自动控制理论

Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第六章 Chapter 6

频率特性分析法(Frequency Response)

第六章关键词

- 频率、频率响应、频率特性
- 幅频特性、相频特性
- 对数频率特性（BODE图）
- 极坐标图（奈奎斯特图）
- 奈奎斯特稳定判据
- 稳定裕度（幅值裕度、相位裕度）
- 频域性能

第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
  - ➢稳定裕度
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

稳定性和相对稳定性可以通过对数幅频曲线和相频曲线来确定。

相对稳定性可以用稳定裕度进行度量，包括相位裕度和幅值裕度。

Gain crossover（截止频率——增益临界点）

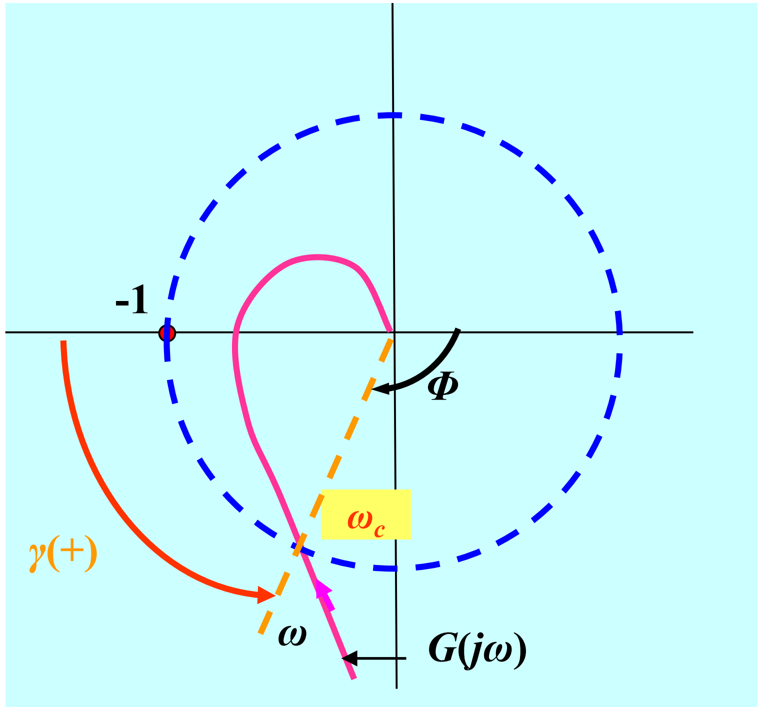
$G(j\omega)$幅相曲线在幅值为1 [$LmG(j\omega)=0$dB] 的点处的频率称为 截止频率ω_c 。

Phase margin angle（相位裕度）

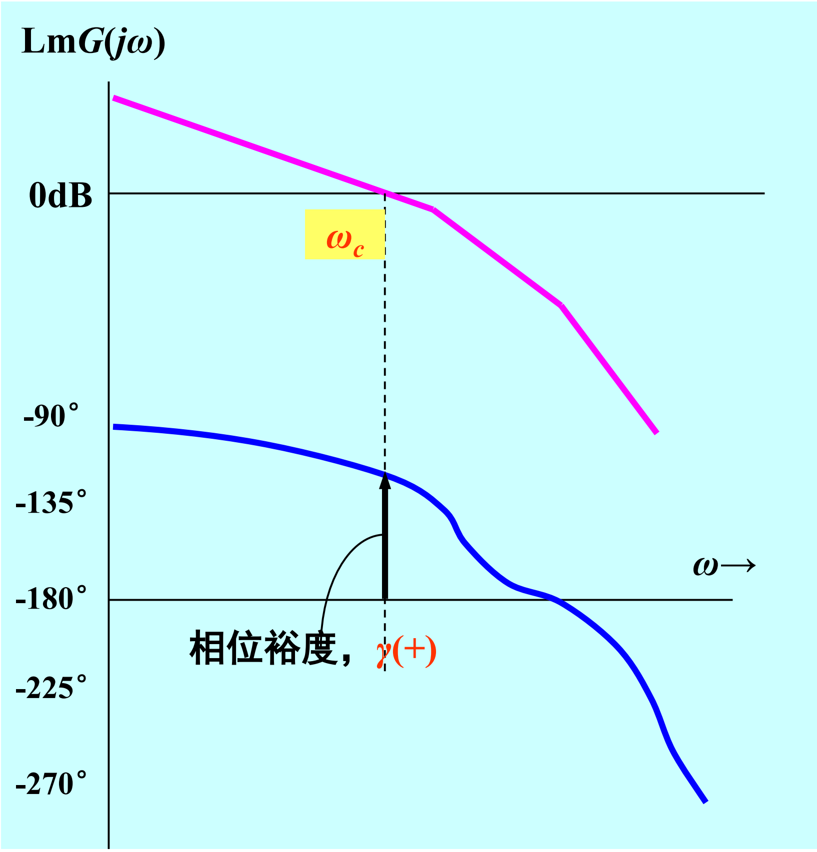
相位裕度等于180°加上截止频率处的负相位，用γ来表示， $\gamma=180°+\Phi$，其中$\angle G(j\omega_c)=\Phi$是负值。

