

自动控制理论

Automatic Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大



第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous-time Control Systems



关键词

- 数学模型， 建模
- 动态系统（单元）
- 微分方程模型， 状态空间模型
- 传递函数（Transfer Function）
- 开环传递函数， 闭环传递函数
- 方块图（Block Diagram）， 仿真（模拟）图
- 信号流图（Signal Flow Graph, SFG）
- 梅逊增益公式

主要内容

- 数学模型的基本概念
- 电路系统的数学模型
- 系统总传递函数
- **各种模型间的关系**
- 其他系统（机械、液位等）的数学模型
- 非线性系统的线性化以及特殊环节建模

主要内容

- 微分方程 \Leftrightarrow 传递函数
- 微分方程（传递函数） \Rightarrow 状态空间模型
- 方块图 \Rightarrow 状态空间模型
- 状态空间模型 \Rightarrow 传递函数

主要内容

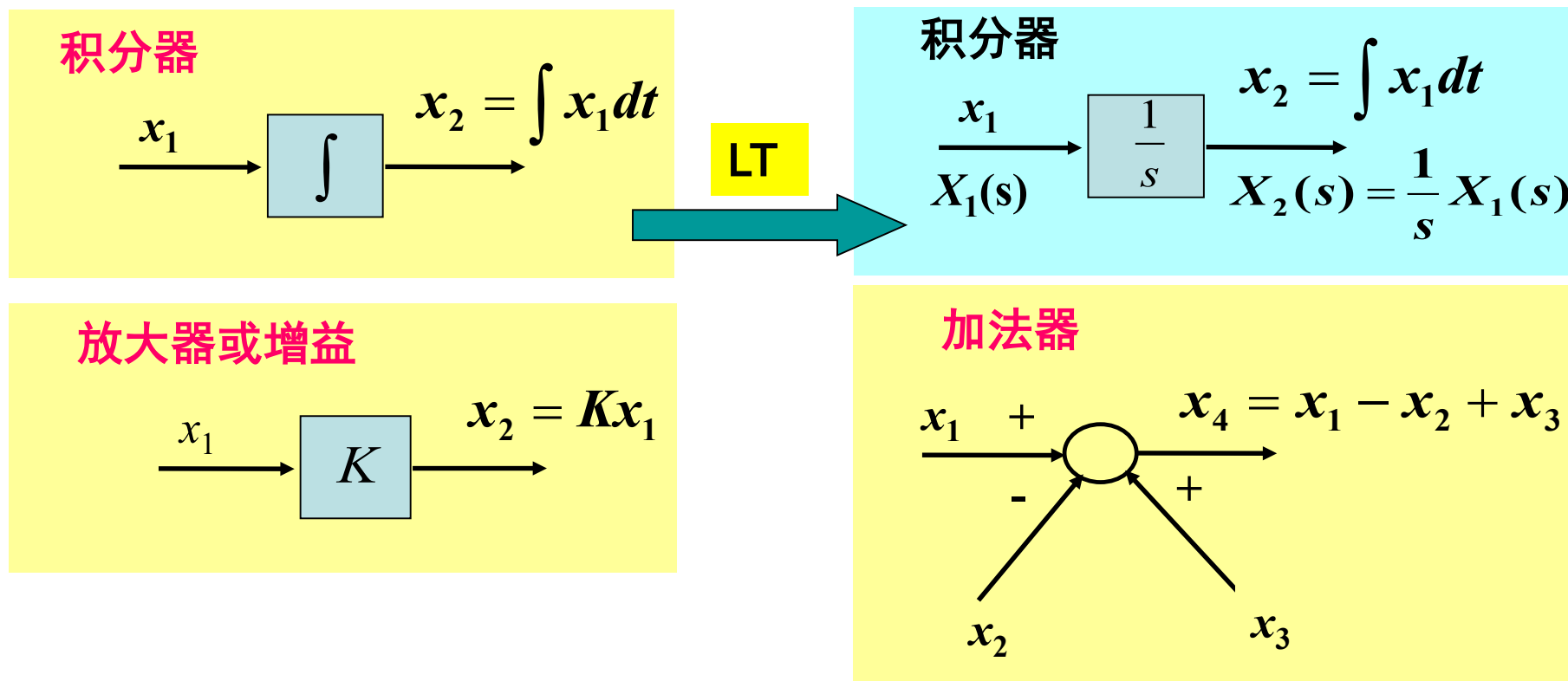
- 微分方程 \Leftrightarrow 传递函数
- 微分方程（传递函数） \Rightarrow 状态空间模型
 - 仿真图与状态变量图
 - 相变量作为状态变量
 - 标准型
- 方块图 \Rightarrow 状态空间模型
- 状态空间模型 \Rightarrow 传递函数

仿真图

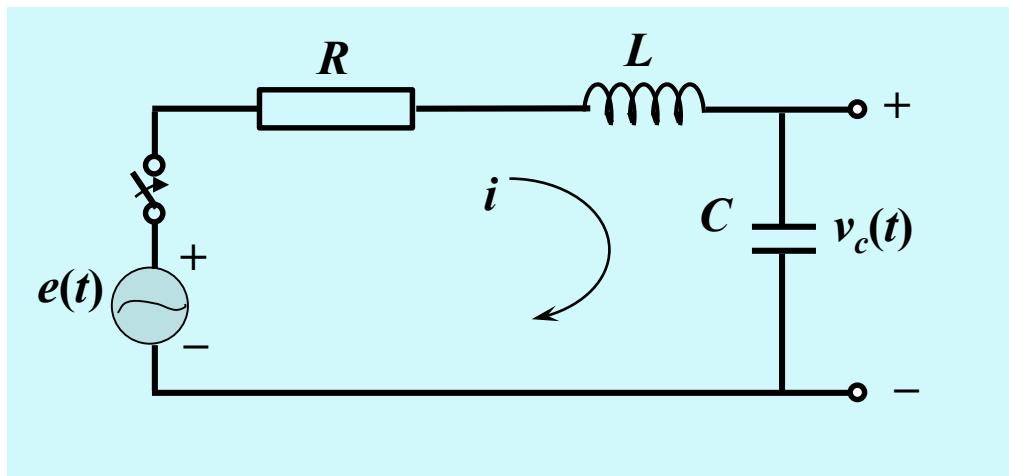
- **仿真图**类似于方块图，可以用模拟元件或在计算机对物理系统进行仿真，给分析问题带来方便
- 仿真图的**基本单元**包括：理想积分器、理想放大器和理想加法器

