

# 自动控制理论

## Automatic Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大



## 第四章 CHAPTER 4

### 连续时间控制系统的稳定性与稳态误差



# 第四章关键词

---

- 系统稳定性
- 劳斯稳定性判据
- 相对稳定性
- 系统型别
- 稳态误差
- 稳态误差系数

# 第四章主要内容

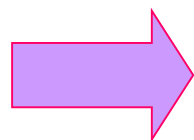
---

- 引言
- 劳斯稳定性判据（包括相对稳定性）
- 反馈系统型别
- 稳态误差系数
- 稳态误差系数的应用
- 非单位反馈系统

# 引言

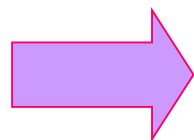
## ➤ 衡量反馈控制系统性能的五个重要指标

– 稳定性



取决于系统的特征方程，  
有多种分析方法。

– 稳态误差



取决于系统的结构（型别）

– 可控性

– 可观性

– 参数灵敏性



基于状态空间模型（秋学期）

# 引言

## ➤ 系统稳定性判别

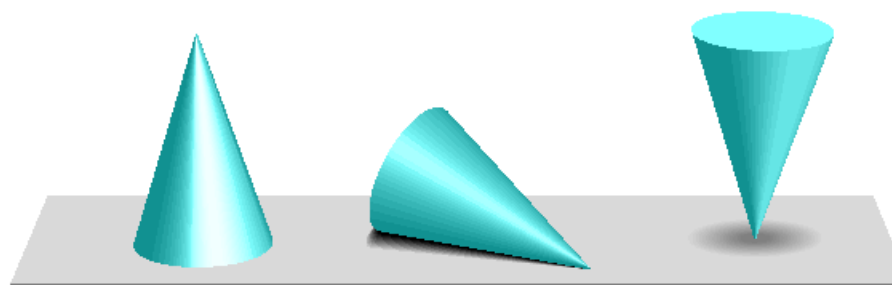
- 劳斯稳定性判据
- 不需要计算出系统特征方程的根，就可以判别系统是否稳定，并推断位于复平面**右半平面**的特征根的个数
- 提供了保证系统稳定性的系统参数**设计方法**
- **相对稳定**的概念，即系统的稳定程度，与特征根到虚轴之间的距离有关

## ➤ 稳态误差——系统稳定后的性能度量

- 可以根据**单位反馈系统**（或等价的单位反馈系统）的**开环传递函数**获得
- 为系统分类提供了一种性能指标依据

# 稳定性概念

➤ 利用放置在水平面上的圆锥体的运动来理解稳定性的概念。



(a) Stable  
稳定

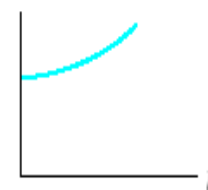
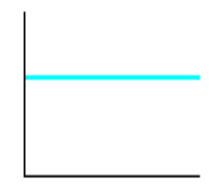
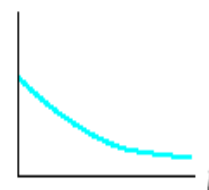
(b) Neutral  
临界稳定

(c) Unstable  
不稳定

Stable

Neutral

Unstable



➤ 线性定常系统稳定的一个充分必要条件是，系统传递函数的所有极点均具有负实部。


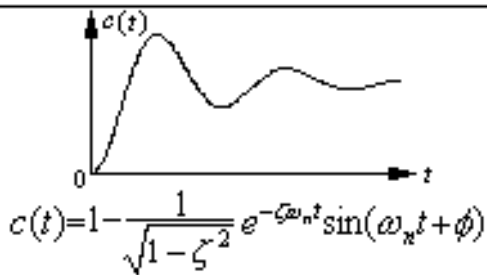
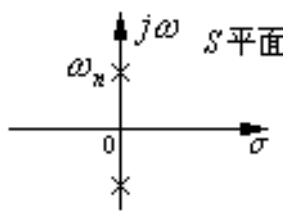
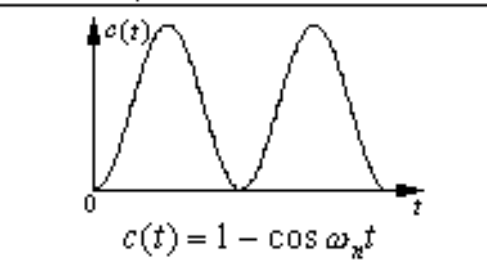
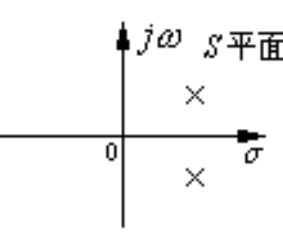
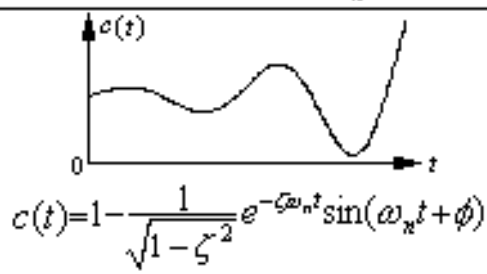
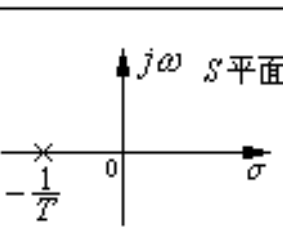
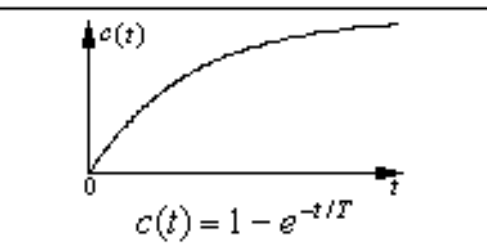
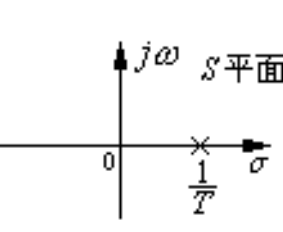
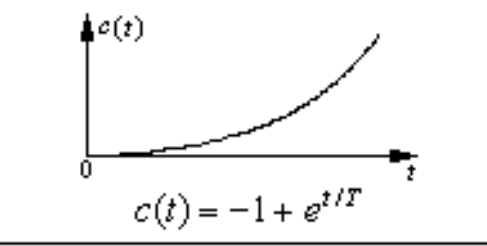
# 稳定性概念

- 稳定性是控制系统最重要的问题，也是对系统最基本的要求。
- 控制系统在实际运行中，总会受到外界和内部一些因素的扰动，例如负载或能源的波动、环境条件的改变、系统参数的变化等。
- 如果**系统不稳定**，当它受到扰动时，系统中各物理量就会偏离其平衡工作点，并随时间推移而发散，即使扰动消失了，也不可能恢复原来的平衡状态。
- 如何分析系统的稳定性并提出保证系统稳定的措施，是控制理论的**基本任务之一**。

**定义：**线性控制系统在初始扰动的影响下，动态过程随时间推移逐渐衰减并趋于零(原平衡工作点)，则称系统渐近稳定，简称稳定；反之，若在初始扰动影响下，系统动态过程随时间推移而发散，则称系统不稳定。



# 系统稳定性的简单例子

系统特征方程及其特征根	极点分布	单位阶跃响应	稳定性
$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $(0 < \zeta < 1)$		 $c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t + \phi)$	稳定
$s^2 + \omega_n^2 = 0$ $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ $(\zeta = 0)$		 $c(t) = 1 - \cos \omega_n t$	临界 (属不稳定)
$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $(0 > \zeta > -1)$		 $c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t + \phi)$	不稳定
$Ts + 1 = 0$ $s = -\frac{1}{T}$		 $c(t) = 1 - e^{-t/T}$	稳定
$Ts - 1 = 0$ $s = \frac{1}{T}$		 $c(t) = -1 + e^{t/T}$	不稳定