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

对于稳定系统$\gamma=180^\circ+\Phi>0$



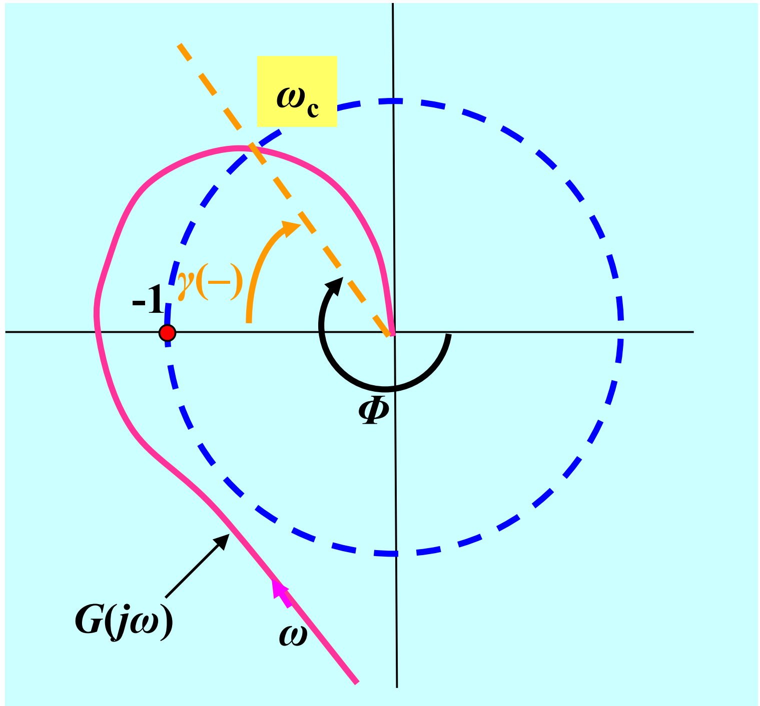
$G(j\omega)$的极坐标图



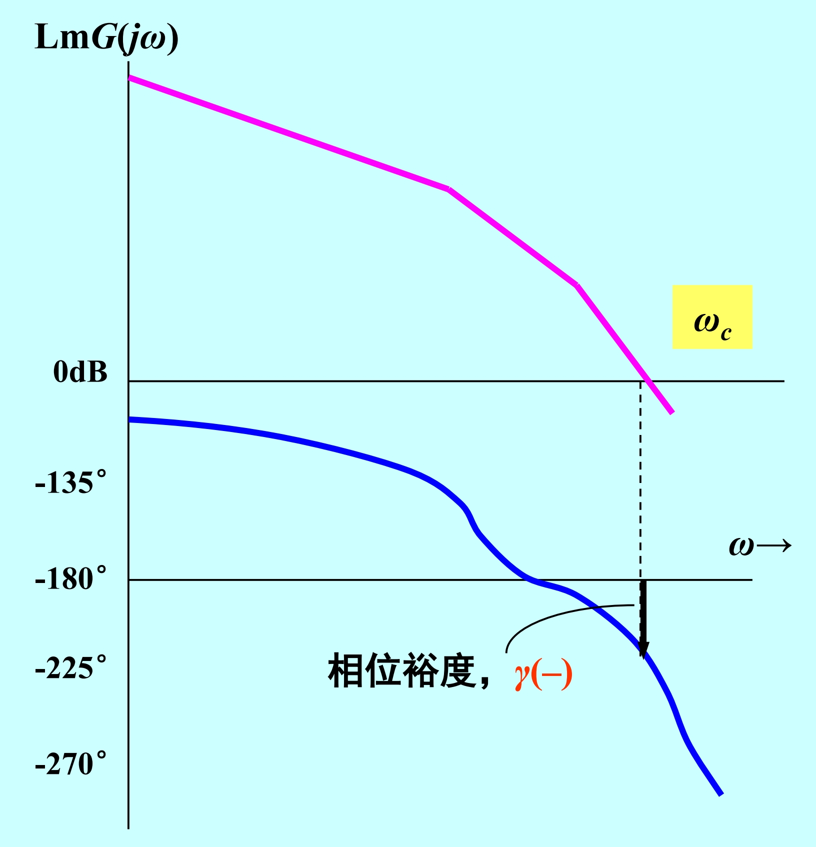
$G(j\omega)$的对数幅频曲线和相频曲线

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

对不稳定系统$\gamma=180^\circ+\Phi<0$



$G(j\omega)$的极坐标图



$G(j\omega)$的对数幅频曲线和相频曲线

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

对于闭环稳定系统，如果系统的开环相频特性再滞后相位裕度γ度，则系统将处于临界稳定状态。

滞后该角度将使得极坐标图穿越–1点。

对于最小相位系统来说，相位裕度为正，系统稳定，负的相位裕度表示系统是不稳定的。

