自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous -time Control Systems

关键词

- 数学模型， 建模
- 动态系统（单元）
- 微分方程模型，状态空间模型
- 传递函数（Transfer Function）
- 开环传递函数，闭环传递函数
- 方块图（Block Diagram），仿真（模拟）图
- 信号流图（Signal Flow Graph, SFG）
- 梅逊增益公式

主要内容

- 数学模型的基本概念
- 电路系统的数学模型
- 系统总传递函数
- 各种模型间的关系
- 其他系统（机械、液位等）的数学模型
- **非线性系统的线性化以及特殊环节建模**

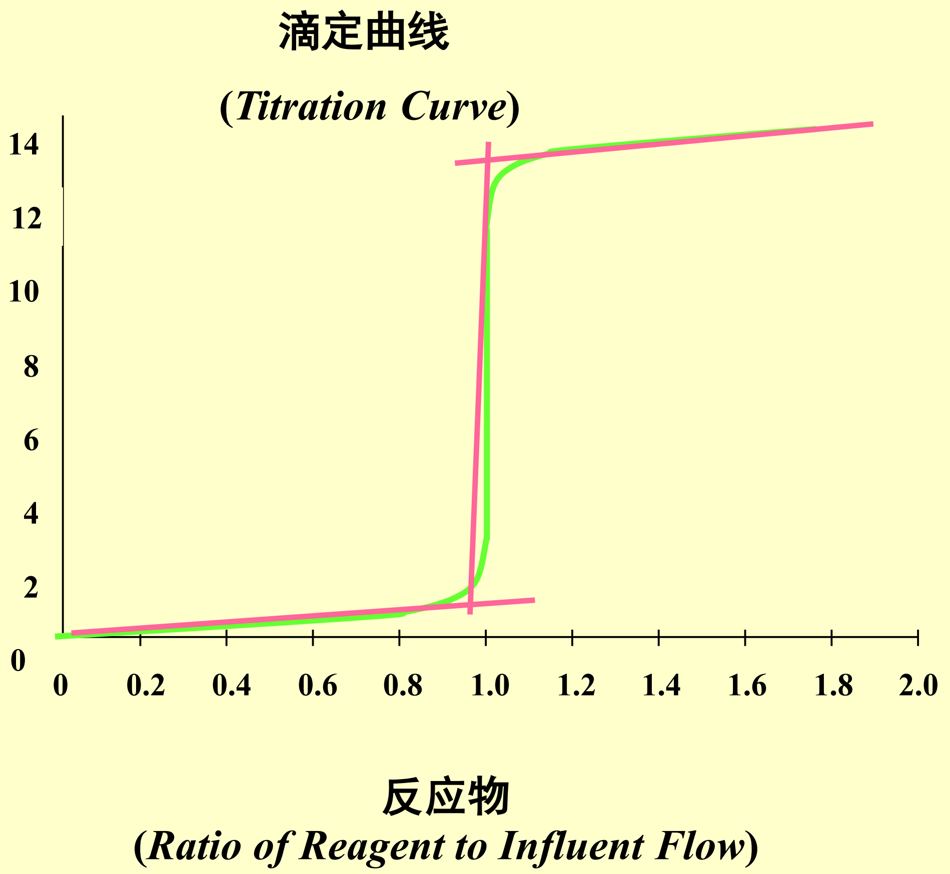
主要内容

- 非线性环节的线性化处理
- 特殊环节的建模
  - –纯滞后、分布参数、积分、高阶
- 控制系统中其他环节的数学模型
  - –控制器、测量环节、执行机构
- 本章总结

非线性系统

➢ 大多数物理系统本质上都是非线性系统，如

高度非线性



➢ 通常利用一般的非线性微分方程描述非线性系统

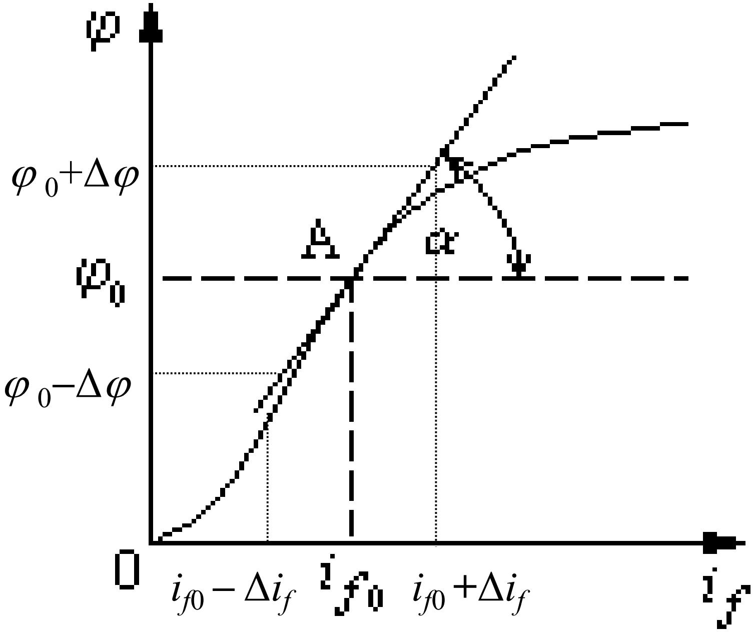
$$\dot{x} = f(x, u)$$

➢ 为什么要线性化？如何线性化？

非线性环节的线性化处理

- 几乎所有元件或系统的运动方程都是非线性方程。但在比较小的范围运动来说，把这些关系看作是线性关系，是不会产生很大误差的。方程式一经线性化，就可以应用线性迭加原理。

- 研究非线性系统在某一工作点（平衡点）附近的性能，（如图所示，A(i_{f0}，φ_0)为平衡点，受到扰动后，$i_f(t)$偏离i_{f0}，产生$\Delta i_f(t)$，$\Delta i_f(t)$的变化过程，表征系统在平衡点附近的性能）。非线性特性的线性化，实质上就是以平衡点附近的直线代替平衡点附近的曲线。



非线性系统：液位系统

如果同时考虑输出量与液位、阀门流通面积之间的关系：
考虑在平衡点附近进行泰勒级数展开：

$$q_{out} = \alpha f \sqrt{h}$$

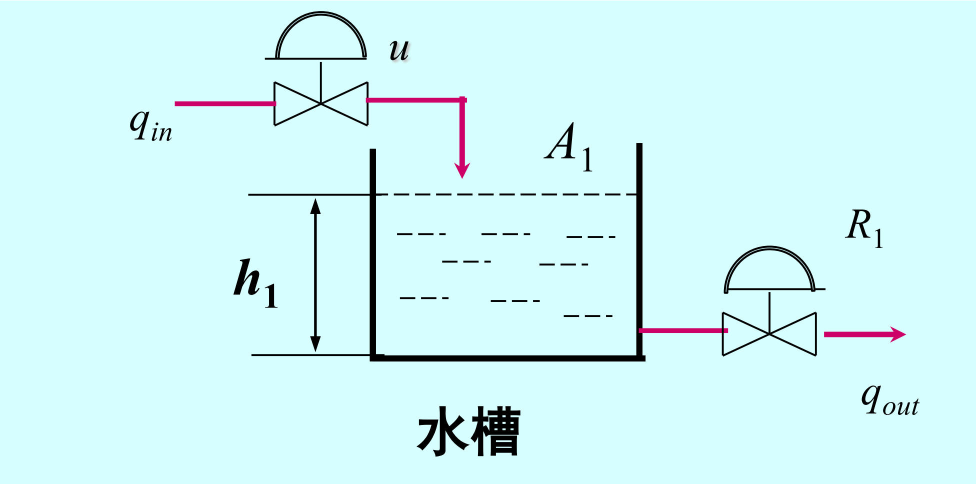
$$q_{out} = q_{out}^0 + \left.\frac{\partial q_{out}}{\partial h}\right|_{\substack{h=h_0\\ f=f_0}} (h-h_0) + \left.\frac{\partial q_{out}}{\partial f}\right|_{\substack{h=h_0\\ f=f_0}} (f-f_0)$$

$$= q_{out}^0 + \frac{1}{2}\alpha f_0 \sqrt{\frac{1}{h_0}}\Delta h + \alpha\sqrt{h_0}\Delta f$$

$$= q_{out}^0 + \frac{1}{R}\Delta h + K\Delta f$$

阀门开度变化引起流出量的变化

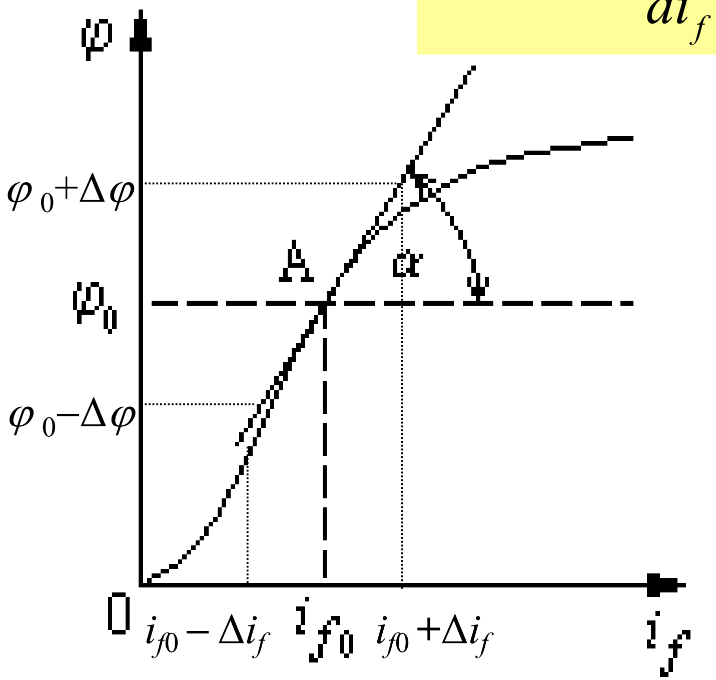
液位变化引起流出量的变化



非线性环节的线性化处理

- 设非线性函数 $\varphi = f(i_f)$
- 设在平衡点的邻域内，φ对i_f的各阶导数（直至n+1）是存在的，它可展成泰勒级数：

$$\varphi = \varphi_0 + (\frac{d\varphi}{di_f})_0 \Delta i_f + \frac{1}{2!}(\frac{d^2\varphi}{di_f^2})_0 (\Delta i_f)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(\frac{d^n\varphi}{di_f^n})_0 (\Delta i_f)^n + R_{n+1}$$



