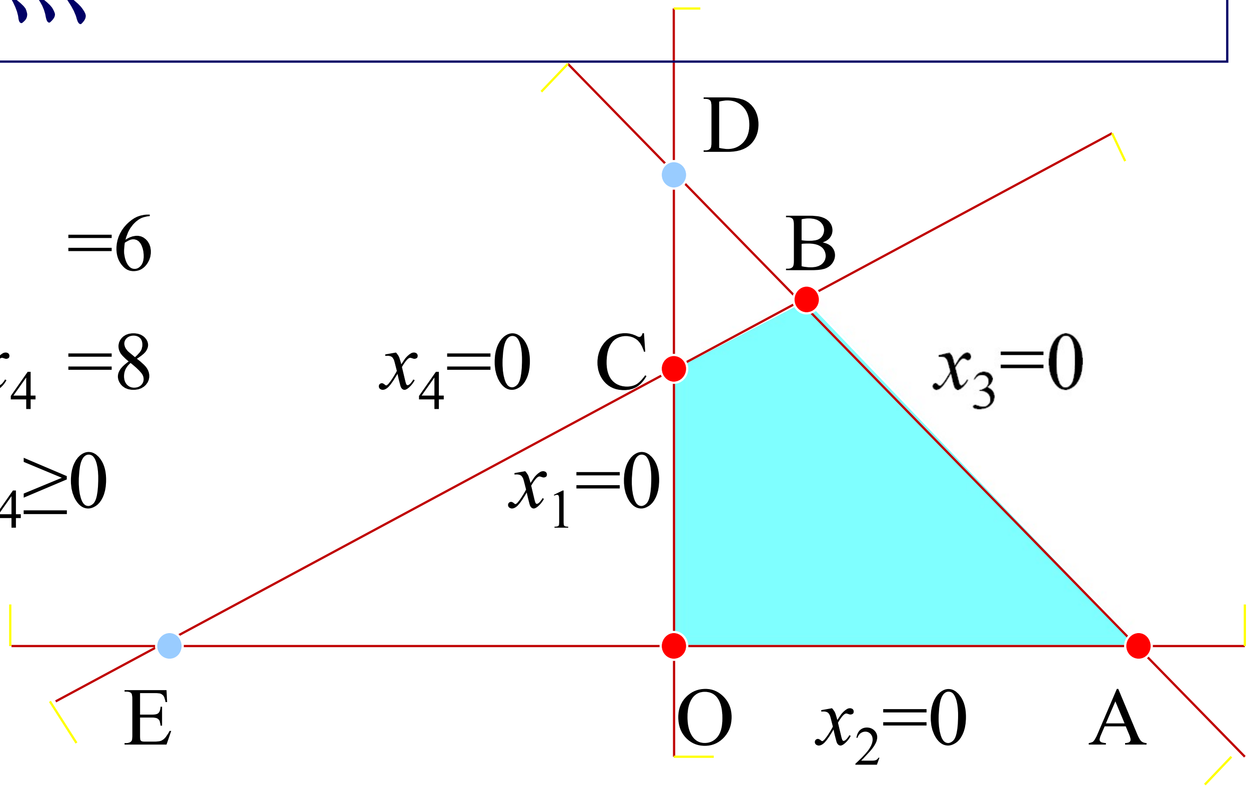
4、基解是否一定是顶点？

5、如何保证基解是顶点？

基解与顶点

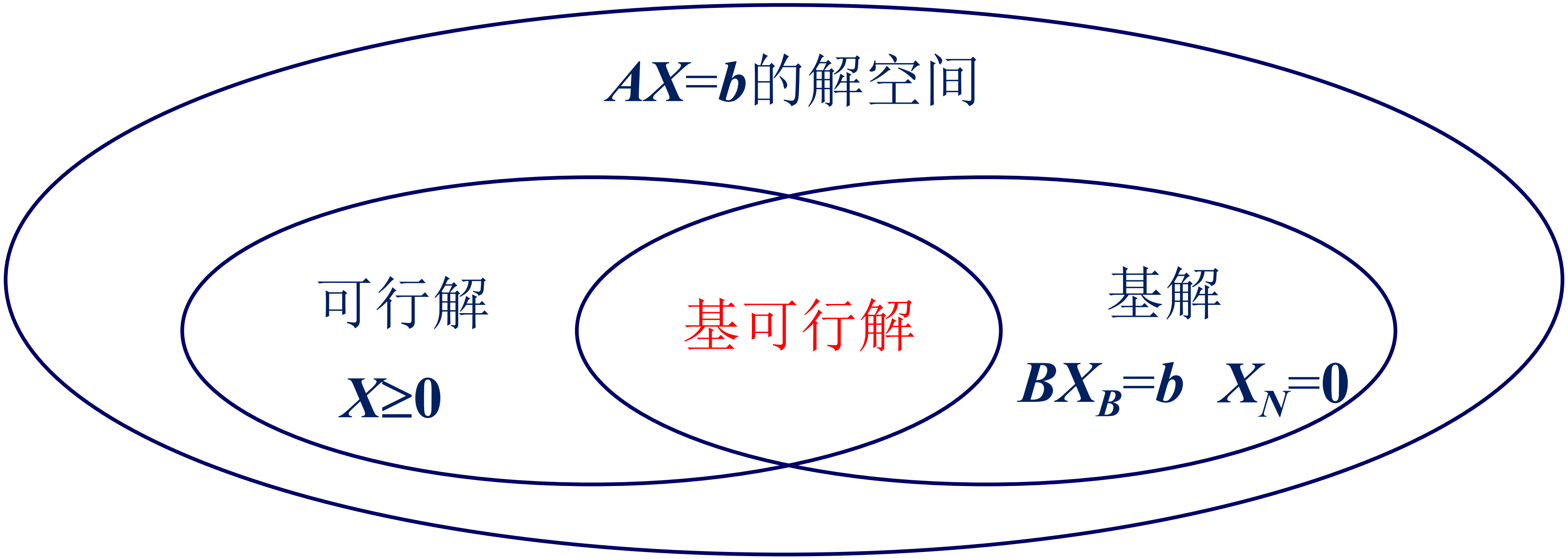
$$\max \quad z=3x_1+x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \quad &=6 \\ -x_1+2x_2 \quad +x_4 &=8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$