相位裕度与系统阻尼比 ζ 有关，一般地，相位裕度在45° 到 60° 之间的系统响应能令人满意。

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

Phase crossover （穿越频率——相位临界点）

幅相曲线在该点处的相角是-180°。该点处的频率被称为穿越频率ω_x，也被称为幅值裕度频率。

Gain margin （幅值裕度）

对于闭环稳定系统，如果系统的开环幅频特性再增大幅值裕度h倍，则系统将处于临界稳定状态。可以用频率点ω_x处的传递函数来表示，即

$$\left|G(j\omega_x)\right| \cdot h = 1$$

在$G(j\omega)$极坐标图上，频率点 ω_x对应的幅值 $\left|G(j\omega_x)\right| = \dfrac{1}{h}$

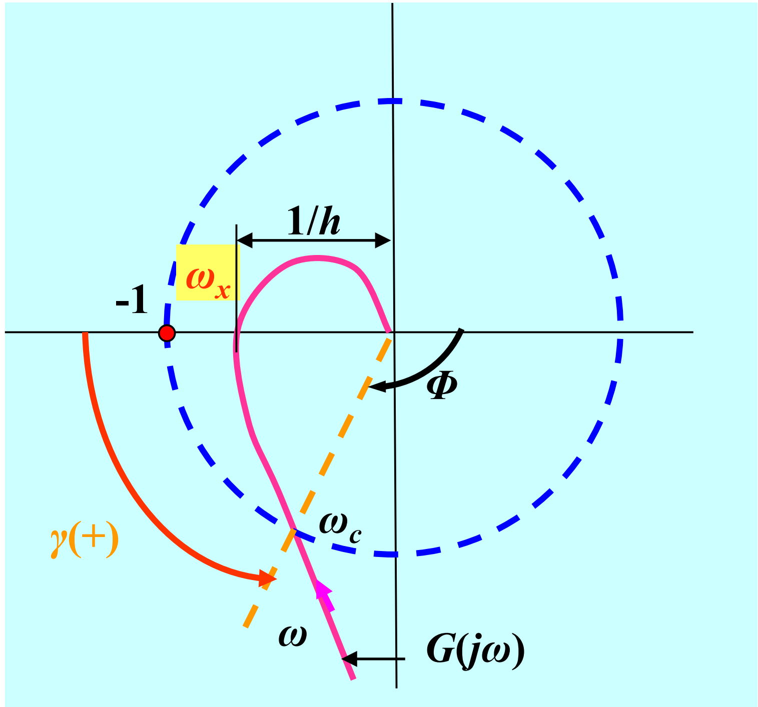
在对数幅频曲线上，$\mathrm{Lm}h = -\mathrm{Lm}\left|G(j\omega_x)\right|$