式中 R_{n+1}为余项，φ_0和 i_{f0} 为原平衡点，

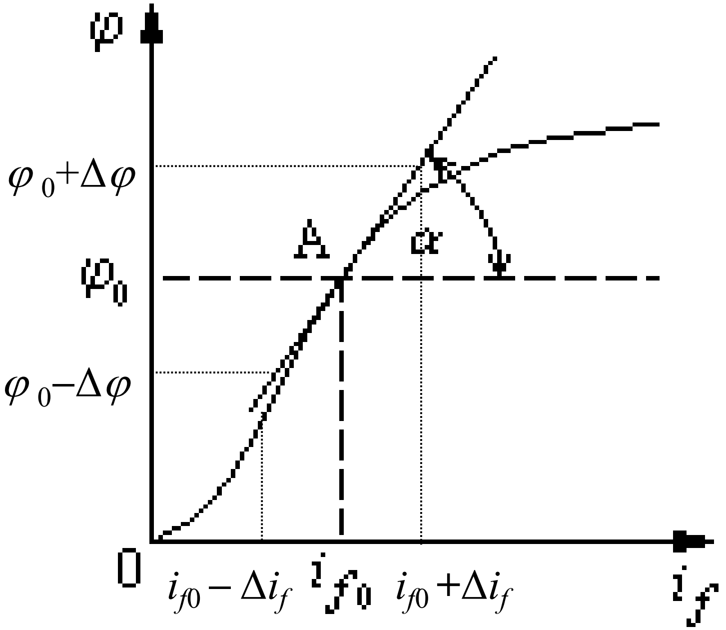
$(\frac{d\varphi}{di_f})_0, (\frac{d^2\varphi}{di_f^2})_0, \cdots$ 为原平衡点处的一阶、二阶、…导数。

$\Delta i_f = i_f - i_{f0}$

非线性环节的线性化处理

忽略泰勒级数右端第三项及其以后的各项

$$\varphi=\varphi_0+(\frac{d\varphi}{di_f})_0\Delta i_f+\frac{1}{2!}(\frac{d^2\varphi}{di_f^2})_0(\Delta i_f)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(\frac{d^n\varphi}{di_f^n})_0(\Delta i_f)^n+R_{n+1}$$



$$\varphi=\varphi_0+(\frac{d\varphi}{di_f})_0\Delta i_f$$

原平衡点是已知的，故可以从左图的曲线求得

$$(\frac{d\varphi}{di_f})_0=\tan\alpha=L'_f$$

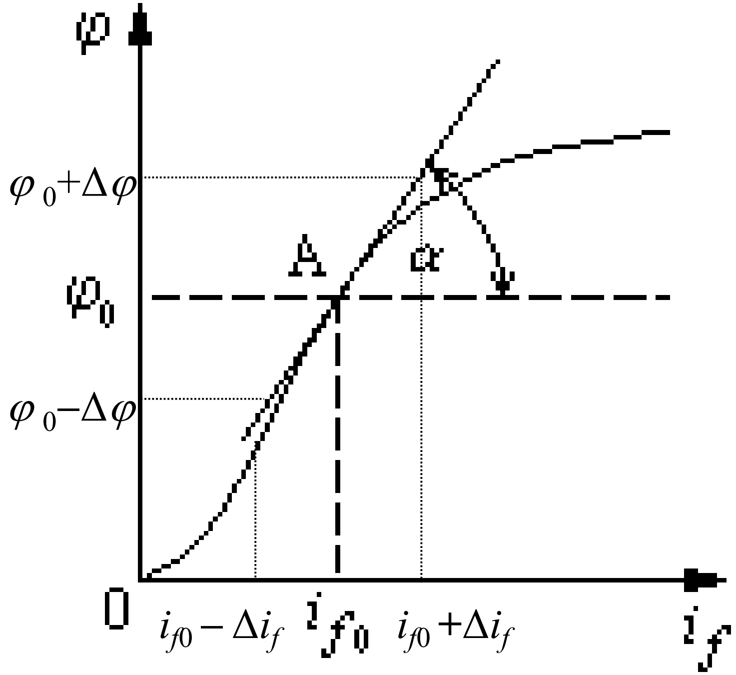
非线性环节的线性化处理

$$(\frac{d\varphi}{di_f})_0 = \tan\alpha = L'_f$$

式中的L'_f为常值，在不同平衡点有不同的值。因此该式可写为：

$$\varphi = \varphi_0 + L'_f\,\Delta i_f$$

或 $$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = L'_f\,\Delta i_f$$



在平衡点附近，经过线性化处理（忽略偏移量的高次项）后，原方程的偏移量间已经具有线性关系了。偏移愈小，这个关系愈准确。

非线性环节的线性化处理：例1

- 交流伺服电机如P47图2-29所示。转矩T-角速度ω特性关系如图2-30所示。由图看出，T-ω不是直线，因此无法利用线性微分方程来确切地描述电机特性。

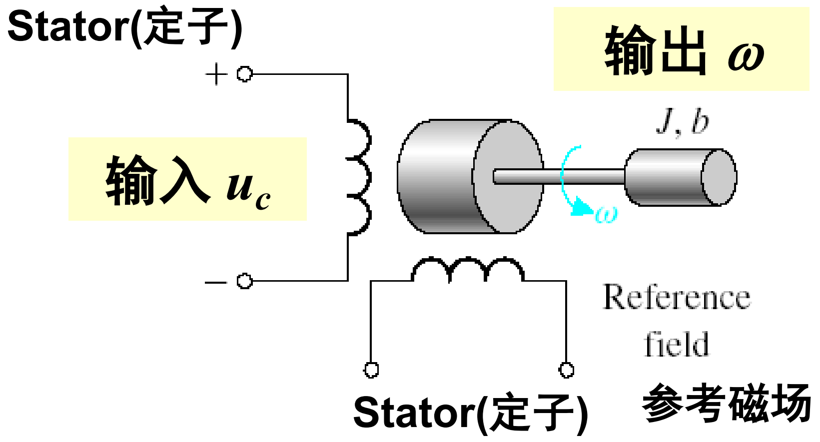


图2-29　两相交流伺服电机示意图

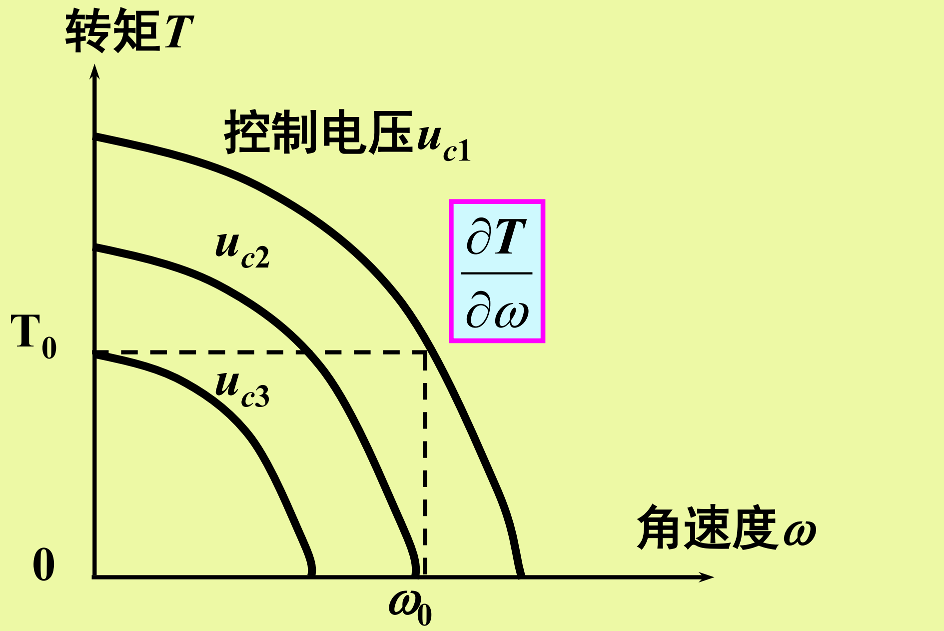
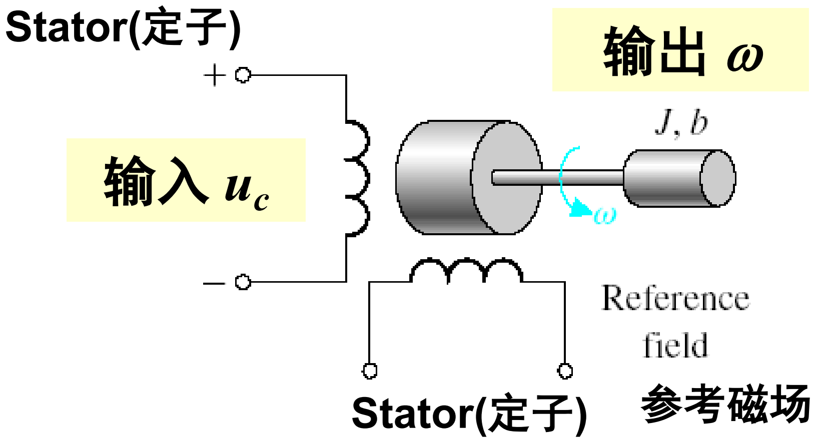


图2-30 两相交流伺服电机的机械特性曲线

非线性环节的线性化处理：例1

- 根据交流伺服电机的平衡方程，有 $T = f(u_c, \omega)$ (1)



$$T = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

- 对于非线性系统，转矩-角速度平衡方程为

$$T_0 - B\omega_0 = 0 \qquad (2)$$

- 当出现微小变化时

$$J\frac{d(\omega_0 + \Delta\omega)}{dt} = (T_0 + \Delta T) - B(\omega_0 + \Delta\omega) \qquad (3)$$

