

机器人建模与控制

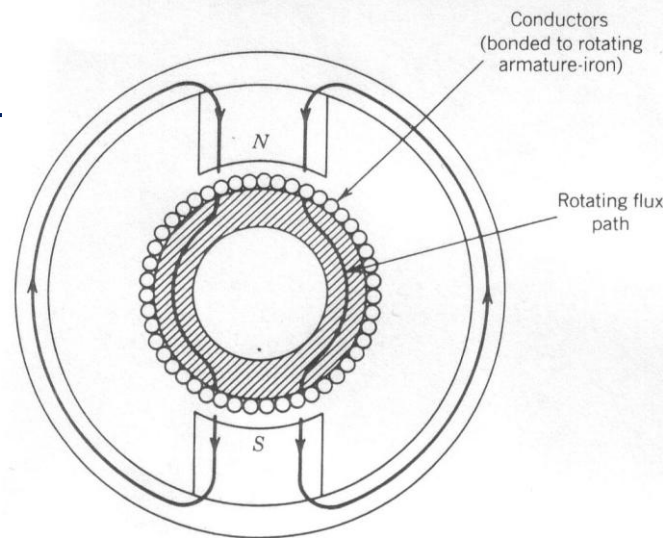
第8章 机器人运动控制

8.1 独立关节控制



8.1.1 电机及电机驱动器

直流电机包括定子和转子，转子的主要部分是可通电的电枢（线圈绕组）



在第 i 关节电机的电枢两端施加电枢电压 $U_{mi}(t)$ ，则有电枢电流 $I_{mi}(t)$ ，因 $I_{mi}(t)$ 在定子磁场中，会产生定子对转子的力矩 $T_{ei}(t)$ ，该力矩会改变转子转速（电机转速） $\omega_{mi}(t)$ ，其大小与电流成正比（**转矩公式**）， $T_{ei}(t) = C_{Ti}I_{mi}(t)$ ， C_{Ti} 是电机 i 的转矩系数

当转子转动时，电枢切割定子磁力线，电枢电路中会出现反电动势 $E_{mi}(t)$ ，其大小与转速成正比， $E_{mi}(t) = k_{ei}\omega_{mi}(t)$ ， k_{ei} 是电机 i 的电动势系数

忽略取值相对较小的电枢电感，记电枢电阻为 R_{mi} ，电枢电路方程： $U_{mi}(t) = R_{mi}I_{mi}(t) + E_{mi}(t)$

电机驱动器可视为电压放大模块 $U_{mi}(t) = k_{ui}U_{ci}(t)$ ， k_{ui} 为关节 i 驱动器的放大倍数， $U_{ci}(t)$ 为第 i 关节控制电压

综合上面公式，可得**转速公式**， $\omega_{mi} = \left(\frac{k_{ui}}{k_{ei}} \right) U_{ci} - \left(\frac{R_{mi}}{k_{ei}} \right) I_{mi}$

8.1 独立关节控制

8.1.2 减速器及关节模型

摩擦 当物体与另一物体沿接触面的切线方向运动或有相对运动的趋势时，在两物体的接触面之间有阻碍它们相对运动的作用力，这种力叫摩擦力。接触面之间的这种现象或特性叫“摩擦”