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

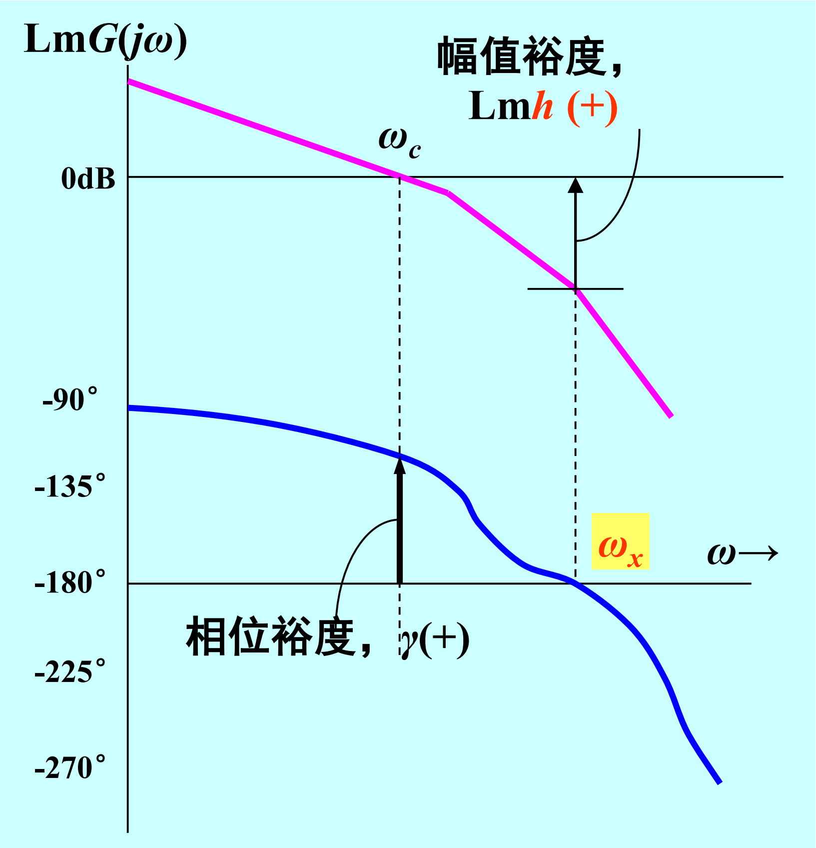
对于稳定系统

$1/h < 1,\ h > 1$

$$\mathrm{Lm}h = -\mathrm{Lm}\left|G(j\omega_x)\right| > 0$$



$G(j\omega)$的极坐标图

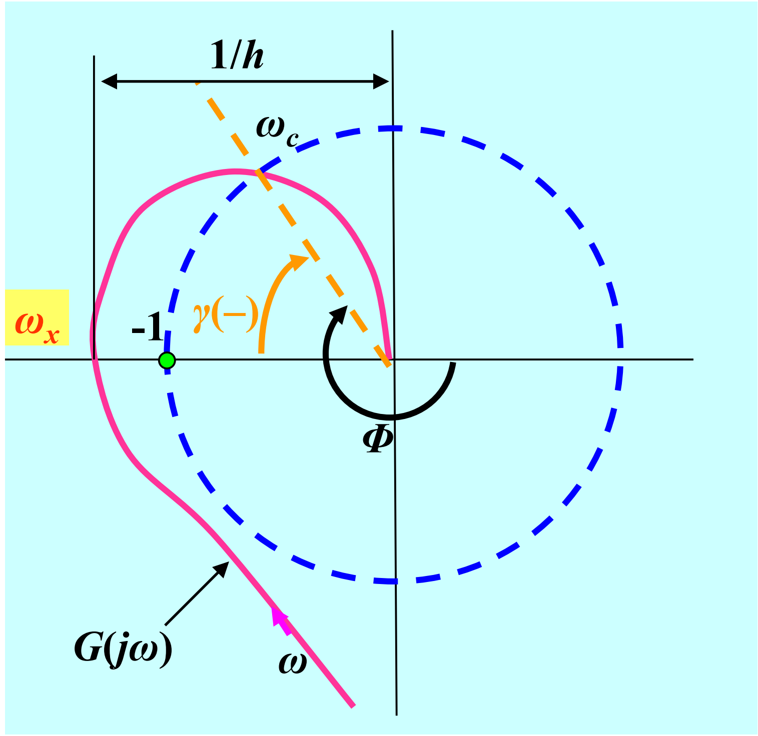


$G(j\omega)$的对数幅频曲线和相频曲线

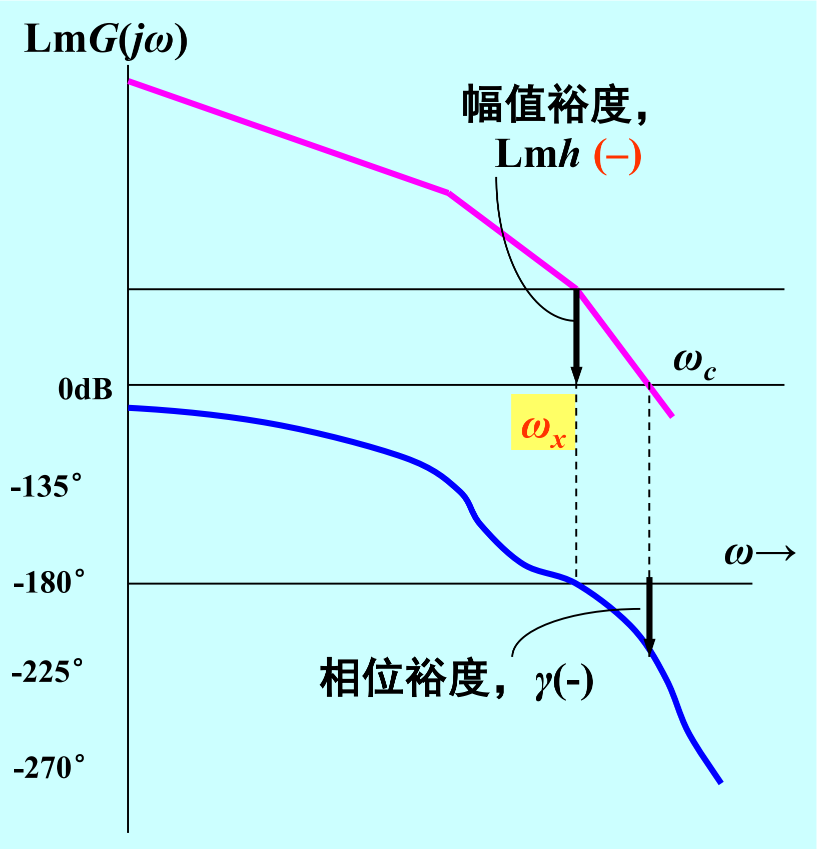
相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

对于不稳定系统 $1/h > 1,\ h < 1$

$$\mathrm{Lm}h = -\mathrm{Lm}\left|G(j\omega_x)\right| < 0$$



$G(j\omega)$的极坐标图



$G(j\omega)$的对数幅频曲线和相频曲线

相位裕度和幅值裕度

Gain crossover（截止频率——增益临界点）

$G(j\omega)$幅相曲线在幅值为1 [Lm$G(j\omega)$=0dB] 的点处的频率称为 截止频率ω_c 。

Phase margin angle（相位裕度）

相位裕度等于180°加上截止频率处的负相位，用γ来表示， $\gamma=180°+\Phi$，其中 $\angle G(j\omega_c)=\Phi$是负值。

Phase crossover （穿越频率——相位临界点）

幅相曲线在该点处的相角是-180°。该点处的频率被称为穿越频率ω_x，也被称为幅值裕度频率。

Gain margin （幅值裕度）

对于闭环稳定系统，如果系统的开环幅频特性再增大幅值裕度h倍，则系统将处于临界稳定状态。可以用频率点ω_x处的传递函数来表示，即 $|G(j\omega_x)|\cdot h=1$

在$G(j\omega)$极坐标图上，频率点 ω_x对应的幅值 $|G(j\omega_x)|=\dfrac{1}{h}$

在对数幅频曲线上， $\mathrm{Lm}h=-\mathrm{Lm}|G(j\omega_x)|$

相位裕度和幅值裕度的求解——解析法

求解系统相位裕度和幅值裕度的方法——解析法、极坐标图法和Bode图法。

（一） 解析法

根据系统的开环频率特性，由

