机器学习导论

第三讲 线性模型

机器学习模型引线

- 基础机器学习模型：线性模型
  - 高级模型：支持向量机、神经网络等
  - 高级模型：统计学习方法和理论
- 基础机器学习模型：决策树
  - 高级模型：Adaboost，随机森林，GBDT等
- 基础机器学习模型：贝叶斯模型
  - 高级模型：图模型等

提纲

- 线性模型引言
- 回归任务（模型：最小二乘法）
- 二分类任务（模型：对数几率回归、线性判别分析）
- 多分类任务（模型：一对一、一对其余、多对多）
- 类别不平衡任务

基本形式

- 线性模型一般形式

$$f(\boldsymbol{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_d x_d + b$$

- 向量形式

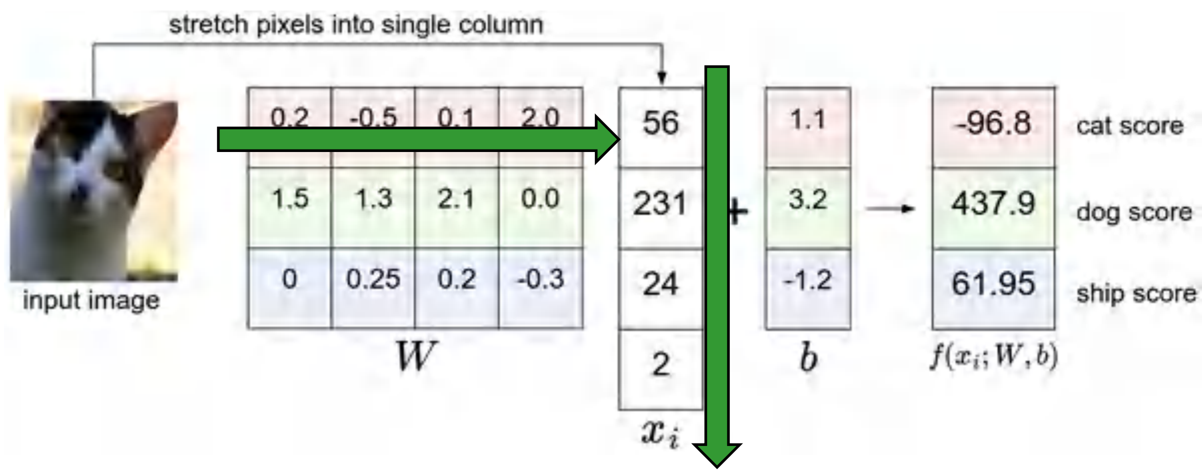
$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} + b$$

其中

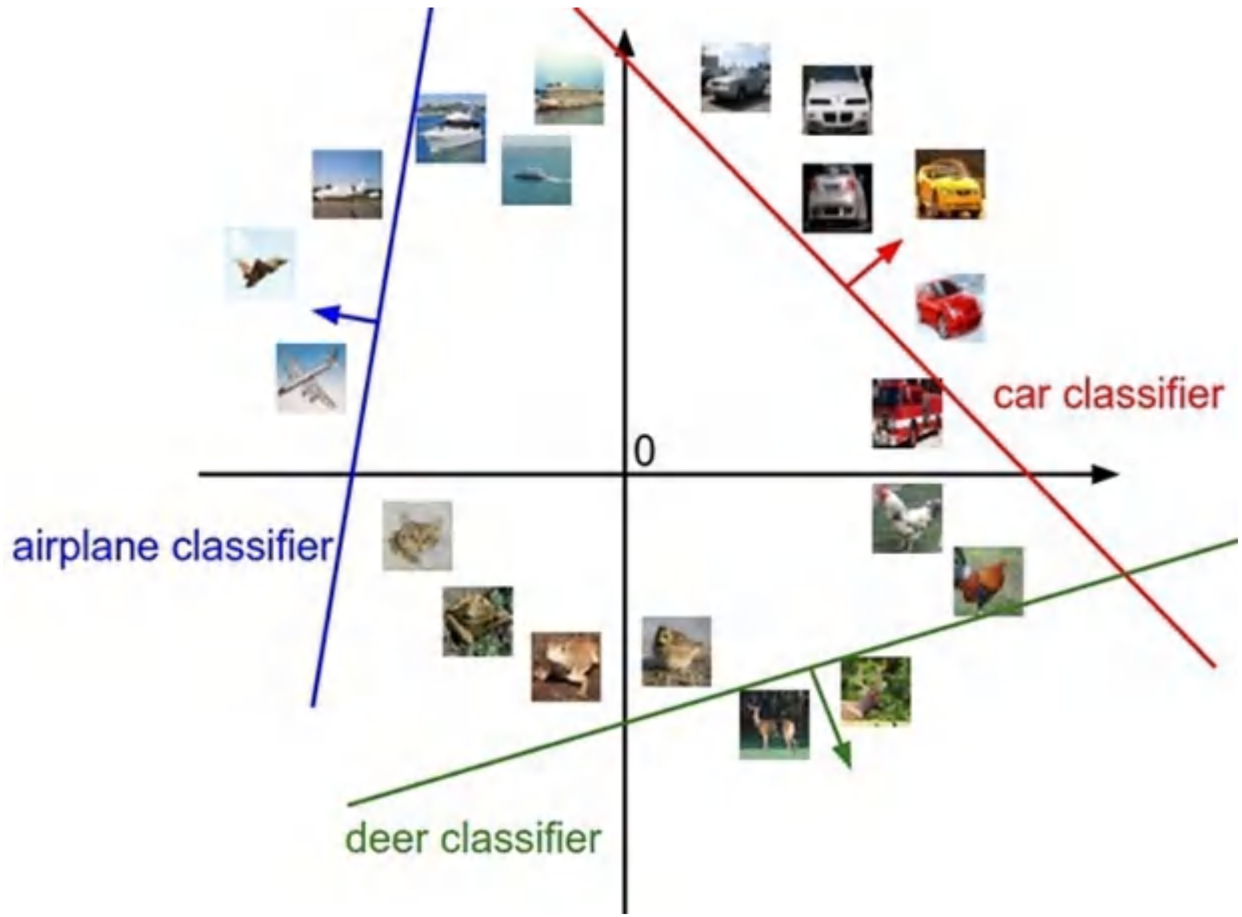
$$\boldsymbol{w} = (w_1; w_2; \ldots; w_d) \quad \boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_d)$$

