2024-2025学年 秋学期

现代控制理论

Modern Control Theory

学在浙大 http://course.zju.edu.cn
用自己的浙大通行证账号登录

主讲：吴俊　徐巍华

第7章 线性离散时间控制系统分析与综合

徐巍华

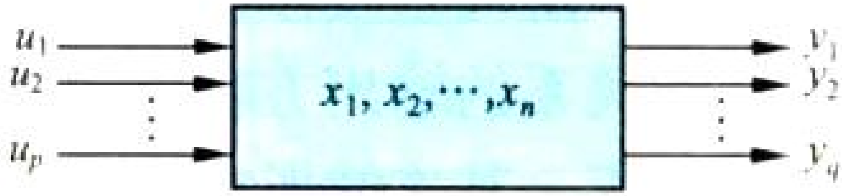
浙江大学智能系统与控制研究所,玉泉校区教十八235室

whxu@zju.edu.cn

13600549753

提纲

系统数学描述的两种基本类型



系统的方块图表示

- **系统：** 输入→输出
  - **系统变量：** 外部变量、内部变量

- **系统的数学描述：** 系统变量之间的因果关系、变换关系
  - **外部描述：** **输入-输出描述**
  - **内部描述：** 状态空间描述

回顾：离散系统的数学模型

1 **线性差分方程**

2 **脉冲传递函数**

3 离散系统的权序列

4 离散系统的状态空间模型

5 求解离散状态方程

6 各种离散模型的关系

回顾：1 线性差分方程

- 可用**前向差分方程**来描述线性定常离散控制系统

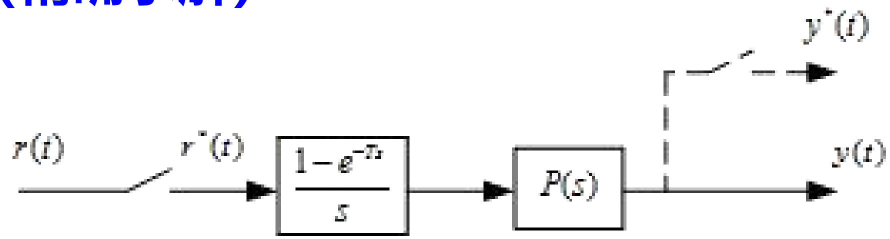
$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)$$
$$=b_mr(k+m)+b_{m-1}r(k+m-1)+\cdots+b_1r(k+1)+b_0r(k)$$

- **后向差分方程**描述线性定常离散系统也可用

$$a_ny(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)$$
$$=b_mr(k)+b_{m-1}r(k-1)+\cdots+b_0r(k-m)$$

回顾：1 线性差分方程

- **从微分方程到差分方程（精确求解）**



一阶微分方程 $T_1\dfrac{dy}{dt}+y=Kx$ ，当$nT< t <(n+1)T$，输入恒为$x(nT)$，微分方程的解：

$$y(t)=ce^{-t/T_1}+Kx(nT)$$

将边界条件$y(nT)$代入，得$c=\dfrac{y(nT)-Kx(nT)}{e^{-nT/T_1}}$

将 c 及终止时间 t=$(n+1)T$代入方程解，得

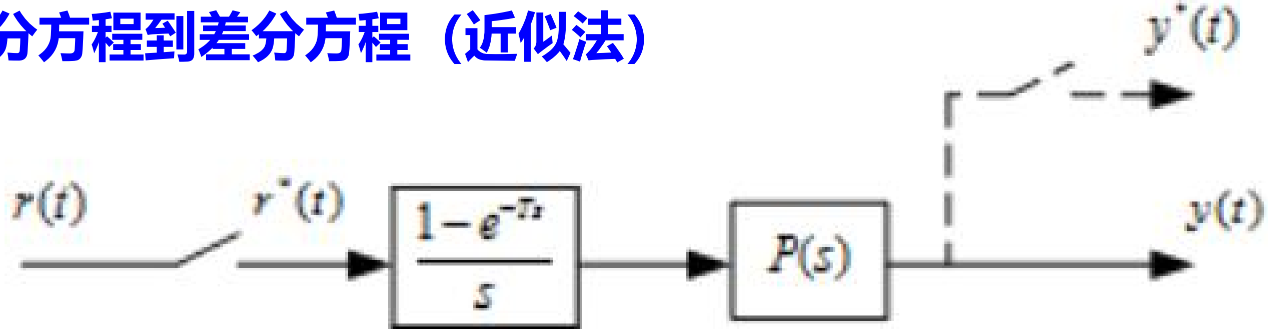
$$y[(n+1)T]=\frac{[y(nT)-Kx(nT)]e^{-(n+1)T/T_1}}{e^{-nT/T_1}}+Kx(nT)$$

$$y[(n+1)T]-ay(nT)=Kbx(nT)$$

其中$a=e^{-T/T_1}, b=1-e^{-T/T_1}$

回顾：1 线性差分方程

- **从微分方程到差分方程（近似法）**



一阶微分方程

$$T_1\frac{dy}{dt}+y=Kx$$

$nT<t<(n+1)T$

$$T_1\frac{y[(n+1)T]-y(nT)}{T}+y(nT)=Kx(nT)$$

一阶差分方程表示

$$y[(n+1)T]-(1-\frac{T}{T_1})y(nT)=K\frac{T}{T_1}x(nT)$$

$$\boxed{y[(n+1)T]-ay(nT)=Kbx(nT)}$$

$$\boxed{\text{其中}a=1-\frac{T}{T_1},b=\frac{T}{T_1}}$$

回顾：1 线性差分方程

- **从微分方程到差分方程（微分方程的离散化）**
  - 精确求解
  - 近似法
- **求解差分方程常用的有迭代法和Z变换法**

- 迭代法（递推法）

线性定常差分方程 （前向或后向）

输入序列、边界条件

$\xrightarrow{\text{递推关系}}$ 输出序列

- Z变换法

对差分方程两边做z变换

代入已知的初始条件

由Z变换式求出输出序列y(kT)的Z变换表达式Y(z)

对Y(z)进行Z反变换，求出y(kT)

差分方程的解

可以提供线性定常离散系统在给定输入序列作用下的输出序列响应特性

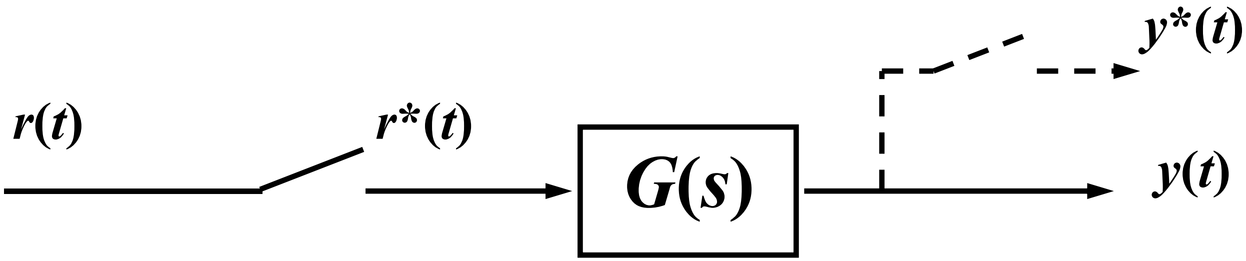
但不便于研究系统参数变化对离散系统性能的影响

需要研究线性定常离散系统的另一种数学模型

脉冲传递函数

回顾：2 脉冲传递函数

- **定义**



脉冲传递函数：在零初始条件下，输出$y^*(t)$的z变换$Y(z)$与非零输入$r^*(t)$的z变换$R(z)$之比，$G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=\dfrac{b_m z^m+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}, m\le n$

系统输出采样信号的z变换与输入采样信号的z变换之比

输入输出关系 $Y(z)=G(z)R(z)$

若没有对$r(t)$的采样，则无$G(z)$!!

(2)脉冲传递函数的意义

连续系统中 传递函数$G(s)$等于系统单位脉冲响应$g(t)$的拉氏变换

离散系统中 脉冲传递函数$G(z)$等于系统单位脉冲响应序列$K(nT)$的z变换

系统加权序列

$$G(z)=K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}K(nT)z^{-n}$$

如果描述线性定常离散系统的差分方程为

$$c(nT)=-\sum_{i=1}^{n}a_i c[(n-i)T]+\sum_{j=0}^{m}b_j r[(n-j)T]$$

在零初始条件下，对上式进行z变换，并应用z变换的实数位移定理，可得

$$C(z)=-\sum_{i=1}^{n}a_i C(z)z^{-i}+\sum_{j=0}^{m}b_j R(z)z^{-j}$$

整理得

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{\sum_{j=0}^{m}b_j z^{-j}}{1+\sum_{i=1}^{n}a_i C(z)z^{-i}}$$

这是脉冲传递函数与差分方程的关系

(3)脉冲传递函数的求法

连续系统或元件的脉冲传递函数$G(z)$

可以通过其传递函数$G(s)$来求取

由$G(s)$来求$G(z)$的具体方法：

①先求$G(s)$的拉氏反变换，得到脉冲过渡函数$K(t)$，即

$$K(t) = L^{-1}\left[G(s)\right]$$

②再将$K(t)$按采样周期离散化，得加权序列$K(nT)$

③最后，将$K(nT)$进行z变换，求出$G(z)$

这一过程比较复杂！

表 7-2 z变换表

序号	拉氏变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$	z 变换 $E(z)$
1	e^{-nsT}	$\delta(t-nT)$	z^{-n}
2	1	$\delta(t)$	1
3	$\dfrac{1}{s}$	$1(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$

表中的 $E(s)$ 就↓是 $G(s)$

将z变换表里的 $e(t)$ 看↓成 $K(t)$

表中的 $E(z)$ 就相当↓于 $G(z)$

2 脉冲传递函数

- **比较连续系统的传递函数G(s)与离散系统的脉冲传递函数G(z)**

相同点

- 线性定常系统；
- 零初始条件；
- 只与系统的结构参数有关

不同点

- G(s)一定存在；G(z)则不一定，取决于输入端R(z)存在否（即输入端是否有采样器)；故很多时候是求输出Y的Z变换式；
- 当系统具有相同环节时，G(z)或Y(z)与采样器的位置相关,可用逐步推导法来求。

当开环离散系统由几个环节串联组成时

其脉冲传递函数的求法与连续系统情况不完全相同

即使两个开环离散系统的组成环节完全相同

但由于采样开关的数目和位置不同　求出的开环脉冲传递函数也会截然不同

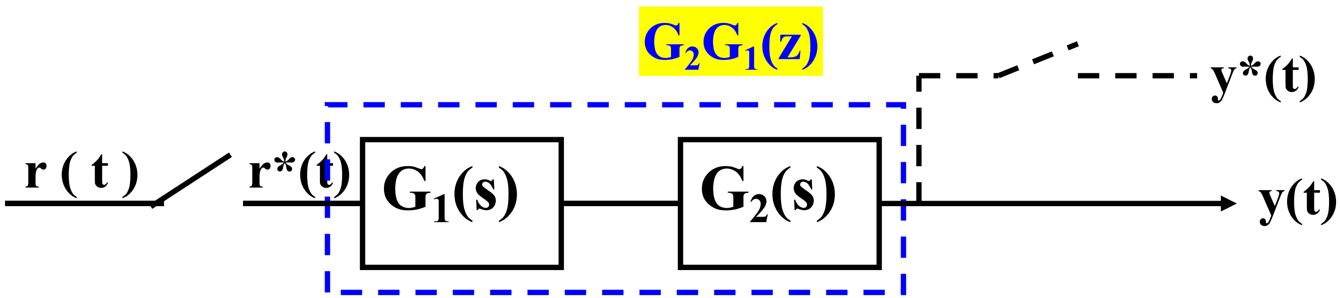
2 脉冲传递函数

显然：$G_1(z)\cdot G_2(z)\neq G_1G_2(z)$

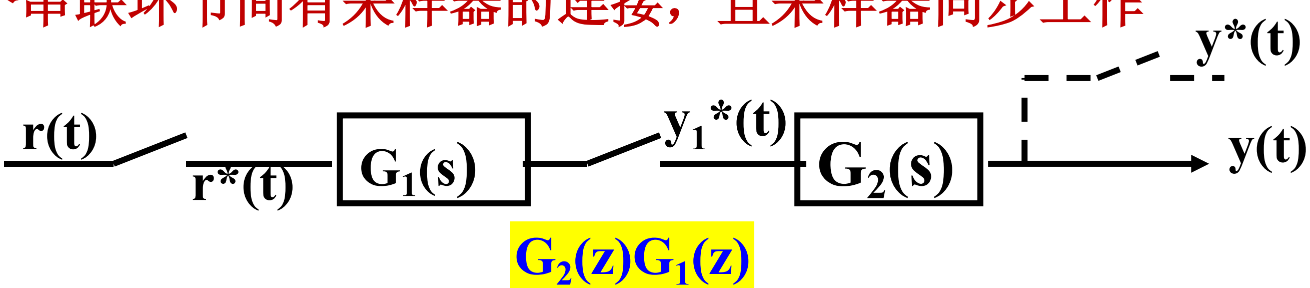
从这种意义上说，z变换无串联性

- **开环串联系统的脉冲传递函数**

1） 两个串联环节间没有采样器的连接



2） 两个串联环节间有采样器的连接，且采样器同步工作

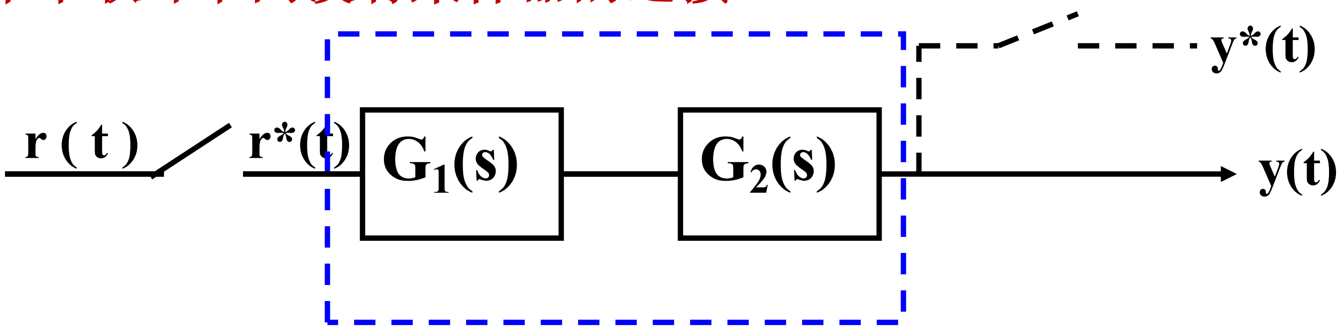


可以推广到类似的n个环节相串联时的情况

2 脉冲传递函数

- **开环串联系统的脉冲传递函数**

1） 两个串联环节间没有采样器的连接



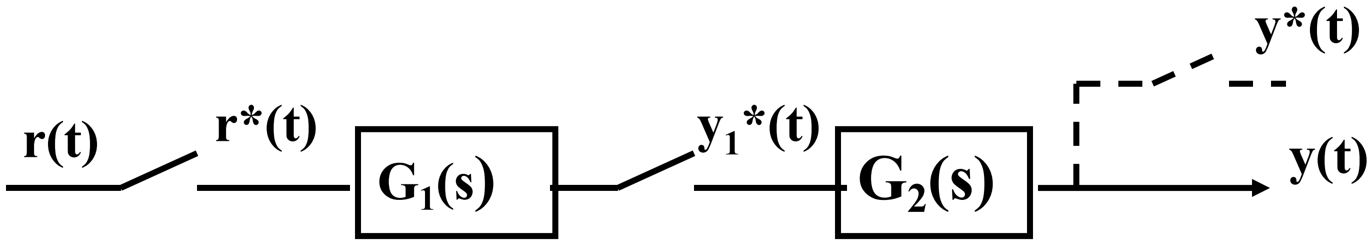
$$G(Z)=\frac{Y(Z)}{R(Z)}=Z[G_2(s)G_1(s)]$$

也记 $G_2G_1(z)=Z\left[G_2(s)G_1(s)\right]=G_2G_1^*(s)$

注意：一般地$G_2G_1^*(s)\neq G_2^*(s)G_1^*(s)$

2 脉冲传递函数

2） 两个串联环节间有采样器的连接，且采样器同步工作



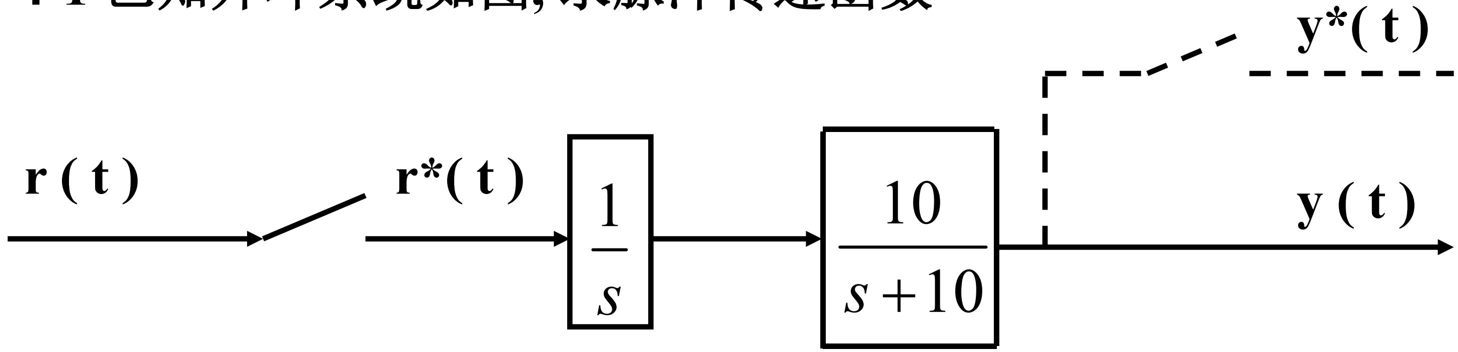
$$G_1(z)=\frac{Y_1(z)}{R(z)}=Z[G_1(s)]$$

$$G_2(z)=\frac{Y(z)}{Y_1(z)}=Z[G_2(s)]$$

$$\Rightarrow \quad G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_2(z)G_1(z)$$