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1 \qquad (0\le\omega_c\le+\infty)$$

和 $\gamma=\Phi(\omega_c)-(-180^0)=\Phi(\omega_c)+180^0$ 求出相位裕度。

由 $\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x)=-180^0 \qquad (0\le\omega_x\le+\infty)$

$$h=\frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|}$$

或 $20\log h=-20\log|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|$ 求出幅值裕度。

相位裕度和幅值裕度的求解——解析法

例6-21 已知最小相位系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{40}{s(s^2+2s+25)}$

试求出该系统的幅值裕度和相位裕度。

解：系统的开环频率特性为 $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{40}{j\omega(25-\omega^2+j2\omega)}$

其幅频特性和相频特性分别是

$$|G(j\omega)H(j\omega)|=\frac{1}{\omega}\frac{40}{\sqrt{(25-\omega^2)^2+4\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=\begin{cases}-90^0-arctg\dfrac{2\omega}{25-\omega^2} & \omega\le 5\\ -270^0+arctg\dfrac{2\omega}{\omega^2-25} & \omega>5\end{cases}$$

相位裕度和幅值裕度的求解——解析法

令 $|G(j\omega)H(j\omega)|=1$，得 $\omega_c=1.82$

$$\gamma=180°+\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)=90°-arctg\frac{2\times1.82}{25-1.82^2}=80.5°$$

