自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第五章 Chapter 5

根轨迹分析法 (Root Locus)

第五章主要内容

- 根轨迹概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

根轨迹绘制方法

- 根轨迹方法是一种图示法，当增益由0变化到∞时，采用根轨迹方法很容易确定闭环特征方程根的位置
- 当K>0和K<0时，根轨迹的幅值条件和相角条件已经确定，那么，如何来绘制根轨迹呢？

像例5-1一样逐点计算特征根，然后绘制根轨迹？

- 绘制根轨迹有一系列规则，按规则绘制可事半功倍

规则依据： $\Delta(s)=1+G(s)H(s)=0$

幅值条件： $|G(s)H(s)|=1$

相角条件（K>0）： $\angle G(s)H(s)=(1+2h)180°$

根轨迹（K>0）——绘制法则1

法则1：根轨迹的起点和终点

$$G(s)H(s)=\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)\cdots(s-p_u)}=-1$$

- 满足幅值条件的根轨迹增益 (K) 具有以下形式：

（1）若 $n=w$（开环极点个数等于开环零点个数），则：

$$K=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s-z_j|}$$

- 当 $s=p_i$ (开环极点)，根轨迹增益 K 为0。——$K=0$
- 当 $s=z_j$ (开环零点)，根轨迹增益K 趋于无穷大。——$K=\infty$

根轨迹（K>0）——绘制法则1

法则1：根轨迹的起点和终点

（2）若 $n>w$（开环传递函数分母阶次高于分子阶次），则：

$$K=\lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s-z_j|}=\lim_{s\to\infty}|s|^{n-w}\to\infty$$

- 因此，当$n>w$，除了开环零点，$s=\infty$ 也使得 K趋于无穷大，等效于开环零点 ($n-w$个位于无穷远处的零点，即无限零点)。

（3）若 $n<w$（开环传递函数分子阶次高于分母阶次），则：

$$\frac{1}{K}=\lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{w}|s-z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}=\lim_{s\to\infty}|s|^{w-n}\to\infty$$

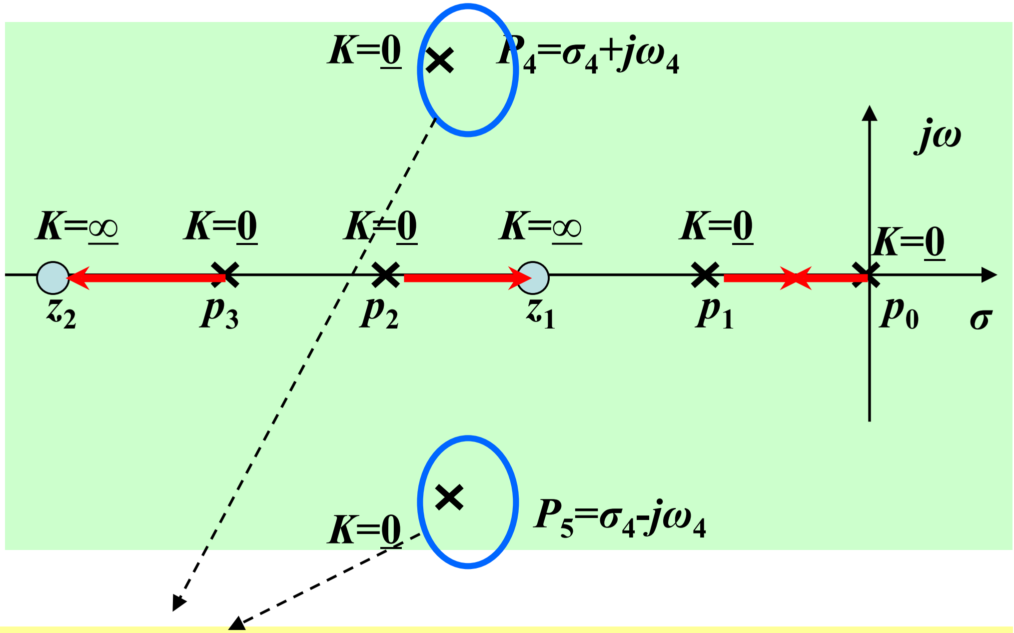
- 除了开环极点，$s=\infty$ 也可使得 $K\to 0$，因此，等价于 $w-n$ 个无限极点 (位于无穷远处)。

根轨迹（K>0）——绘制法则1

法则1：根轨迹的起点和终点

结论：

根轨迹起始于(K=0)开环极点（有限极点和无限极点），终止于开环零点(有限零点和无限零点)。



1）实轴上根轨迹？

2）复极点如何开始绘制，又如何结束？

根轨迹（K>0）——绘制法则2

法则2：根轨迹的分支、对称性和连续性

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \qquad G(s)H(s) = \frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)\cdots(s-p_u)}$$

- 特征方程 $\Delta(s)$ 的阶次是由开环传递函数的零点数和极点数决定。
- 理论上，特征方程$\Delta(s)$ 的阶次 $n=\max(m+u, w)$，即特征方程有n个根(但实际上仅 $m+u \geq w$ 是物理可实现的)。
- 当根轨迹增益由0到∞变化时，每一条根轨迹都是连续的曲线。那么 n 个根就会在S平面产生 n 条根轨迹分支。

结论：(1)根轨迹的分支数等于开环传递函数零点数和极点数中的最大数。

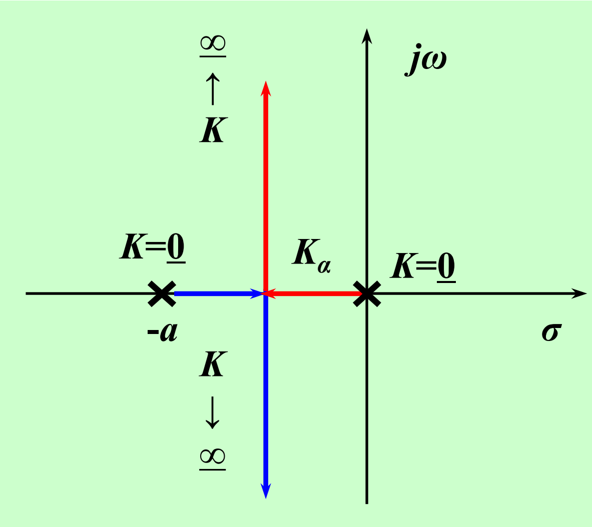
根轨迹（K>0）——绘制法则2

法则2：根轨迹的分支、对称性和连续性

结论：(2)对称性：由于闭环特征方程的根只有实根和复根两种，实根位于实轴上，复根必为共轭，**因此根轨迹关于实轴对称。**

例：

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+a)}$$



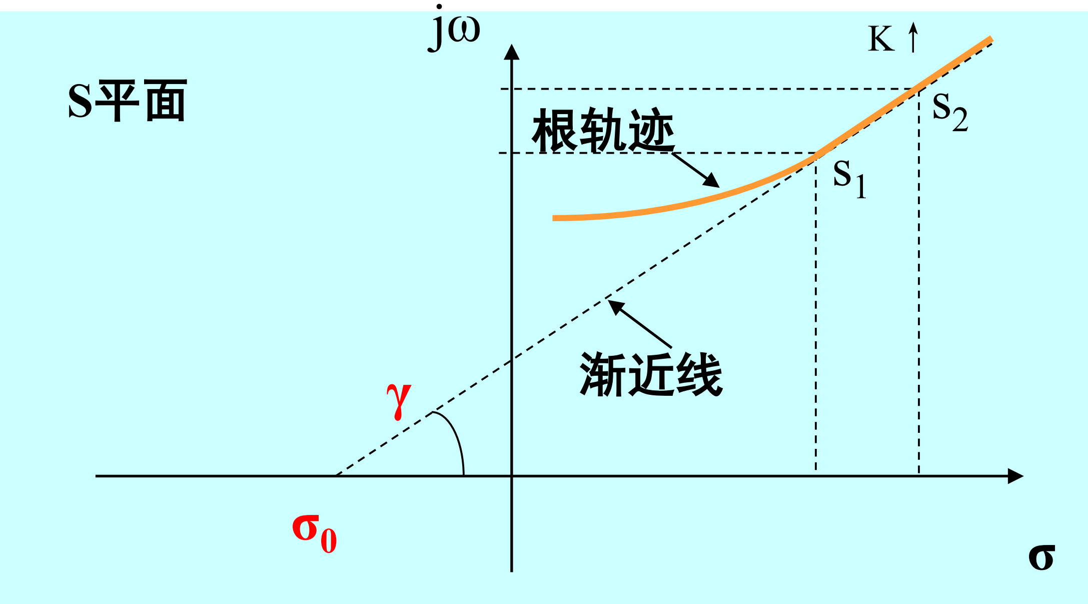
连续性：

结论：(3)连续性：特征方程中的系数是根轨迹增益K^*的函数，K^*连续变化——>则系数连续变化——>特征根连续变化——>**根轨迹连续。**

根轨迹（K>0）——绘制法则3

法则3：根轨迹的渐近线 ($s \to \infty$)

渐近线——当s取很大的值（$\to\infty$）时，各条根轨迹分支的近似线



$$s_1 = |s_1| \angle \gamma$$

$$s_2 = |s_2| \angle \gamma$$

$\vdots$

问题：

如何绘制渐近线？

根轨迹（K>0）——绘制法则3

法则3：根轨迹的渐近线 $(s \to \infty)$

$$G(s)H(s)=\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)\cdots(s-p_u)}=-1$$

当s趋于无穷时，$G(s)H(s)$ 取极限并满足特征方程$1+G(s)H(s)=0$：

$$\lim_{s\to\infty}G(s)H(s)=\lim_{s\to\infty}K\frac{\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=\lim_{s\to\infty}\frac{K}{s^{n-w}}=-1$$

因此，当$s\to\infty$

$$-K=s^{n-w}$$

幅值条件：

$$|-K|=|s^{n-w}|$$

相角条件：

$$\angle(-K)=\angle s^{n-w}=(n-w)\angle s=(1+2h)180°$$

$$\gamma=\angle s=\frac{(1+2h)180°}{n-w}\qquad as\quad s\to\infty$$

根轨迹（K>0）——绘制法则3

法则3：根轨迹的渐近线 $(s \to \infty)$

结论：有n-w 条根轨迹的渐近线，渐近线与实轴的夹角满足：

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^{\circ}}{[\text{number of Poles of } G(s)H(s)] - [\text{number of Zeros of } G(s)H(s)]}$$

渐近线与实轴的交点σ_0 满足：

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(p_i) - \sum_{j=1}^{w} \mathrm{Re}(z_j)}{n-w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{w} z_j}{n-w}$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-5： 开环传递函数$G(s)H(s)$如下，绘制根轨迹的渐近线

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

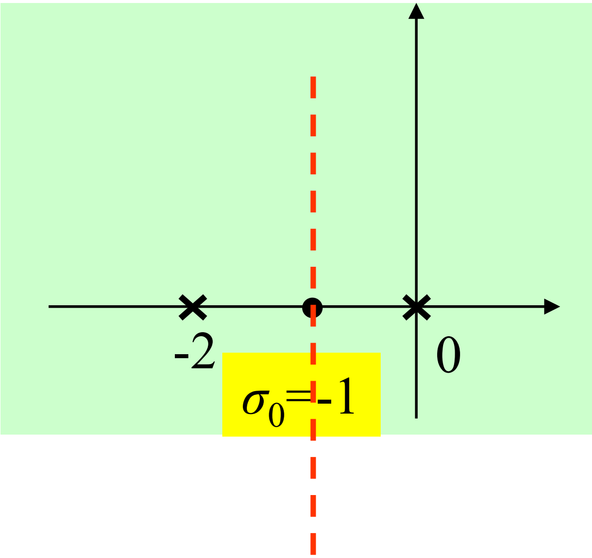
开环极点： $n=2,\quad p_1=0,\quad p_2=-2$

开环零点： $w=0$

渐近线：

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\270^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{-2+0}{2}=-1$$



$$\gamma=\angle s=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}\qquad as\quad s\to\infty$$

$$\sigma_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(p_i)-\sum_{j=1}^{w}\mathrm{Re}(z_j)}{n-w}$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-6： 开环传递函数$G(s)H(s)$如下，绘制根轨迹的渐近线

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

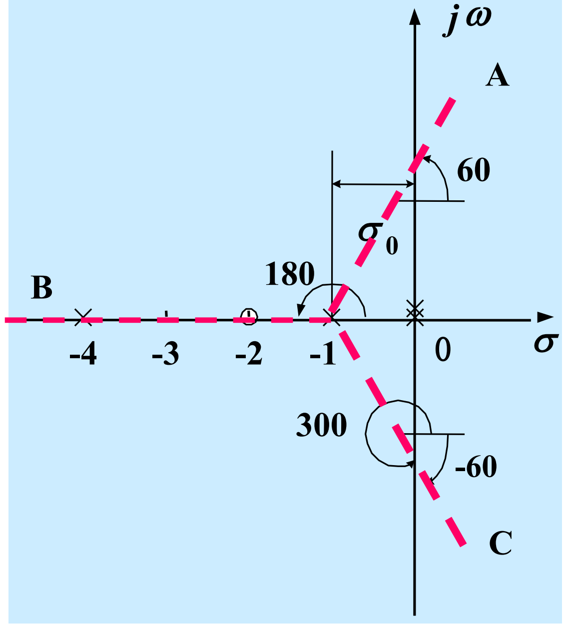
开环极点： $n=4,\quad p_{1,2}=0,\quad p_3=-1,\quad p_4=-4$