一个典型的线性模型

如何区分猫、狗 等



另一个典型的线分



Perceptron 感知机

对于线性分类器，误分类则：

$$y_i(w \cdot x_i + b) > 0$$

所以可以顺势定义损失函数

$$L(w,b) = -\sum_{x_i \in M} y_i(w \cdot x_i + b)$$

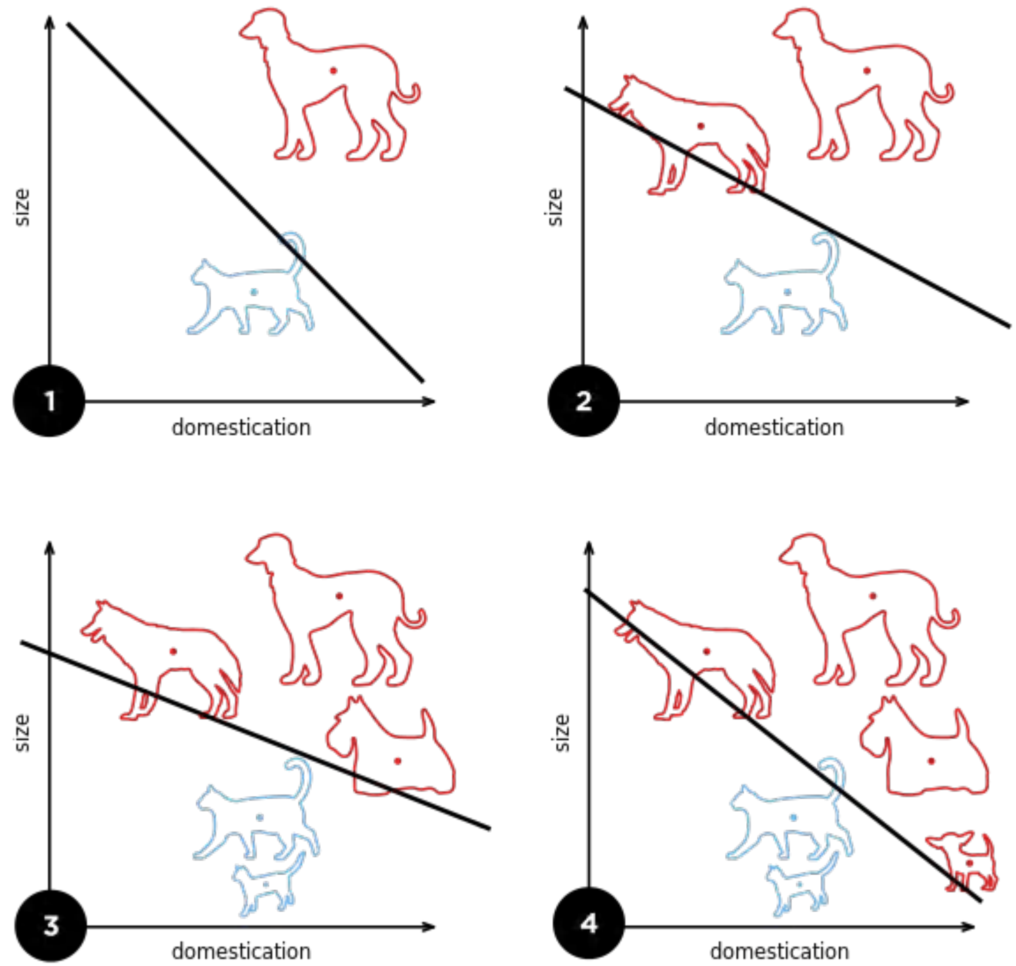
梯度：

$$\nabla_w L(w,b) = -\sum_{x_i \in M} y_i x_i$$

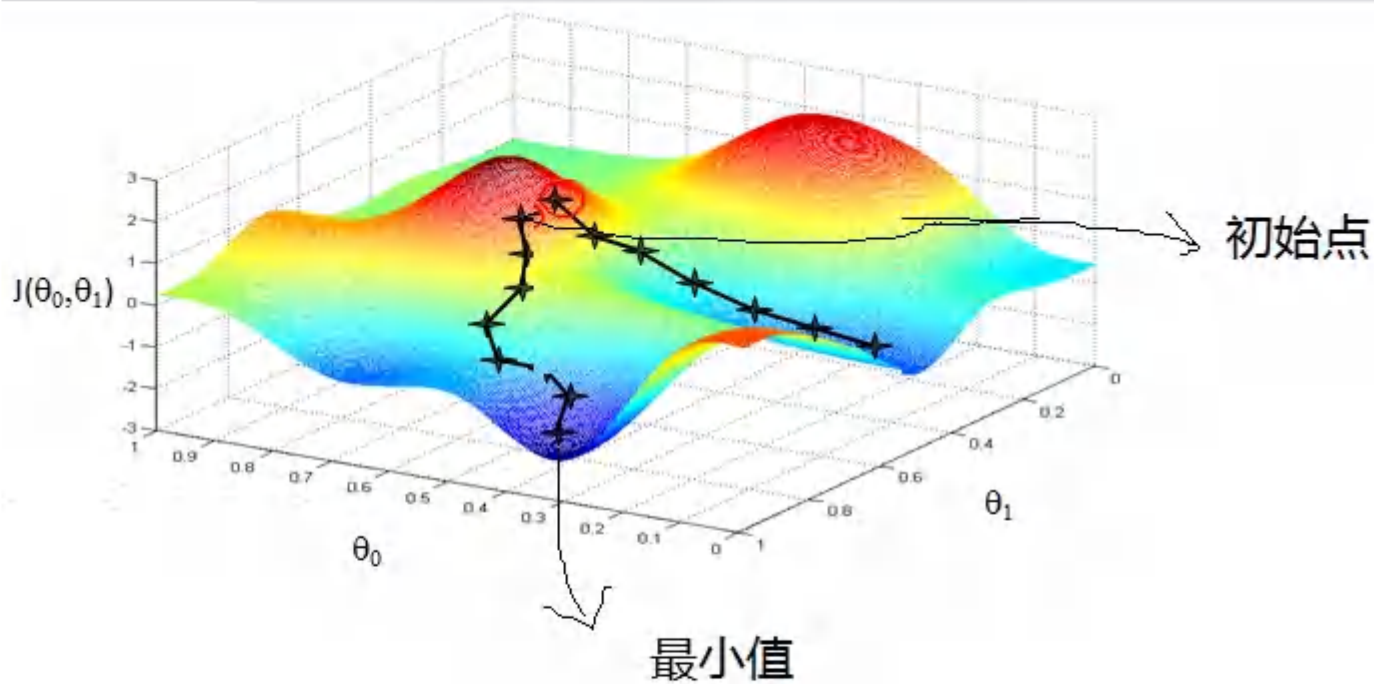
$$\nabla_b L(w,b) = -\sum_{x_i \in M} y_i$$

$$w := w + \eta y_i x_i$$

$$b := b + \eta y_i$$



revisit：梯度下降法



revisit：梯度下降法

- 一阶方法
- 无约束优化

考虑无约束优化问题 $\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$, 其中 $f(\boldsymbol{x})$ 为连续可微函数. 若能构造一个序列 $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots$ 满足

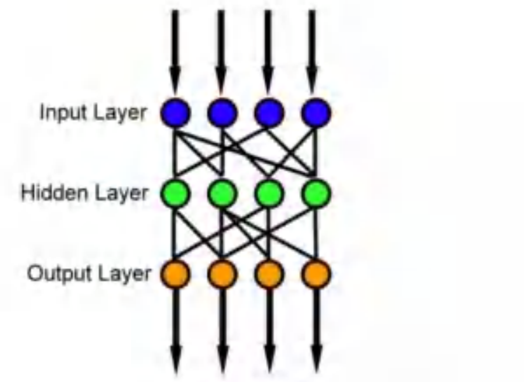
$$f(\boldsymbol{x}^{t+1}) < f(\boldsymbol{x}^t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \underbrace{\Delta x^\top \nabla f(x)}_{< 0}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = -\gamma \nabla f(x)$$