	O	A	B	C	D	E
x_1	0	6	4/3	0	0	-8
x_2	0	0	14/3	4	6	0
x_3	6	0	0	2	0	14
x_4	8	14	0	0	-4	0

基可行解



- 基可行解：满足可行解条件的基解。

基可行解判断

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	基可行解
O	0	0	6	8	0	Y
A	6	0	0	14	18	Y
B	4/3	14/3	0	0	4	Y
C	0	4	2	0	2	Y
D	0	6	0	-4	/	N
E	-8	0	14	0	/	N

定理2： 顶点与基可行解彼此对应。

引理1：基可行解的性质

引理1：若rank$A$=m，则可行解$\boldsymbol{x}$为基可行解

$\Leftrightarrow$ 可行解$\boldsymbol{x}$的正分量所对应的系数列向量线性独立。

证明思路：

1） $\Rightarrow$必要性证明：基可行解的定义

2）$\Leftarrow$充分性证明：

可行解$\boldsymbol{x}$是基解$\Leftarrow$ 构造$\boldsymbol{x}$对应的基

假设$\boldsymbol{x}$正分量个数为k，可知$k\le m$；

如果$k=m$，可直接视正分量对应的列向量为基；

如果$k<m$，总可补充m-k个列向量构成基。

定理2证明

定理2：x是可行域顶点$\Leftrightarrow$$x$是基可行解。

证明思路：

考察逆否命题：x不是可行域顶点$\Leftrightarrow$ x不是基可行解

1） x不是基可行解$\Rightarrow$ x不是可行域顶点

可行解x不是基可行解

$\Rightarrow$ x正分量对应的系数列向量线性相关

$\Downarrow$ 构造两个可行点

$\Rightarrow$ x为两可行点的凸组合

$\Rightarrow$ x不是顶点

可行点的构造

设可行解 $\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0]^T$ 不是基可行解

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{r}\delta_i \boldsymbol{p}_i=0 \quad \delta_i\text{不全为}0$$

可构造两个可行点：

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=[(x_1+\mu\delta_1),\cdots,(x_r+\mu\delta_r),0,\cdots,0]^T$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)}=[(x_1-\mu\delta_1),\cdots,(x_r-\mu\delta_r),0,\cdots,0]^T$$

其中μ足够小，满足 $\min\limits_i(x_i\pm\mu\delta_i)\geq 0$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(1)}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(2)}$$

2） 可行解X不是可行域顶点 $\Rightarrow X$不是基可行解

设 $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0]^T$ 不是可行域顶点

$\Rightarrow \boldsymbol{x}$为两可行点的凸组合，设$\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{y}+(1-a)\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{z}$，有

$$\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_r, 0, \cdots, 0]^T \qquad \boldsymbol{z} = [z_1, \cdots, z_r, 0, \cdots, 0]^T$$

问题：y和z的非零元素个数为什么最多为r？

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{p}_j = \sum_{j=1}^{r} y_j \boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{b} \qquad \sum_{j=1}^{n} z_j \boldsymbol{p}_j = \sum_{j=1}^{r} z_j \boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{r} (y_j - z_j) \boldsymbol{p}_j = 0$$

y_j- z_j不全为0

正分量对应的列向量线性相关

$\Rightarrow \boldsymbol{x}$不是基可行解

几何概念与代数概念

几何概念		代数概念
约束超平面	⇒	满足一个等式约束的解
约束半平面	⇒	满足一个不等式约束的解
约束半平面的交集	⇒	满足一组不等式约束的解
约束超平面的交点	⇒	基解
可行域的顶点	⇒	基可行解
目标函数等值面	⇒	目标函数值相同的解