开环零点： $w=1, z_1=-2$

渐近线：

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{3}=\begin{cases}60^\circ\\180^\circ\\-60^\circ\end{cases}$$

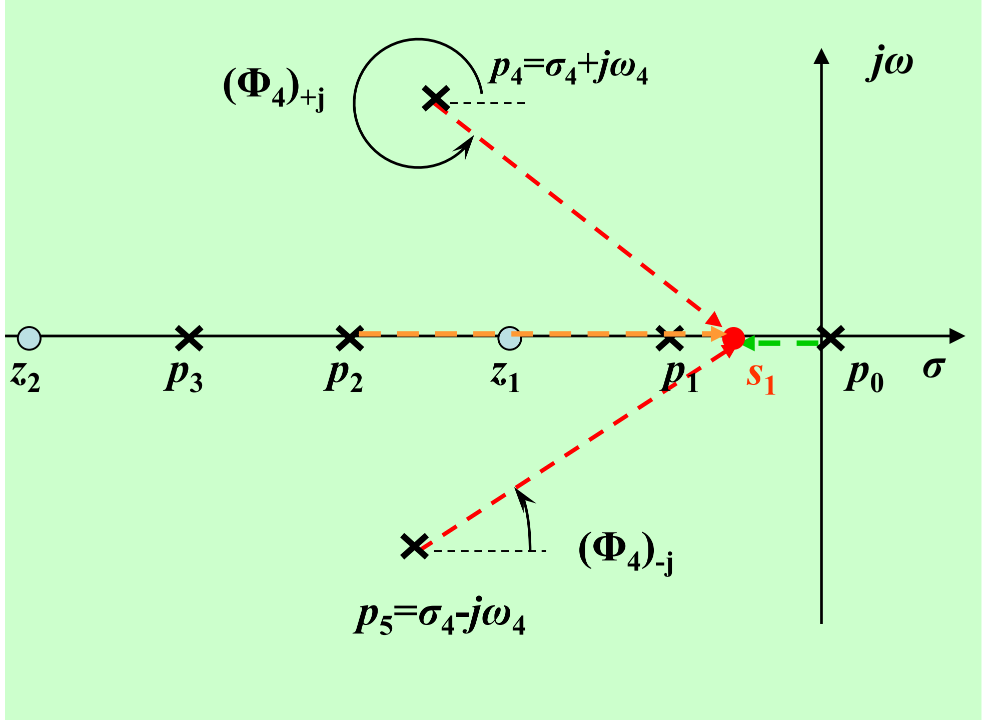
$$\sigma_0=\frac{-1-4+0+0+2}{3}=-1$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则4

规则4：实轴上的根轨迹

实轴上哪一区域是根轨迹？ 对于实轴上的某一测试点（如 s_1）：



- 该点左侧实数零、极点到该点的向量相角为0 如

$$\angle\left|s_1 - z_i(p_j)_l\right| = 0$$

- 复数共轭零、极点到该点的相角和为360°。

- 该点右侧实数零、极点到该点的向量相角为180°。

$$\angle\left|s_1 - z_i(p_j)_r\right| = 180^\circ$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则4

规则4：实轴上的根轨迹

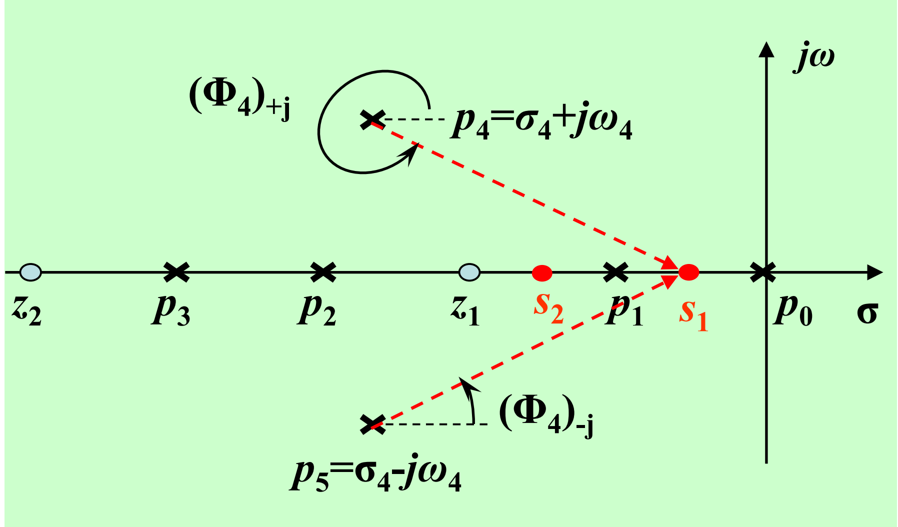
$G(s)H(s)$ 各零极点到点 s_1 的相角：

$$(\psi_1+\psi_2)-\left(\phi_0+\phi_1+\phi_2+\phi_3+(\phi_4)_{+j}+(\phi_4)_{-j}\right)=(1+2h)180^\circ$$

$$0^\circ+0^\circ-(180^\circ+0^\circ+0^\circ+0^\circ+360^\circ)=(1+2h)180^\circ$$

因此 s_1 是根轨迹上的一点。

同样地，可以看出s_2不是根轨迹上的点。



根轨迹（K>0 ）——绘制法则4

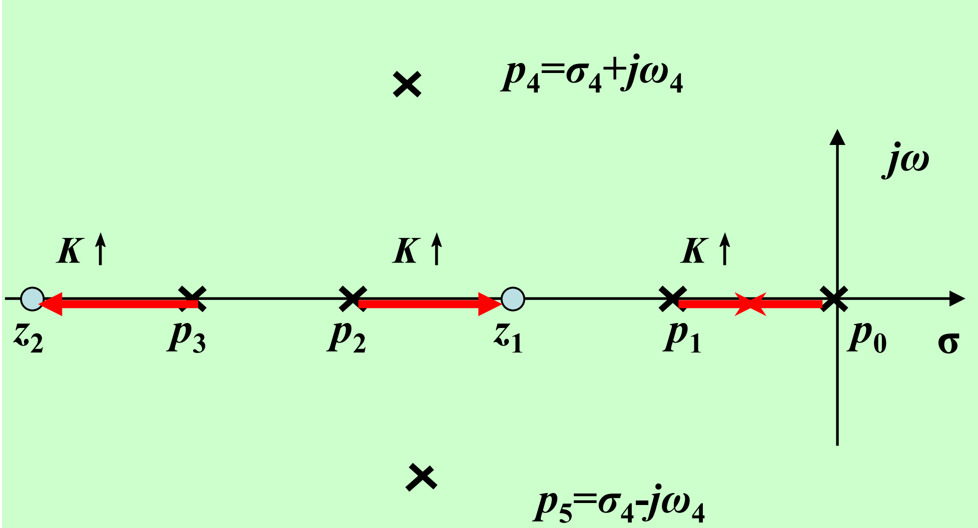
规则4：实轴上的根轨迹

结论-1：

点s左侧的实数零极点数以及复数共轭零、极点数对相角条件（180的奇数倍）没有影响。

结论-2：

若实轴上的搜索点s右侧实数零极点数是奇数，则该点在根轨迹上。

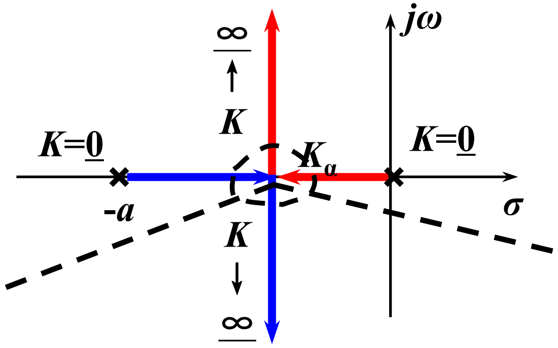


根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

两条或两条以上根轨迹分支在S平面相遇又立即分开的点，称为根轨迹的分离点。常见的是位于实轴上的两条根轨迹分支的分离点。

$$G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$$



如何获取这一点?

定义（实轴上的分离点/会合点）：

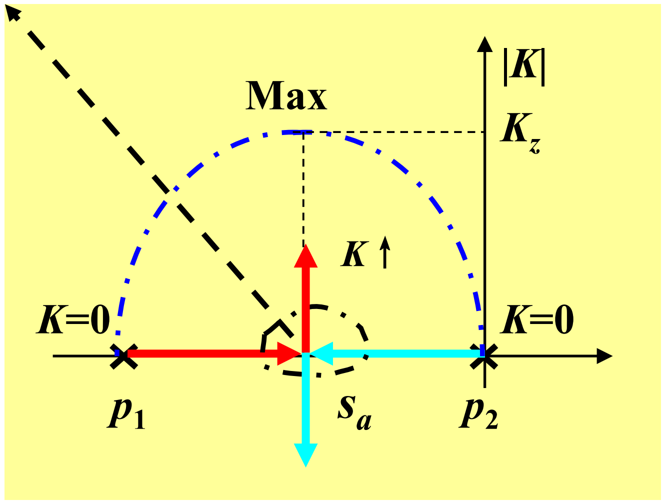
分离点——如果实轴上两个极点之间有根轨迹分支，则必然有一分离点，使得两条实轴上的根轨迹在该点分离，进入S平面到达零点或无穷远处。

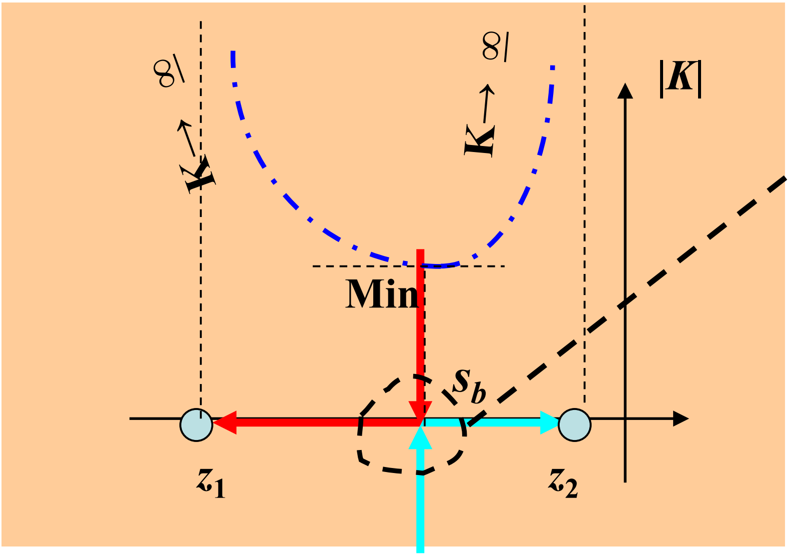
会合点——对于实轴上两个有限零点或一个有限零点和一个无限零点，根轨迹分支从S平面会合至该点后进入实轴。

根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

分离点





会合点

- 对于分离点s_a，对应的根轨迹增益 K_z 大于实轴上 s_a 两侧的任意点的K。
- 对于会合点s_b，在两个零点之间根轨迹增益K（在实轴上）是最小值。

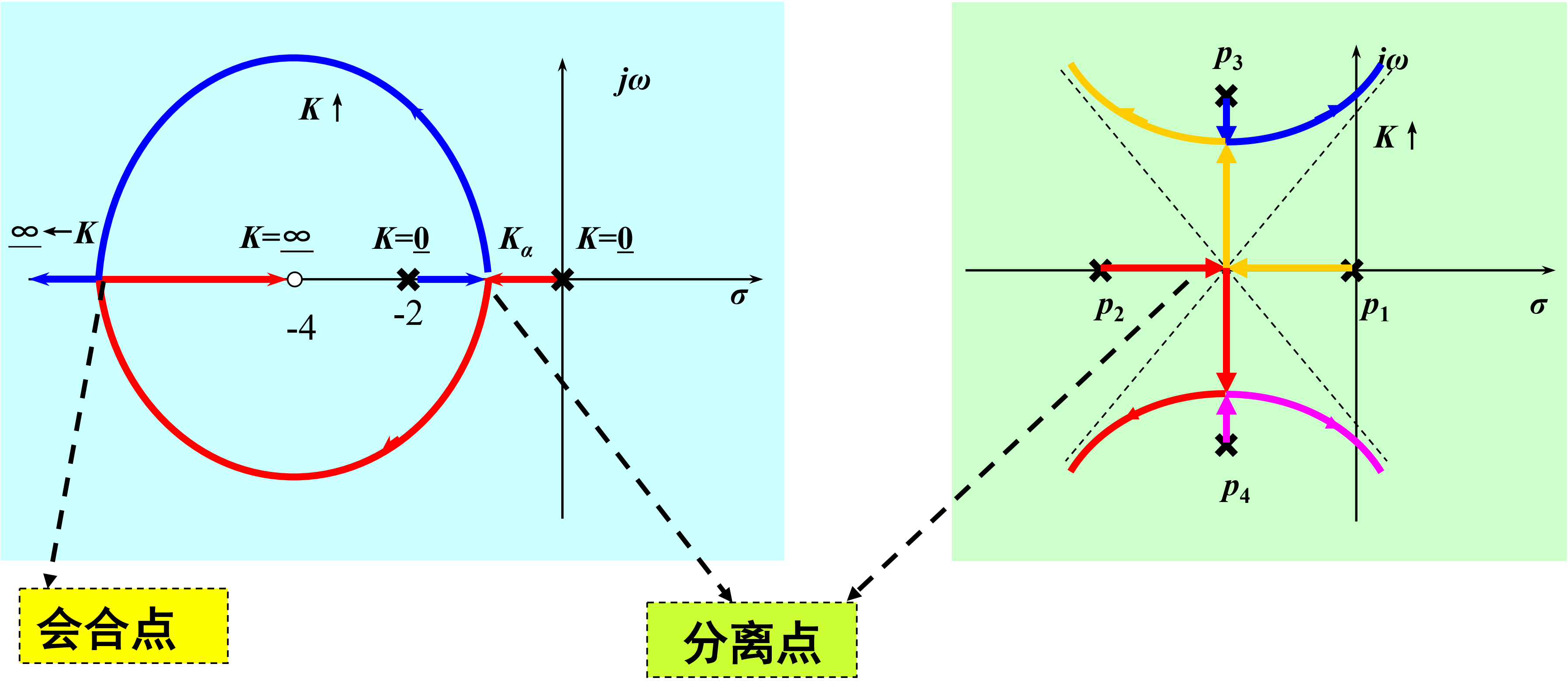
根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