摩擦分为静摩擦和动摩擦

按动摩擦表面的润滑状态，摩擦可分为干摩擦、边界摩擦和流体（粘性）摩擦

干摩擦：摩擦副表面直接接触，没有润滑剂存在时的摩擦

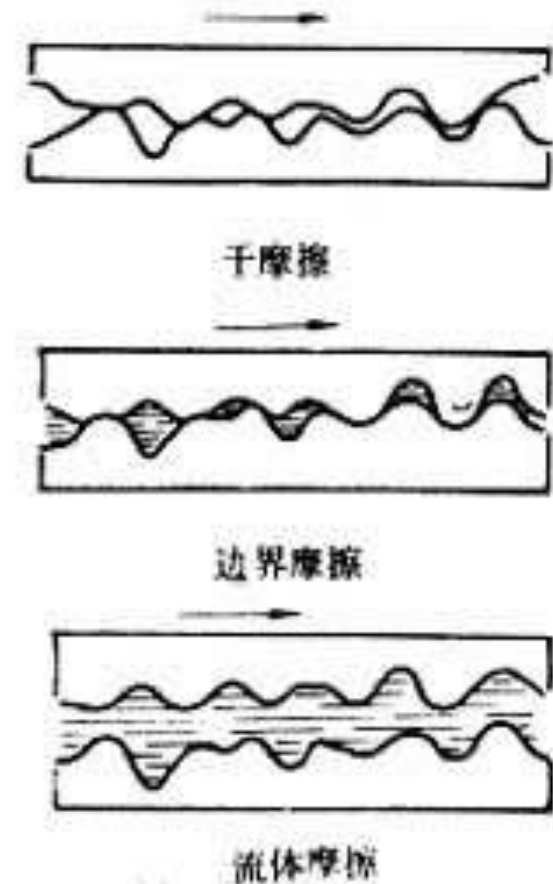
干摩擦力=法向力 \times 干摩擦系数

流体（粘性）摩擦：流体润滑状态下的摩擦。

当流体为层流状时：

粘性摩擦力=物体相对运动速度 \times 粘性摩擦系数

边界摩擦相当于干摩擦和流体摩擦之间的一种状态



8.1 独立关节控制

电机 i 的转子通过传动比为 $\eta_i:1$ 的齿轮减速器与第 i 连杆相连

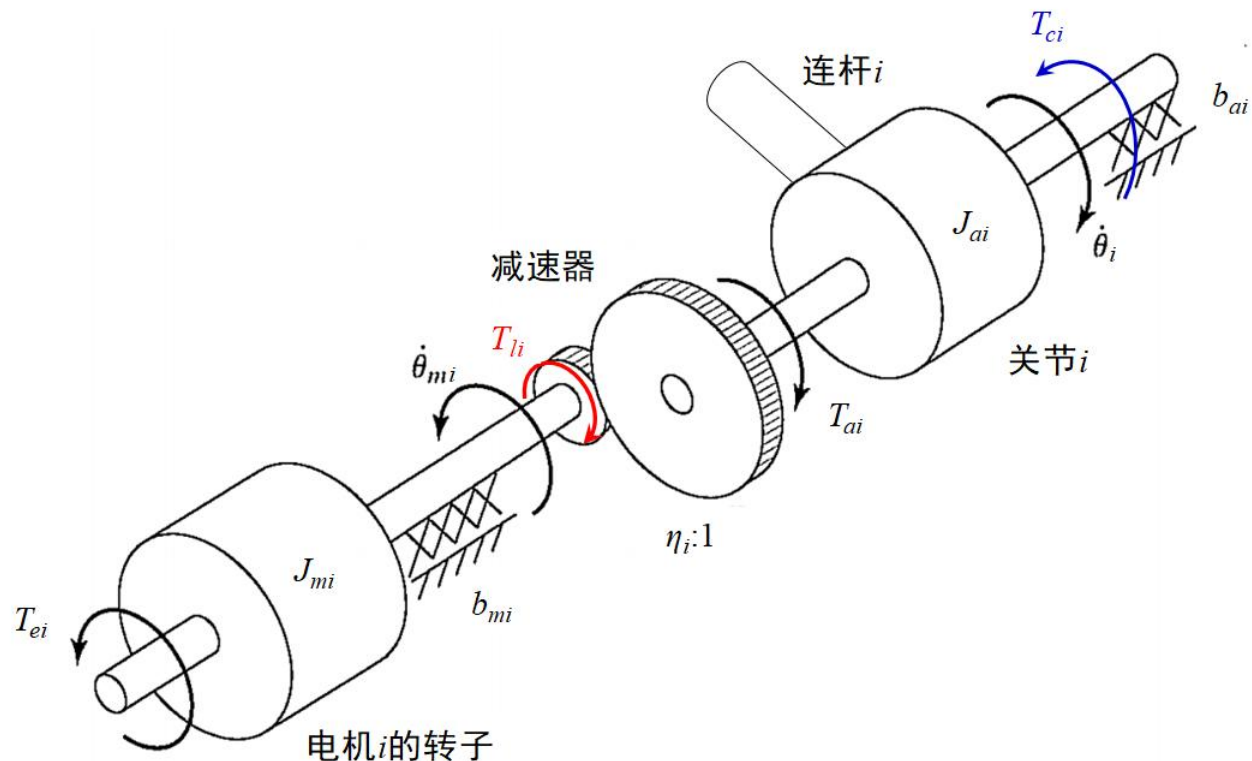
电机转角与关节角度的关系：

$$\theta_{mi}(t) = \eta_i \theta_i(t)$$

$T_{li}(t)$ 为输出齿轮对转子反作用力形成的力矩

$T_{ai}(t)$ 是输入齿轮对关节作用力形成的力矩(关节力矩)

$$T_{ai}(t) = \eta_i T_{li}(t)$$



由 $d\theta_i/dt = \omega_i$ 及 $d\theta_{mi}/dt = \omega_{mi}$ ，知减速器的减速公式为 $\omega_{mi}(t) = \eta_i \omega_i(t)$

电机转子侧的动力学方程为 $J_{mi} \dot{\omega}_{mi} = T_{ei} - T_{li} - b_{mi} \omega_{mi}$

J_{mi} 是转子侧刚体绕电机轴的转动惯量； b_{mi} 是转子轴承的粘滞摩擦系数

关节侧的动力学方程为 $J_{ai} \dot{\omega}_i = T_{ai} - T_{ci} - b_{ai} \omega_i$

J_{ai} 是关节侧关于关节轴的等效转动惯量； b_{ai} 是关节轴承的粘滞摩擦系数， T_{ci} 是干扰力矩

8.1 独立关节控制

基于前述公式，有

$$T_{ei} = \frac{C_{Ti}k_{ui}}{R_{mi}} U_{ci} - \frac{\eta_i C_{Ti}k_{ei}}{R_{mi}} \omega_i$$

