机器人建模与控制

第4章 机器人逆运动学

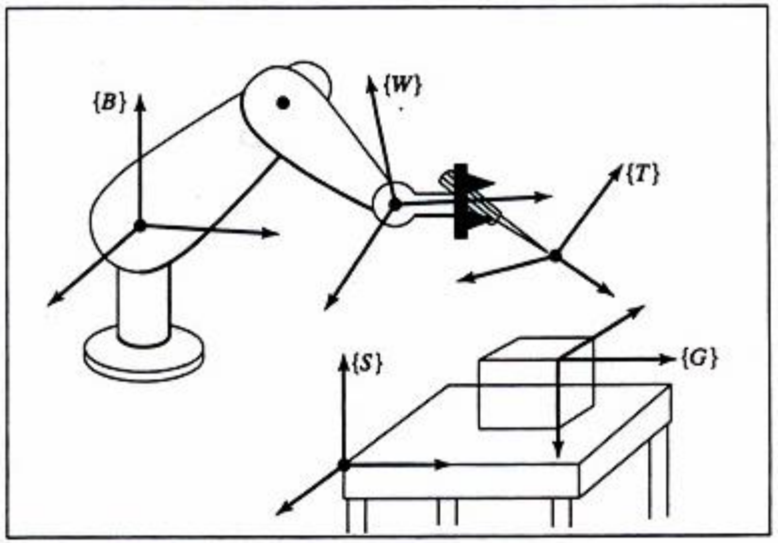
机械臂逆运动学

- 逆运动学

  已知工具坐标系相对于工作台坐标系的期望位置和姿态，计算一系列满足期望要求的关节角

- 为计算关节角以获得相对于工作台坐标系{*S*}的工具坐标系{*T*}，可分二步求解：

  - 进行坐标变换求出相对于基坐标系{*B*}的腕部坐标系{*W*}
  - 应用逆运动学求关节角



4.1 逆运动学问题

逆运动学　笛卡尔空间→关节空间

逆运动学问题：以基座坐标系为参考系，已知末端工具联体坐标系的位姿，求各关节变量的值

对于6R操作臂，该问题是已知 ${}^0_6\boldsymbol{T}$，求 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6$ 满足

$$
{}^0_6\boldsymbol{T} = {}^0_1\boldsymbol{T}(\theta_1)\,{}^1_2\boldsymbol{T}(\theta_2)\,{}^2_3\boldsymbol{T}(\theta_3)\,{}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4)\,{}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

上述等式总共给出6个方程，其中含有6个未知量

这些方程为非线性超越方程，要考虑其解的存在性、多重解性以及求解方法

4.2 逆运动学的可解性

4.2.1 工作空间和解的存在性

- 工作空间是机器人末端工具联体坐标系原点所能到达的范围
- 灵巧工作空间: 机器人末端工具能够以任何姿态到达的区域
- 可达工作空间:机器人末端工具以至少一种姿态到达的区域
- 灵巧工作空间是可达工作空间的子集
- 若目标位置在灵巧工作空间内，则逆运动学问题的解存在
- 若目标位置不在可达工作空间内，则逆运动学问题的解不存在
- 当操作臂少于6自由度时，它在三维空间内不能达到全部位姿

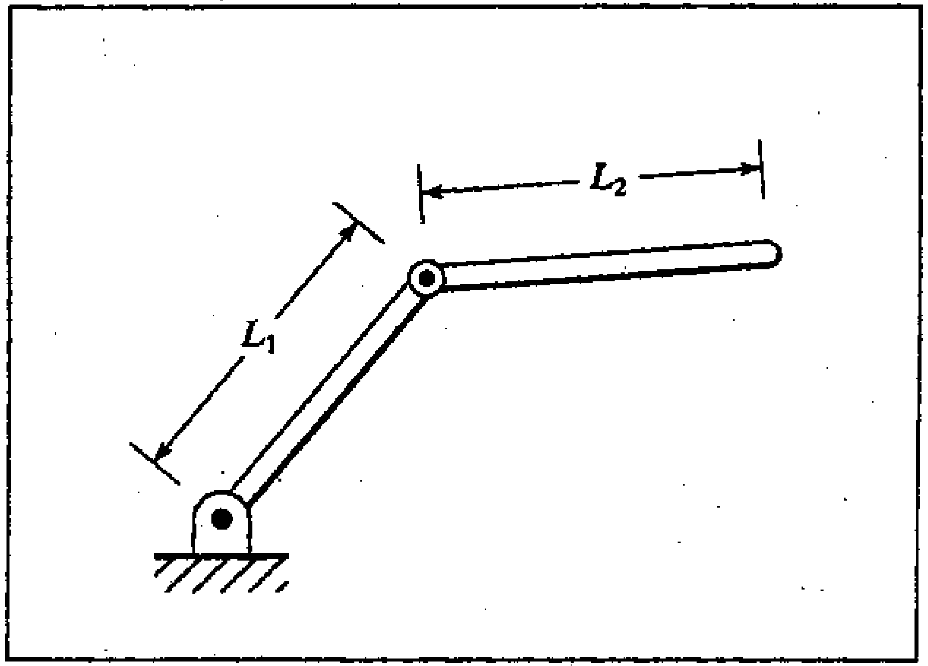
4.2 逆运动学的可解性

4.2.1 工作空间和解的存在性

例: 考虑一个两连杆操作臂.

