

# 现代控制理论

## Modern Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大



## 第七章 Chapter 7

### 线性离散系统的分析与校正



# 主要内容

---

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正



# 离散系统的数学模型

---

- 线性差分方程
- 脉冲传递函数
- 离散系统的状态空间模型
- 各种离散模型的关系



# 离散系统的数学模型

---

- 线性差分方程
- 脉冲传递函数
- **离散系统的状态空间模型**
- **各种离散模型的关系**

# 离散系统的状态空间模型

连续状态空间模型：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad t \in [0, \infty)$$

离散状态空间模型：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

状态 $\mathbf{x}(k)$

输入 $\mathbf{u}(k)$

输出 $\mathbf{y}(k)$

# 复习：连续状态方程的全解

➤通常有两种方法计算状态方程的全解：**直接求解方程**（时域）和**利用拉普拉斯变换**（s域）；**状态转移矩阵STM概念**。

**方法 1 时域法：**  $e^{-At}$  是方阵， $x(t)$  是  $n \times 1$  的状态向量，于是有

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)]$$

对于状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

将该方程在 0 到  $t$  的时间区间上进行积分

$$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\frac{d}{dt}[M(t)N(t)] = M(t)\dot{N}(t) + \dot{M}(t)N(t)$$

# 复习：连续状态方程的全解

- 从方程  $e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$  ，希望得到  $x(t)$

$$e^{At}[e^{-At}x(t) - x(0)] = e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right]$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

- 利用 **STM** 和  $t=t_0$  时刻的初始条件，在输入  $u(t)$  作用下状态方程的解

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, t > t_0$$

状态转移方程

令  $\beta = t - \tau$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\beta)Bu(t-\beta)d\beta$$



# 复习：连续状态方程的全解

方法2 拉普拉斯变换方法：

状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

LT

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}U(s) \\ &= \Phi(s)\mathbf{x}(0) + \Phi(s)\mathbf{B}U(s) \end{aligned}$$

LT<sup>-1</sup>

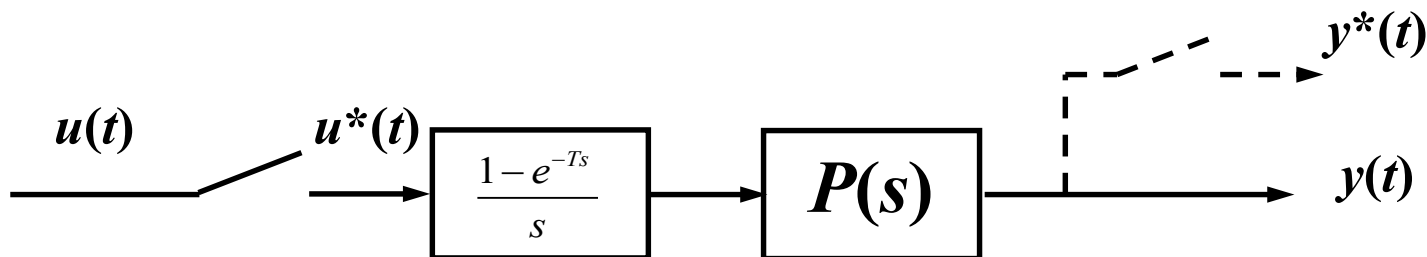
$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + L^{-1}[\Phi(s)\mathbf{B}U(s)]$$

若初始时刻 $t=t_0$ ，在输入 $u(t)$ 作用下状态方程的解

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

# 离散系统的状态空间模型

## ➤ 从连续状态空间模型到离散状态空间模型



连续状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad t \in [0, \infty)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$



零阶保持器

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}(k+1)T - A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(k) d\tau$$

# 离散系统的状态空间模型

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{AT} \mathbf{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T - A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(k) d\tau$$



令  $\lambda = (k+1)T - \tau$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= e^{AT} \mathbf{x}(k) + \int_0^T e^{A\lambda} \mathbf{B} \mathbf{u}(k) d\lambda \\ &= e^{AT} \mathbf{x}(k) + \left[ \int_0^T e^{A\lambda} \mathbf{B} d\lambda \right] \mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{G}(T) \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(T) \mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

离散状态空间模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(T) \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(T) \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \end{cases}$$

$$k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbf{G}(T) = e^{AT}, \mathbf{H}(T) = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau$$

注意:

- 1)  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  取决于  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $T$
- 2) 计算  $\mathbf{H}$  时有时先乘  $\mathbf{B}$  更容易
- 3) 对于线性定常系统,  $T$  一旦固定,  $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{H}$  即为常数
- 4) 注意计算  $\exp(AT)$  的方法

# 离散系统的状态空间模型

➤ **例7-3-9** 已知连续状态方程  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$ ，求离散状态方程（含零阶保持）。

解：1)

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

3) 若  $T=1\text{s}$ ,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.432 \\ 0 & 0.135 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.284 \\ 0.432 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

2)

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} = L^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}|_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(T) = \left[ \int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda} \mathbf{B} d\lambda \right] = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda}) \\ e^{-2\lambda} \end{bmatrix} d\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

# 求解离散状态方程

1) 离散状态方程本质上是一阶差分方程组，求其解也与求差分方程解一样有两种方法：递推法与Z变换法。

## ➤ 递推法

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad \text{已知: } \mathbf{x}(0), \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

直接将初始条件 $\mathbf{x}(0)$ 与 $\mathbf{u}(k)$ 代入状态方程递推求解

特点：简单且适合计算机，但无解析式

令  $\Phi(k)=\mathbf{A}^k$  为离散状态转移矩阵，且有

$$\begin{aligned}\Phi(k+1) &= \mathbf{A}\Phi(k) \\ \Phi(0) &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= e^{\mathbf{A}t} \\ \Phi(0) &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)$$

⋮

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-i-1)\mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

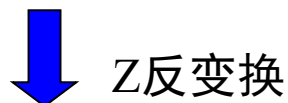
# 求解离散状态方程

## ➤ Z变换法

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad \text{已知: } \mathbf{x}(0), \mathbf{u}(k)$$



$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z) \Rightarrow \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= Z^{-1}[\mathbf{X}(z)] = Z^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z)]\} \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\{Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]\} + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

与递推法比较  $\Phi(k) = \mathbf{A}^k = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z]$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(i) = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(z)]$$

特点：不同于递推法得到的是有限项时间序列(Open form)，Z变换法的最突出优点是可以得到解的数学解析式(Closed form)。

# 求解离散状态方程

**例7-3-10** 已知离散系统，其初始条件及输入 $u(k)$ ，求 $\mathbf{x}(k)$ 。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; u(k) = 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}u(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}u(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}u(0) + \mathbf{B}u(1)$$

$\vdots$

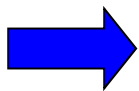
$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}u(i)$$

$$\Phi(1) = \mathbf{A}$$

$$\Phi(2) = \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -0.16 & -1 \\ 0.16 & 0.84 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(3) = \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.84 \\ -0.134 & -0.68 \end{bmatrix}$$

$\vdots$



$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}u(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}u(0) + \mathbf{B}u(1) = \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}u(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}u(1) + \mathbf{B}u(2) = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

# 求解离散状态方程

**例7-3-10** 已知离散系统，其初始条件及输入 $u(k)$ ，求 $\mathbf{x}(k)$ 。

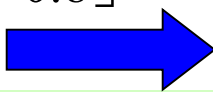
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; u(k) = 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

解：2) Z变换法  $\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u(z)$

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}[\mathbf{X}(z)] = Z^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}u(z)]\}$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4/3}{z+0.2} + \frac{-1/3}{z+0.8} & \frac{5/3}{z+0.2} + \frac{-5/3}{z+0.8} \\ \frac{-0.8/3}{z+0.2} + \frac{0.8/3}{z+0.8} & \frac{-1/3}{z+0.2} + \frac{4/3}{z+0.8} \end{bmatrix}$$



$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}u(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{z}{z-1} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z-1} \\ \frac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$$





# 求解离散状态方程

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z)] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(z^2 + 2)z}{(z + 0.2)(z + 0.8)(z - 1)} \\ \frac{(-z^2 + 1.84z)z}{(z + 0.2)(z + 0.8)(z - 1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-17z/6}{z + 0.2} + \frac{22z/9}{z + 0.8} + \frac{25z/18}{z - 1} \\ \frac{3.4z/6}{z + 0.2} + \frac{-17.6z/9}{z + 0.8} + \frac{7z/18}{z - 1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]$$

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-17z/6}{z + 0.2} + \frac{22z/9}{z + 0.8} + \frac{25z/18}{z - 1} \\ \frac{3.4z/6}{z + 0.2} + \frac{-17.6z/9}{z + 0.8} + \frac{7z/18}{z - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