1 脉冲传递函数

例7-4-1 已知开环系统如图, 求脉冲传递函数



解:

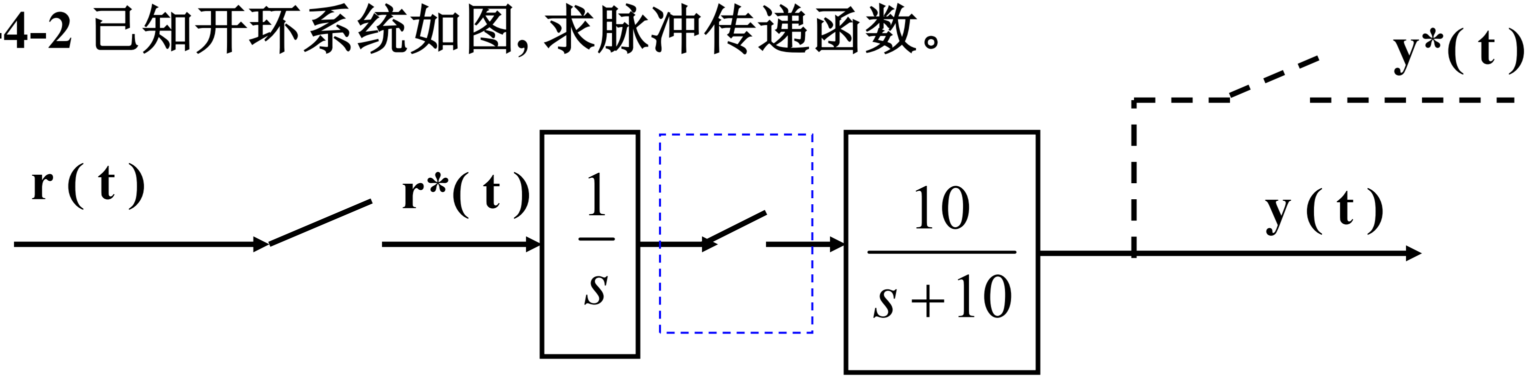
$$G(Z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=Z[G_2(s)G_1(s)]$$

$$G(z)=Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right]=Z\left[\frac{1}{s}\right]-Z\left[\frac{1}{s+10}\right]$$

$$=\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-10T}}\right)=\frac{(1-e^{-10T})z}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

2 脉冲传递函数

例7-4-2 已知开环系统如图，求脉冲传递函数。



解：

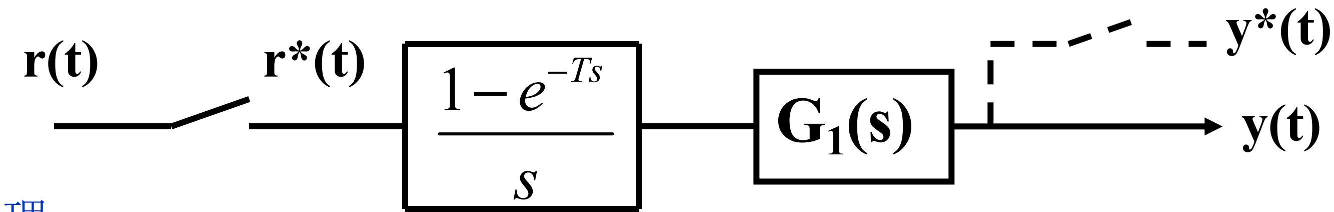
$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_2(z)\cdot G_1(z)$$

$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s}\right]\cdot Z\left[\frac{10}{s+10}\right]=\frac{10z^2}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

$$\boxed{\neq Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right]=\frac{(1-e^{-10T})z}{(z-1)(z-e^{-10T})}}$$

在串联环节之间有无同步采样开关隔离时，其总的脉冲传递函数是不同的，但是，不同之处仅表现在其零点不同，极点仍然一样。

3) 带零阶保持器的开环系统的脉冲传递函数



由线性定理

$$G(z)=Z\left[G_1(s)\frac{1-e^{-TS}}{s}\right]=Z\left[G_1(s)\frac{1}{s}\right]-Z\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]$$

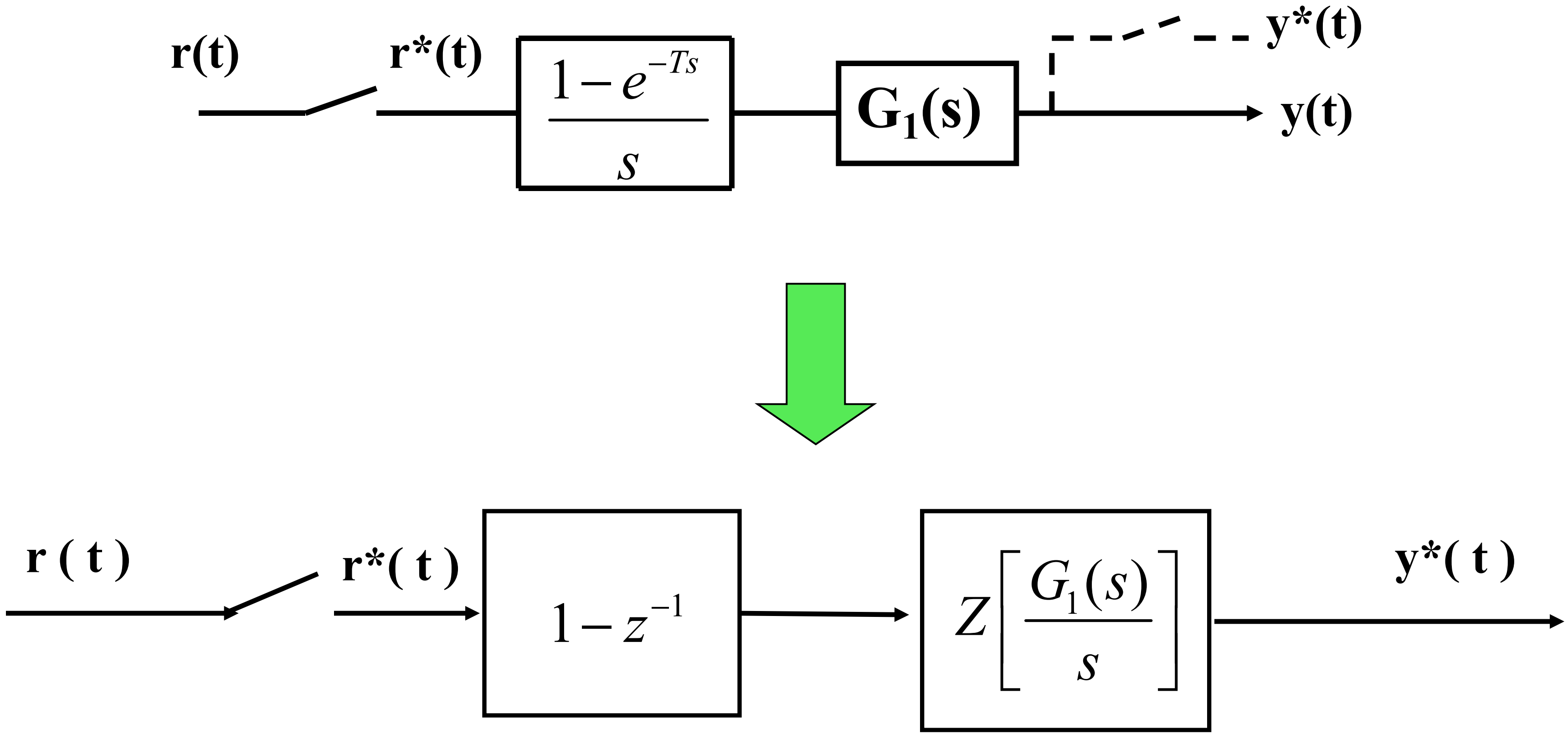
令$G_2(s)=G_1(s)\frac{1}{s}$,其单位脉冲响应为$g_2(t)$

则$L^{-1}\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]=g_2(t-T)$ *Laplace*变换的时移特性

于是$Z\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]=Z\left[g_2(t-T)\right]=z^{-1}G_2(z)$ *Z*变换的移位特性

故 $G(z)=(1-z^{-1})G_2(z)$

2 脉冲传递函数



$$G(z)=Z\left[G_1(s)\frac{1-e^{-TS}}{s}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_1(s)}{s}\right]$$

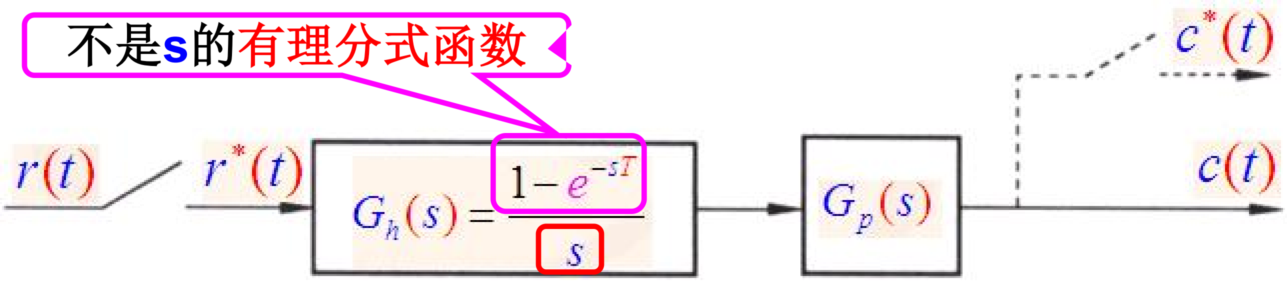
3) 带零阶保持器的开环系统的脉冲传递函数

$G_h(s)$为零阶保持器传递函数

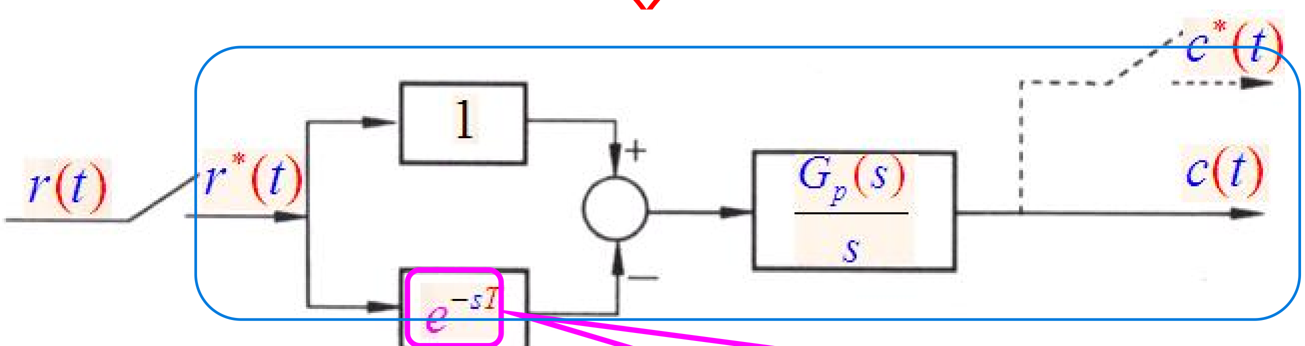
$G_p(s)$为连续部分传递函数

串联环节之间无同步采样开关

不是s的有理分式函数



$\Downarrow$



延迟一个采样周期的延迟环节

$$C(s)=\left[\frac{G_p(s)}{s}-\boxed{e^{-sT}}\frac{G_p(s)}{s}\right]R^*(s)\qquad C(z)=Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]R(z)-\boxed{z^{-1}}\cdot Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]R(z)$$

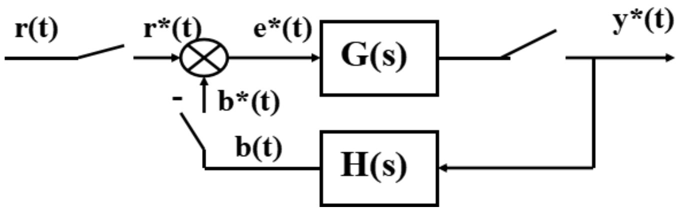
z变换

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\left(\boxed{1-z^{-1}}\right)\cdot Z\left[\frac{G_p(s)}{\boxed{s}}\right]$$

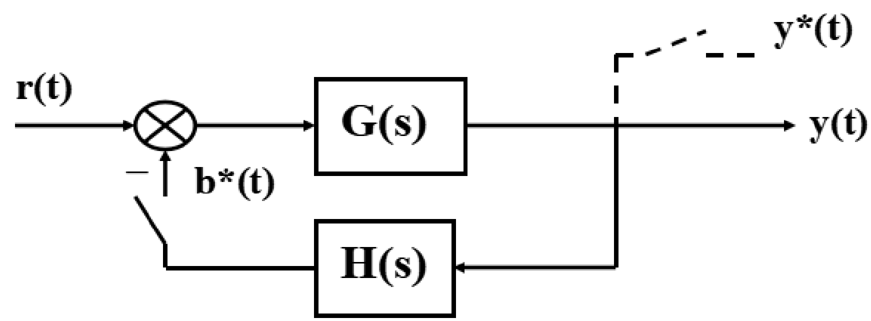
2 脉冲传递函数

- **闭环离散反馈系统的脉冲传递函数**

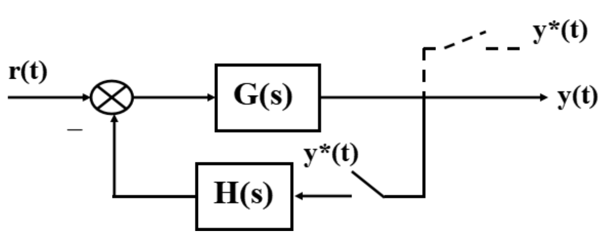
1) 反馈回路 (1)



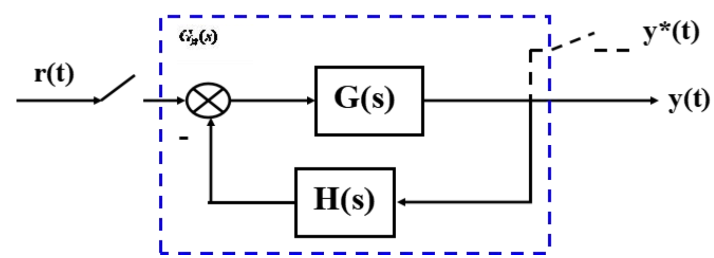
2) 反馈回路(2)



3) 反馈回路(3)



4) 反馈回路(4)

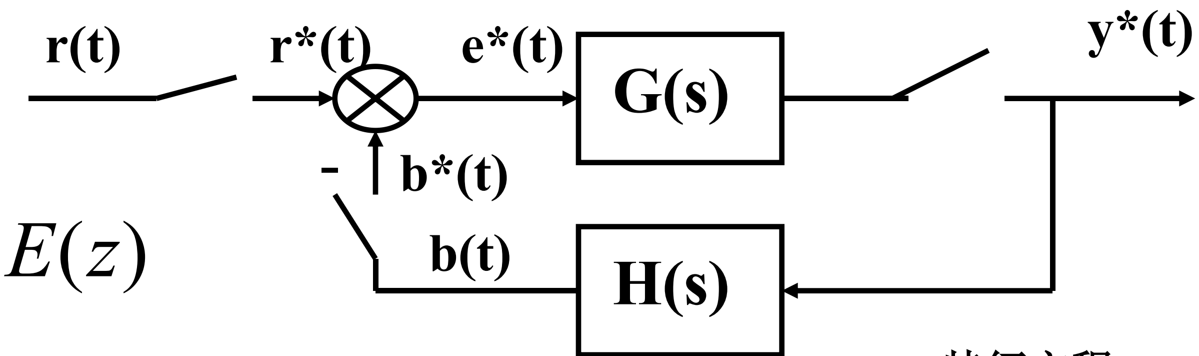


2 脉冲传递函数

- **闭环反馈系统的脉冲传递函数**

采样器位置多种可能性
反馈回路离散系统没有唯一的结构图形式

1) 反馈回路 (1)



$$Y(z)=G(z)E(z)$$

$$E(z)=R(z)-H(z)Y(z)$$

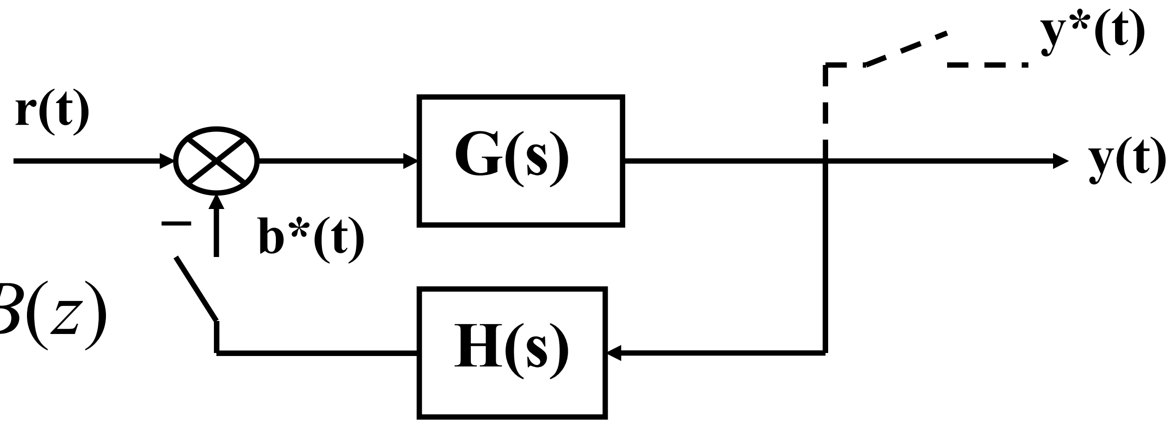
$$Y(z)=G(z)R(z)-G(z)H(z)Y(z)$$

$$[1+G(z)H(z)]Y(z)=G(z)R(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{\boxed{1+G(z)H(z)}}$$

