第八章　状态空间模型分析与设计

吴俊

junwuapc@zju.edu.cn

内容

- ✓ 回顾与简介
- ✓ 状态空间模型及求解
- ✓ 能控性和能观性
- ✓ 线性变换和标准型
- ✓ **SISO** 系统状态反馈
- ✓ 状态反馈: 稳态误差分析
- ✓ **SISO** 系统状态观测器
- ✓ …………..

能控性和能观性

5. 离散系统的能控性与能观性

考虑离散系统:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= G\boldsymbol{x}(k) + H\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{aligned}$$

离散系统状态能控性的定义：在有限时间间隔内, 存在控制序列 **u(0), u(1), …. , u(q-1),** 能使系统从任意初态**x(0)** 转移至任意终态 **x(q),** 则称该系统是完全能控的。

离散系统能控性判别条件：

$$\text{Rank}\ \text{M}_{\text{C}} = \text{Rank}\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n$$

离散系统能控性的**PBH**秩判据**I**、 **PBH**秩判据**II**、 **PBH**秩向量判据与连续系统具有相同形式

5. 离散系统的能控性与能观性

考虑离散系统:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= G\boldsymbol{x}(k) + H\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{aligned}$$

离散系统能观性的定义：在有限时间间隔内,已知输入向量序列 u(0), u(1), …., u(q-1) 及输出向量序列 y(0), y(1), …., y(q-1), 能惟一确定初始状态向量 x(0), 则称该系统是完全能观的。

离散系统能观性判别条件：

$$\text{Rank } \mathrm{M}_{\mathrm{O}} = \text{Rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}G \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}G^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

或

$$\text{Rank } \mathrm{M}_{\mathrm{O}} = \text{Rank}\begin{bmatrix} C^T & G^T C^T & \cdots & (G^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n$$

离散系统能观性的PBH秩判据I、 PBH秩判据II、 PBH秩向量判据与连续系统具有相同形式

5. 离散系统的能控性与能观性

Example 8-3-9-2 系统表示为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

判断: 系统是否完全能观？

$$\mathrm{M}_o = \begin{bmatrix} c^T & G^T c^T & (G^T)^2 c^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathrm{M}_o = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

系统是完全能观的.

当 t=k

$$y(k) = x_2(k)$$

当 t=k+1

$$y(k+1) = x_2(k+1) = -2x_2(k) + x_3(k) - u(k)$$

当 t=k+2

$$\begin{aligned} y(k+2) &= x_2(k+2) = -2x_2(k+1) + x_3(k+1) - u(k+1) \\ &= -2(-2x_2(k) + x_3(k) - u(k)) + (3x_1(k) + 2x_3(k) + u(k)) - u(k+1) \\ &= 3x_1(k) + 4x_2(k) + 3u(k) - u(k+1) \end{aligned}$$

由y(k),y(k+1),y(k+2),u(k)和u(k+1)可确定出 $x_1(k)$, $x_2(k)$和)$x_3(k)$

能控性和能观性

5. 离散系统的能控性与能观性

Example 8-3-9-1 系统表示为 $\boldsymbol{x}(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$ $y(k)=Cx(k)$

其中

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

判断: 系统是否能观？

$$\mathrm{Rank}M_o=\begin{bmatrix}c^T & G^Tc^T & (G^T)^2c^T\end{bmatrix}=Rank\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 1 & 9 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -3\end{bmatrix}=2<3$$

系统是不可观的.

当 t=k

$$y(k)=\begin{bmatrix}x_3(k)\\ x_1(k)\end{bmatrix}$$

当 t=k+1

$$y(k+1)=\begin{bmatrix}x_3(k+1)\\ x_1(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1(k)+2x_3(k)+u(k)\\ x_1(k)-x_3(k)+2u(k)\end{bmatrix}$$

当 t=k+2

$$\begin{aligned}y(k+2)&=\begin{bmatrix}x_3(k+2)\\ x_1(k+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1(k+1)+2x_3(k+1)+u(k+1)\\ x_1(k+1)-x_3(k+1)+2u(k+1)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}9x_1(k)+x_3(k)+8u(k)+u(k+1)\\ -2x_1(k)-3x_3(k)+u(k)+2u(k+1)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\vdots$ $\vdots$