令 $\angle G(j\omega)H(j\omega)=-180°$，得 $\omega_x=5$

$$h=\frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|}=1.25$$

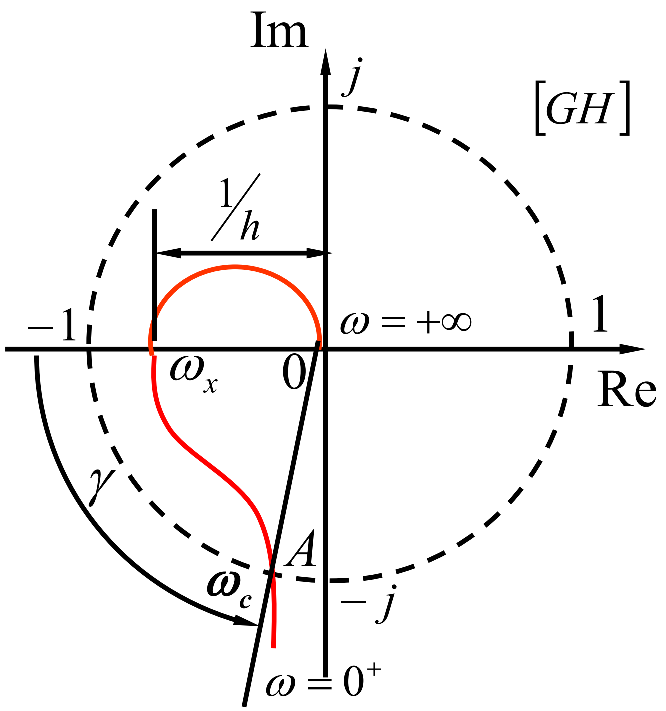
或 $h(\mathrm{dB})=20\log1.25=1.94(\mathrm{dB})$

即：该系统具有1.94dB的幅值裕度，80.5°的相位裕度。

相位裕度和幅值裕度的求解——极坐标图法

（二）极坐标图法

在GH平面上作出系统的开环频率特性的极坐标图，并作一单位圆，由单位圆与开环频率特性的交点A与坐标原点的连线与负实轴的夹角求出相位裕度γ；由开环频率特性与负轴交点处的幅值$|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|$ 的倒数得到幅值裕度h。



例6-21 的极坐标图

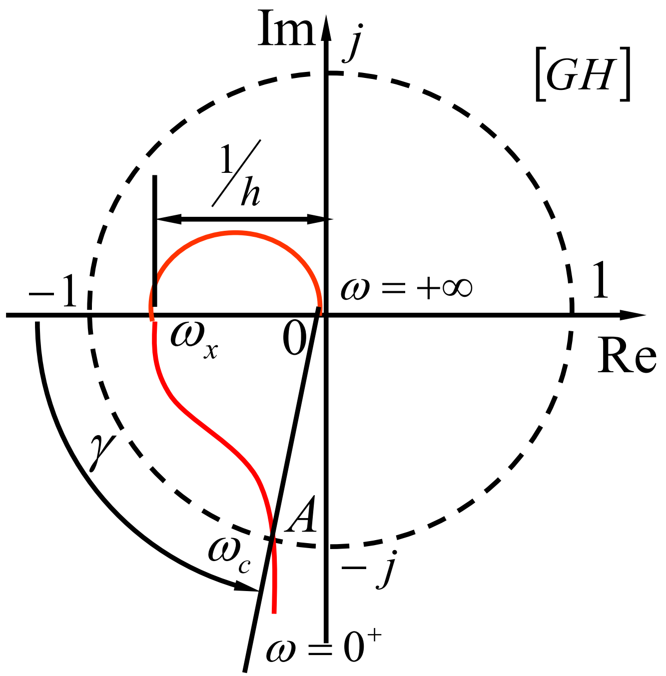
相位裕度和幅值裕度的求解——极坐标图法

在例6-21中，先作出系统的开环频率特性曲线如图所示，作单位圆交开环频率特性曲线于A点，连接 OA，射线OA与负实轴的夹角即为系统的相位裕度 $\gamma \approx 80°$ 。开环频率特性曲线与负实轴的交点坐标为 (0.8, j0)