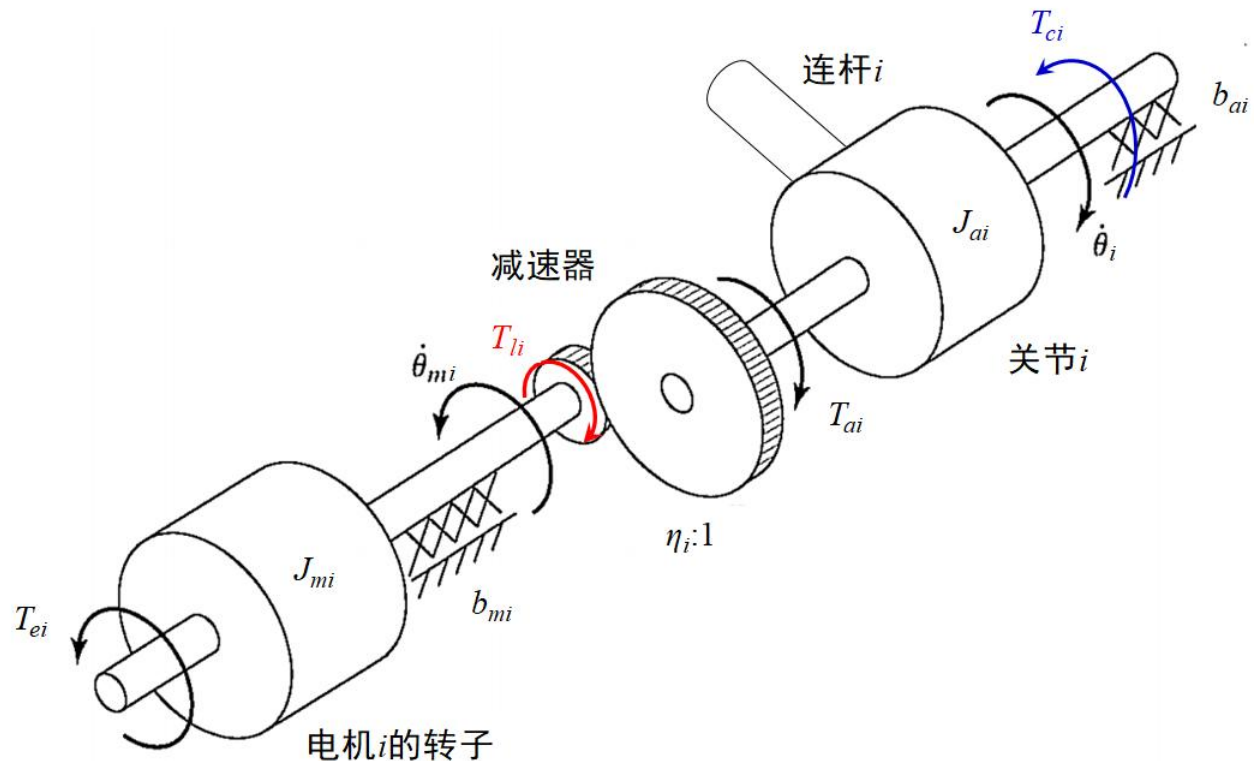
并进一步得到关节模型

$$J_{ci}\ddot{\theta}_i + B_{ci}\dot{\theta}_i = J_{ci}\dot{\omega}_i + B_{ci}\omega_i = K_{ci}U_{ci} - T_{ci}$$

式中，关节 i 的总等效惯量 J_{ci} 、等效阻尼 B_{ci} 和控制系数 K_{ci} 的表达式为

$$J_{ci} = J_{ai} + \eta_i^2 J_{mi} \quad B_{ci} = b_{ai} + \eta_i^2 b_{mi} + \frac{\eta_i^2 C_{Ti}k_{ei}}{R_{mi}} \quad K_{ci} = \frac{\eta_i C_{Ti}k_{ui}}{R_{mi}}$$

从形式上看，单关节模型是一个控制输入为 U_{ci} 、干扰输入为 T_{ci} 、输出为 θ_i 的线性系统



8.1 独立关节控制

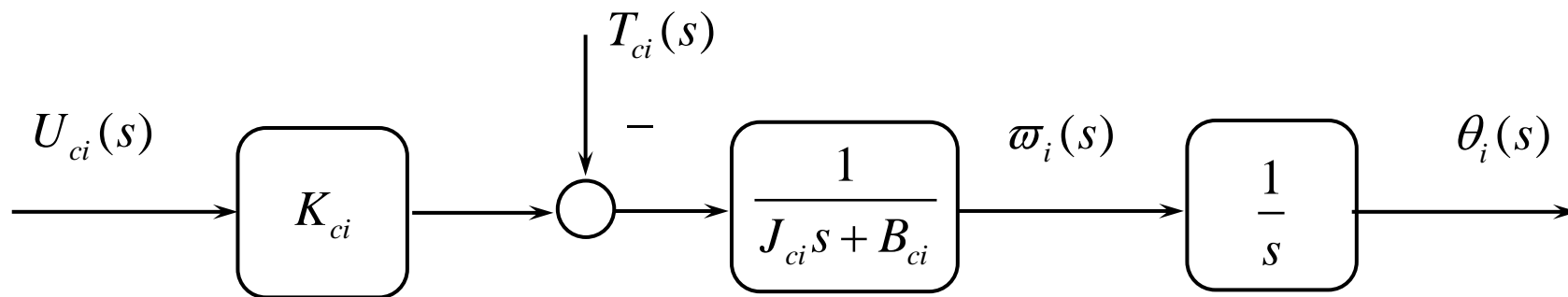
8.1.3 旋转编码器及关节传递函数模型

对关节模型 $J_{ci}\ddot{\theta}_i + B_{ci}\dot{\theta}_i = K_{ci}U_{ci} - T_{ci}$ 进行拉普拉斯变换，有