特征方程

从输入端开始，顺着箭头方向一步步分析计算

2) 反馈回路(2)



$$Y(z) = GR(z) - G(z)B(z)$$

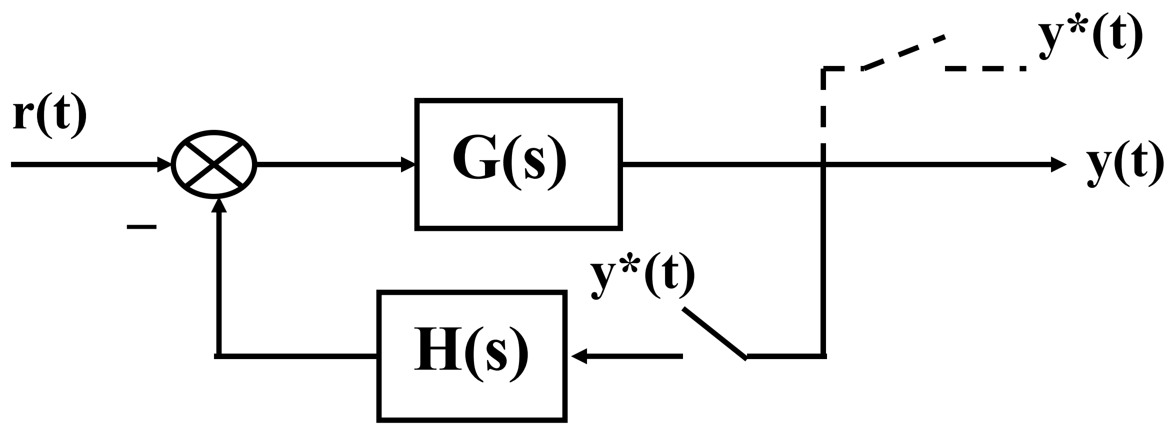
$$B(z) = HGR(z) - HG(z)B(z)$$

$$B(z) = \frac{HGR(z)}{1 + HG(z)}$$

$$Y(z) = GR(z) - \frac{G(z)HGR(z)}{1 + HG(z)}$$

注意: 无 $G_{closed}(z)$.

3) 反馈回路(3)

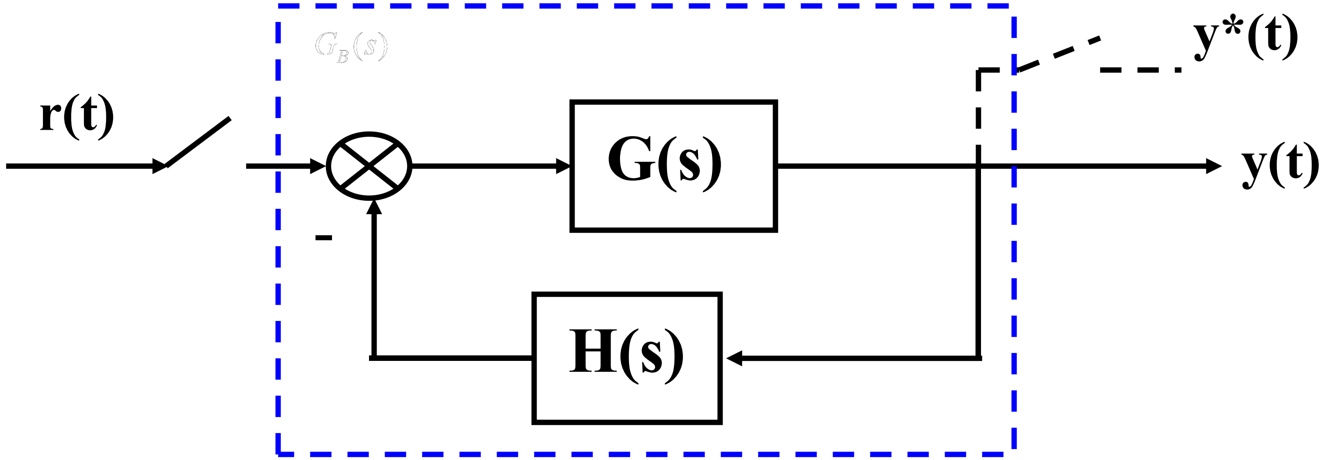


注意: 无 $G_{closed}(z)$.

$$Y(z) = GR(z) - GH(z)Y(z)$$

$$Y(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}$$

4) 反馈回路(4)

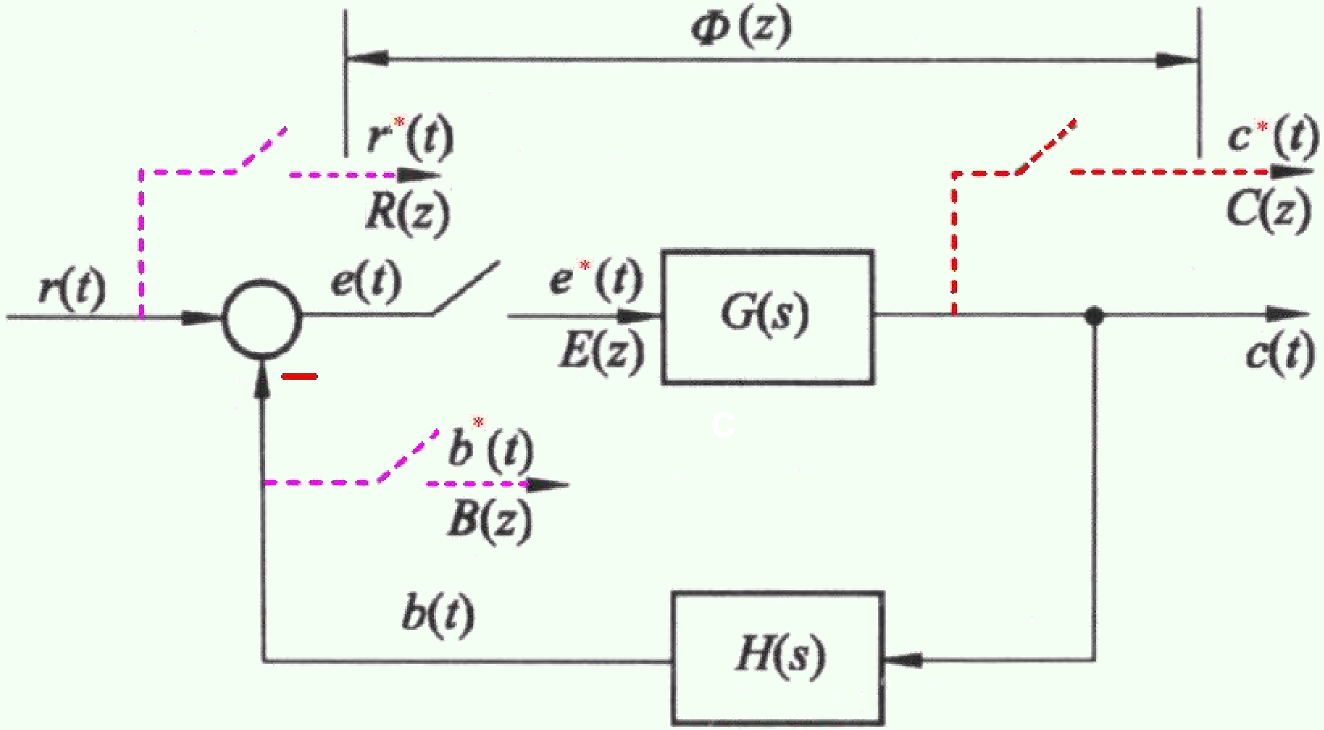


$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$Y(z) = G_B(z)R(z)$$

$$Y(z) = \frac{G}{1+GH}(z)R(z)$$

$$G_{closed}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G}{1+GH}(z)$$



闭环离散系统结构图

连续输出信号与误差信号的拉氏变换为

$$C(s)=G(s)E^*(s) \qquad E(s)=R(s)-H(s)C(s)$$

因此，有 $E(s)=R(s)-\boxed{H(s)G(s)}E^*(s)$

于是，误差采样信号 $e^*(t)$ 的拉氏变换为 $E^*(s)=R^*(s)-HG^*(s)E^*(s)$

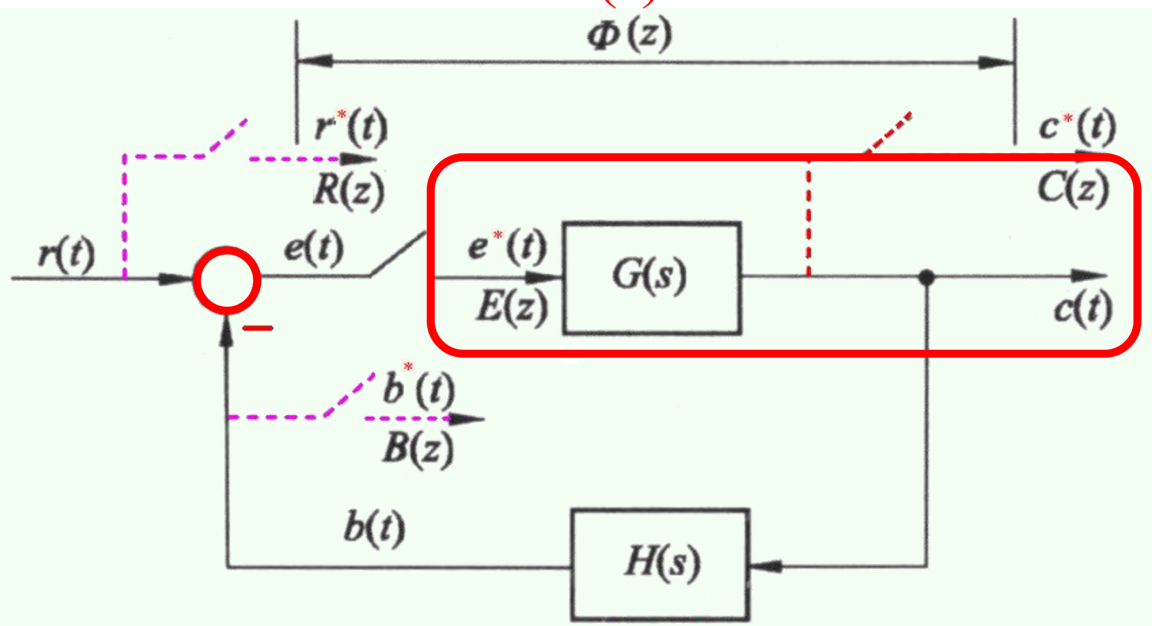
整理，得 $$E^*(s)=\frac{1}{1+HG^*(s)}R^*(s)$$

由于 $$C^*(s)=\left[G(s)E^*(s)\right]^*=G^*(s)E^*(s)=\frac{G^*(s)}{1+HG^*(s)}R^*(s)$$

取z变换，可得

$$E(z)=\frac{1}{1+HG(z)}R(z)$$

$$C(z)=\frac{G(z)}{1+HG(z)}R(z)$$



闭环离散系统结构图

定义

$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+HG(z)}$$

为闭环离散系统对于输入量的误差脉冲传递函数

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+HG(z)}$$

为闭环离散系统对于输入量的脉冲传递函数

令 $\Phi_e(z)$ 或 $\Phi(z)$ 的分母多项式为零，得到闭环离散系统的特征方程

$$D(z)=1+HG(z)=0$$

式中，$HG(z)$ 为开环离散系统脉冲传递函数

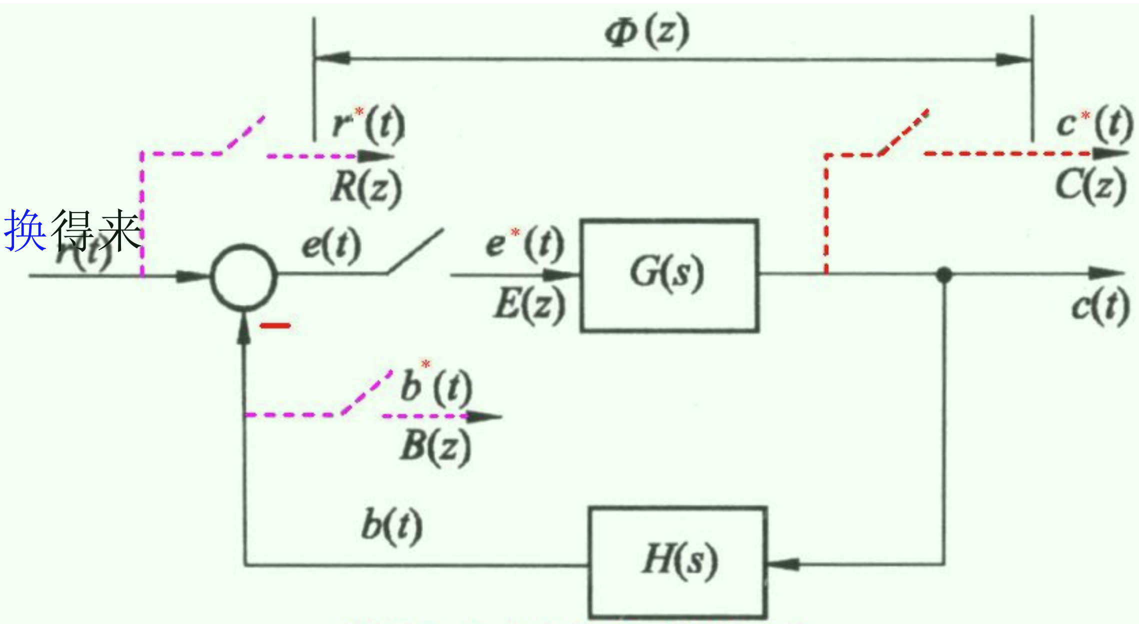
注意：$\Phi_e(z)\neq Z[\Phi_e(s)]$

$\Phi(z)\neq Z[\Phi(s)]$

$\Phi_e(z)$和$\Phi(z)$不能从$\Phi_e(s)$和$\Phi(s)$求z变换得来

$$E(z)=\frac{1}{1+HG(z)}R(z)$$

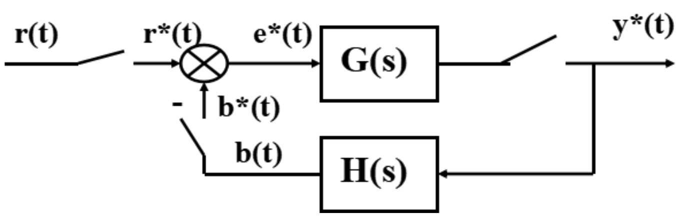
$$C(z)=\frac{G(z)}{1+HG(z)}R(z)$$



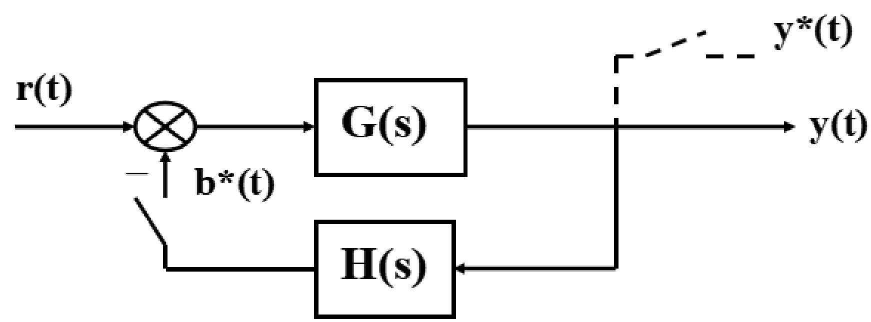
闭环离散系统结构图

回顾：2 脉冲传递函数

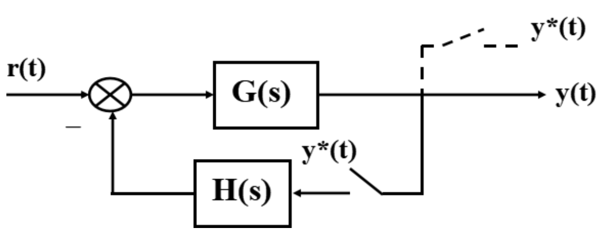
1) 反馈回路 (1)