定理3：最优解的性质

定理3：若线性规划问题有最优解，一定存在一个基可行解是最优解。

证明：

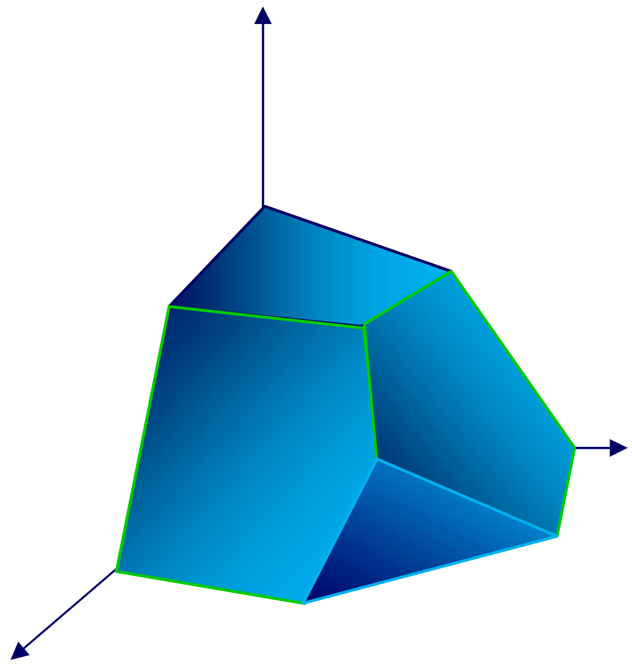
若最优值x^*不是顶点，则必存在某可行方向δ和足够小的正数μ，使$x^* \pm \mu\delta$仍为可行解。因为

$$c(x^* \pm \mu\delta) \leq cx^*$$

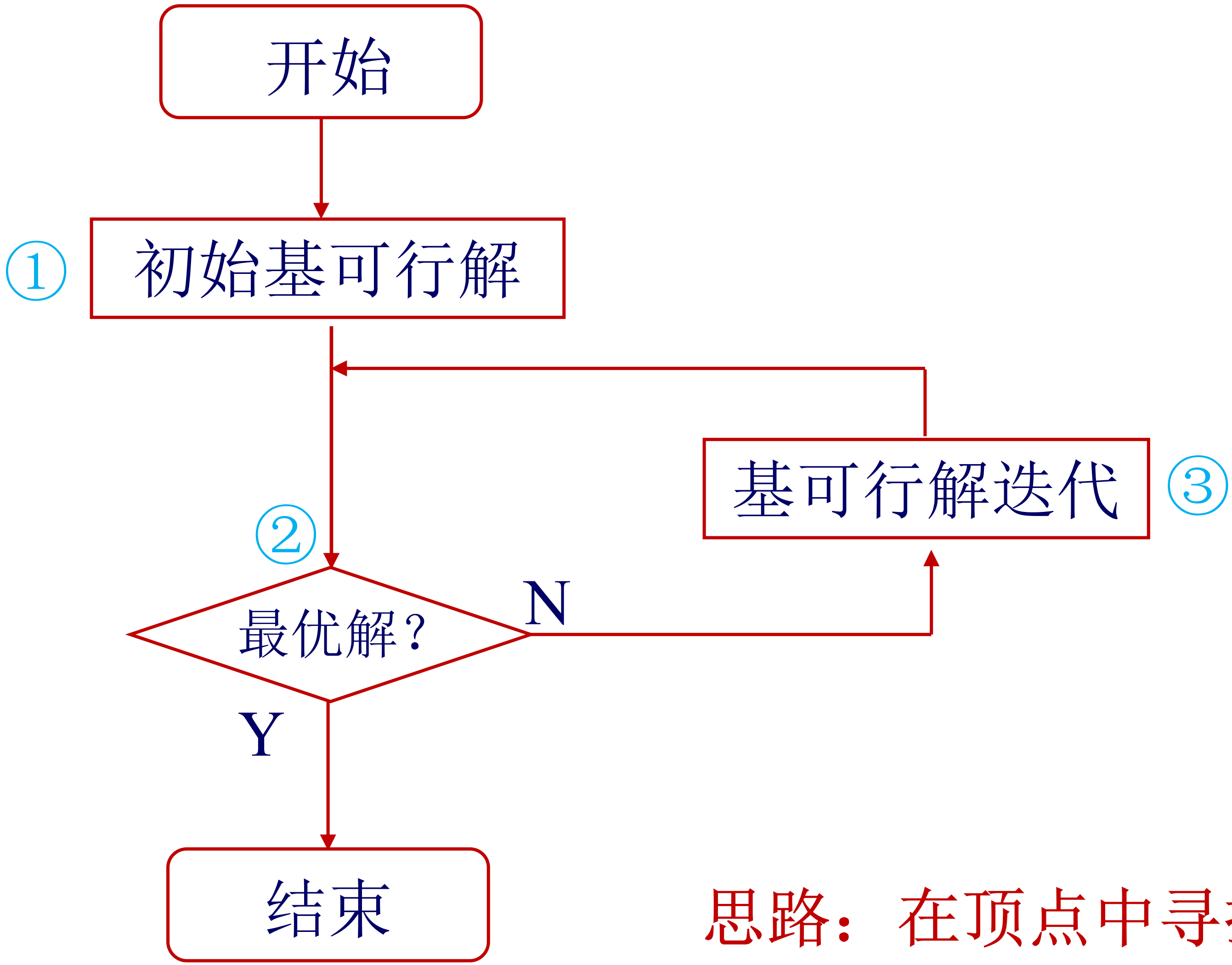
可知 $c\delta=0$，故$x^* \pm \mu\delta$均为最优解。继续伸展，则必可到达顶点。