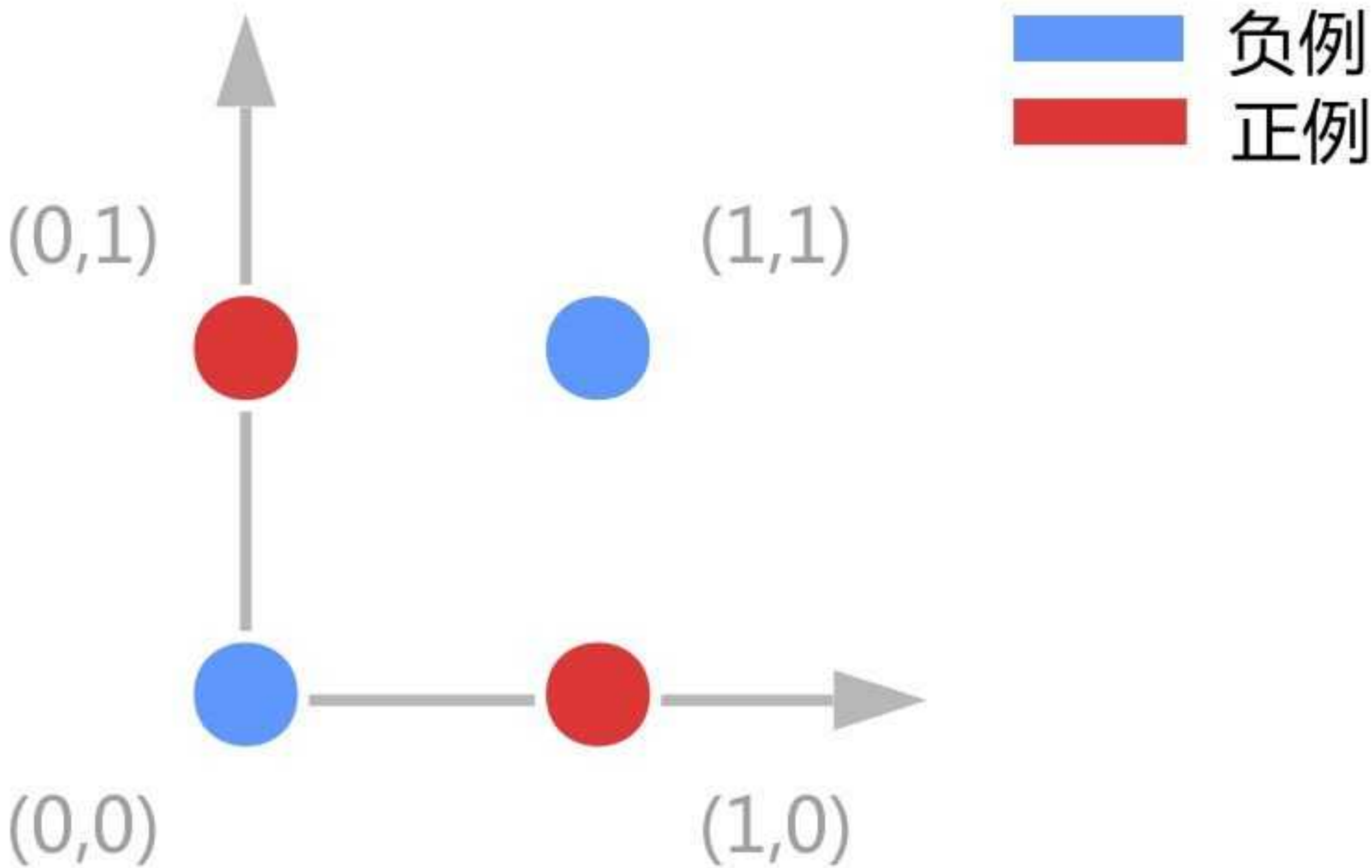
线性模型优点

- 形式简单、易于建模
- 可解释性
- 非线性模型的基础
  - 引入层级结构或高维映射



- 一个例子 $f_{好瓜}(\boldsymbol{x}) = 0.2 \cdot x_{色泽} + 0.5 \cdot x_{根蒂} + 0.3 \cdot x_{敲声} + 1$
  - 综合考虑色泽、根蒂和敲声来判断西瓜好不好
  - 其中根蒂的系数最大，表明根蒂对判别好坏最重要；而敲声的系数比色泽大，说明敲声比色泽更重要

线性模型的缺陷



提纲

- 线性模型引言
- 回归任务（模型：最小二乘法）
- 二分类任务（模型：对数几率回归、线性判别分析）
- 多分类任务（模型：一对一、一对其余、多对多）
- 类别不平衡任务

线性回归

- 给定数据集 $D = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, y_m)\}$

  其中 $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}; x_{i2}; \ldots; x_{id})$

- 线性回归（linear regression）目的
  - 学得一个线性模型以尽可能准确地预测实值输出标记

- 离散属性处理
  - 有“序”关系
    - 连续化为连续值
  - 无“序”关系
    - 有k个属性值，则转换为k维向量

线性回归

- 单一属性的线性回归目标

$$f(x) = wx_i + b \quad \text{使得} \quad f(x_i) \simeq y_i$$

- 参数/模型估计：最小二乘法（least square method）

$$\begin{aligned}(w^*, b^*) &= \underset{(w,b)}{\arg\min} \sum_{i=1}^{m} (f(x_i) - y_i)^2 \\ &= \underset{(w,b)}{\arg\min} \sum_{i=1}^{m} (y_i - wx_i - b)^2\end{aligned}$$

线性回归－最小二乘法

- 最小化均方误差

$$E_{(w,b)} = \sum_{i=1}^{m} (y_i - wx_i - b)^2$$

- 分别对 w 和 b 求导，可得

$$\frac{\partial E_{(w,b)}}{\partial w} = 2\left(w\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{i=1}^{m} (y_i - b)\, x_i\right)$$

$$\frac{\partial E_{(w,b)}}{\partial b} = 2\left(mb - \sum_{i=1}^{m} (y_i - wx_i)\right)$$

线性回归 - 最小二乘法

- 得到闭式（closed-form）解

$$w = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i - wx_i)$$

其中 $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$

多元线性回归

- 给定数据集

$$D = \{(\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, y_m)\}$$

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}; x_{i2}; \ldots; x_{id})$$

- 多元线性回归目标

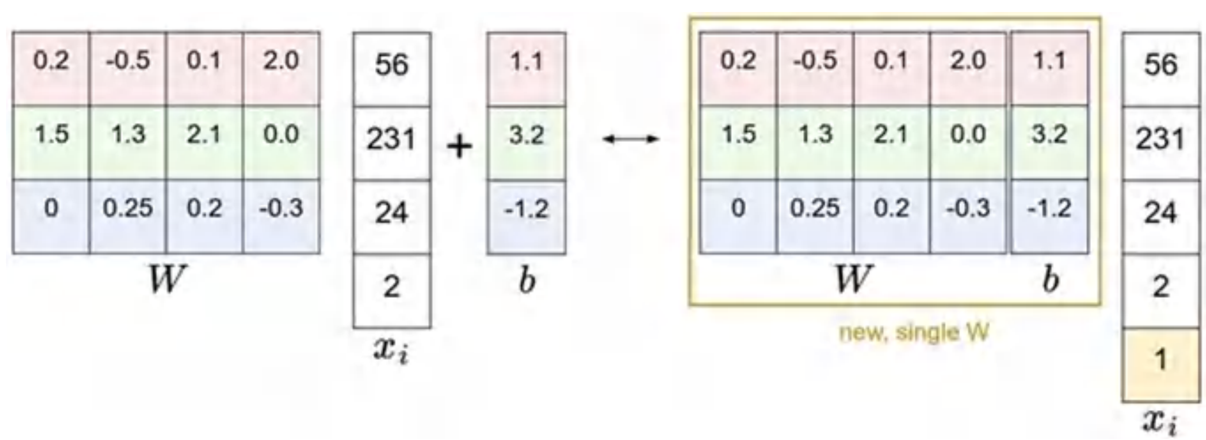
$$f(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_i + b \text{ 使得 } f(\boldsymbol{x}_i) \simeq y_i$$

多元线性回归 – 齐次表达

- 把 $\boldsymbol{w}$ 和 b 吸收入向量形式 $\hat{\boldsymbol{w}}=(\boldsymbol{w};b)$，数据集表示为

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1d} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2d} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{md} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} & 1 \\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x}_m^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=(y_1;y_2;\ldots;y_m)$$



多元线性回归 - 最小二乘法

- 最小二乘法（least square method）

$$\hat{\boldsymbol{w}}^* = \underset{\hat{\boldsymbol{w}}}{\arg\min} \left(\boldsymbol{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{w}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{w}}\right) .$$

令 $E_{\hat{\boldsymbol{w}}} = \left(\boldsymbol{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{w}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{w}}\right)$ ，对 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 求导得到

$$\frac{\partial E_{\hat{\boldsymbol{w}}}}{\partial \hat{\boldsymbol{w}}} = 2\mathbf{X}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{y}\right)$$