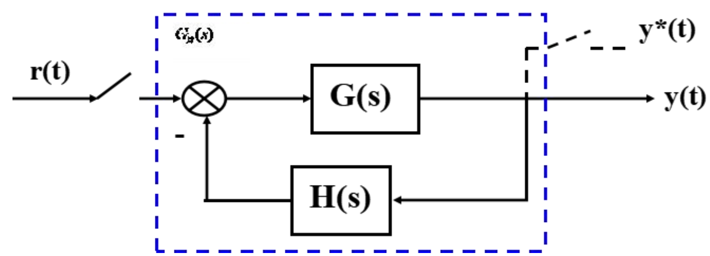
2) 反馈回路(2)



3) 反馈回路(3)



4) 反馈回路(4)

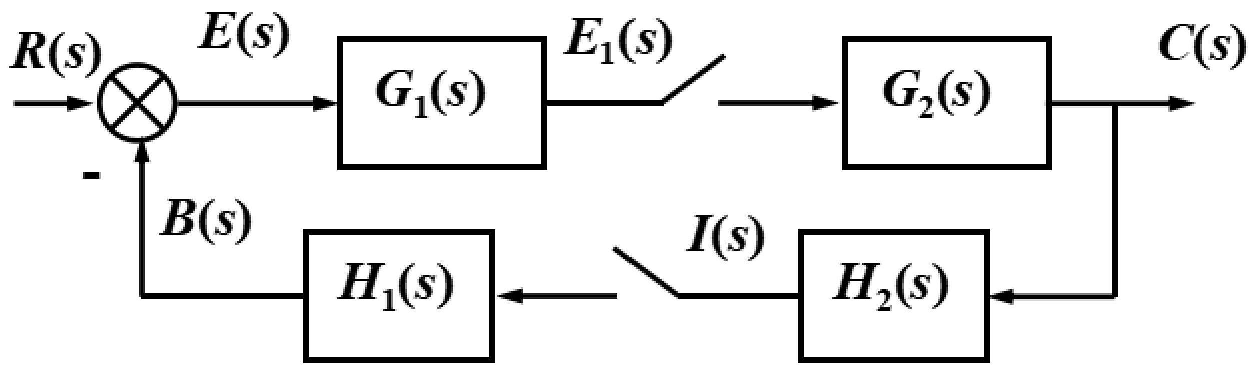


若没有对$r(t)$的采样，则无$G(z)$!!

只能求出输出采样信号的z变换函数 C(z) 或 Y(z)

2 脉冲传递函数

例7-4-3



解：

$$C(z)=G_2(z)E_1(z)$$

$$\left.\begin{aligned}E_1(z)&=G_1R(z)-G_1H_1(z)I(z)\\ I(z)&=H_2G_2(z)E_1(z)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow E_1(z)=\frac{G_1R(z)}{1+G_1H_1(z)H_2G_2(z)}$$

$$C(z)=\frac{G_2(z)G_1R(z)}{1+G_1H_1(z)H_2G_2(z)}$$

求输出信号 $c(t)$ z变换的步骤(技巧)：

①先忽略采样开关

按连续信号来处理　　写出输出信号 $C(s)$ 与 输入信号 $R(s)$ 之间的关系式

②在除去常数项外　　考虑各个环节的乘积项：

(a)若各个连续环节按箭头方向所走过的通路　没有经过采样开关

则将其对应的环节乘积项整体加 “*”

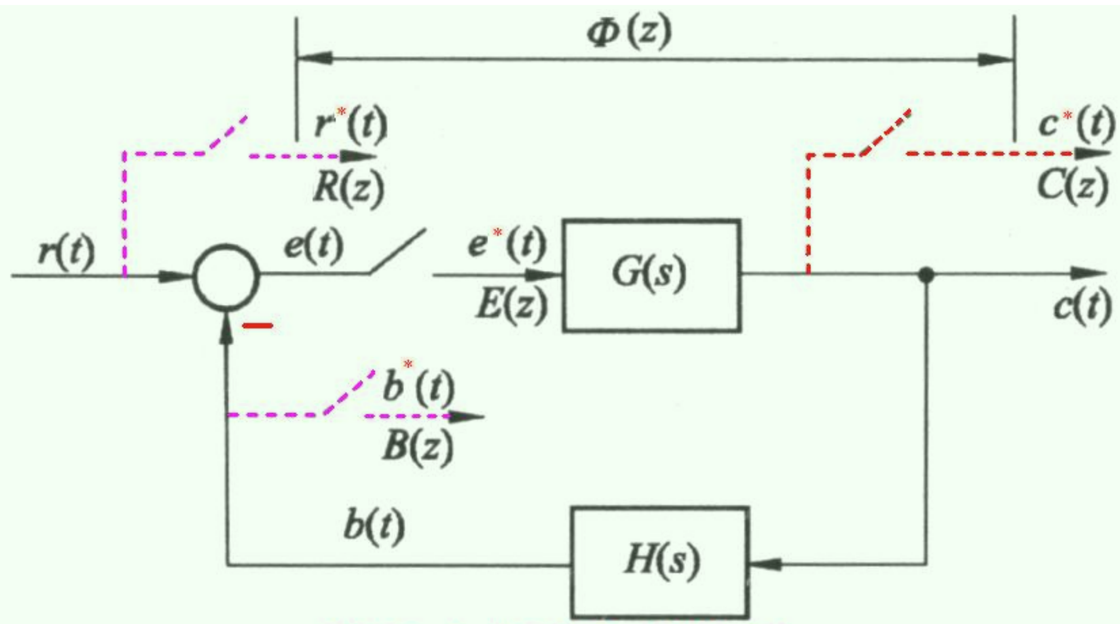
(b)若有一个环节的两侧均存在采样开关　则此环节单独加 “*”

$$E(s)=\frac{1}{1+H(s)G(s)}R(s)$$

$$C(s)=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}R(s)$$

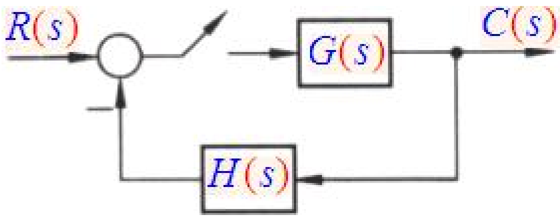
$$E(z)=\frac{1}{1+HG(z)}R(z)$$

$$C(z)=\frac{G(z)}{1+HG(z)}R(z)$$

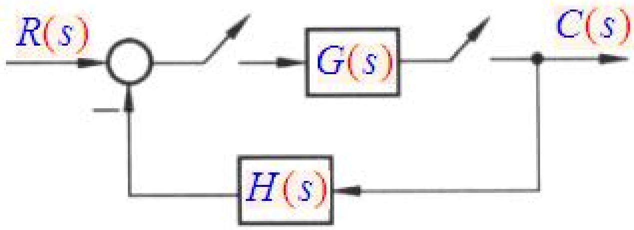


闭环离散系统结构图

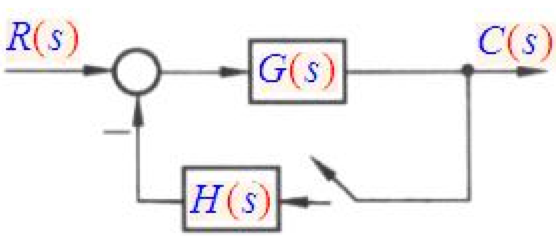
表7－3　典型闭环离散系统及输出z变换函数



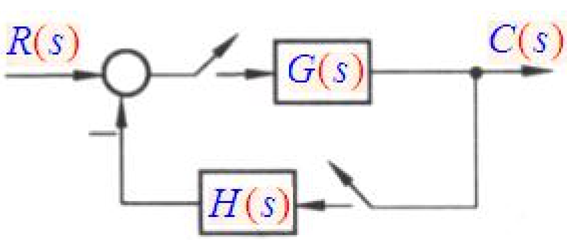
$$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+HG(z)}$$



$$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+H(z)G(z)}$$



$$C(z)=\frac{GR(z)}{1+HG(z)}$$



$$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+H(z)G(z)}$$

2 脉冲传递函数

- **输出变量的Z变换式Y(z)【C(z)】的计算**——单回路梅逊公式的推广：**若前向通道(环内)中有一实际的采样器存在**，就可用“视察法”直接求**Y(z)**。

$$Y(z)=\frac{G_f(z)}{1-G_0(z)}$$

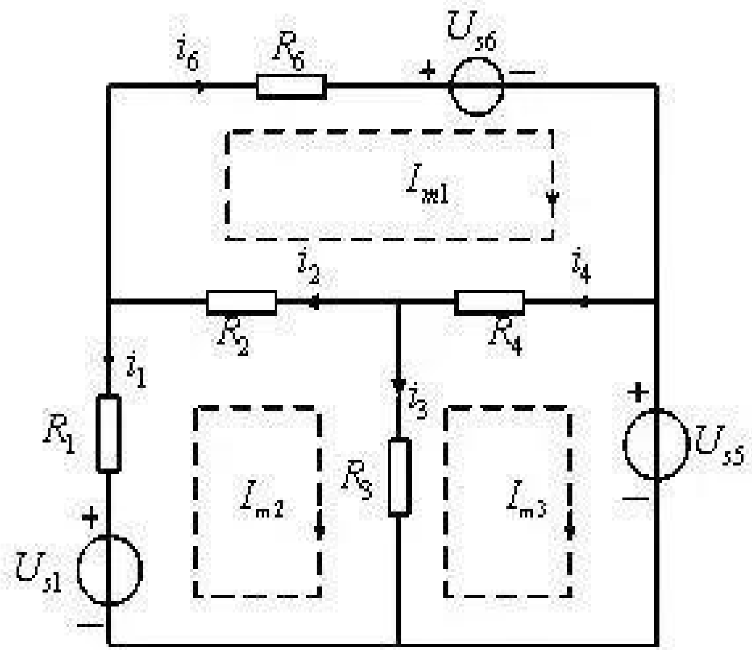
注意:此式的结果是Y(z)而非G(z)

此式针对正反馈

其中：$G_0(z)$ 为开环脉冲传递函数（环可以从任一采样器断开，沿信号方向走一周而构成）；

$G_f(z)$ 为前向通路中输出量的Z变换，如将**R(s)**视为前向通路中的一个环节，$G_f(z)$ 是包括输入在内的由输入到输出的前向通路的Z变换函数。

根据网孔自电阻、互电阻、等效电压源的含义和计算方法，可以直接列写网孔分析方程的最终形式，称为**视察法**。



假定网孔电流分别在网孔1、2、3中流动，网孔电流的参考方向如图所示。

以支路电流为变量，列写各网孔的KVL方程为

$$i_6R_6+U_{s5}+i_4R_4+i_2R_2=0$$
$$-i_6R_6+i_3R_3-U_{s1}+i_1R_1=0$$
$$-i_4R_4+U_{s5}-i_1R_1=0$$

为得到以网孔电流为未知变量的电路方程，用网孔电流表示各支路电流，即有：

$$i_1=I_{m2}$$
$$i_2=I_{mi}-I_{m2}$$
$$i_3=I_{m2}-I_{m3}$$
$$i_4=I_{m1}-I_{m3}$$
$$i_6=I_{m1}$$

将上述各式代入KVL方程，可得网孔电流方程

$$(R_2+R_4+R_6)I_{m1}-R_2I_{m3}=-U_{s6}$$
$$-R_2I_{m1}+(R_1+R_2+R_3)I_{m2}-R_3I_{m3}=U_{s1}$$
$$-R_4I_{m1}-R_3I_{m2}+(R_3+R_4)I_{m3}=-U_{s5}$$

2 脉冲传递函数

➢ 方块图运算时对采样开关的处理技巧

单回路梅逊公式的推广：若前向通道(环内)中有一实际的采样开关存在，就可用“视察法”直接求$Y(z)$。

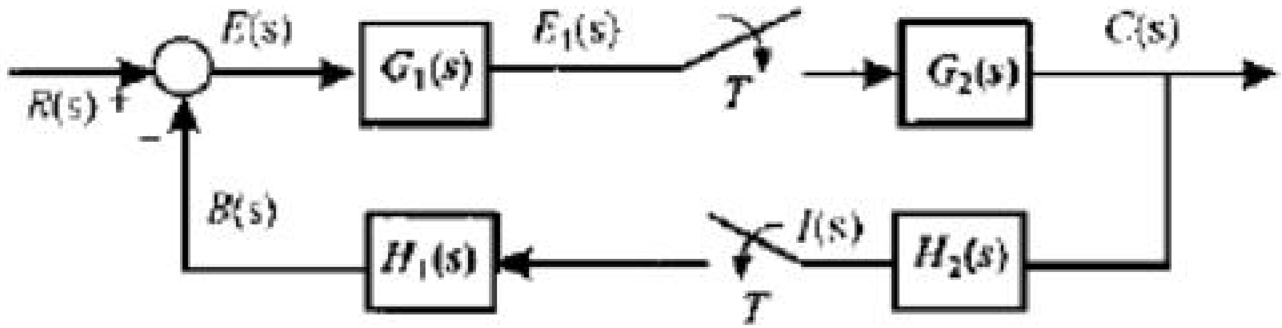
1）用代数法在采样开关出口处按连续系统处理（暂时对采样开关“视而不见”）（——特别注意采样开关的位置）；

2）在采样开关隔开的环节处加上“*”号（或直接用z变换式表示）；

3）对输出$y(t)$虚拟采样并消去中间变量；

4）方块图的等效变换与连续系统完全相同，其原则是变换前后对应的输入输出信息不变。

- 例7-4-3



解：采用“视察法”直接求C(z)

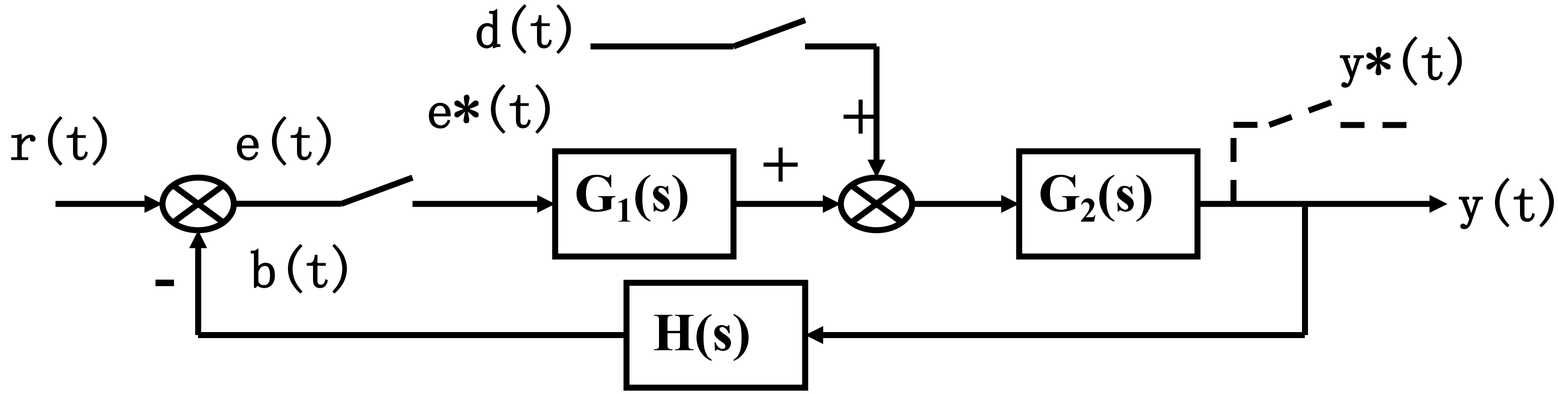
$$G_f(z) = G_2(z)G_1R(z)$$ 前向通路中输出量的Z变换

$$G_0(z) = -G_1H_1(z)H_2G_2(z)$$ 开环脉冲传递函数

$$\boxed{C(z) = \frac{G_f(z)}{1-G_0(z)} = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1+G_1H_1(z)H_2G_2(z)}}$$