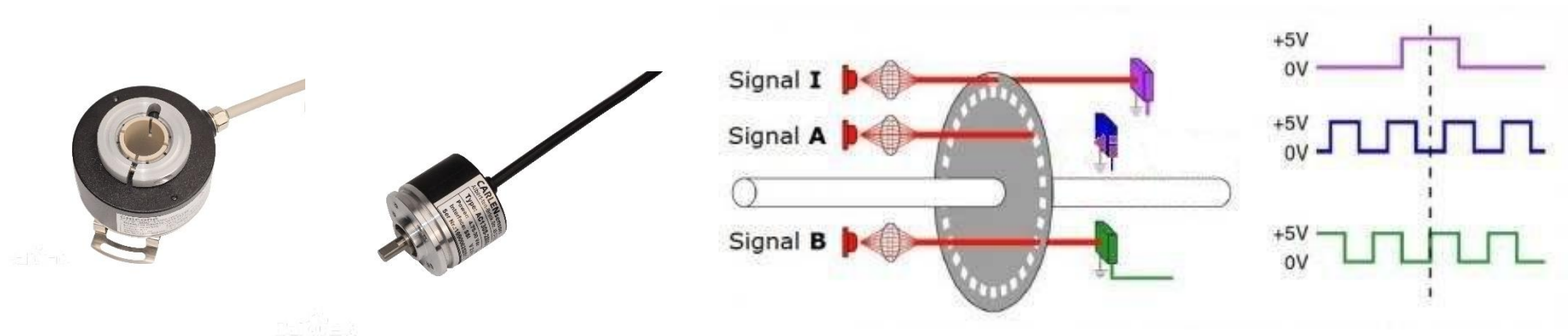
$$J_{ci}s^2\theta_i(s) + B_{ci}s\theta_i(s) = K_{ci}U_{ci}(s) - T_{ci}(s)$$

进而得到关节的传递函数模型

$$\theta_i(s) = \frac{K_{ci}}{s(J_{ci}s + B_{ci})}U_{ci}(s) - \frac{1}{s(J_{ci}s + B_{ci})}T_{ci}(s)$$



8.1 独立关节控制



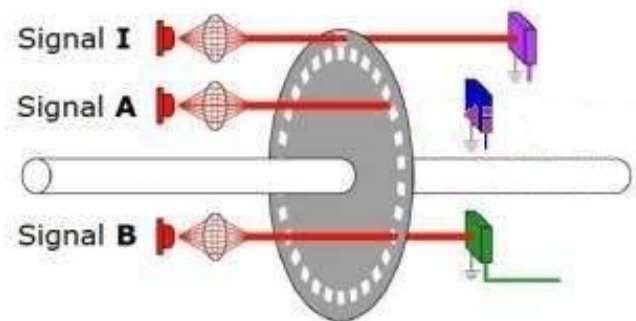
在带有明暗方格的码盘两侧，安放发光元件和光敏元件
随着码盘的旋转，光敏元件输出的波形经整形后变成脉冲
根据脉冲计数，可以测量固定在码盘上的转轴的角位移

根据A相信号和B相信号间的关系，可以判断旋转方向

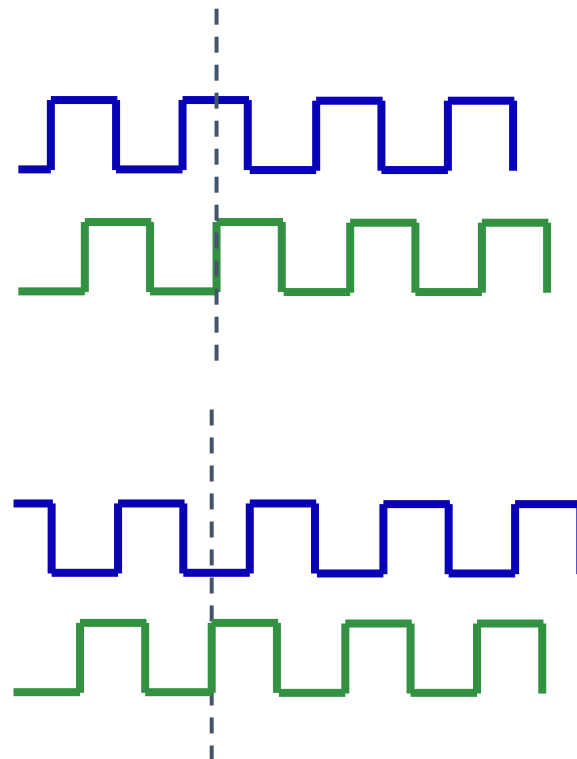
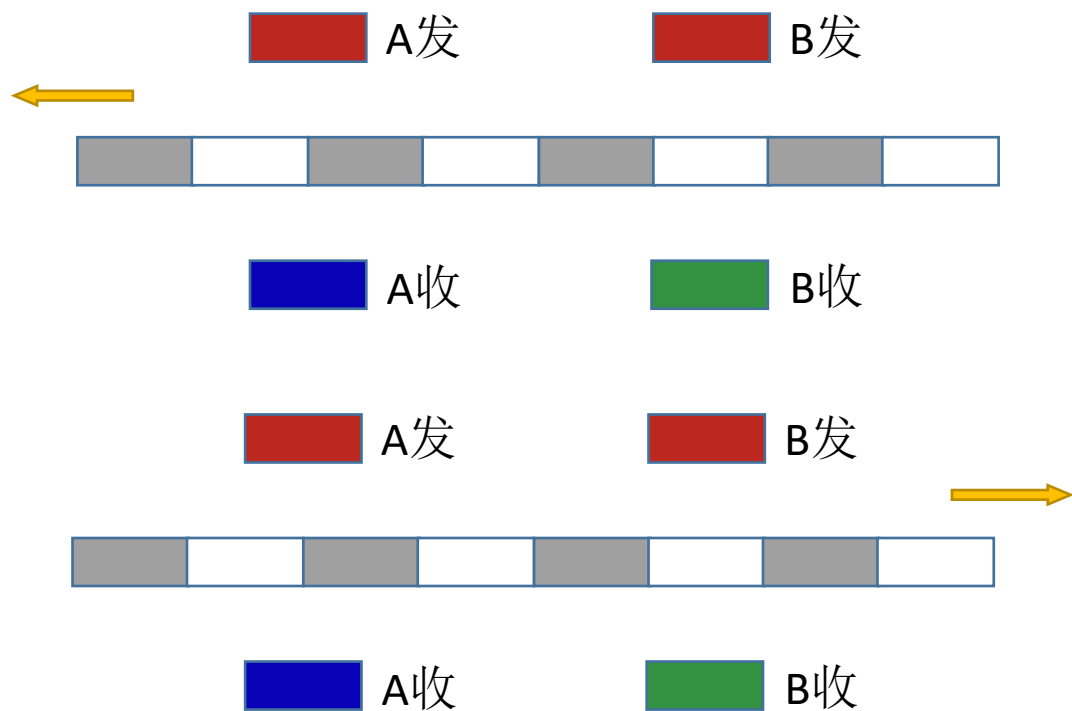
码盘上有Z相标志信号，每转一圈输出一个脉冲，可用于确定零位