如果 $L_1 = L_2$， 则可达工作空间是半径为$2L_1$的圆，而灵巧工作空间仅是单独的一点，即原点

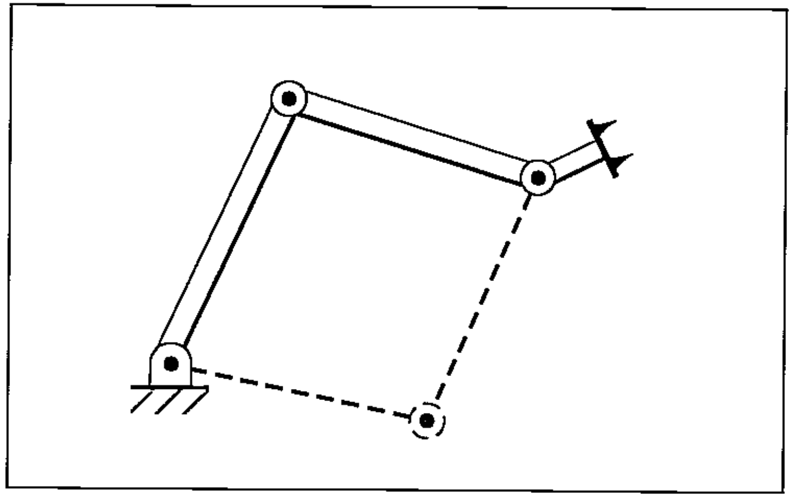
如果 $L_1 \neq L_2$，则不存在灵巧工作空间，可达工作空间为一外径为$L_1 + L_2$，内径为 $|L_1 - L_2|$ 的圆环



4.2 逆运动学的可解性

4.2.2 逆运动学的多解可能性

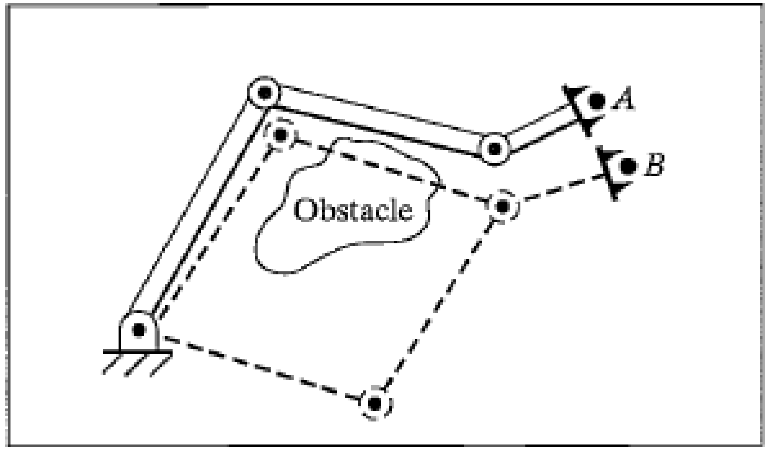
➢ 一个具有3个旋转关节的平面操作臂，由于可以任何姿态到达工作空间内的许多位置，因此在平面中有较大的灵巧工作空间（给定适当的连杆长度和大的关节运动范围）



4.2 逆运动学的可解性

4.2.2 逆运动学的多解可能性

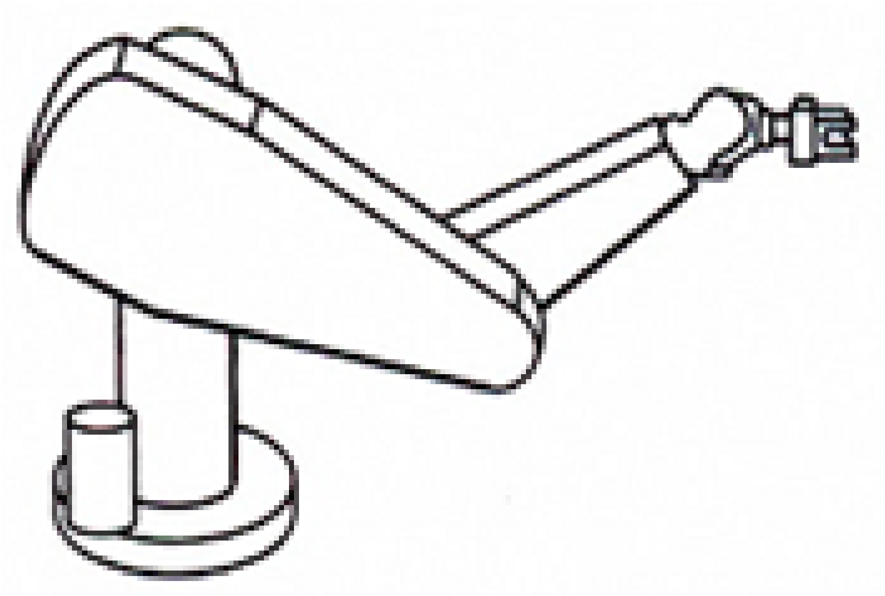
- 若同一位姿有多个解，系统最终只能选择一个解，比较合理的一种选择是取“最短行程”解
- 如图操作臂处于点*A*，若希望它移动到点*B*，最短行程解就是使得每一个运动关节的移动量最小
- 在无障碍的情况下，可选图中上部虚线所示的位形
- 在有障碍的情况下，最短行程发生干涉，这时选择较长行程