第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划问题的图解分析
- 线性规划问题的代数分析
- 单纯形法的原理与步骤
- 应用举例



单纯形法思路

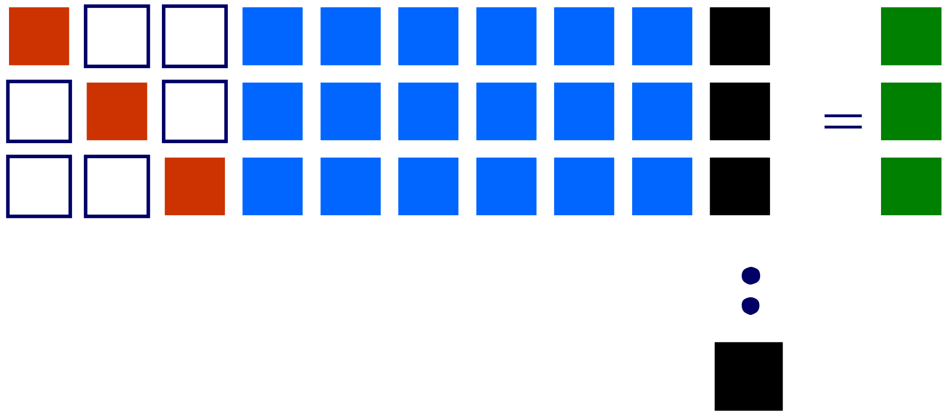


思路：在顶点中寻找最优解

1、初始基可行解

➢ 含单位矩阵的初始基，有

$$(\overline{\boldsymbol{P}}_1,\cdots,\overline{\boldsymbol{P}}_m)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$



方法：通过增加人工变量或松弛变量，可以使

$\boldsymbol{A}_a$=[$\boldsymbol{A}$ **I**]

人工变量法

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{si} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{ai} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{si} + x_{ai} = b_i$$

价值系数如何选取？

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0x_{si} - Mx_{ai}$$

例2

$$\max \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始单纯形表

c_j			3	1	0	0	0
$\boldsymbol{C_B}$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6	1	1	1	0	0
0	x_4	8	-1	2	0	1	0
0	x_5	0	2	-1	0	0	1
σ_j			3	1	0	0	0

$\boldsymbol{x}^{(0)}=[0, 0, 6, 8, 0]^{\mathrm{T}}$ $z^{(0)}=0$

$\overline{x}_i^{(0)} = x_{si} = x_{m+i}$

初始单纯形表特点

➢ 基矩阵为单位阵

$$\boldsymbol{B} = [\overline{\boldsymbol{p}}_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{p}}_m] = \mathbf{I} \qquad \overline{\boldsymbol{p}}_i = \mathbf{e}_i \qquad \overline{a}_{ii} = 1$$

➢ 基变量为**b**

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B^{(0)} = \boldsymbol{x}_B^{(0)} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_i^{(0)} = b_i$$

2、最优性判断

- 性质1：对于线性规划，有：
  x^*是局部最优解 $\Leftrightarrow$ x^*是全局最优解

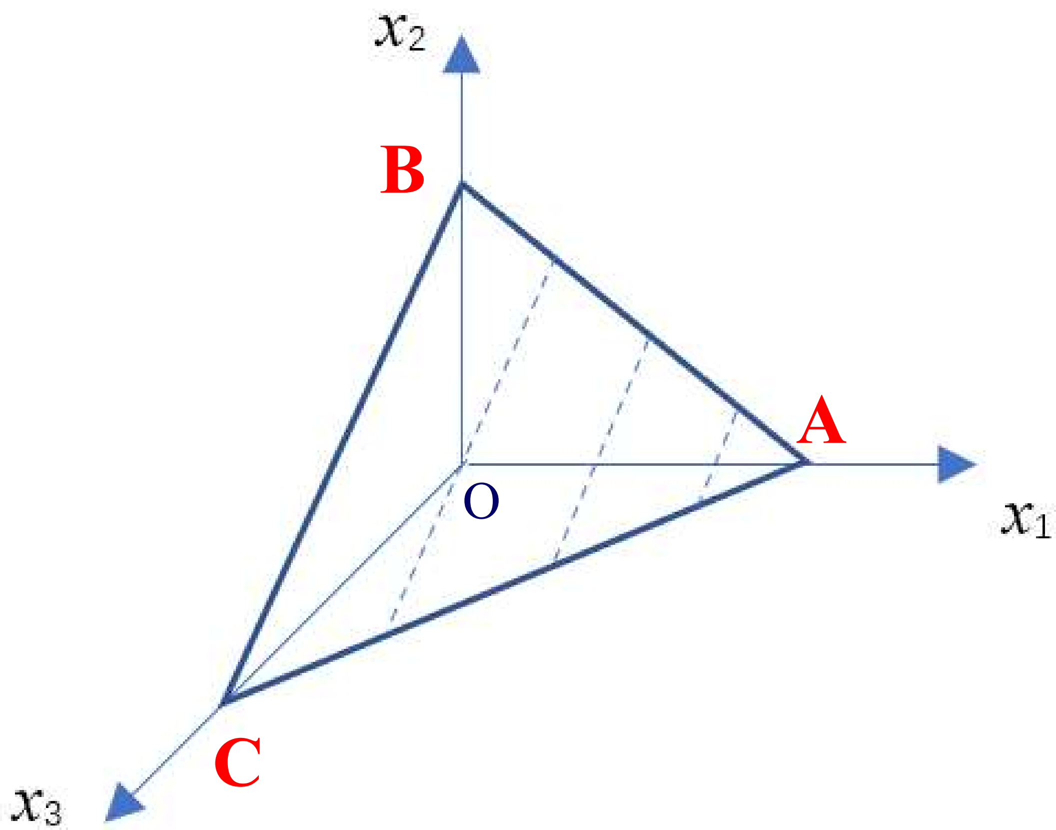
- 性质2：若x^*为线性规划问题的基可行解，其相邻基可行解的集合为$N(x^*)$，若