仿真图

- 基本单元：理想积分器、理想放大器和理想加法器



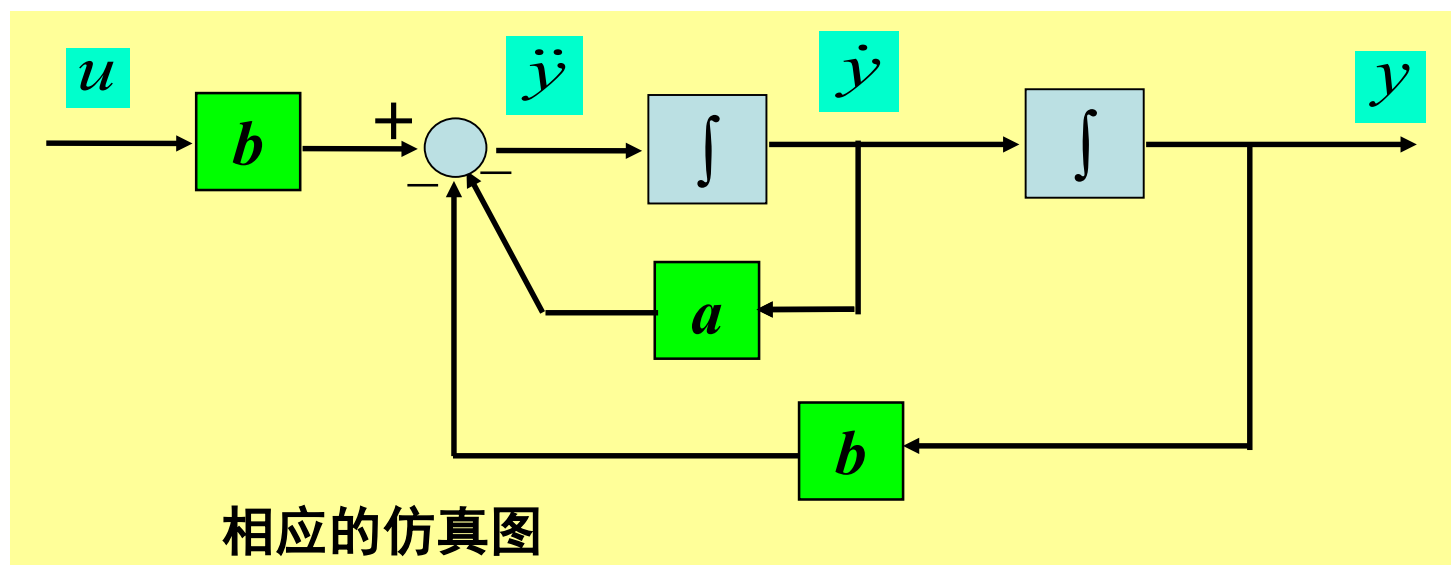
仿真图



$$LC \frac{dv_c^2(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e$$

令 $y=v_c(t)$, $u=e$

$$\ddot{y} = bu - a\dot{y} - by$$



其中

$$a = \frac{R}{L}$$

$$b = \frac{1}{LC}$$

仿真图

➤ 系统仿真图的作图步骤：

步骤1：得到系统的微分方程；

步骤2：重新整理系统微分方程，把输出的最高次微分项放到方程左边；

步骤3：假设方程左边的信号已知，开始作图（注意：首先确定所需的积分器数量）；

步骤4：为了生成第2步中方程左边的信号，将积分器的输出反馈至相应的加法器，并加入所需的输入函数，从而完成作图。

仿真图

➤ 例：作出如图所示的 **RLC** 电路的仿真图。

$$LC \frac{dv_c^2(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e$$

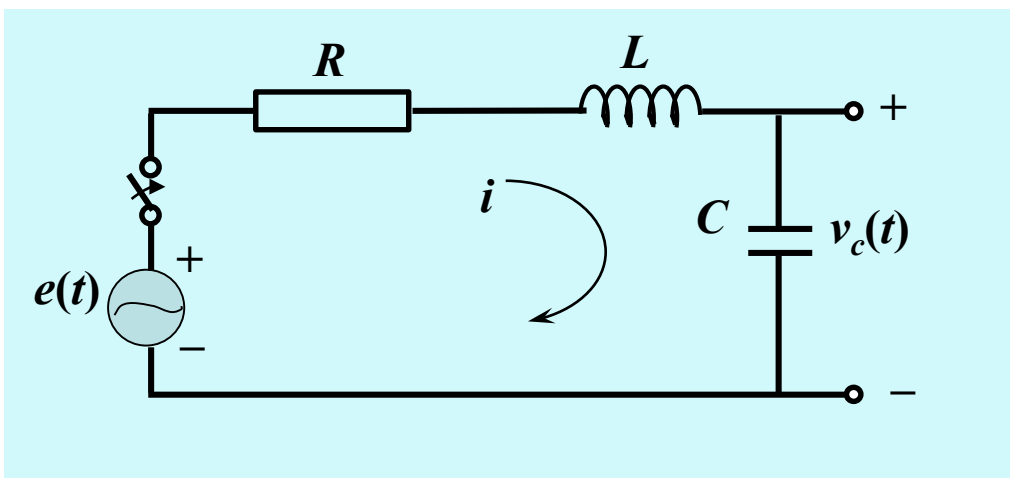
步骤 1 和 2：当 $y=v_c$, $u=e$ 时，重新整理上述方程为：

$$\ddot{y} = bu - a\dot{y} - by$$

其中

$$a = \frac{R}{L}$$

$$b = \frac{1}{LC}$$

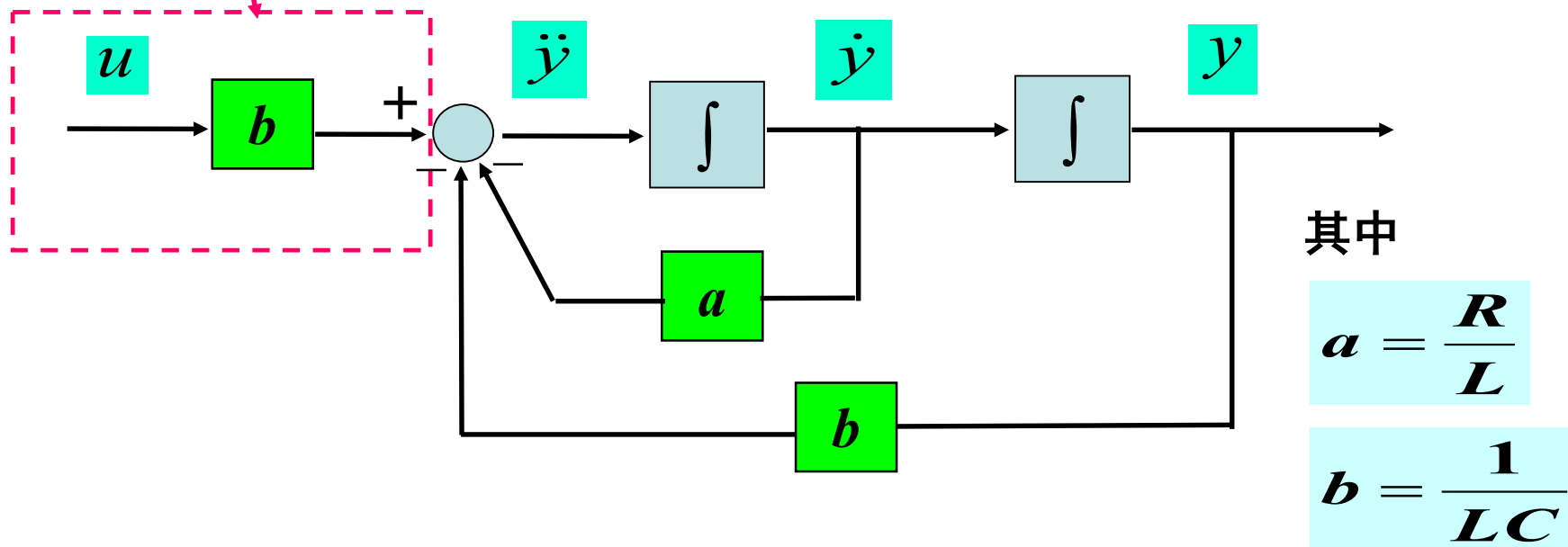


仿真图

$$\ddot{y} = bu - a\dot{y} - by$$

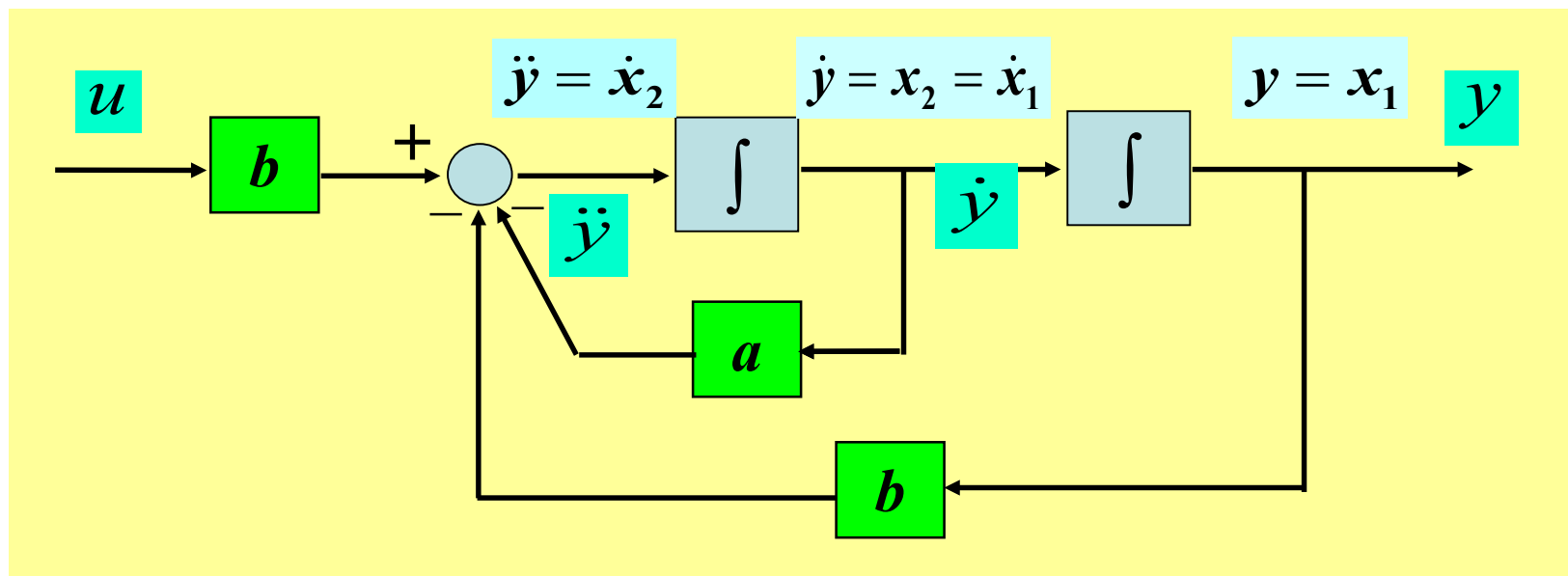
步骤 3: 信号 \ddot{y} 被积分两次, 需要两个积分器

步骤 4: 最终的仿真图如下图所示



仿真图

- 如果将系统的**状态变量**选择为仿真图中各个积分器的输出
- 这样，仿真图就可以表示系统状态变量之间的关系，故仿真图亦可称为**状态变量图**



仿真图

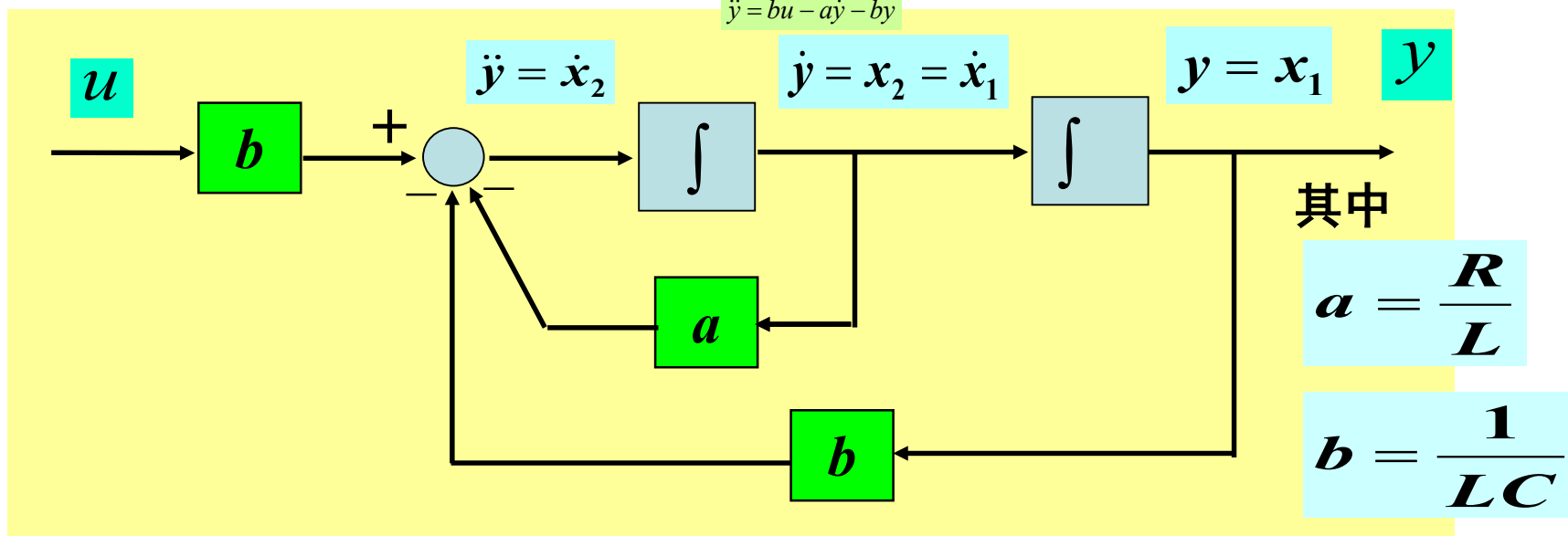
- 根据仿真图，可以很容易地得到系统的**状态变量**（称为**相变量**）；进一步地，可以直接得到系统的状态空间模型。此时的仿真图也称为**状态变量图**。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