上式为一解析的闭合形式，代入 $k$ 值即可计算不同时刻的状态。





# 离散系统的数学模型

---

- 线性差分方程
- 脉冲传递函数
- 离散系统的状态空间模型
- 各种离散模型的关系

# 各种离散模型的关系

## 1) 差分方程（时域）和脉冲传递函数（z 域）

### ➤ 由差分方程→脉冲传递函数 ——通过Z变换

若  $n$  阶前向差分方程（其中  $a, b$  为常数,  $k, n, m$  为整数, 且  $m \leq n$ ）

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_mr(k+m) + b_{m-1}r(k+m-1) + \cdots + b_1r(k+1) + b_0r(k) \end{aligned}$$

对上式两边作Z变换（令初始条件为零，并利用超前移位特性），得脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

若为后向差分方程，方法类似（利用滞后移位特性）。



# 各种离散模型的关系

例：  $y(k+2) + 4y(k+1) + 3y(k) = 6r(k+1) + 7r(k)$ ，求脉冲传递函数

解：作 $z$ 变换 
$$\begin{aligned} & \left[ z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) \right] + 4 \left[ zY(z) - zy(0) \right] + 3Y(z) \\ &= 6 \left[ zR(z) - zr(0) \right] + 7R(z) \end{aligned}$$

$$\left[ z^2 Y(z) + 4zY(z) + 3Y(z) \right] - z^2 y(0) - z \left[ y(1) + 4y(0) \right] = \left[ 6zR(z) + 7R(z) \right] - z 6r(0)$$

零初始条件  $y(-1) = y(-2) = \dots = 0, r(-1) = r(-2) = \dots = 0$

当  $k = -1$  时，  $y(1) + 4y(0) + 3y(-1) = 6r(0) + 7r(-1)$

即  $y(1) + 4y(0) = 6r(0)$

当  $k = -2$  时，  $y(0) + 4y(-1) + 3y(-2) = 6r(-1) + 7r(-2)$ ， 即  $y(0) = 0$

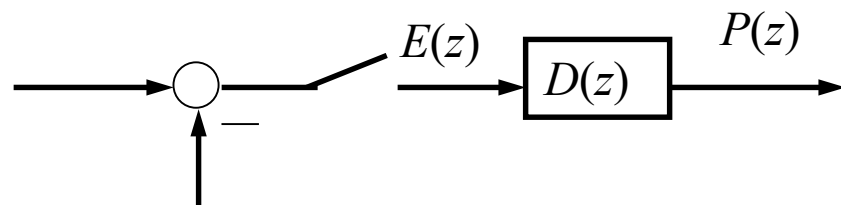
$$Y(z) \left( z^2 + 4z + 3 \right) = R(z) \left( 6z + 7 \right), G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{6z + 7}{z^2 + 4z + 3}$$

# 各种离散模型的关系

## ➤ 由脉冲传递函数→差分方程 ——通过Z反变换

若已知控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ ，要化为计算机的控制算式，必须将 $D(z)$ 转化为差分方程表示，若

$$D(z) = \frac{P(z)}{E(z)} = \frac{k(z-a)}{z-1}$$



$$zP(z) - P(z) = k[zE(z) - aE(z)]$$



Z反变换

$$P(k+1) - P(k) = k[e(k+1) - ae(k)]$$

——前向差分方程

或

$$P(k) - P(k-1) = k[e(k) - ae(k-1)]$$

——后向差分方程

零初始条件下等价

不可实现，因 $P(k)$ 用到 $e(k+1)$ 的值。

注：工程上用后向差分方程多些。 $D(z)$ 分子的阶次不能高于分母的阶次？

# 各种离散模型的关系

## 2) 脉冲传递函数和状态方程

➤ 由状态方程→脉冲传递函数

——转换后的结果是惟一的

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{|z\mathbf{I} - \mathbf{A}|} + \mathbf{D}$$

$\Delta = |z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$  为系统特征方程



# 各种离散模型的关系

➤ 例7-3-11 已知系统状态方程

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.233 \\ -0.466 & -0.097 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$

求其脉冲传递函数。

解：

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z - 0.6 & -0.233 \\ 0.466 & z + 0.097 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z + 0.097 & 0.233 \\ -0.466 & z - 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.233 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0.2z + 0.074}{(z - 0.135)(z - 0.368)} \end{aligned}$$