  $$cx^* \geq cx,\ x \in N(x^*)$$，

  则x^*是全局最优解。

问题：相邻基可行解如何定义？

相邻基可行解的几何关系



图：含一个约束的三维线性规划问题

相邻基可行解的非基变量仅有一个不同！

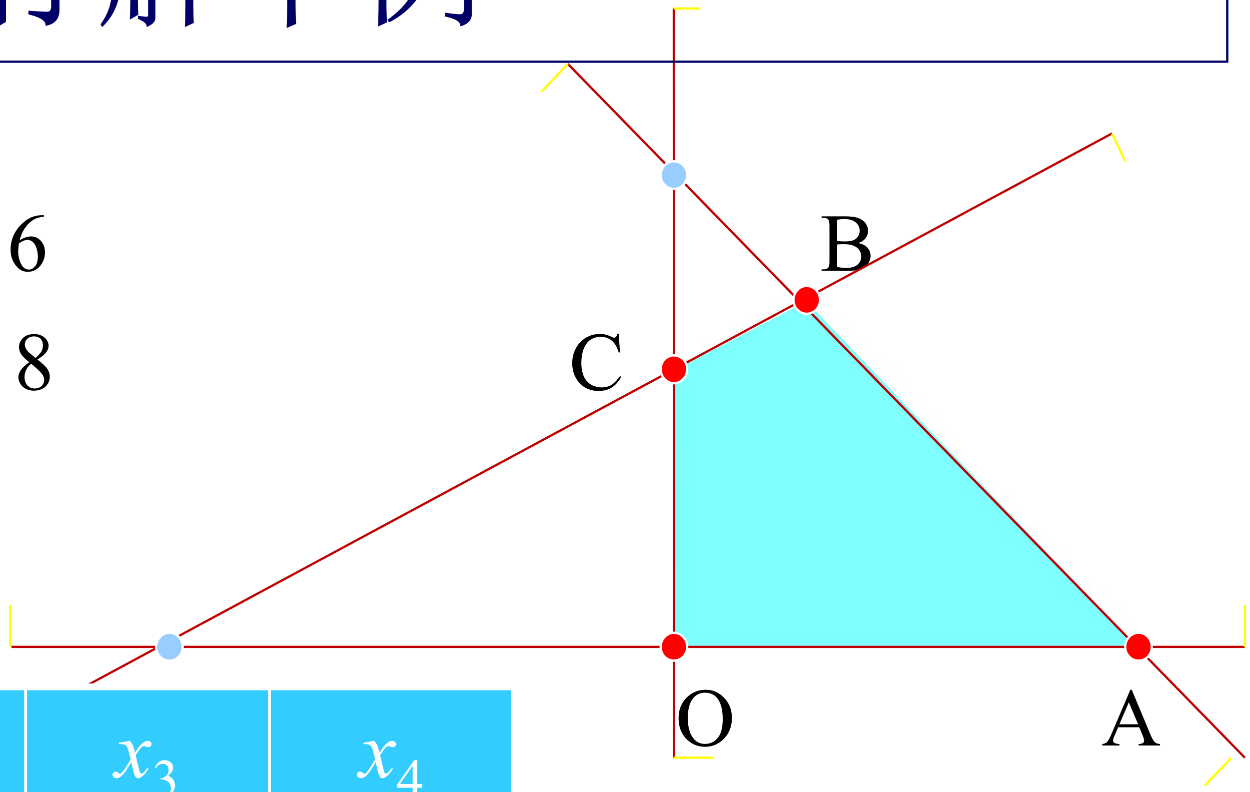
相邻基可行解举例

$$\max \quad z=3x_1+x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+x_2 \le 6$$

$$-x_1+2x_2 \le 8$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



	x_1	x_2	x_3	x_4
O	0	0	6	8
A	6	0	0	14
B	4/3	14/3	0	0
C	0	4	2	0

- 相邻基可行解：只有一个基变量不同的基可行解。

相邻基可行解的寻找

转换前 $\overline{\boldsymbol{x}}^{(0)} = [\overline{x}_1^{(0)}, \cdots, \overline{x}_m^{(0)}, 0 \cdots 0]^T \geq 0$ $\quad \boldsymbol{B}^{(0)} = [\overline{\boldsymbol{p}}_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{p}}_m] = \boldsymbol{I}$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(0)} \boldsymbol{p}_j = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i^{(0)} \overline{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{b} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overline{\boldsymbol{p}}_i - \boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{0}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\overline{x}_i^{(0)} - \theta a_{ij}) \overline{\boldsymbol{p}}_i + \theta \boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{b}$$

