第二章 离散信号的分析

浙江大学　电气工程学院

张健

jian_zhang_zju@zju.edu.cn

13588745131/545131

离散信号的频域分析

- 周期序列离散傅立叶级数（DFS）
- 非周期序列离散时间傅立叶变换（DTFT）
- 有限长序列的离散傅里叶变换（ DFT ） －有限长序列的离散频谱表示
- 有限长序列的快速傅立叶变换（FFT）
- DFT（FFT）的应用－ －频谱分析

主要内容

离散信号的Z变换

- 从 DTFT 到Z变换
- Z变换的收敛域
- Z变换的几何表示
- Z变换的性质
- Z反变换
- 单边Z变换

从 DTFT 到Z变换

- **问题提出：** 当信号不满足狄利赫里条件，且无法通过引入δ函数或极限处理求其傅里叶变换，如功率型非周期信号、指数增长型信号等，限制了傅里叶变换的使用。（拉普拉斯变换）
- **狄利赫里条件：** $x(t)$在（$-\infty,+\infty$）上有定义，且绝对可积。
- **狄利赫里完善了傅里叶理论，傅里叶只是提出了一种思路。**

从 DTFT 到Z变换

➲ 基本思想：

增长型的离散信号（序列）$x(n)$ 的傅里叶变换是不收敛的，为了满足傅里叶变换的收敛条件，类似拉普拉斯变换，**将 $x(n)$ 乘以一衰减的实指数信号 r^{-n} $(r>1)$**，使信号 $x(n)\cdot r^{-n}$满足收敛条件。

从 DTFT 到Z变换

DTFT $$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

- 可得 $x(n)\,r^{-n}$ 的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left(x(n)r^{-n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(re^{j\Omega}\right)^{-n}$$

- 令复变量 $z=re^{j\Omega}$
- 定义离散时间信号（序列）$x(n)$ 的 *Z*变换

$$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}}$$

进行反 DTFT

$$x(n)r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(z)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(z)\boxed{(re^{j\Omega})^n}d\Omega$$

对Ω在0~2π内积分，对应了沿|*z*|=*r*的圆逆时针环绕一周的积分

$$z = re^{j\Omega} \qquad dz = jre^{j\Omega}d\Omega = jzd\Omega$$

$$d\Omega = \frac{1}{j}z^{-1}dz$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\cdot z^{n-1}dz$$

Z反变换

Z变换的收敛域

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+\frac{x(1)}{z}+\frac{x(2)}{z^{2}}+\cdots$$

收敛域：当 $x(n)$ 为有界时，令上述级数收敛的 z 的所有可取值的集合称为收敛域

1）比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$$

2）根值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$$

$\rho<1$ → 级数收敛

$\rho>1$ → 级数不收敛

$\rho=1$ → 可能收敛

Z变换的收敛域

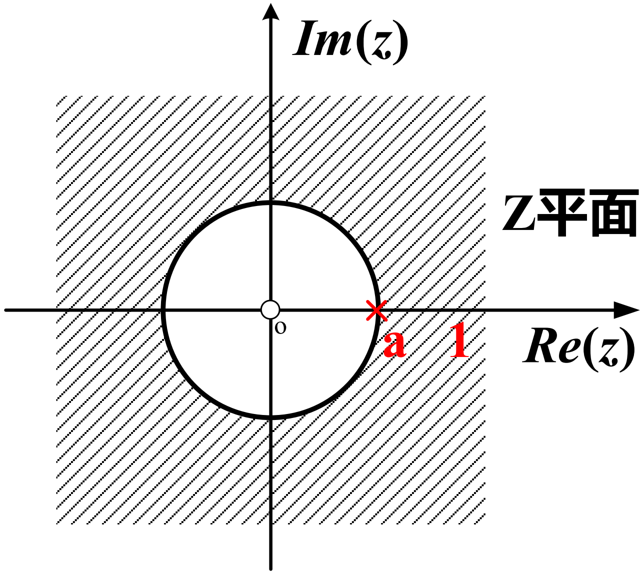
例1： $x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|az^{-1}\right|=\rho$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|az^{-1}\right|^n}=\left|az^{-1}\right|=\rho \Rightarrow |a|<|z|$$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$



Z变换的收敛域

例2：设序列 $x(n)=-a^n u(-n-1)$，求其 Z 变换，比较其和例1所得结果的不同。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-a^n z^{-n}\right)$$

$$X(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(-a^{-m}z^{m})=\sum_{m=0}^{\infty}[-\left(a^{-1}z\right)^{m}]+a^0z^0=1-\sum_{m=0}^{\infty}(a^{-1}z)^m$$

$$X(z)=1-\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=1-\frac{a}{a-z}=\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}}\quad |z|<|a|$$

几类序列的收敛域

(1）有限长序列：在有限区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad n_1 \le n \le n_2$$