# 稳定性判别方法

- 令特征多项式（闭环传递函数的**分母**）等于零，计算出系统的极点
- 不直接计算系统极点
  - 劳斯-赫尔维茨判据 根据系统特征方程
  - 根轨迹 根据系统开环传递函数
  - 奈奎斯特判据
- 对于一般的非线性系统（线性系统为非线性系统的特例），可以利用**李亚普诺夫稳定性理论**来判别系统的稳定性

# 主要内容

---

## ➤ 引言

## ➤ 劳斯稳定性判据

- 劳斯稳定性判据
- 劳斯判据的应用
- 相对稳定性
- 参数范围

## ➤ 反馈系统型别

## ➤ 稳态误差系数

## ➤ 稳态误差系数的应用

## ➤ 非单位反馈系统

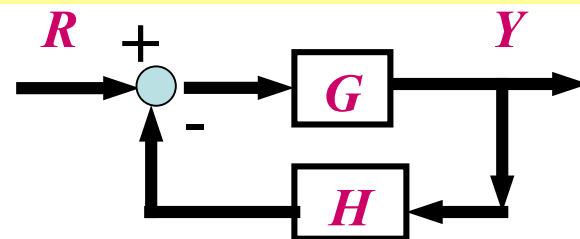
# 劳斯稳定性判据

- 考虑  $n$  阶系统的闭环传递函数

$$G_{closed}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

其中,

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$



特征多项式

- 为了计算系统闭环传递函数的极点, 需要求解如下方程:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

- 将  $Q(s)$  写成因式相乘形式, 可以得到 ( $\lambda_i, i=1, \cdots, n$  为系统特征根)

$$Q(s) = a_n (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = 0$$

- 将因式相乘后展开, 可以得到

$$a_n \left[ s^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) s^{n-1} + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \cdots) s^{n-2} - (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \cdots) s^{n-3} + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \right] = 0$$

# 劳斯稳定性判据

➤ 对于  $n$  阶方程，可以得到

$$Q(s) = a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} \sum \text{所有特征根} + a_{n-2} s^{n-2} \sum \text{所有两个特征根的乘积} - a_{n-3} s^{n-3} \sum \text{所有三个特征根的乘积} + \dots + \sum a_n (-1)^n (\text{所有 } n \text{ 个特征根的乘积})$$

➤ 如果所有特征根均位于  $S$  平面的左半平面，则：

– 特征多项式的所有系数均有**相同的符号**

– 所有系数均为非零常数

➤ 这些条件是系统稳定的**必要**但**非充分**条件

◆ 例：

$s^2 + 5 = 0 \rightarrow$  不稳定，不满足第二个条件；

$s^3 + s^2 + 2s + 8 = 0 \rightarrow$  不能判断，上述两个条件均满足。

# 劳斯稳定性判据

劳斯判据给出了判定系统稳定性的充分必要条件，其判定稳定性的过程如下：

➤ **步骤 1：** 将系统特征多项式的系数排列成如下阵列：

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\cdots$

➤ **步骤 2：** 计算并完成劳斯阵列

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$s^{n-3}$	$d_1$	$d_2$	$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
$s^1$	$j_1$			
$s^0$	$k_1$			

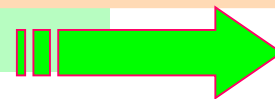
$$c_1 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$c_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

.....

连续运算，直到余下的  $c$  式都为零。



# 劳斯稳定性判据



$$d_1 = \frac{-1}{c_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{c_1 a_{n-3} - a_{n-1} c_2}{c_1}$$
$$d_2 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$d_3 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ c_1 & c_4 \end{vmatrix}$$

.....

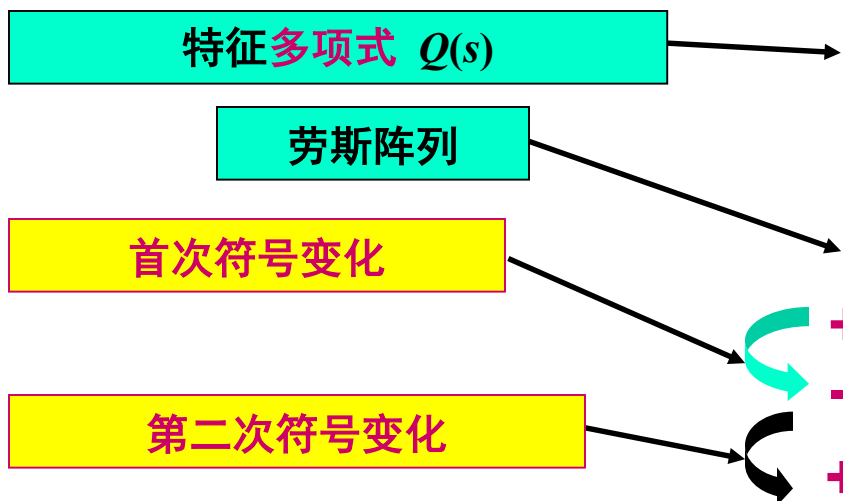
连续运算，直到所有的  $d$  式都计算完成，余下的各行都按照类似的方法计算，直到  $s^0$  行。

注意：劳斯阵列中， $s^1$  和  $s^0$  行都只包含一项。

➤ **步骤 3：** 特征方程根中，具有正实部的根的 **个数**，等于劳斯阵列中 **第一列元素符号变化的次数**。

➤ **结论：** 对于稳定系统，劳斯阵列的第一列元素必须 **没有符号变化**，这是系统稳定的 **充分必要条件**。

# 劳斯稳定性判据



$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4} \cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5} \cdots$
$s^{n-2}$	$c_1$	$c_2$	$c_3 \cdots$
$s^{n-3}$	$d_1$	$d_2$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
$s^1$	$j_1$		
$s^0$	$k_1$		

➤ 劳斯判据指出，具有正实部的系统特征根的个数等于劳斯阵列首列元素符号变化的次数

➤ 如果如此例所示劳斯阵列第一列有2次变号，则系统具有2个实部为正数的特征根，系统不稳定。

$$c_1 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$c_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

.....



# 劳斯稳定性判据

例 1:  $Q(s) = s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 152s + 240$

首次符号变化

第二次符号变化

- 在首列中，发生了 2 次符号变化，因此有 2 个特征根位于 S 平面的右半平面，系统不稳定。

❖ 事实上，系统特征根为：

$$s_1 = -3$$

$$s_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{3}$$

$$s_{4,5} = +2 \pm j4$$

劳斯阵列

$s^5$	1	10	152
$s^4$	1	72	240
$s^3$	-62	-88	
$s^2$	70.6	240	
$s^1$	122.6		
$s^0$	240		

$$c_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 72 \end{vmatrix} = -62$$

$$c_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 152 \\ 1 & 240 \end{vmatrix} = -88$$

$$c_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} = 0$$

.....

