现代控制理论
Modern Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第七章 Chapter 7

线性离散系统的分析与校正

主要内容

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

Z变换

- 从Laplace变换到Z变换
- 单边Z变换的性质
- Z反变换
- Z变换的局限性

从Laplace变换到Z变换

连续信号 $f(t)$ $\xrightarrow{\text{LT}}$ $F(s)$

采样 ↓

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \xrightarrow{\text{LT}} F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

离散序列

let $z \equiv e^{Ts}$ ↓ $s \equiv (1/T)\ln z$

$t:$	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$\cdots$
$f(kT):$	$f(0)$	$f(T)$	$f(2T)$	$f(3T)$	$f(4T)$	$\cdots$

$$z[f^*(t)]=F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

$$F(z)=f(0)+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\cdots$$

$$x_1(t)=1(t)\rightarrow X_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

从Laplace变换到Z变换

- z变换的本质与Laplace变换一样
- 将s的超越函数形式变为z的有理分式形式

➢ **注意** $F(z) \neq F(s)\big|_{s=z}$

$F(z) = F^*(s)\big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(z) = Z[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

➢ **z变换(由$f(kT)$到$F(z)$)的常用方法：**

–定义法、直接查表法、部分分式法、留数法

从Laplace变换到Z变换

- 定义法（级数求和法）

$$F(z)=f(0)+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\cdots+f(nT)z^{-n}+\cdots$$

- 部分分式法

先求出已知连续时间函数$f(t)$的拉氏变换$F(s)$，然后将有理分式函数$F(s)$展成部分分式之和的形式，使每一部分分式对应简单的时间函数，其相应的Z变换是已知，从而求出$F(s)$对应的Z变换$F(z)$。**特别要注意$F(z)$是针对$f^*(t)$的！**

从Laplace变换到Z变换

➢留数法

–$f(t)$的Laplace变换是一个有理分式，p_i为其极点

–当$F(s)$分母的阶次比分子的阶次高2阶以上时

则Z变换的闭合解析形式可以表示为：$F(z)=\hat{F}(z)+\beta$

其中

$$\hat{F}(z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(p_i)\frac{1}{1-e^{-(s-p_i)T}}\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(p_i)\frac{1}{1-e^{p_iT}z^{-1}}\right]$$

Res表示留数

$$\beta=\lim_{s\to\infty}sF(s)-\lim_{z\to\infty}\hat{F}(z)$$

β保证$F(s)$和$F(z)$所表示的初值$f(0)$的一致性。

从Laplace变换到Z变换

➢ 求留数的方法

一阶极点

$$R_1 = \lim_{s \to p_1} [(s - p_1)F(s) \cdot \frac{z}{z - e^{sT}}]$$

q 阶极点

$$R = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{s \to p} \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} [(s-p)^q F(s) \cdot \frac{z}{z - e^{sT}}]$$

从Laplace变换到Z变换

$$R_1 = \lim_{s \to p_1} [(s-p_1)F(s) \cdot \frac{z}{z-e^{sT}}]$$

➢ **例7-2-1 已知：**$G(s)=\dfrac{K}{s(s+a)}$ **，求** $G(z)$ **。**

解：$G(s)$有两个极点：0和$-a$

$$\hat{G}(z)=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{K}{s(s+a)}\cdot\frac{z}{z-e^{sT}}\right]+\lim_{s\to -a}\left[(s+a)\frac{K}{s(s+a)}\cdot\frac{z}{z-e^{sT}}\right]$$

$$=\frac{K}{a}\cdot\frac{z}{z-1}-\frac{K}{a}\cdot\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{Kz(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

以及 $\beta=\lim_{s\to\infty} sG(s)-\lim_{z\to\infty}\hat{G}(z)=0$

$$G(z)=\hat{G}(z)+\beta=\frac{Kz(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