例 5-7：

$$(a)\quad G(s)=\frac{K(s+4)}{s(s+2)}$$

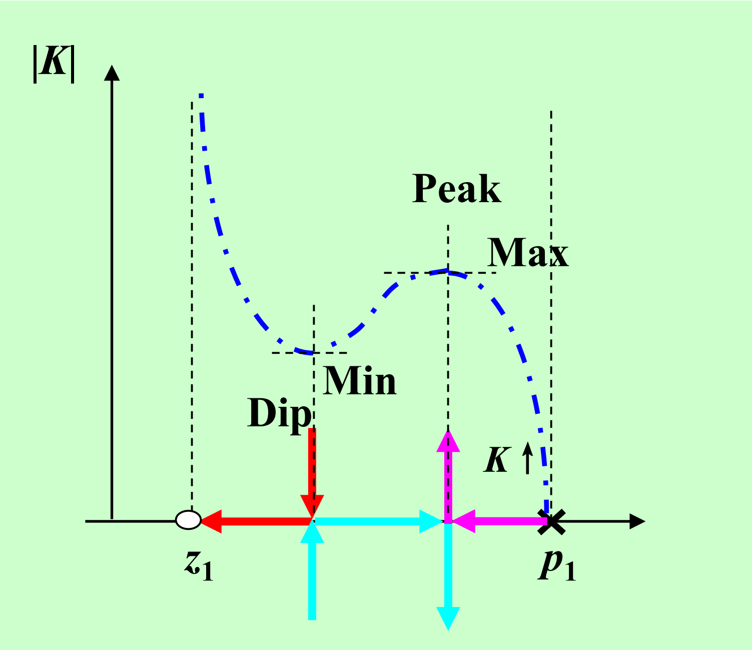
$$(b)\quad G(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+4)}$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

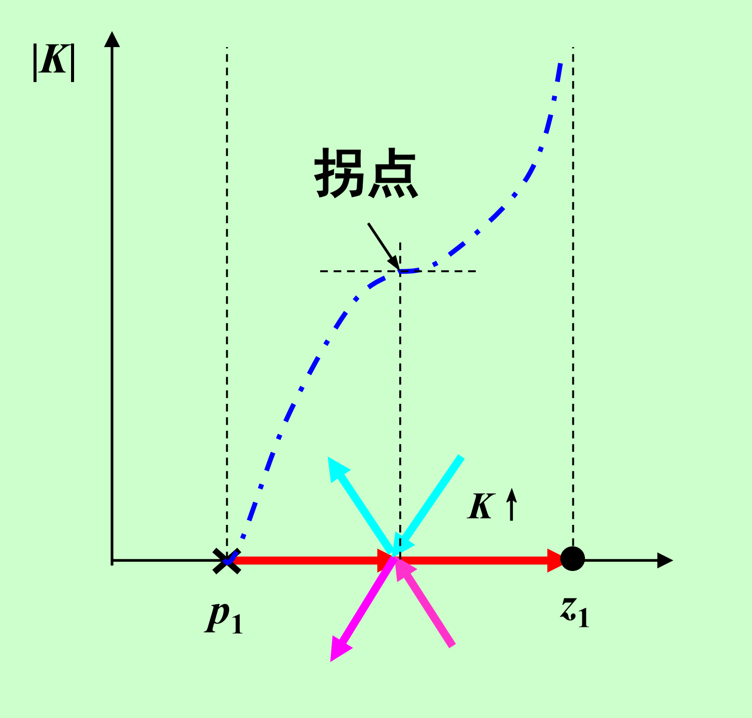
情况1：在实轴上的极点和零点（有限或者无限）之间既有分离点又有会合点



峰顶 代表 K 的最大值，该点是**分离点**。

峰谷 代表 K 的最小值，该点是**会合点**。

情况2：当实轴上分离点和会合点重合时，K会出现拐点



根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

方法1： 在分离点和会合点处特征方程有多重极点(multiple-order Poles)

—— 如何获取该点？

特征方程：

$$1+\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=0$$

$$\Delta(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)=0$$

$$\dot{\Delta}(s)=\frac{d}{ds}\left(\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)\right)=0$$

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)$$

$$\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-K\frac{d}{ds}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)$$

$$\frac{\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{\frac{d}{ds}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

$$\frac{\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{\frac{d}{ds}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}$$

$$\frac{d\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{ds}=\frac{d\ln\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{ds}$$

注意：

$$\frac{d\ln(y(s))}{ds}=\frac{1}{y(s)}\cdot\frac{dy(s)}{ds}$$

又：

$$\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=\sum_{i=1}^{n}\ln(s-p_i)$$

$$\ln\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)=\sum_{j=1}^{w}\ln(s-z_j)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\ln(s-p_i)}{ds}=\sum_{j=1}^{w}\frac{d\ln(s-z_j)}{ds}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{s-z_j}$$

s未知，需要求取

根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

结论：实轴上的分离点 d 满足条件：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{d-z_j}$$

注：在求解分离点或会合点时，须注意：

1) 分离点必须在根轨迹上。

2) 若无有限极点，则：

$$\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{s-z_j}=0$$

3) 若无有限零点，则：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}=0$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

方法2：

开环传递函数：

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

特征方程：

$$1+G(s)H(s)=1+\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=0$$

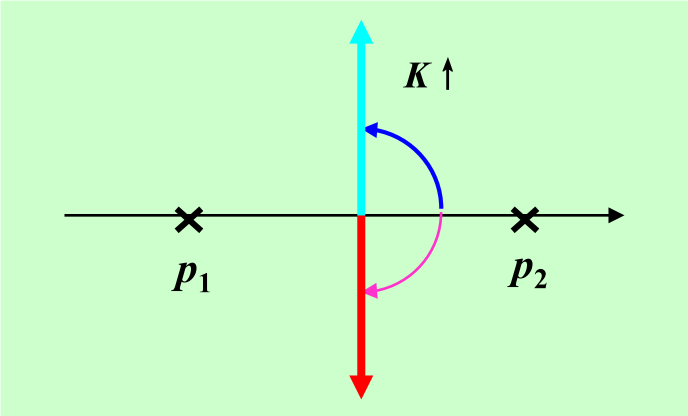
$$\text{Let}: W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=-K$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=d}=0$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则5

规则5：根轨迹的分离（会合）点和分离（会合）角

分离角：根轨迹进入分离点的切线方向与离开分离点的切线方向之间的夹角



分离角满足以下条件：

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{l}$$

其中 l 表示有 l 条根轨迹在该分离点分离。

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-8： 开环传递函数$G(s)H(s)$如下，试绘制根轨迹。

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

1）开环极点： $n=3: p_1=0,\quad p_2=-2,\quad p_3=-3$

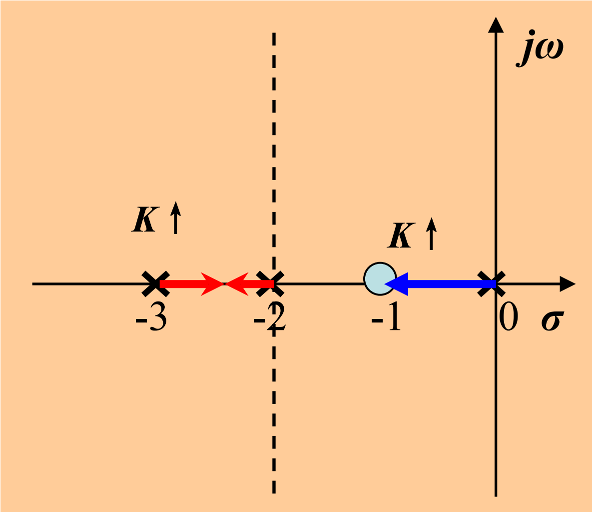
2）开环零点： $w=1: z_1=-1$

3）实轴上的根轨迹： [0, -1], [-2, -3]

4）渐近线：

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{0-2-3-(-1)}{3-1}=-2$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-8：开环传递函数$G(s)H(s)$如下，试绘制根轨迹。

5）分离点： $$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

方法 1

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+3}=\frac{1}{d+1}$$

$$d^3+4d^2+5d+3=0$$

$$d=-2.47$$

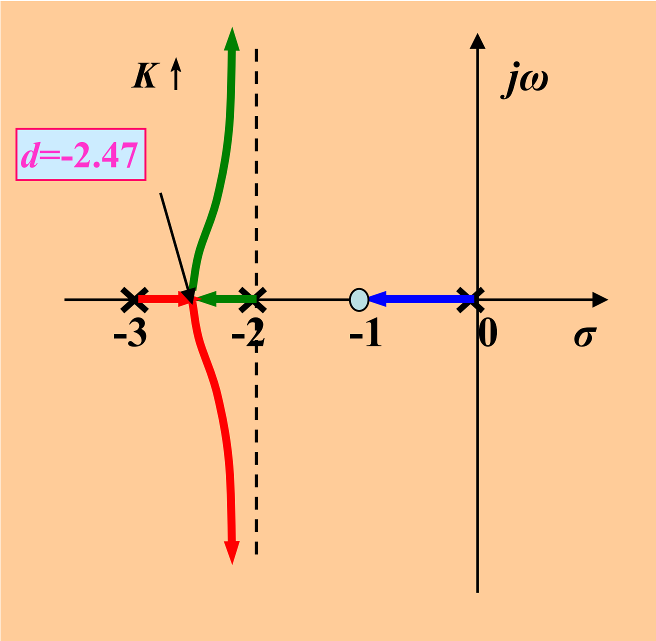
分离角：

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{l}=\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

方法 2

$$W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=\frac{s(s+2)(s+3)}{s+1}$$

$$\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=d}=0$$

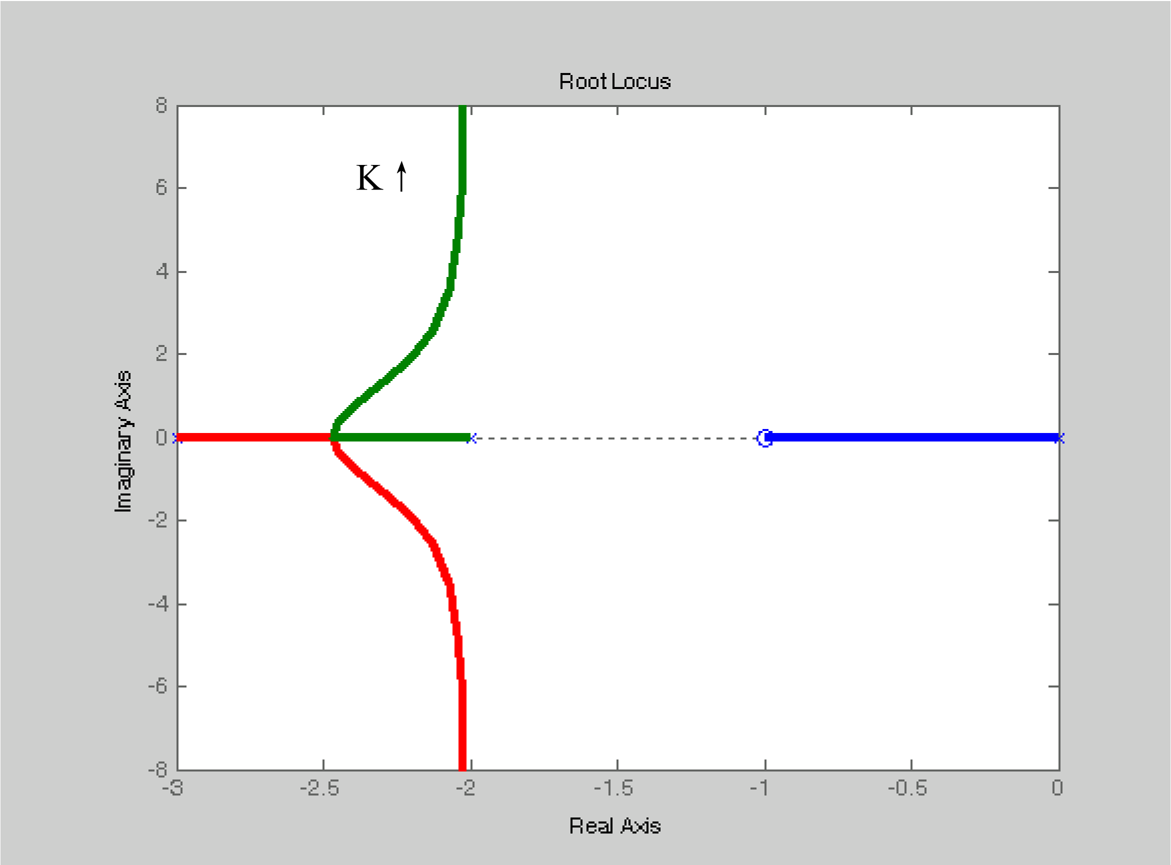


根轨迹图

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例5-8 用MATLAB绘制的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-9：开环传递函数$G(s)H(s)$，绘制根轨迹。