4.2 逆运动学的可解性

4.2.2 逆运动学的多解可能性

➢ 典型的机器人有3个大连杆，附带3个小连杆，姿态连杆靠近末端执行器

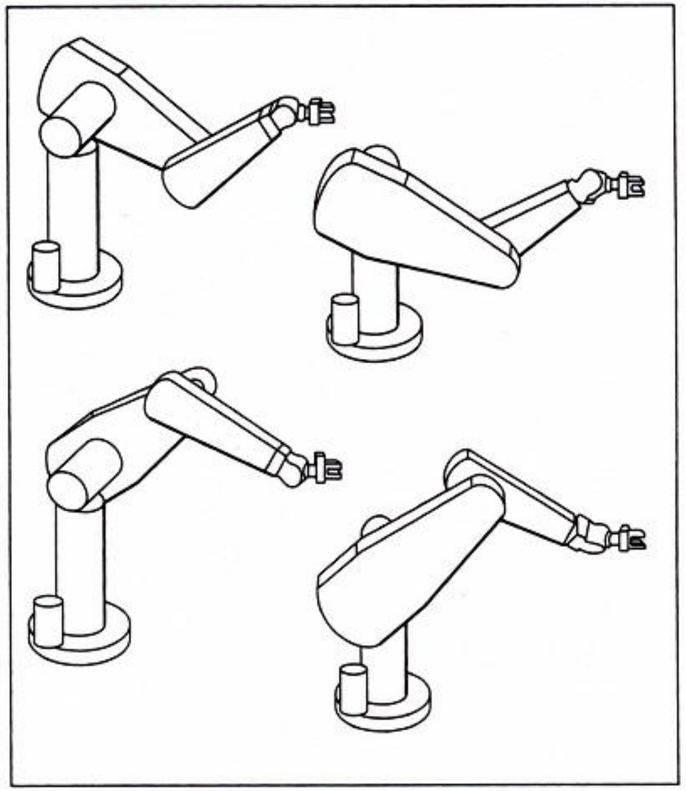


➢ 计算最短行程需要加权，使得选择侧重于移动小连杆而不是移动大连杆

4.2 逆运动学的可解性

4.2.2 逆运动学的多解可能性

➢ 解的个数取决于操作臂的关节数量，解的个数也是连杆参数和关节运动范围的函数。



例: PUMA 560到达一个确定目标有8个不同的解。 图中给出了其中的4个解。它们对于末端手部运动来说具有相同的位姿。对于图中所示的每一个解存在另外一种解。

➢ 由于关节运动的限制，这8个解中的某些解是不能实现的。

4.2 逆运动学的可解性

4.2.3 逆运动学的封闭解和数值解

- **封闭解法:** 封闭解法是指基于解析形式的算法。将运动学的封闭解法分为两类：代数解法和几何解法

- **数值解法:** 数值解法具有迭代性质，所以比封闭解法的求解速度慢得多。在多重解的情况下，数值解法不能求出全部的解

4.2 逆运动学的可解性

关于运动学逆解的几个结论

- 所有包含转动关节和移动关节的串联型6自由度操作臂都是可解的，但这种解一般是数值解

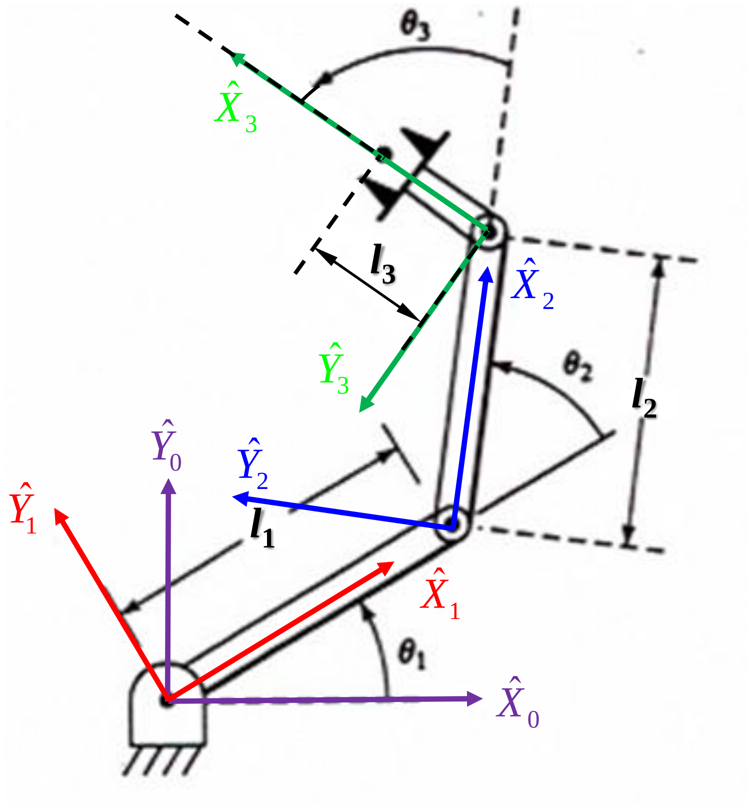
- 对于6自由度操作臂来说，只有在特殊情况下才有解析解。这种存在解析解（封闭解）的操作臂具有如下特性：存在几个正交关节轴或者有多个 α_i 为0或 $\pm 90°$