转换后 $\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)} = [\overline{x}_1^{(0)} - \theta a_{1j}, \cdots, \overline{x}_m^{(0)} - \theta a_{mj}, 0 \cdots, \theta, \cdots, 0]^T$

相邻基可行解的构造

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}=[\bar{x}_1^{(0)}-\theta a_{1j},\cdots,\bar{x}_m^{(0)}-\theta a_{mj},0\cdots,\theta,\cdots,0]^T$$

1、可行解条件：

$$\bar{x}_i^{(0)}-\theta a_{ij}\geq 0\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$\theta=x_j^{(1)}>0$$

2、基解条件：

$$\min_i\{\bar{x}_i^{(0)}-\theta a_{ij}\}=0$$

$$\theta=\min_i\left\{\frac{\bar{x}_i^{(0)}}{a_{ij}}\middle| a_{ij}>0\right\}$$

所有$a_{ij}\leq 0$会如何?

检验数

$$z^{(1)} = \boldsymbol{c}\overline{\boldsymbol{x}}^{(1)} = \boldsymbol{c}[\overline{x}_1^{(0)} - \theta a_{1j}, \cdots, \overline{x}_m^{(0)} - \theta a_{mj}, 0 \cdots, \theta, \cdots, 0]^T$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i (\overline{x}_i^{(0)} - \theta a_{ij}) + c_j \theta$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \overline{x}_i^{(0)} - \theta \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} + c_j \theta$$

$$= z^{(0)} + \theta \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \right)$$

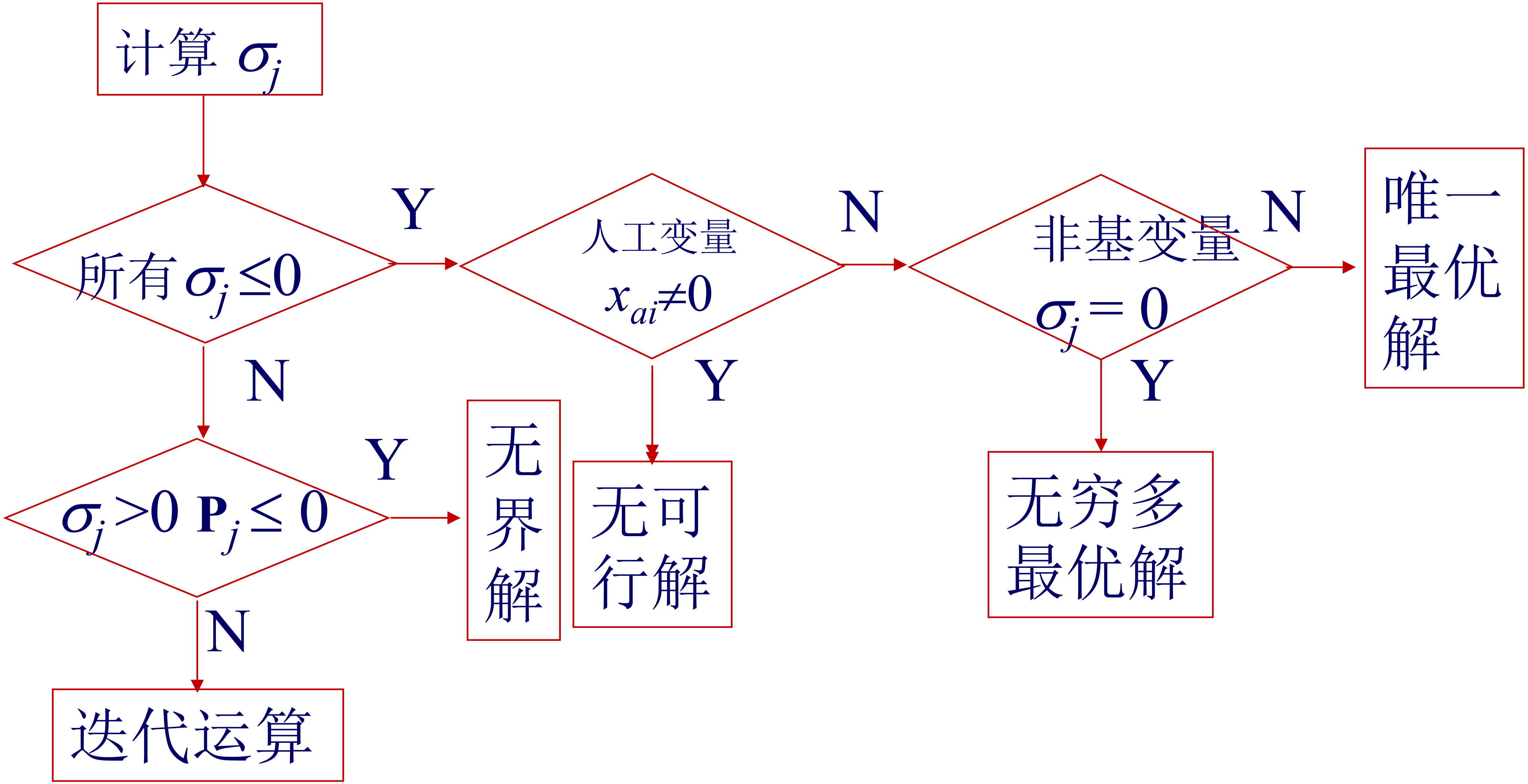
$$\sigma_j \triangleq c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