只要级数的每一项有界，则级数就收敛

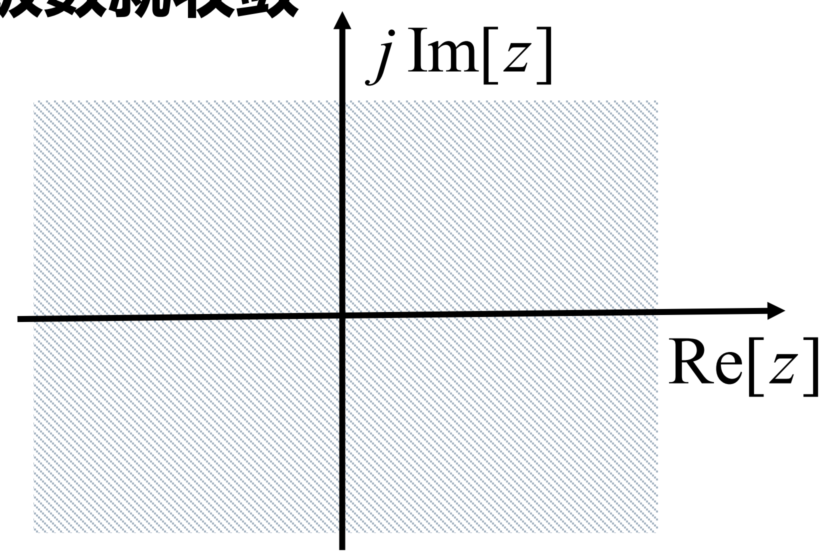
$$\left|x(n)z^{-n}\right| < \infty$$

$\Downarrow$ ***X(n)*** **有界**

$$\left|z^{-n}\right| < \infty$$

$\Downarrow$

$0 < |z| < +\infty$ $\Longrightarrow$ **收敛域为除了 0 和 ∞ 的整个 Z 平面**



几类序列的收敛域

(2）右边序列：只在 $n \geq n_1$ 区间内，有非零有限值的序列 $x(n)$

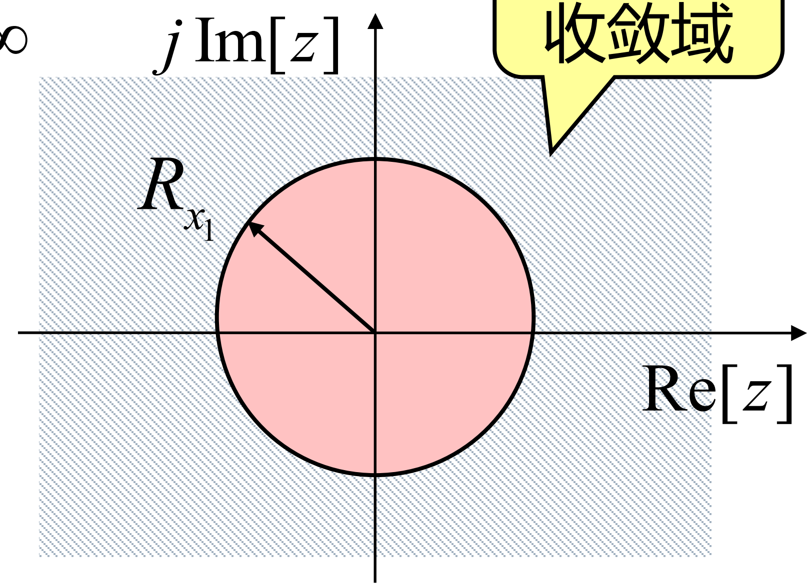
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \leq n \leq \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(n) z^{-n}\right|}<1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|}=R_{x_1}<|z|$$

$$|z|>R_{x_1}$$

收敛半径



圆外为收敛域

收敛域为 $R_x<|z|<\infty$

若 $n_1>0$，则收敛域还包括 $|z|=\infty$

几类序列的收敛域

(3）左边序列：只在 $n \le n_2$ 区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

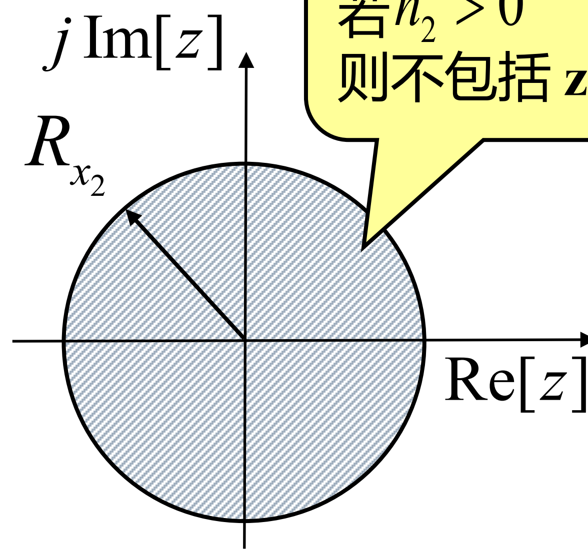
$$X(z) \overset{m=-n}{=} \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^{m} \overset{n=m}{=} \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n)z^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)z^{n}\right|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)\right|} < |z|^{-1}$$