# 劳斯稳定性判据

---

## ➤ 3 种情况：

- 首列无零元素（普通情况），如例1所示
- 首列有零元素，但在零元素所在的行中具有非零的其他元素
- 劳斯阵列的某一行元素均为零

# 情况 1：劳斯阵列第一列无零元素

## 例 2：二阶系统

二阶系统的特征多项式为： $Q(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$

劳斯阵列为：

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

其中，

$$c_1 = \frac{a_1a_0 - (0)a_2}{a_1} = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

**结论：**二阶系统稳定的充分必要条件是，特征多项式的所有系数都具有相同的符号。

# 情况 1：劳斯阵列第一列无零元素

## 例 3：三阶系统

三阶系统的特征多项式为： $Q(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$

劳斯阵列为：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & c_1 & 0 \\ s^0 & d_1 & 0 \end{array}$$

其中，

$$c_1 = \frac{-1}{a_2} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{a_2a_1 - a_0a_3}{a_2},$$
$$d_1 = \frac{-1}{c_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

结论：三阶系统稳定的充分必要条件是，特征多项式所有系数均为正数，且有

$$a_2a_1 - a_0a_3 > 0$$

# 情况 1：劳斯阵列第一列无零元素

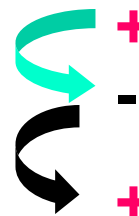
## 例 4：不稳定的三阶系统

如果一个三阶系统具有特征根  $s_{1,2} = 1 \pm j\sqrt{7}$ ,  $s_3 = -3$ ，则系统显然是不稳定的（具有 2 个不稳定的极点）。

系统特征多项式为：

$$Q(s) = (s - 1 + j\sqrt{7})(s - 1 - j\sqrt{7})(s + 3) = (s^2 - 2s + 8)(s + 3) = s^3 + s^2 + 2s + 24$$

劳斯阵列为：



$s^3$	1	2
$s^2$	1	24
$s^1$	-22	0
$s^0$	24	0

劳斯阵列首列元素符号变化 2 次，表示系统有 2 个特征根位于 S 平面的右半平面，这是一个不稳定系统。

由  $a_2 a_1 - a_0 a_3 = 1 \times 2 - 24 \times 1 = -22 < 0$  可知，系统不稳定。

# 情况 1：劳斯阵列第一列无零元素

## 例 5：设计问题

考虑具有如下特征多项式的三阶系统，求取使系统稳定的  $K$  值范围。

$$Q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

劳斯阵列为：

$s^3$	1	4
$s^2$	2	$K$
$s^1$	$\frac{8-K}{2}$	0
$s^0$	$K$	0

对于三阶系统，如果系统稳定，则满足：

$$a_2 a_1 - a_0 a_3 = 2 \times 4 - K > 0$$

结论：

当  $K > 0, 8 - K > 0 \Leftrightarrow K \in (0, 8)$ , 系统稳定。

# 情况 1：劳斯阵列第一列无零元素

**例 6：** 判定如下系统是否稳定，系统特征多项式为：

$$Q(s) = s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 9s^3 + 5s^2 + 12s + 20$$

劳斯阵列为：

$s^6$	1	2	5	20	
$s^5$	<del>3</del>	<del>9</del>	<del>12</del>		→ 除以 3
	1	3	4		
$s^4$	-1	1	20		
$s^3$	<del>4</del>	<del>24</del>			→ 除以 4
	1	6			
$s^2$	7	20			→ 乘以 7
$s^1$	22				
$s^0$	20				

**定理 1：** 劳斯阵列的任意一行元素可以同时乘以或除以一个正数，不会改变首列元素的符号。

❖ 首列元素符号**变化 2 次**，有 **2 个特征根**位于  $s$  平面的右半平面，**系统不稳定**。

# 情况 2：劳斯阵列第一列有零元素

如果首列具有零元素，可以采用三种方法进行处理。

**方法 1：** 用一个很小的正数  $\varepsilon$  来代替这个 0 元素，然后继续计算其他元素。

**方法 2：** 将  $s=1/x$  代入原方程。

**例 7：**

$$Q(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5$$

令  $s=1/x$ ，重新整理特征多项式

劳斯阵列为：

$s^4$	1	2	5
$s^3$	1	2	
$s^2$	0	5	

$$Q_{new}(x) = 5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

新的劳斯阵列为：

$x^4$	5	2	1
$x^3$	2	1	
$x^2$	-1	2	
$x$	5		

符号变化了 2 次，系统不稳定，且有 2 个极点位于 S 平面的右半平面。

**注意：** 在  $Q(s)$  和  $Q_{new}(x)$  的系数相同的情况下，该方法无效。



# 情况 2：劳斯阵列第一列有零元素

如果首列具有零元素，可以采用三种方法进行处理。

**方法 3：** 将原特征多项式乘以因式  $(s+1)$

**例 7：**

$$Q(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5$$

乘以  $(s+1)$ ，并重新整理特征多项式

劳斯阵列为：

$s^4$	1	2	5
$s^3$	1	2	
$s^2$	0	5	

$$Q(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 7s + 5$$

新的劳斯阵列为：

$s^5$	1	3	7
$s^4$	2	4	5
$s^3$	2	9	
$s^2$	-10	10	
$s^1$	11		
$s^0$	10		

结果同方法 2 的结果一致。

符号变化了 2 次，系统不稳定，且有 2 个极点位于  $s$  平面的右半平面。

## 情况 3：劳斯阵列有全零行

- 如果劳斯阵列具有全零行，则系统特征方程具有对称于原点的实根或复根，且具有如下形式：——**稳定否？**

$$s^2, \quad (s + \sigma)(s - \sigma), \quad (s + j\omega)(s - j\omega), \quad (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$$

- 如果劳斯阵列的第  $i$  行（ $s^i$  对应的行）元素全为零，根据该行的**上一非零行**构造如下的辅助多项式

$$U(s) = \beta_1 s^{i+1} + \beta_2 s^{i-1} + \beta_3 s^{i-3} + \dots$$

- 其中， $\beta_j$  是**上一非零行**的系数，辅助多项式  $U(s)$  的**阶次**为对称特征根的个数。

- 然后，将原劳斯阵列表中第  $i$  行元素替换为辅助多项式**关于  $s$  的导函数的系数**，并继续完成劳斯阵列表，以获得关于除对称特征根外的其它特征根的信息。

# 情况 3：劳斯阵列有全零行

例 8： 例 5 中，令  $K=8$ ，得到相应的劳斯阵列。

$$Q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + 8$$

劳斯阵列为：

$s^3$	1	4
$s^2$	2	$K$
$s^1$	$\frac{8-K}{2}$	0
$s^0$	$\frac{2}{K}$	0

$K=8$

$s^3$	1	4
$s^2$	2	8
$s^1$	0	0
$s^0$	8	0

利用上一非零行构造辅助多项式  $U(s)$ ，并继续完成劳斯阵列。 $U(s)$  的根也是  $Q(s)$  的根。

$$U(s) = 2s^2 + Ks^0 = 2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4) = 2(s + j2)(s - j2)$$

$s^3$	1	4
$s^2$	2	8
$s^1$	4	0
$s^0$	8	0

$\frac{dU}{ds} = 4s$

除位于虚轴上的极点对 ( $s=\pm 2j$ ) 外，其余极点均位于  $S$  平面的左半平面。

# 情况 3：劳斯阵列有全零行

例 9：判定如下系统的稳定性，系统特征方程为：

$$Q(s) = s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18 = 0$$

劳斯阵列为：

$s^4$	1	11	18
$s^3$	<del>2</del>	<del>18</del>	
	1	9	
$s^2$	<del>2</del>	<del>18</del>	
	1	9	
$s^1$	0		