与逐步推导法的结果相同

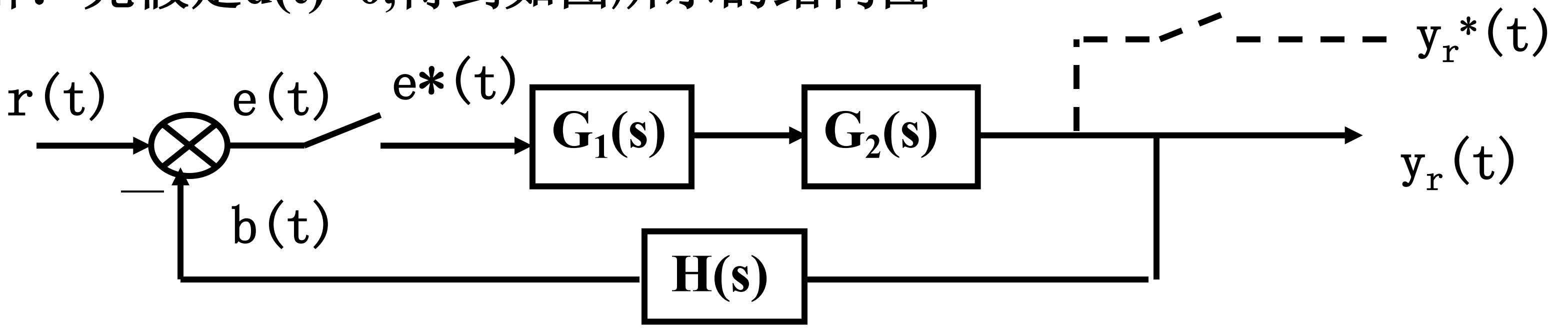
- 例7-4-4 已知带闭环控制系统如图，求脉冲传递函数及输出Z变换式。



带干扰的闭环控制系统

2 脉冲传递函数

解：先假定d(t)=0,得到如图所示的结构图

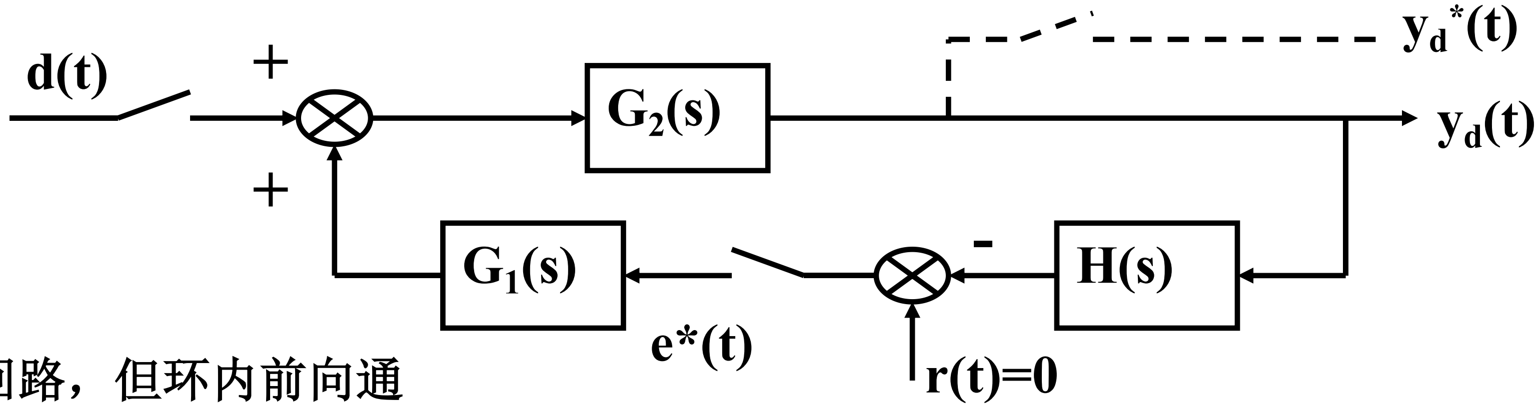


满足“视察法”直接求Y(z)条件，试求Y(z)!!

$$Y(z)=\frac{G_2G_1(z)R(z)}{1+HG_2G_1(z)}$$

$$G_{R\_closed}(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_2G_1(z)}{1+HG_2G_1(z)}$$

再假定输入r(t)=0,得到按扰动输入的系统结构图



单回路，但环内前向通道无采样器，不满足“视察法”条件!!

将$Y_D(z)$用$E(z)$表示，$Y_D(z)=G_2(z)D(z)+G_2G_1(z)E(z)$

从d(t)至e*(t)的环内前向通道有采样器，满足“视察法”条件!!

$$E(z)=-\frac{HG_2(z)D(z)}{1+HG_2G_1(z)}$$

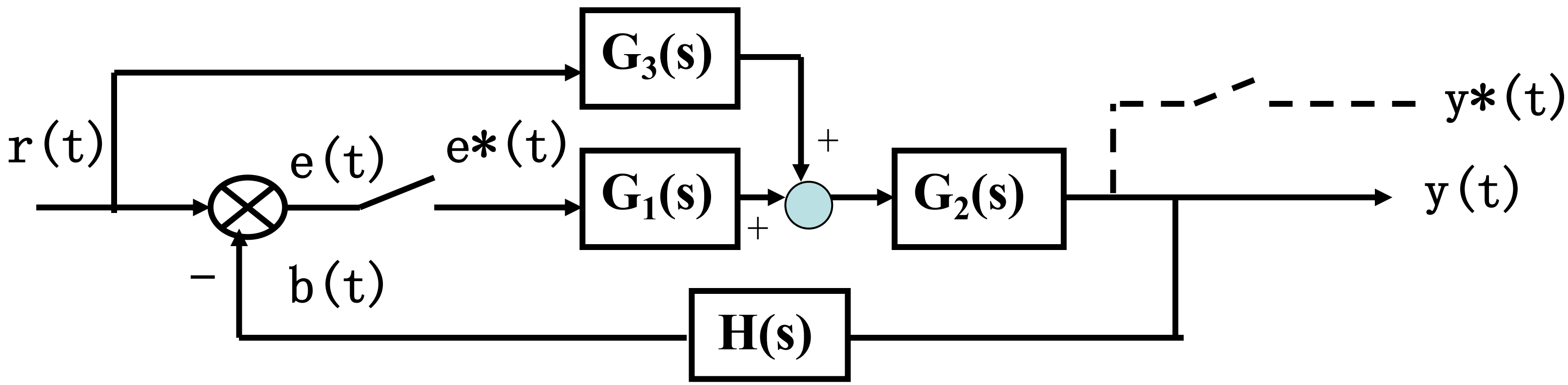
此处特别要留意符号!

$$Y_D(z)=G_2(z)D(z)-\frac{G_2G_1(z)HG_2(z)}{1+HG_2G_1(z)}D(z)$$

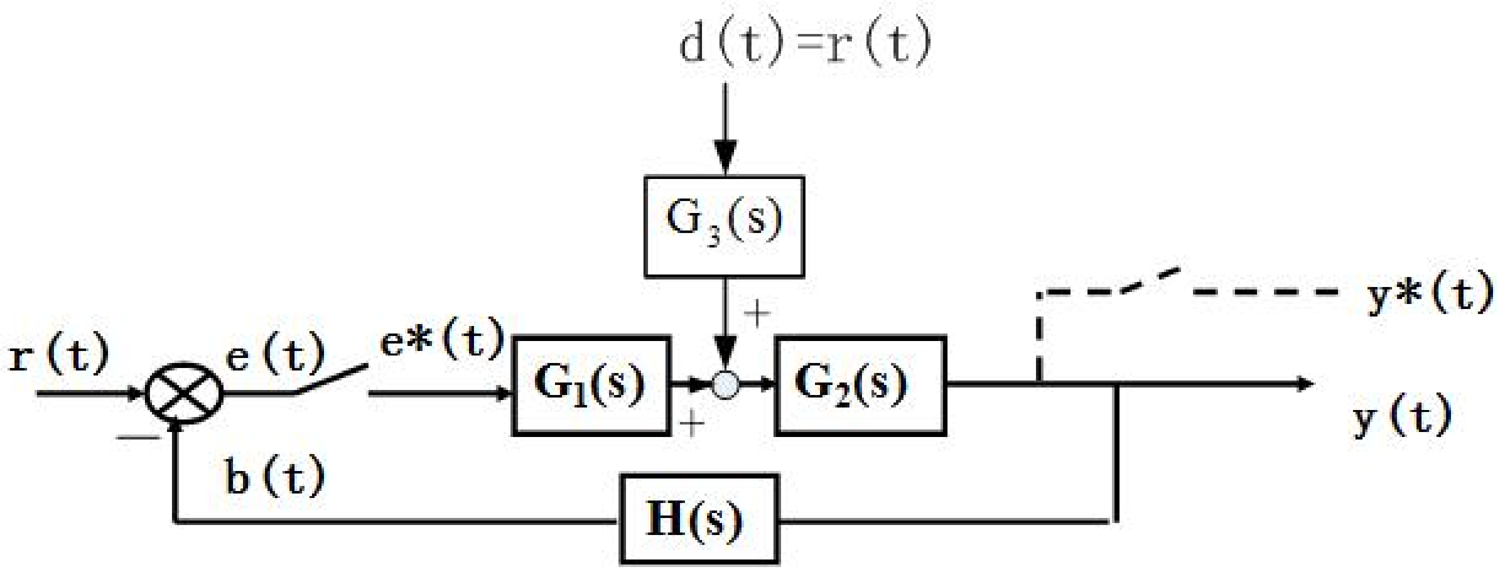
合并得 $Y(z)=Y_R(z)+Y_D(z)=\dfrac{G_2G_1(z)}{1+HG_2G_1(z)}R(z)+\left[G_2(z)-\dfrac{G_2G_1(z)HG_2(z)}{1+HG_2G_1(z)}\right]D(z)$

2 脉冲传递函数

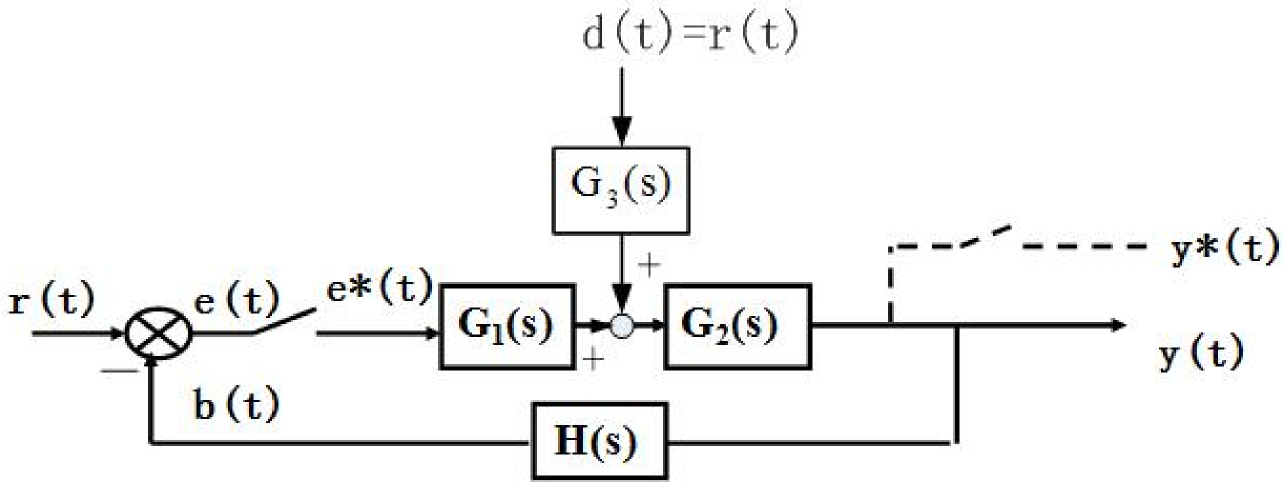
- 补充题一1：求脉冲传递函数及输出的Z变换。



多条前向通路,依线性性质进行拆分



2 脉冲传递函数



视察法 $Y_R(z)=\dfrac{G_2G_1(z)R(z)}{1+HG_2G_1(z)}$

此处特别要留意符号!

$Y_D(z)=G_2G_3D(z)+G_2G_1(z)E(z)$

再用视察法 $E(z)=-\dfrac{HG_2G_3D(z)}{1+HG_1G_2(z)}$

$$Y(z)=Y_R(z)+Y_D(z)=\frac{G_2G_1(z)}{1+HG_2G_1(z)}R(z)+G_2G_3D(z)-\frac{G_2G_1(z)HG_2G_3D(z)}{1+HG_1G_2(z)}$$

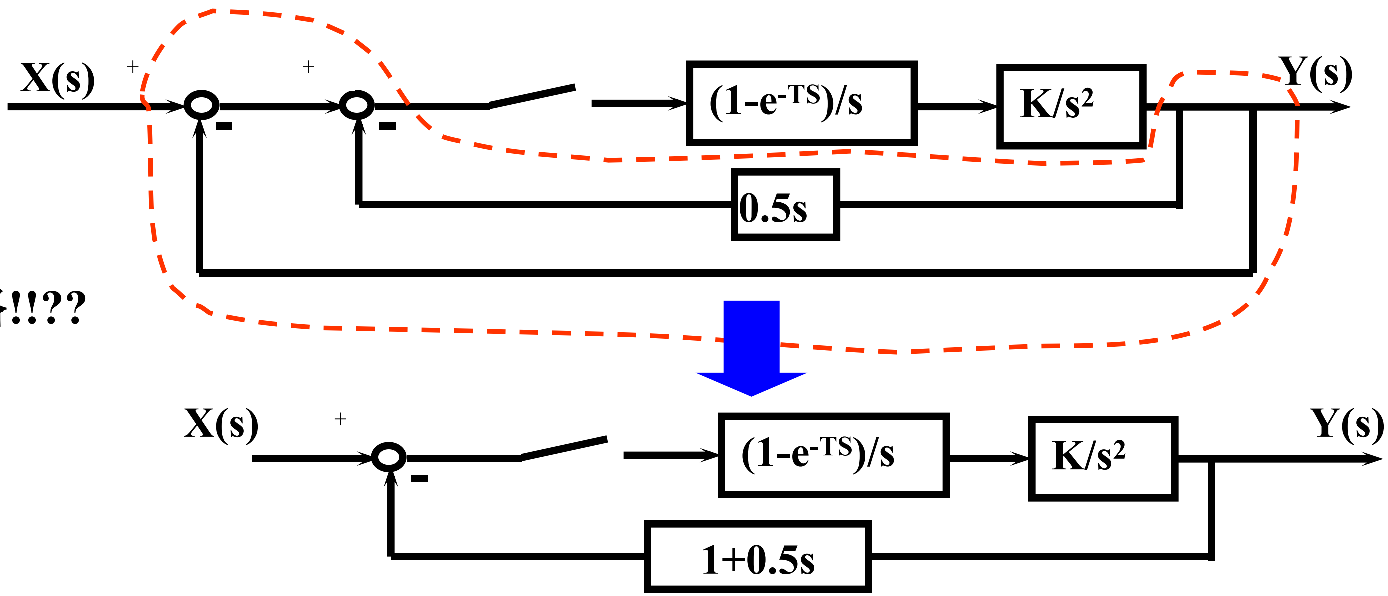
注意到$d(t)=r(t), Y(z)=G_2G_3R(z)+\dfrac{G_2G_1(z)R(z)-G_2G_1(z)HG_2G_3R(z)}{1+HG_1G_2(z)}$

注意:

无 $G_{closed}(z)$

2 脉冲传递函数

- 补充题一2：求脉冲传递函数及输出的Z变换。



多回路!!??