令上式为零可得 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 最优解的闭式解

多元线性回归 – 满秩讨论

- $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 是满秩矩阵或正定矩阵，则

$$\hat{\boldsymbol{w}}^* = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

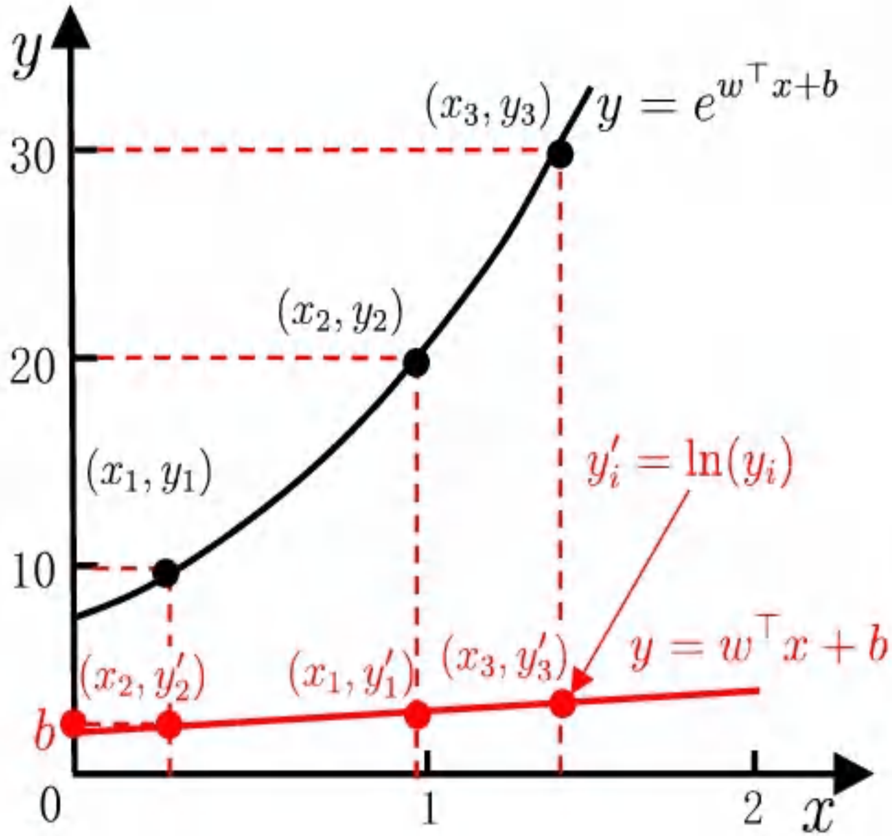
其中$\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}$是 $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 的逆矩阵，线性回归模型为

$$f\left(\hat{\boldsymbol{x}}_i\right) = \hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

- $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ 不是满秩矩阵
  - 引入正则化（参见6.4节，11.4节）

对数线性回归

- 输出标记的对数为线性模型逼近的目标



$$\ln y = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b$$

$$y = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b$$

线性回归 - 广义线性模型

- 一般形式

$$y = g^{-1}\left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b\right)$$

- g 称为联系函数（link function）
  - 单调可微函数

- 对数线性回归是 $g(\cdot) = \ln(\cdot)$ 义线性模型的特例

提纲

- 线性模型引言
- 回归任务（模型：最小二乘法）
- 二分类任务（模型：对数几率回归、线性判别分析）
- 多分类任务（模型：一对一、一对其余、多对多）
- 类别不平衡任务

二分类任务

- 预测值与输出标记

$$z = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b \qquad\qquad y \in \{0, 1\}$$

- 寻找函数将分类标记与线性回归模型输出联系起来

- 最理想的函数——单位阶跃函数

$$y = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ 0.5, & z = 0; \\ 1, & z > 0, \end{cases}$$

  - 预测值大于零就判为正例，小于零就判为反例，预测值为临界值零则可任意判别

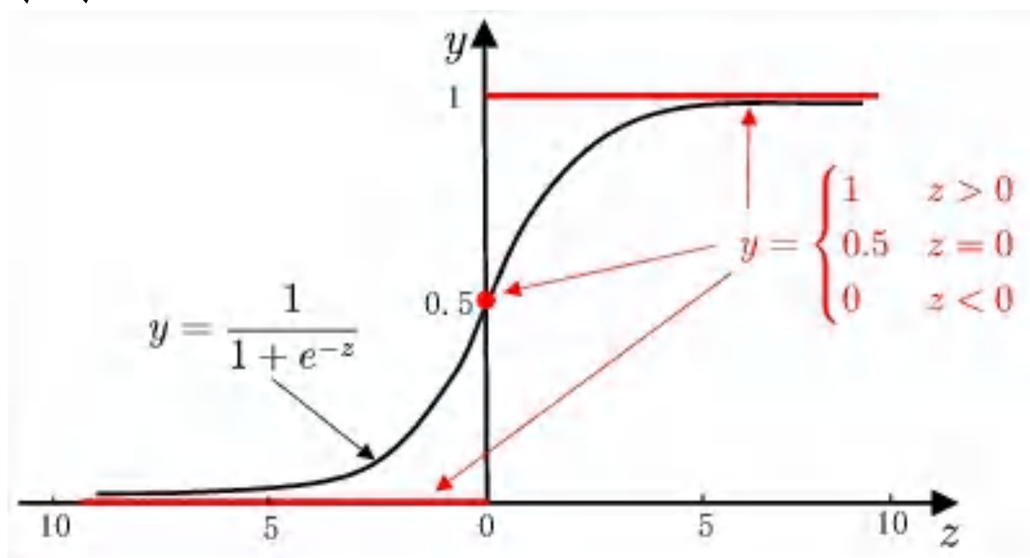
二分类任务

- 单位阶跃函数缺点
  - 不连续

- 替代函数——对数几率函数（logistic function）
  - 单调可微、任意阶可导

$$y = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

单位阶跃函数与对数几率函数的比较



对数几率回归

- 运用对数几率函数

$$y = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad \text{变为} \quad y = \frac{1}{1 + e^{-(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b)}}$$

- 对数几率（log odds）
  - 样本作为正例的相对可能性的对数

$$\ln \frac{y}{1-y}$$

- 对数几率回归的优势
  1. 无需事先假设数据分布
  2. 可得到“类别”的近似概率预测
  3. 可直接应用现有数值优化算法求取最优解

对数几率回归 – 极大似然法

- 对数几率

$$\ln\frac{p(y=1\mid \boldsymbol{x})}{p(y=0\mid \boldsymbol{x})}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+b$$

显然有

$$p(y=1\mid \boldsymbol{x})=\frac{e^{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+b}}{1+e^{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+b}}$$

$$p(y=0\mid \boldsymbol{x})=\frac{1}{1+e^{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+b}}$$

对数几率回归 - 极大似然法

- 极大似然法（maximum likelihood）
  - 给定数据集

$$\{(\boldsymbol{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m$$

  - 最大化样本属于其真实标记的概率
    - 最大化对数似然函数

$$\ell(\boldsymbol{w}, b) = \sum_{i=1}^m \ln p(y_i \mid \boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{w}_i, b)$$

对数几率回归 – 极大似然法

- 转化为最小化负对数似然函数求解
  - 令 $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{w}; b)$，$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}; 1)$，则 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + b$ 可简写为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}$
  - 再令 $p_1(\hat{\boldsymbol{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) = p(y = 1 \mid \hat{\boldsymbol{x}}; \boldsymbol{\beta})$

$$p_0(\hat{\boldsymbol{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) = p(y = 0 \mid \hat{\boldsymbol{x}}; \boldsymbol{\beta}) = 1 - p_1(\hat{\boldsymbol{x}}_i; \boldsymbol{\beta})$$

$$p(y_i \mid \boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{w}_i, b) = y_i p_1(\hat{\boldsymbol{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) + (1 - y_i)\, p_0(\hat{\boldsymbol{x}}_i; \boldsymbol{\beta})$$

则似然项可重写为

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{m} \left(-y_i \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_i + \ln\left(1 + e^{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_i}\right) \right)$$

对数几率回归

- 求解得

$$\boldsymbol{\beta}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}} \ell(\boldsymbol{\beta})$$

- 牛顿法第 t+1轮迭代解的更新公式

$$\boldsymbol{\beta}^{t+1} = \boldsymbol{\beta}^t - \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}\right)^{-1} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}$$

其中关于 β的一阶、二阶导数分别为

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\sum_{i=1}^{m} \hat{\boldsymbol{x}}_i \left(y_i - p_1(\hat{\boldsymbol{x}}_i; \boldsymbol{\beta})\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}} = \sum_{i=1}^{m} \hat{\boldsymbol{x}}_i \hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} p_1(\hat{\boldsymbol{x}}_i; \boldsymbol{\beta}) \left(1 - p_1(\hat{\boldsymbol{x}}_i; \boldsymbol{\beta})\right)$$

高阶可导连续凸函数，梯度下降法/牛顿法 [Boyd and Vandenberghe, 2004]

