第八章 状态空间模型分析与设计

吴俊

junwuapc@zju.edu.cn

内容

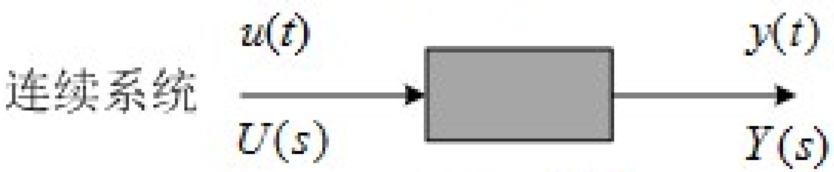
- 回顾与简介
- 状态空间模型及求解
- 能控性和能观性
- 线性变换与标准型
- **SISO**系统状态反馈
- 状态反馈**:** 稳态误差分析
- **SISO**系统状态观测器
- …………..

回顾与简介

1. 状态空间基本概念

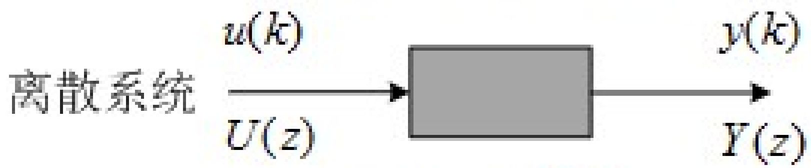
- **Input(输入)**：由外部施加给系统的全部激励，输入变量不属内部变量
- **Output(输出)**：能从外部量测到的来自系统的信息

$$y(t)=g(t)*u(t)$$



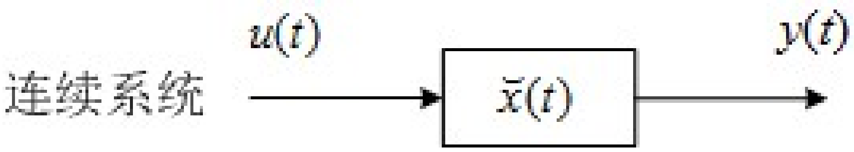
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

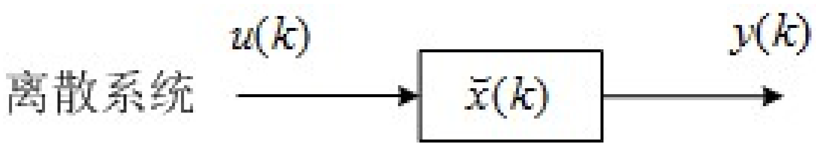
$$y(k)=g(k)*u(k)$$



$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}$$

- **State(状态)**





回顾与简介

1. 状态空间基本概念

- 系统变量分为输入变量和内部变量

- 状态变量组：

  a) 一组内部变量

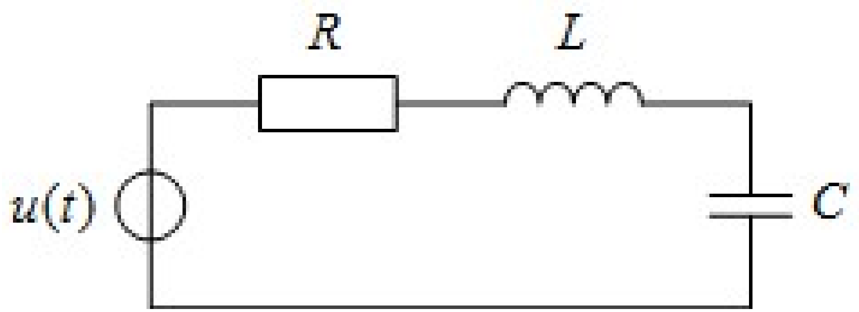
  b) 能完全表征系统在输入作用下的时间域行为

  c) 变量数目最少

回顾与简介

1. 状态空间基本概念

- 例



全部电气变量: $u, i, u_R, i_R, u_L, i_L, u_C, i_C$

其中,u为输入变量

$i, u_R, i_R, u_L, i_L, u_C$和$i_C$属内部变量

$\forall t \in [0,\infty)$,有如下静态约束: $u(t)=u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)$　　$u_R(t)=i_R(t)R$