根据单位时间内的脉冲计数（高速）或两个相邻脉冲的时间间隔（低速），
可以测量固定在码盘上的转轴的角速度

8.1 独立关节控制



根据A相信号和B相信号间的
关系，可以判断旋转方向



8.1 独立关节控制

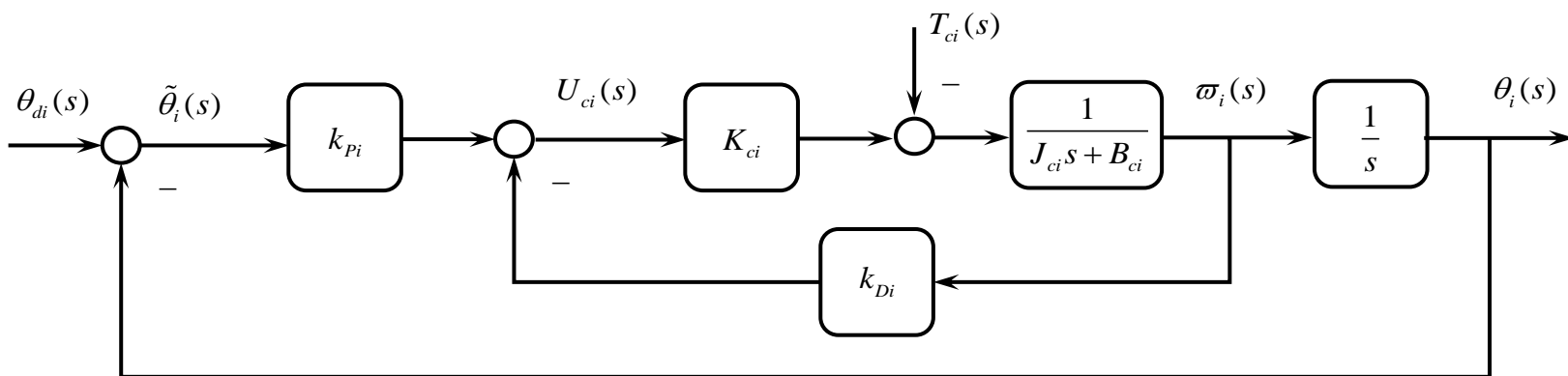
8.1.4 考虑阶跃输入的PD控制器设计

PD控制算法

$$U_{ci}(s) = k_{Pi}\tilde{\theta}_i(s) - k_{Di}\omega_i(s)$$

$$\tilde{\theta}_i(s) = \theta_{di}(s) - \theta_i(s)$$

θ_{di} 是参考输入（期望的关节角曲线）； $\tilde{\theta}_i$ 是偏差； k_{Pi} 和 k_{Di} 分别为比例系数和微分系数



闭环系统模型

$$\theta_i(s) = \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}s^2 + (B_{ci} + k_{Di}K_{ci})s + k_{Pi}K_{ci}}\theta_{di}(s) - \frac{1}{J_{ci}s^2 + (B_{ci} + k_{Di}K_{ci})s + k_{Pi}K_{ci}}T_{ci}(s)$$

闭环特征多项式

$$s^2 + \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}$$

注意到 J_{ci} 、 B_{ci} 和 K_{ci} 都是大于零的参数，由劳斯判据可知：设计 k_{Pi} 和 k_{Di} 为正系数可确保闭环稳定

8.1 独立关节控制

闭环特征多项式
$$s^2 + \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}} = s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2$$

式中，自然频率
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}}$$

阻尼比
$$\zeta = \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{2\sqrt{J_{ci}k_{Pi}K_{ci}}}$$

机器人系统一般不希望出现响应振荡，临界阻尼系统具有快速性最好的非振荡响应，设计中通常取 $\zeta = 1$

就快速性而言， ω_0 取得越高越好，但考虑到控制电压 U_{ci} （对应电机电压）存在上限值约束，过高的 ω_0 会使得 U_{ci} 饱和而呈现非线性，所以需要在快速性与电压上限之间折中选择 ω_0 的值

确定了 ζ 和 ω_0 ，即可计算出 k_{Pi} 和 k_{Di}

8.1 独立关节控制

$$s^2 + \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}} = s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2$$