$$= z^{(0)} + \theta \sigma_j$$

解的判别

- 若存在$\sigma_j > 0$，且$\boldsymbol{p}_j \le 0$　　无界解
- 若存在$\sigma_j > 0$，存在$a_{ij}>0$　　继续迭代
- 所有$\sigma_j \le 0$，但有人工变量x_{ai}不为零　无可行解
- 所有$\sigma_j \le 0$，若存在非基变量的$\sigma_j = 0$　　无穷个最优解
- 所有$\sigma_j \le 0$，且没有非基变量的$\sigma_j = 0$　　唯一最优解

最优性检验流程



计算 σ_j
所有 $\sigma_j \le 0$
Y
人工变量 $x_{ai} \neq 0$
N
非基变量 $\sigma_j = 0$
N
唯一最优解
N
Y
Y
$\sigma_j > 0$ $\mathbf{P}_j \le 0$
Y
无界解
无可行解
无穷多最优解
N
迭代运算

3、基可行解的迭代

■ 基可行解的迭代思路：

1）从检验数为（？）的非基变量中选择一个变量作为入基变量（新的基变量）；

2）从当前基变量中选择一个变量作为出基变量（新的非基变量）；

3）求解新基下的基可行解。

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \theta\sigma_j$$

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{\overline{x}_i^{(0)}}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0 \right\}$$

$$\sigma_j \triangleq c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

问题：如何选择入基变量和出基变量？

3、基可行解的迭代

■ 基可行解的迭代思路：

1）从检验数为（？）的非基变量中选择一个变量作为入基变量（新的基变量）；

2）从当前基变量中选择一个变量作为出基变量（新的非基变量）；

3）求解新基下的基可行解。

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \theta\sigma_j$$

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{\overline{x}_i^{(0)}}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0 \right\}$$

$$\sigma_j \triangleq c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

问题：如何选择入基变量和出基变量？

入基、出基变量的选取

1。确定入基变量x_k

$$\sigma_k = \max_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$$

2。确定出基变量x_l

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{\overline{x}_i^{(0)}}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

单纯形表迭代

第l行：

$$a_{lj}^{'} = a_{lj} / a_{lk}$$

主元素

$$b_l^{'} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

其他行：

$$a_{ij}^{'} = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} \qquad i \neq l$$

$$b_i^{'} = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \qquad i \neq l$$

初等行变换

检验数迭代:

$$\sigma_l^{'} = -\frac{1}{a_{lk}} \sigma_k$$

$$\sigma_j^{'} = \sigma_j - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \sigma_k \qquad j \neq l$$

根据定义推导

更新单纯形表

			3	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6	0	1.5	1	0	-0.5
0	x_4	8	0	1.5	0	1	0.5
3	x_1	0	1	-0.5	0	0	0.5
	σ_j		0	2.5	0	0	-1.5

最终单纯形表

			3	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	4	0	1	2/3	0	-1/3
0	x_4	2	0	0	-1	1	1
3	x_1	2	1	0	1/3	0	1/3
	σ_j		0	0	-5/3	0	-2/3

退化与循环

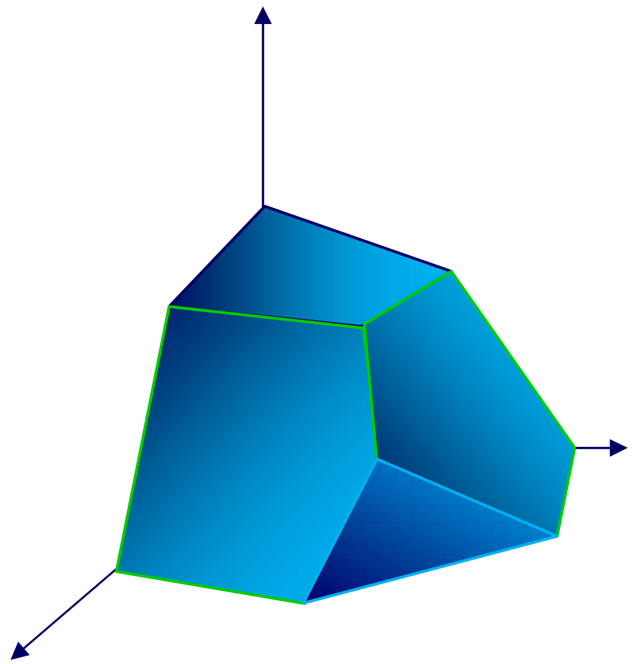
退化：基变量出现零的现象

影响：可能出现循环迭代

对策？

第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划问题的图解分析
- 线性规划问题的代数分析
- 单纯形法的原理与步骤
- 应用举例