- 例：由下图

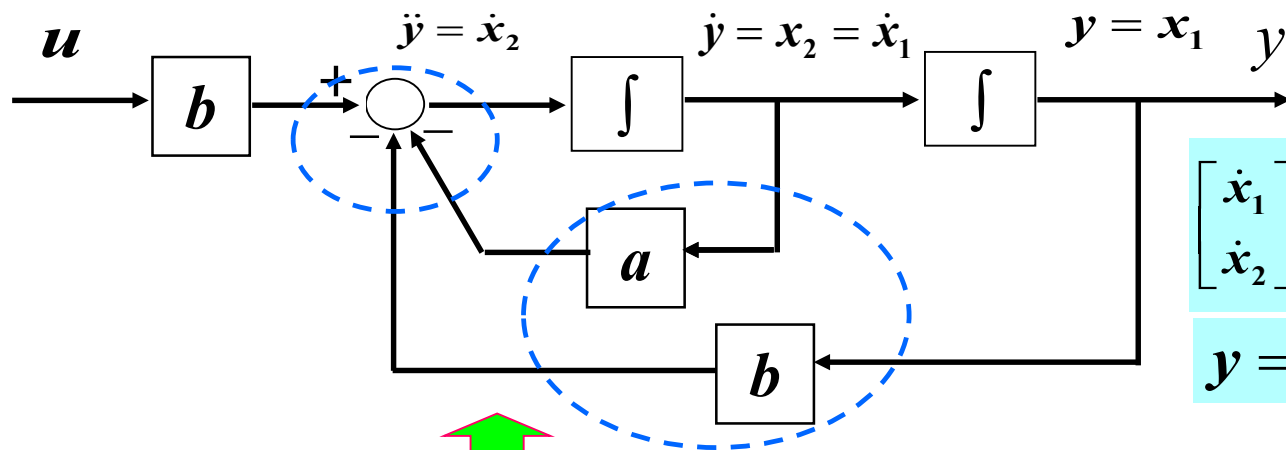
$$y = x_1$$

$$\ddot{y} = bu - a\dot{y} - by$$



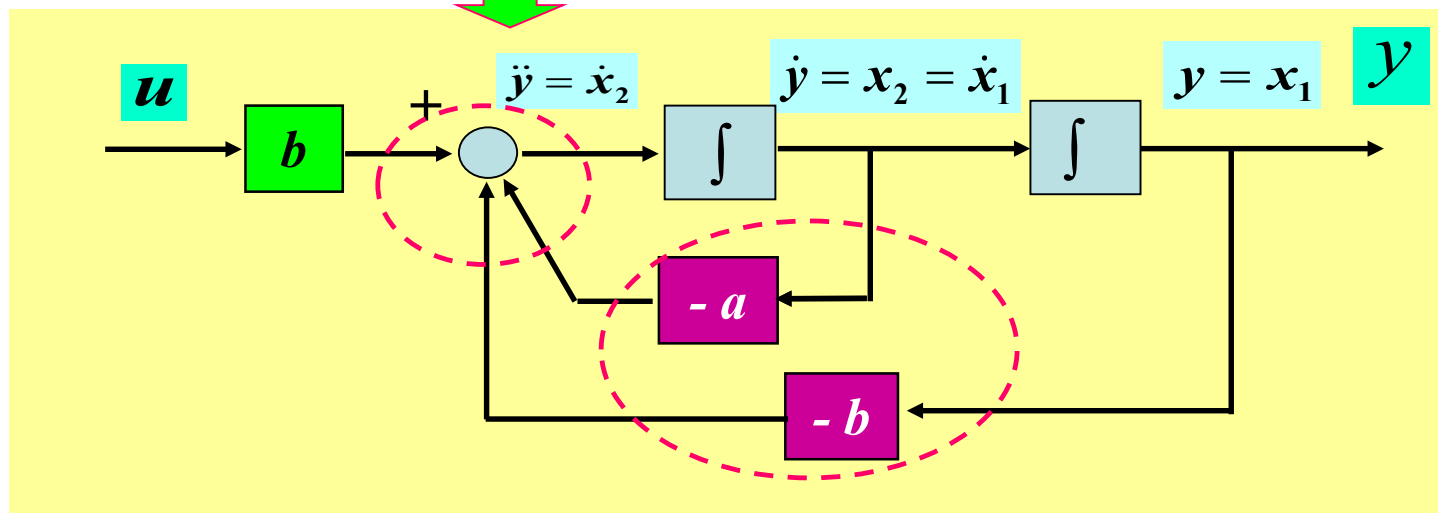
仿真图

- ◆ 为了便于处理，可以作出两种形式的图



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$



其中

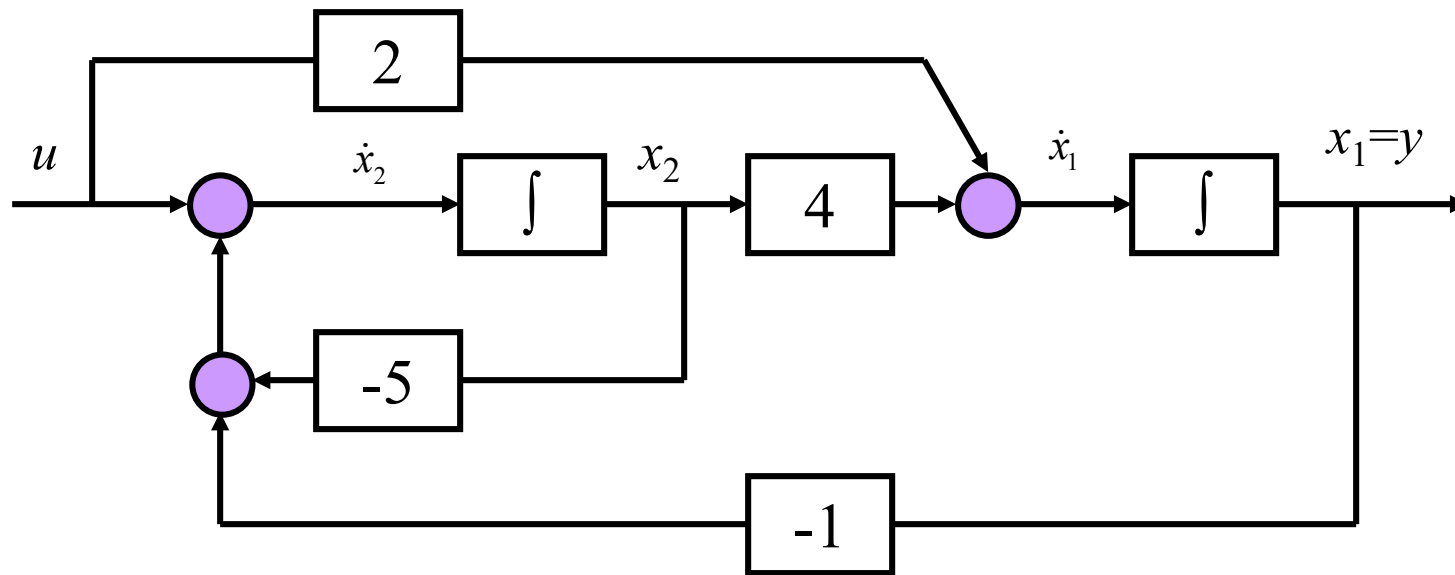
$$a = \frac{R}{L}$$

$$b = \frac{1}{LC}$$

状态变量图

- 针对由下列状态方程描述的系统，作出系统的状态变量图 ($y=x_1$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



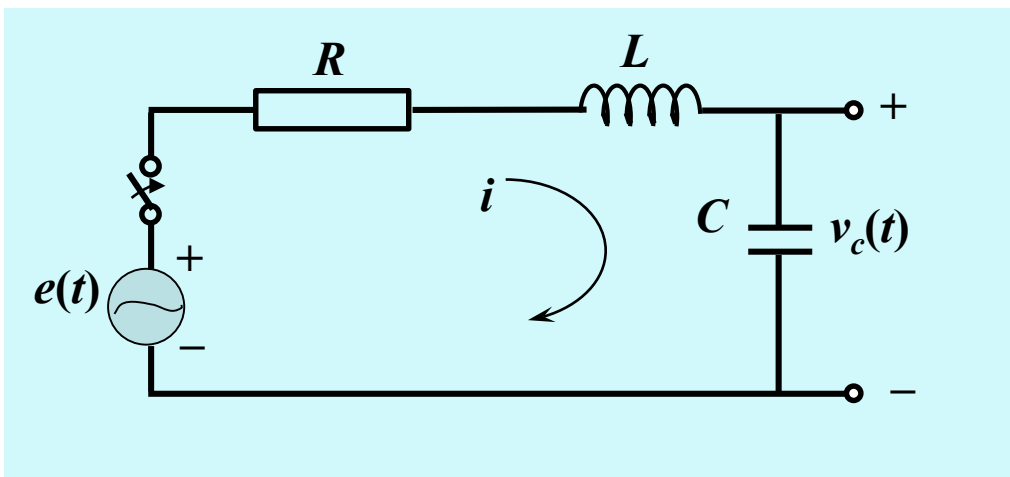
状态空间模型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