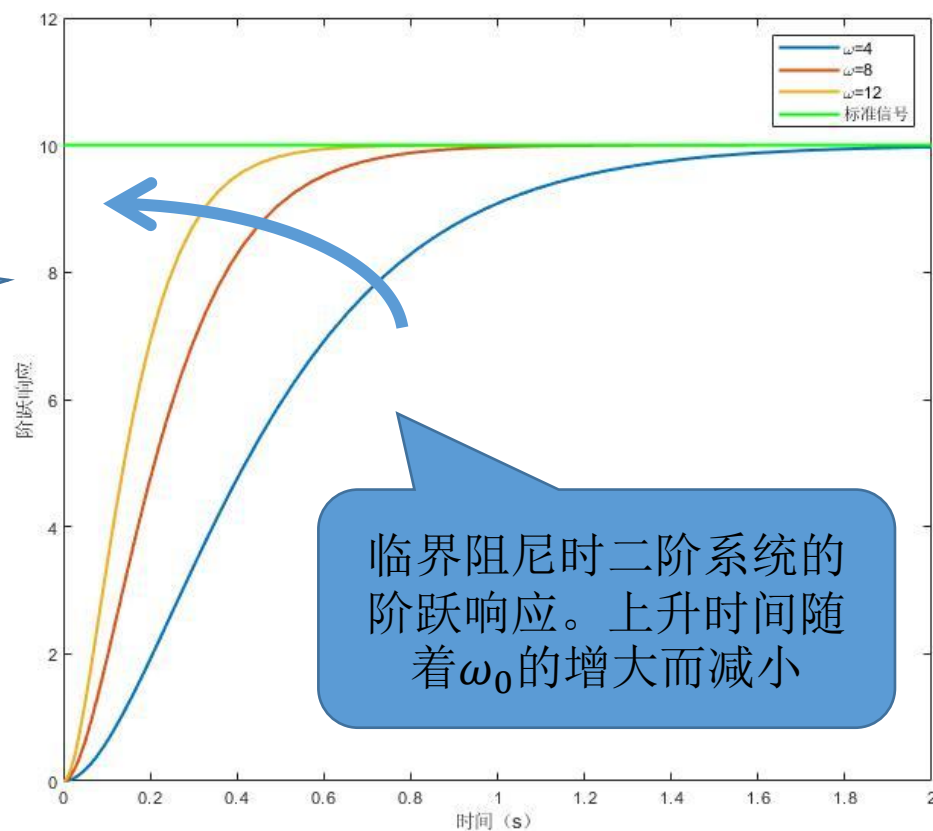
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}}$$

$$\zeta = \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{2\sqrt{J_{ci}k_{Pi}K_{ci}}}$$