辅助方程为：

$$U(s) = s^2 + 9s^0 = (s + j3)(s - j3) = 0$$

$$\frac{dU}{ds} = 2s$$

$s^2$	1	9
$s^1$	2	
$s^0$	9	

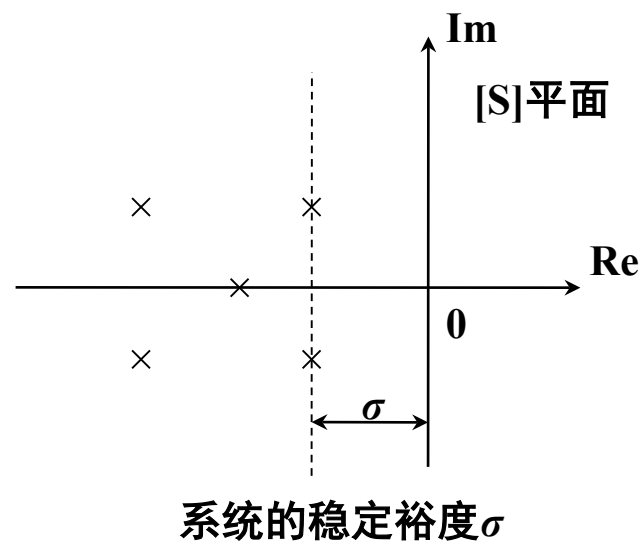
劳斯阵列首列元素符号无变化，因此没有具有正实部的特征根，但是虚轴上有一对极点 ( $s=\pm 3j$ )。

# 劳斯判据的应用：相对稳定性

➤ 应用劳斯判据不仅可以判别系统是否稳定，即系统的**绝对稳定性**，而且也可检验系统是否有一定的稳定裕量，即**相对稳定性**。另外劳斯判据还可用来分析系统参数对稳定性的影响。

## 1. 稳定裕量的检验

如右图所示，令 $s = z - \sigma$ ，即把虚轴左移 $\sigma$ 。将上式代入系统的特征方程式，得到以 $z$ 为变量的新特征方程式，若新特征方程的所有根均在新虚轴的左边（新劳斯阵列式第一列均为正数），则称系统具有**稳定裕量 $\sigma$** 。



# 劳斯判据的应用：相对稳定性

➤ **例 10：**检验特征方程式  $2s^3 + 10s^2 + 13s + 4 = 0$

是否有根在右半平面，并检验有几个根在直线  $s = -1$  的右边。

**解：** 劳斯阵列为

$s^3$	2	13
$s^2$	10	4
$s^1$	12.2	0
$s^0$	4	0

第一列无符号改变，故没有根在S平面右半平面。再令  $s = z - 1$ ，代入原特征方程式，得

$$2(z-1)^3 + 10(z-1)^2 + 13(z-1) + 4 = 0$$

$$2z^3 + 4z^2 - z - 1 = 0$$

新的劳斯阵列为

$z^3$	2	-1
$z^2$	4	-1
$z^1$	-0.5	0
$z^0$	-1	0

从表中可看出，第一列符号改变一次，故有一个根在直线  $s = -1$ （即新坐标虚轴）的右边，因此稳定裕量不到1。

# 劳斯判据的应用：相对稳定性

- 线性系统的稳定性由系统所有极点都位于  $s$  平面左半平面来表征；系统的稳定程度则可以由极点位于虚轴左边，并与虚轴距离的远近来表征。
- 为了应用劳斯-赫尔维茨判据来推断系统的相对稳定性，只需要进行变量代换，从而将虚轴左移，然后利用劳斯判据进行分析即可。

➤ **例 11：**考虑特征多项式  $Q(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$

- 变量代换  $s = z - 1$  可以得到

$$Q(z) = (z-1)^3 + 4(z-1)^2 + 6(z-1) + 4 = z^3 + z^2 + z + 1$$

$$a_2 a_1 - a_0 a_3 = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$$

有 2 个特征根位于移动后的虚轴上。

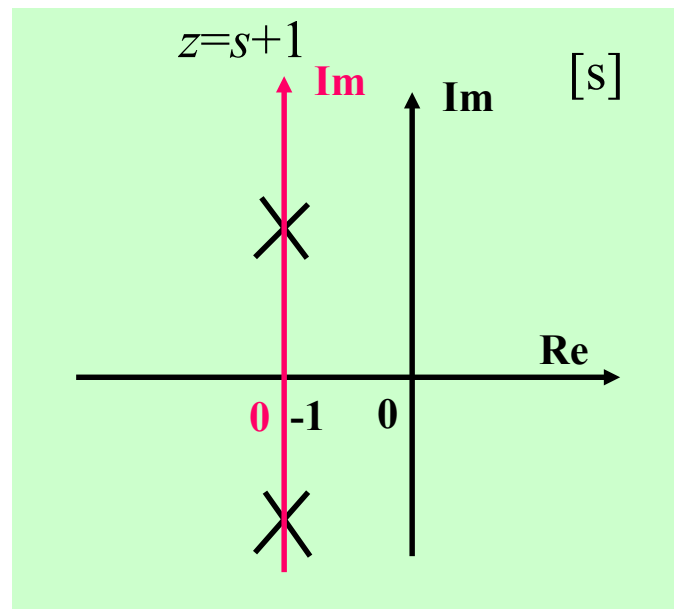


# 劳斯判据的应用：相对稳定性



➤ 相应的劳斯阵列（情况 3）为：

$z^3$	1	1
$z^2$	1	1
$z^1$	0	0
$z^0$	1	0



➤ 有 1 个特征根位于移动后的虚轴左边，有 2 个特征根位于移动后的虚轴上（这两个特征根可以根据相应的辅助多项式获得）。

$$U(z) = z^2 + 1 = (z + j)(z - j) = (s + 1 + j)(s + 1 - j)$$



# 劳斯判据的应用：相对稳定性

**例 12：** 设单位负反馈系统的开环传递函数为  
试确定：① 系统产生等幅振荡的 $K$ 值及相应的振荡角频率。  
② 全部闭环极点位于 $s=-2$  垂直线左侧时的 $K$  取值范围。

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s^2 + 7s + 17)}$$

**解：1)** 闭环特征方程  $\Delta(s) = s^3 + 7s^2 + 17s + K$

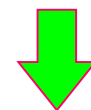
$$\begin{array}{ccc} \text{劳斯阵列:} & s^3 & 1 \quad 17 \\ & s^2 & 7 \quad K \\ & s^1 & ? \\ & s^0 & K \end{array}$$

或由3阶系统

$$a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0$$

$$7 \times 17 - K > 0$$

$$7 \times 17 - K = 0$$



等幅振荡：  $s^1$ 行全0。  $\therefore K-119=0, K=119$   
振荡频率： 辅助多项式  $7s^2 + K = 0 \quad \omega_n = ?$



$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{119/7} = \pm j\sqrt{17}; \quad \omega_n = \sqrt{17}$$

# 劳斯判据的应用：相对稳定性

**例 12：** 设单位负反馈系统的开环传递函数为  
试确定：① 系统产生等幅振荡的 $K$ 值及相应的振荡角频率。  
② 全部闭环极点位于 $s=-2$  垂直线左侧时的 $K$  取值范围。

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s^2 + 7s + 17)}$$

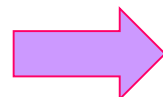
**解：2)** 令  $s = z - 2$

$$\begin{aligned} \text{则 } Q(z) &= (z-2)^3 + 7(z-2)^2 + 17(z-2) + K \\ &= z^3 + z^2 + z + K - 14 \end{aligned}$$