由此得到系统的幅值裕度：

$$h = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

注意：作图法，首先画出系统的极坐标图，然后画单位圆，再由定义读图。



例6-21 的极坐标图

相位裕度和幅值裕度的求解——Bode图法

（三）Bode图法

1) 画出系统的Bode图，由开环对数幅频特性与零分贝线（即 ω 轴）的交点频率 ω_c ，求出对应的相频特性与–180º 线的相移量，即为相位裕度γ 。

2) 当 ω_c 对应的相频特性位于 –180º线上方时，$\gamma > 0°$；反之，当 ω_c 对应的相频特性位于–180º 线下方时，$\gamma < 0°$ 。

3) 然后，由相频率特性与–180º线的交点频率 ω_x ，求出对应幅频特性与零分贝线的差值，即为幅值裕度 h 的分贝数。当 ω_x 对应的幅频特性位于零分贝线下方时，$h > 0\text{dB}$ 。反之，当 ω_x 对应的幅频特性位于零分贝线上方，$h < 0\text{dB}$ 。

相位裕度和幅值裕度的求解——Bode图法

例6-21的Bode图如右图所示。

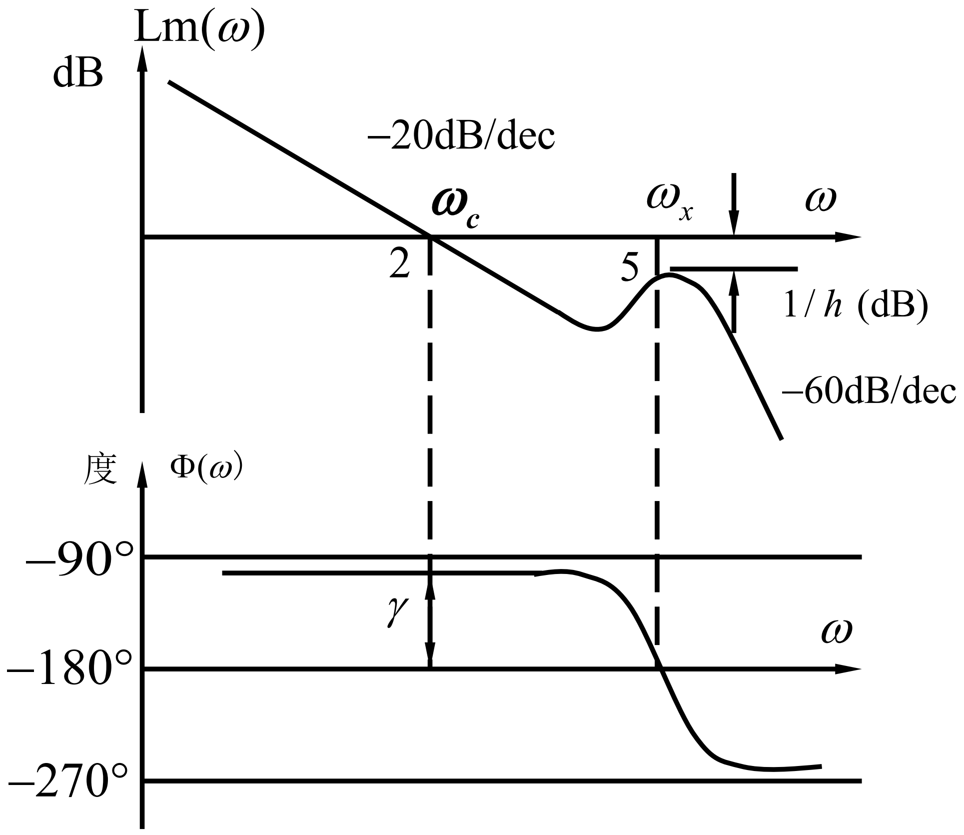
从图中，可直接得到

截止频率： $\omega_c \approx 2$

穿越频率： $\omega_x = 5$

相位裕度： $\gamma \approx 80°$

幅值裕度： $h = 2\text{dB}$



例6-21 Bode图

相位裕度和幅值裕度的求解

解析法　　比较精确，但计算步骤复杂，而且对于三阶以上的高阶系统，用解析法相当困难。

图解法　　以极坐标图和Bode图为基础的图解法，避免了繁锁的计算，具有简便、直观的优点，对于高阶系统尤为方便。不过图解法是一种近似方法，所得结果有一定误差，误差的大小视作图的准确性而定。

Bode图法和极坐标法　虽然都是图解法，但前者不仅可直接从Bode图上获得相位裕度 γ 和幅值裕度 h，而且还可直接得到相应的截止频率 ω_c 和穿越频率 ω_x。同时Bode图较极坐标图方便，因此在工程实践中得到更为广泛的应用。可以采用计算机辅助绘制。