$$|z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)\right|}} = R_{x_2}$$

收敛半径



圆内为收敛域，
若 $n_2 > 0$
则不包括 **z=0** 点

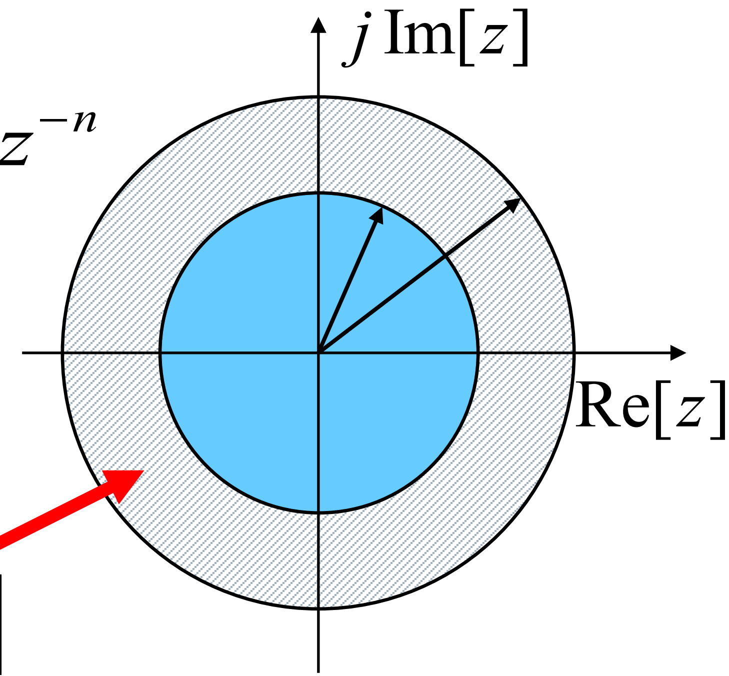
几类序列的收敛域

（4）双边序列：在 $-\infty \le n \le \infty$ 区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

圆内收敛　　圆外收敛



$R_{x_2} > R_{x_1}$ 没有收敛域

$R_{x_2} < R_{x_1}$ 有环状收敛域

几类序列的收敛域

给定序列 $x(n)=a^{-|n|}$，求 $x(n)$ 的Z变换及其收敛域

解：$X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a^{-|n|}z^{-n}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a^{n}z^{-n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{-n}z^{-n}$

$$=\sum_{m=1}^{\infty} a^{-m}z^{m}+\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}z^{-n}=\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}+\frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}}$$

要使上式成立，则必须有：

$$\boxed{\left|a^{-1}z\right|<1\text{且}\left|a^{-1}z^{-1}\right|<1}$$

若 $|a|\leq 1$，Z变换式无收敛域，**该序列无 Z 变换**。

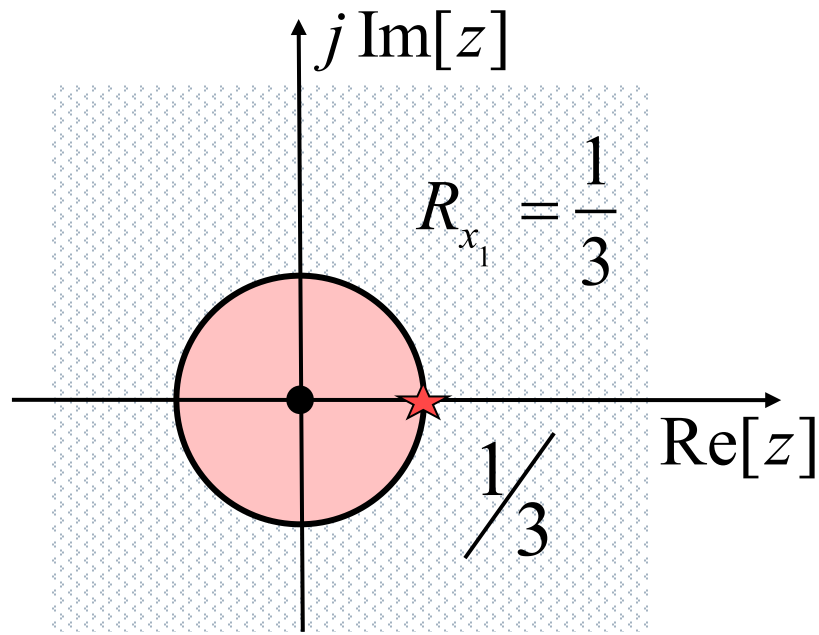
若 $|a|>1$，Z变换式收敛域为：$\boxed{|a|^{-1}<|z|<|a|}$

例3：(1) $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ **右边序列**

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad R_{x_1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore |z|>\frac{1}{3}$$