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

1）开环极点： $n=3,\quad p_1=-1,\quad p_2=-2,\quad p_3=-3$

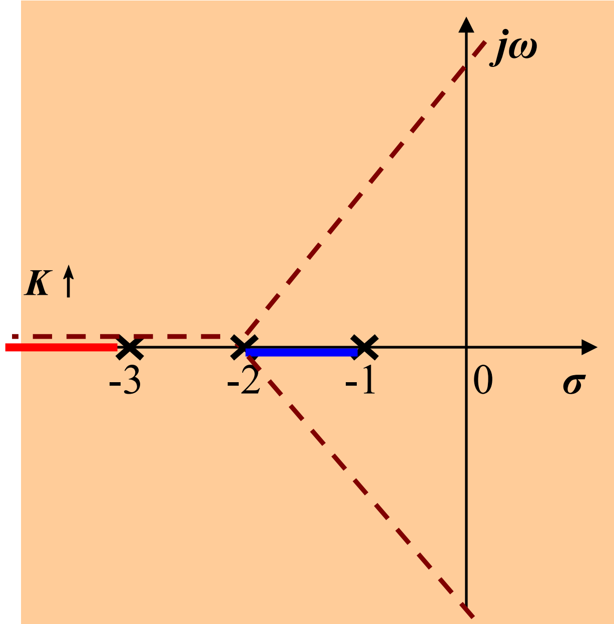
2）开环零点： $w=0$

3）实轴上的根轨迹： [-1, -2], [-3, -∞]

4）渐近线：

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{3}=\begin{cases}60^\circ\\180^\circ\\-60^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{-1-2-3}{3-0}=-2$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

5）分离点：

方法 1

$$\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+3}=0 \Rightarrow 3d^2+12d+11=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1=-1.42 \\ d_2=-2.58 \end{cases}$$

d_2=-2.58 因为不在根轨迹上，舍弃

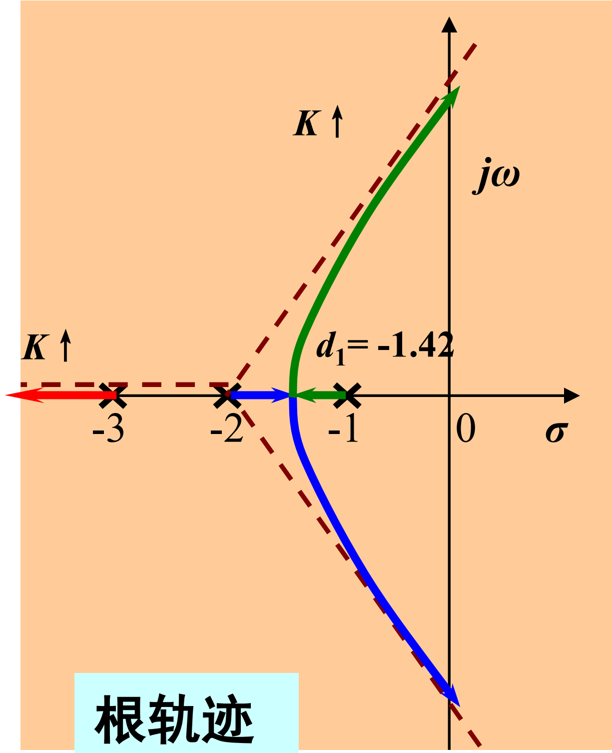
分离角：

$$\frac{(2h+1)180°}{l}=\frac{(2h+1)180°}{2}=\begin{cases} 90° \\ -90° \end{cases}$$

方法 2

$$W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=(s+1)(s+2)(s+3)$$

$$\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=d}=0$$

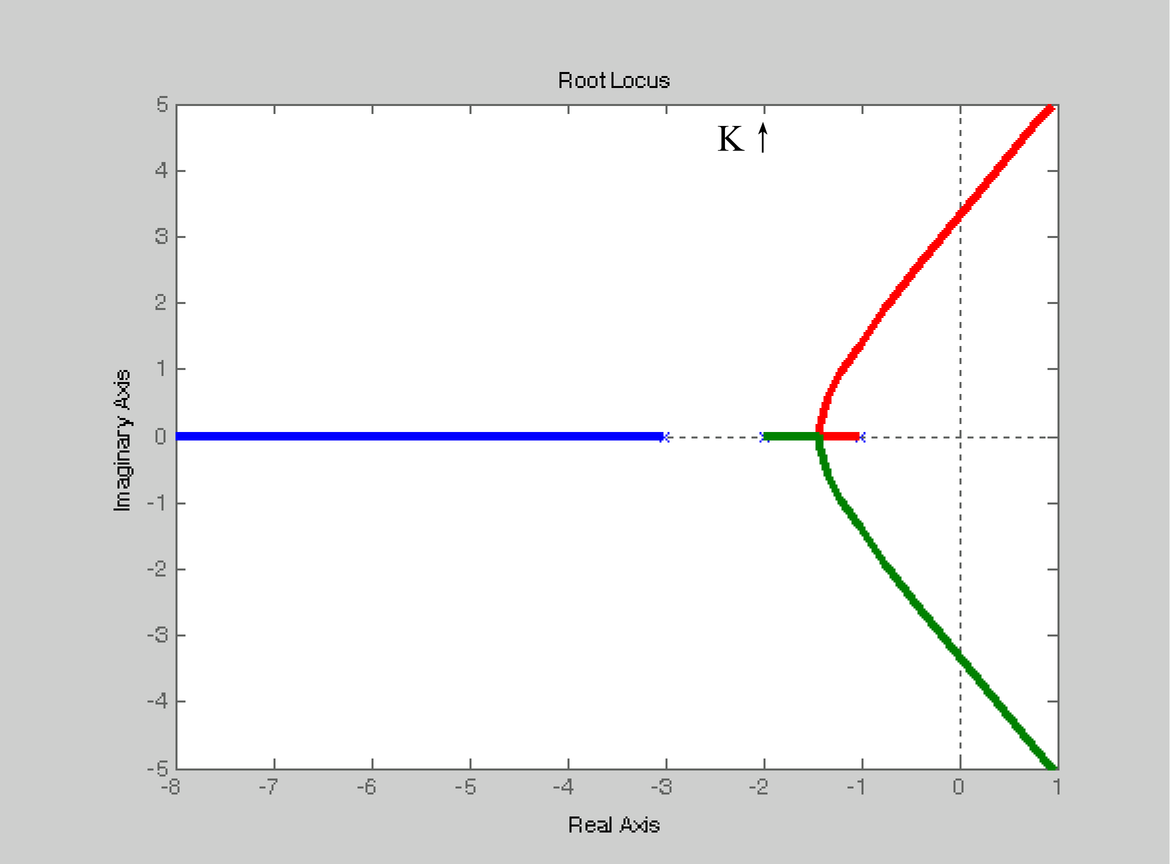


根轨迹

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例5-9 用MATLAB绘制的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

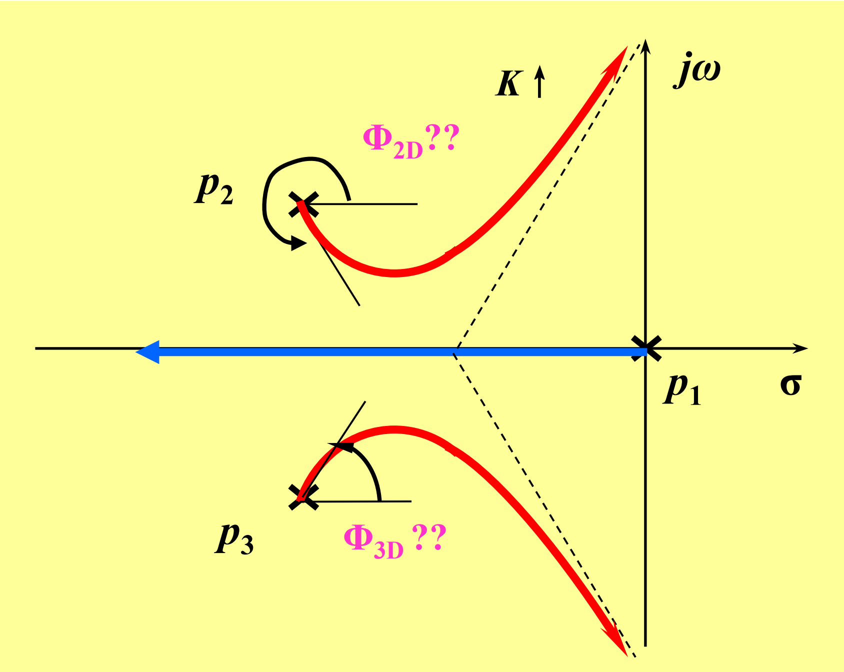


根轨迹（K>0 ）——绘制法则6

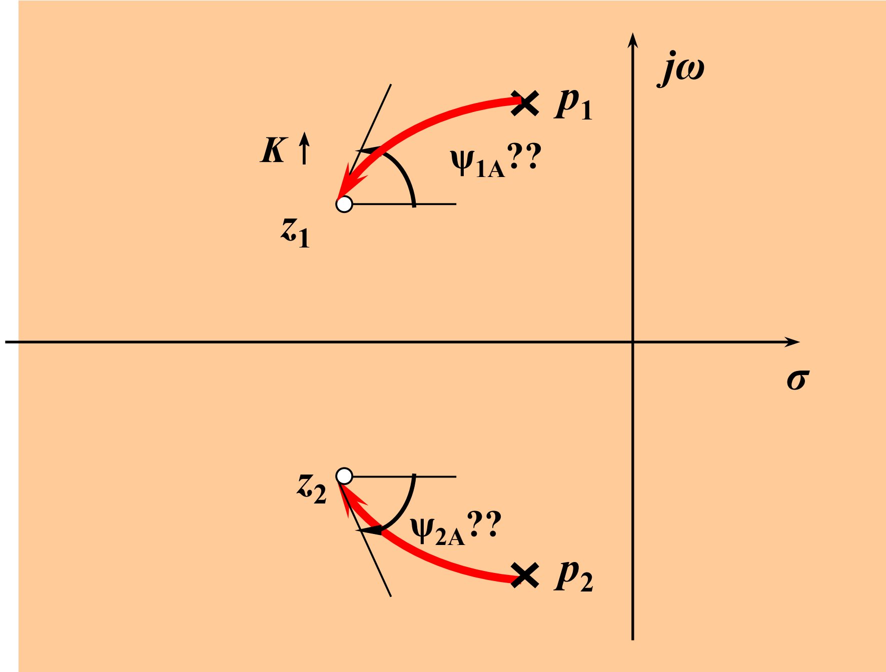
法则6：复数极点 (或零点)的出射角(入射角)[也称为起始角(终止角)]

问题： 根轨迹离开复数极点或到达复数零点的方向?