针对如图示同一个 RLC 电路，如果选择系统的状态变量为 $x_1 = v_c$ 和 $x_2 = i$ ，即基于系统储能元件的状态变量（物理变量方法），则系统的状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad y = x_1$$



- ◆ 因此，同一个系统可以由不同的状态空间模型表示
- ◆ 状态空间模型的不唯一性来源于状态变量的不唯一性
- ◆ 到目前为止，状态空间模型两种常用的系统状态变量：物理变量和相变量

主要内容

- 微分方程 \Leftrightarrow 传递函数
- 微分方程（传递函数） \Rightarrow 状态空间模型
 - 仿真图与状态变量图
 - 相变量作为状态变量
 - 标准型
- 方块图 \Rightarrow 状态空间模型
- 状态空间模型 \Rightarrow 传递函数

相变量

- 当状态变量为变量及其各阶导数时，称相应的状态变量为**相变量**。
- 相变量概念适用于任意阶微分方程，并且可以在不作仿真图的情况下应用相变量。

相变量：输入无微分项

➤ 不包含输入微分项的微分方程一般形式为：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0y(t) = u$$

系统状态变量选择为相变量，即有 $x_1 = y(t)$ $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}(t)$

$$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) \quad \cdots \cdots \quad x_n = \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)}(t) \quad y^{(n)}(t) = \dot{x}_n$$

在微分方程中代入这些状态变量后可得

$$\dot{x}_n + a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \cdots + a_1x_2 + a_0x_1 = u$$

相变量：输入无微分项

利用相变量后可得，系统状态方程和输出方程为：

$$\dot{x}_n + a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \cdots + a_1x_2 + a_0x_1 = u$$

$$\dot{x}_w = x_{w+1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = x_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]x$$

标准形式：

$$\dot{x} = A_c x + b_c u$$

$$y = c x$$

注意下标

Companion matrix

友矩阵，能控标准型(A_c, b_c)

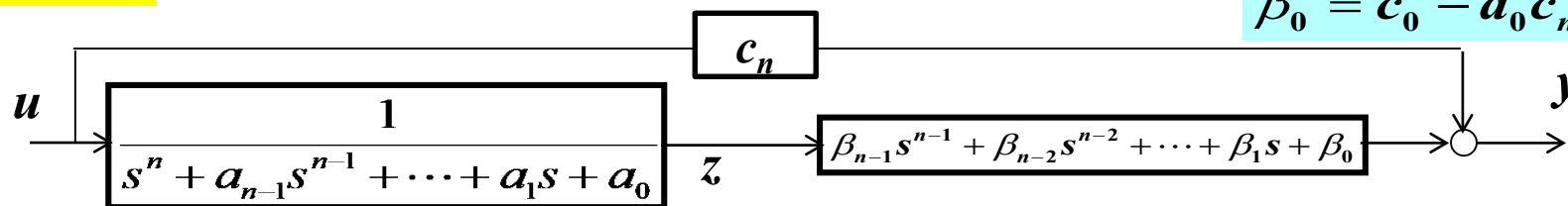
相变量：输入有微分项

$$\begin{aligned} (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)y \\ = (c_nD^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_1D + c_0)u \end{aligned}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c_n + \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

$$\begin{aligned} \beta_{n-1} &= c_{n-1} - a_{n-1}c_n \\ \beta_{n-2} &= c_{n-2} - a_{n-2}c_n \\ &\vdots \\ \beta_1 &= c_1 - a_1c_n \\ \beta_0 &= c_0 - a_0c_n \end{aligned}$$

串联分解



$$y = (\beta_{n-1}D^{n-1} + \beta_{n-2}D^{n-2} + \cdots + \beta_1D + \beta_0)z + c_nu$$

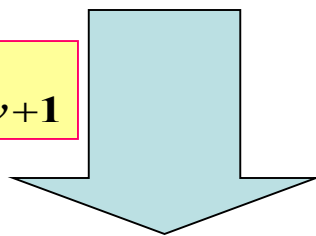
$$z = \frac{u}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

相变量：输入有微分项

微分方程与输入无微分项时具有相同的形式，即

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)z = u$$

$$\dot{x}_w = x_{w+1}$$



标准形式：

$$\dot{x} = A_c x + b_c u$$

其中， A_c 和 b_c 与输入无微分项时一样

✓ 输出方程不同

$$y = (\beta_{n-1}D^{n-1} + \beta_{n-2}D^{n-2} + \cdots + \beta_1D + \beta_0)z + c_n u$$

✓ 由状态变量表示的输出方程变为：

$$y = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_{n-2} x_{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} x_n + c_n u$$

相变量：小结

微分方程

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = (c_w D^w + c_{w-1}D^{w-1} + \dots + c_1D + c_0)u$$

相变量

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$w=n$

$$y = [(c_0 - a_0 c_n) \quad (c_1 - a_1 c_n) \quad \dots \quad (c_{n-1} - a_{n-1} c_n)]x + c_n u$$

$w < n$

$$y = [c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_w \quad 0 \quad \dots \quad 0]x = cx$$

思考：如何用仿真图表示上述系统？

主要内容

- 微分方程 \Leftrightarrow 传递函数
- 微分方程（传递函数） \Rightarrow 状态空间模型
 - 仿真图与状态变量图
 - 相变量作为状态变量
 - 标准型：对角型，能控标准型，能观标准型
- 方块图 \Rightarrow 状态空间模型
- 状态空间模型 \Rightarrow 传递函数

对角标准型

- 由下面微分方程描述的 SISO 系统可以由相应的传递函数表示

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)y = (\beta_w D^w + \beta_{w-1}D^{w-1} + \cdots + \beta_1D + \beta_0)u \quad w \leq n$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\beta_w s^w + \beta_{w-1}s^{w-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0} \quad w \leq n$$

- 进一步地，将传递函数的分母进行因式分解，并将 $G(s)$ 表示为部分分式形式。
当不存在多重极点且 $w=n$ 时

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} = \beta_n + \sum_{i=1}^n G_i(s);$$

$$G_i(s) = \frac{f_i Z_i(s)}{U(s)} = \frac{f_i}{s - \lambda_i}$$

对角标准型

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} = \beta_n + \sum_{i=1}^n G_i(s); \quad G_i(s) = \frac{f_i Z_i(s)}{U(s)} = \frac{f_i}{s - \lambda_i}$$

- 采用符号 z_i 及其拉普拉斯变换形式 $Z_i(s)$ 来表示状态变量，以突出对角阵形式中的状态变量。

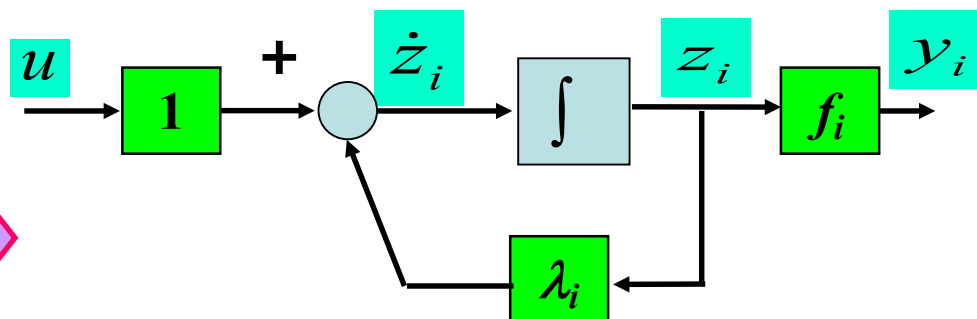
$$\begin{aligned} Y(s) &= \beta_n U(s) + \frac{f_1 U(s)}{s - \lambda_1} + \frac{f_2 U(s)}{s - \lambda_2} + \cdots \\ &= \beta_n U(s) + f_1 Z_1(s) + f_2 Z_2(s) + \cdots \end{aligned}$$

- 所选择的状态变量 $Z_i(s)$ 满足如下方程：

$$Z_i(s) = \frac{U(s)}{s - \lambda_i}; \quad sZ_i(s) - \lambda_i Z_i(s) = U(s)$$

$$\dot{z}_i - \lambda_i z_i = u$$

$$y_i = f_i z_i$$



对角标准型

- 系统的状态空间模型为：

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u = \Lambda \mathbf{z} + \mathbf{b}_n u$$

$$y = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \beta_n u = \mathbf{c}_n \mathbf{z} + d_n u$$

所有元素均为 1

$w=n, d_n \neq 0,$
否则 $d_n=0$

- 系统矩阵 \mathbf{A} 是对角阵，此时系统动态方程称为**正则标准型**状态空间模型，相应的状态变量称为正则（规范）变量（*canonical variables*）。
- 对于 MIMO 系统，有

$$\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{C} \text{ 和 } d \rightarrow D$$

对角标准型

- 系统矩阵 $A=\Lambda$ （对角阵）意味着各个状态变量之间**相互解耦**，即各个状态变量 z_i 不依赖于其他状态变量，可被独立求解。
- 这个特点可以简化**状态转移矩阵 $\Phi(t)$** 的计算程序（第三章）。
- 对角型动态方程对系统研究非常有用，如**能观性**和**能控性**分析。
- 这里讲的系统特征根为各不相同的单根时的正则标准型状态空间描述，是一种最简单的情况。对于存在重根和复根的情况，有兴趣的同学可自学。