- 具有6个旋转关节的操作臂存在封闭解的充分条件是相邻的三个关节轴线相交于一点

4.3 代数解法和几何解法

4.3.1 代数解法

用代数解法对一个简单的平面三连杆操作臂进行求解



D-H 连杆参数表

关节i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	l_1	0	θ_2
3	0	l_2	0	θ_3

该操作臂的运动方程为:

$$
{}_3^0\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

4.3 代数解法和几何解法

4.3.1 代数解法

对于平面操作臂，目标点的位姿可由三个量 x,y,ϕ 确定:

$$
{}_3^0\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

该操作臂的逆运动学问题可描述为

$$
{}_3^0\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1c_1+l_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1s_1+l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

4.3 代数解法和几何解法

4.3.1 代数解法

得到四个非线性方程:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y &= l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$c_\phi = c_{123}$$

$$s_\phi = s_{123}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 (c_1 c_{12} + s_1 s_{12}) \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 (c_1^2 c_2 - c_1 s_1 s_2 + s_1^2 c_2 + s_1 c_1 s_2) \\ &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

若 $-1 \le c_2 \le 1$，上式有解；否则无解

若上式有解，则

$$s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2} \quad , \quad \theta_2 = \arctan2(s_2, c_2)$$

得到2个可行的 θ_2

4.3 代数解法和几何解法

4.3.1 代数解法

为便于计算引入新的变量:

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \qquad x = k_1 c_1 - k_2 s_1 \qquad k_1 = l_1 + l_2 c_2$$
$$\Rightarrow \qquad \qquad 其中$$
$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \qquad y = k_1 s_1 + k_2 c_1 \qquad k_2 = l_2 s_2$$

为了求解这种形式的方程，进行变量代换: 令

代数法是求解逆运动学的基本方法

$$r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \gamma = \arctan 2(k_2, k_1)$$

即 $k_1 = r\cos\gamma, \quad k_2 = r\sin\gamma$

$$\frac{x}{r} = \cos\gamma\cos\theta_1 - \sin\gamma\sin\theta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos(\gamma+\theta_1) = \frac{x}{r}$$

$$\frac{y}{r} = \cos\gamma\sin\theta_1 + \sin\gamma\cos\theta_1 \qquad \qquad \sin(\gamma+\theta_1) = \frac{y}{r}$$

于是 $\gamma + \theta_1 = \arctan 2(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}) = \arctan 2(y, x) \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \arctan 2(y, x) - \arctan 2(k_2, k_1)$

最后，可以解得 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \arctan 2(s_\phi, c_\phi) = \phi \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$

4.3.2 几何解法

对于上例中的3自由度操作臂，由于操作臂是平面的，因此可利用平面几何关系直接求解

由余弦定理知

$$x^2+y^2=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos(180+\theta_2)$$

$$\cos(180+\theta_2)=-\cos(\theta_2)$$

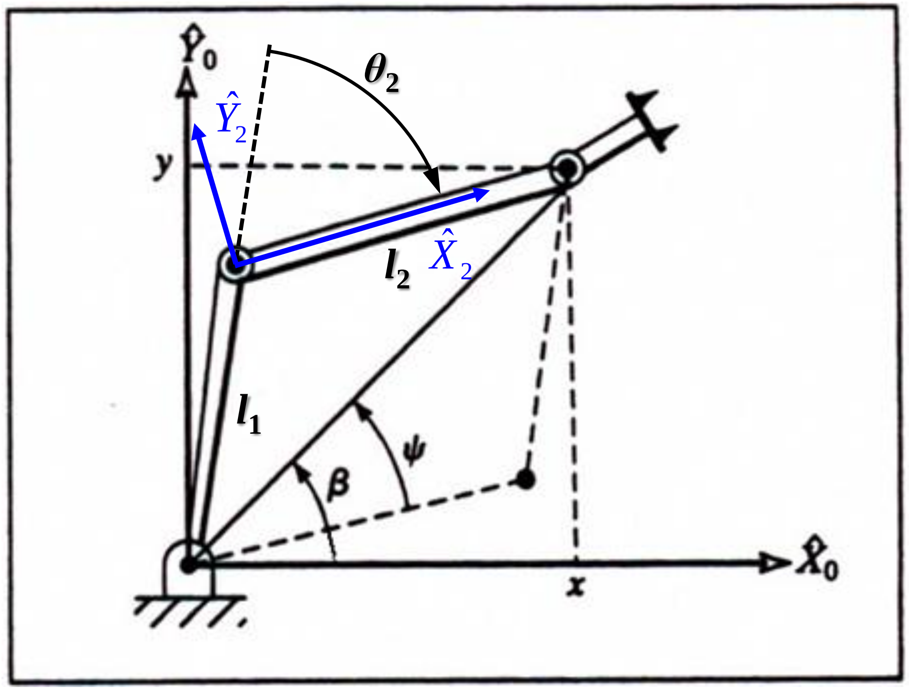
$$c_2=\frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}$$