其中，J 是转动惯量

非线性环节的线性化处理：例1

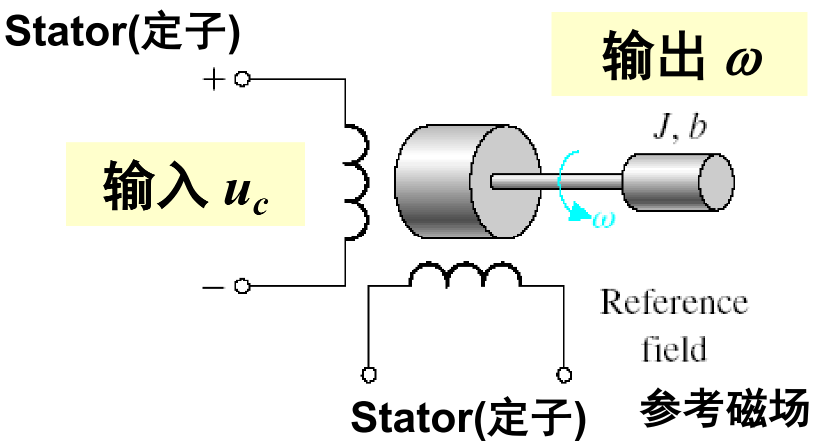
从方程(3)中减去平衡方程(2)，于是得到交流伺服电机的动态模型

$$J\frac{d\Delta\omega}{dt} = \underline{\Delta T} - B\Delta\omega$$

注意方程(1)

$$T = f(u_c,\omega) \quad (1)$$

$$J\frac{d\Delta\omega}{dt} = \underline{f(u_c,\omega)} - B\Delta\omega - T_0$$



➤ 利用线性化处理来近似描述系统的非线性特性

非线性环节的线性化处理：例1

- 线性化：在工作点附近，利用泰勒级数将非线性函数 T展开，保留线性项，忽略二次项及高阶项，可以得到

$$T = f(u_c,\omega) = T_0\Big|_{\substack{u_c=u_{c0}\\ \omega=\omega_0}} + \frac{\partial f}{\partial u_c}\Big|_{\substack{u_c=u_{c0}\\ \omega=\omega_0}}(u_c-u_{c0}) + \frac{\partial f}{\partial \omega}\Big|_{\substack{u_c=u_{c0}\\ \omega=\omega_0}}(\omega-\omega_0)$$

令： C_u　Δu_c　$-C_\omega$　$\Delta\omega$

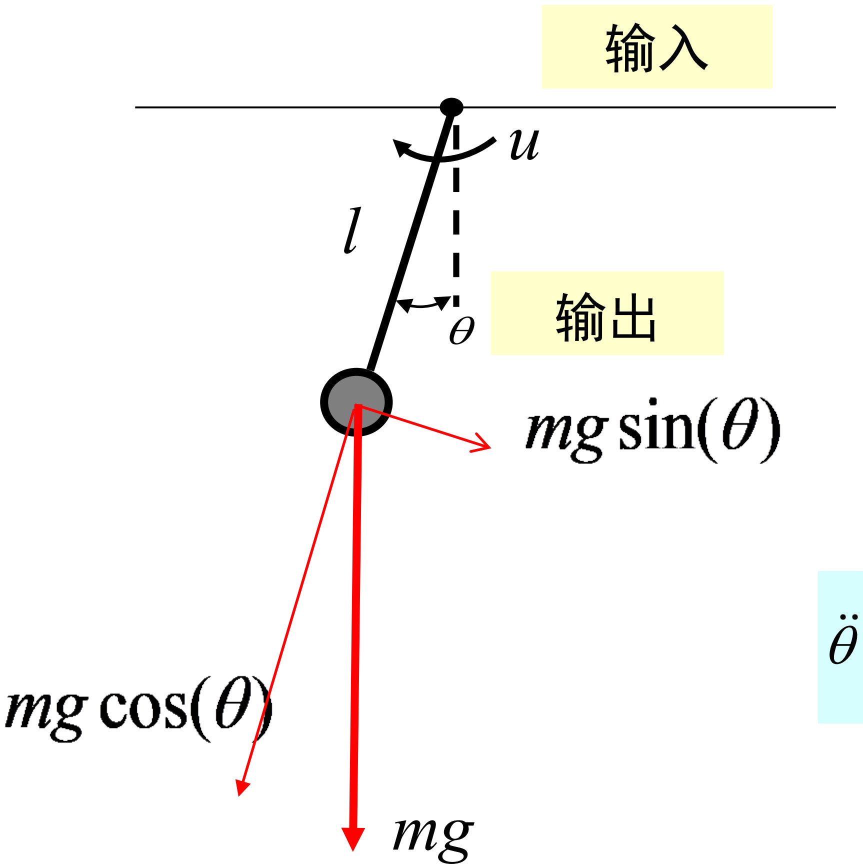
简化后： $$T = f(u_c,\omega) = T_0 + C_u\Delta u_c - C_\omega\Delta\omega$$

$$J\frac{d(\Delta\omega)}{dt} + (B+C_\omega)\Delta\omega = C_u\Delta u_c$$

$$J\frac{d\Delta\omega}{dt} = f(u_c,\omega) - B\Delta\omega - T_0$$

非线性环节的线性化处理：例2

➢ **钟摆**



$$ml^2\ddot{\theta} = u - mgl\sin(\theta)$$

⇕

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) + \frac{1}{ml^2}u = -\frac{g}{l}f(\theta) + \frac{1}{ml^2}u$$

非线性环节的线性化处理：例2

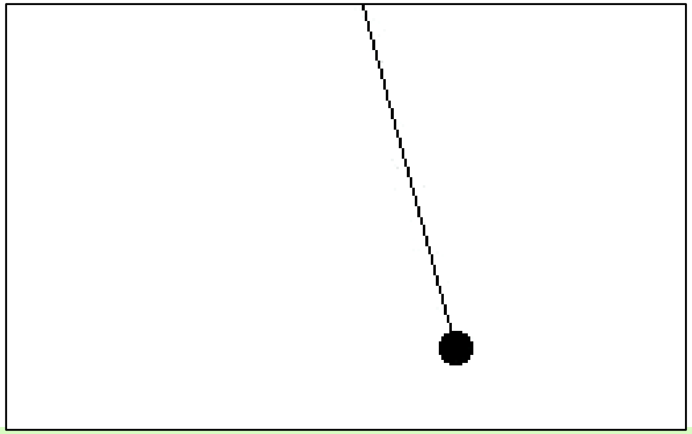
➢ 线性化的误差

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

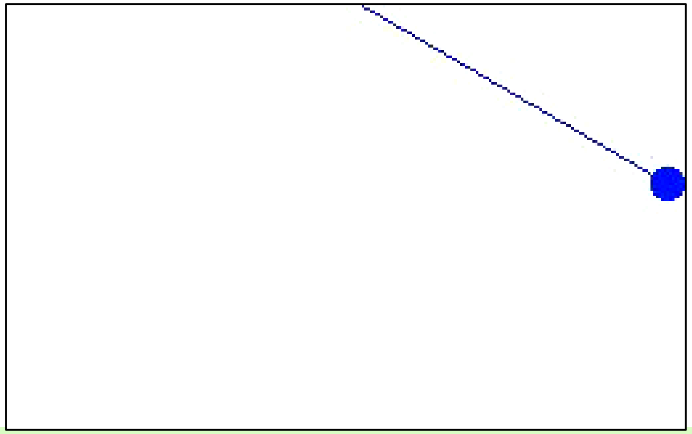
θ较小时成立（如：小于20°）

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) + \frac{1}{ml^2}u \approx -\frac{g}{l}\theta + \frac{1}{ml^2}u$$

线性化近似模型与非线性模型的对比



小摆角



大摆角

http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Pendulum/Pendula.html

非线性环节的线性化处理：小结

建立系统的线性化微分方程的步骤：

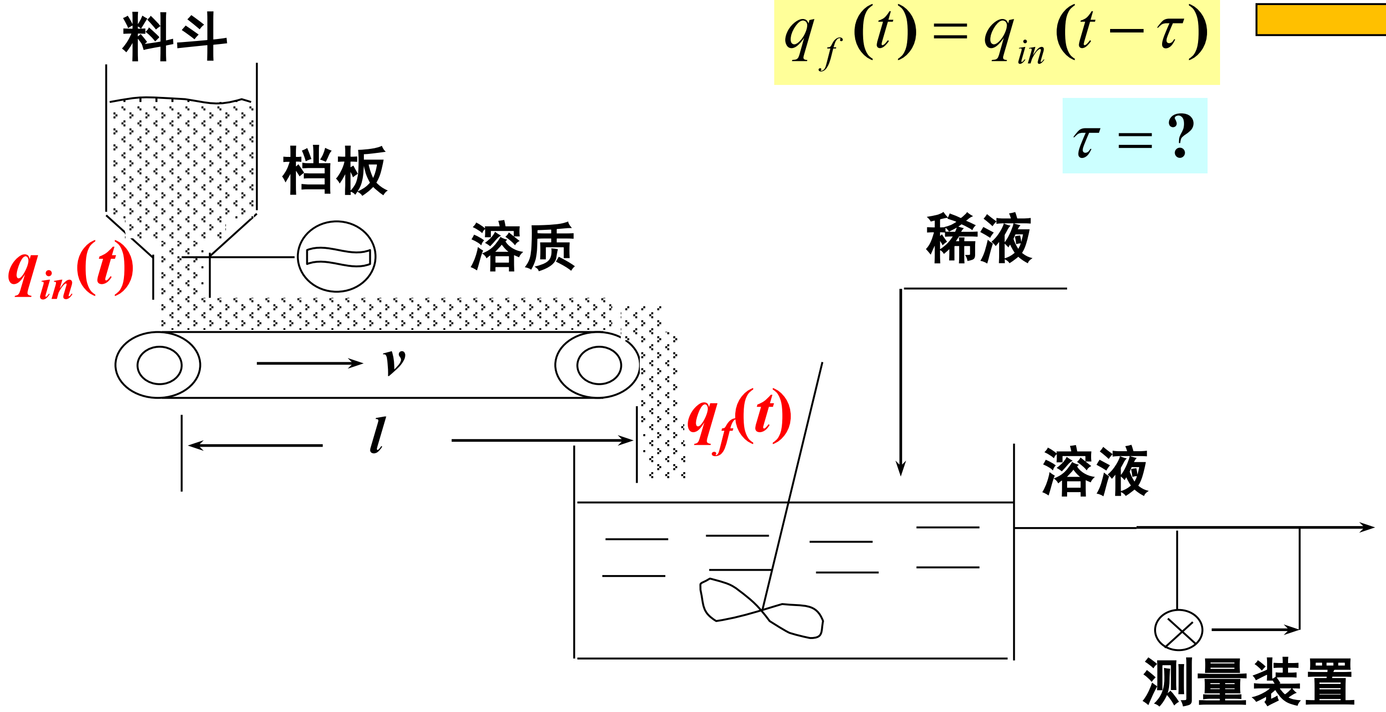
1. 首先确定系统处于平衡状态时，各元件的工作点；
2. 然后列出各元件在工作点附近的偏移量方程式，消去中间变量；
3. 最后得到整个系统以偏移量表示的线性化方程式。

