# 矩阵论习题课解答

## ——习题 6.2

李嘉逸

jayee@live.cn

信息与电子工程学院
浙江大学

2024 年 10 月 30 日

# 题目 6.2

令 $\lambda > 0$，并且 $Ax = b$ 为超定方程. 证明:

$$\min \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2 - \frac{1}{2}\lambda||x||_2^2$$

的最优解为 $x = (A^{\mathrm{H}}A - \lambda I)^{-1}A^{\mathrm{H}}b$

证明: 由题意得, 代价函数为

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2 - \frac{1}{2}\lambda||x||_2^2 \\
&= \frac{1}{2}(Ax - b)^{\mathrm{H}}(Ax - b) - \frac{1}{2}\lambda x^{\mathrm{H}}x \\
&= \frac{1}{2}(x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}} - b^{\mathrm{H}})(Ax - b) - \frac{1}{2}\lambda x^{\mathrm{H}}x \\
&= \frac{1}{2}x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Ax - \frac{1}{2}x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}b - \frac{1}{2}b^{\mathrm{H}}Ax + \frac{1}{2}b^{\mathrm{H}}b - \frac{1}{2}\lambda x^{\mathrm{H}}x
\end{aligned}$$

# 解答

代价函数为

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Ax - \frac{1}{2}x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}b - \frac{1}{2}b^{\mathrm{H}}Ax + \frac{1}{2}b^{\mathrm{H}}b - \frac{1}{2}\lambda x^{\mathrm{H}}x$$

令其梯度为零有

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = A^{\mathrm{H}}Ax - A^{\mathrm{H}}b - \lambda x = 0$$

因此最优解为

$$\mathbf{x} = (A^{\mathrm{H}}A - \lambda I)^{-1}A^{\mathrm{H}}b$$