$i(t)=i_R(t), i(t)=i_L(t), i(t)=i_C(t)$　　7个变量,5个约束

可取$\{u_C, i_L\}$为状态变量组,$\forall t \in [0,\infty)$,由$u_C(t)$、$i_L(t)$和$u(t)$可知系统任何变量的值

此系统的状态变量组只能由2个状态变量构成，不能少，也不能多

也可取$\{(u_C+i_L)/2, (u_C-i_L)/2\}$为状态变量组

- 状态变量组具有非唯一性。状态变量不一定是物理量，可以是纯数学量

回顾与简介

1. 状态空间基本概念

- 状态：基于状态变量组$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$形成的n维列向量

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{或} x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}，\text{也称状态向量}$$

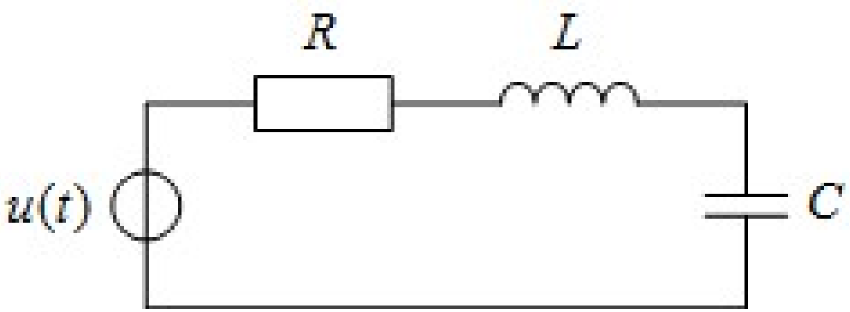
系统的阶数为n

- **State space(状态空间)**：以状态变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为坐标轴构成的 **n** 维空间。系统在时刻**t**的状态 $\boldsymbol{x}(\mathbf{t})$ 是状态空间中的一个点。随时间的变化，$\boldsymbol{x}(t)$ 在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨迹**(state trajectory)**。

回顾与简介

2. 系统的状态空间模型

- 例



考虑动态约束:$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

代入$i_C = i_L$

$$u_L = u - i_L R - u_C$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

关于状态的一阶微分方程组

描述系统的动态特性

若取输出 $y = u + u_R$

则 $y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + u$

代数方程

输出是状态和输入的静态组合

回顾与简介

2. 系统的状态空间模型

- **State variables representation (状态空间表达式):**

将反映系统动态过程的**n**阶微分方程，转换成关于状态的一阶微分方程组的形式，这就是状态方程。

将输出表达为输入和状态的静态组合的方程称输出方程

状态方程与输出方程一起构成描述系统的状态空间表达式（状态空间模型）。

回顾与简介

2. 系统的状态空间模型

- **Continuous-time system (连续时间系统)**：***x*(t)** 的定义域为实轴上的连续区间 **[t_0 , ∞)**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

- **Discrete-time system (离散时间系统)**： ***x*(t_k)** 的定义域为实轴上的离散集合**{t_0, t_1, t_2 , …}**

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k), t_k)$$
$$y(t_{k+1}) = g(x(t_k), u(t_k), t_k)$$

- **Linear system（线性系统）：**状态空间表达式中，**f** 和 **g** 均为线性函数**,** 若它们与时间无关，则称是线性时不变系统（**Linear time-invariable system**）。

回顾与简介

2. 系统的状态空间模型

- 线性时不变系统的状态空间表达式

Continuous-time system	$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$	State equation
	$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)$	Output equation
Discrete-time system	$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$	
	$y(k) = Cx(k) + Du(k)$	