从Laplace变换到Z变换

➢ **例7-2-1 已知：**$G(s)=\dfrac{K}{s(s+a)}$ **，求** $G(z)$ **。**

解：相应的s域的脉冲传递函数可以表示为

$$G^*(s)=\frac{Ke^{-sT}(1-e^{-aT})}{a(1-e^{-sT})(1-e^{-(s+a)T})}$$

注意到：$G^*(s)$ **的极点有无穷多个，且极点可以表示为** $s=jk\omega_s$**和** $s=-a+jk\omega_s$**。**

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

在z域中：

$$G(z)=\frac{Kz^{-1}(1-e^{-aT})}{a(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

注意：$G(z)$**的两个极点分别为：** $z=1$ **和** $z=e^{-aT}$**。 因此，对于采样函数来说，z域分析方法简便。**

关于Z变换的说明

1）只有采样函数能定义Z变换

2）在式 $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$ 中，问：_$f(kT)$_决定幅值，___z^{-k}___决定时间，即Z变换和离散序列之间有非常明确的幅值和时间的对应关系。

3）Z变换由采样函数决定，它不反映非采样时刻的信息。

Z变换

- 从Laplace变换到Z变换
- 单边Z变换的性质
- Z反变换
- Z变换的局限性

单边Z变换的几个性质

- ➢ **移位 （*T*的整数倍）**

  (a) 向右移位(滞后)
  $$Z\left[f^*(t-pT)\right]=z^{-p}F(z)$$

  (b) 向左移位(超前)
  $$Z\left[f^*(t+pT)\right]=z^{p}F(z)-\sum_{i=0}^{p-1}f(iT)z^{p-i}$$

- ➢ **初值定理：若 $\lim_{z\to\infty}F(z)$存在，则**
  $$\lim_{k\to 0}f(kT)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

单边Z变换的几个性质

➢ **终值定理：如果 $F(z)$ 满足下列条件之一**

(1) $F(z)$的所有极点在开单位圆内

(2) $F(z)$有一个1阶极点在z=1，而其它极点在开单位圆内

则 $$\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)]$$

终值定理的等价表述：

如果$(1-z^{-1})F(z)$在单位圆上和单位圆外无极点，即确保$f(kT)$ 存在有界终值，

则 $$\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)] = \lim_{z\to 1}[(z-1)F(z)]$$

单边Z变换的几个性质

$$Z[1(t)]=\frac{z}{z-1},\ Z[t]=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

➢ **例7-2-2　已知$x(t)=t^2$，$t\geq 0$，求$X(z)$。**

解： $x(t+T)-x(t)=(t+T)^2-t^2=T^2+2Tt$

$$Z\left[x(t+T)-x(t)\right]=\frac{T^2z}{z-1}+2T\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^2}$$

又由移位性质

$$Z\left[x(t+T)-x(t)\right]=zX(z)-x(0)z-X(z)$$

$$=(z-1)X(z)=\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow\quad X(z)=\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$$

单边Z变换的几个性质

复位移定理

$$Z\left[e^{\pm\alpha t}x(t)\right]=X(e^{\mp\alpha T}z)$$

- **例7-2-3 已知** $x(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega t，\ t\geq 0$ **，求 $X(z)$。**

解：查Z变换表

$$Z\left[\sin\omega t\right]=\frac{z\sin\omega T}{z^{2}-2z\cos\omega T+1}$$

复位移定理

得：

$$Z\left[e^{-\alpha t}\sin\omega t\right]=\frac{e^{\alpha T}z\sin\omega T}{e^{2\alpha T}z^{2}-2ze^{\alpha T}\cos\omega T+1}$$