提示：同一Z域表达式，可能对应不同的时间序列。因此，任何一个双边Z变换的表达式必须注明其收敛域，否则可能无法确定其对应的时间序列。



例4：(2) $x(n)=-\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$

左边序列

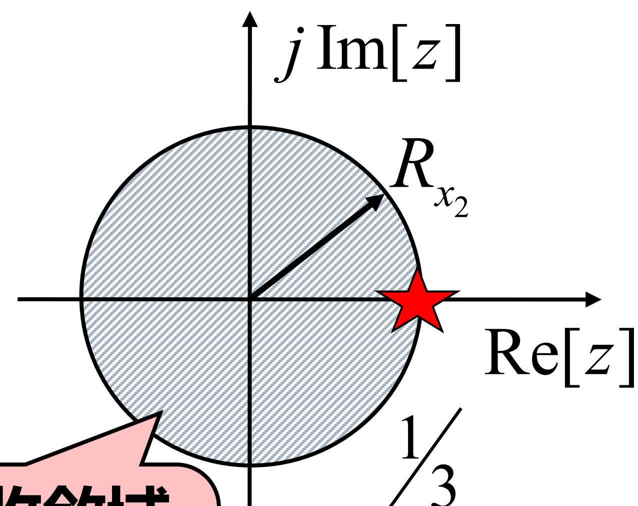
$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \overset{n=-m}{=} -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-m}$$

$$=1-\sum_{m=0}^{\infty}(3z)^m=1-\frac{1}{1-3z}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(3z)^n\right|}<1$$

$$|z|<\frac{1}{3}=R_{x_2}$$

收敛半径



圆内为收敛域，若 $n_2>0$ 则不包括z=0点

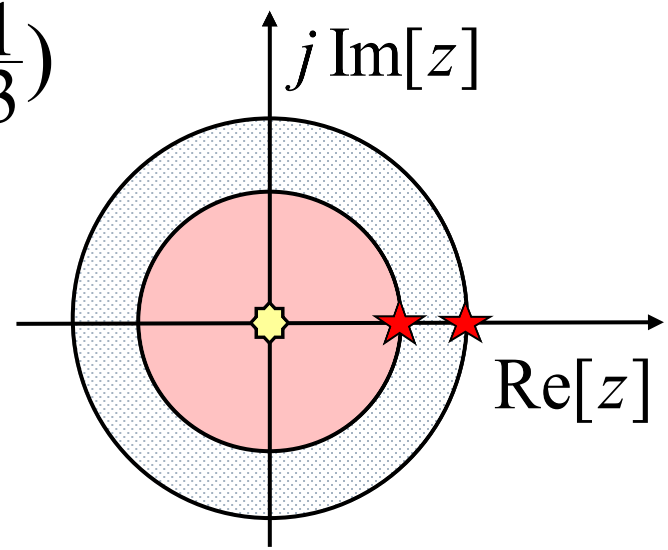
例5： $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}$$

$$=\frac{-z}{z-3}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{8}{3}z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}$$

$$\frac{1}{3}<|z|<3$$



Z变换的几何表示

- 在Z平面内分别用“o”和“×”标出$X(z)$的零点和极点的位置，并指出收敛域ROC，就构成了Z变换的几何表示。它除了可能相差一个常数因子外，和有理Z变换一一对应。

- **在极点处$X(z)$不收敛，因而收敛域内没有极点，而且收敛域的边界总是以极点为界的同心圆。**

Z变换的基本性质

性质	时域	Z 变换域	收敛域
	$x(n)$	$X(z)$	$ROC = R_x: \quad R_{x^-} < \lvert z \rvert < R_{x^+}$
	$y(n)$	$Y(z)$	$ROC = R_y: \quad R_{y^-} < \lvert z \rvert < R_{y^+}$
线性	$ax(n) + by(n)$	$aX(z) + bY(z)$	$\max\{R_{x^-}, R_{y^-}\} < \lvert z \rvert < \min\{R_{x^+}, R_{y^+}\}$
时移	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} X(z)$	$R_{x^-} < \lvert z \rvert < R_{x^+}$
Z 域尺度变换	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\lvert a \rvert R_{x^-} < \lvert z \rvert < \lvert a \rvert R_{x^+}$
Z 域微分	$nx(n)$	$-z \dfrac{dX(z)}{dz}$	$R_{x^-} < \lvert z \rvert < R_{x^+}$
时间翻转	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$R_{x^-}^{-1} < \lvert z \rvert < R_{x^+}^{-1}$

Z变换的基本性质

卷积	$x(n)*y(n)$	$X(z)Y(z)$	$\max\{R_{x^-},R_{y^-}\}<\lvert z\rvert<\min\{R_{x^+},R_{y^+}\}$
乘积	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\cdot\oint_c X(v)Y(zv^{-1})v^{-1}dv$	$R_{x^-}R_{y^-}<\lvert z\rvert<R_{x^+}R_{y^+}$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x^-}<\lvert z\rvert<R_{x^+}$
累加	$\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	至少包含$R_x\bigcap\lvert z\rvert>1$
初值定理	$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$		$x(n)$为因果序列，$\lvert z\rvert>R_{x^-}$
终值定理	$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$		$x(n)$为因果序列，且当$\lvert z\rvert\ge 1$时，$(z-1)X(z)$收敛