新的劳斯阵列：

$z^3$	1	1
$z^2$	1	$K-14$
$z^1$	$-K+15$	0
$z^0$	$-14+K$	

$$-K+15 > 0 \text{ 和 } -14+K > 0$$



$$14 < K < 15$$

若取  $14 < K < 15$ ，全部闭环极点位于 $s=-2$  垂直线左侧。

或由必要条件

$$K > 14$$

由3阶系统

$$a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0$$

$$1 - (K - 14) > 0$$



# 劳斯判据的应用：分析参数的影响

## 2. 分析系统参数对稳定性的影响

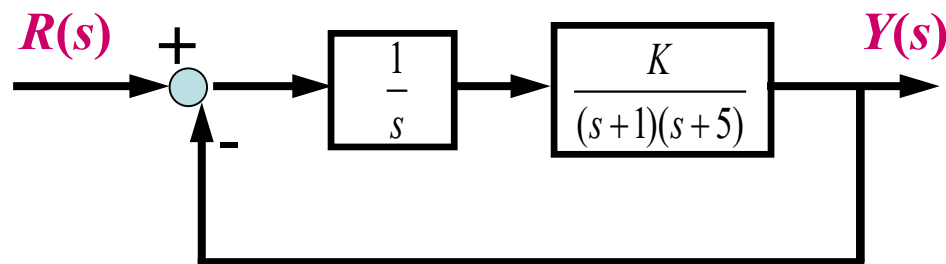
**例 13：** 设一单位负反馈控制系统如下图所示，其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+5) + K}$$

求出使系统稳定的 $K$ 的范围。

**解：** 系统的特征方程式为

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0$$



求 $K$ 的范围

根据劳斯判据，若要使系统稳定，其充要条件是劳斯阵列表的第一列均为正数，即

$$K > 0, \quad 30 - K > 0$$

$$\text{或由3阶系统 } a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0$$

所以 $K$ 的取值范围为： $0 < K < 30$ ，其稳定的临界值为30。

# 劳斯判据的应用：分析参数的影响

**例 14：**设闭环传递函数的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + Ts^2 + 10s + 100 = 0$$

按稳定要求确定  $T$  的临界值。

**解：**劳斯阵列表为

$s^4$	1	$T$	100
$s^3$	2	10	0
$s^2$	$T - 5$	100	
$s^1$	$\frac{10T - 250}{T - 5}$	0	
$s^0$	100		

根据劳斯判据，若要使系统稳定，其充要条件是劳斯阵列表的第一列均为正数，即

$$T > 0$$

$$T - 5 > 0; \Rightarrow T > 5$$

$$\frac{10T - 250}{T - 5} > 0; T > 25$$

所以使系统稳定的  $T$  的取值范围为：  $25 < T$ 。

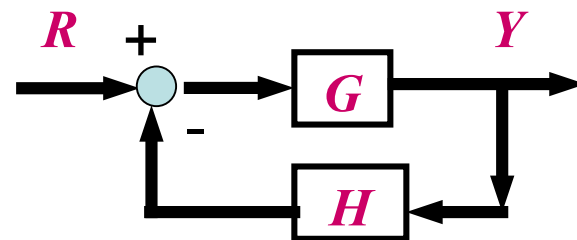
# 劳斯判据的应用：分析参数的影响

## 例 15:

➤ 考虑具有如下闭环传递函数的四阶系统：

$$G_{closed}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K(s+2)}{s(s+5)(s^2+2s+5)+K(s+2)}$$

系统中的 **K 值可调**，我们需要知道使系统稳定的 K 值变化范围。



$$0 < K < 28.1$$

$$Q(s) = s(s+5)(s^2+2s+5) + K(s+2) = s^4 + 7s^3 + 15s^2 + (25+K)s + 2K = 0$$

$s^4$	1	15	$2K$
$s^3$	7	$25+K$	0
$s^2$	$80-K$	$14K$	
$s$	$\frac{(80-K)(25+K)-98K}{(80-K)}$	0	
$s^0$	$14K$		

$$K < 80$$

$$-K^2 - 43K + 2000 > 0$$

$$K > 0$$

$$K < 28.1, K > -71.1$$

# 开环稳定性和闭环稳定性

单位负反馈系统，设开环传递函数如下，确定系统的稳定性或求使系统稳定的 $K$ 的取值范围。

$$G_a(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+5)}$$

$$1 + G_a(s) = 0$$

$$s^3 + 4s^2 + (K-5)s + K = 0$$

$$K > \frac{20}{3}$$

开环不稳定，但闭环可以稳定

$$G_b(s) = \frac{11.25}{(s+0.5)(s+1)(s+2)}$$

$$1 + G_b(s) = 0$$

$$s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 12.25 = 0$$

含有一对虚根  $s = \pm j1.87$

开环稳定，但闭环未必稳定

# 状态空间模型的稳定性

## ➤ 特征方程的不变性

状态方程： $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

其特征方程为： $\Delta \equiv |sI - A| = 0$

与矩阵  $A$  的特征方程一样，因此特征根也一样。

- 因此，由状态方程描述的系统稳定的充分必要条件是，**矩阵  $A$  的所有特征值都具有负实部**。劳斯判据仍然可以应用。

# 小结

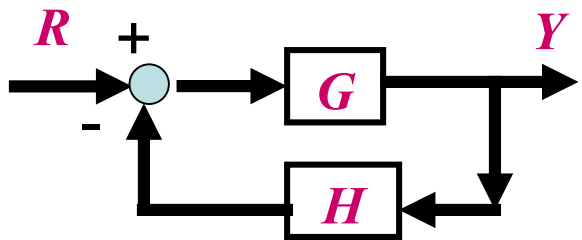
---

- 劳斯稳定性判据
- 劳斯稳定性判据的应用
- 相对稳定性
- 分析参数的影响（设计问题）



# 数学量和物理量

- 在各种系统中，被控变量（在图中以  $Y$  表示）可以是像位移、速度、流量、温度等这样的实际物理量。
- 如果方块图中的方块同相应元件的传递函数联系起来，我们在分析系统的时候不需要关心被控变量的具体意义。
- 一般地，我们关心的是被控变量  $y$  的前几阶导数（包括0阶）。对于任何特定的控制系统，这些“数学”函数总有明确的“物理”含义。

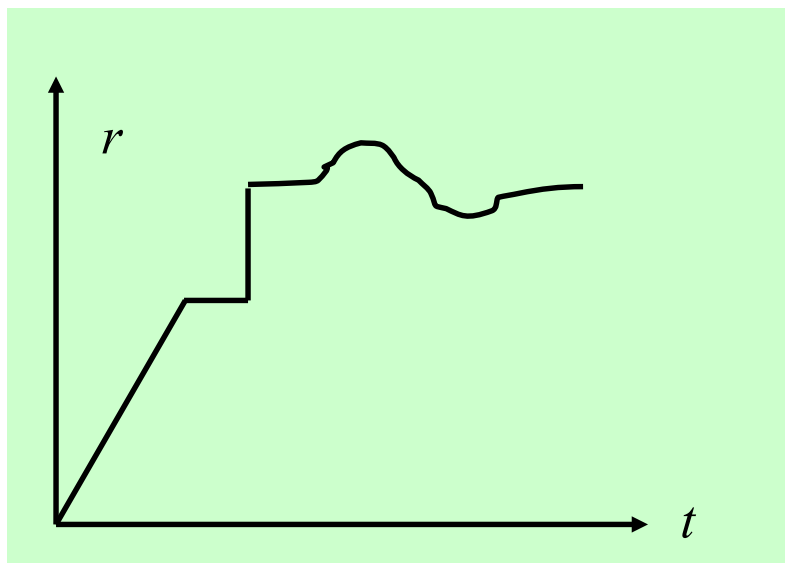


反馈控制系统

- 例如，如果  $y$  表示位移，那么  $Dy$  表示速度，而  $D^2y$  表示加速度。

# 数学量和物理量

- 通常，系统的输入信号是不规则函数，在这种情况下，我们不易得到系统的输出响应函数。
- 对于线性时不变系统，图示信号可以认为是由三种类型已知的基本输入信号（阶跃、斜坡、抛物线）所构成的。