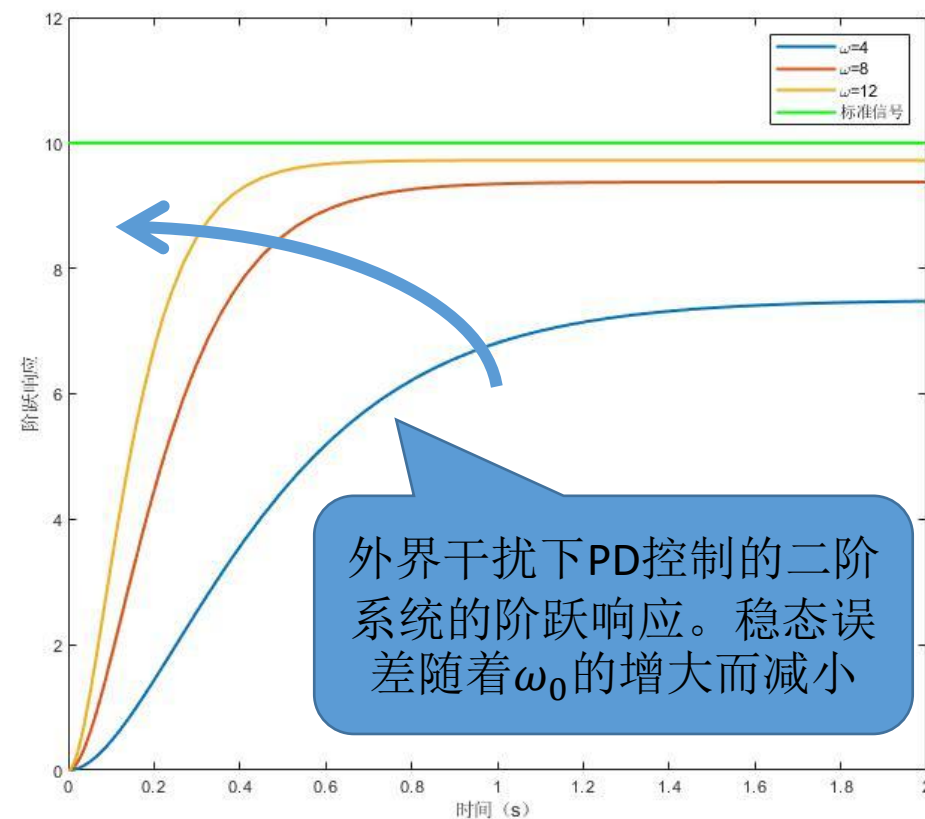
$$J_{ci} = B_{ci} = K_{ci} = 1$$

$$\zeta = 1$$

阶跃响应（无干扰 $d_i(t) = 0$ ）

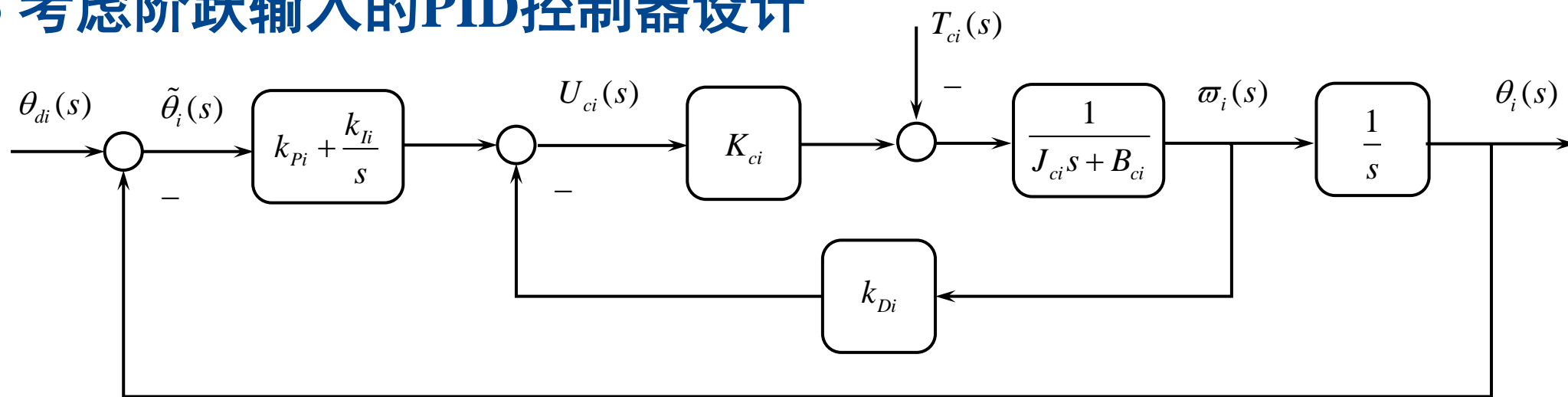


阶跃响应（有干扰 $d_i(t) = 40$ ）



8.1 独立关节控制

8.1.5 考虑阶跃输入的PID控制器设计



PID控制算法 $U_{ci}(s) = \left(k_{Pi} + \frac{k_{Ii}}{s} \right) \tilde{\theta}_i(s) - k_{Di} \omega_i(s)$ ， k_{Ii} 为积分系数

闭环系统模型

$$\theta_i(s) = \frac{\frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Ii}K_{ci}}{J_{ci}}}{s^3 + \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{J_{ci}}s^2 + \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Ii}K_{ci}}{J_{ci}}} \theta_{di}(s) - \frac{s}{s^3 + \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{J_{ci}}s^2 + \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Ii}K_{ci}}{J_{ci}}} T_{ci}(s)$$

8.1 独立关节控制

闭环特征多项式

$$s^3 + \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{J_{ci}}s^2 + \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Li}K_{ci}}{J_{ci}}$$

s^3	1	$k_{Pi}K_{ci}/J_{ci}$
s^2	$(B_i + k_{Di}K_{ci})/J_{ci}$	$k_{Li}K_{ci}/J_{ci}$
s^1	$\frac{(B_i+k_{Di}K_{ci})k_{Pi}K_{ci}-J_{ci}k_{Li}K_{ci}}{B_i+k_{Di}K_{ci}}$	
s^0	$k_{Li}K_{ci}/J_{ci}$	

注意到 J_{ci} 、 B_{ci} 和 K_{ci} 都是大于零的参数，由劳斯判据可知：闭环稳定的充要条件是 k_{Pi} 、 k_{Li} 和 k_{Di} 为正且

$$(B_{ci} + k_{Di}K_{ci})k_{Pi} > J_{ci}k_{Li}$$

8.1 独立关节控制



闭环特征多项式

$$s^3 + \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{J_{ci}}s^2 + \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Li}K_{ci}}{J_{ci}}$$

注意到 J_{ci} 、 B_{ci} 和 K_{ci} 都是大于零的参数，由劳斯判据可知：闭环稳定的充要条件是 k_{Pi} 、 k_{Li} 和 k_{Di} 为正且

$$(B_{ci} + k_{Di}K_{ci})k_{Pi} > J_{ci}k_{Li}$$

工业界有多种简单易用的PID参数设计调试策略

在独立关节PID控制中常用的一个策略：

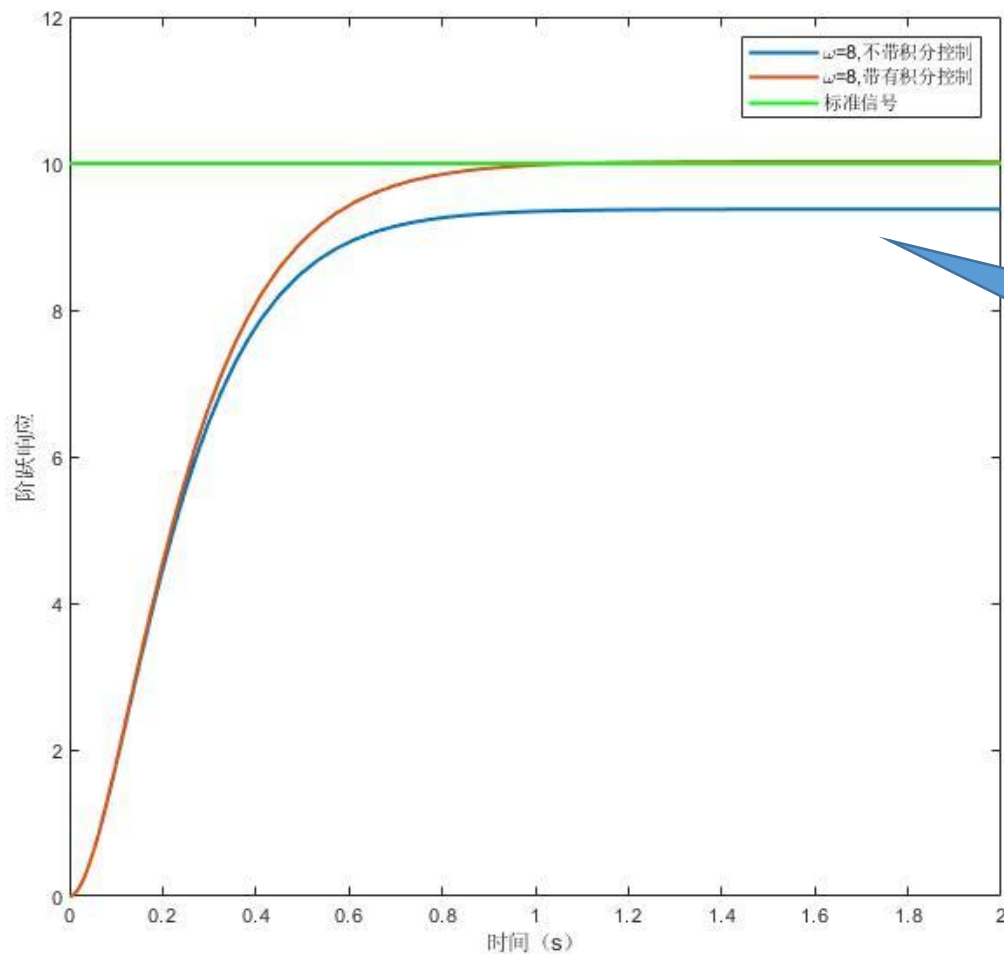
先做PD控制设计，即先取 $k_{Li}=0$ ，设计 k_{Pi} 和 k_{Di} 以达到满意的动态性能，然后在闭环稳定性约束范围内选择合适的 k_{Li} 以在动态性能基本不变的情况下消除静态误差