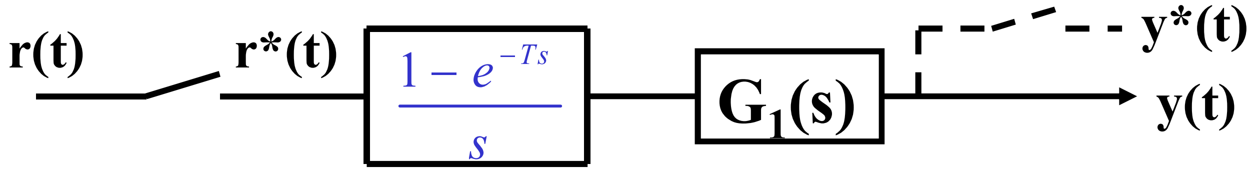
无法确定出$\mathbf{x_2(k)}$

能控性和能观性

5. 离散系统的能控性与能观性

连续状态方程离散化后的能控性与能观性

采样周期 **T** 选择不当的话，一个完全能控的连续系统离散化后不一定能保持能控性，一个完全能观的连续系统离散化后不一定能保持能观性



Example 8-3-10 可控连续系统表示为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$

分析采样周期的选择对离散化后系统能控性的影响.

离散化状态方程

$$G(T) = e^{AT} = L^{-1}\left([sI-A]^{-1}\right) = L^{-1}\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1}\right) = \begin{bmatrix} \cos\omega T & \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \\ -\omega\sin\omega T & \cos\omega T \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}(T) = \int_0^T G(\tau)b\,d\tau = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

5. 离散系统的能控性与能观性

离散化状态方程：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = G\boldsymbol{x}(k) + H\boldsymbol{u}(k)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\omega T & \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \\ -\omega\sin\omega T & \cos\omega T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathrm{M}_c = [H \quad GH] = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} & \dfrac{\cos\omega T - \cos^2\omega T + \sin^2\omega T}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} & \dfrac{2\sin\omega T\cos\omega T - \sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

当：$T = \dfrac{2k\pi}{\omega}, (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 能控性矩阵为零阵，系统不完全能控。

$T = \dfrac{(2k+1)\pi}{\omega}, (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 能控性矩阵秩为1，系统不完全能控。

6. 对偶原理

对偶原理----由R.E.Kalman提出

从能控性判别矩阵**Mc**与能观性判别矩阵**Mo**看出它们有明显的相似性——某种转置关系——数学意义上说：能控性与能观性之间存在对偶关系。

考虑由下述状态空间表达式描述的系统 $\mathbf{S_1}$：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

式中 $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}, C \in R^{m\times n}$

再考虑由下述状态空间表达式定义的对偶系统 $\mathbf{S_2}$：

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$
$$\eta = B^T z$$

式中 $z \in R^n, v \in R^m, \eta \in R^r, A^T \in R^{n\times n}, C^T \in R^{n\times m}, B^T \in R^{r\times n}$

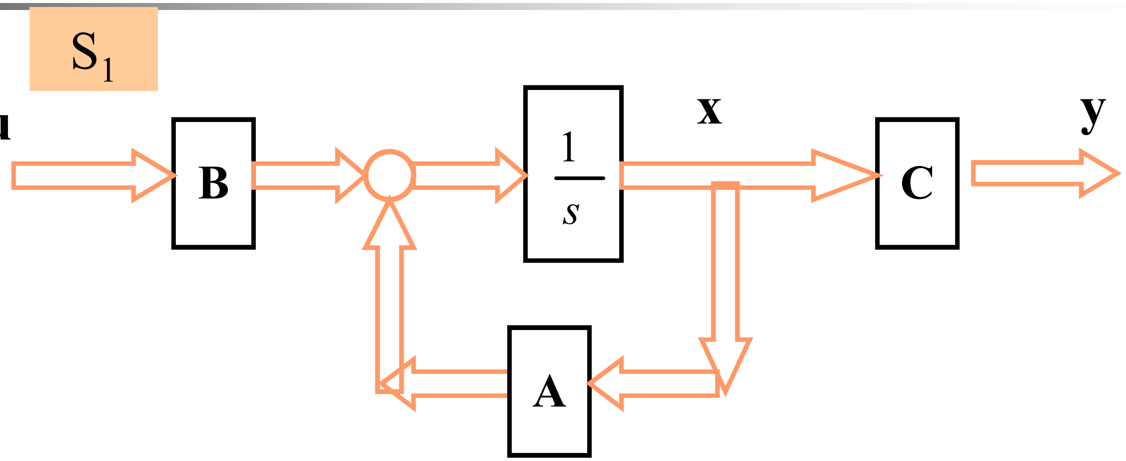
对偶原理：当且仅当系统$\mathbf{S_1}$完全能控时，系统$\mathbf{S_2}$完全能观；当且仅当系统$\mathbf{S_1}$完全能观时，系统$\mathbf{S_2}$完全能控。