对角标准型

【例】设控制系统的传递函数为
试求系统的正则标准型状态空间描述。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 7s + 12)}$$

$$w < n, d_n = 0$$

解：将系统传递函数化为分母为因式相乘的形式

系统的特征根为0, -3, -4; 相应的留数可求得为

$$\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$$

即：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+4}$$

✓ 因此可得系统的正则标准型状态空间描述：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} x$$

状态方程的标准型

A 矩阵的对角化

- 在前面的部分分式展开方法中，我们得到了所需的正则规范型状态空间模型，其中 **A 矩阵是对角阵**。
- 当系统为 MIMO 系统，或者已经给出状态空间描述的系统方程时，这样的部分分式展开方法并不方便。
- 一种更为一般的状态方程转换方法是利用 **线性相似变换**。

能控标准型与能观标准型

- 当状态空间模型中的系统矩阵和控制矩阵具有特定形式的情况下，反馈控制系统的综合及其响应特征分析通常会变得非常容易。
- **从传递函数直接得到系统能控标准型和能观标准型的方法。**

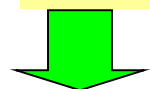
相变量状态方程——能控标准型

- 由下面微分方程表示的 SISO 系统可以由相应的传递函数表示

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)y = (c_w D^w + c_{w-1}D^{w-1} + \cdots + c_1D + c_0)u \quad w \leq n$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{c_w s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \cdots + c_1s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0} \quad w \leq n$$



相变量

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c u \\ y &= c_c x + Du \end{aligned}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

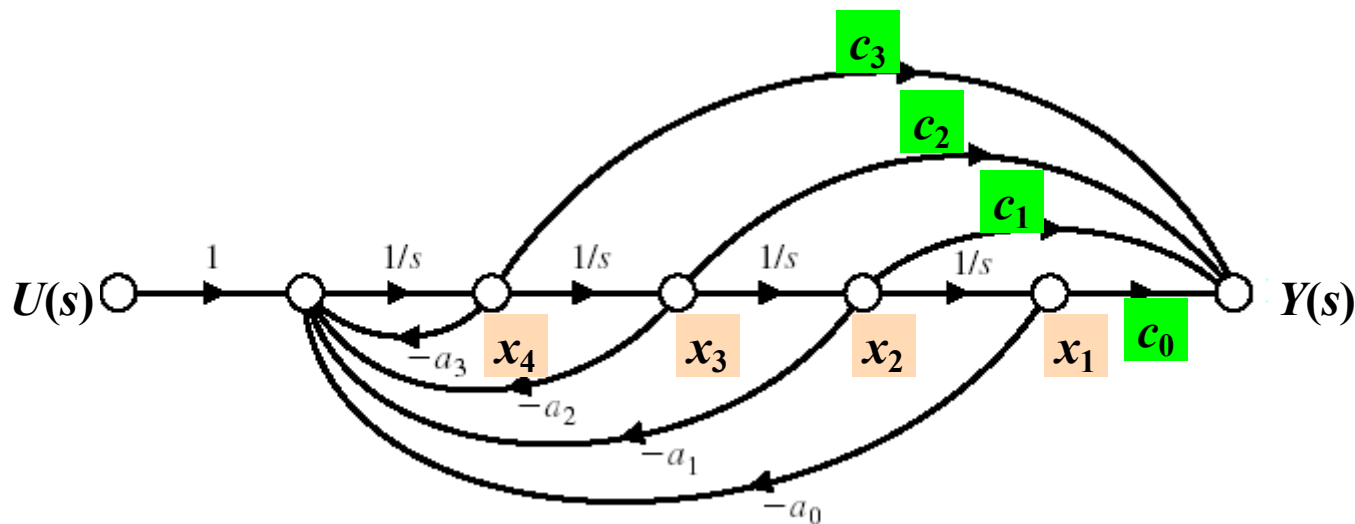
能控(相伴)标准型(**Controllable Standard form**) (A_c, b_c)(只与A、B有关)

$$w = n \quad y = [(c_0 - a_0 c_n) \quad (c_1 - a_1 c_n) \quad \cdots \quad (c_{n-1} - a_{n-1} c_n)]x + [c_n]u$$

$$w < n \quad y = [c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_w \quad 0 \quad \cdots \quad 0]x = c x$$

能控标准型

【例】请写出如图所示系统的传递函数与能控标准型。



解：

因为该图以相变量为状态变量，可直接由图写出系统的传递函数与能控标准型。
又因 $w=3 < n=4$ ，故有

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

能控标准型

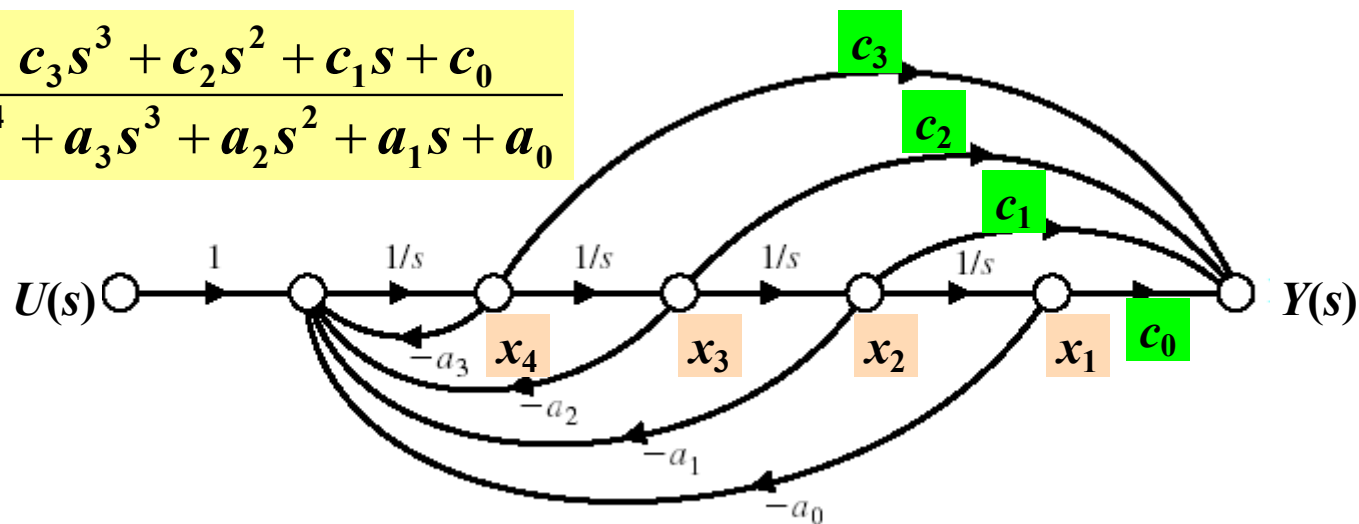
请写出如图所示系统的传递函数与能控标准型。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

↓

$$\dot{x} = A_c x + B_c u$$

$$y = c_c x + D u$$



式中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}$$

$$b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = 0$$

$$c_c = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3]$$

能观标准型

➤ 另一个重要的状态方程形式是能观标准型。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{c_w s^w + c_{w-1} s^{w-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad w \leq n$$

$$y = x_n + c_n u$$

$$w = n, c_n \neq 0$$

$$y = x_n + c_n u$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_0 y + c_0 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_1 y + c_1 u \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_0 y + c_0 u = -a_0 x_n + (c_0 - a_0 c_n) u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_1 y + c_1 u = x_1 - a_1 x_n + (c_1 - a_1 c_n) u \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1} y + c_{n-1} u$$

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1} y + c_{n-1} u = x_{n-1} - a_{n-1} x_n + (c_{n-1} - a_{n-1} c_n) u$$

$$\dot{x} = A_o x + B_o u$$

$$y = c_o x + D u$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c_o = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

$$w = n, c_n \neq 0$$

$$B_o = \begin{bmatrix} c_0 - a_0 c_n \\ c_1 - a_1 c_n \\ c_2 - a_2 c_n \\ \vdots \\ c_{n-1} - a_{n-1} c_n \end{bmatrix}$$

$$D = c_n$$

$$w < n, c_n = 0$$

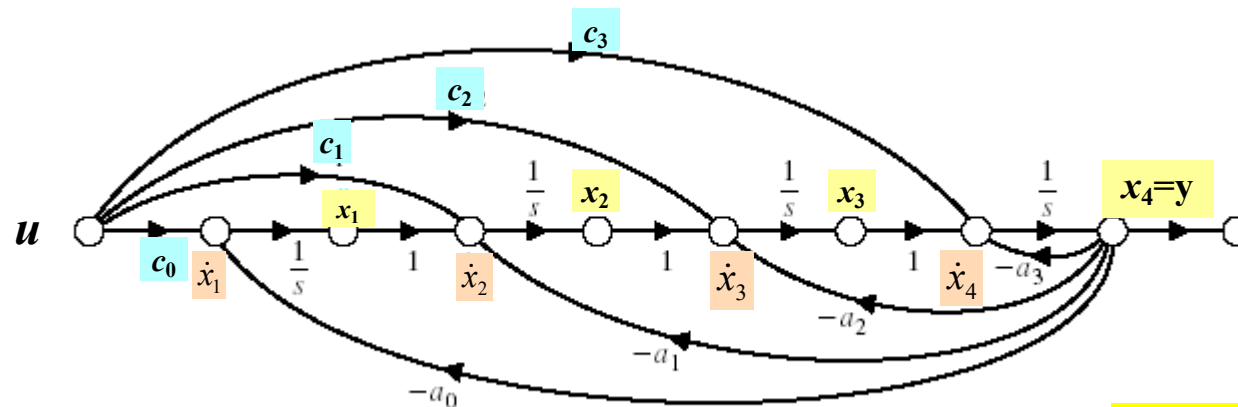
$$B_o = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

能观标准型(A_o, C_o)(只与A、C有关)