为使该三角形成立，必须有

$$|l_1-l_2|\le\sqrt{x^2+y^2}\le l_1+l_2$$

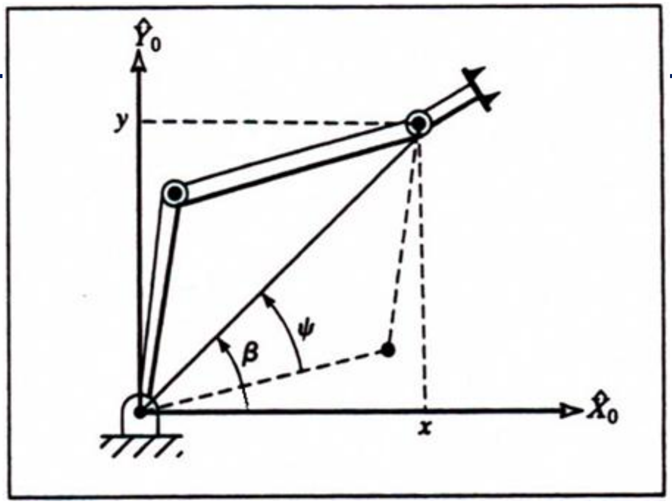
当上述条件成立时，可以解得一个 $\theta_2\in[-180°,0°]$

另一个解 $\theta_2'=-\theta_2$



4.3 代数解法和几何解法

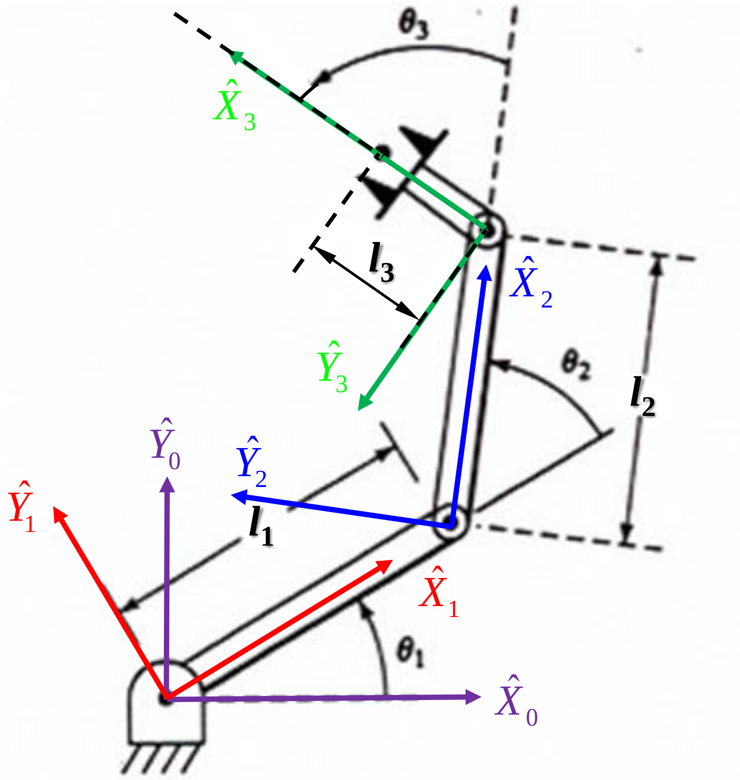
4.3.2 几何解法



应用反正切公式 $\beta = \arctan 2(y, x)$

应用余弦定理 $\cos\psi = \dfrac{x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2 + y^2}}$

可以解得一个 $\psi \in [0°, 180°]$



进一步，可得 $\theta_1 = \begin{cases} \beta + \psi, & 若\ \theta_2 \le 0 \\ \beta - \psi, & 若\ \theta_2 > 0 \end{cases}$

注意到三个连杆角度之和即为连杆3的姿态

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi$$

由此可求得θ_3

几何法在求操作臂的逆运动学解时，需将臂的空间结构分解为多个平面几何结构，然后通过平面几何方法求出相应的关节变量。
这种分解在连杆转角为0°或±90°时最方便。

4.3 代数解法和几何解法

4.3.3 通过化简为多项式的代数解法

逆运动学需解超越方程，有些情况下可将超越方程化为一元n次方程

n不大于4时，一元n次方程有封闭形式的解

半角公式 $u=\tan\frac{\theta}{2}$ ， $\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ ， $\sin\theta=\frac{2u}{1+u^2}$

例: 求解超越方程 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ 的 θ

解：利用 $\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ ， $\sin\theta=\frac{2u}{1+u^2}$

得到 $a(1-u^2)+2bu=c(1+u^2)$

取u的幂函数形式

$$(a+c)u^2-2bu+(c-a)=0$$

得到

$$u=\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2-c^2}}{a+c} \quad , \quad \theta=2\arctan\left(\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2-c^2}}{a+c}\right)$$