单边Z变换的几个性质

复域微分定理

$$Z\left[tx(t)\right] = -Tz\frac{dX(z)}{dz}$$

➢ **例7-2-4 已知$x(t)= t^3$， $t\geq 0$，求 $X(z)$。**

解：

$$Z[t^2] = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$$

复域微分定理

得：

$$Z[t^3] = -Tz\frac{d}{dz}\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

单边Z变换的几个性质

复域微分定理

$$Z\left[tx(t)\right]=-Tz\frac{dX(z)}{dz}$$

$$Z[kx(t)]=-z\frac{dX(z)}{dz}$$

其中$k=\dfrac{t}{T}$

- **例7-2-5 已知** $x[k]=ka^{k-1}$，$k\ge 0$ **，求** $X(z)$**。**

解：

$$Z[a^{k-1}]=a^{-1}Z[a^k]$$

$$=a^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\frac{a^{-1}z}{z-a}$$

复域微分定理

得：

$$Z[ka^{k-1}]=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{a^{-1}z}{z-a}\right)=\frac{z}{(z-a)^2}$$

单边Z变换的几个性质

➢ **例7-2-6 已知** $F(z)=\dfrac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$**，求*F*(*z*)所示序列的初值和终值。**

解：(1) 初值： $f(0)=\lim\limits_{k\to 0} f(kT)=\lim\limits_{z\to\infty} F(z)=0$

(2) 终值：

$F(z)$有一个1阶极点在$z=1$，其它极点$0.208\pm 0.405i$ 在开单位圆内

$$\lim_{k\to\infty} f(kT)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.416z+0.208)}$$

$$=\frac{0.792}{1-0.416+0.208}=1$$

单边Z变换的几个性质

- 例7-2-7 已知 $F(z)=\dfrac{10z^2}{(z-1)(z-2)}$ ，求$F(z)$所示序列的终值。

解：$(1-z^{-1})F(z)$ 的一个极点 (p=2) 在单位圆外，所以 $F(z)$ 所示序列不收敛，不满足终值定理条件。

（利用长除法，可推知其终值为正无穷）

Z变换

- 从Laplace变换到Z变换
- 单边Z变换的性质
- **Z反变换**
- **Z变换的局限性**

Z反变换（由$F(z)$计算$f(kT)$）

➢ 定义

$\{f(kT)\}$ $\xrightarrow{\text{z-变换}}$ $F(z)$

$F(z)$ $\xrightarrow{\text{z 反变换}}$ $\{f(kT)\}$

$$Z[f(kT)] = F(z)$$

$$Z^{-1}[F(z)] = f(kT)$$

➢ 方法：

(1) 长除法 （幂级数展开法）

(2) 部分分式法

(3) 留数法

- 注意：反变换仅仅得到$f(t)$在采样点上的数据。换句话说，$F(z)$不包括采样点之间的$f(t)$的信息。

Z反变换

- **长除法**

$X(z)$ 通常可表示为两个多项式之比。

$$X(z)=\frac{M(z)}{N(z)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^{-n}=C_0+C_1z^{-1}+C_2z^{-2}+\cdots+C_nz^{-n}+\cdots$$

式中：$C_n\left(n=0,1,2,3...\right)$，即是$x\left(nT\right)$

Z反变换

- **例7-2-8：已知** $X(z)=\dfrac{z}{z+a}$ **，求$X(z)$所示序列。**

解：由长除法

$$X(z)=\frac{z}{z+a}=\frac{1}{1+az^{-1}}=1-az^{-1}+a^2z^{-2}-a^3z^{-3}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k z^{-k}$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)z^{-k}$$

$$x[k]=(-a)^k$$

Z反变换

➢ **例7-2-7 已知** $F(z)=\dfrac{10z^2}{(z-1)(z-2)}$ **，求*F*(*z*)所示序列的终值。**

解：利用长除法

$$\frac{10z^2}{(z-1)(z-2)}=\frac{10z^2}{z^2-3z+2}=\frac{10}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=10+30z^{-1}+70z^{-2}+150z^{-3}+\cdots$$

可推知其终值为正无穷。

Z反变换

- **部分分式法**
  - 依据：Z变换的线性性质。$X(z)$通常是z的有理分式，只要将$X(z)$的有理分式展开为部分分式，逐项查Z变换表，就可以得到反变换式。
  - 考虑到Z变换表中，所有Z变换函数$X(z)$在其分子上普遍都有因子z，所以将$X(z)/z$展开成部分分式，然后将所得结果的每一项都乘以z，即得$X(z)$的部分分式展开式。这样做可以简化部分分式展开的计算过程。