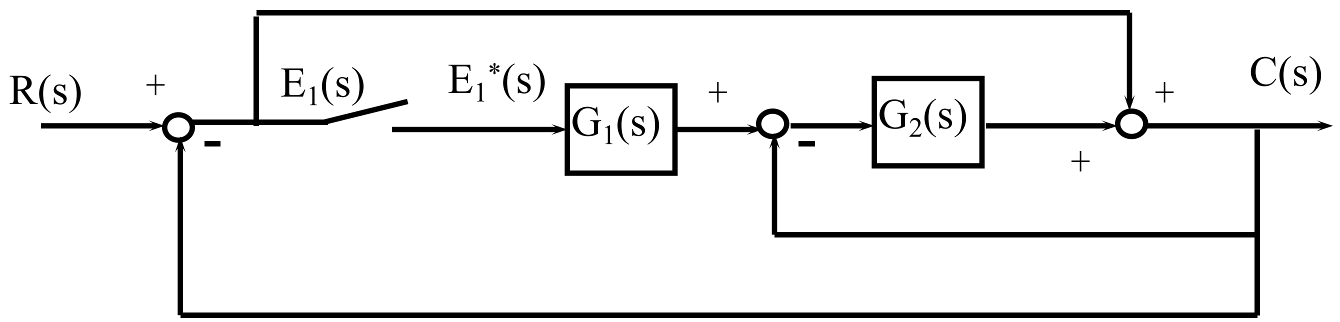
$$Y(z)=\frac{G_f(z)}{1-G_0(z)}$$

$$G_f(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s^2}\right]X(z)$$

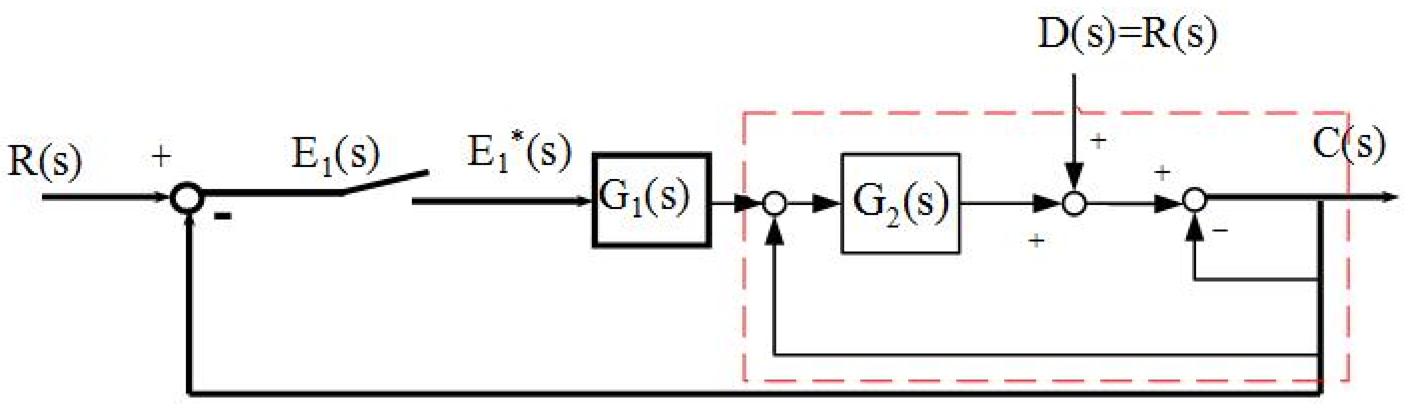
$$G_0(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s^2}(-1-0.5s)\right]$$

2 脉冲传递函数

- 补充题—3：求脉冲传递函数及输出的Z变换。



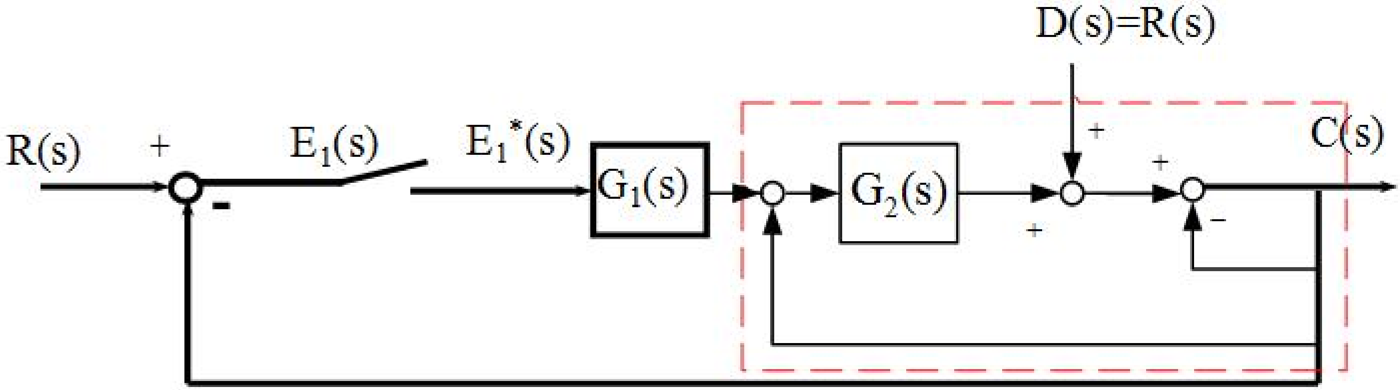
00级期末试题



二条前向通道，拆分

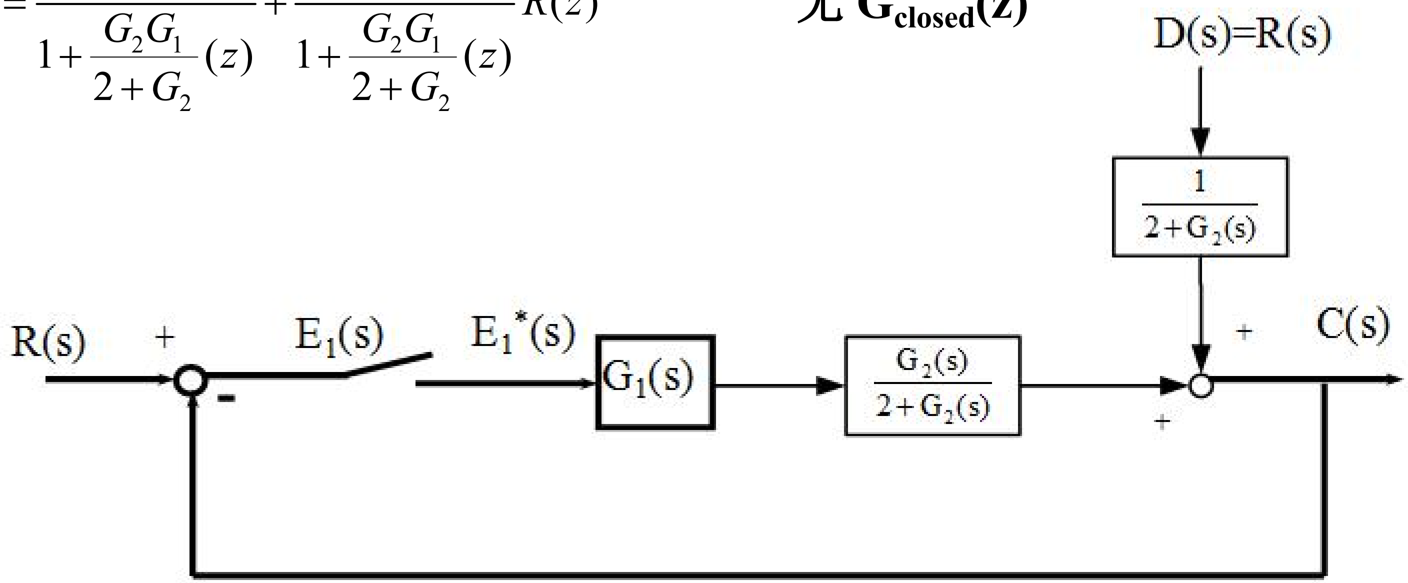
三条回路，有二条回路无采样器，设法消去

2 脉冲传递函数



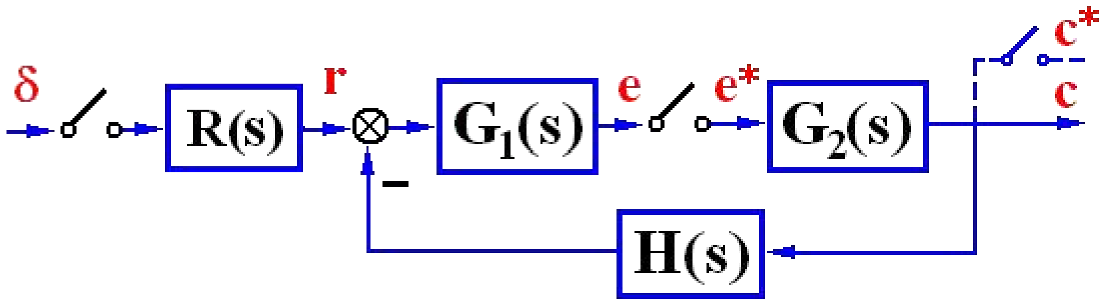
$$C(z)=\frac{\frac{R}{2+G_2}(z)}{1+\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}+\frac{\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}{1+\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}R(z)$$

无 $\mathbf{G_{closed}(z)}$



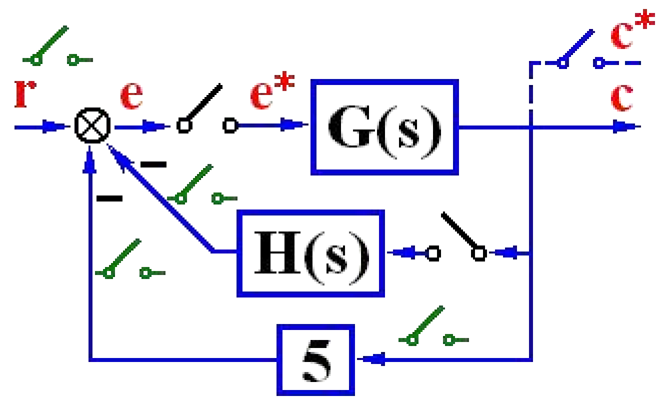
以下两种情况可以利用Mason公式求Φ(z)或C(z)

I. 单回路（无前馈通道）离散系统，在前向通道存在至少一个实际的采样开关时



$$\frac{C(z)}{1}=\frac{G_2(z)\cdot G_1R(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$

II. 离散系统结构图中各环节之间均有或者等效有采样开关时



$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)H(z)+5G(z)}$$

离散系统的数学模型

1 线性差分方程

2 脉冲传递函数

3 **离散系统的权序列**

4 离散系统的状态空间模型

5 求解离散状态方程

6 各种离散模型的关系

3 离散系统的权序列

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}$$

$$=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}$$

其中，$b_n,\cdots,b_{m+1}$等于0

- **单位脉冲响应（权序列）**

$$\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+\cdots+b_0 z^{-n}}{1+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0 z^{-n}}$$

$$\boxed{=h_0+h_1 z^{-1}+h_2 z^{-2}+h_3 z^{-3}+\cdots}$$

$$h(t)=h_0\delta(t)+h_1\delta(t-T)+h_2\delta(t-2T)+\cdots$$

离散系统的数学模型

1 线性差分方程

2 脉冲传递函数

3 离散系统的权序列

4 **离散系统的状态空间模型**

5 求解离散状态方程

6 各种离散模型的关系

系统数学描述的两种基本类型

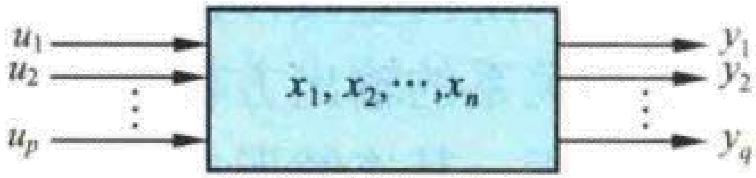


图 9-1 系统的方块图表示

- 系统：输入→输出
  - 系统变量：外部变量（输入变量、输出变量）、内部变量

- 系统的数学描述：系统变量之间的因果关系、变换关系
  - 外部描述：输入-输出描述
  - **内部描述：状态空间描述**
    - **状态方程：反映**内部变量**和**输入变量之间的**因果关系**
    - **输出方程：反映**内部变量及输入变量**和**输出变量之间的**变换关系**

（线性定常）连续状态空间模型：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \infty)$$

（线性定常）离散状态空间模型：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \qquad k \in \{0, 1, 2, \mathrm{L}\ \}$$

状态 $\mathbf{x}(k)$

输入 $\mathbf{u}(k)$

输出 $\mathbf{y}(k)$

A G: 系统矩阵/状态矩阵

B H: 控制矩阵/输入矩阵

C: 观测矩阵/输出矩阵

D: 前馈矩阵/输入输出矩阵

4 离散系统的状态空间模型

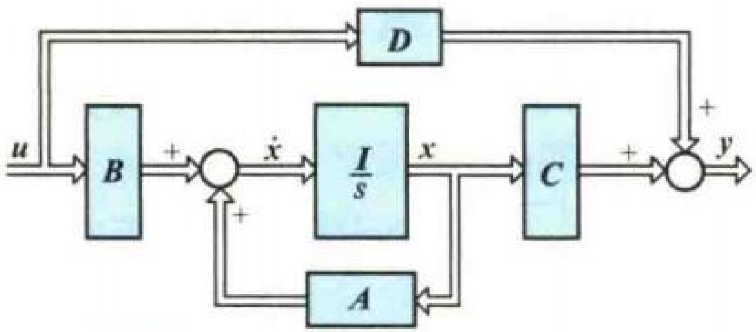


图 9-2 线性连续时间系统结构图

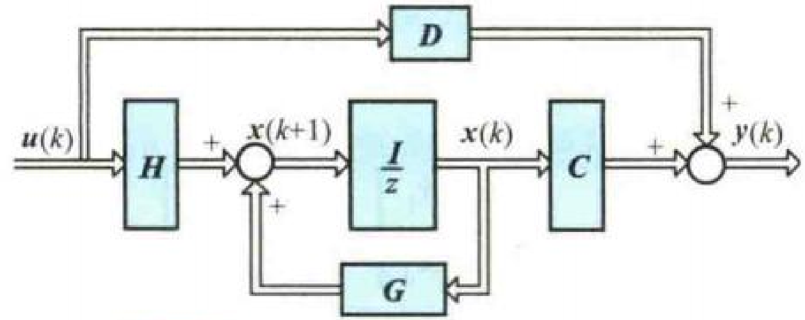


图 9-3 线性离散时间系统结构图

I 单位矩阵； s 拉普拉斯算子； z^{-1} 单位延时算子

A G: 系统矩阵/状态矩阵

B H: 控制矩阵/输入矩阵

C: 观测矩阵/输出矩阵

D: 前馈矩阵/输入输出矩阵

输出向量 = (方块所示矩阵) × (输入向量)

在向量、矩阵的乘法运算中，相乘顺序不允许任意颠倒。

建立状态空间表达式

- **问题：**
  1. 怎样建立模型
  2. 怎样求解
- **建立状态空间表达式的方法主要有两种：**
  1. 直接根据系统的机理建立相应的微分方程或差分方程，继而选择有关的物理量作为状态变量，从而导出其状态空间表达式；
  2. 由已知的系统其他数学模型经过转化而得到状态空间表达式。

线性定常连续系统状态空间表达式的建立

- (1)根据系统机理建立状态空间表达式
- (2)由系统微分方程建立状态空间表达式
- (3)由系统传递函数建立状态空间表达式

线性离散系统状态空间表达式的建立

- 离散（时间）系统的特点：系统中的各个变量被处理成为只在离散时刻取值，其状态空间描述只反映离散时刻的变量组间的因果关系和转换关系。

- 离散时间系统
  - 可以是一类**实际的离散时间问题**的数学模型，如社会经济问题、生态问题等，
  - 也可以是一个连续系统因为采用数字计算机进行计算或控制的需要而**人为地加以时间离散化**而导出的模型。

- 线性离散系统的动态方程
  - 可以**利用系统的差分方程**建立，
  - 也可以**利用线性连续动态方程的离散化**得到。

4 离散系统的状态空间模型

➢ 从系统的差分方程到离散状态空间模型

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)$$
$$=b_nu(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\cdots+b_1u(k+1)+b_0u(k)$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}$$
$$=b_n+\frac{\beta_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\beta_1z+\beta_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}=b_n+\frac{N(z)}{D(z)}$$

差分方程 → 脉冲传递函数

利用 z 反变换关系

$$x_1(k+1)=x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=x_3(k)$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}(k+1)=x_n(k)$$
$$x_n(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)-\cdots-a_{n-1}x_n(k)+u(k)$$
$$y(k)=\beta_0x_1(k)+\beta_1x_2(k)+\cdots+\beta_{n-1}x_n(k)$$

动态方程

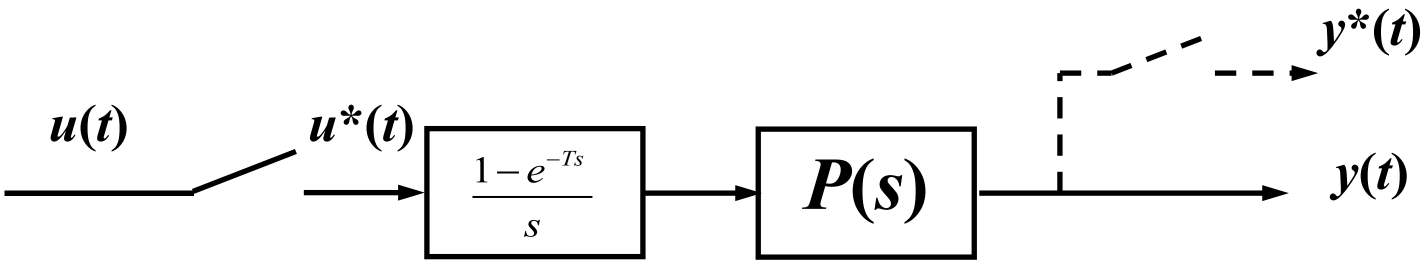
向量-矩阵形式

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\\vdots\\x_{n-1}(k+1)\\x_n(k+1)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}}_{G}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\vdots\\x_{n-1}(k)\\x_n(k)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}}_{H}u(k)$$

$$y(k)=\underbrace{\begin{bmatrix}\beta_0&\beta_1&\cdots&\beta_{n-1}\end{bmatrix}}_{C}\boldsymbol{x}(k)+\underbrace{b_n}_{D}u(k)$$

4 离散系统的状态空间模型

➢ 从连续状态空间模型到离散状态空间模型



连续状态空间模型：
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{cases}\qquad t\in[0,\infty)$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

零阶保持器

$$\boldsymbol{x}(k+1)=e^{AT}\boldsymbol{x}(k)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{A(k+1)T-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=e^{AT}\boldsymbol{x}(k)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{\boldsymbol{A}(k+1)T-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{Bu}(k)d\tau$$

令$\lambda=(k+1)T-\tau$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=e^{AT}\boldsymbol{x}(k)+\int_0^T e^{A\lambda}\boldsymbol{Bu}(k)d\lambda\\&=e^{AT}\boldsymbol{x}(k)+\left[\int_0^T e^{A\lambda}\boldsymbol{B}d\lambda\right]\boldsymbol{u}(k)\\&=\boldsymbol{G}(T)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}(T)\boldsymbol{u}(k)\end{aligned}$$

离散状态空间模型

$$\begin{cases}\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}(T)\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}(T)\mathbf{u}(k)\\\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{cases}$$

$$k\in\{0,1,2,\cdots\}$$

$$\mathbf{G}(T)=e^{\mathbf{A}T},\mathbf{H}(T)=\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}d\tau$$