应用举例

- 套裁问题
- 配料问题
- 产品计划问题
- 投资问题
- 运输问题

例3 投资问题

例：某投资者有50万元可以用于长期投资，可供选择的投资项目包括购买国库卷、购买公司债卷、投资房地产、购买股票、银行短期或长期储蓄，各种投资方式的投资期限，年收益率，风险系数，增长潜力的具体参数间下表。若投资者希望投资组合的平均年限不超过5年，平均的期望收益率不低于13%，平均风险系数不超过4，收益的平均增长潜力不低于10%。问在满足上述要求的前提下，投资者该如何选择投资组合使平均年收益率最高？

投资问题参数表

序号	投资方式	投资年限（年）	年收益率（%）	风险系数	增长潜力（%）
1	国库卷	3	11	1	0
2	公司债卷	10	15	3	15
3	房地产	6	25	8	30
4	股票	2	20	6	20
5	短期储蓄	1	10	1	5
6	长期储蓄	5	12	2	10
期望指标		5	13	4	10

投资问题模型

设x_j为第j种投资方式在总投资方式中所占比例

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=11x_1+15x_2+25x_3+20x_4+10x_5+12x_6 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1+10x_2+6x_3+2x_4+x_5+5x_6 \le 5 \\
& 11x_1+15x_2+25x_3+20x_4+10x_5+12x_6 \ge 13 \\
& x_1+3x_2+8x_3+6x_4+x_5+2x_6 \le 4 \\
& 15x_2+30x_3+20x_4+5x_5+10x_6 \ge 10 \\
& x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

例4 套裁问题

例：某车间接到制作100套钢架的订单，每套钢架要用长为2.9m，2.1m，1.5m的圆钢各一根，已知原料长7.4m，问应如何下料，可使所用原料最省。

套裁问题

先选择一些可行的方案：

方案	1	2	3	4	5
2.9	1	2	0	1	0
2.1	0	0	2	2	1
1.5	3	1	2	0	3
合计	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头	0	0.1	0.2	0.3	0.8

套裁问题模型

设x_j为按方案j下料的原料根数

$$\min \quad z=0x_1+0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+2x_2+x_4=100$$

$$2x_3+2x_4+x_5=100$$

$$3x_1+x_2+2x_3+3x_5=100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

结果: $\boldsymbol{X}^*=[30, 10, 0, 50, 0]^{\mathrm{T}} \quad z^*=16\mathrm{m}$

例5 配料问题

例:　某糖果厂用原料A,B,C加工三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中A、B、C含量，原料成本，各种原料的每月限制用量，三种牌号糖果的单位加工费及售价如下表所示。问该厂每月生产这三种牌号的糖果各多少kg，使该厂获利最大。试建立这个问题的线性规划数学模型。

配料问题

	甲	乙	丙	原料成本(元/kg)	每月限用量(kg)
A	≥60％	≥30％		2.00	2000
B				1.50	2500
C	≤20％	≤50％	≤60％	1.00	1200
加工费(元/kg)	0.50	0.40	0.30		
售价(元/kg)	3.40	2.85	2.25		

配料问题模型

设x_{ij}代表生产第j种产品耗用第i种原料的kg数

$$\max\ z=3.40(x_{11}+x_{21}+x_{31})$$ 销售收入

$$+2.85(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$

$$+2.25(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

$$-0.50(x_{11}+x_{21}+x_{31})$$ 加工成本

$$-0.40(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$

$$-0.30(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

$$-2.0(x_{11}+x_{12}+x_{13})$$ 原料 成本

$$-1.5\ (x_{21}+x_{22}+x_{23})$$

$$-1.0(x_{31}+x_{32}+x_{33})$$

配料问题模型

$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 2000$ 月限用量

$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 2500$

$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 1200$

$x_{11} \geq 0.6(x_{11}+x_{21}+\mathrm{x}x_{31})$ 含量成份

$x_{31} \leq 0.2(x_{11}+x_{21}+x_{31})$

$x_{12} \geq 0.3(x_{12}+x_{22}+x_{32})$

$x_{13} \leq 0.5(x_{12}+x_{22}+x_{32})$

$x_{33} \leq 0.6(x_{13}+x_{23}+x_{33})$

$x_{ij} \geq 0$

例6：最优跟踪控制问题

- 已知被控对象的输入输出模型为：

$$y(k+1) = 0.5y(k) + u(k) \qquad k = 1, 2, \cdots, 10$$

- 控制输入约束：

$$|u(k)| \le M \qquad |u(k+1) - u(k)| \le N \qquad k = 1, 2, \cdots, 10$$

- 求使下列目标最小的控制序列$u(k)$。

$$\min_{u(k), 1\le k\le 10} \max |y(k+1) - r(k+1)|$$

$r(k)$为需要跟踪的参考信号，是已知量