如何计算极点处的出射(起始)角和零点处的入射(终止)角？



Angle of Departure（出射角）



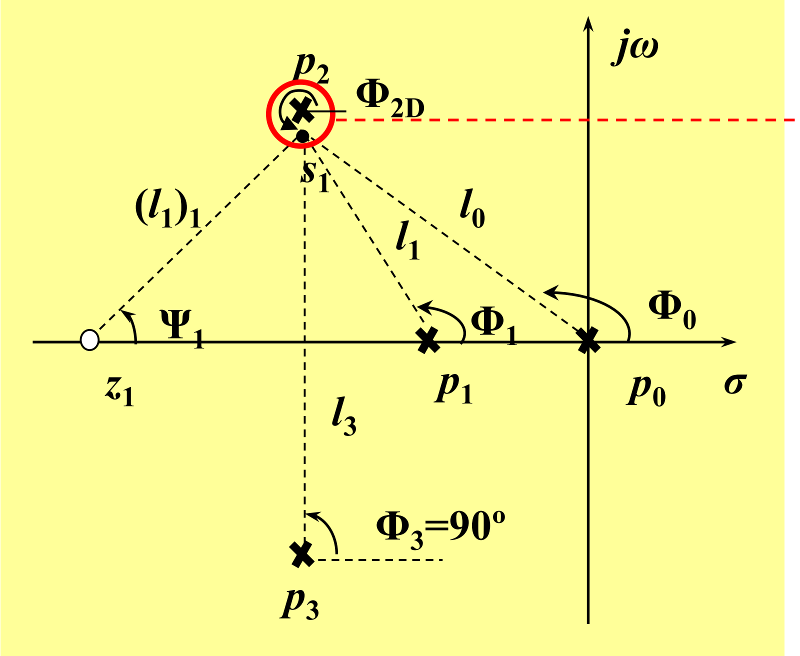
Angle of Approach （入射角）

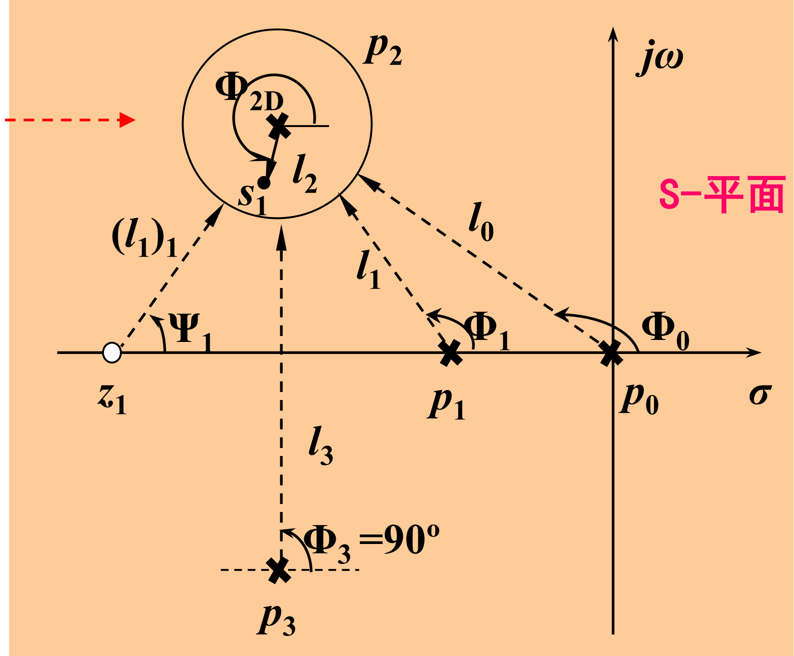
根轨迹（K>0 ）——绘制法则6

法则6：复数极点 (或零点)的出射角(入射角)[也称为起始角(终止角)]

复数极点处出射角和复数零点处入射角的计算：

取测试点无限接近求起始角的复数极点p_i（或求终止角的复数零点z_i)。
假设：开环系统有四个极点和一个零点。取测试点 s_1无限接近极点p_2





l_2 远小于l_0,l_1,l_3 和 $(l_1)_1$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则6

法则6：复数极点 (或零点)的出射角(入射角)[也称为起始角(终止角)]

相角条件： $\angle G(s)H(s)=(1+2h)180°,\quad h=0,\pm1,\pm2,\ldots$

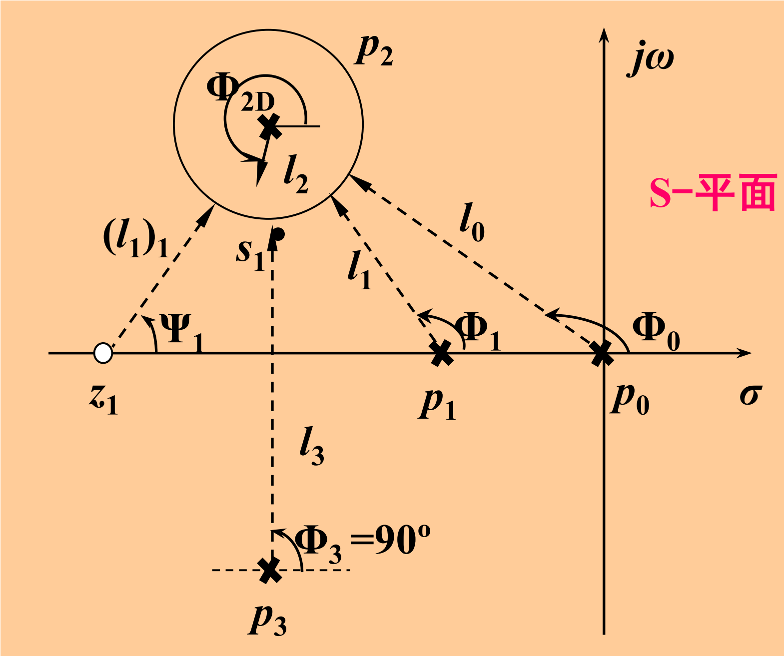
在这个小邻域里应用相角条件：

$$\varphi_0+\varphi_1+\varphi_{2D}+\varphi_3-\psi_1=(1+2h)180°$$

$$\varphi_{2D}=(1+2h)180°-\left(\varphi_0+\varphi_1+90°-\psi_1\right)$$

一般地，出射角(起始角)可以表示为：

$$\varphi_{p_k}=(1+2h)180°+\sum_{j=1}^{w}\angle(p_k-z_j)-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\angle(p_k-p_i)$$



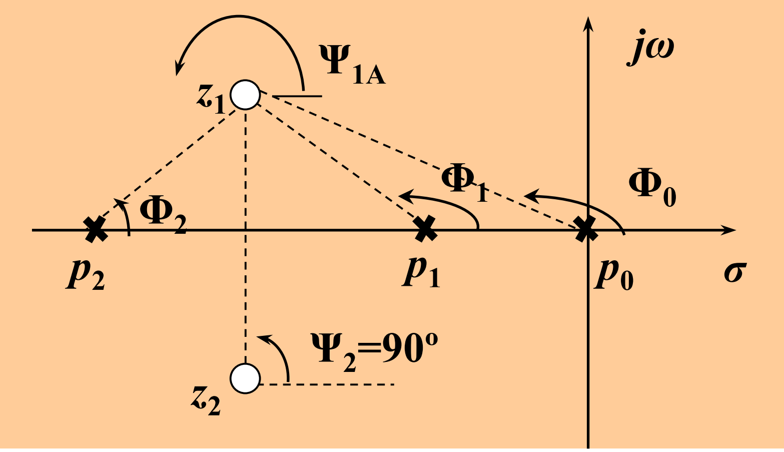
根轨迹（K>0 ）——绘制法则6

法则6：复数极点 (或零点)的出射角(入射角)[也称为起始角(终止角)]

相角条件： $\angle G(s)H(s)=(1+2h)180^\circ,\quad h=0,\pm1,\pm2,\ldots$

同样地，可以确定到达复数零点的入射角。

$$\psi_{1A}=\left(\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2-90^\circ\right)-(1+2h)180^\circ$$



一般地，入射角(终止角)可以表示为：

$$\psi_{z_k}=(1+2h)180^\circ+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_k-p_i)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{w}\angle(z_k-z_j)$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则6

法则6：复数极点 (或零点)的出射角(入射角)[也称为起始角(终止角)]

结论1：根轨迹离开开环极点的出射角(起始角)

$$\varphi_{p_k} = (1+2h)180^\circ + \sum_{j=1}^{w} \angle(p_k - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \angle(p_k - p_i)$$

结论2：根轨迹到达开环零点的入射角(终止角)

$$\psi_{z_k} = (1+2h)180^\circ + \sum_{i=1}^{n} \angle(z_k - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{w} \angle(z_k - z_j)$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则7

法则7：根轨迹与虚轴的交点(产生无阻尼振荡点)

方法1：根轨迹与虚轴相交，意味着闭环系统有一对虚根。因此，令 $s=j\omega$ 代入特征方程 $1+G(s)H(s)=0$ 来计算根轨迹与虚轴的交点。

$$1+G(j\omega)H(j\omega)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\left[1+G(j\omega)H(j\omega)\right]=0 \\ \mathrm{Im}\left[1+G(j\omega)H(j\omega)\right]=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \omega=\pm\omega_c \\ K=K_c \end{cases}$$

$s=\pm j\omega_c$ 对应于根轨迹穿越虚轴的点。
K_c 表示穿越虚轴的点的根轨迹增益。

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-9-1： 开环传递函数$G(s)H(s)$，试求根轨迹与虚轴的交点。

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

特征方程

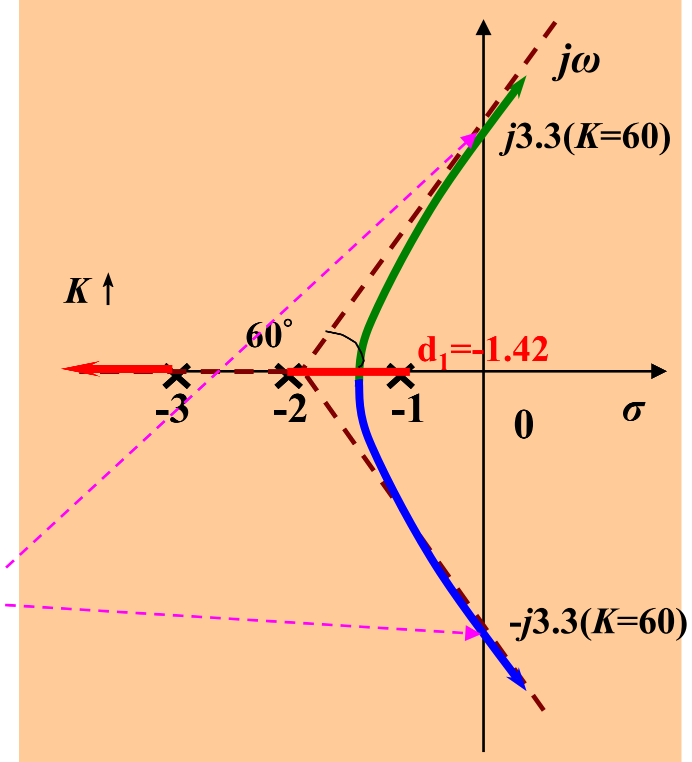
$$s^3+6s^2+11s+K+6=0$$

令$s=j\omega$ 代入特征方程：

$$-j\omega^3-6\omega^2+j11\omega+K+6=0$$

$$\begin{cases} 11\omega-\omega^3=0 \\ K+6-6\omega^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1=0 \quad (\text{放弃}) \\ \omega_{2,3}=\pm\sqrt{11}=\pm3.3 \\ K=60 \end{cases}$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则7

法则7：根轨迹与虚轴的交点(产生无阻尼振荡点)

方法2：根轨迹与虚轴的交点可以运用Routh判据来计算。

例如，若闭环特征方程具有如下形式：

$$s^3 + bs^2 + cs + Kd = 0$$

Routh表

s^3	1	c
s^2	b	Kd
s^1	$(bc - Kd)/b$	
s^0	Kd	

分析

1) 如果Routh表中s^1行元素全为零，则系统出现无阻尼振荡。由s^2行可以构造辅助方程

$$bs^2 + Kd = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{Kd}{b}} = \pm j\omega_c$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则7

法则7：根轨迹与虚轴的交点(产生无阻尼振荡点)

2) 通过令s^1 行元素为零，即可确定穿越虚轴点的根轨迹增益

$$K_c = \frac{bc}{d}$$

3) 对于 $K<0$，s^0 行元素为负，则表示系统不稳定。因此，系统稳定的条件为

$$0 < K < \frac{bc}{d}$$

4) 对于高阶系统，必须分析第一列中包含K的所有项，从而获得系统稳定的增益范围

$$s^3 + bs^2 + cs + Kd = 0$$

Routh表

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & c \\
s^2 & b & Kd \\
s^1 & (bc - Kd)/b & \\
s^0 & Kd &
\end{array}$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-9-1： 开环传递函数$G(s)H(s)$，试求根轨迹与虚轴的交点。

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

特征方程： $s^3+6s^2+11s+K+6=0$

Routh表

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 11 \\
s^2 & 6 & K+6 \\
s^1 & (66-K-6)/6 & \\
s^0 & K+6 &
\end{array}$$

与虚轴交点处的根轨迹增益：

$$\left(66-K-6\right)/6=0 \quad \Rightarrow \quad K=60$$

根轨迹与虚轴的交点：

$$6s^2+(K+6)=0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2}=\pm j\sqrt{11}$$

系统稳定的参数范围：

$$0<K<60$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则8

法则8：根轨迹的交叉点

幅值条件：$|G(s)H(s)|=1$

相角条件：$\angle G(s)H(s)=(1+2h)180°,\quad h=0,\pm1,\pm2,\ldots$

$$1+G(s)H(s)=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Let}: W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=-K$$