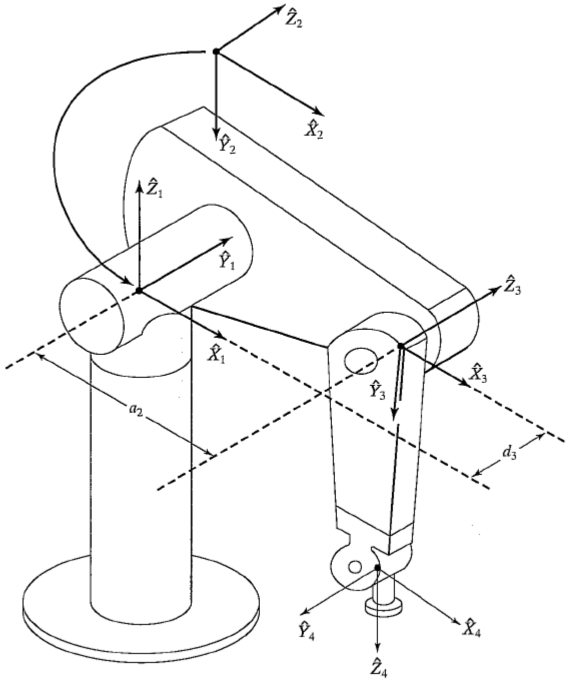
如果 $a+c=0$，那么 $\theta=180^0$

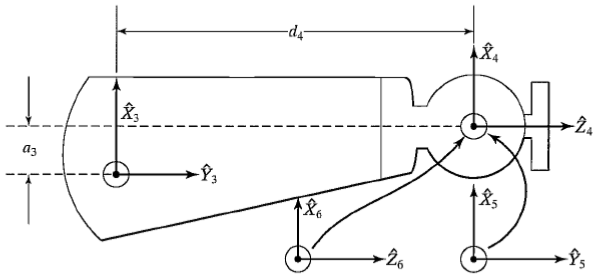
4.4 三轴相交的PIEPER解法

尽管一般具有6自由度的操作臂没有封闭解，但是在某些特殊情况下封闭解是存在的

PIEPER研究了3个相邻的轴相交于一点的6自由度操作臂（包括3个相邻的轴平行的情况）。

PIEPER的方法主要针对6个关节均为旋转关节的操作臂，且后面3个轴正交





该成果广泛应用于产品化的机器人中

4.4 三轴相交的PIEPER解法

$$ {}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

当最后3根轴相交时，连杆坐标系{4}、{5}、{6}的原点均位于这个交点上，这点的基坐标为

$$ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{0}\boldsymbol{O}_4 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^{0}_{1}\boldsymbol{T}\,{}^{1}_{2}\boldsymbol{T}\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{T} \begin{pmatrix} {}^{3}\boldsymbol{O}_4 \\ 1 \end{pmatrix} $$

其中 $$ \begin{pmatrix} {}^{2}\boldsymbol{O}_4 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^{2}_{3}\boldsymbol{T} \begin{pmatrix} {}^{3}\boldsymbol{O}_4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 c\alpha_2 & c\theta_3 c\alpha_2 & -s\alpha_2 & -s\alpha_2 d_3 \\ s\theta_3 s\alpha_2 & c\theta_3 s\alpha_2 & c\alpha_2 & c\alpha_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ -d_4 s\alpha_3 \\ d_4 c\alpha_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ f_1 = f_1(\theta_3) = a_3 c_3 + d_4 s\alpha_3 s_3 + a_2 $$

$$ f_2 = f_2(\theta_3) = a_3 c\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 c\alpha_2 c_3 - d_4 s\alpha_2 c\alpha_3 - d_3 s\alpha_2 $$

$$ f_3 = f_3(\theta_3) = a_3 s\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 s\alpha_2 c_3 + d_4 c\alpha_2 c\alpha_3 + d_3 c\alpha_2 $$

4.4 三轴相交的PIEPER解法

利用 ${}^0_1\boldsymbol{T}$, ${}^1_2\boldsymbol{T}$,得到

$$\begin{pmatrix} {}^1\boldsymbol{O}_4 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^1_2\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} {}^2\boldsymbol{O}_4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_1 \\ s\theta_2 c\alpha_1 & c\theta_2 c\alpha_1 & -s\alpha_1 & -s\alpha_1 d_2 \\ s\theta_2 s\alpha_1 & c\theta_2 s\alpha_1 & c\alpha_1 & c\alpha_1 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(\theta_3) \\ f_2(\theta_3) \\ f_3(\theta_3) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(\theta_2,\theta_3) \\ g_2(\theta_2,\theta_3) \\ g_3(\theta_2,\theta_3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = g_1(\theta_2,\theta_3) = c_2 f_1 - s_2 f_2 + a_1$$

$$g_2 = g_2(\theta_2,\theta_3) = s_2 c\alpha_1 f_1 + c_2 c\alpha_1 f_2 - s\alpha_1 f_3 - d_2 s\alpha_1$$

$$g_3 = g_3(\theta_2,\theta_3) = s_2 s\alpha_1 f_1 + c_2 s\alpha_1 f_2 + c\alpha_1 f_3 + d_2 c\alpha_1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0\boldsymbol{O}_4 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^0_1T\begin{pmatrix} {}^1\boldsymbol{O}_4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 g_1 - s_1 g_2 \\ s_1 g_1 + c_1 g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $r = x^2 + y^2 + z^2 = (c_1 g_1 - s_1 g_2)^2 + (s_1 g_1 + c_1 g_2)^2 + g_3^2$

$$= g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3 + 2a_1(c_2 f_1 - s_2 f_2)$$

4.4 三轴相交的PIEPER解法

$$r = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3 + 2a_1(c_2 f_1 - s_2 f_2)$$

$$z = s_2 s\alpha_1 f_1 + c_2 s\alpha_1 f_2 + c\alpha_1 f_3 + d_2 c\alpha_1$$

***r*和*z*是已知的**

求解 θ_3

简化表达，得到 $r = (k_1 c_2 + k_2 s_2)2a_1 + k_3, z = (k_1 s_2 - k_2 c_2)s\alpha_1 + k_4$

其中

$$k_1 = f_1, k_2 = -f_2, k_3 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3, k_4 = f_3 c\alpha_1 + d_2 c\alpha_1$$

1）若 $a_1 = 0$，则 $r = k_3 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3$

注意到 $f_1 = f_1(\theta_3) = a_3 c_3 + d_4 s\alpha_3 s_3 + a_2$

$$f_2 = f_2(\theta_3) = a_3 c\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 c\alpha_2 c_3 - d_4 s\alpha_2 c\alpha_3 - d_3 s\alpha_2$$

$$f_3 = f_3(\theta_3) = a_3 s\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_3 s\alpha_2 c_3 + d_4 c\alpha_2 c\alpha_3 + d_3 c\alpha_2$$