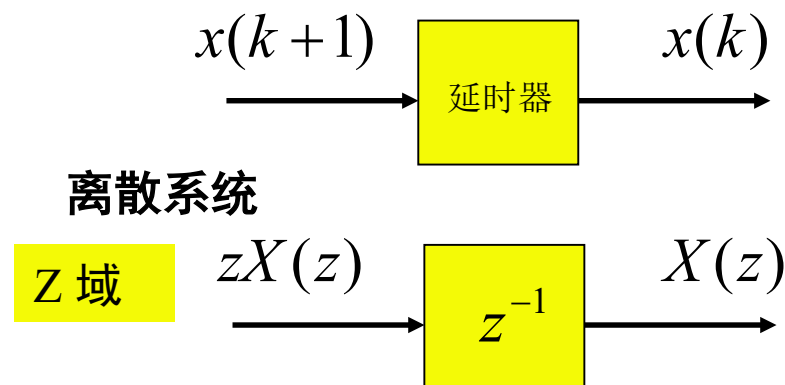
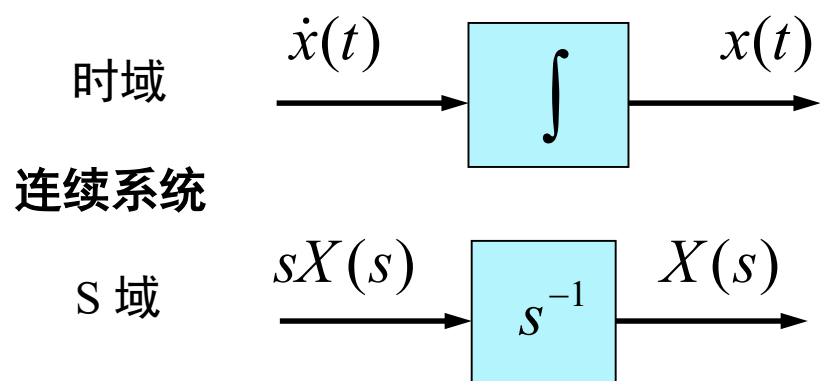


# 各种离散模型的关系

## ➤ 由脉冲传递函数→状态方程

——转换后的结果不惟一！

- 与连续系统类似，由脉冲传递函数求离散状态方程的问题称为**实现问题**，因状态变量选择的不同，状态方程也就不同
- 常见的实现如**能控标准型**、**能观标准型**、**正则标准型**(或称并联分解)、**串联分解**等。一般先画出状态图再写状态方程比较容易，信号流图等工具也可以采用
- 与连续系统不同的是，连续系统中采用积分器作为基本单元，而在离散系统中则采用延时器作为基本单元。





# 各种离散模型的关系

## ➤ 能控标准型和能观标准型:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$= b_n + \frac{(b_{n-1} - a_{n-1} b_n) z^{n-1} + \cdots + (b_1 - a_1 b_n) z + (b_0 - a_0 b_n)}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k) = cx(k) + du(k) \end{cases}$$

### 能控标准型

$$c = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \cdots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n]$$

$$d = b_n$$

### 能观标准型

$$c = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

$$d = b_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

# 各种离散模型的关系

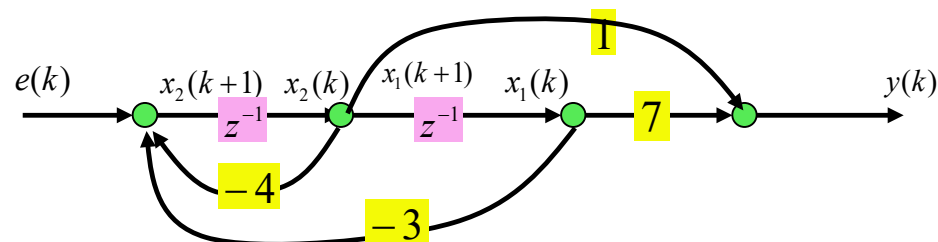
➤ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z + 7}{z^2 + 4z + 3}$$

解：1) 能控标准型

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

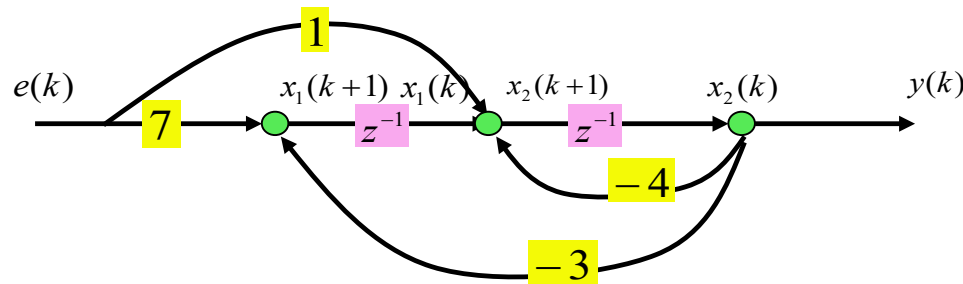
$$y(k) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$