1) 非交叉点

当s 满足相角条件时，该点在根轨迹上。如果在该点处 $dW(s)/ds\neq0$，则仅有一条根轨迹分支经过该点。

根轨迹（K>0 ）——绘制法则8

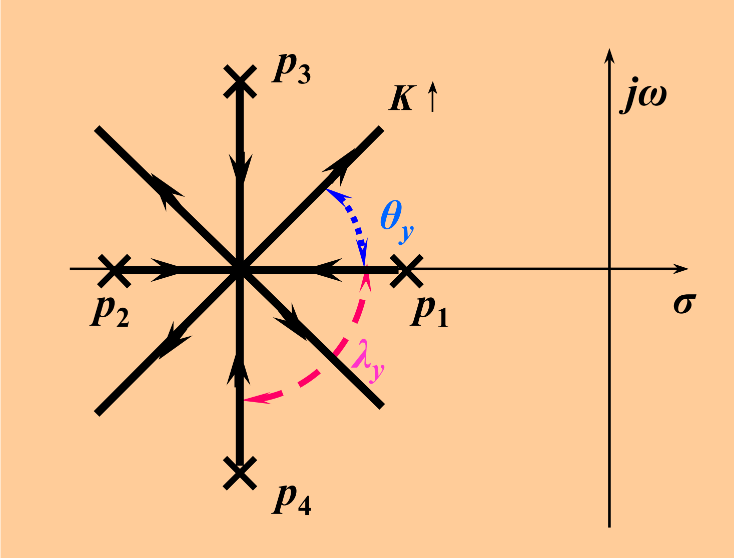
法则8：根轨迹的交叉点

2) 交叉点

如果在根轨迹上的给定点处$W(s)$ 的前 y-1 阶导数等于零，则有 y条根轨迹分支在该点相聚又分离，因此，在该点处根轨迹汇合。

进入该点的两条相邻的根轨迹夹角设定为 λ_y。

离开该点的根轨迹分支与邻近的进入该点的根轨迹分支的夹角设定为 θ_y。



$$\lambda_y = \pm\frac{360°}{y}$$

$$\theta_y = \pm\frac{180°}{y}$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-10：绘制$G(s)H(s)$的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$$

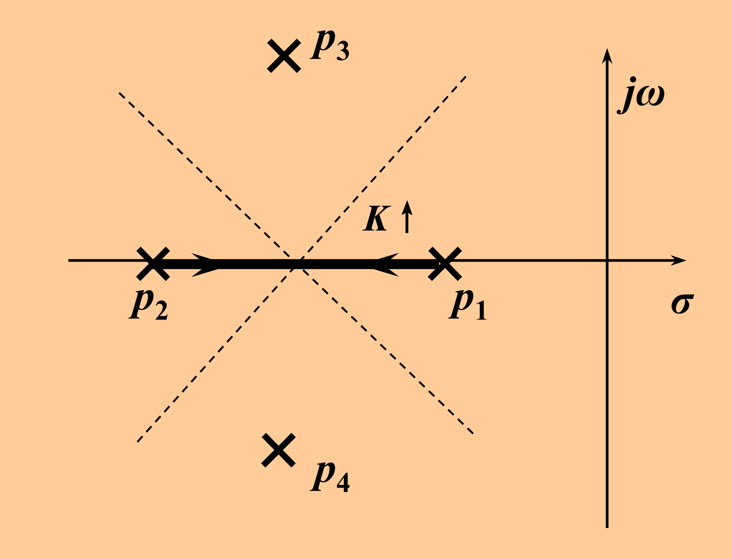
开环极点： $n=4,\quad p_1=-2,\quad p_2=-4,\quad p_{3,4}=-3\pm j1$

开环零点： $w=0$

渐近线：

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{4}=\begin{cases}45^\circ\\135^\circ\\-135^\circ\\-45^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{-2-4-3-3}{4-0}=-3$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-10： 绘制$G(s)H(s)$的根轨迹 $$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$$

出射角：

$$\begin{aligned}\phi_{p_3}&=180°-\angle(p_3-p_1)-\angle(p_3-p_2)-\angle(p_3-p_4)\\&=180°-arctg(-2)-arctg(2)-90°\\&=-90°\end{aligned}$$

$$\varphi_{p_4}=90°$$

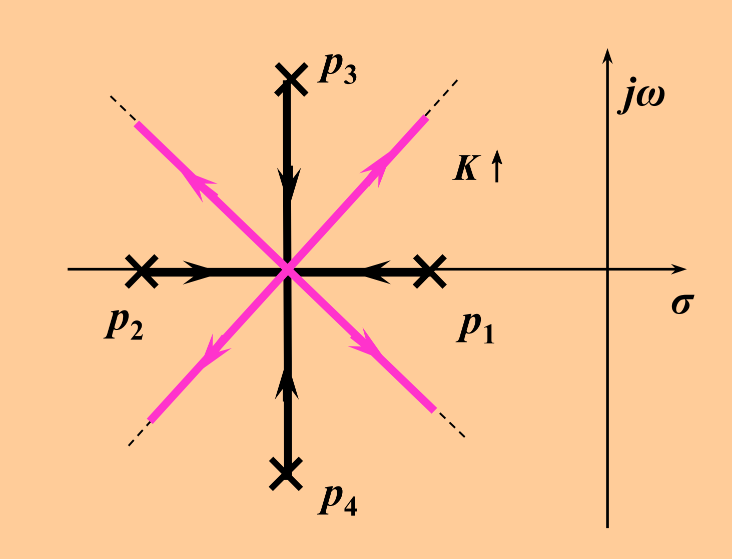
实轴上的分离点：

$$\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+4}+\frac{1}{d+3+j1}+\frac{1}{d+3-j1}=0$$

$$d=-3$$

分离角：

$$\frac{(2h+1)180°}{l}=\frac{(2h+1)180°}{4}=\begin{cases}45°,-45°\\135°,-135°\end{cases}$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-10： 绘制$G(s)H(s)$的根轨迹 $$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$$

根轨迹分支的交叉点：

$$W(s)=(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)=(s^2+6s+8)(s^2+6s+10)$$

$$W'(s)\Big|_{s=-3}=\left[(2s+6)(s^2+6s+10)+(s^2+6s+8)(2s+6)\right]_{s=-3}=0$$

$$W''(s)\Big|_{s=-3}=2(2s^2+12s+18)+(2s+6)(4s+12)\Big|_{s=-3}=0$$

$$W'''(s)\Big|_{s=-3}=\left[2(4s+12)+(16s+48)\right]_{s=-3}=0$$

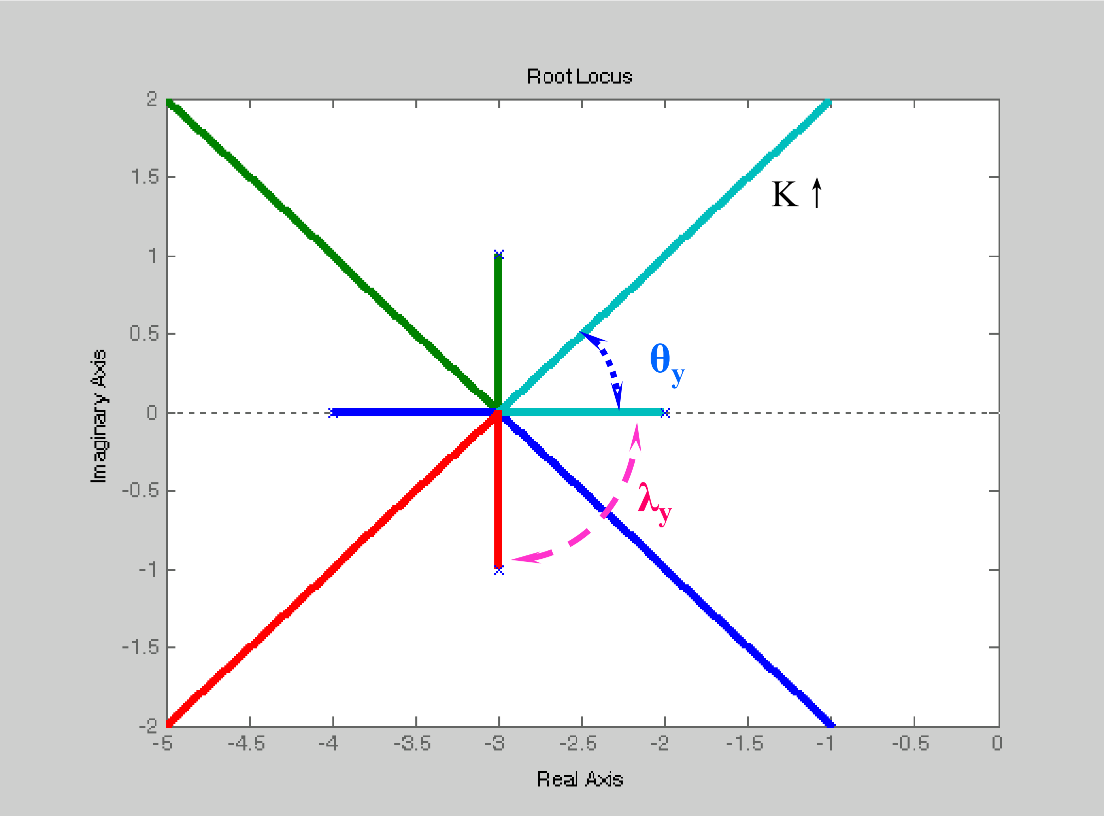
$$W^{(4)}(s)\Big|_{s=-3}=24$$ → $y=4$ → $$\lambda_y=\pm\frac{360°}{4}=\pm 90$$ $$\theta_y=\pm\frac{180°}{4}=\pm 45°$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例 5-10：绘制$G(s)H(s)$的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$$

用MATLAB绘制的根轨迹



$$\theta_y=\pm\frac{180^\circ}{4}=\pm 45^\circ$$

$$\lambda_y=\pm\frac{360^\circ}{4}=\pm 90$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则9

法则9：系统根之和守恒

考虑如下形式的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{s^m\prod_{j=1}^{n-m}(s-p_j)} \qquad w\le n$$

闭环特征方程

$$B(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{s^m\prod_{j=1}^{n-m}(s-p_j)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-r_i)}{s^m\prod_{j=1}^{n-m}(s-p_j)}=0$$

其中 r_i 是根轨迹上的点

$$s^m\prod_{j=1}^{n-m}(s-p_j)+K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)=\prod_{i=1}^{n}(s-r_i)$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则9

法则9：系统根之和的守恒

$$s^m\prod_{j=1}^{n-m}(s-p_j)+K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)=\prod_{i=1}^{n}(s-r_i)$$

方程两侧表示为多项式形式

$$\left(s^n-\sum_{j=1}^{n-m}p_js^{n-1}+\cdots\right)+K\left(s^w-\sum_{i=1}^{w}z_is^{w-1}+\cdots\right)=s^n-\sum_{i=1}^{n}r_is^{n-1}+\cdots$$

对于$w\le n$-2的开环传递函数，令方程两端 s^{n-1} 的系数相等，可以得到

$$\sum_{j=1}^{n-m}p_j=\sum_{j=1}^{n}r_j$$

m 个开环极点为零

$$\sum_{j=1}^{n}p_j=\sum_{j=1}^{n}r_j$$

p_j 表示所有的开环极点

r_j 表示闭环特征方程的根

结论：对于开环传递函数$w\le n$-2的系统，当系统增益由0变化到∞时，系统的根之和是常数。换言之，系统的根之和与K无关。

小结：根轨迹绘制法则

- 法则1：根轨迹的终点
- 法则2：根轨迹的分支数、对称性和连续性
- 法则3：根轨迹的渐近线
- 法则4：实轴上的根轨迹
- 法则5：根轨迹的分离点
- 法则6：复数极点 (或零点)的出射角(入射角)
- 法则7：根轨迹与虚轴的交点
- 法则8：根轨迹分支的交叉点与非交叉点
- 法则9：系统根之和守恒

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例5-11 开环传递函数$G(s)H(s)$，绘制根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

1)开环极点： $n=2,\ p_1=-1+j,\ p_2=-1-j$

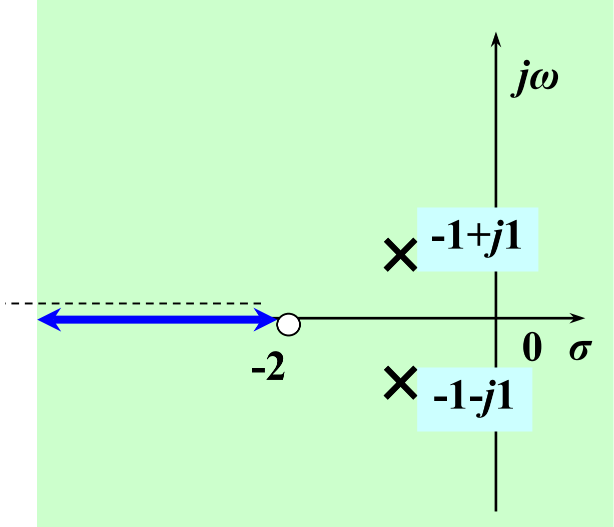
开环零点： $w=1,\ z_1=-2$

2) 两条根轨迹

3) 实轴上的根轨迹(-∞, -2]

4) 渐近线夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{1}=180^\circ$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