能观标准型

【例】请写出如图所示系统的状态空间表达式（能观标准型）。



解：

$$y = x_4$$

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_4 + c_0 u$$

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_4 + x_1 + c_1 u$$

$$\dot{x}_3 = -a_2 x_4 + x_2 + c_2 u$$

$$\dot{x}_4 = -a_3 x_4 + x_3 + c_3 u$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}$$

$$c_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w < n, c_4 = 0$$

$$B_o = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

能控标准型与能观标准型

【例】设控制系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 7s + 12)}$$

试求系统的能控和能观标准型状态空间描述。

解：(1) 将系统传递函数对照能控标准型公式，可得

$$w = 2, \quad n = 3, \quad c_2 = 1, \quad c_1 = 3, \quad c_0 = 2 \\ a_3 = 1, \quad a_2 = 7, \quad a_1 = 12, \quad a_0 = 0$$

进而可得系统的能控标准型状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [2 \quad 3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

能控标准型与能观标准型

【例】设控制系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 7s + 12)}$$

试求系统的能控和能观标准型状态空间描述。

解：(2) 将系统传递函数对照能观标准型公式，因为

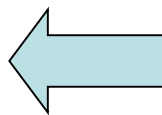
$$w = 2, \quad n = 3, \quad c_2 = 1, \quad c_1 = 3, \quad c_0 = 2$$
$$a_3 = 1, \quad a_2 = 7, \quad a_1 = 12, \quad a_0 = 0$$

进而可得系统的能观标准型状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [2 \quad 3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

能控标准型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}$$



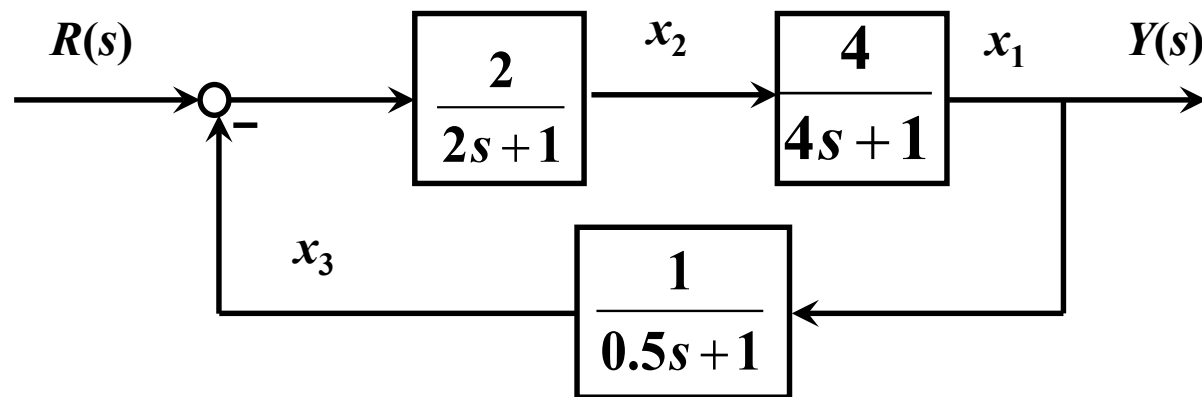
主要内容

- 微分方程 \Leftrightarrow 传递函数
- 微分方程（传递函数） \Rightarrow 状态空间模型
- 方块图 \Rightarrow 状态空间模型
- 状态空间模型 \Rightarrow 传递函数

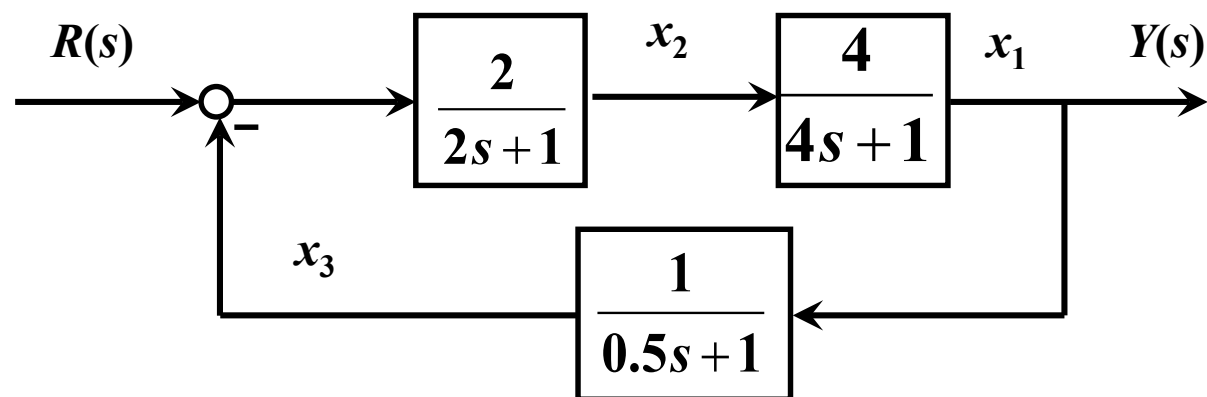
从方块图到状态空间模型

- 从已知的控制系统方块图中，选择一阶环节的输出变量作为状态变量，经直接计算将方块图化为状态变量图，从而可得系统的状态空间表达式。

【例】已知系统的方块图如下图所示，请写出状态空间表达式并画出状态变量图。



从方块图到状态空间模型



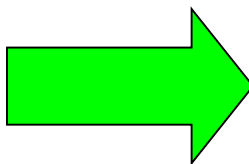
解：由图中的状态变量，可写出：

$$X_2(s) = \frac{2}{2s+1}(R - X_3(s))$$

$$X_1(s) = \frac{4}{4s+1}X_2(s)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{0.5s+1}X_1(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$



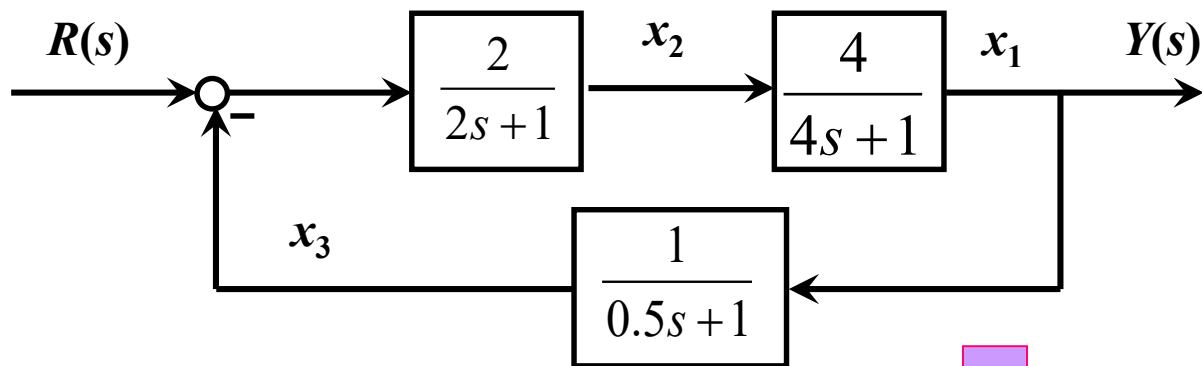
$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{4}x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3 + r$$

$$\dot{x}_3 = 2x_1 - 2x_3$$

$$y = x_1$$

从方块图到状态空间模型



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] x = x_1$$

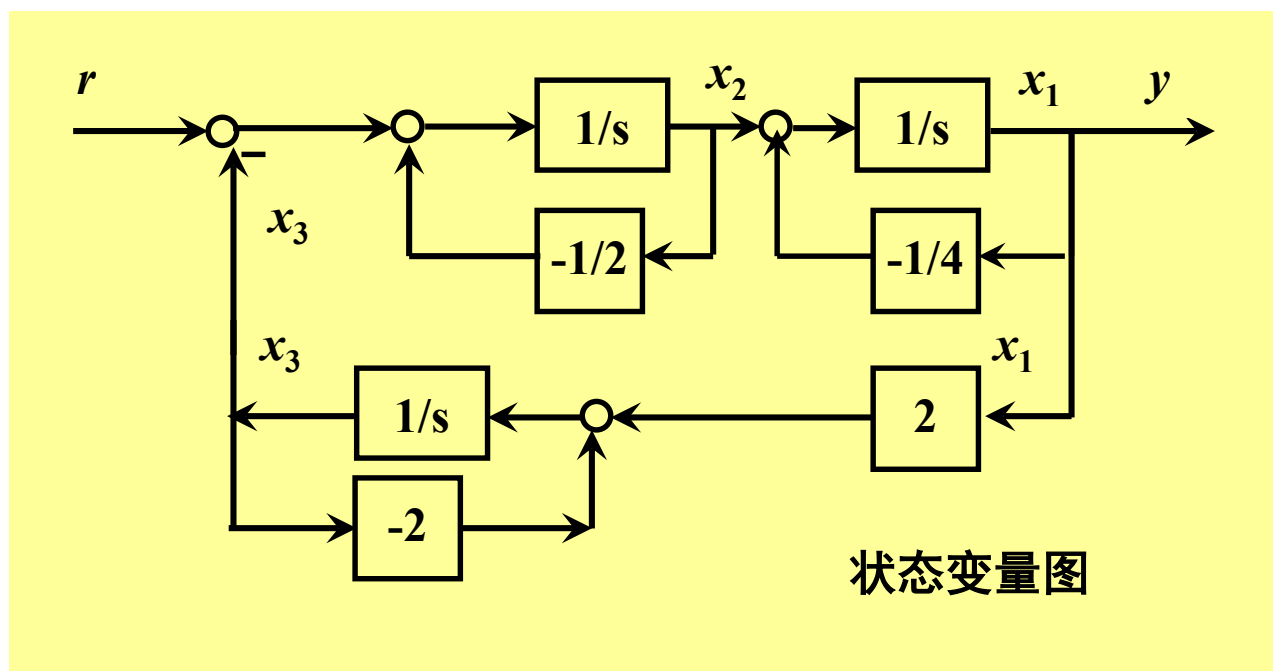
$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{4}x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3 + r$$

$$\dot{x}_3 = 2x_1 - 2x_3$$

$$y = x_1$$

思考：针对状态变量图能否画出状态变量信号流图？



主要内容

- 微分方程 \Leftrightarrow 传递函数
- 微分方程（传递函数） \Rightarrow 状态空间模型
- 方块图 \Rightarrow 状态空间模型
- **状态空间模型 \Rightarrow 传递函数**
 - 对状态方程和输出方程进行拉氏变换