2) 能观标准型

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$



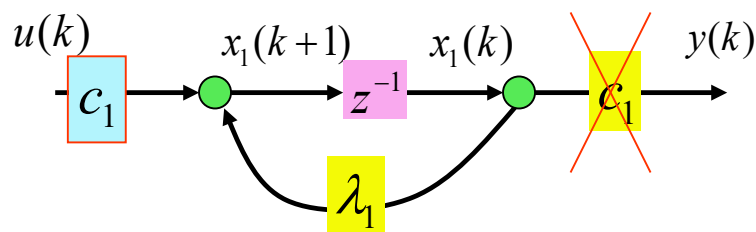
# 各种离散模型的关系

➤ **正则标准型（并联分解）**：适用于脉冲传递函数为部分分式形式，——当特征方程无重根时，系统矩阵 $A$ 为对角阵

基本单元：

$$D(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_1}{z - \lambda_1} = \frac{z^{-1}c_1}{1 - z^{-1}\lambda_1}$$

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \lambda_1 x_1(k) + u(k) \\ y(k) &= c_1 x_1(k) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \lambda_1 x_1(k) + c_1 u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned}$$



A, b, c?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad \cdots \quad c_n]$$

- 正则标准型（并联分解）——若有重根，系统矩阵 $A$ 为约当阵
- 有重根时则 $c_1$ 的位置须由后变为前（单根时可前可后）

# 各种离散模型的关系

➤ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

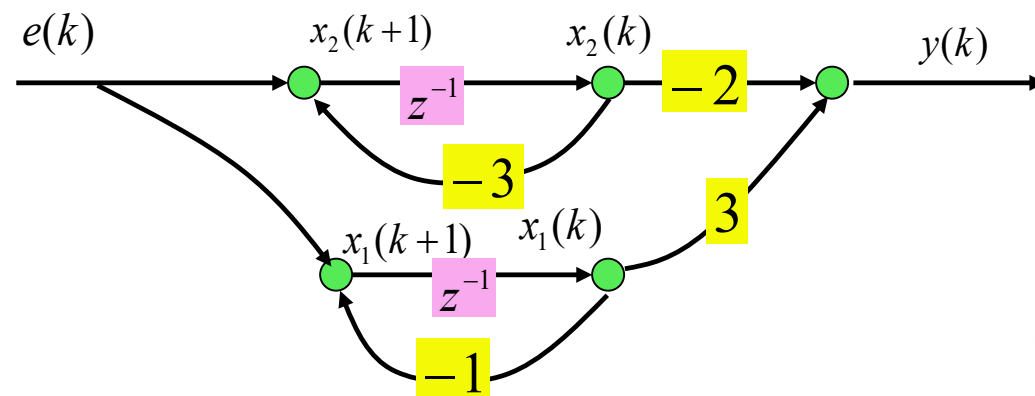
解： **3) 正则标准型(并联分解)** ——无重根

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z+7}{z^2+4z+3} = \frac{3}{z+1} - \frac{2}{z+3} \\ &= \frac{c_1 z^{-1}}{1 - z^{-1} \cdot \lambda_1} + \frac{c_2 z^{-1}}{1 - z^{-1} \cdot \lambda_2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} x(k)$$

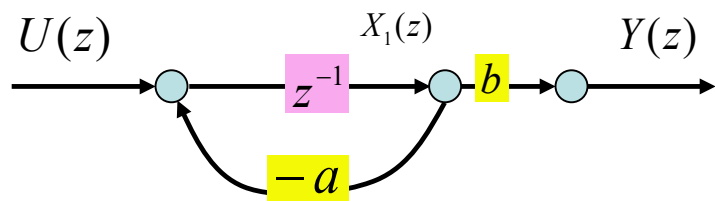
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad \cdots \quad c_n]$$