输入信号

- 对于给定的线性时不变系统，我们可以针对每一类输入信号分别进行分析。

- 例
  - 导弹控制系统
  - 位置控制系统

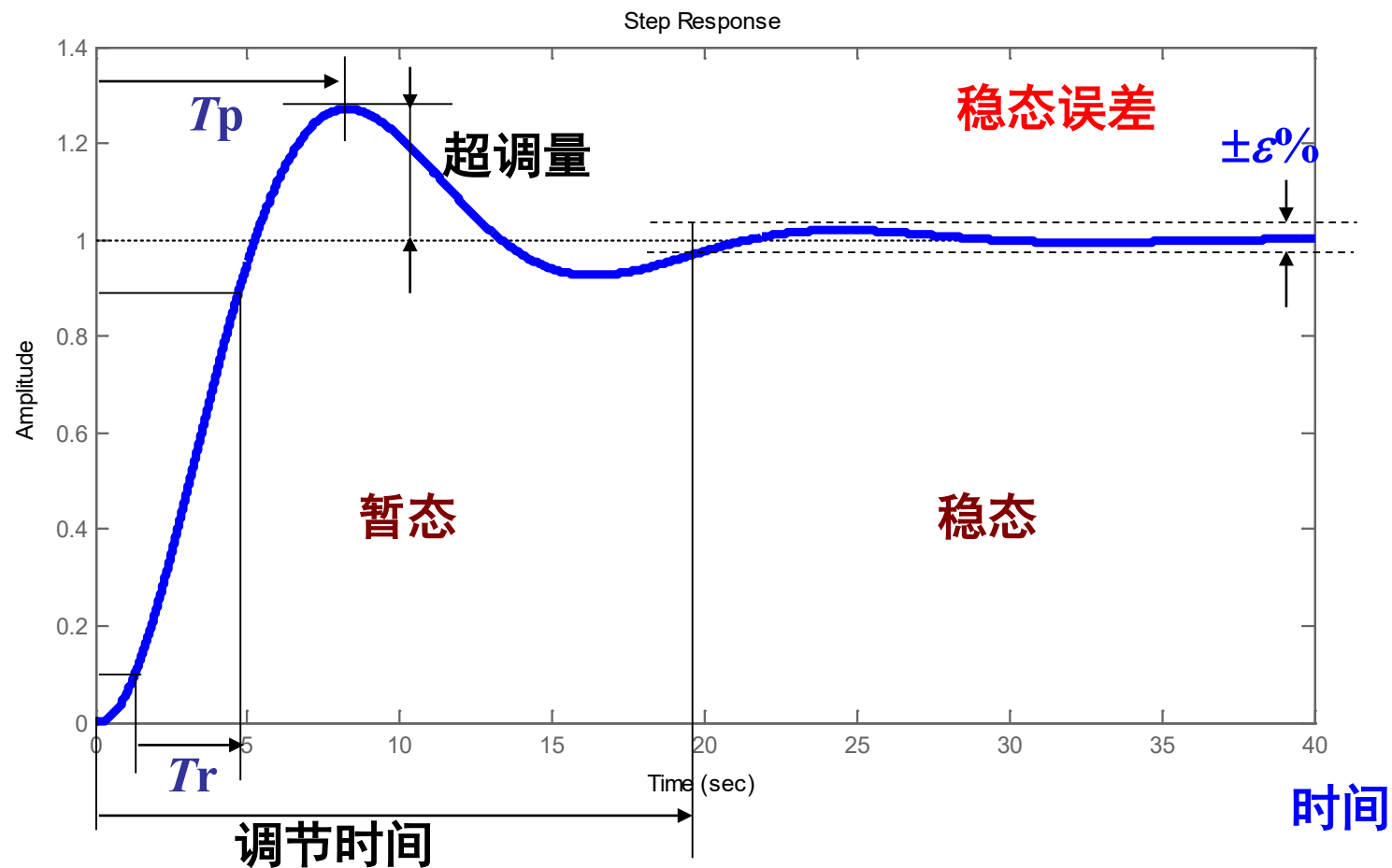
# 主要内容

---

- 引言
- 劳斯稳定性判据
- 反馈系统型别
  - 稳态误差
  - 反馈系统型别
  - 系统型别分析
- 稳态误差系数
- 稳态误差系数的应用
- 非单位反馈系统

# 稳态误差

被控变量



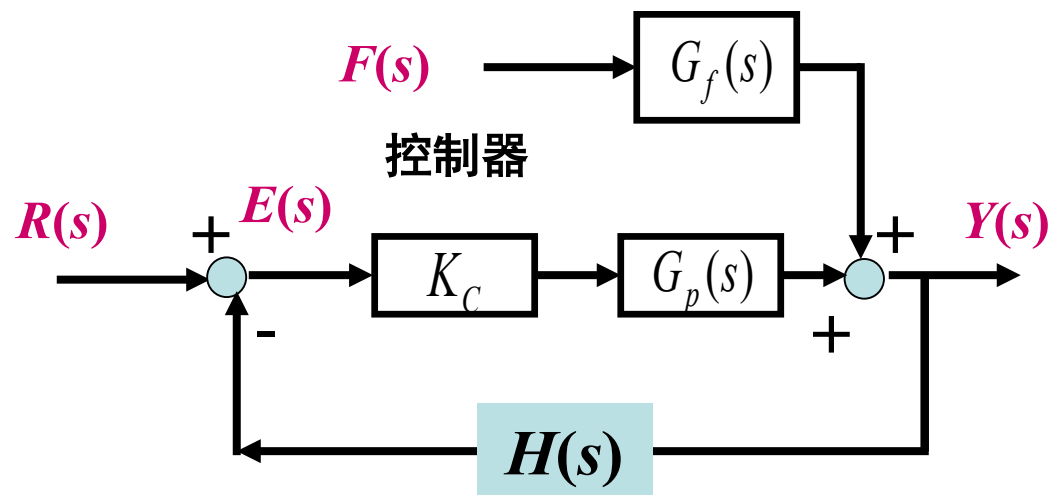
# 稳态误差

- 控制系统本质上是动态系统，其性能通常可以由**暂态响应**和**稳态响应**来描述。

$$y(t) = y(t)_{ss} + y(t)_t$$

$t \rightarrow \infty$

$=0$



- 对于**稳定系统**，暂态响应将最终衰减至零，即

$$y(\infty) = y(t)_{ss}$$

# 稳态误差

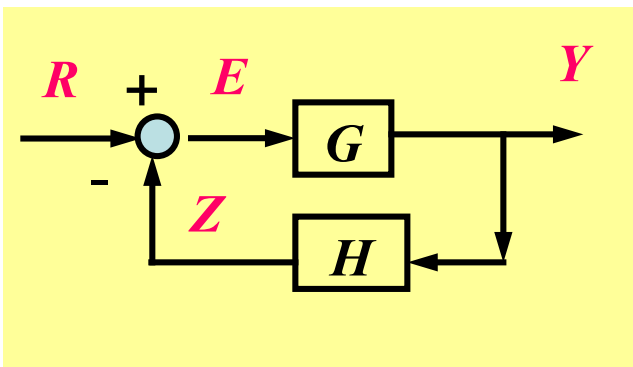
- **系统误差**定义为  $e(t) = r(t) - y(t)$ ，但是  $y(t)$  通常通过装置进行测量并产生反馈信号  $z(t)$ ，因此误差（此时又称为**偏差**）可以表示为：