8.1 独立关节控制



在控制器中增加积分环节，主要是为了消除稳态误差

阶跃响应（有干扰 $d_i(t) = 40$ ）



带有积分控制的系统响应，
表明由恒定干扰引起的稳态
误差被消除

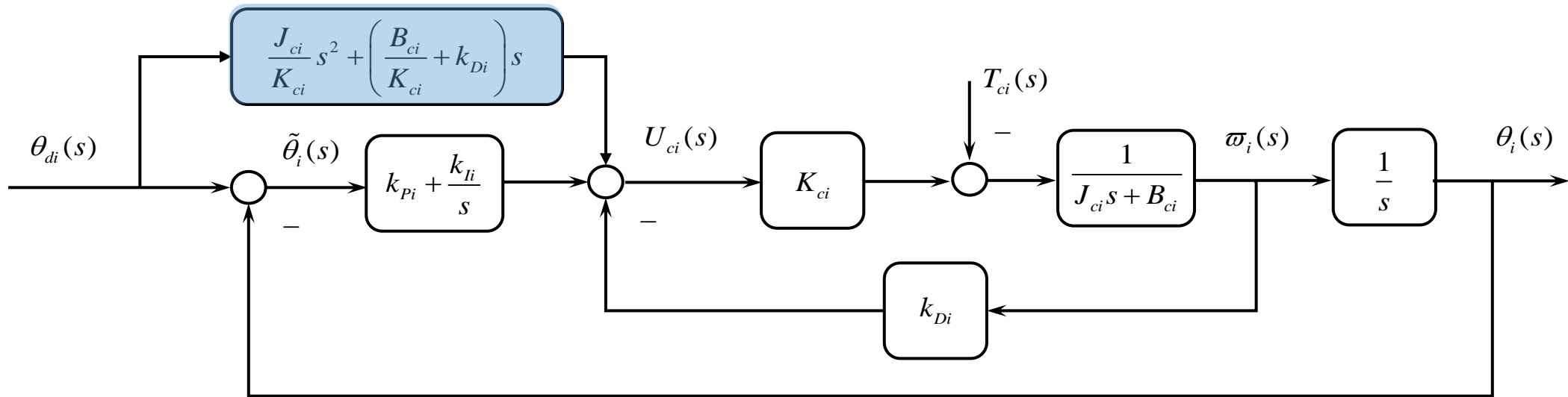
不带积分控制的系统响应，
恒定干扰引起稳态误差



8.1 独立关节控制

8.1.6 考虑二阶可导输入的PID控制器设计

针对二阶可导输入，在PD控制或PID控制中通过前馈引入期望轨迹的1阶导数和2阶导数信息，即形成适合于二阶可导输入的独立关节运动控制方案



独立关节带前馈的PID控制算法

$$U_{ci}(s) = \left(k_{Pi} + \frac{k_{Ii}}{s} \right) \tilde{\theta}_i(s) - k_{Di} \omega_i(s) + \frac{J_{ci}}{K_{ci}} s^2 \theta_{di}(s) + \left(\frac{B_{ci}}{K_{ci}} + k_{Di} \right) s \theta_{di}(s)$$

8.1 独立关节控制



闭环系统模型

$$\theta_i(s) = \theta_{di}(s) - \frac{s}{s^3 + \frac{B_{ci} + k_{Di}K_{ci}}{J_{ci}}s^2 + \frac{k_{Pi}K_{ci}}{J_{ci}}s + \frac{k_{Ii}K_{ci}}{J_{ci}}}T_{ci}(s)$$

闭环特征多项式与无前馈的PID闭环系统相同

PID参数可取与前节相同的设计值

前馈的引入没有改变闭环稳定性和闭环极点

在引入合适的前馈后，完全消除了参考输入对偏差的影响

再加上积分的作用，带前馈的PID控制可以使关节具有如下跟踪特性：

在阶跃扰动下，无静差跟踪任何二阶可导的期望轨迹时，对任意的二次可导参考轨迹，跟踪误差以渐近方式趋于零

Thanks!