5) 实轴上的分离点d

$$\frac{1}{d+1-j1}+\frac{1}{d+1+j1}=\frac{1}{d+2}$$

或者

$$-K=\frac{s^2+2s+2}{s+2}$$

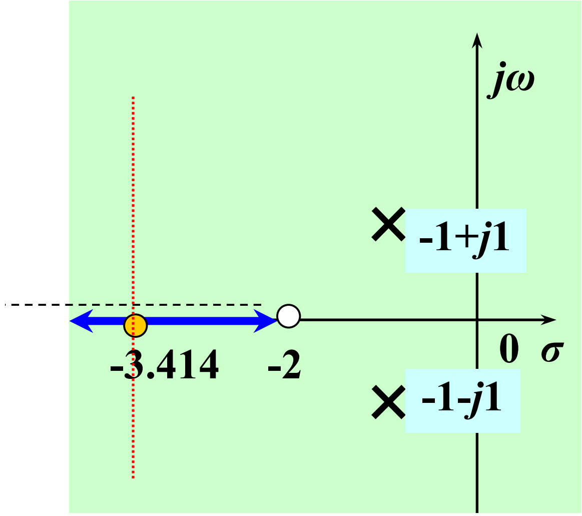
$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=0 \quad\Rightarrow\quad d^2+4d+2=0$$

$d_1=-3.414$

$d_2=-0.586$ 舍弃

分离角：

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{l}=\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$



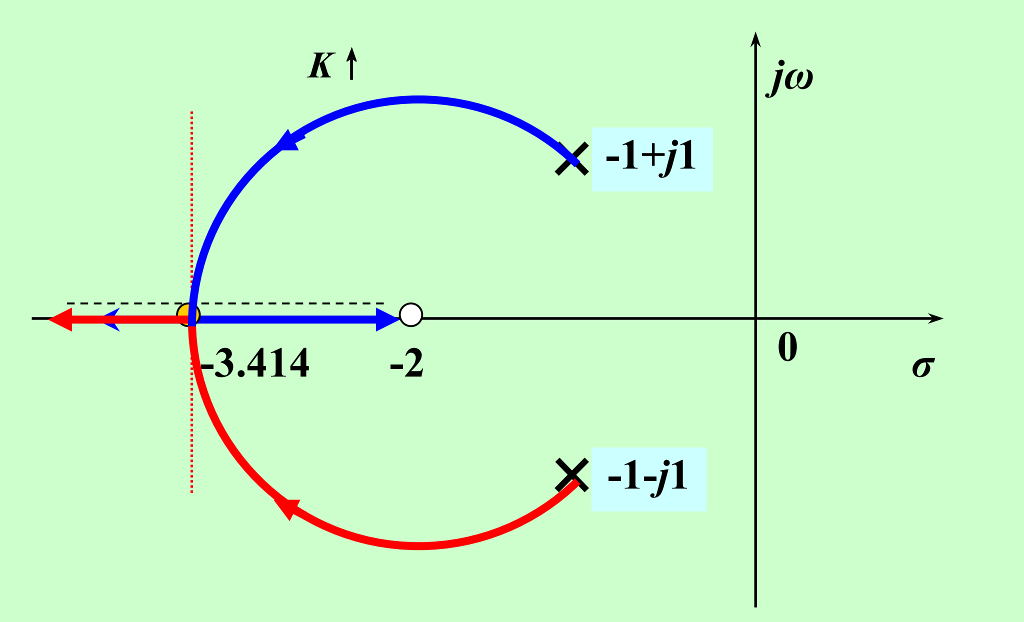
根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

6) 极点$-1+j1$处的出射角Φ_{1_D}

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

$$\phi_{1_D}=(1+2h)180°+\psi_1-\phi_2=(1+2h)180°+45°-90°=135°$$

类似地，极点 $-1-j1$处的出射角是 $-135°$ 。



可以证明，这个系统的根轨迹是以(-2, j0) 为圆心，以1.414为半径的圆

如何证明？

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

可以证明，这个系统的根轨迹上以(-2, j0) 为圆心，以1.414为半径的圆

方法 1

$$z_1 = -2,\ p_1 = -1 + j1 \quad p_2 = -1 - j1$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

假设$s=u+jv$ 是根轨迹上的一个点，根据相角条件

$$\angle(s - z_1) - \angle(s - p_1) - \angle(s - p_2) = \pm 180^\circ$$

将 z_1, p_1, p_2 和$s=u+jv$ 代入上述方程

$$\angle(u+2+jv) - \left[\angle(u+1+j(v-1)) + \angle(u+1+j(v+1))\right] = \pm 180^\circ$$

$$tg^{-1}\frac{v}{u+2} - \left[tg^{-1}\frac{v-1}{u+1} + tg^{-1}\frac{v+1}{u+1}\right] = \pm 180^\circ$$

应用公式

$$tg^{-1}x \pm tg^{-1}y = tg^{-1}\frac{x \pm y}{1 \mp x \cdot y}$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

$$tg^{-1}\frac{\dfrac{v}{u+2}-\dfrac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}}{1+\dfrac{v}{u+2}\cdot\dfrac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}}=\pm180^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{v}{u+2}-\frac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}=0$$

$$\Downarrow$$

$$u^2+4u+2+v^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$(u+2)^2+v^2=(\sqrt{2})^2$$

即已证明，这个系统的根轨迹是以(-2, j0) 为圆心，以1.414为半径的圆

这已是圆的方程

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

方法 2

假设$s=u+jv$ 是根轨迹上的一个点，将它代入特征方程

$$s^2+s(K+2)+2K+2=0$$

$$(u+jv)^2+(u+jv)(K+2)+2K+2=0$$

令方程的实部和虚部分别为零，有

$$u^2-v^2+u(K+2)+2K+2=0$$

和 $2uv+v(K+2)=0$

即 $K=-2u-2$

$$u^2+v^2+4u+2=0$$

$$(u+2)^2+v^2=(\sqrt{2})^2$$

结论：由两个开环极点（实极点或复数极点）和一个开环实零点组成的二阶系统，只要实零点没有位于两个实极点之间，当开环根轨迹增益由零变到无穷大时，复平面上的闭环根轨迹，一定是以实零点为圆心，以实零点到分离点的距离为半径的一个圆（当开环极点为两个实极点时）或圆的一部分（当开环极点为一对共轭复数极点时）。

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

例5-12 开环传递函数$G(s)H(s)$，试绘制根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

1)开环极点： $n=4,\ p_1=0,\ p_2=-2,\ p_3=-1+j1,\ p_4=-1-j1$

开环零点： $w=0$

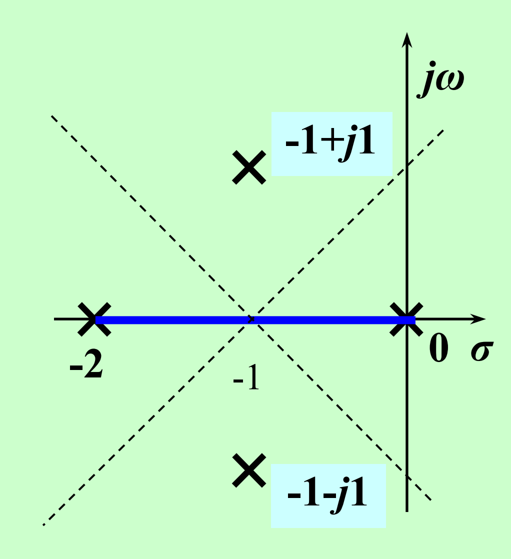
2) 有四条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹：[-2, 0]

4） 渐近线的夹角与交点：

$$\gamma=\frac{(1+2h)180°}{n-w}=\frac{(1+2h)180°}{4}=\pm45°,\pm135°$$

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4}{n-w}=\frac{0-2-1-1}{4}=-1$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

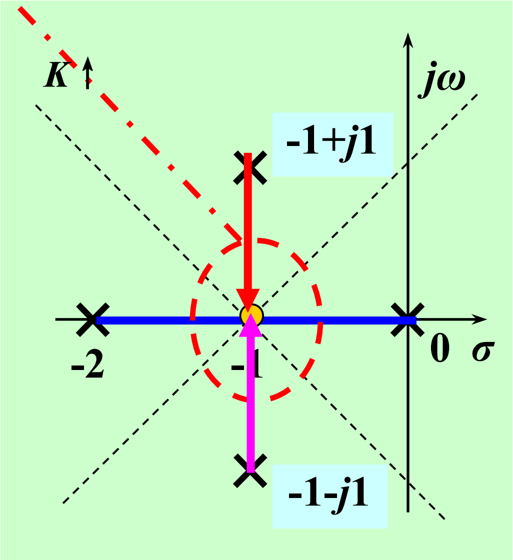
5) 实轴上的分离点

$$\left.\frac{d}{ds}[(s(s+2)(s^2+2s+2)]\right|_{s=d}=0$$

$$d^3+3d^2+3d+1=0$$

$$d_1=d_2=d_3=-1$$

4重 极点：有4 条根轨迹分支在该点会合



分离角：$\dfrac{(2h+1)180°}{l}=\dfrac{(2h+1)180°}{4}=\begin{cases}\pm45°\\ \pm135°\end{cases}$

6) 极点–1+j1处的出射角 Φ_{3_D}

$$\begin{aligned}\varphi_{3_D}&=(1+2h)180°-\left(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_4\right)\\&=(1+2h)180°-\left(135°+45°+90°\right)\\&=-90°\end{aligned}$$

类似地，极点-1-j1处的出射角为 90° 。

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

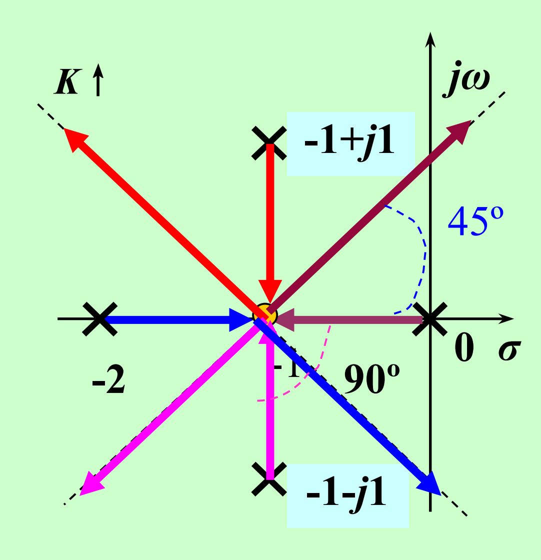
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

6-1) 进入该点的相邻两条根轨迹分支的夹角

$$\lambda_4=\pm\frac{360^\circ}{4}=\pm 90^\circ$$

6-2) 离开该点的一条根轨迹分支与相邻的进入该点的根轨迹分支的夹角

$$\theta_4=\pm\frac{180^\circ}{4}=\pm 45^\circ$$



根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

7) 根轨迹与虚轴的交点

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)+K}$$

特征方程：

$$\Delta(s)=s^4+4s^3+6s^2+4s+K$$

Routh表：

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 6 & K \\ s^3 & 4 & 4 & \\ s^2 & 5 & K & \\ s^1 & \dfrac{20-4K}{5} & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

$$\frac{20-4K}{5}=0 \quad \Rightarrow \quad K=5$$

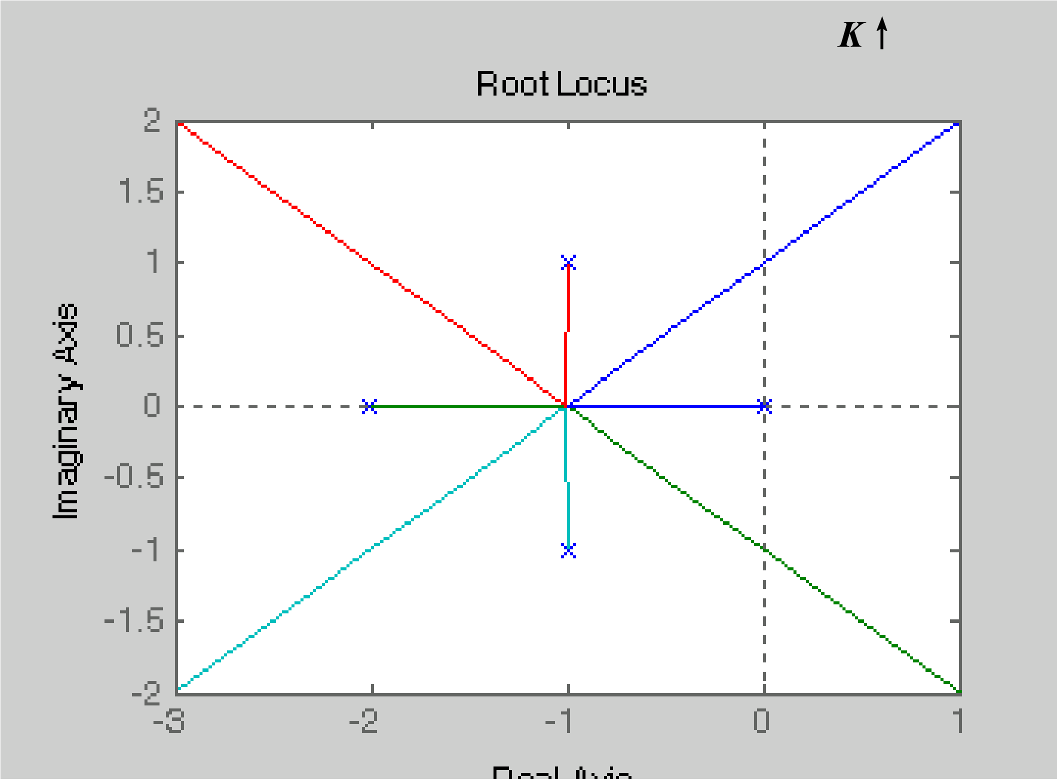
由 s^2 行构造的辅助方程：

$$5s^2+K=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j\sqrt{\frac{K}{5}}=\pm j1$$