注意：

1）G，H取决于A，B，*T*

2）计算H时有时先乘B更容易

3）对于线性定常系统，*T*一旦固定，G、H即为常数

4）注意计算 exp(A*T*)的方法

➢ **例7-3-9** 已知连续状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$ 求离散状态方程（含零阶保持）。

解：1）
$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

2）
$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} = L^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}\big|_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(T) = [\int_0^T e^{\mathbf{A}\lambda}\mathbf{B}d\lambda] = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda}) \\ e^{-2\lambda} \end{bmatrix} d\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T+\frac{e^{-2T}-1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

3）若T=1s，

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.432 \\ 0 & 0.135 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.284 \\ 0.432 \end{bmatrix}\mathbf{u}(k)}$$

离散系统的数学模型

1　线性差分方程
2　脉冲传递函数
3　离散系统的权序列
4　离散系统的状态空间模型
5　求解离散状态方程
6　各种离散模型的关系

复习：连续状态方程的全解

➢通常有两种方法计算状态方程的全解：直接求解方程（时域）和利用拉普拉斯变换（S 域）；状态转移矩阵STM概念。

方法 1 时域法：　e^{-At} 是方阵，$x(t)$ 是 $n\times1$ 的状态向量，于是有

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)]=e^{-At}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-e^{-At}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=e^{-At}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)]$$

对于状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)]=e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

将该方程在 0 到 t 的时间区间上进行积分

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)=\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{N}(t)]=\boldsymbol{M}(t)\dot{\boldsymbol{N}}(t)+\dot{\boldsymbol{M}}(t)\boldsymbol{N}(t)$$

状态转移矩阵

$\dot{x}(t) = ax(t)$ ⟹ $x(t) = e^{at}x(0)$

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ ⟹ $\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$　　$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)$

- A 是方阵，e^{At}是与 A 具有相同阶数的方阵

- 对于线性定常系统，e^{At} 称为系统的**状态转移矩阵** (state transition matrix, STM)，可记为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \exp[\boldsymbol{A}t]$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t-\tau) = e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} = \exp[\boldsymbol{A}(t-\tau)]$$　　$\boldsymbol{\phi}(t,\tau)$

任意初始条件下，系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 的响应都可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

复习：连续状态方程的全解

- 从方程 $e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)=\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$ ，希望得到 $x(t)$

$$e^{At}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)]=e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau\right]$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$$

➢ 利用 STM 和 $t=t_0$ 时刻的初始条件，在输入 $u(t)$ 作用下状态方程的解

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau,\ t>t_0$$

状态转移方程

令 $\beta=t-\tau$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{Bu}(t-\beta)d\beta$$

复习：连续状态方程的全解

方法 2 拉普拉斯变换方法：

状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

LT

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}BU(s)$$
$$= \Phi(s)x(0) + \Phi(s)BU(s)$$

LT^{-1}

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + L^{-1}[\Phi(s)BU(s)]$$

若初始时刻$t=t_0$，在输入 $u(t)$ 作用下状态方程的解

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

5 求解离散状态方程

离散状态方程本质上是一阶差分方程组，求其解也与求差分方程解一样有两种方法：递推法与Z变换法。

- **递推法**

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

已知：$\mathbf{x}(0),\ \mathbf{u}(k)$

直接将初始条件$\boldsymbol{x}(0)$与$\boldsymbol{u}(k)$代入状态方程递推求解

特点：简单且适合计算机，但无解析式

- **Z变换法**

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

已知：$\mathbf{x}(0),\ \mathbf{u}(k)$

Z变换

$$z\mathbf{X}(z)-z\mathbf{x}(0)=\mathbf{A}\mathbf{X}(z)+\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\Rightarrow \mathbf{X}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0)+(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$

Z反变换

$$\mathbf{x}(k)=Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]=Z^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[z\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{u}(z)]\}$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\{Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]\}+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

特点：不同于递推法得到的是有限项时间序列(Open form)，Z变换法的最突出优点是可以得到解的数学解析式(Closed form)。

5 求解离散状态方程

例7-3-10 已知离散系统，其初始条件及输入$u(k)$，求$\mathbf{x}(k)$。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; u(k) = 1, k = 0, 1, 2, \cdots$$

解：1)用递推法

代入不同的k值计算

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$

$$\Phi(1) = \mathbf{A}$$

$$\Phi(2) = \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -0.16 & -1 \\ 0.16 & 0.84 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(3) = \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.84 \\ -0.134 & -0.68 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

5 求解离散状态方程

例7-3-10 已知离散系统，其初始条件及输入$u(k)$，求$\mathbf{x}(k)$。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; u(k) = 1, k = 0,1,2,\cdots$$

解：2) Z变换法 $\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)$

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}[\mathbf{X}(z)] = Z^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[z\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{u}(z)]\}$$

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{4/3}{z+0.2} + \dfrac{-1/3}{z+0.8} & \dfrac{5/3}{z+0.2} + \dfrac{-5/3}{z+0.8} \\[2ex] \dfrac{-0.8/3}{z+0.2} + \dfrac{0.8/3}{z+0.8} & \dfrac{-1/3}{z+0.2} + \dfrac{4/3}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{z}{z-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z-1} \\[2ex] \dfrac{-z^2+2z}{z-1} \end{bmatrix}$$

5 求解离散状态方程

$$\mathbf{X}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\left[z\mathbf{x}(0)+\mathbf{Bu}(z)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)}\\ \dfrac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-17z/6}{z+0.2}+\dfrac{22z/9}{z+0.8}+\dfrac{25z/18}{z-1}\\ \dfrac{3.4z/6}{z+0.2}+\dfrac{-17.6z/9}{z+0.8}+\dfrac{7z/18}{z-1}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(k)=Z^{-1}[\mathbf{X}(z)]$$

$$\mathbf{x}(k)=Z^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{-17z/6}{z+0.2}+\dfrac{22z/9}{z+0.8}+\dfrac{25z/18}{z-1}\\ \dfrac{3.4z/6}{z+0.2}+\dfrac{-17.6z/9}{z+0.8}+\dfrac{7z/18}{z-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{17}{6}(-0.2)^k+\dfrac{22}{9}(-0.8)^k+\dfrac{25}{18}\\ \dfrac{3.4}{6}(-0.2)^k-\dfrac{17.6}{9}(-0.8)^k+\dfrac{7}{18}\end{bmatrix}$$

上式为一解析的闭合形式，代入k值即可计算不同时刻的状态。

离散系统的数学模型

1 线性差分方程

2 脉冲传递函数

3 离散系统的权序列

4 离散系统的状态空间模型

5 求解离散状态方程

6 各种离散模型的关系

6 各种离散模型的关系

1) 差分方程（时域）和脉冲传递函数（z 域）

➢ **由差分方程→脉冲传递函数** ——通过Z变换

若 n 阶前向差分方程（其中a, b为常数，k, n, m为整数，且$m \le n$)

$$
\begin{aligned}
&y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)\\
&\quad=b_mr(k+m)+b_{m-1}r(k+m-1)+\cdots+b_1r(k+1)+b_0r(k)
\end{aligned}
$$

对上式两边作Z变换（令初始条件为零，并利用超前移位特性），得脉冲传递函数

$$
G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}
$$

若为后向差分方程，方法类似（利用滞后移位特性）。

例：$y(k+2)+4y(k+1)+3y(k)=6r(k+1)+7r(k)$，求脉冲传递函数

解：作z变换 $\left[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)\right]+4\left[zY(z)-zy(0)\right]+3Y(z)$

$$=6\left[zR(z)-zr(0)\right]+7R(z)$$

$$\left[z^2Y(z)+4zY(z)+3Y(z)\right]-z^2y(0)-z\left[y(1)+4y(0)\right]=\left[6zR(z)+7R(z)\right]-z6r(0)$$

零初始条件$y(-1)=y(-2)=\cdots=0, r(-1)=r(-2)=\cdots=0$

当$k=-1$时，$y(1)+4y(0)+3y(-1)=6r(0)+7r(-1)$

即$y(1)+4y(0)=6r(0)$

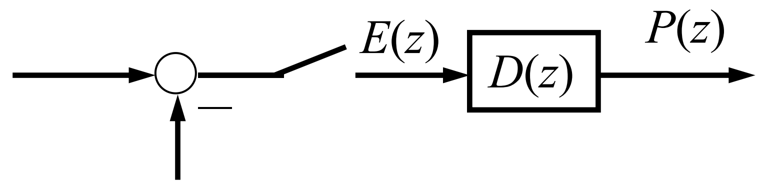
当$k=-2$时，$y(0)+4y(-1)+3y(-2)=6r(-1)+7r(-2)$，即$y(0)=0$

$$Y(z)\left(z^2+4z+3\right)=R(z)\left(6z+7\right), G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{6z+7}{z^2+4z+3}$$

6 各种离散模型的关系

- **由差分方程→脉冲传递函数** ——通过Z变换
- **由脉冲传递函数→差分方程** ——通过Z反变换

若已知控制器的脉冲传递函数$D(z)$，要化为计算机的控制算式，必须将$D(z)$转化为差分方程表示，若



$$D(z)=\frac{P(z)}{E(z)}=\frac{k(z-a)}{z-1}$$

$$zP(z)-P(z)=k[zE(z)-aE(z)]$$

Z反变换

$$P(k+1)-P(k)=k[e(k+1)-ae(k)]$$ ——**前向差分方程**

或 $$P(k)-P(k-1)=k[e(k)-ae(k-1)]$$ ——**后向差分方程**

零初始条件下等价

不可实现，因$P(k)$用到$e(k+1)$的值。

注：工程上用后向差分方程多些。$D(z)$分子的阶次不能高于分母的阶次？

6 各种离散模型的关系

2) 脉冲传递函数和状态方程

➢ **由状态方程→脉冲传递函数** ——转换后的结果是惟一的

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}adj(z\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{|z\mathbf{I}-\mathbf{A}|} + \mathbf{D}}$$

$\Delta = |z\mathbf{I}-\mathbf{A}| = 0$ 为系统特征方程

➢ **例7-3-11** 已知系统状态方程

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.6 & 0.233\\ -0.466 & -0.097\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.2\\ 0.233\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

求其脉冲传递函数。

解：

$$G(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-0.6 & -0.233\\ 0.466 & z+0.097\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.2\\ 0.233\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z+0.097 & 0.233\\ -0.466 & z-0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.2\\ 0.233\end{bmatrix}$$

$$=\frac{0.2z+0.074}{(z-0.135)(z-0.368)}$$

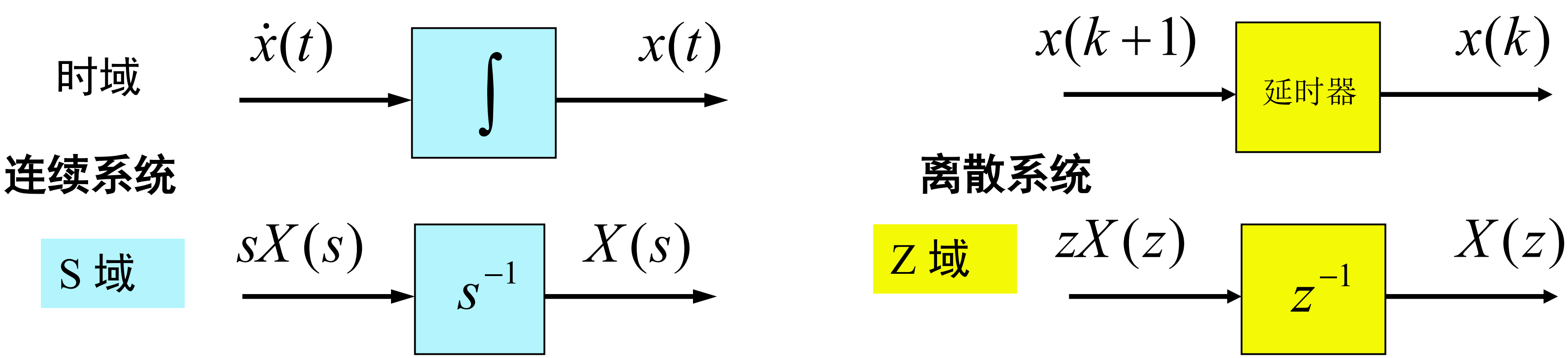
6 各种离散模型的关系

- **由脉冲传递函数→状态方程** ——转换后的结果不惟一！

➢ 与连续系统类似，由脉冲传递函数求离散状态方程的问题称为**实现问题**，因状态变量选择的不同，状态方程也就不同

➢常见的实现如**能控标准型**、**能观标准型**、**正则标准型**(或称并联分解）、**串联分解**等。一般先画出状态图再写状态方程比较容易,信号流图等工具也可以采用

➢与连续系统不同的是，连续系统中采用**积分器**作为基本单元，而在离散系统中则采用**延时器**作为基本单元。



6 各种离散模型的关系

➢ 能控标准型和能观标准型:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

$$=b_n+\frac{(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)z^{n-1}+\cdots+(b_1-a_1 b_n)z+(b_0-a_0 b_n)}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

$$\begin{cases} x(k+1)=Ax(k)+bu(k) \\ y(k)=cx(k)+du(k) \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

能控标准型

$$c=\begin{bmatrix} b_0-a_0 b_n & b_1-a_1 b_n & \cdots & b_{n-1}-a_{n-1}b_n \end{bmatrix}$$

$$d=b_n$$

$$\boldsymbol{A}_c=\boldsymbol{A}_o^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b}_c=\boldsymbol{c}_o^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{c}_c=\boldsymbol{b}_o^{\mathrm{T}}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} \\ \\ b_2-a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1}-a_{n-1}b_n \end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d=b_n$$

能观标准型

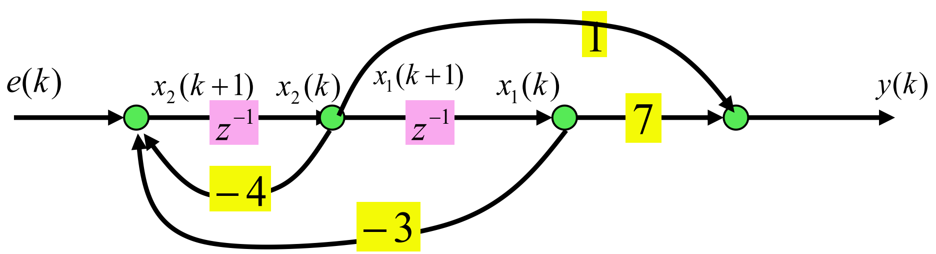
➢ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：**1）能控标准型**

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}e(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}x(k)$$



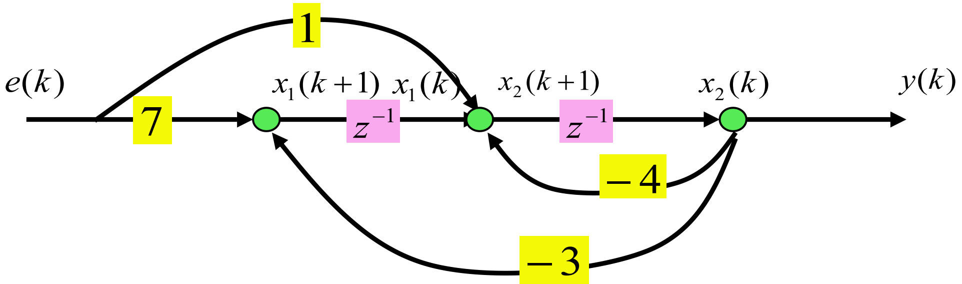
➢ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解： **2）能观标准型**

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}e(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x(k)$$



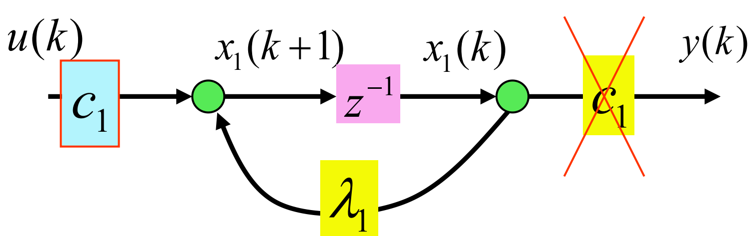
6 各种离散模型的关系

➢ 正则标准型(并联分解）：适用于脉冲传递函数为部分分式形式，

- 当特征方程无重根时，系统矩阵A为对角阵

基本单元：$D(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}=\dfrac{c_1}{z-\lambda_1}=\dfrac{z^{-1}c_1}{1-z^{-1}\lambda_1}$

$$x_1(k+1)=\lambda_1 x_1(k)+u(k)$$
$$y(k)=c_1 x_1(k)$$



$$\boxed{\begin{aligned} x_1(k+1)&=\lambda_1 x_1(k)+c_1u(k)\\ y(k)&=x_1(k)\end{aligned}}$$

➡ A, b,c?