将 $u = \tan\frac{\theta_3}{2}, c_3 = \frac{1-u^2}{1+u^2}, s_3 = \frac{2u}{1+u^2}$ 代入，可将$r = k_3$化为u的二次方程

利用二次方程可以得到 θ_3

4.4 三轴相交的PIEPER解法

$$r=(k_1c_2+k_2s_2)2a_1+k_3,z=(k_1s_2-k_2c_2)s\alpha_1+k_4$$

$$k_1=f_1,k_2=-f_2,k_3=f_1^2+f_2^2+f_3^2+a_1^2+d_2^2+2d_2f_3,k_4=f_3c\alpha_1+d_2c\alpha_1$$

2）若 $s\alpha_1=0$，则$z=k_4$，同样采用化简为多项式的办法，由二次方程得 θ_3

3）否则，消去s_2 和c_2，得到

$$\frac{(r-k_3)^2}{4a_1^2}+\frac{(z-k_4)^2}{s^2\alpha_1}=k_1^2+k_2^2$$

采用化简为多项式的办法，可得到一个四次方程，由此解得θ_3

求解 θ_2

根据 $r=(k_1c_2+k_2s_2)2a_1+k_3,z=(k_1s_2-k_2c_2)s\alpha_1+k_4$，可解得 θ_2

求解 θ_1

根据 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1g_1-s_1g_2\\s_1g_1+c_1g_2\end{pmatrix}$，$x$和$y$是已知的，可解得$\theta_1$

4.4 三轴相交的PIEPER解法

$${}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求解 $\theta_4,\theta_5,\theta_6$

求出 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 后，若 $\theta_4=0$ 可计算出坐标系{4}相对于基坐标的姿态

$${}^{0}_{4}\boldsymbol{R}|_{\theta_4=0}={}^{0}_{3}\boldsymbol{R}\,{}^{3}_{4}\boldsymbol{R}|_{\theta_4=0}={}^{0}_{1}\boldsymbol{R}\,{}^{1}_{2}\boldsymbol{R}\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{R}\,{}^{3}_{4}\boldsymbol{R}|_{\theta_4=0}$$

再由已知的 ${}^{0}_{6}\boldsymbol{R}$，坐标系{6}的期望姿态与坐标系{4}的姿态差别仅在于最后三个关节的作用

$${}^{4}_{6}\boldsymbol{R}|_{\theta_4=0}={}^{0}_{4}\boldsymbol{R}^{-1}|_{\theta_4=0}\;{}^{0}_{6}\boldsymbol{R}$$

对于任何一个4、5、6轴相互正交的6R操作臂，最后三个关节角是一种欧拉角，即 ${}^{4}_{6}\boldsymbol{R}|_{\theta_4=0}$ 可由这种欧拉角表示

这时，$\theta_4,\theta_5,\theta_6$可用欧拉角解法求得

4.5 机器人逆运动学实例

- **PUMA 560机器人**

PIEPER解法适用于该机器人，这里展示另一种代数解法

问题描述：已知 ${}^0_6\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6$

使得 ${}^0_6\boldsymbol{T} = {}^0_1\boldsymbol{T}(\theta_1)\,{}^1_2\boldsymbol{T}(\theta_2)\,{}^2_3\boldsymbol{T}(\theta_3)\,{}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4)\,{}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6)$

解：将含有 θ_1 的部分移到方程的左边

$$[{}^0_1\boldsymbol{T}(\theta_1)]^{-1}\,{}^0_6\boldsymbol{T} = {}^1_2\boldsymbol{T}(\theta_2)\,{}^2_3\boldsymbol{T}(\theta_3)\,{}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4)\,{}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5)\,{}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6) = {}^1_6\boldsymbol{T}$$

4.5 机器人逆运动学实例

$$ {}^{1}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} {}^{1}r_{11} & {}^{1}r_{12} & {}^{1}r_{13} & {}^{1}p_x \\ {}^{1}r_{21} & {}^{1}r_{22} & {}^{1}r_{23} & {}^{1}p_y \\ {}^{1}r_{31} & {}^{1}r_{32} & {}^{1}r_{33} & {}^{1}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

因 $ {}^{0}_{1}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $ 是正交阵，有

$$ {}^{0}_{1}\boldsymbol{T}^{-1}\,{}^{0}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{1}_{6}\boldsymbol{T} $$

$$ {}^{1}r_{11}=c_{23}\left(c_4c_5c_6-s_4s_6\right)-s_{23}s_5s_6 $$
$$ \vdots $$
$$ {}^{1}p_x=a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23} $$
$$ {}^{1}p_y=d_3 $$
$$ {}^{1}p_z=-a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23} $$

求解 θ_1: 由元素 (2,4) 相等，得到 $-s_1p_x+c_1p_y=d_3$

令三角变换 $p_x=\rho\cos\phi,\ p_y=\rho\sin\phi$ 其中 $\rho=\sqrt{p_x^2+p_y^2},\ \phi=\arctan2(p_y,p_x)$

得 $-s_1c_\phi+c_1s_\phi=d_3/\rho=\sin(\phi-\theta_1)$ 因此 $\cos(\phi-\theta_1)=\pm\sqrt{1-\dfrac{d_3^2}{\rho^2}}$

则 $\phi-\theta_1=\arctan2\left(\dfrac{d_3}{\rho},\pm\sqrt{1-\dfrac{d_3^2}{\rho^2}}\right),\ \theta_1=\arctan2(p_y,p_x)-\arctan2\left(d_3,\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2-d_3^2}\right)$