根轨迹（K>0 ）——绘制法则举例

根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$



当 $K>5$，系统将不稳定。

根轨迹方法举例

■例5-12　一控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

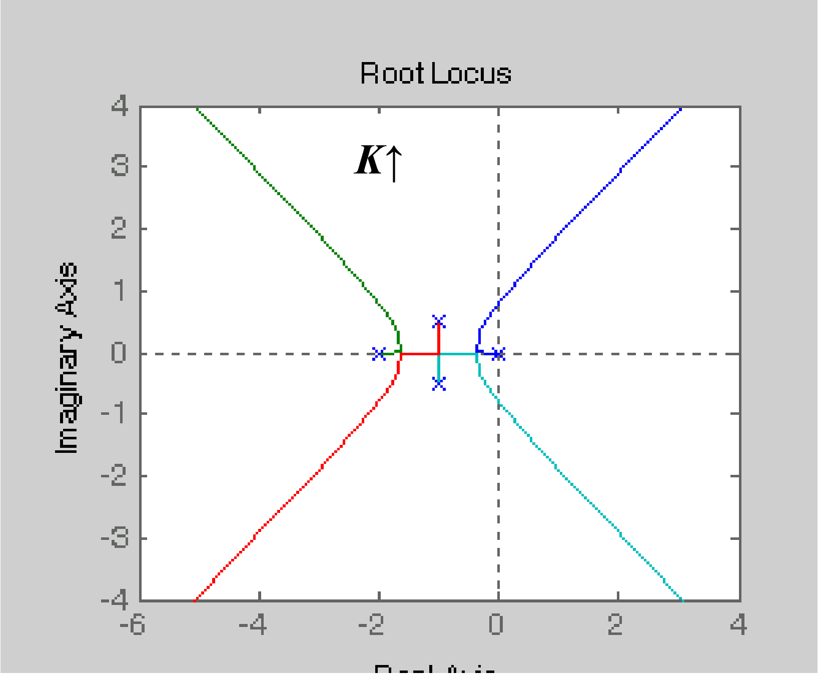
其中p_2、p_3为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设p_0=0，p_1=-2。

(2) p_2= -1+0.5j, p_3= -1-0.5j

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+1.25)}$$

$$=\frac{K}{s(s+2)(s+1-j0.5)(s+1+j0.5)}$$



根轨迹方法举例

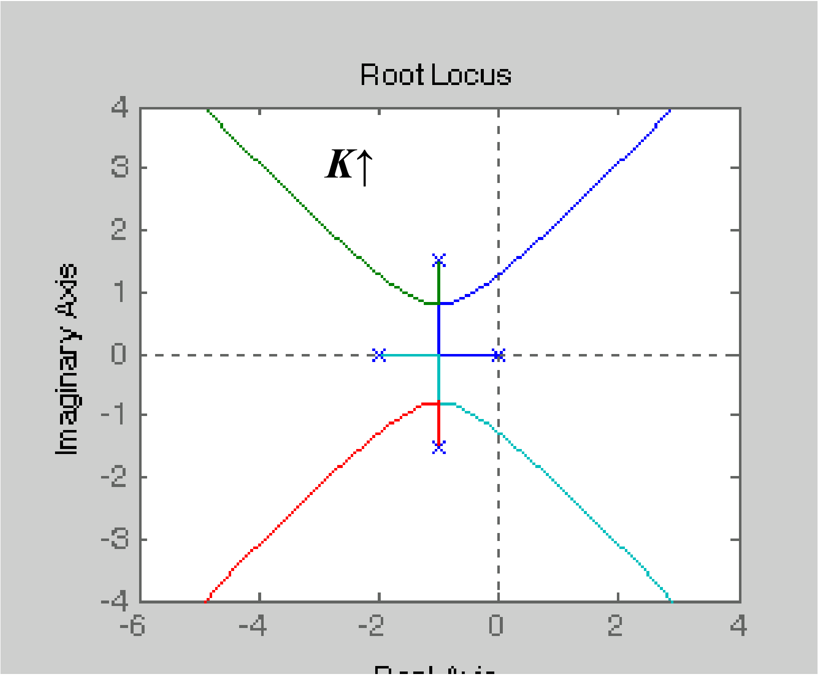
■例5-12　一控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

其中p_2、p_3为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设p_0=0，p_1=-2。

(3) p_2= -1+1.5j，p_3= -1-1.5j

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+3.25)}$$
$$=\frac{K}{s(s+2)(s+1-j1.5)(s+1+j1.5)}$$



根轨迹方法举例

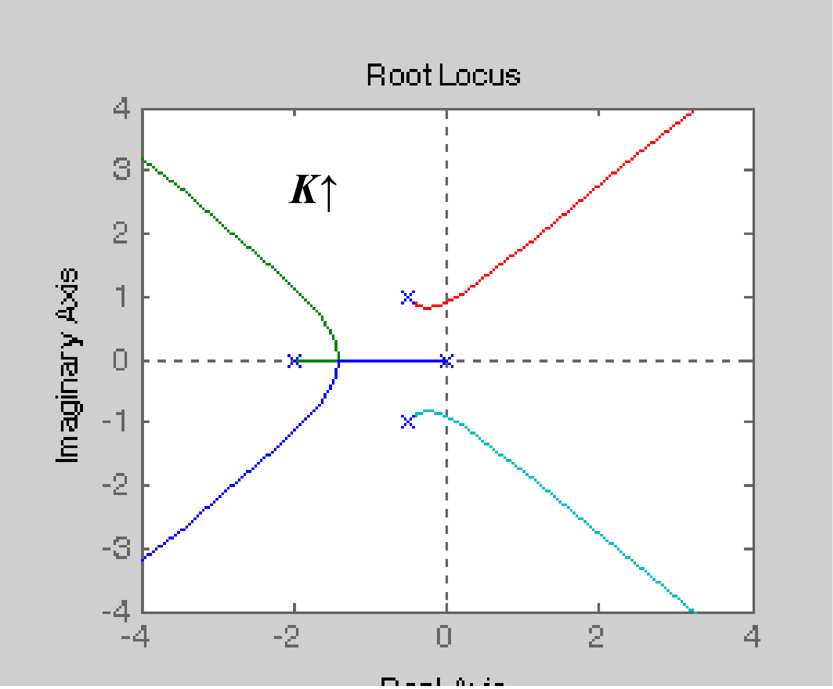
■例5-12　一控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

其中p_2、p_3为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设p_0=0，p_1=-2。

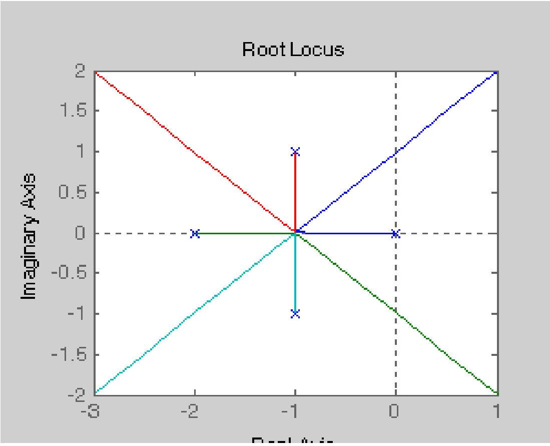
(4) p_2= -0.5+j, p_3= -0.5-j

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+s+1.25)}$$
$$=\frac{K}{s(s+2)(s+0.5-j)(s+0.5+j)}$$

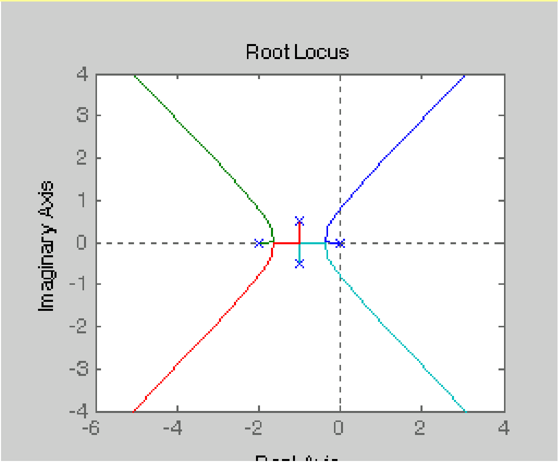


根轨迹方法举例

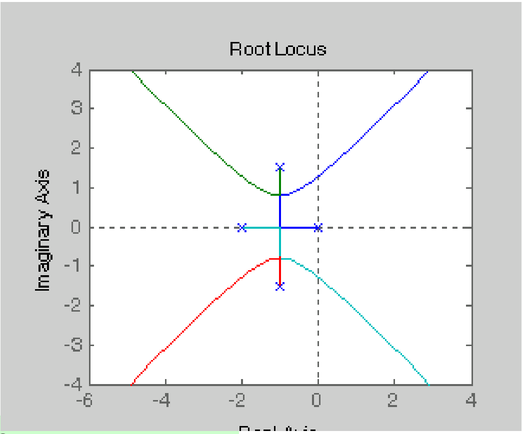
$$(1)G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$



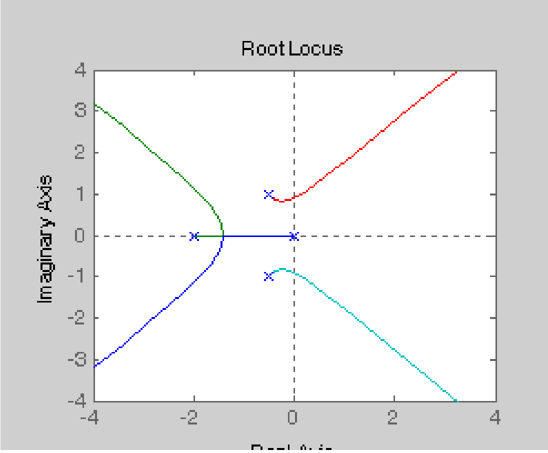
$$(2)G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+1.25)}$$



$$(3)G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+3.25)}$$



$$(4)G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+s+1.25)}$$



绘制根轨迹（K>0）的方法小结（1）

- 根轨迹的起止：起于开环极点，终于开环零点或无穷远点
- 根轨迹的分支数：=max(n, w)

  当$n>w$时，等于开环极点数；当$w>n$时，等于开环零点数
- 根轨迹的对称性：关于实轴对称
- 实轴上的根轨迹：当右面的开环零极点数之和为奇数的部分
- 根轨迹的渐近线：当$n>w$时，共有（n-w）条：

  与实轴的夹角为 $\gamma = \dfrac{\pm(2h+1)180^\circ}{n-w}$ 交点为 $\sigma_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(p_i) - \sum_{j=1}^{w}\mathrm{Re}(z_i)}{n-w}$

- 分离点与会合点（必是 l 重根）

  由 $\dfrac{d[-K(s)]}{ds} = 0$ 确定，且与实轴成 $\theta = \dfrac{\pm 180^\circ}{l}$ 角度离开（会合）

  或 $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{s-p_i} = \sum_{j=1}^{w}\dfrac{1}{s-z_j}}$

绘制根轨迹（K>0）的方法小结（2）

- 与虚轴的交点：由Routh判据求得，或直接将$s=j\omega$代入特征方程求出特征根
- 出射角与入射角

自复极点的p_k的出射角

$$\phi_{p_k}=\pm180^\circ+\sum_{j=1}^{w}\angle(p_k-z_j)-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\angle(p_k-p_i)$$

至复零点的z_k的入射角

$$\psi_{z_k}=\pm180^\circ+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_k-p_i)-\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{w}\angle(z_k-z_j)$$

注意：根轨迹是一种几何图解法：绘制出根轨迹后，任一点s_1的K值K_1都可由幅值条件求出：

$$K_1=\frac{|s_1-p_1|\cdot|s_1-p_2|\cdots|s_1-p_n|}{|s_1-z_1|\cdot|s_1-z_2|\cdots|s_1-z_w|}=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s_1-p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s_1-z_j|}$$

绘制根轨迹（K>0）的方法

- 关于根轨迹，能否考虑其他情况：

  *K*为负值？

  正反馈系统？

  这两者的关系？

  其他参数（如时间常数）为可变参数？

  有纯滞后存在的系统？

  非最小相位系统（——S右半平面存在开环零极点）？

  存在多个可变参数？

  。。。。。。

推广的根轨迹方法

（广义根轨迹）

The End