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix};\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix};\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}$$

- 正则标准型(并联分解） **- 若有重根，系统矩阵A为约当阵**
- 有重根时则c_1的位置须由后变为前（单根时可前可后）

5 各种离散模型的关系

➢ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

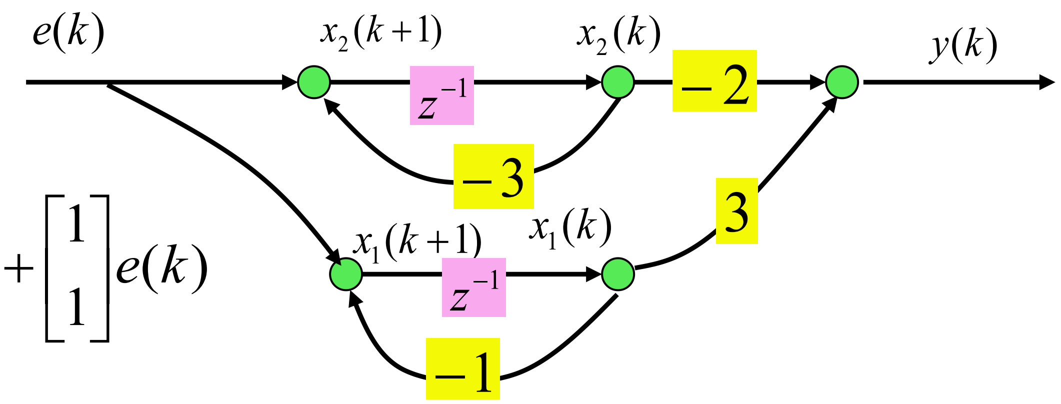
$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：**3）正则标准型(并联分解）**——无重根

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix};\ \mathrm{b}=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix};\ \mathrm{c}=\begin{bmatrix}c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}$$

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}=\frac{3}{z+1}-\frac{2}{z+3}$$

$$=\frac{c_1z^{-1}}{1-z^{-1}\cdot\lambda_1}+\frac{c_2z^{-1}}{1-z^{-1}\cdot\lambda_2}$$



$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}x(k)$$

6 各种离散模型的关系

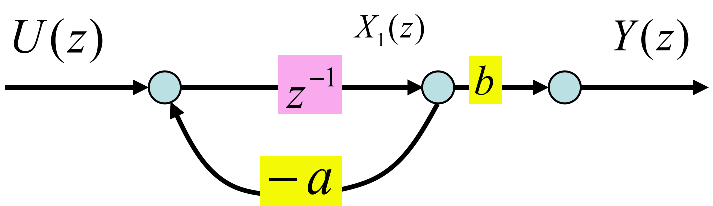
➢ **串联分解：**适用于脉冲传递函数分子分母均为因式分解形式，进而再写成**一阶环节相乘**的形式。每一个一阶环节可以用简单的程序或状态图实现。

一阶环节基本单元-1： $$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b}{z+a}=\frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$

一阶环节基本单元-2： $$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z+b}{z+a}=1+\frac{b-a}{z+a}$$

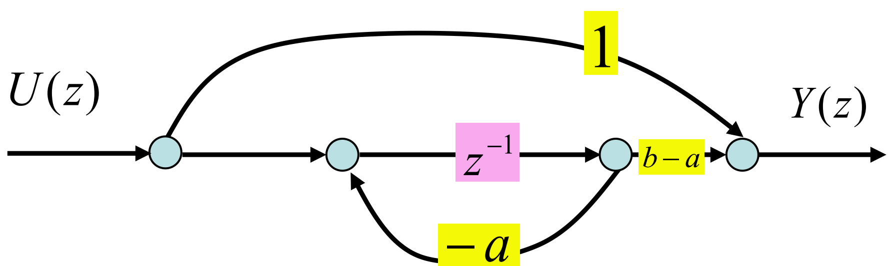
6 各种离散模型的关系

一阶环节基本单元-1： $$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b}{z+a}=\frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$



$$x_1(k+1)=-ax_1(k)+u(k)$$
$$y(k)=bx_1(k)$$

一阶环节基本单元-2： $$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z+b}{z+a}=1+\frac{b-a}{z+a}$$



$$\begin{cases} x_1(k+1)=-ax_1(k)+u(k) \\ y(k)=(b-a)x_1(k)+u(k) \end{cases}$$

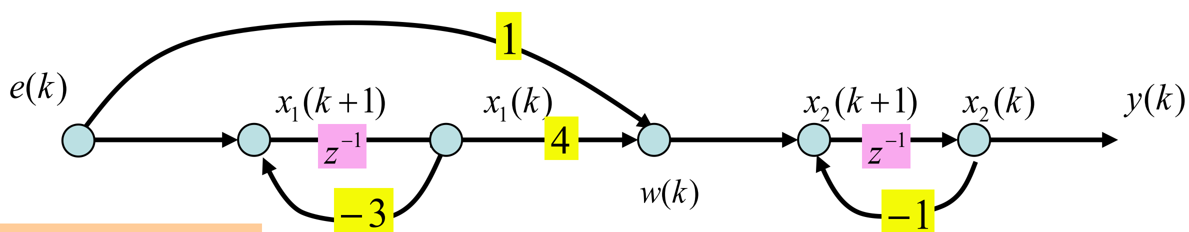
6 各种离散模型的关系

➢ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：**4）串联分解1：** $\because D(z)=\dfrac{Y(z)}{E(z)}=\dfrac{z+7}{z^2+4z+3}=\dfrac{1}{z+1}\cdot\dfrac{z+7}{z+3}=\dfrac{1}{z+1}\left(1+\dfrac{4}{z+3}\right)$

状态变量图



$$x_1(k+1)=-3x_1(k)+e(k)$$
$$w(k)=4x_1(k)+e(k)$$

$$x_2(k+1)=-x_2(k)+w(k)$$
$$y(k)=x_2(k)$$

$$x_2(k+1)=4x_1(k)-x_2(k)+e(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e(k)$$
$$y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x(k)$$

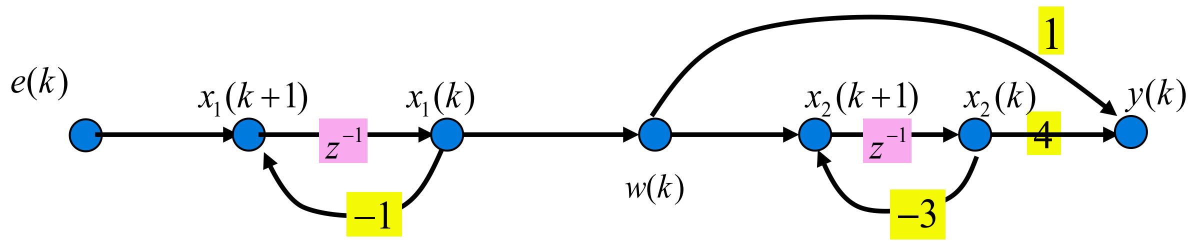
➢ **例7-3-12** 已知系统脉冲传递函数，求系统状态方程的实现。

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}$$

解：**4）串联分解2：**

$$\because D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{z+7}{z^2+4z+3}=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{z+7}{z+3}=\frac{1}{z+1}\left(1+\frac{4}{z+3}\right)$$

状态变量图



$$x_1(k+1)=-x_1(k)+e(k)$$
$$w(k)=x_1(k)$$

$$x_2(k+1)=-3x_2(k)+w(k)$$
$$y(k)=w(k)+4x_2(k)$$

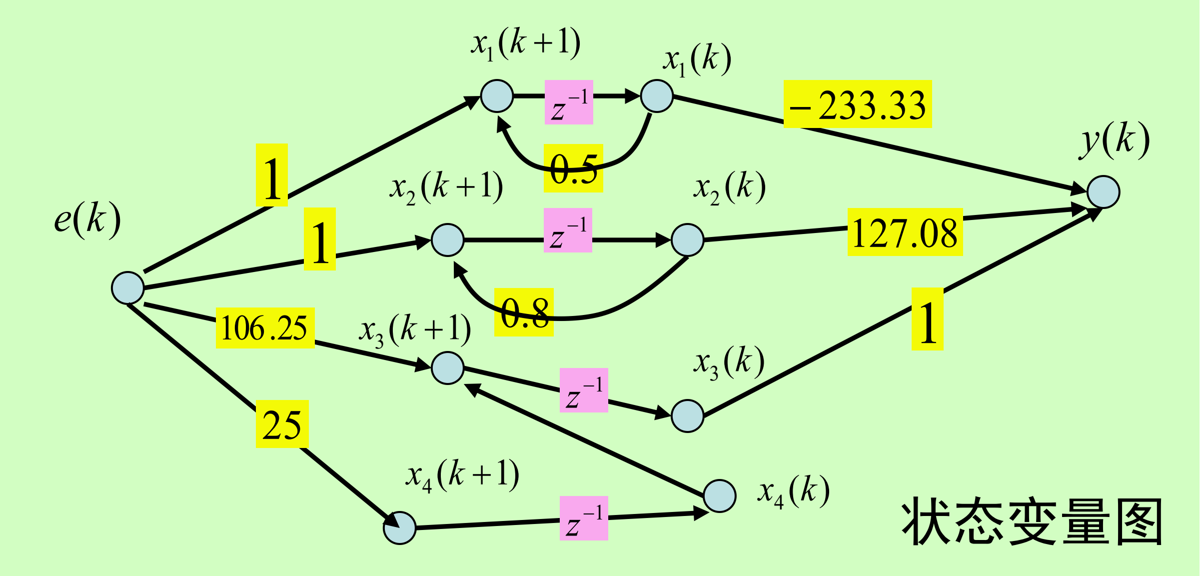
$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e(k)$$
$$y(k)=\begin{bmatrix}1&4\end{bmatrix}x(k)$$

例7-3-13 已知系统脉冲传递函数，**求系统状态空间实现。**

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{10(z^2+z+1)}{z^2(z-0.5)(z-0.8)}$$

解：特征方程的根：0.5，0.8，0, 0——有重根——将$D(z)$写成部分分式

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{10(z^2+z+1)}{z^2(z-0.5)(z-0.8)}=\frac{-233.33}{z-0.5}+\frac{127.08}{z-0.8}+\frac{106.25}{z}+\frac{25}{z^2}$$



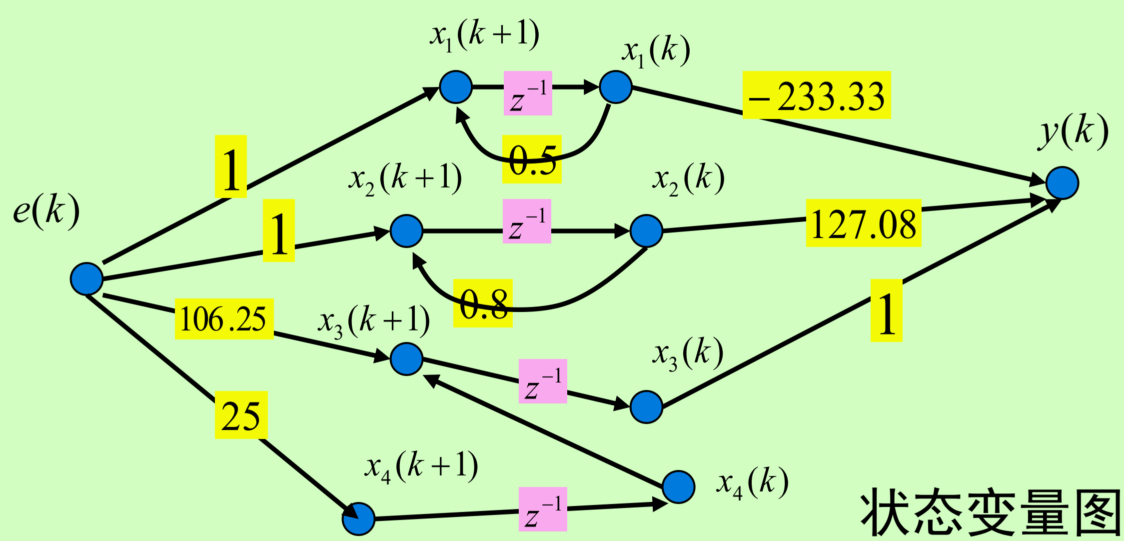
状态变量图

特别注意：最后2个状态变量，因为重根的存在，与一般的并联分解不同之处！

$$D(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{10(z^2+z+1)}{z^2(z-0.5)(z-0.8)}=\frac{-233.33}{z-0.5}+\frac{127.08}{z-0.8}+\frac{106.25}{z}+\frac{25}{z^2}$$

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}e(k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.5&0&0&0\\0&0.8&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



状态变量图

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\106.25\\25\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-233.33&127.08&1&0\end{bmatrix}$$

6 各种离散模型的关系

3) 差分方程和状态方程

➢ 由差分方程→状态方程 ——因状态选取不惟一，状态方程不惟一

$$
\begin{aligned}
& y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1 y(k+1)+a_0 y(k) \\
& \quad = b_m r(k+m)+b_{m-1}r(k+m-1)+\cdots+b_1 r(k+1)+b_0 r(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)
\end{aligned}
$$

通常先转化为脉冲传递函数$G(z)$，然后再转化为状态方程

- **由状态方程→差分方程** ——转换后的结果是惟一的！？

状态方程→脉冲传递函数G(z) →差分方程

例7-3-14 已知状态方程，求系统差分方程表示。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(k)$$

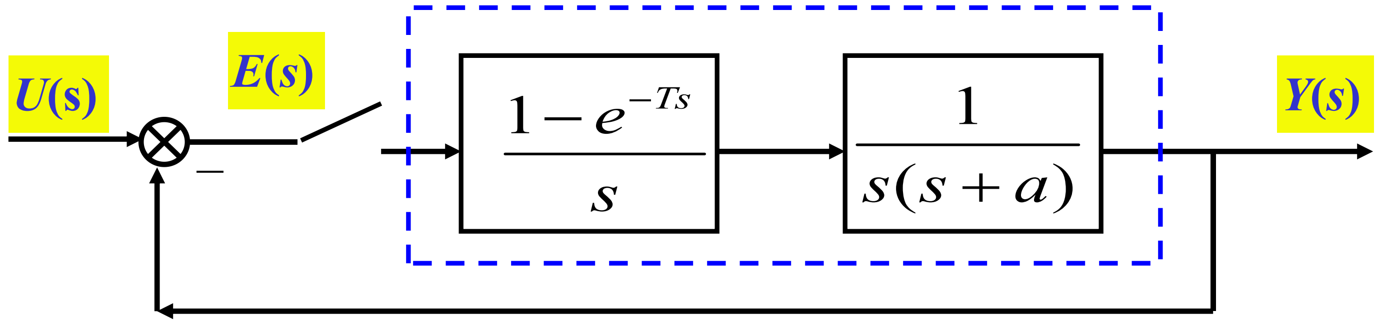
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 3 & z+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+5 & 1 \\ -3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z+2}{z^2+5z+3} = \frac{Y(z)}{U(z)} \xrightarrow{\text{求z反变换}} y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

4) 闭环离散系统的状态方程

- **例7-3-15** 已知系统如图示，a=1，T=1，写出闭环系统的状态方程。



解：开环脉冲传递函数

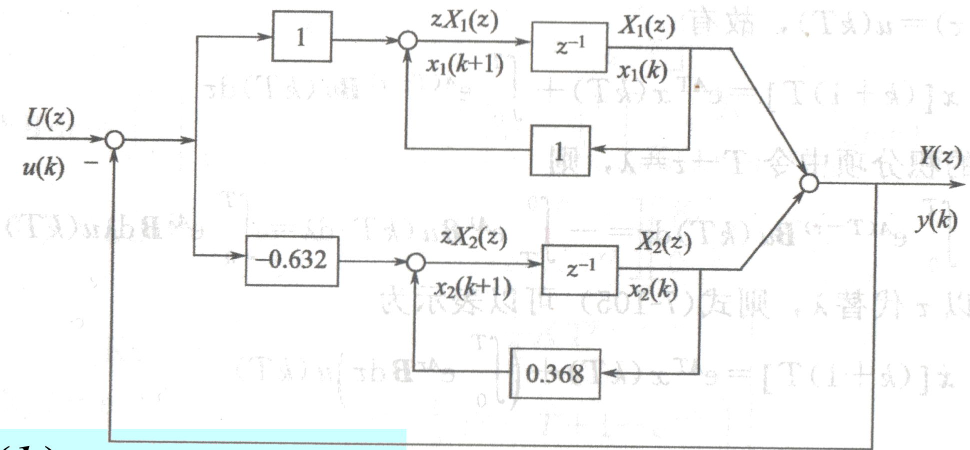
$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\left(Z\left[\frac{1}{s^2}\right]-Z\left[\frac{1}{s}\right]+Z\left[\frac{1}{s+1}\right]\right)$$

$$=(1-z^{-1})\left(\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}\right)=\frac{1}{z-1}-1+\frac{z-1}{z-0.3678}=\frac{1}{z-1}-\frac{0.6322}{z-0.3678}$$

6 各种离散模型的关系

$$G(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{0.6322}{z-0.3678}$$

由G(z)的形式可知，采用并联形式实现最为简单。先画出开环系统的状态图，然后再闭环得到闭环系统状态变量图，进而写出闭环系统的状态方程



$$x_1(k+1)=x_1(k)+e(k)$$
$$x_2(k+1)=0.3678x_2(k)-0.6322e(k)$$
$$y(k)=x_1(k)+x_2(k)$$

$$e(k)=u(k)-y(k)$$

$$e(k)=u(k)-x_1(k)-x_2(k)$$

$$x_1(k+1)=-x_2(k)+u(k)$$
$$x_2(k+1)=0.6322x_1(k)+x_2(k)-0.6322u(k)$$
$$y(k)=x_1(k)+x_2(k)$$

参见P295（new P256）
图7-31