Z变换的基本性质

卷积	$x(n)*y(n)$	$X(z)Y(z)$	$\max\{R_{x^-},R_{y^-}\}<\lvert z\rvert<\min\{R_{x^+},R_{y^+}\}$
乘积	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\cdot\oint_c X(v)Y(zv^{-1})v^{-1}dv$	$R_{x^-}R_{y^-}<\lvert z\rvert<R_{x^+}R_{y^+}$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x^-}<\lvert z\rvert<R_{x^+}$
累加	$\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	至少包含$R_x\bigcap\lvert z\rvert>1$
初值定理	$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$		$x(n)$ 为因果序列，$\lvert z\rvert>R_{x^-}$
终值定理	$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$		$x(n)$ 为因果序列，且当$\lvert z\rvert\geq 1$时，$(z-1)X(z)$ 收敛

例7：设 $x(n)=a^n u(n), y(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$

求 $\boldsymbol{x(n)*y(n)}$

线性

$$X(z)=\mathcal{Z}[x(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

时移性

$$\mathcal{Z}[ab^{n-1}u(n-1)]=a\mathcal{Z}[b^{n-1}u(n-1)]=\frac{az^{-1}}{1-bz^{-1}} \qquad |z|>|b|$$

$$Y(z)=\mathcal{Z}[y(n)]=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{az^{-1}}{1-bz^{-1}}=\frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}[x(n)*y(n)]=X(z)Y(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}$$

$$x(n)*y(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)Y(z)\right]=b^n u(n)$$

例8：已知 $\mathcal{Z}\left[u(n)\right]=\dfrac{z}{z-1},\left|z\right|>1$

求斜变序列 $nu(n)$ 的 Z 变换

解：由 **Z** 域微分性质

$$\mathcal{Z}\left[nu(n)\right]=-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left[u(n)\right]=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{\left(z-1\right)^{2}}$$

$$\left|z\right|>1$$

例：求 $\mathrm{Z}[\cos \Omega_0 n], \mathrm{Z}[\sin \Omega_0 n]$

解:

$$\cos \Omega_0 n = \frac{e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n}}{2}$$

$$Z[\cos \Omega_0 n] = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - e^{j\Omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\Omega_0}}\right]$$

整理得:

$$\cos \Omega_0 n \leftrightarrow \frac{1 - \cos \Omega_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2\cos \Omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z(z - \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z\cos \Omega_0 + 1}$$

同理:

$$\sin \Omega_0 n \leftrightarrow \frac{\sin \Omega_0 \cdot z^{-1}}{1 - 2\cos \Omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z \cdot \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cdot \cos \Omega_0 + 1}$$

Z反变换

(1) 幂级数展开（长除法）

(2) 部分分式法

(3) 留数法（围线积分法）

幂级数展开法

- **例9** 已知$X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$，收敛域为$|z|>1$，

  应用幂级数展开方法，求其Z反变换。

- 解：根据其收敛域是$|z|>1$，必然是**右边**序列，此时 $X(z)$ 为 z 的**降幂**级数，将 $X(z)$ 的分子分母多项式按 z 降幂排列进行长除

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots \\
\hline
z^2 - 2z + 1 & z \\
 & z - 2 + z^{-1} \\
\hline
 & 2 - z^{-1} \\
 & 2 - 4z^{-1} + 2z^{-2} \\
\hline
 & 3z^{-1} - 2z^{-2} \\
 & 3z^{-1} - 6z^{-2} + 3z^{-3} \\
\hline
 & 4z^{-2} - 3z^{-3}
\end{array}$$

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} \Rightarrow x(n) = n u(n)$$

部分分式法

(1) 只含单极点的情况

设 $X(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$ 是有理真分式，有N 个单极点

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_N)}$$

于是 $$\frac{X(z)}{z}=\frac{N(z)}{z\cdot D(z)}=\frac{A_0}{z-p_0}+\frac{A_1}{z-p_1}+\frac{A_2}{z-p_2}+\cdots+\frac{A_i}{z-p_i}+\cdots\quad(p_0=0)$$

于是 $$\frac{X(z)}{z}(z-p_i)=\frac{N(z)}{z\cdot D(z)}=\frac{A_0(z-p_i)}{z-p_0}+\frac{A_1(z-p_i)}{z-p_1}+\frac{A_2(z-p_i)}{z-p_2}+\cdots+A_i+\cdots$$

于是 $$A_i=[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}]\Big|_{z=p_i}$$

$$X(z) = A_0 + \frac{A_1 z}{z - p_1} + \frac{A_2 z}{z - p_2} + \quad \cdots \quad + \frac{A_N z}{z - p_N}$$

由线性性质并查表得, 反变换的形式为:

$$x(n) = A_0\delta(n) + A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \cdots + A_N p_N^n \quad （n \geq 0）$$

例 求$X(z)=\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$的 *Z* 反变换.