主要内容

- 非线性环节的线性化处理
- 特殊环节的建模
  - –纯滞后、分布参数、积分、高阶
- 控制系统中其他环节的数学模型
  - –控制器、测量环节、执行机构
- 本章总结

纯滞后

- **纯滞后**　指在输入变量改变后，输出变量并不立即改变，而是要过一段时间才开始变化的现象。这段时间即被称为纯滞后。



P.42 图2-22 具有纯滞后特性的溶解槽

纯滞后的数学模型

$$q_f(t) = q_{in}(t-\tau)$$

$$\tau = ?$$

LT →

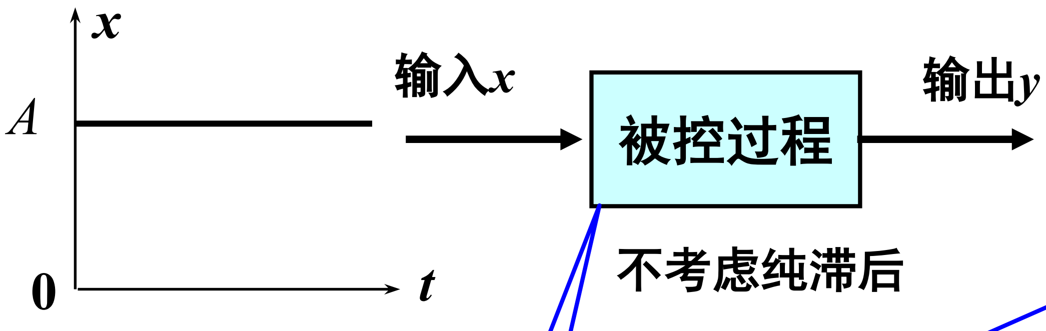
$$Q_f(s) = e^{-\tau s} Q_{in}(s)$$

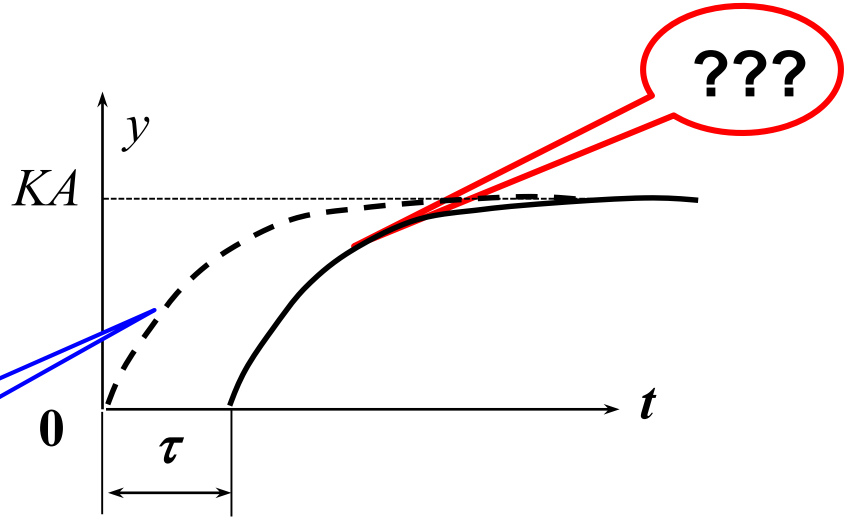
$$\frac{Q_f(s)}{Q_{in}(s)} = e^{-\tau s}$$

纯滞后的传递函数

纯滞后

➢ **纯滞后** 指在输入变量改变后，输出变量并不立即改变，而是要过一段时间才开始变化的现象。这段时间即被称为纯滞后。





具有纯滞后的对象阶跃响应曲线

$$T\frac{dy}{dt}+y=Kx$$

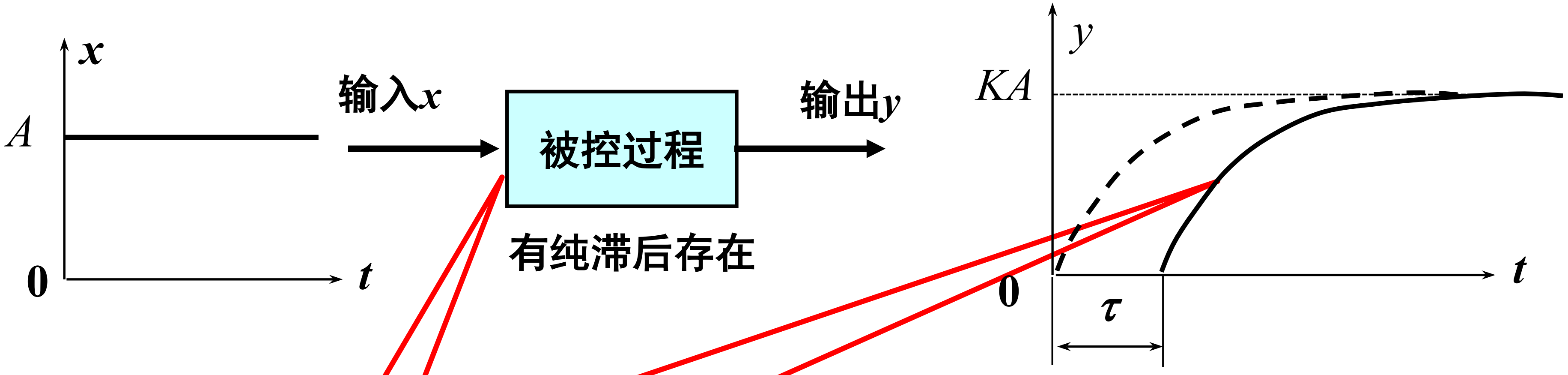
$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{Ts+1}$$

$$y(t)=KA(1-e^{-t/T})$$

无纯滞后的一阶微分方程与传递函数模型

纯滞后

➢ **纯滞后** 指在输入变量改变后，输出变量并不立即改变，而是要过一段时间才开始变化的现象。这段时间即被称为纯滞后。



具有纯滞后的对象阶跃响应曲线

$$T\frac{dy}{dt}+y=Kx(t-\tau)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Ke^{-\tau s}}{Ts+1}$$