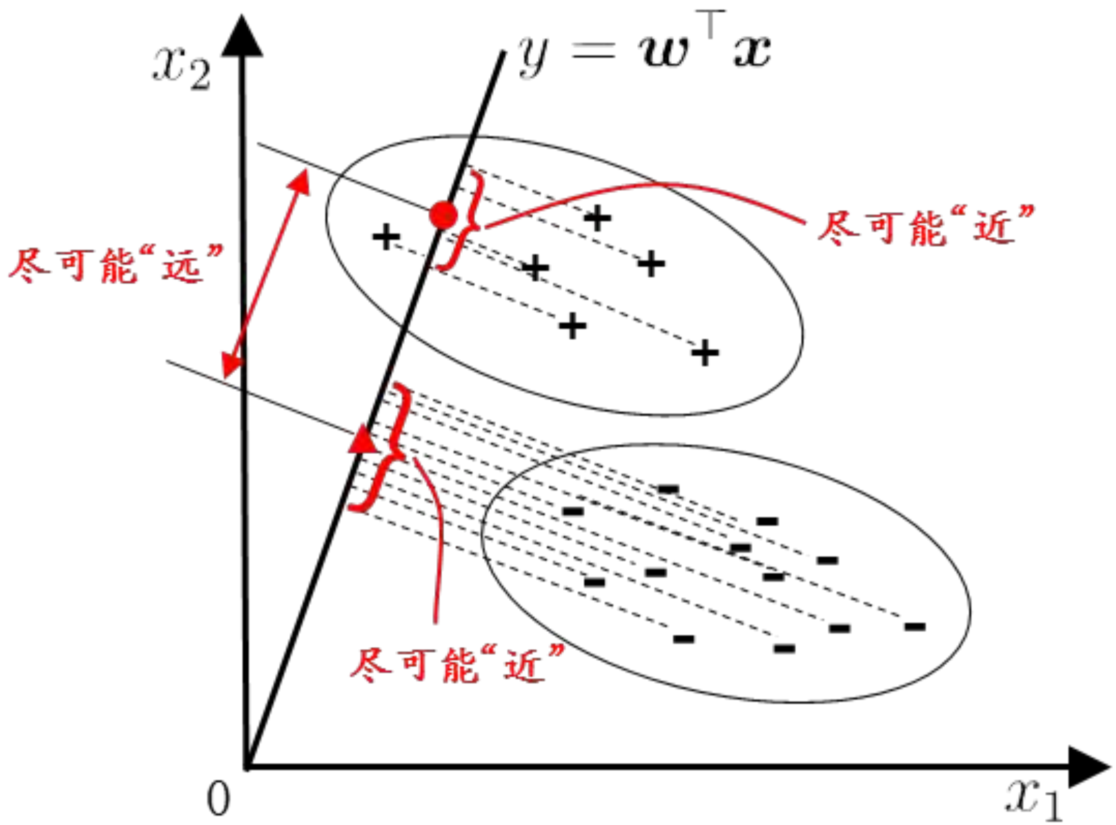
对数几率回归（logistic regression, LR）

- 主要建模思想：
  - 引入sigmod函数，建立离散标记与线性模型的关联
  - sigmod函数光滑，高阶可导，高度接近离散标记
  - 得到类别的概率似然估计
  - 构建极大似然目标函数
  - 优化求解：梯度下降、牛顿法等

- 主要优势
  - 可以具有类别的概率估计输出，辅助决策
  - 可以自然扩展到到多类任务（思考）
  - LR具有唯一最优解（思考：凸函数）

二分类任务– 线性判别分析

- 线性判别分析（Linear Discriminant Analysis）
  [Fisher, 1936]



LDA也可被视为一种监督降维技术

二分类任务– 线性判别分析

- LDA的思想
  - 欲使同类样例的投影点尽可能接近，可以让同类样例投影点的协方差尽可能小
  - 欲使异类样例的投影点尽可能远离，可以让类中心之间的距离尽可能大
- 一些变量
  - 第i类示例的集合 X_i
  - 第i类示例的均值向量 $\boldsymbol{\mu}_i$
  - 第i类示例的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_i$
  - 两类样本的中心在直线上的投影：$\boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{\mu}_0$　　$\boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{\mu}_1$
  - 两类样本的协方差：$\boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{w}$　　$\boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{w}$

二分类任务 – 线性判别分析

- 最大化目标

$$J = \frac{\left\| \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}_1 \right\|_2^2}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_0 \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_1 \boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1 \right) \left(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1 \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\Sigma}_1 \right) \boldsymbol{w}}$$

- 类内散度矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_w &= \boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\Sigma}_1 \\ &= \sum_{x \in X_0} \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_0 \right) \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_0 \right)^{\mathrm{T}} + \sum_{x \in X_1} \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_1 \right) \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_1 \right)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

- 类间散度矩阵 $\mathbf{S}_b = \left(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1 \right) \left(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1 \right)^{\mathrm{T}}$

二分类任务– 线性判别分析

- 广义瑞利商（generalized Rayleigh quotient）

$$J=\frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_b\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_w\boldsymbol{w}}$$

- 令 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_w\boldsymbol{w}=1$大化广义瑞利商等价形式为

$$\min_{\boldsymbol{w}} \; -\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_b\boldsymbol{w}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_w\boldsymbol{w}=1$$

- 运用拉格朗日乘子法 $\mathbf{S}_b\boldsymbol{w}=\lambda\mathbf{S}_w\boldsymbol{w}$

revisit：拉格朗日乘子法

- 对于约束曲面上的任意点 $\boldsymbol{x}$, 该点的梯度 $\nabla g(\boldsymbol{x})$ 正交于约束曲面;
- 在最优点 $\boldsymbol{x}^*$, 目标函数在该点的梯度 $\nabla f(\boldsymbol{x}^*)$ 正交于约束曲面.

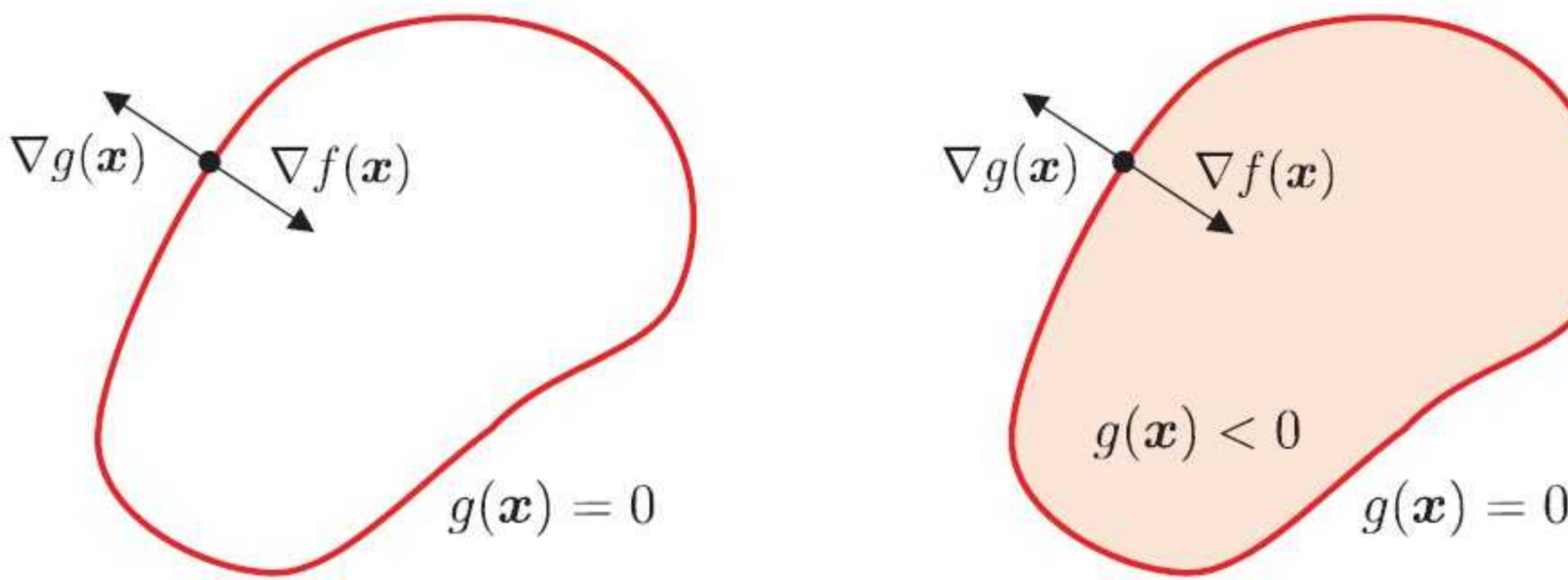
由此可知, 在最优点 $\boldsymbol{x}^*$, 如附图 1 所示, 梯度 $\nabla g(\boldsymbol{x})$ 和 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 的方向必相同或相反, 即存在 $\lambda \neq 0$ 使得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \lambda \nabla g(\boldsymbol{x}^*) = 0 \ , \tag{B.1}$$