$$e(t) = r(t) - z(t)$$

如果系统是**单位反馈系统**，则有  $z(t)=y(t)$ 。

- **稳态误差**定义为：

$$e(t)_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - z(t)]$$



- 如果系统是**单位反馈系统**，则  $z(t)=y(t)$ ，于是有

$$e(t)_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)]$$

# 稳态误差

- 如下图所示，系统输出的拉普拉斯变换形式为

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s) + \frac{G_f(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}F(s)$$

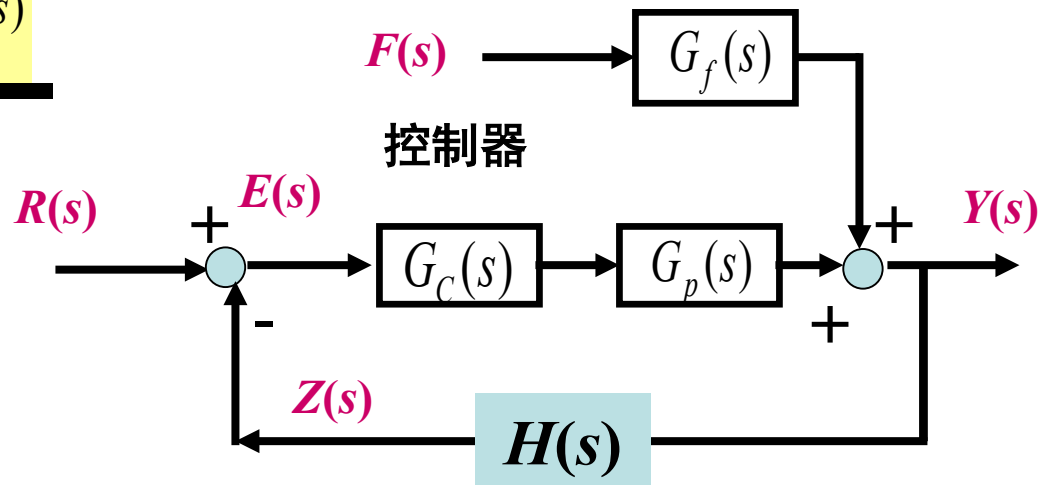
- 系统误差的拉普拉斯变换形式为

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$= \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s) - \frac{G_f(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}F(s)$$

由给定输入产生

由扰动产生



# 稳态误差

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$= \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s) - \frac{G_f(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}F(s)$$

利用终值定理

$$e_{sr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s)$$

给定稳态误差

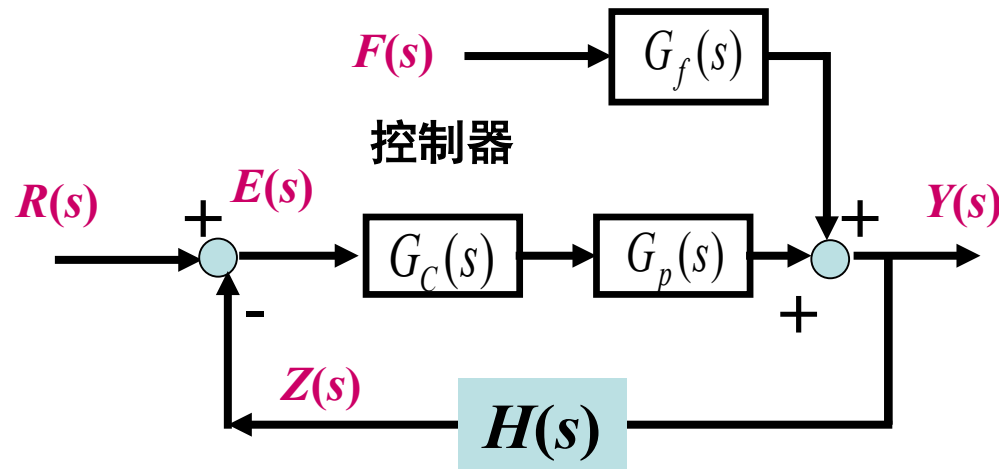
$$e_{sf} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-sG_f(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} F(s)$$

扰动稳态误差

因此，系统稳态误差为：

$$e_{ss} = e_{sr} + e_{sf}$$

稳态误差不仅取决于输入  $r(t)$  和  $f(t)$ ，还取决于系统传递函数。





# 反馈系统型别（考虑给定稳态误差）

➤ 对于下图所示的**单位反馈系统**（称为“跟踪系统”），系统的开环传递函数为：

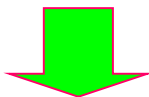
$$G(s) = Y(s)/E(s)$$

➤ 一般地， $G(s)$  具有如下数学形式：

$$G(s) = \frac{K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s)}$$

其中， $T_a, T_b, \dots, T_1, T_2, \dots$  是常系数， $K_m$  是传递函数的增益。

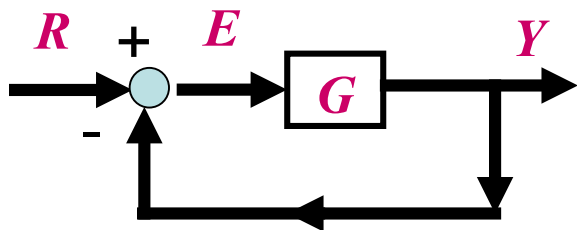
标准形式



单位增益前向传递函数  $G'(s)$

$$G(s) = \frac{K_m (1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_w s^w)}{s^m (1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_u s^u)} = K_m \underline{G'(s)}$$

$a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  是常系数， $K_m$  是传递函数的增益， $m=0,1,2,\dots$  表示**传递函数型别**



单位反馈系统

# 反馈系统型别（考虑给定稳态误差）

$$G(s) = \frac{K_m (1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_w s^w)}{s^m (1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_u s^u)} = K_m G'(s)$$

➤ 系统“型别”指定基于上式中  $s$  的指数值  $m$  ——开环传递函数  $G(s)$ 。

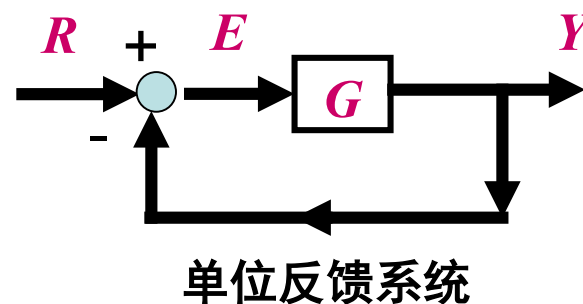
当  $m=0$  时，“0”型系统；

当  $m=1$  时，“1”型系统；

当  $m=2$  时，“2”型系统；

.....