# 各种离散模型的关系

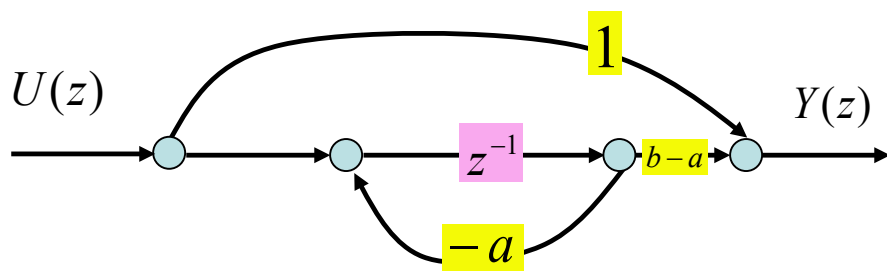
- **串联分解：**适用于脉冲传递函数分子分母均为因式分解形式

一阶环节基本单元-1: 
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{z+a} = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$



$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -ax_1(k) + u(k) \\ y(k) &= bx_1(k) \end{aligned}$$

一阶环节基本单元-2: 
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+b}{z+a} = 1 + \frac{b-a}{z+a}$$



$$\begin{cases} x_1(k+1) = -ax_1(k) + u(k) \\ y(k) = (b-a)x_1(k) + u(k) \end{cases}$$

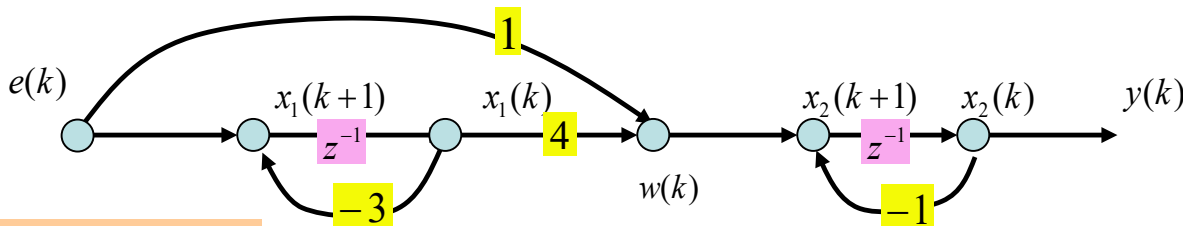
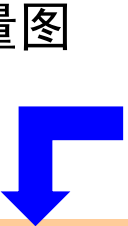
# 各种离散模型的关系

➤ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：4) **串联分解1**:  $\because D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z+7}{z^2+4z+3} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{z+7}{z+3} = \frac{1}{z+1} \left( 1 + \frac{4}{z+3} \right)$

状态变量图



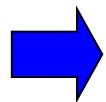
$$x_1(k+1) = -3x_1(k) + e(k)$$

$$w(k) = 4x_1(k) + e(k)$$

$$x_2(k+1) = -x_2(k) + w(k)$$

$$y(k) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = 4x_1(k) - x_2(k) + e(k)$$



$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

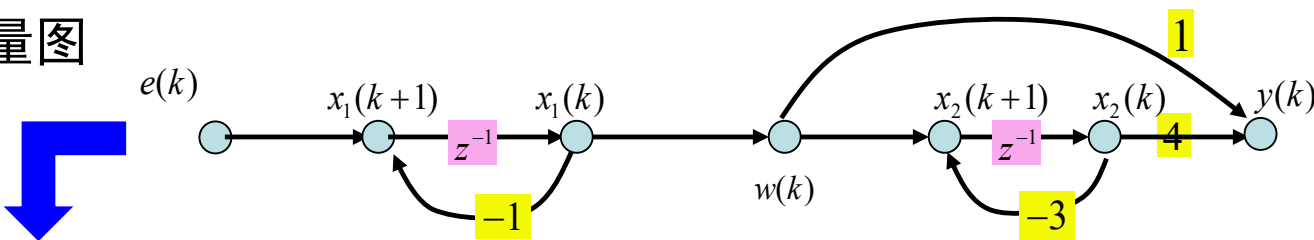
# 各种离散模型的关系

➤ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解： **4) 串联分解2:**  $\because D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z+7}{z^2+4z+3} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{z+7}{z+3} = \frac{1}{z+1} \left( 1 + \frac{4}{z+3} \right)$