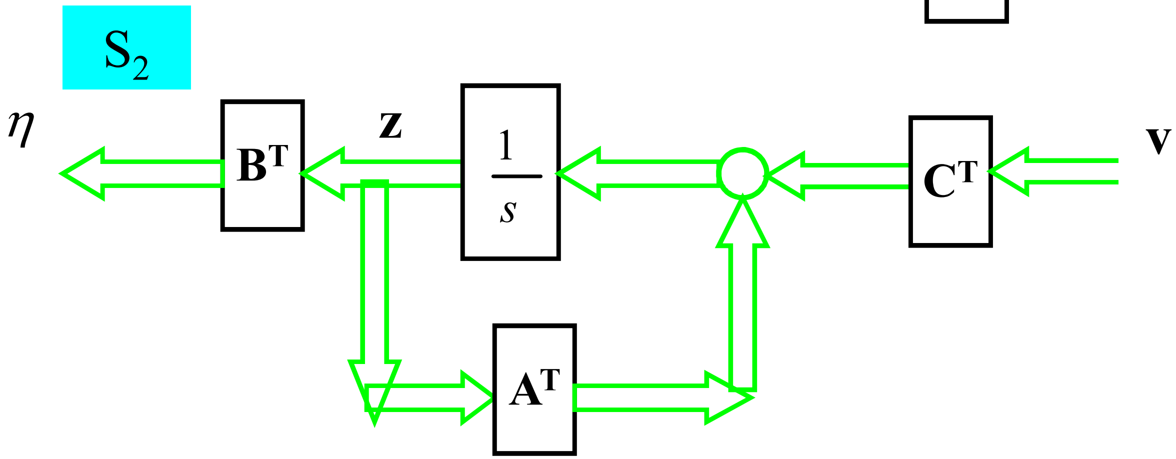
能控性和能观性

6. 对偶原理

系统 $\mathbf{S_1}$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$





对偶系统 $\mathbf{S_2}$：

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$
$$\eta = B^T z$$

对偶的含义：输入端与输出端互换，信号传递反向，信号引出点与信号综合点互换，以及对应矩阵的转置。

6. 对偶原理

对偶原理的验证

- 分别写出系统 S_1 和 S_2 的完全能控和完全能观的充要条件

1)系统 S_1完全能控的充要条件是n×nr维能控性矩阵

$$M_c = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$$ 的秩为n。

系统 S_1完全能观的充要条件是n×nm维能观性矩阵

$$M_o = [C^T \vdots A^T C^T \vdots \cdots \vdots (A^T)^{n-1} C^T]$$ 的秩为n。

2)系统 S_2完全能控的充要条件是n×nm 维能控性矩阵

$$M_c = [C^T \vdots A^T C^T \vdots \cdots \vdots (A^T)^{n-1} C^T]$$ 的秩为n。

系统 S_2完全能观的充要条件是n×nr 维能观性矩阵

$$M_o = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$$ 的秩为n。

6. 对偶原理

对偶原理的验证

对比上述这些条件，可以很明显地看出对偶原理的正确性。

利用此原理，一个给定系统的能观性可用其对偶系统的能控性来检检和判断。

简单地说，对偶性有如下关系：

$$A \Rightarrow A^T,\quad B \Rightarrow C^T,\quad C \Rightarrow B^T$$

能控性和能观性

6. 对偶原理

例：试用对偶原理判定如下系统的能控性

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

解：对偶系统

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}x(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x(t)$$

对偶系统能观判别

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -4\end{bmatrix}=2$$

对偶系统完全能观，所以原系统完全能控

Thanks!