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

注意：

- 对于非最小相位系统，不能简单地用系统的相位裕度和幅值裕度的大小来判断系统的稳定性。

- 对于最小相位系统以相位裕度 $\gamma > 0$ 和幅值裕度 $h > 1$（ 或 h (dB)>0）作为系统稳定的充要条件是可靠的。

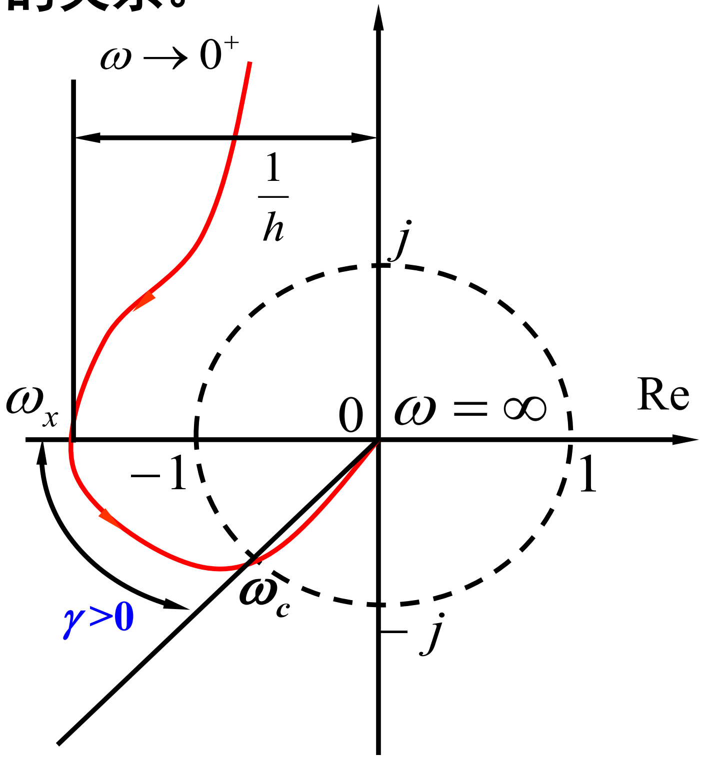
相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

例6-22 已知**非最小相位系统**的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(\tau s+1)}{s\ (Ts-1)}$

试分析该系统的稳定性及其与系统稳定裕度之间的关系。

解 在一定的K值条件下，系统的开环频率特性如右图所示。由于该系统有一个位于S右半部平面的开环极点 $P_R=1$ ， Nyquist曲线逆时针包围(-1, j0) 点一周（N=1），根据Nyquist判据，该系统为稳定系统。

但由图解法求出该系统的相位裕度$\gamma>0$，幅值裕度 $h<1$，这说明以相位裕度$\gamma>0$ 和幅值裕度 $h>1$ 作为判别非最小相位系统稳定性的依据是不可靠的。



例6-22 极坐标图

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

对于开环最小相位的系统，当幅值裕度用分贝（decibels）来表示时，大于零（为正）表示系统稳定（即幅值裕度数字上大于1），一个负的幅值裕度表示系统不稳定。

系统阻尼比ζ 同样与幅值裕度有关，但是相位裕度比幅值裕度能更好地估计阻尼比、超调。

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

- 对数幅频渐近特性曲线与传递函数的每一典型环节有关。例如，$(1+j\omega)^{-1}$ 环节在高频段的斜率为–20dB/decade 。

- 在任意频率点处传递函数的相角与对数幅频渐近特性曲线的斜率有关。例如，斜率–20dB/decade 的相角为 -90° 。

- 通过观察对数幅频渐近特性曲线。有可能估计出相位的近似值。斜率变化距离所求解的频率点越远，对该频率点处的相位影响越小。

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

- 最小相位系统稳定，则相角裕度为正，即截止频率处的相角 [$LmG(j\omega)=0$] 必须大于-180°。这就要求对对数幅频曲线上截止频率点处的斜率做一个限制。若相邻的转折频率相距较远，该点处的斜率必须大于 –40dB/decade。 一般斜率为 –20dB/decade是比较合适。

- 与根轨迹法类似，对数幅频曲线和相频曲线可以用于系统设计。

相位裕度和幅值裕度及与稳定性的关系

例如：

- 可以通过调整Lm曲线在截止频率处的斜率使系统具有45º 到 60º的相位裕度。
- 曲线的低频部分的形状决定了系统的型别和稳态精度。
- 系统的型别和增益决定了误差系数，进而决定了稳态误差。
- 截止频率ω_c 给出了系统响应速度的定性指标。

The End