解:

$$X(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-1)(z-0.5)}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z-0.5}$$

$$X(z)=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.5z^{-1}}=\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-0.5}$$

$$x(n)=2-0.5^n\,(n\geq 0)$$

求 Z 反变换 $X(z)=\dfrac{z-3}{z^2-z-2}$

解:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z-3}{z(z+1)(z-2)}=\frac{3}{2}\frac{1}{z}-\frac{4}{3}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{6}\frac{1}{z-2}$$

$$X(z)=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\frac{z}{z+1}-\frac{1}{6}\frac{z}{z-2}$$

$$x(n)=\frac{3}{2}\delta(n)-\frac{4}{3}(-1)^n-\frac{1}{6}(2)^n \qquad (n\geq 0)$$

部分分式法

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

当 $M<N$，且 $X(z)$ 只有单极点时，

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_kz^{-1}}$$

当 $M\geq N$，且 $X(z)$ 只有单极点时，

$$X(z)=A_0+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_kz^{-1}}$$

部分分式法

(2) 含重极点的情况

若：$\frac{X(z)}{z}$ 在 $z=p_1$ 处有r重极点，例如：$X(z)=\frac{z^3+z^2}{(z-1)^3}$

则 $$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}=\frac{a_{11}}{(z-1)^3}+\frac{a_{12}}{(z-1)^2}+\frac{a_{13}}{z-1}$$

$$\frac{X(z)}{z}(z-1)^3\Big|_{z=1}=\left[\frac{a_{11}}{(z-1)^3}(z-1)^3+\frac{a_{12}}{(z-1)^2}(z-1)^3+\frac{a_{13}}{z-1}(z-1)^3\right]\Big|_{z=1}$$

$$\Rightarrow a_{11}=\frac{X(z)}{z}(z-1)^3\Big|_{z=1}=2$$

$$\frac{d\left[\frac{X(z)}{z}(z-1)^3\right]}{dz}\Bigg|_{z=1}=\frac{d\left[\frac{a_{11}}{(z-1)^3}(z-1)^3+\frac{a_{12}}{(z-1)^2}(z-1)^3+\frac{a_{13}}{z-1}(z-1)^3\right]}{dz}\Bigg|_{z=1}$$

$$\Rightarrow a_{12}=3$$

同理可得：$a_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[(z-1)^3\frac{X(z)}{z}]\Big|_{z=1}=1$

部分分式法

于是：$\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{2}{(z-1)^3}+\dfrac{3}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{z-1}$

$$X(z)=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

查表得到最后结果为：

$$x(n)=n(n-1)+3n+1\ =(n+1)^2\ \ (n\geq 0)$$

结论：若 $X(z)/z$ 在 $z=p_1$ 处有 r 重极点：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{N(z)}{z\cdot D(z)}=\frac{N(z)}{(z-p_1)^r[z\cdot D_1(z)]}$$

$$=\frac{a_{11}}{(z-p_1)^r}+\frac{a_{12}}{(z-p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{a_{1i}}{(z-p_1)^{r-i+1}}+\cdots+\frac{a_{1r}}{z-p_1}+\frac{N(z)}{z\cdot D_1(z)}$$

系数:

$$a_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}z^{i-1}}\left[(z-p_1)^r\frac{X(z)}{z}\right]\bigg|_{z=p_1}$$

其中 $a_{11}=(z-p_1)^r\dfrac{X(z)}{z}\bigg|_{z=p_1}$、$a_{12}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-p_1)^r\dfrac{X(z)}{z}\right]\bigg|_{z=p_1}$

例：求 $X(z)=\dfrac{4z+4}{(z-1)(z-2)^2}$ 的 Z 反变换。

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{4z+4}{z(z-1)(z-2)^2}=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z-1}+\frac{a_{31}}{(z-2)^2}+\frac{a_{32}}{z-2}\quad |z|>2$$

$$a_1=z\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=0}=-1$$

$$a_2=(z-1)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=1}=8$$

$$a_{31}=(z-2)^2\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=2}=6$$

$$a_{32}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2)^2\frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=2}=-7$$

$$X(z)=-1+\frac{8z}{z-1}+\frac{6z}{(z-2)^2}-\frac{7z}{z-2}$$

查表得 $x(n)=-\delta(n)+8+3n(2)^n-7(2)^n$ （$n\geq 0$）

单边Z变换

- 定义为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 单边Z变换和双边Z变换的差别在于，单边Z变换求和仅在 n 的非负值上进行，而不管 $n<0$ 时 $x(n)$ 是否为零。

单边Z变换的性质

单边Z变换的绝大部分性质与双边Z变换对应的性质相同，与双边z变换不同的性质有

- **时移定理**
- **初值定理**
- **终值定理**

时移定理

- 若 $x(n)$ 是双边序列，其单边Z变换为$X(z)$，则序列左移后，它的单边Z变换为

$$Z\left[x(n+m)u(n)\right]=z^{m}\left[X\left(z\right)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