$$y(t)=KA(1-e^{-(t-\tau)/T})$$

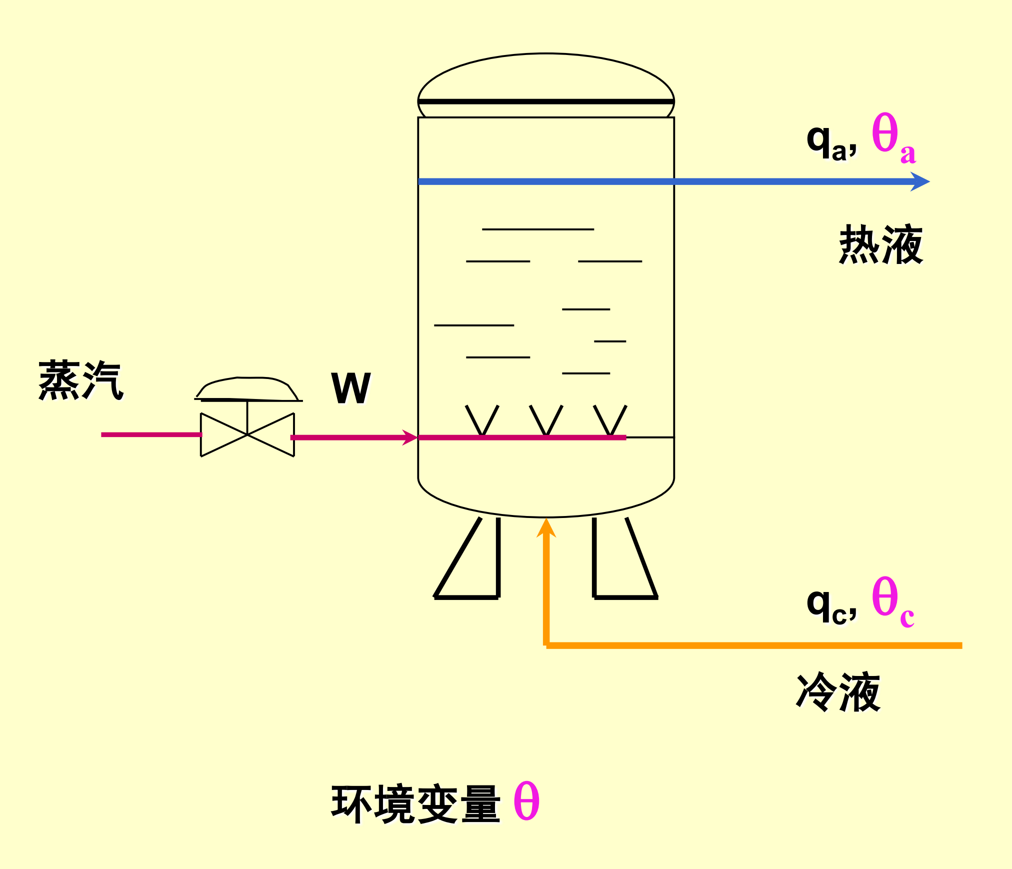
含纯滞后的一阶微分方程及传递函数模型

一阶+纯滞后可以描述许多工业对象。

纯滞后：直接蒸汽加热器

- 系统的微分方程为：

$$T\frac{d\theta_a}{dt}+\theta_a=\theta_c+KW$$



- 系统的传递函数：

调节通道

$$G_o(s)=\frac{\theta_a(s)}{W(s)}=\frac{K}{Ts+1}$$

如果蒸汽阀到加热器入口较远，则须考虑时滞，

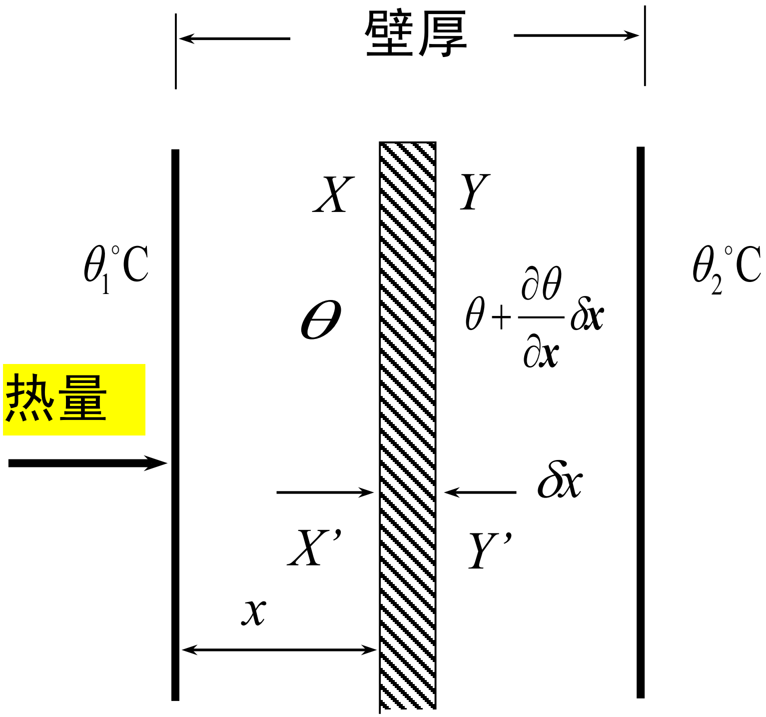
$$G_o(s)=\frac{\theta_{a\tau}(s)}{W(s)}=\frac{Ke^{-\tau s}}{Ts+1}$$

分布参数

➢ 分布参数　对象的被控变量与物理空间位置分布相关，称有这类特性的对象为分布参数对象，建模时采用偏微分方程描述。

例 一块具有很大面积A的金属平板，如图2-23所示。热量从左向右传递，两边壁面温度分别为 $\theta_1(t)$ °C和 $\theta_2(t)$ °C，壁内温度 θ 随时间 t 和距离 x 变化，所以应该写成 $\theta(x,t)$ 。

随温度场的分布，在距离左边 x 处的某一薄层 XY 的表面温度为 θ 和 $\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}\delta x$ ，其中 δx 是薄层厚度，$\frac{\partial\theta}{\partial x}$ 是温度梯度。



P.43 图2-23 金属壁传热原理示意图

分布参数

- **分布参数** 对象的被控变量与物理空间位置分布相关，称有这类特性的对象为分布参数对象，建模时采用偏微分方程描述。

推导薄层XY在时间 t 时的热平衡方程

单位时间由XX'平面输入薄层的热量为 $-K\dfrac{\partial\theta}{\partial x}A$

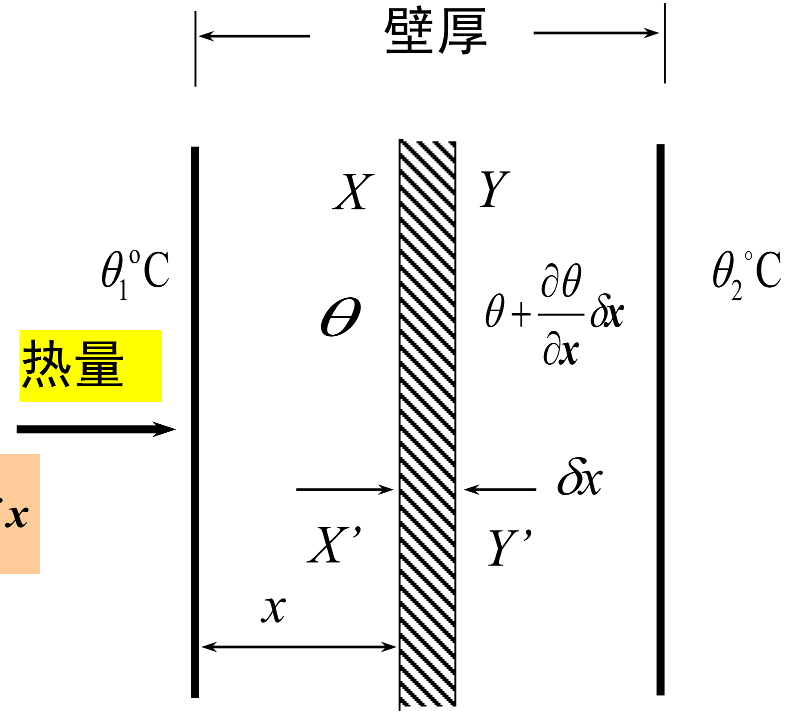
单位时间由YY'平面输出薄层的热量为

$$-K\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}\delta x\right)A=-K\frac{\partial\theta}{\partial x}A-K\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\delta x\cdot A$$

单位时间内薄层XY平面积聚的热量为 $A\rho c_p\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\delta x$

金属壁的由偏微分方程描述的数学模型：

$$A\rho c_p\frac{\partial\theta}{\partial t}\delta x=KA\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\delta x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{K}{\rho c_p}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}}$$



P.43 图2-23 金属壁传热原理示意图

K为导热系数，W/(m·K)

积分

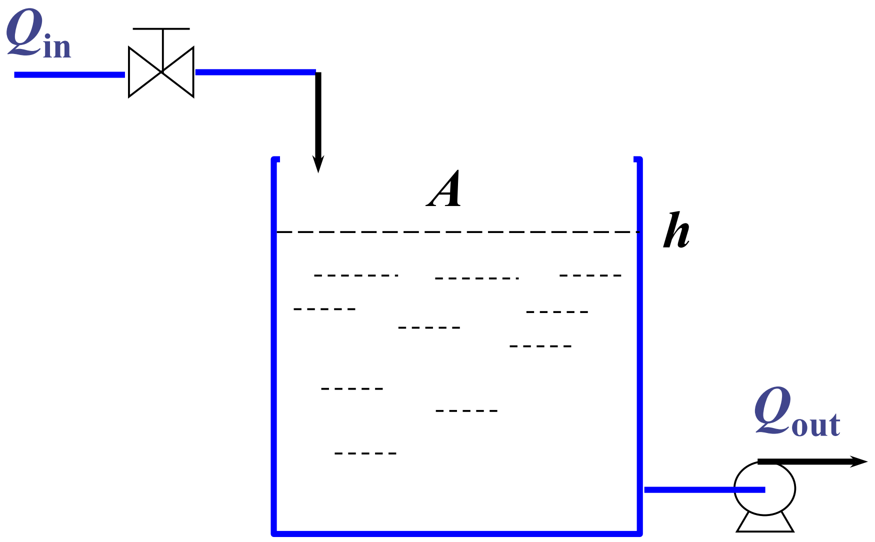
➢ 积分

例 如图。储槽液位的变化仅与注入的液体流量相关。其数学模型：

$$A\frac{d\Delta h(t)}{dt}=\Delta Q_{in}(t)$$

其传递函数模型：

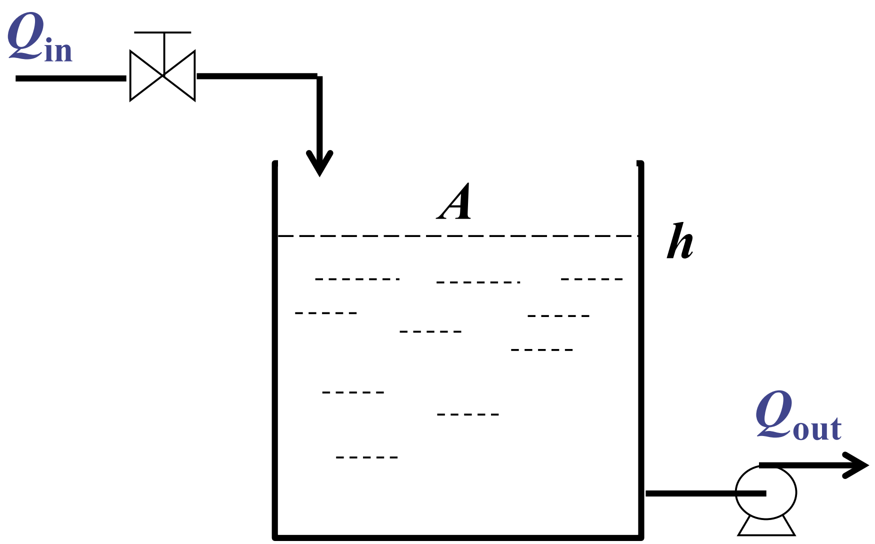
$$G(s)=\frac{H(s)}{Q_{in}(s)}=\frac{1}{As}=\frac{K_A}{s}$$