λ 称为拉格朗日乘子. 定义拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x}) \ , \tag{B.2}$$

revisit：拉格朗日乘子法



(a) 等式约束　　　(b) 不等式约束

二分类任务– 线性判别分析

$$\boldsymbol{w} = \lambda^{-1}\mathbf{S}_w^{-1}\mathbf{S}_b\boldsymbol{w} = \underline{\lambda^{-1}}\mathbf{S}_w^{-1}(\mu_0 - \mu_1)\underline{(\mu_0 - \mu_1)^{\top}\boldsymbol{w}}$$

- 结果

$$\boldsymbol{w} = \mathbf{S}_w^{-1}(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1)$$

- 求解
  – 奇异值分解 $\mathbf{S}_w = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$
- LDA的贝叶斯决策论解释
  – 两类数据同先验、满足高斯分布且协方差相等时，LDA达到最优分类

LDA推广 – 多分类任务

- 全局散度矩阵

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_w = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T$$

- 类内散度矩阵

$$\mathbf{S}_w = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_{w_i}$$

其中 $\mathbf{S}_{w_i} = \sum_{\boldsymbol{x} \in X_i} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_i)^T$

$$\mathbf{S}_b = \mathbf{S}_t - \mathbf{S}_w = \sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu})^T$$

LDA推广– 多分类任务

- 优化目标

$$\max_{\mathbf{W}} \frac{\operatorname{tr}\left(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_b\mathbf{W}\right)}{\operatorname{tr}\left(\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_w\mathbf{W}\right)}$$

其中 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{d\times(N-1)}$

$$\mathbf{S}_b\mathbf{W} = \lambda\mathbf{S}_w\mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$ 的闭式解则是 $\mathbf{S}_w^{-1}\mathbf{S}_b$ N-1个最大广义特征值所对应的特征向量组成的矩阵

- 多分类LDA将样本投影到N-1维空间，N-1通常远小于数据原有的属性数，因此LDA也被视为一种监督降维技术

LDA

- 主要建模思想：
  - 寻找线性超平面，使得同类样例的投影点尽可能接近，异类样例的投影点尽可能远离
  - 得到广义瑞利商形式，设计巧妙
  - 得到最优解，是个闭式解

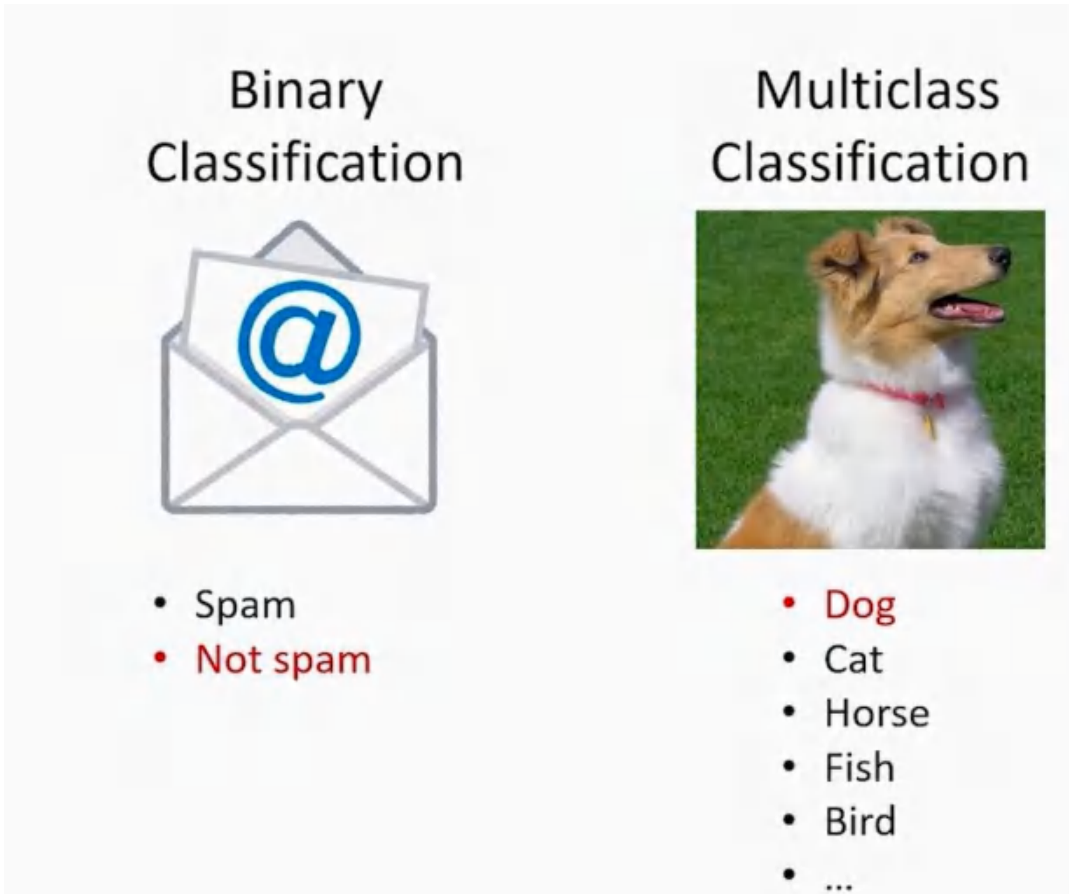
- 历史地位
  - LDA能够用于分类任务，但是因为其目标函数不直接对应经验风险，性能不如直接优化经验风险的方法
  - 因LDA投影点有效地得到类别区分方向，保留大量类别之前的判别信息，LDA成为数据降维最主流的方法之一

提纲

- 线性模型引言
- 回归任务（模型：最小二乘法）
- 二分类任务（模型：对数几率回归、线性判别分析）
- 多分类任务（模型：一对一、一对其余、多对多）
- 类别不平衡任务