- 式中， $x(t), \dot{x}(t)$ 分别为状态向量及其一阶导数,**u(t),y(t)**分别为系统的输入变量和输出变量, **A, B, C,D**分别为具有一定维数的系统矩阵。

回顾与简介

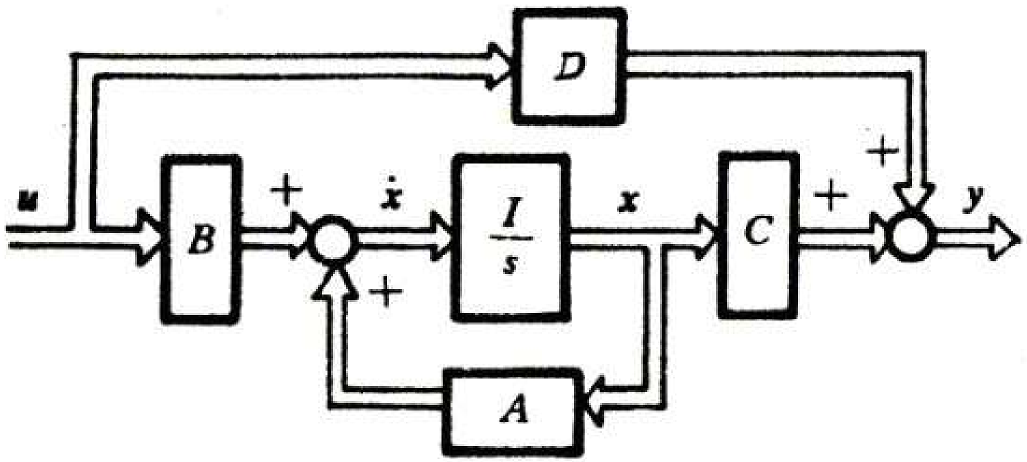
2. 系统的状态空间模型

状态空间模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$ 状态方程

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)$$ 输出方程

状态空间模型方框图



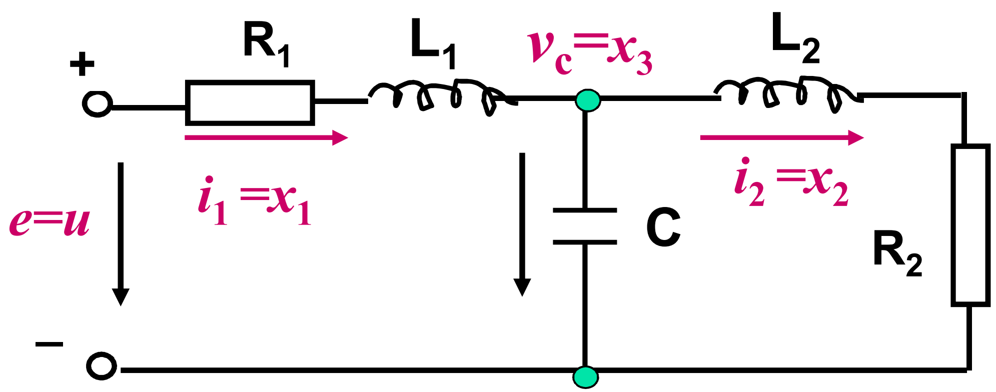
传递函数模型

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

回顾与简介

2. 系统的状态空间模型: Ex.1: Circuit

- 列写如图 所示状态方程, 其中 i_2 是系统输出. 定义状态变量为 $x_1=i_1$, $x_2=i_2$ 和 $x_3=v_c$. 则可以写出2个回路方程和1个节点方程.