Z反变换

- **例7-2-9：** **已知** $X(z)=\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ **，求$X(z)$所示序列。**

解：由 部分分式法

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1-e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-aT}} \quad\Rightarrow\quad X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

查表

$$\therefore x[k]=1-e^{-akT}$$

$$\therefore x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{-akT})\delta(t-kT)$$

Z反变换

➢ 例7-2-10：已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ ，求$X(z)$所示序列。

解：由部分分式法

$$\frac{X(z)}{z}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2} \Rightarrow X(z)=-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-2}$$

查表

$$\therefore x[k]=-1+2^k$$

$$\therefore x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-1)\delta(t-kT)$$

Z反变换

➢ **例7-2-11：已知** $Y(z)=\dfrac{-3z^2+z}{z^2-2z+1}$ **，求反变换。**

解：$Y(z)$的分母的根 z=1是一个两重根，设

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{A_1}{(z-1)^2}+\frac{A_2}{z-1}$$

用待定系数法可得上式中的A_1、A_2，代入上式得

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{-3z+1}{(z-1)^2}=-\frac{2}{(z-1)^2}-\frac{3}{z-1} \quad\Rightarrow\quad Y(z)=-\frac{2z}{(z-1)^2}-\frac{3z}{z-1}$$

查表

$$y[k]=-2k-3$$

$$\therefore y^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-2k-3)\delta(t-kT)$$

Z反变换

➢ **例7-2-12：一个离散系统的过渡过程Z变换式为**

$$Y(z)=\frac{K_o(1-e^{-T_s/T})z}{z^2+z[K_cK_o(1-e^{-T_s/T})-(1+e^{-T_s/T})]+[e^{-T_s/T}-K_cK_o(1-e^{-T_s/T})]}$$

设已知系统$K_c = K_o=1$，采样周期T=1秒，$T_s = 0.2$秒，求该系统的过渡过程。

解：经整理得：

$$Y(z)=\frac{0.181z}{z^2-1.638z+0.638}=\frac{0.181z}{(z-1)(z-0.638)}=\frac{0.5z}{z-1}-\frac{0.5z}{z-0.638}$$

Z反变换

$$y[k]=0.5(1-0.638^k)$$

——闭合形式

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…..(秒)**
***y*(*kT*)**	**0**	**0.181**	**0.297**	**0.372**	**0.421**	**0.451**	**……**

——非闭合形式

Z反变换

➢ 留数法

设$X(z)$共有n个相异极点$z_1,\cdots,z_n$，则：$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[X(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i}$

$$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}\lim_{z\to p_i}\left[\left(z-p_i\right)X(z)z^{k-1}\right]$$

例：

$$Y(z)=\frac{z}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)}$$

Z反变换

$$y(kT)=\lim_{z\to 1}\left[\left(z-1\right)\frac{z}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)}z^{k-1}\right]+\lim_{z\to 2}\left[\left(z-2\right)\frac{z}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)}z^{k-1}\right]=-1+2^k$$

Z反变换

- **部分分式法**
  - 需要知道$X(z)$的全部极点，这意味着在高阶系统中要解高阶代数方程
- **长除法**
  - 不需要解方程，而是基于所求的最初几个序列值来猜解析表达式，有时难以得到解析表达式
  - 通常在只需求出序列最初几个数值或采用计算机进行数值求解时使用
- **留数法**
  - 可处理非有理形式，缺点与部分分式法相同

Z变换

- 从Laplace变换到Z变换
- 单边Z变换的性质
- Z反变换
- **Z变换的局限性**

Z变换的局限性

- 输出Z变换函数$Y(z)$，只确定了时间函数$y(t)$在采样瞬时上的数值，不能反映$y(t)$在采样间隔中的信息。故$Y(z)$的Z反变换$y(nT)$只能代表采样瞬时$t=nT$时的数值。

改进方法——修正（推广）Z变换法

The End