状态变量图

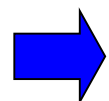


$$x_1(k+1) = -x_1(k) + e(k)$$

$$w(k) = x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = -3x_2(k) + w(k)$$

$$y(k) = w(k) + 4x_2(k)$$



$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} x(k)$$

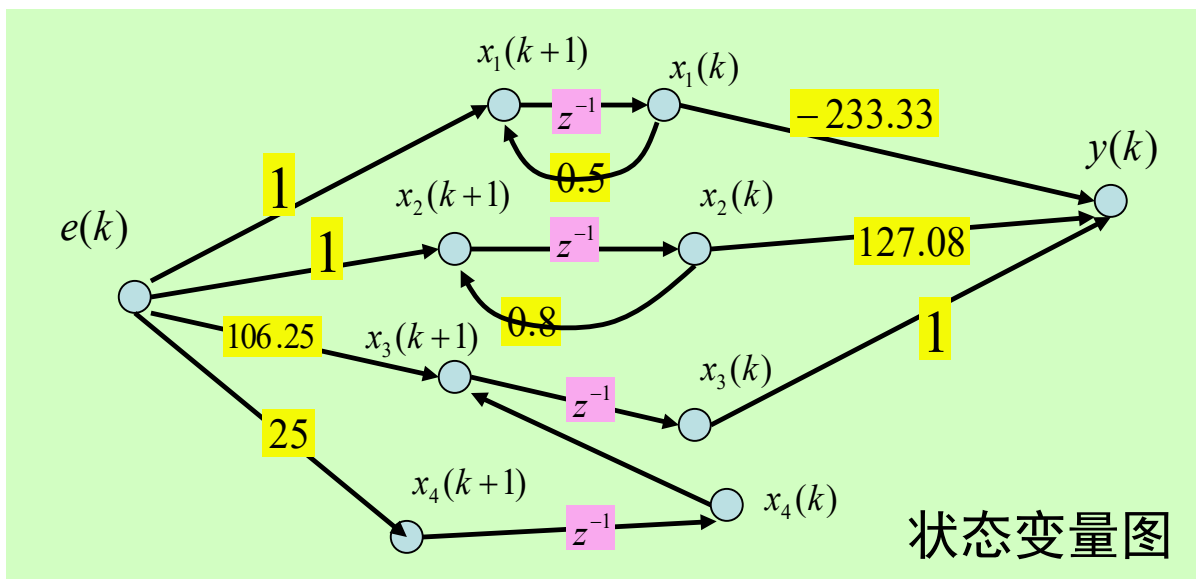
# 各种离散模型的关系

**例7-3-13** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态空间实现。

$$D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{10(z^2 + z + 1)}{z^2(z - 0.5)(z - 0.8)}$$

解：特征方程的根：0.5, 0.8, 0, 0——有重根——将 $D(z)$ 写成部分分式

$$D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{10(z^2 + z + 1)}{z^2(z - 0.5)(z - 0.8)} = \frac{-233.33}{z - 0.5} + \frac{127.08}{z - 0.8} + \frac{106.25}{z} + \frac{25}{z^2}$$