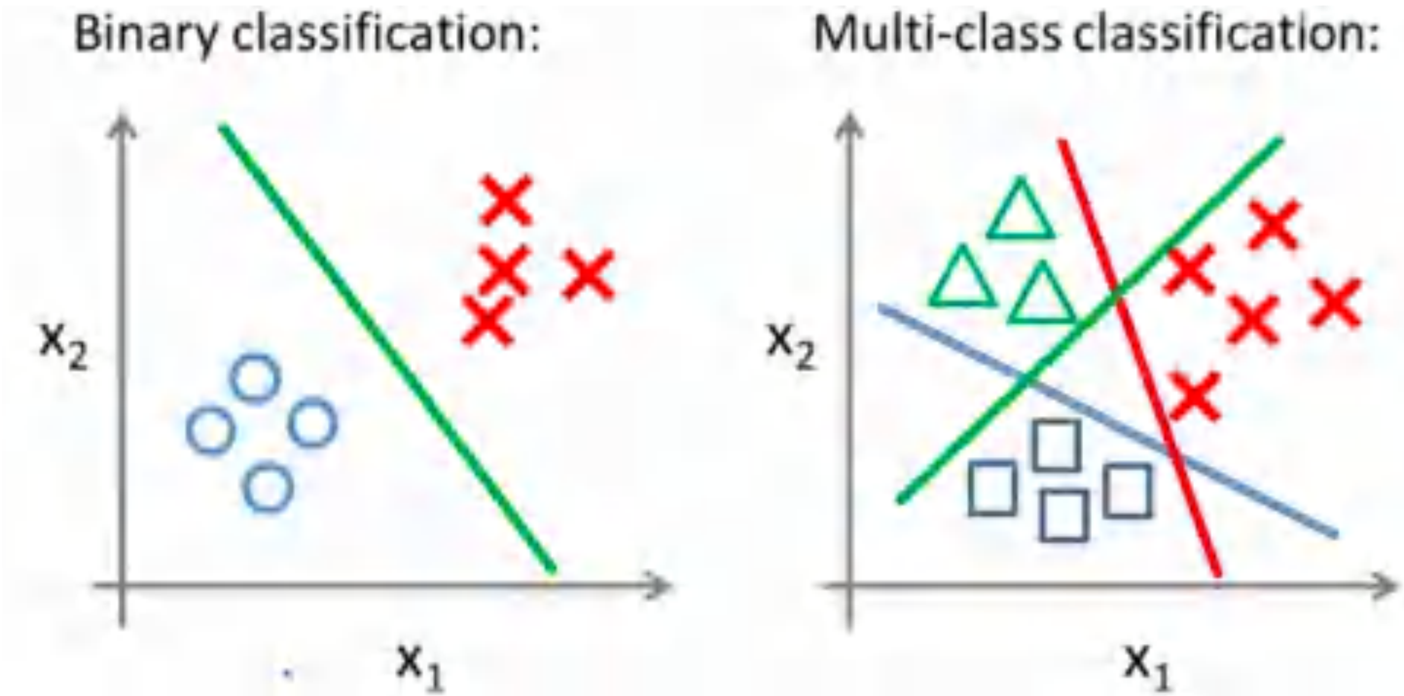
多分类学习

- 多分类任务


Binary Classification
Multiclass Classification
Spam
Not spam
Dog
Cat
Horse
Fish
Bird
...

多分类学习

- 多分类任务



Binary classification:
x_2
x_1
Multi-class classification:
x_2
x_1

多分类学习

- 多分类学习方法
  - 常用技巧：利用二分类学习器解决多分类问题
    - 对问题进行拆分，为拆出的每个二分类任务训练一个分类器
    - 对于每个分类器的预测结果进行集成以获得最终的多分类结果

- 拆分策略
  - 一对一（One vs. One, OvO）
  - 一对其余（One vs. Rest, OvR）
  - 多对多（Many vs. Many, MvM）

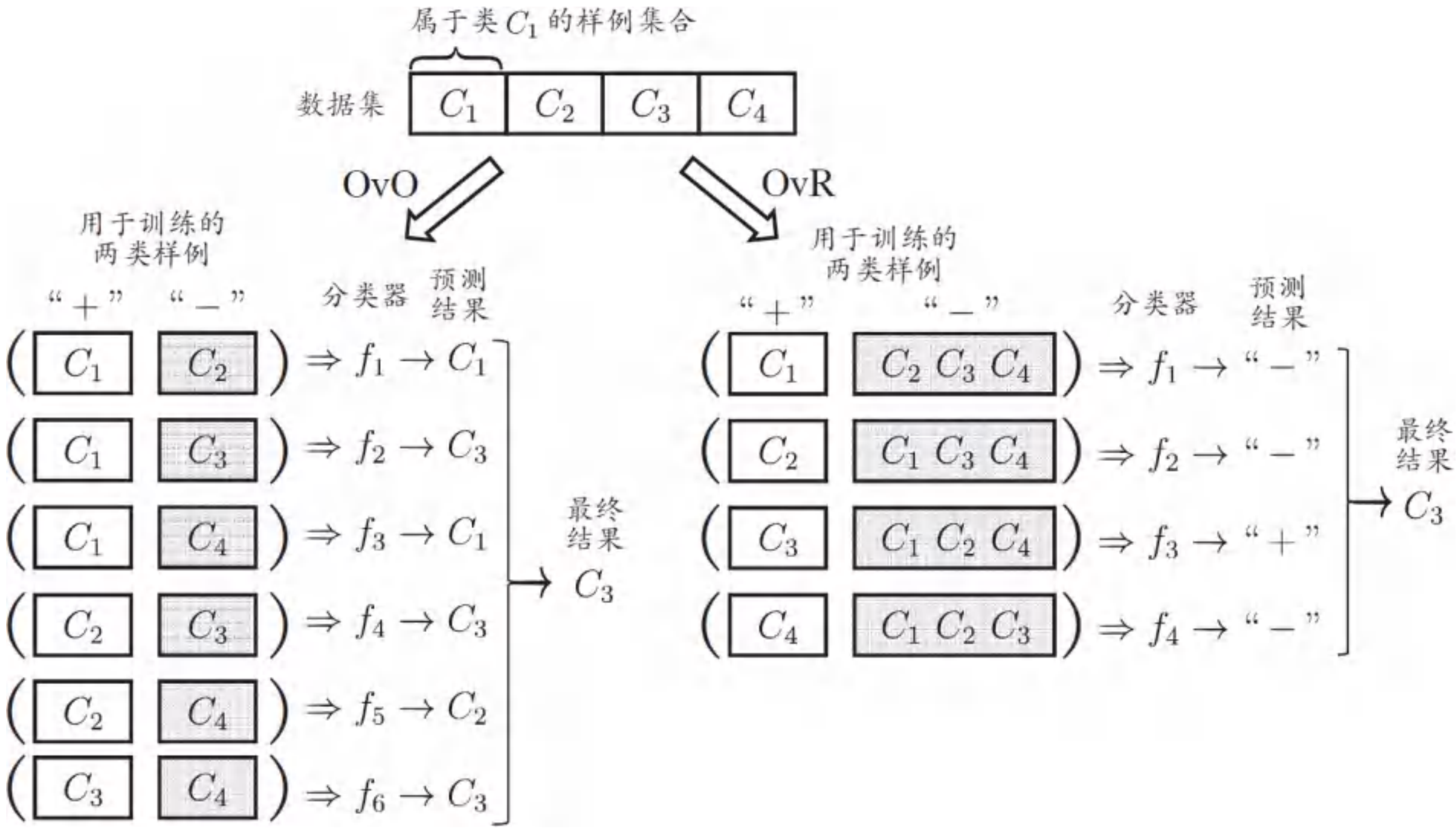
多分类学习– 一对一

- 拆分阶段
  - N个类别两两配对
    - N(N-1)/2 个二类任务
  - 各个二类任务学习分类器
    - N(N-1)/2 个二类分类器
- 测试阶段
  - 新样本提交给所有分类器预测
    - N(N-1)/2 个分类结果
  - 投票产生最终分类结果
    - 被预测最多的类别为最终类别

多分类学习– 一对其余

- 任务拆分
  - 某一类作为正例，其他反例
    - N 个二类任务
  - 各个二类任务学习分类器
    - N 个二类分类器
- 测试阶段
  - 新样本提交给所有分类器预测
    - N 个分类结果
  - 比较各分类器预测置信度
    - 置信度最大类别作为最终类别