P.44 图2-24 出口装有正位移泵的贮槽

积分特性 只要有一个增量不为零的输入变量作用于该对象，其输出变量就会随时间无限制地增加；只有当输入变量的增量为零时，输出变量才会稳定在一个值上。

积分



P.43 图2-24 出口装有正位移泵的贮槽

$$A\frac{d\Delta h(t)}{dt}=\Delta Q_{in}(t)$$

$$G(s)=\frac{H(s)}{Q_{in}(s)}=\frac{1}{As}=\frac{K_A}{s}$$

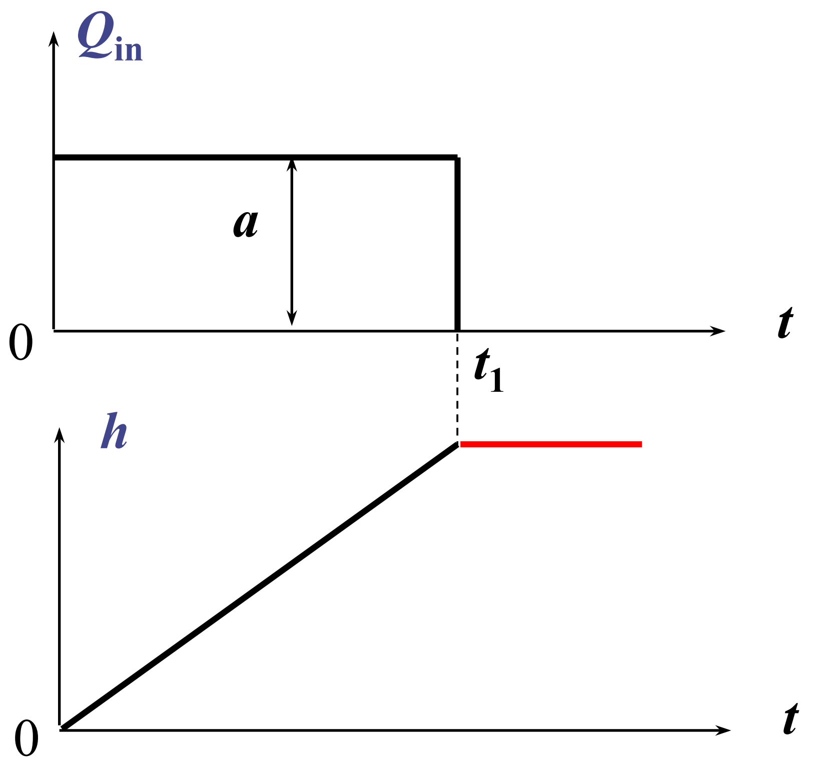


图2-25 积分特性的阶跃响应曲线

高阶

➢ 一般称三阶或更高阶的方程为高阶方程，相应的对象就称为高阶对象。

➢ 对于稳定系统而言（微分方程的解均具有负实部），高阶系统的单位阶跃响应与二阶系统的单位阶跃响应相似，因此常用二阶系统近似高阶系统。

➢ 工程上为简单起见，经常还采用一阶加纯滞后的对象来近似二阶或更高阶的对象。

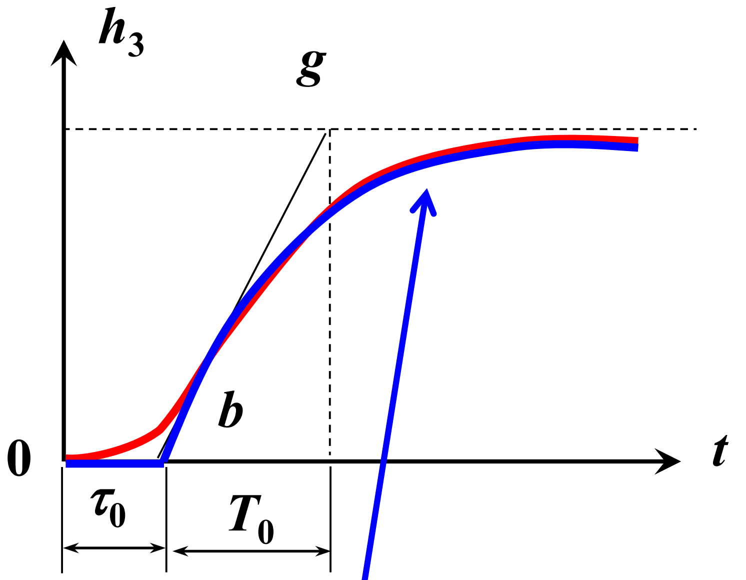


图2-26 高阶对象阶跃响应曲线示意图

$$\frac{H_3(s)}{Q_{in}(s)} \approx \frac{Ke^{-\tau_0 s}}{T_0 s+1}$$

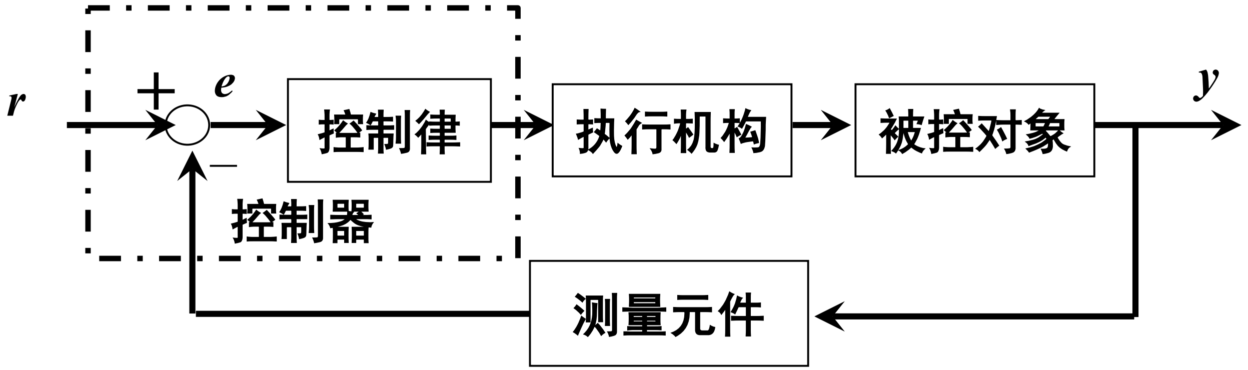
主要内容

- 非线性环节的线性化处理
- 特殊环节的建模
  - –纯滞后、分布参数、积分、高阶
- **控制系统中其他环节的数学模型**
  - –控制器、测量环节、执行机构
- **本章总结**

控制系统中其他环节的数学模型

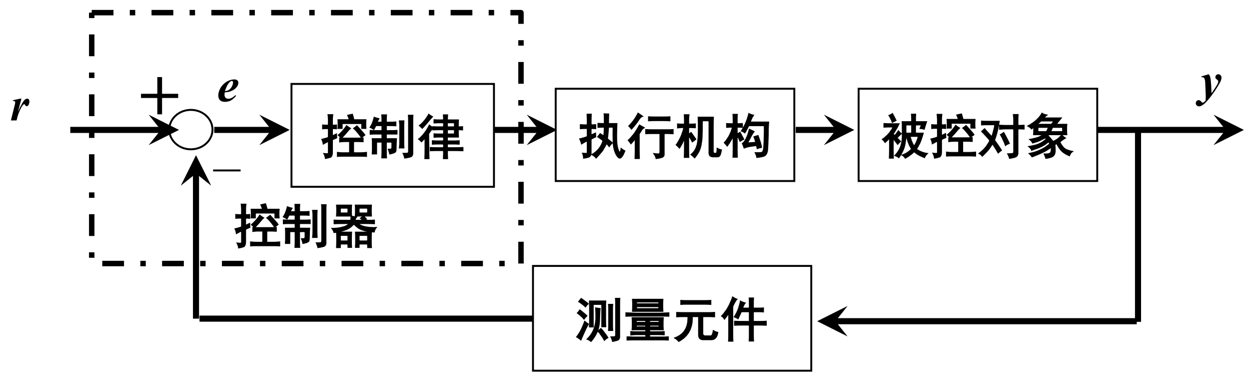
➢为了对整个控制系统的动态行为进行分析与研究，必须建立控制系统其他组成部分的数学模型。

➢本质上，建模的方法与被控对象的建模方法是相通的。



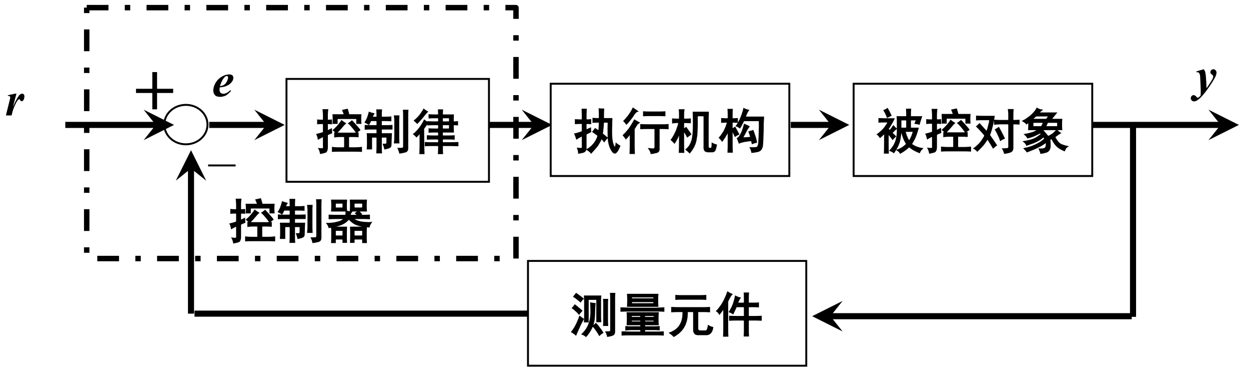
控制系统组成示意图

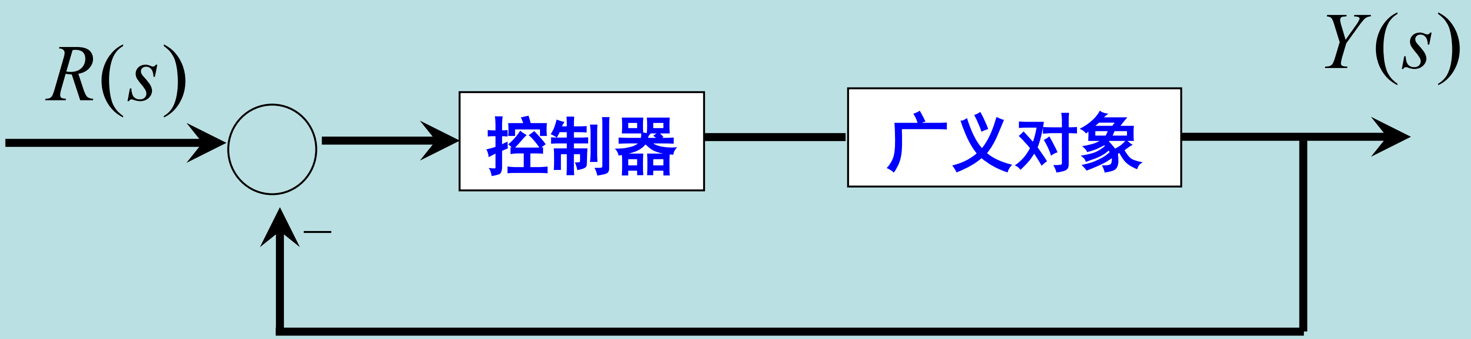
控制器的数学模型



- **控制器的功能：**
  - 比较；
  - 计算控制作用u；
  - 周而复始直至偏差e至零(或在允许范围内)。
- **控制器可以用硬件(如调节器仪表)实现；**
- **也可以用软件实现(如计算机控制系统中的控制策略)。**