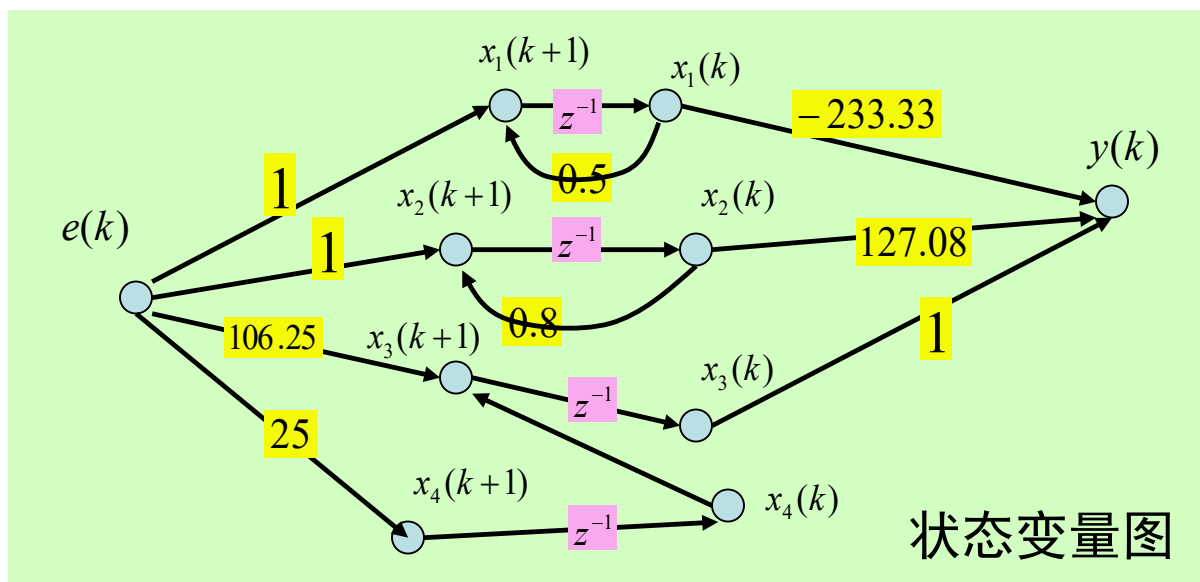


**特别注意：**最后2个状态变量，因为重根的存在，与一般的并联分解不同之处！



# 各种离散模型的关系

$$D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{10(z^2 + z + 1)}{z^2(z - 0.5)(z - 0.8)} = \frac{-233.33}{z - 0.5} + \frac{127.08}{z - 0.8} + \frac{106.25}{z} + \frac{25}{z^2}$$



$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}e(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 106.25 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [-233.33 \quad 127.08 \quad 1 \quad 0]$$

# 各种离散模型的关系

## 3) 差分方程和状态方程

➤ 由差分方程→状态方程 ——因状态选取不惟一，状态方程不惟一

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_m r(k+m) + b_{m-1}r(k+m-1) + \cdots + b_1r(k+1) + b_0r(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) \end{aligned}$$

通常先转化为脉冲传递函数 $G(z)$ ，然后再转化为状态方程

# 各种离散模型的关系

➤ 由状态方程→差分方程 ——转换后的结果是惟一的！？

状态方程→脉冲传递函数 $G(z)$ →差分方程

例7-3-14 已知状态方程，求系统差分方程表示。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$

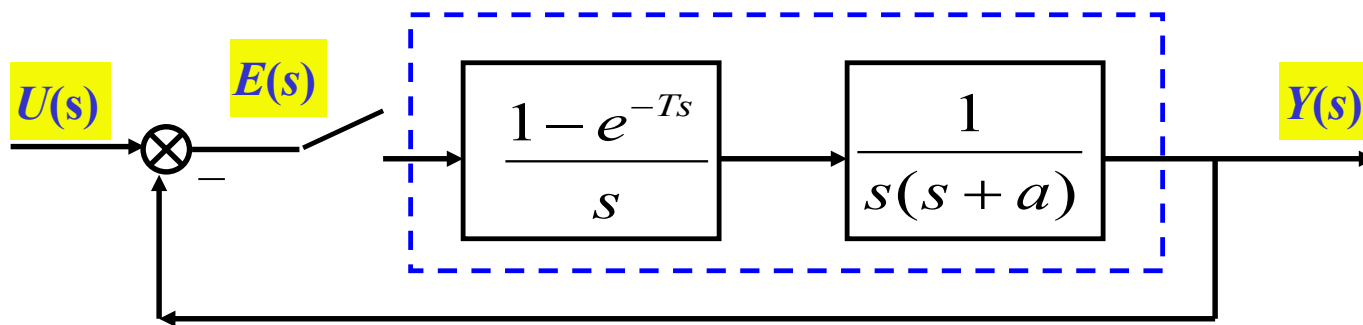
$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z & -1 \\ 3 & z+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z+5 & 1 \\ -3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z+2}{z^2+5z+3} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad \xrightarrow{\text{求}z\text{反变换}} y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

# 各种离散模型的关系

## 4) 闭环离散系统的状态方程

- 例7-3-15** 已知系统如图示,  $a=1$ ,  $T=1$ , 写出闭环系统的状态方程。



解：开环脉冲传递函数

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = (1 - z^{-1})\left(Z\left[\frac{1}{s^2}\right] - Z\left[\frac{1}{s}\right] + Z\left[\frac{1}{s+1}\right]\right)$$

$$= (1 - z^{-1})\left(\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right) = \frac{1}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-0.3678} = \frac{1}{z-1} - \frac{0.6322}{z-0.3678}$$

# 各种离散模型的关系

$$G(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{0.6322}{z-0.3678}$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + e(k)$$

$$x_2(k+1) = 0.3678x_2(k) - 0.6322e(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k)$$

$$e(k) = u(k) - y(k)$$

$$e(k) = u(k) - x_1(k) - x_2(k)$$

$$x_1(k+1) = -x_2(k) + u(k)$$

$$x_2(k+1) = 0.6322x_1(k) + x_2(k) - 0.6322u(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k)$$

参见P295图7-31

---

*The End*