- 若 $x(n)$ 是双边序列，其单边Z变换为$X(z)$，则序列右移后，它的单边Z变换为

$$Z\left[x(n-m)u(n)\right]=z^{-m}\left[X\left(z\right)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

初值定理

➲对于因果序列 $x(n)$，若其单边Z变换为$X(z)$，而且 $\lim_{z \to \infty} X(z)$ 存在，则

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

初值定理

初值定理要求$X(z)$的分子多项式阶次小于或等于分母多项式的阶次

若因果信号 $x(n)\leftrightarrow X(z)$，则

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=x(0)$$

上式称为**初值定理**。

证明：对于因果信号 $x(n)$，由于

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

当 $z\to\infty$ 时，上式中的级数除了第一项 $x(0)$ 外，其他各项都趋近于零，所以有

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=x(0)$$

可见，对于因果序列 $x(n)$，我们可以直接由 $X(z)$ 求得时域序列的初始值，而不必求反变换。

终值定理

➲对于因果序列 $x(n)$，若其单边Z变换为$X(z)$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x(n)$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

终值定理

证明：根据单边 z 变换的定义

$$x(n+1)-x(n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

根据单边 z 变换的时移特性

$$x(n+1)-x(n) \leftrightarrow zX(z)-zx(0)-X(z)$$

因此有

$$\sum_{n=0}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n} = zX(z)-zx(0)-X(z) = (z-1)X(z)-zx(0)$$

即

$$(z-1)X(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}+zx(0)$$

若 $(z-1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆，则上式两边可以取 $z\to 1$ 的极限，即

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}\right\}+x(0)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{N}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}\right\}+x(0)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=0}^{N}[x(n+1)-x(n)]\right\}+x(0)$$

$$= \lim_{N\to\infty}[x(1)-x(0)+x(2)-x(1)+\cdots+x(N)-x(N-1)+x(N+1)-x(N)]+x(0)$$

$$= \lim_{N\to\infty}x(N+1)$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{n\to\infty}x(n)$$

终值定理要求$X(z)$除在z=1处可以有一阶极点（仅限有1个位于单位圆上的极点）外，其他全部极点都在单位圆内部。

初值和终值定理范例

例题：$X(z)=\dfrac{3z^2+4z+5}{6z^2+1}$,求序列初值？

常用序列的Z变换

1. **单位序列** $\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$

$$\delta(n)\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1+0\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-2}+\cdots=1$$

即 $\delta(n)\leftrightarrow 1$ **ROC** : 全平面

2. **单位延时序列** $\delta(n-j)=\begin{cases}1 & (n=j)\\ 0 & (n\neq j)\end{cases}$

$$\mathrm{Z}[\delta(n-j)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n-j)z^{-n}=0+0\cdot z^{-1}+\cdots+1\cdot z^{-j}+0\cdot z^{-j+1}+\cdots$$

即 $\delta(n-j)\leftrightarrow z^{-j}$ **ROC** : $|z|>0$

常用序列的Z变换

3. **单位阶跃序列** $u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$

$$\mathrm{Z}\left[u(n)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

等比级数,当$|z|\leq 1$时,此级数发散;当$|z|>1$时,此级数收敛于$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$。

$$u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}\qquad \textbf{ROC: } |z|>1$$

常用序列的Z变换

4. 单位指数序列 $x(n)=a^n$

$$\mathrm{Z}\left[x(n)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^{n}$$

$$a^{n}\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}\qquad \text{ROC:}\quad |z|>|a|$$

同理有：

$$\mathrm{e}^{\lambda n}\leftrightarrow\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\lambda}}\qquad \text{ROC:}\quad |z|>\mathrm{e}^{\lambda}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}\right)^{n}\leftrightarrow\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}z^{-1}}=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}}\qquad \text{ROC:}\quad |z|>\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}=1\right|$$

Z 变换与拉普拉斯变换

连续信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

理想抽样信号 $x_s(t)$

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

Z 变换与拉普拉斯变换

理想抽样信号$x_s(t)$的拉普拉斯变换定义

$$X_s(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$x_s(t)$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathrm{e}^{-snT_s}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathrm{e}^{-snT_s}$$

$x(nT_s)$为:

$x(t)$在$t=nT_s$处的抽样，简写为$x(n)$。

序列 $x(n)$ 的 Z 变换定义

理想抽样信号 $x_s(t)$ 的拉普拉斯变换定义

$$X_s(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)e^{-snT_s}$$

取： $z=\mathrm{e}^{sT_s}=\mathrm{e}^{\sigma T_s}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}$

那么：$X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT_s}}=X_s(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)z^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

序列 $x(n)$ 的Z变换

$$x(n)\rightarrow X(z)$$

Z 变换与拉普拉斯变换

$$X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT_s}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

序列 $x(n)$ 的 Z **变换** $X(z)$：$X(z)=Z[x(n)]$

$$z=\mathrm{e}^{sT_s}=\mathrm{e}^{\sigma T_s}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}$$