4.5 机器人逆运动学实例

$$\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1r_{11} = c_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_{23}s_5s_6$$
$$\vdots$$
$${}^1p_x = a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}$$
$${}^1p_y = d_3$$
$${}^1p_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}$$

求解 θ_3:

由元素 (1,4)、(2,4)和 (3,4) 分别相等

得到 $$c_1p_x + s_1p_y = a_3c_{23} - d_4s_{23} + a_2c_2$$
$$-s_1p_x + c_1p_y = d_3$$
$$-p_z = a_3s_{23} + d_4c_{23} + a_2s_2$$

上三式平方后相加，有 $a_3c_3 - d_4s_3 = K$

式中 $$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2}$$

同样采用三角变换办法，得

$$\theta_3 = \arctan2(a_3, d_4) - \arctan2(K, \pm\sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2})$$

4.5 机器人逆运动学实例

$$
{}^{3}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

求解 θ_2： 建立等式

$$
[{}^{0}_{3}\boldsymbol{T}(\theta_2)]^{-1}\,{}^{0}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{3}_{6}\boldsymbol{T}
$$

由元素 (1,4)和(2,4)分别相等，有

$$
c_1c_{23}p_x+s_1c_{23}p_y-s_{23}p_z-a_2c_3=a_3,\qquad -c_1s_{23}p_x-s_1s_{23}p_y-c_{23}p_z+a_2s_3=d_4
$$

联立求解上述方程，得

$$
s_{23}=[(-a_3-a_2c_3)p_z+(c_1p_x+s_1p_y)(a_2s_3-d_4)]\big/[p_z^2+(c_1p_x+s_1p_y)^2]
$$

$$
c_{23}=[(a_2s_3-d_4)p_z+(a_3+a_2c_3)(c_1p_x+s_1p_y)]\big/[p_z^2+(c_1p_x+s_1p_y)^2]
$$

于是

$$
\theta_2=\arctan 2[(-a_3-a_2c_3)p_z-(c_1p_x+s_1p_y)(d_4-a_2s_3),\\ (a_2s_3-d_4)p_z-(a_3+a_2c_3)(c_1p_x+s_1p_y)]-\theta_3
$$

4.5 机器人逆运动学实例

$$ {}^{3}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

求解 θ_4：建立等式

$$ {}^{3}_{0}\boldsymbol{T}\,{}^{0}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{3}_{6}\boldsymbol{T} $$

由元素 (1,3)和(3,3)分别相等，有

$$ r_{13}c_1c_{23}+r_{23}s_1c_{23}-r_{33}s_{23}=-c_4s_5, \qquad -r_{13}s_1+r_{23}c_1=s_4s_5 $$

当 $s_5\neq 0$时，可得

$$ \theta_4=\operatorname{arctan2}(-r_{13}s_1+r_{23}c_1,-r_{13}c_1c_{23}-r_{23}s_1c_{23}+r_{33}s_{23}) $$

当 $s_5=0$ 时，操作臂处于奇异位形，此时轴4和轴6成一条直线。在此情况下，所有结果（所有可能的解）都是θ_4和θ_6的和或差，θ_4可以任意选取

4.5 机器人逆运动学实例

$$
{}^4_6\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

求解 θ_5:

建立等式

$$
{}^0_4\boldsymbol{T}^{-1}\,{}^0_6\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + d_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1c_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + d_3c_4 - a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^0_6\boldsymbol{T} = {}^4_6\boldsymbol{T}
$$

其中 $${}^0_6\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由元素 **(1,3)**和**(3,3)**分别相等，有

$$
r_{13}(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + r_{23}(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - r_{33}s_{23}c_4 = -s_5
$$

$$
r_{13}(-c_1s_{23}) + r_{23}(-s_1s_{23}) + r_{33}(-c_{23}) = c_5
$$

则 $\theta_5 = \arctan 2(s_5, c_5)$

4.5 机器人逆运动学实例

$$ {}^{5}_{6}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

求解 θ_6:

建立等式 ${}^{0}_{5}\boldsymbol{T}^{-1}\,{}^{0}_{6}\boldsymbol{T} = {}^{5}_{6}\boldsymbol{T}(\theta_6)$

由元素 (1,1)和(3,1)分别相等，可得

$$ \theta_6 = \arctan 2(s_6, c_6) $$

其中

$$ s_6 = -r_{11}(c_1c_{23}s_4 - s_1c_4) - r_{21}(s_1c_{23}s_4 + c_1c_4) + r_{31}(s_{23}s_4) $$

$$ \begin{aligned} c_6 = {} & r_{11}[(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4)c_5 - c_1s_{23}s_5] + r_{21}[(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4)c_5 - s_1s_{23}s_5] \\ & - r_{31}(c_{23}c_4c_5 + c_{23}s_5) \end{aligned} $$

4.5 机器人逆运动学实例

由于式中出现了正负号，因此这些方程可能有4种解。另外，由于操作臂关节翻转可以得到另外4个解。对于以上计算出的四种解，由腕关节的翻转可得：

$$\theta_4' = \theta_4 + 180^0$$

$$\theta_5' = -\theta_5$$

$$\theta_6' = \theta_6 + 180^0$$

当计算出所有解之后，由于关节运动范围的限制，要将其中的一些解舍去，在余下的有效解中，选取一个最接近于当前操作臂的解.

Thanks !