从状态空间模型到传递函数

状态空间模型标准形式:

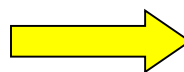
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

LT

拉普拉斯变换形式:

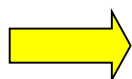
$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$



$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$



$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$



$$\begin{aligned} Y(s) &= C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s) \\ &= [C(sI - A)^{-1} B + D]U(s) \end{aligned}$$

由传递函数概念可以得到

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(sI - A)^{-1} B + D]$$

从状态空间模型到传递函数

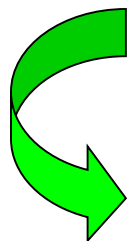
状态空间模型标准形式：



传递函数模型：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

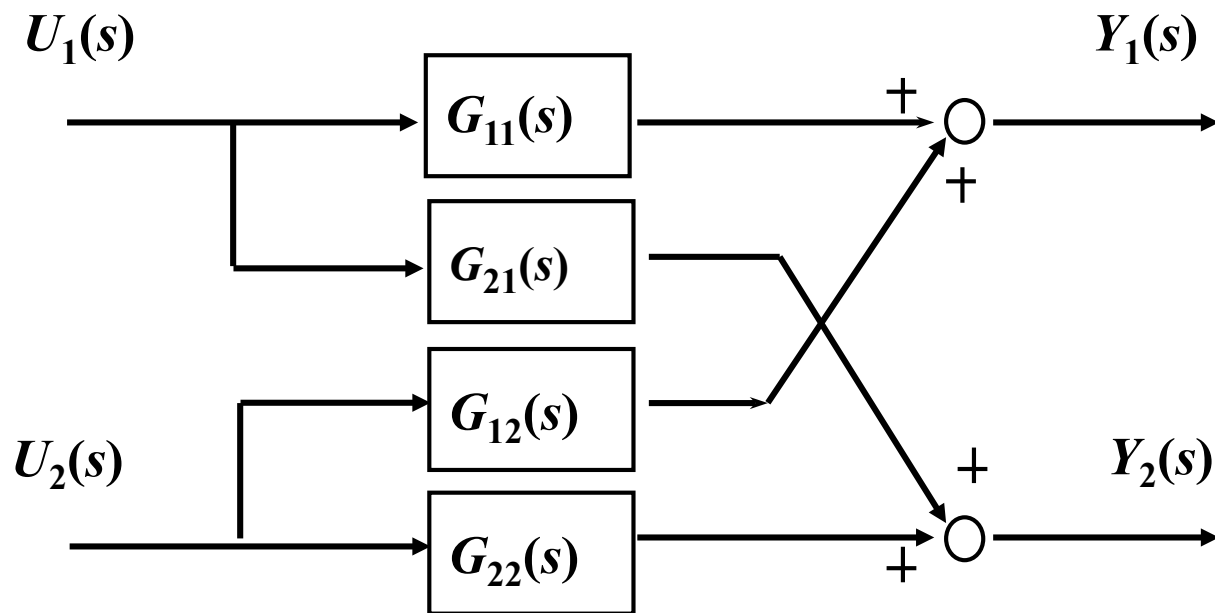


$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]$$

- 当系统输入变量 u 和输出变量 y 均为标量时，系统称为单输入单输出系统（SISO系统）， $G(s)$ 称为传递函数，其中， \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 是向量。
- 当系统有多个输入变量 u 和输出变量 y 时，系统称为多输入多输出系统（MIMO系统），此时， \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 是矩阵，因此 $G(s)$ 也是矩阵，称为传递函数矩阵。

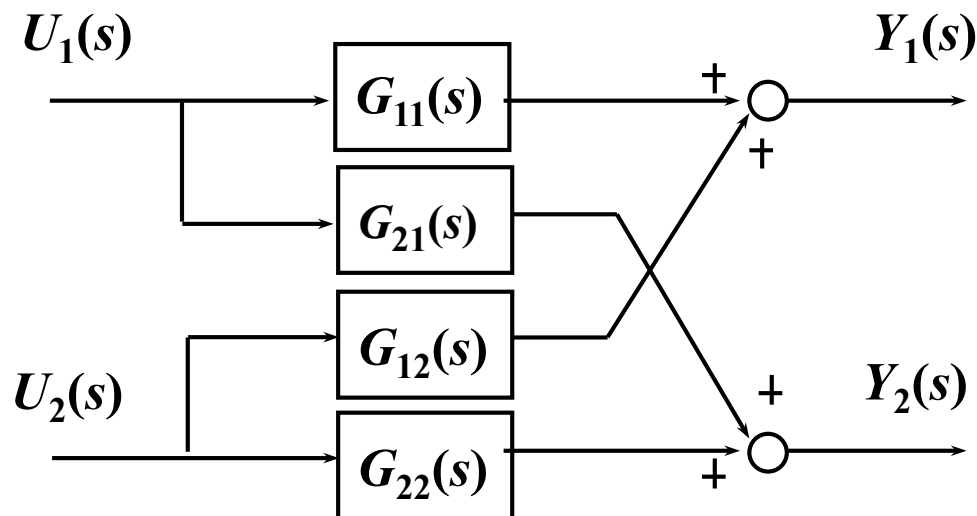
多变量系统的传递函数矩阵表示(1)

将描述单输入单输出系统的动态特性的传递函数概念推广到多输入多输出系统，就可用**传递函数矩阵**来描述多变量系统的动态特性。



如图所示两变量系统，当初始条件为零时， $Y_1=?$ ， $Y_2=?$

多变量系统的传递函数矩阵表示(2)



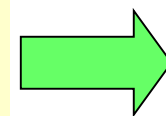
写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

传递函数矩阵

如图所示两变量系统，当初始条件为零时，可以用拉氏变换式表示：

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) \\ Y_2(s) &= G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) \end{aligned}$$

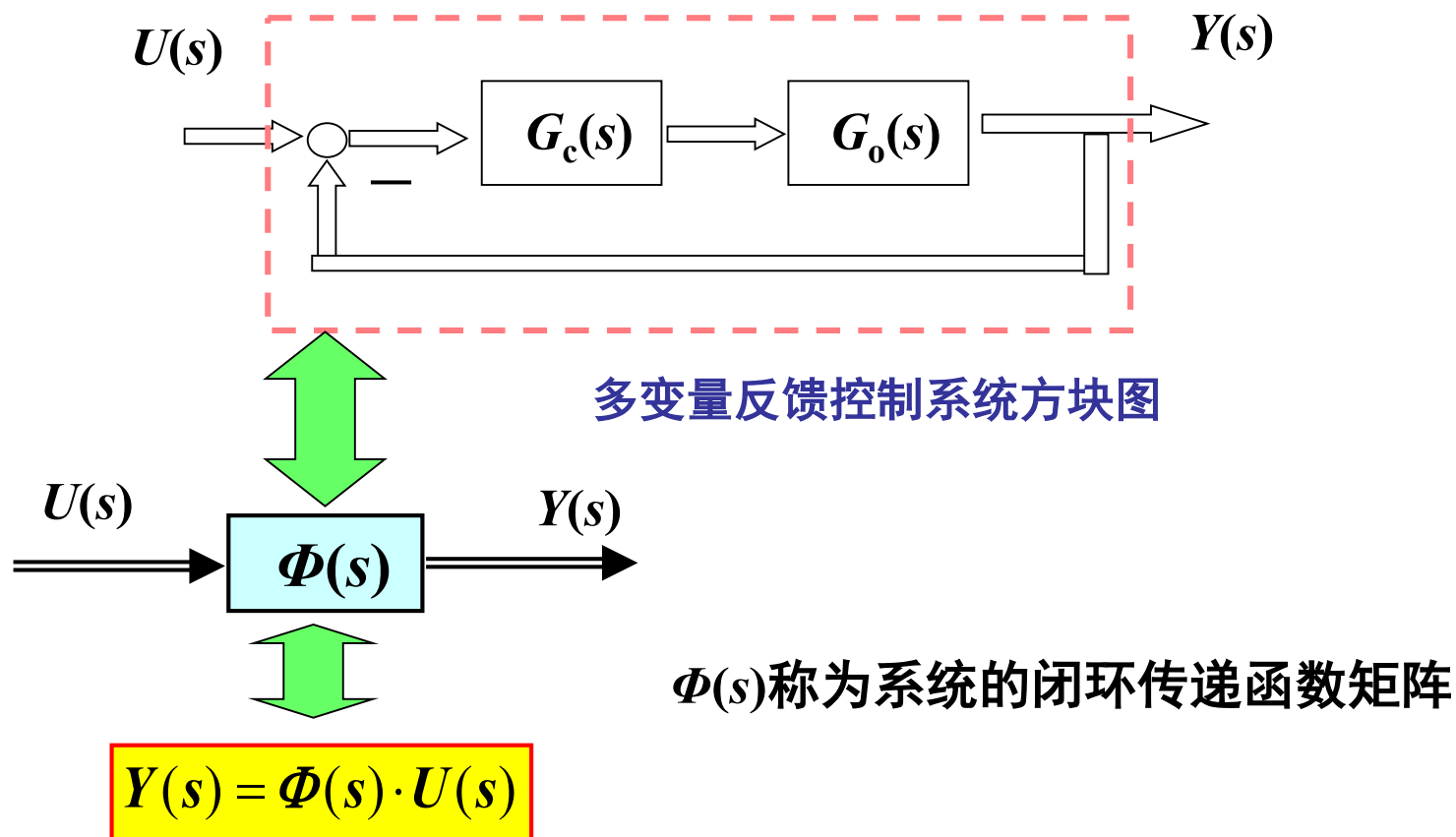


$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

传递函数矩阵 $G(s)$ 拓宽了传递函数的概念，它适用于 r 个输入、 m 个输出的系统，这时的 $G(s)$ 为 $m \times r$ 维矩阵，其元素 $G_{ij}(s)$ 表示第 j 个输入对第 i 个输出的传递函数。