多分类学习 – 两种策略比较



多分类学习 – 两种策略比较

一对一

- 训练N(N-1)/2个分类器，存储开销和测试时间大
- 训练只用两个类的样例，训练时间短

一对其余

- 训练N个分类器，存储开销和测试时间小
- 训练用到全部训练样例，训练时间长

预测性能取决于具体数据分布

多分类学习– 多对多

- 多对多（Many vs Many, MvM）
  - 若干类作为正类，若干类作为反类

□ 纠错输出码（Error Correcting Output Code, ECOC）

编码：对N个类别做M次划分，每次划分将一部分类别划为正类，一部分划为反类

M个二类任务
各个类别长度为M的编码

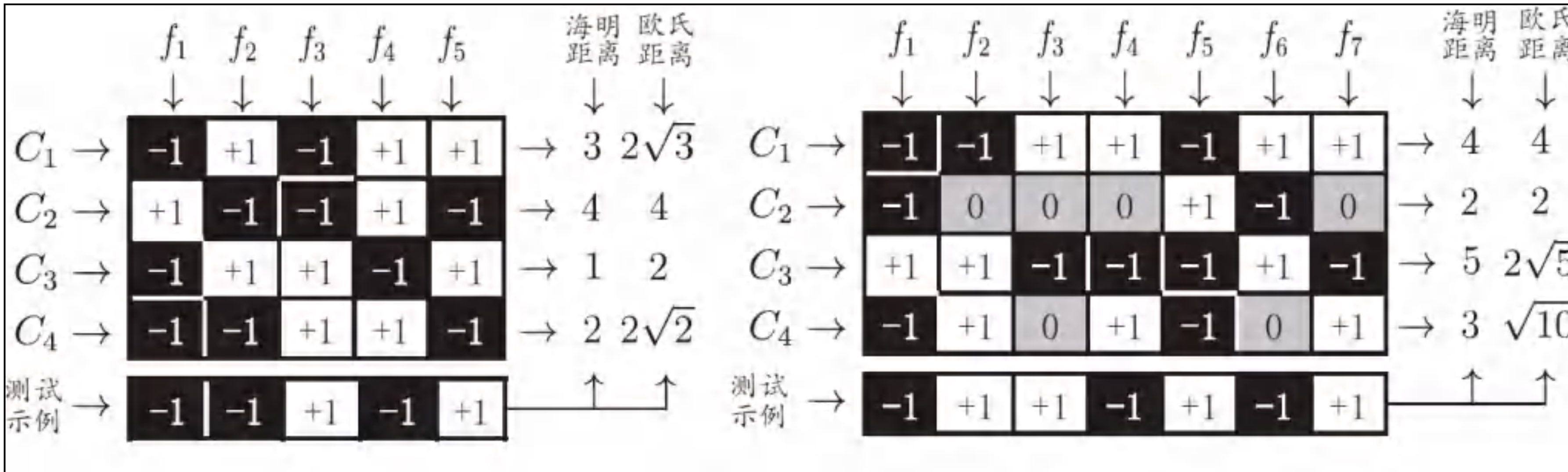
解码：测试样本交给M个分类器预测

长度为M的编码预测

距离最小的类别为最终类别

多分类学习– 多对多

- 纠错输出码 (Error Correcting Output Code, ECOC)



(a) 二元 ECOC 码　　(b) 三元 ECOC 码

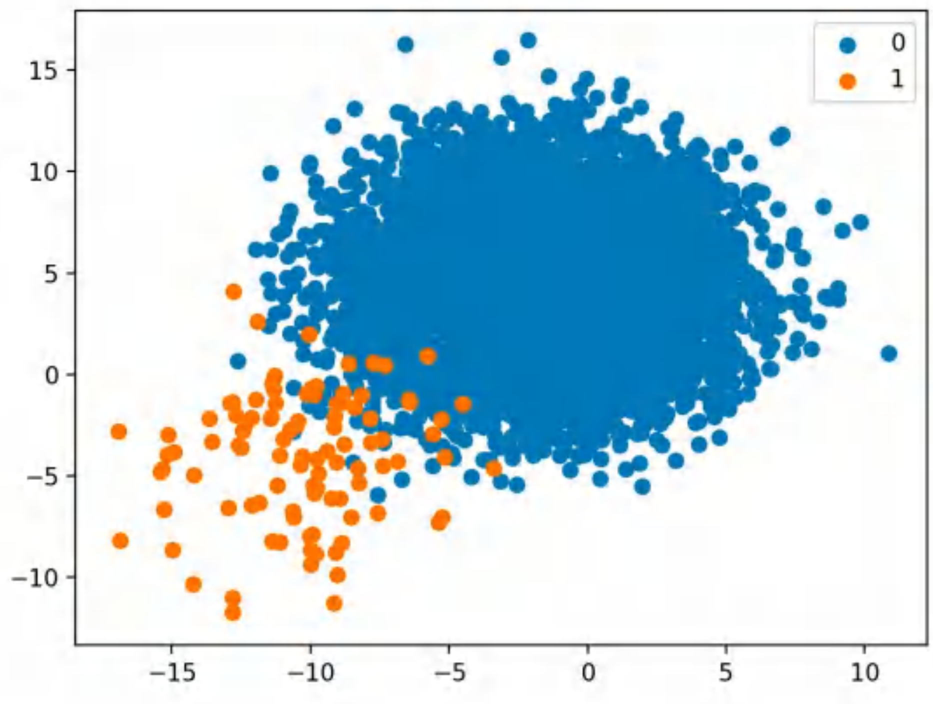
- ECOC编码对分类器错误有容忍和修正能力，编码越长、纠错能力越强
- 对同等长度的编码，理论上来说，任意两个类别之间的编码距离越远，则纠错能力越强

提纲

- 线性模型引言
- 回归任务（模型：最小二乘法）
- 二分类任务（模型：对数几率回归、线性判别分析）
- 多分类任务（模型：一对一、一对其余、多对多）
- 类别不平衡任务

类别不平衡问题

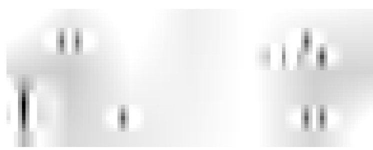
- 类别不平衡



类别不平衡问题

- 类别不平衡（class imbalance）
  - 不同类别训练样例数相差很大情况（正类为小类）

类别平衡正例预测



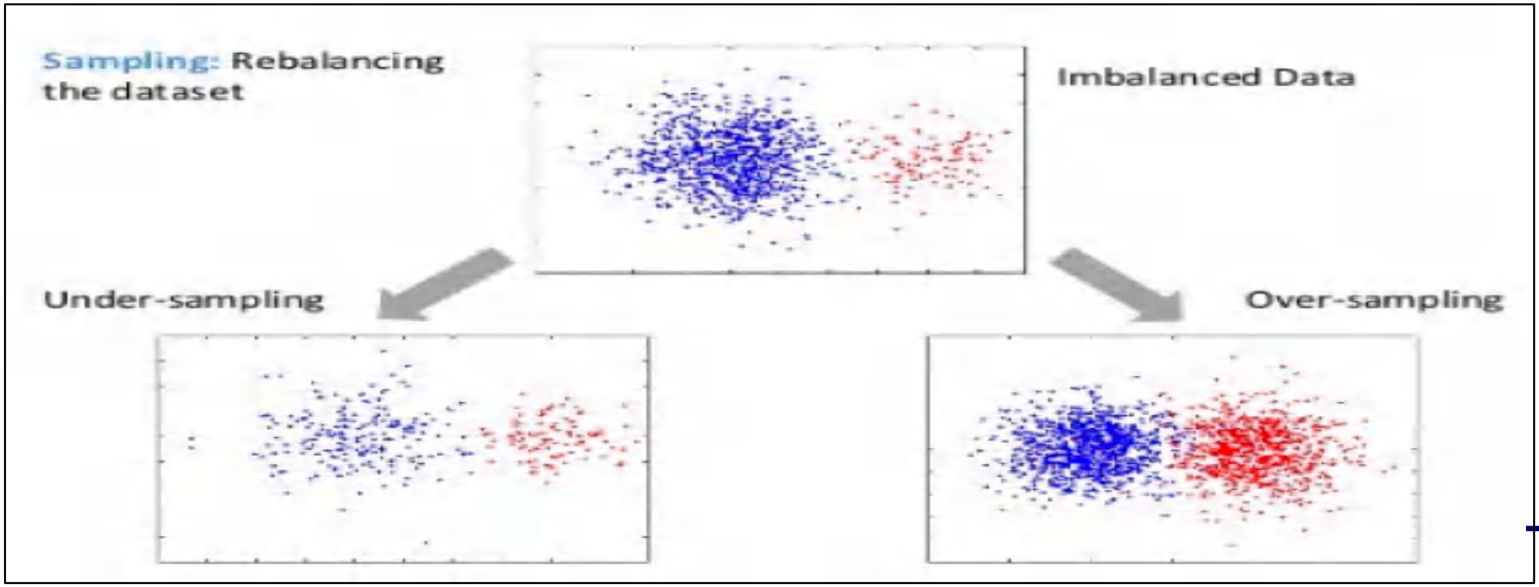
正负类比例

$$\frac{y'}{1-y'} = \frac{y}{1-y} \times \frac{m^-}{m^+} .$$

- 将类别不平衡任务 变成 类别平衡任务 来解决

类别不平衡问题

- 再缩放方法（rescaling method）
  - 欠采样（under sampling）
    - 去除一些反例使正反例数目接近（EasyEnsemble [Liu et al.,2009]）
  - 过采样（over sampling）
    - 增加一些正例使正反例数目接近（SMOTE [Chawla et al.2002]）
  - 阈值移动（threshold-moving）



小结

- 线性模型引言
- 回归任务
  - 掌握最小二乘法原理和推导
- 二分类任务：
  - 熟悉对数几率回归、线性判别分析的建模原理
- 多分类任务
  - 熟悉一对一、一对其余、多对多的原理
- 类别不平衡任务
  - 了解处理类别不平衡问题的几种手法