回路 1	$R_1x_1+L_1\dot{x}_1+x_3=u$
回路 2	$-x_3+L_2\dot{x}_2+R_2x_2=0$
节点	$-x_1+x_2+C\dot{x}_3=0$

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1}\\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=[0\quad 1\quad 0]\mathbf{x}$$

回顾与简介

3. 简介

- 经典控制理论：

描述系统的 **I/O** 特性

SISO(Single Input Single Output)线性时不变系统的分析、设计

计算调试方便

物理意义明显直观

- **SISO**设计方法不能满足 **MIMO(Multiple Input Multiple Output)**系统
- 人们越来越多关注系统的内部特性
- 非线性系统
- 时变系统

回顾与简介

3. 简介

➤ 现代控制理论：

以状态空间表达式描述系统，揭示系统的内部特性与规律

MIMO非线性时变系统的分析、设计

计算调试复杂

抽象变量不直观

➤**1960**年：在第一届 **IFAC** 大会（莫斯科）

奠定了现代控制理论的基础

（1）**Kalman** “论控制系统的一般理论”

（2）**Pontryagin** “最优过程控制理论中的极大值原理”

（3）**Bellman** “动态规划和反馈控制”

内容

- ✓ 回顾与简介
- ✓ 状态空间模型及求解
- ✓ 能控性和能观性
- ✓ 线性变换与标准型
- ✓ **SISO**系统状态反馈
- ✓ 状态反馈**:** 稳态误差分析
- ✓ **SISO**系统状态观测器
- ✓ …………..

状态空间模型及求解

1. 由传递函数建立状态空间表达式

➢ 能控标准型和能观标准型：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$=b_n+\frac{(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)s^{n-1}+\cdots+(b_1-a_1b_n)s+(b_0-a_0b_n)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)\\ y(t)=cx(t)+du(t)\end{cases}$$

能控标准型

友矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}$ $\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$

$$c=\begin{bmatrix}b_0-a_0b_n & b_1-a_1b_n & \cdots & b_{n-1}-a_{n-1}b_n\end{bmatrix}$$

$$d=b_n$$

能观标准型

$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}$ $\quad b=\begin{bmatrix}b_0-a_0b_n\\ b_1-a_1b_n\\ b_2-a_2b_n\\ \vdots\\ b_{n-1}-a_{n-1}b_n\end{bmatrix}$

$$c=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$d=b_n$$

状态空间模型及对

1. 由传递函数建立状

相变量（phase variable）

phase: stage of development

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_m s^m+c_{m-1}s^{m-1}+\cdots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0},m<n,c_m\neq 0$$

$$\frac{Y(s)}{c_m s^m+c_{m-1}s^{m-1}+\cdots+c_1 s+c_0}=\frac{U(s)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$ $=X(s)$相变量

将相变量及其各阶导数取为状态变量

$$x_1(t)=L^{-1}[X(s)],x_2(t)=\dot{x}_1(t),x_3(t)=\ddot{x}_1(t),\cdots,x_n(t)=x_1^{(n-1)}(t)$$

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\dot{x}_2(t)=x_3(t),\cdots,\dot{x}_{n-1}(t)=x_n(t)$$

$$s^nX(s)+a_{n-1}s^{n-1}X(s)+\cdots+a_1 sX(s)+a_0X(s)=U(s)$$

$$\dot{x}_n(t)=-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-\cdots-a_{n-1}x_n(t)+u(t)$$

$$Y(s)=c_m s^mX(s)+c_{m-1}s^{m-1}X(s)+\cdots+c_1 sX(s)+c_0X(s)$$

$$y(t)=c_0x_1(t)+c_1x_2(t)+\cdots+c_mx_{m+1}(t)$$

$$y=\begin{bmatrix}c_0 & \cdots & c_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{m+1}\\ x_{m+2}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

相变量是能控标准型的状态变量

状态空间模型及求解

1. 由传递函数建立状态空间表达式

- 正则标准型(并联分解）：适用于传递函数为部分分式形式

  - 特征方程无重根时，系统矩阵A为对角阵
  - 特征方程有重根时，系统矩阵A为约当阵

- 串联分解：适用于传递函数分子分母均为因式分解形式

2. 连续系统状态方程求解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\beta)Bu(t-\beta)\mathrm{d}\beta$$

Thanks !