控制器的数学模型





含广义对象的控制系统示意图

很多情况下在控制系统设计时，可以将执行机构、测量元件与对象考虑在一起，称为广义对象。

控制器的数学模型

◆ 比例-积分-微分（**proportional, integral plus derivative, PID**）控制器

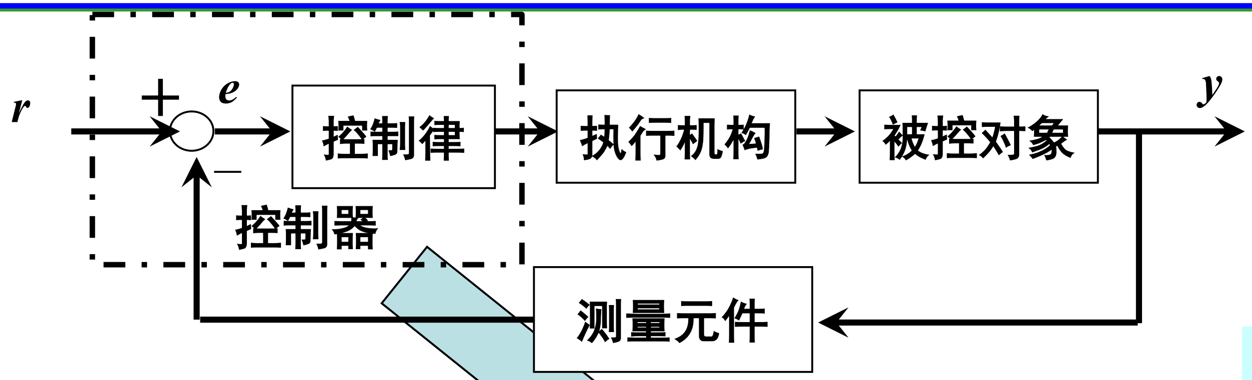
控制器输出的控制作用u是对偏差e进行比例、积分和微分的综合。

设测量元件的传递函数为1，则有 $e(t)=r(t)-y(t)$

$$u(t)=K_c\left[e(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau+T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

$$U(\mathrm{s})=K_c\left[1+\frac{1}{T_is}+T_ds\right]E(\mathrm{s})=\left[K_c+\frac{K_i}{s}+K_ds\right]E(\mathrm{s})$$

控制器的数学模型

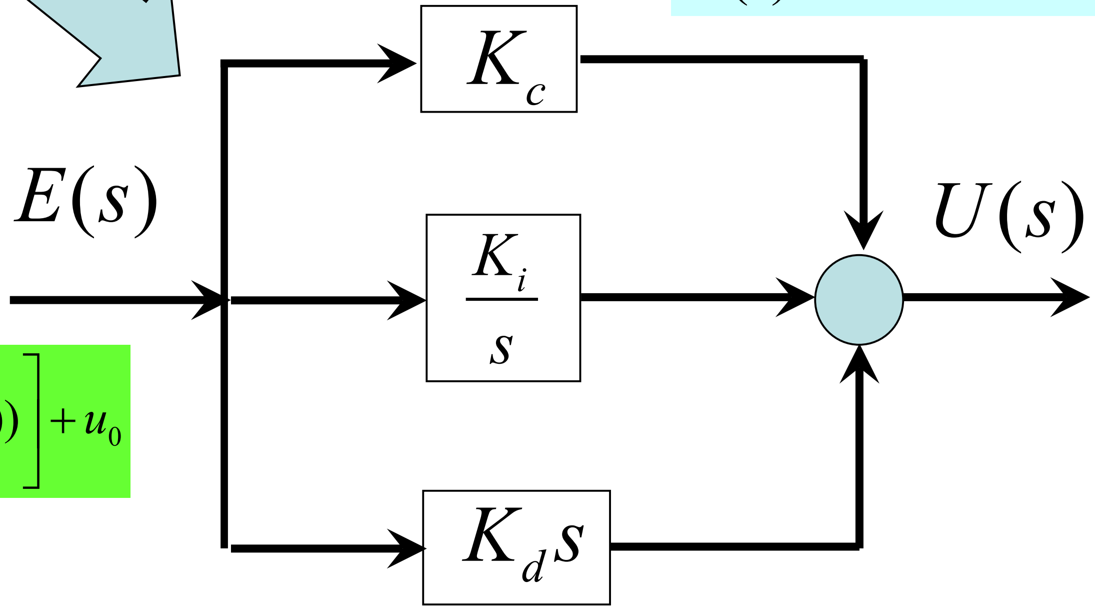


$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

$$u(t) = K_c\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

离散化

$$u(k) = K_c\left[e(k) + \frac{T}{T_i}\sum_{j=0}^{k} e(j) + \frac{T_d}{T}(e(k) - e(k-1))\right] + u_0$$



PID控制器结构图

其他控制律亦类似

测量元件的数学模型

◆ 热电阻测量元件（测温用）

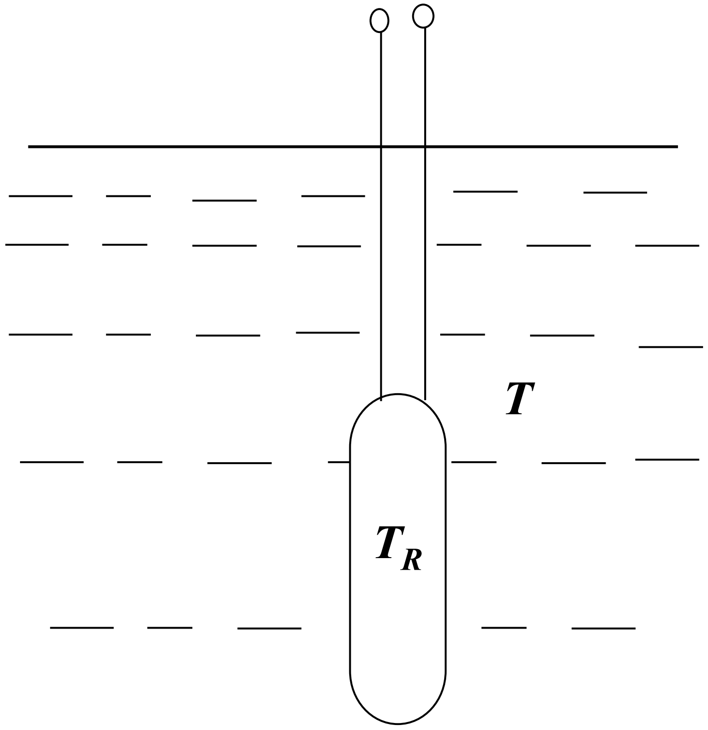
热电阻测温原理是：T_R与电阻体电阻R存在一一对应关系，R随T_R的变化而变化。

一个热电阻测温元件插入温度为T的被测介质中。假设导线向外传出的热量Q可以忽略，电阻体温度为T_R且分布均匀。

根据能量守恒关系，对电阻体有

$$Mc\frac{dT_R}{dt} = Q_{in} - Q_{out} = A\alpha(T - T_R)$$

$$\frac{Mc}{A\alpha}\frac{dT_R}{dt} + T_R = T$$



热电阻示意图

测量元件的数学模型

◆ 热电阻测量元件（测温用）

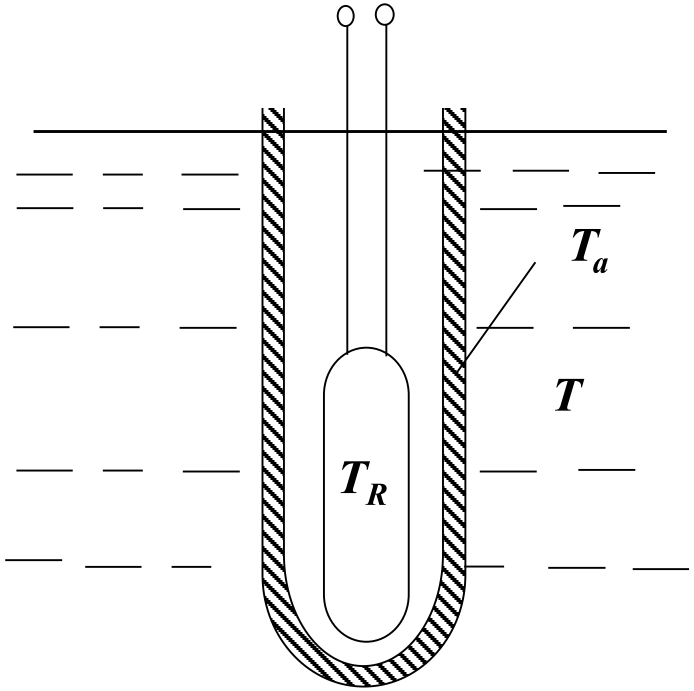
若在热电阻外加上保护套管，其结构如图所示。

设保护套管插入被测介质较深，由上部传出的热损耗可以忽略，并且保护套管具有均匀的温度T_a。若介质温度为T，则对保护套管有

$$M_1c_1\frac{dT_a}{dt}=\alpha_1A_1(T-T_a)-\alpha_2A_2(T_a-T_R)$$

对于热电阻体，有

$$M_2c_2\frac{dT_R}{dt}=\alpha_2A_2(T_a-T_R)$$



有套管的热电阻示意图

测量元件的数学模型

◆ 热电阻测量元件（测温用）

若令 $R_1=\dfrac{1}{\alpha_1 A_1}$、$R_2=\dfrac{1}{\alpha_2 A_2}$、$C_1=M_1c_1$ 、$C_2=M_2c_2$