Z变换建立了离散时间域 nT_s 和复数域Z之间的关系。

总结：**序列$x(n)$的Z变换就等于其理想抽样信号拉普拉斯变换进行映射的结果。**

$$X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{sT_s}} = X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

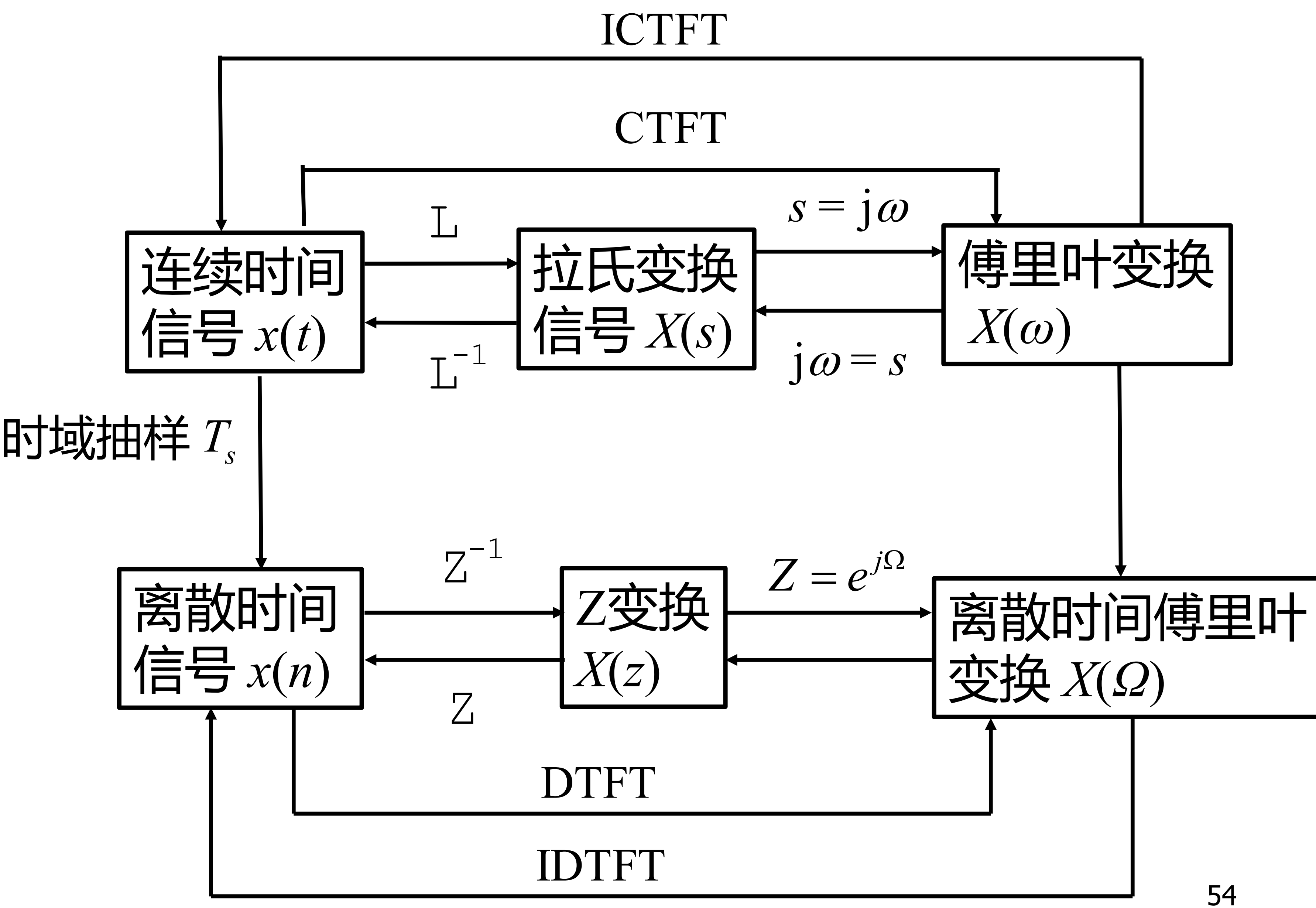
$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$$

$$s = (\sigma + \mathrm{j}\omega)\Big|_{\sigma=0} = \mathrm{j}\omega$$

$$X_s(\Omega)$$

总结：序列 $x(k)$ 在单位圆上面的 Z 变换 $X(z)$ 就等于其<u>理想抽样信号后所得到的序列的离散时间傅里叶变换。</u>

Z域、S域、频域各变换之间的关系



Z 变换与DFT

有限长序列的Z变换

收敛域为除了0和∞的整个z 平面

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

Z平面单位圆上的第k个抽样点

$$Z=e^{jk\frac{2\pi}{N}}$$

有限长序列的DFT变换 $X(k)=X(z)\Big|_{Z=e^{jk\frac{2\pi}{N}}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

有限长序列DFT，就是同一序列的Z变换在单位圆上每隔 $2\pi/N$ 的均匀采样。