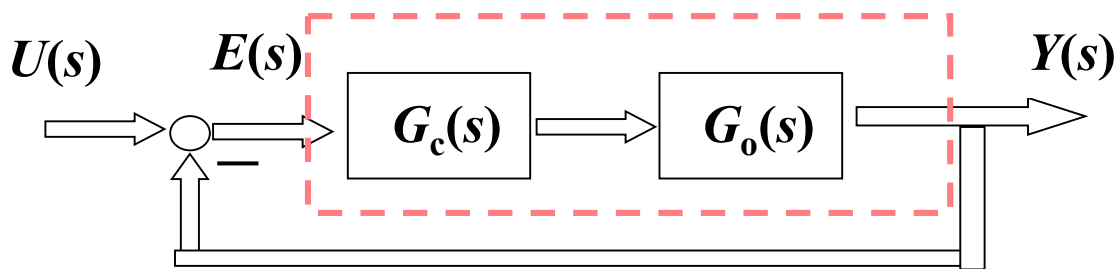
多变量系统的传递函数矩阵表示(3)

对于多变量系统，在画方块图时，往往采用带箭头的双线表示信息流向，特别要注意在计算时与单变量不同的是在这里必须按照**矩阵计算的规则**进行，如乘法的前后次序不能颠倒。



多变量系统的传递函数矩阵表示(4)

对于多变量系统的方块图运算，特别要注意在计算时必须按照矩阵计算的规则进行，乘法的前后次序不能颠倒。



$$Y(s) = \Phi(s) \cdot U(s)$$

闭环传递函数矩阵 $\Phi(s)$

如图所示系统：

$$Y(s) = G(s)E(s) = G_0(s)G_c(s)E(s)$$

$$E(s) = U(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)[U(s) - Y(s)]$$

$$Y(s) = [I + G(s)]^{-1} G(s) U(s)$$

$G(s)$ 称为系统的开环传递函数矩阵

注意到：计算时要从输出端开始，逆着箭头方向，顺序不能变换。

从状态空间模型到传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(sI - A)^{-1}B + D]$$
$$= \frac{C[\text{adj}(sI - A)]B}{\det(sI - A)} + D$$

- 式中， $\text{adj}(sI - A)$ 为 $(sI - A)$ 矩阵的伴随矩阵(**adjoint**)； $\det(sI - A)$ 为矩阵 $(sI - A)$ 的行列式(**determinant**)。
- 关于矩阵运算及符号表达请复习“线性代数”的相关知识。
- ◆ **问题：**已知同一系统的状态变量选择是非唯一的，也即状态方程非唯一，由这些不同的状态方程转化为传递函数时，所得到的该系统的传递函数是同一个吗？为什么？

从状态空间模型到传递函数

【例 A】 设系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

求系统的传递函数。

解：由题目可得，这是一个SISO系统，状态空间描述的[A, B, C]分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 先求 $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$$
$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+1} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

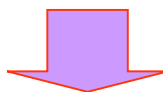


从状态空间模型到传递函数

【例 A】 设系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

求系统的传递函数。



(2) 所以系统的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s(s+3)+1} & \frac{1}{s(s+3)+1} \\ \frac{-1}{s(s+3)+1} & \frac{s}{s(s+3)+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+3)+1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \end{aligned}$$

由已经得到的系统传递函数，很容易地就可以得到代表原动态系统的微分方程模型。

(3) 所以原系统的微分方程为

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = u$$



从状态空间模型到传递函数

【例 B】设一控制系统的动态过程表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{这里 } D = 0$$

式中， u ， y 分别为系统的输入和输出信号，试求系统的传递函数描述。

解：

矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = 0$$



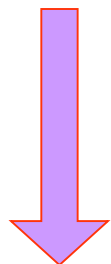
$$G(s) = \frac{C[\text{adj}(sI - A)]B}{\det(sI - A)} + D$$

从状态空间模型到传递函数



$$\therefore \text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s(s+9)+8 & s+9 & 1 \\ 0 & s(s+9) & s \\ 0 & -8s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

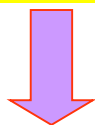


$$\Delta = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 8 & s+9 \end{vmatrix} = s(s+1)(s+8)$$

$$C = [1 \quad 4 \quad 1]$$

传递函数

$$\therefore G(s) = \frac{C[\text{adj}(sI - A)]B}{\det(sI - A)} = \frac{[1 \quad 4 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{s^2 + 4s + 1}{s^3 + 9s^2 + 8s}$$



系统的微分方程表示为

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 8y = \ddot{u} + 4\dot{u} + u$$

从状态空间模型到传递函数

【例 B'】 设一控制系统的动态过程用微分方程表示为

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 8y = \ddot{u} + 4\dot{u} + u$$

式中， u ， y 分别为系统的输入和输出信号，已知系统的状态空间一种描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 38 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

试由状态空间模型求系统的传递函数描述。

从状态空间模型到传递函数

将矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 38 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad D = 0 \quad \text{代入}$$

$$G(s) = \frac{C[adj(sI - A)]B}{\det(sI - A)} + D$$

$$\therefore adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s(s+9)+8 & s+9 & 1 \\ 0 & s(s+9) & s \\ 0 & -8s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 8 & s+9 \end{vmatrix} = s(s+1)(s+8)$$

传递函数

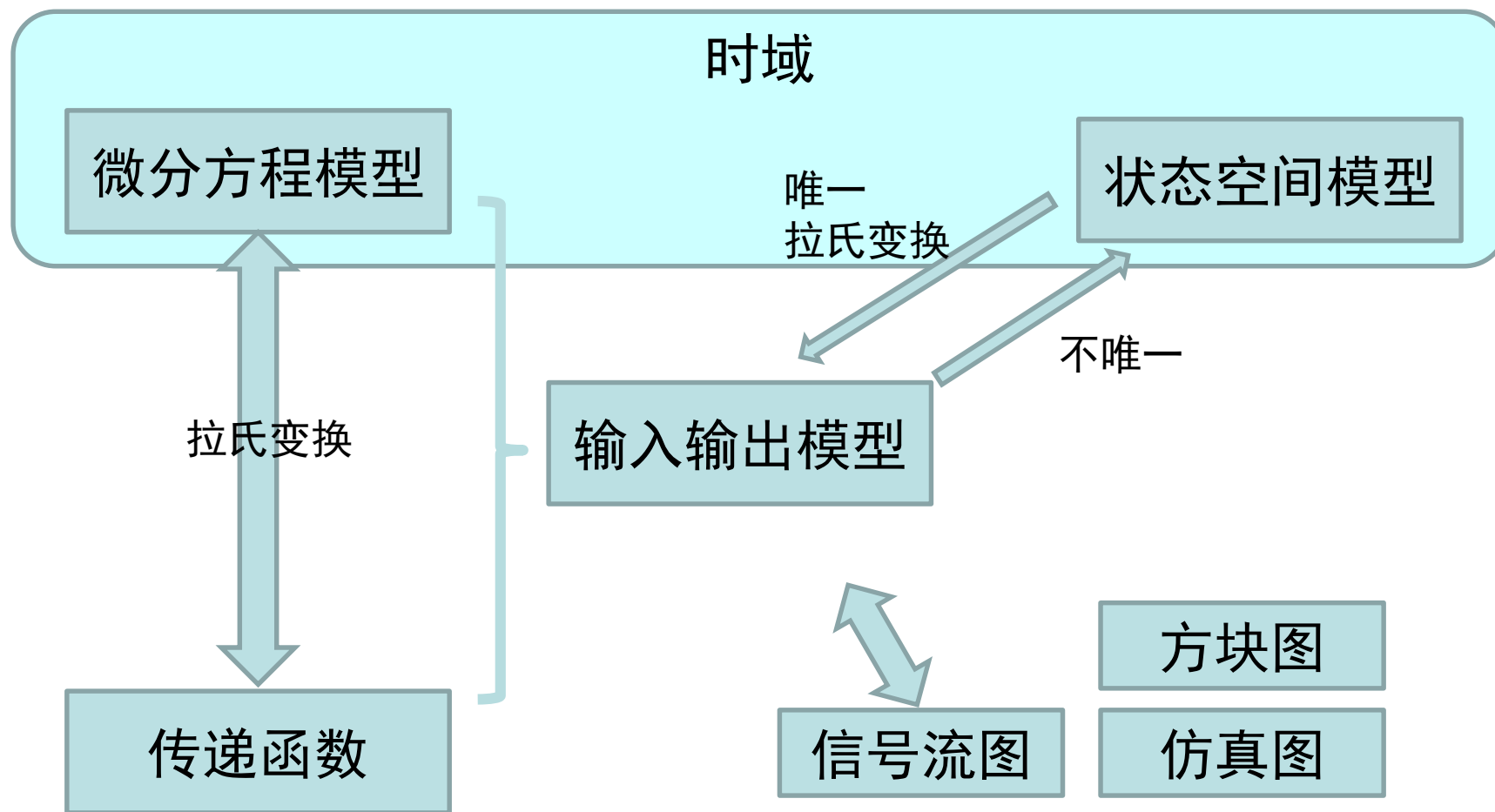
$$\therefore G(s) = \frac{C[adj(sI - A)]B}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 9s + 8 & s + 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 38 \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{s^2 + 4s + 1}{s^3 + 9s^2 + 8s}$$

系统的微分方程表示为

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 8y = \ddot{u} + 4\dot{u} + u$$

结论：?? 代表同一系统的不同的状态方程。。。。。

小结



The End