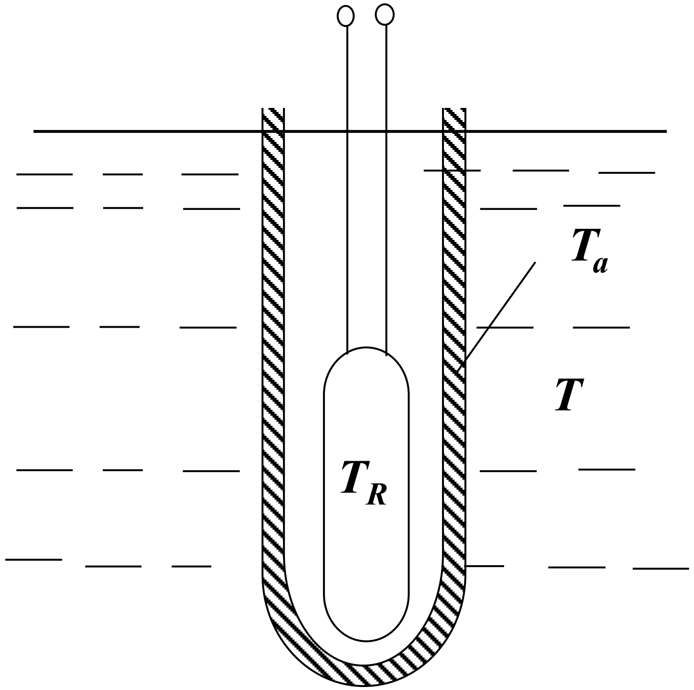
联立具有保护套管热电阻体的两个方程

$$T_1T_2\frac{d^2T_R}{dt^2}+(T_1+T_2+R_1C_2)\frac{dT_R}{dt}+T_R=T$$

二阶系统，其中T_1和T_2为时间常数

$$M_1c_1\frac{dT_a}{dt}=\alpha_1A_1(T-T_a)-\alpha_2A_2(T_a-T_R)$$

$$M_2c_2\frac{dT_R}{dt}=\alpha_2A_2(T_a-T_R)$$



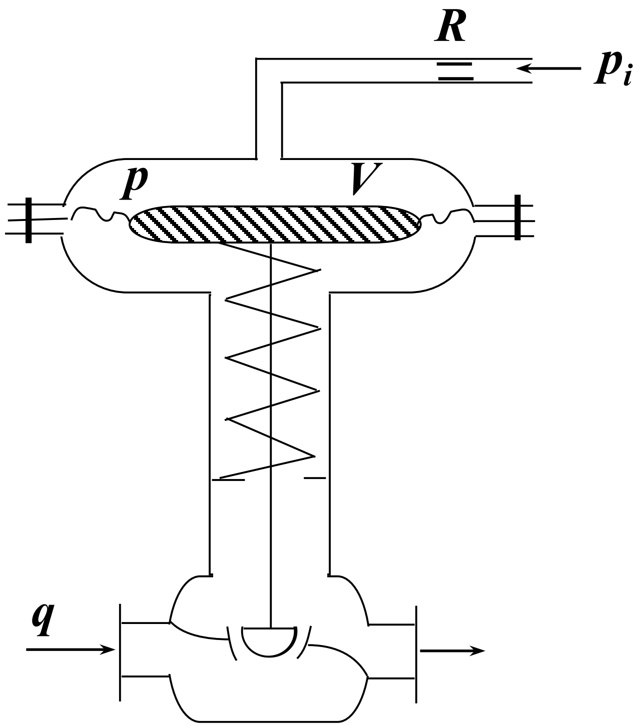
有套管的热电阻示意图

执行机构的数学模型

◆ 薄膜式气动控制阀（调节阀）

它由上部的薄膜式气室、刚性弹簧及下部的阀体组成。

若膜室体积为V，并设阀杆上下移动距离较小，膜室体积近似不变，因而可以视作一个压力容器，其输入是加到膜室的气压p_i，输出是介质的流量q。



气动控制阀示意图

设阀体呈线性特性，则有 $q=-Kp$，故得

$$\frac{VMR}{\overline{RT}} \cdot \frac{dq}{dt} + q = -Kp_i \Rightarrow RC\frac{dq}{dt} + q = -Kp_i \Rightarrow q \approx -Kp_i$$

若RC小到可以忽略

小结

- 不管是哪个环节的数学模型，其建模的方法是大致相同的。
- 有了控制系统中各个环节的数学模型，就可以基于模型（微分方程、方块图、状态方程等）进行系统的整体分析与控制系统的设计。

主要内容

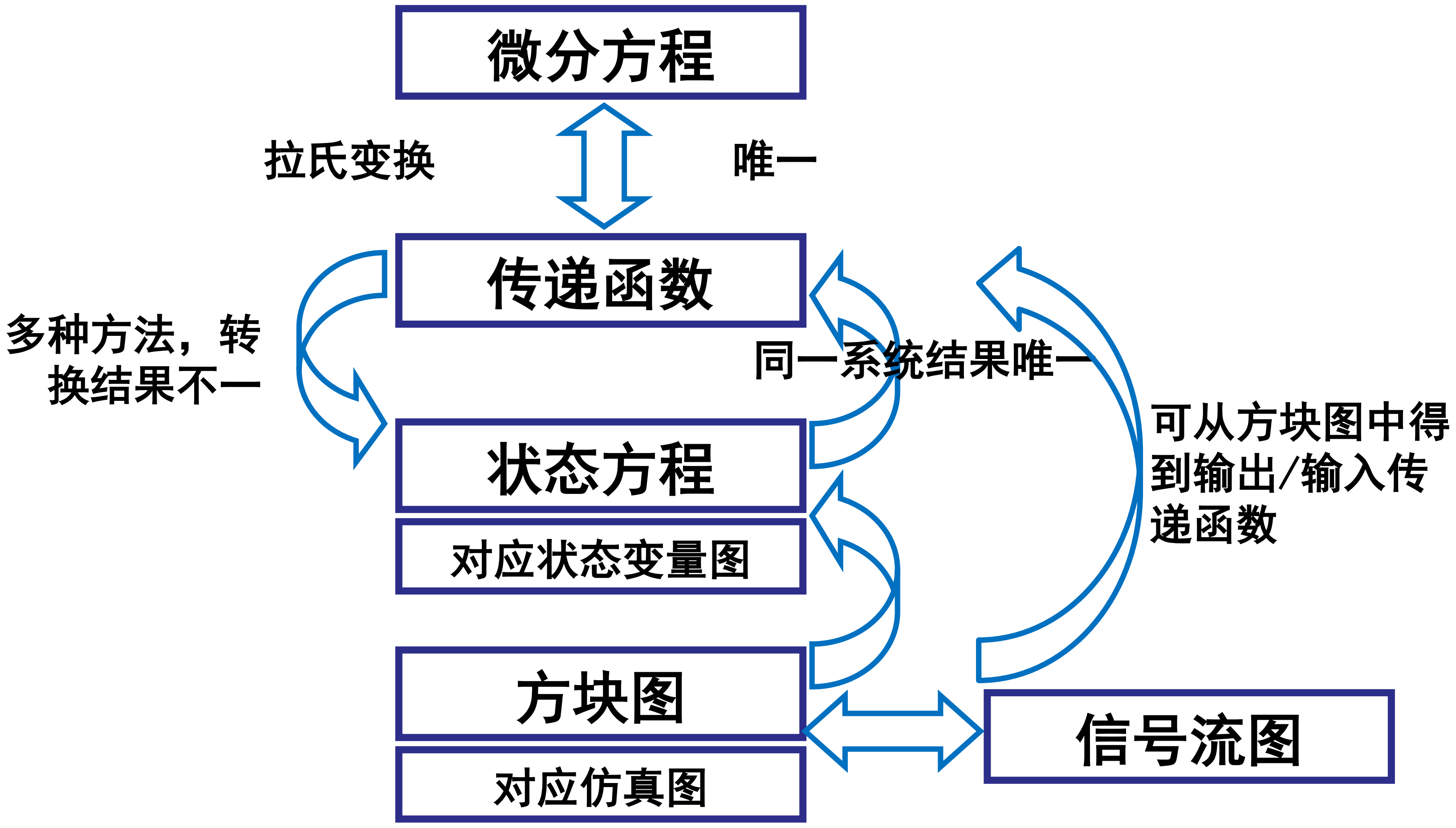
- 非线性环节的线性化处理
- 特殊环节的建模
  - –纯滞后、分布参数、积分、高阶
- 控制系统中其他环节的数学模型
  - –控制器、测量环节、执行机构
- 本章总结

本章总结

- 数学模型及其相关概念
- 微分方程模型
  - 从物理对象建模：电路、机械力学、液位、热力学等
- 状态空间模型
  - 基本概念，标准型式，物理（储能元件）状态变量、相变量
- 传递函数（矩阵）模型
  - 概念，定义，微分算子及拉氏变换（复频域）形式及其相关性质
- 方块图
  - 从物理对象画出方块图（组成结构与传递函数形式），信息流向
  - 环节中用文字表达的结构组成图，环节中为传递函数的方块图，反映状态变量关系的状态变量图，方块图的信号流图表示，仿真图
  - 借用方块图的简化与梅逊公式计算系统传递函数

本章总结

- 几种模型之间的关系与相互转换



本章总结

- 各种模型的基本概念需要熟练掌握与应用
- 关于模型的概念与处理
  - 基本环节的模型及其传递函数表示
  - 模型的分类及各自特点
  - 非线性的线性化
  - 注意一些定义的前提条件（如零初始条件），适用范围（如线性化是在某平衡点的邻域进行）
- 基于系统的数学模型，可以求取系统的动态响应，进而计算与评判动态响应性能指标——第三章内容

The End