大多数反馈控制系统具有 0 型、1 型和 2 型开环传递函数。



# 反馈系统型别（考虑给定稳态误差）

➤ 回顾两个有用的定理：

终值定理：

微分定理：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

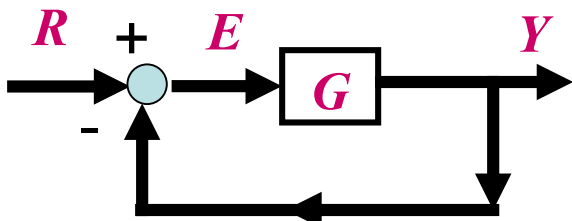
$$L[D^m y(t)] = s^m Y(s)$$

当所有初始条件均为零时

$$\therefore G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s)}$$

求解  $E(s)$ ，得到

$$\therefore E(s) = \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s)}{K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)} s^m Y(s)$$



$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s[s^m Y(s)]}{K_m}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s[s^m Y(s)] = D^m y(t)_{ss}$$

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m}$$

# 反馈系统型别（考虑给定稳态误差）

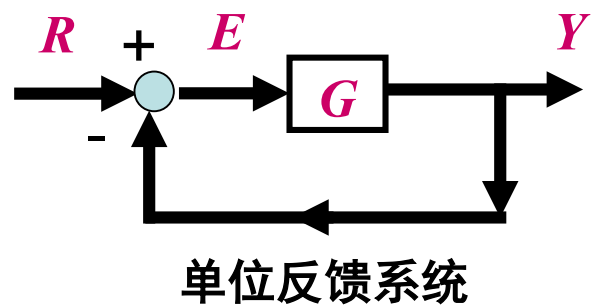
$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m}$$

➤ 各类型系统具有如下的稳态性质：

“0”型系统：定常误差信号产生定常的被控变量。

“1”型系统：定常误差信号产生定常的被控变量变化率。

“2”型系统：定常误差信号产生定常的被控变量的二阶导数。



$E \rightarrow Y$ ; “0”型系统

$E \rightarrow Y'$ ; “1”型系统

$E \rightarrow Y''$ ; “2”型系统

➤ 该方程将输出的微分同误差联系了起来，这对于  $D^m y(t)_{ss} = \text{常数}$  的情况非常有用。

# 反馈系统型别（考虑给定稳态误差）

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m}$$



$$K_m e(t)_{ss} = D^m y(t)_{ss}$$

➤ 该方程将输出的微分同误差联系了起来，这对于  $D^m y(t)_{ss} = \text{常数}$  的情况非常有用。

当  $e(t)_{ss} = E_0$  时，有

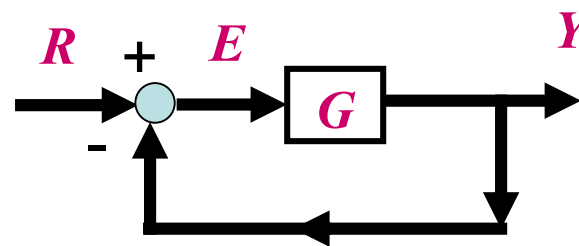
$$K_m E_0 = D^m y(t)_{ss} = \text{常数} = Y_m$$

➤ 注意到  $Y(s)$  具有如下形式

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) = \frac{K_m (1+T_1s)(1+T_2s)\cdots(1+T_ws)}{s^m (1+T_as)(1+T_bs)\cdots(1+T_us) + K_m (1+T_1s)(1+T_2s)\cdots(1+T_ws)} R(s)$$

➤ 可以得到  $E(s)$  关于输入  $R(s)$  的表达式为：

$$E(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{G(s)} \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$



单位反馈系统

# 反馈系统型别（考虑给定稳态误差）

$$\because G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s)}$$



$$E(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{G(s)} \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$



$$\therefore E(s) = \frac{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) R(s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) + K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)}$$

根据终值定理



$$\therefore e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) R(s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) + K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)} \right]$$

➤将**稳态误差**同**输入**联系了起来。根据上式，可以在阶跃、斜坡、抛物线等输入作用下对**各型别系统**进行分析。

# 情况 1: 0 型系统 (m=0)

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m}$$

➤ 阶跃输入:  $r(t)=R_0(t), R(s)= R_0/s$

$$\therefore e(t)_{ss} = \frac{R_0}{1+K_0} = \text{常数} = E_0 \neq 0$$

$$\therefore e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) R(s)}{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) + K_m (1+T_1 s)(1+T_2 s) \cdots (1+T_w s)} \right]$$

$$\therefore Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) = \frac{K_m (1+T_1 s)(1+T_2 s) \cdots (1+T_w s)}{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) + K_m (1+T_1 s)(1+T_2 s) \cdots (1+T_w s)} R(s)$$

终值定理:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

$$y(t)_{ss} = \frac{K_0}{1+K_0} R_0$$

$$y_{ss} = \frac{K_0}{1+K_0} R_0 = Y_0$$

➤ 对于稳态:

$$e(t)_{ss} = r(t)_{ss} - y(t)_{ss} = R_0 - Y_0 = R_0 - \frac{K_0}{1+K_0} R_0 = \frac{R_0}{1+K_0}$$

# 情况 1: 0 型系统 ( $m=0$ )

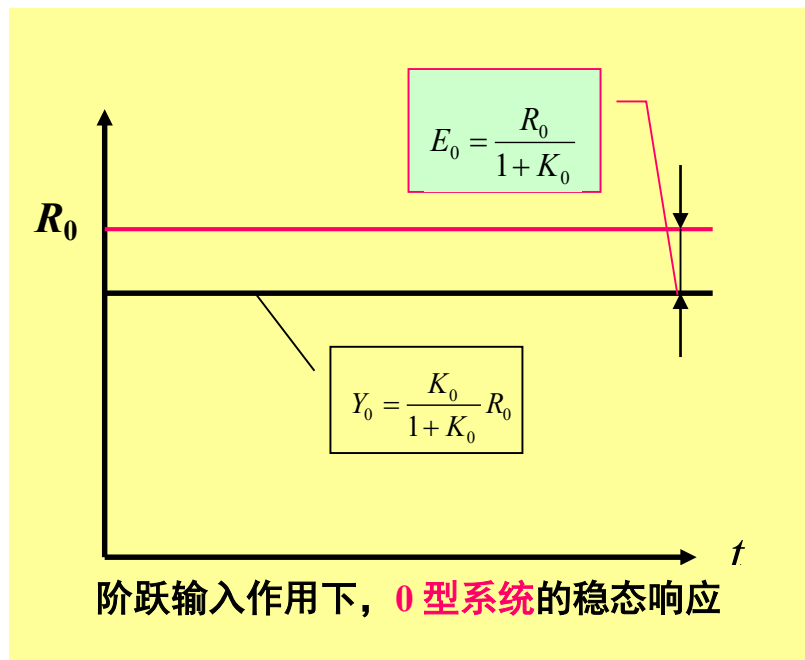
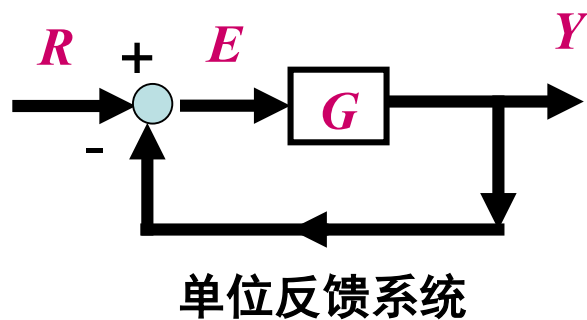
➤ **阶跃输入:**  $r(t)=R_0(t), R(s)=R_0/s$

$$y(t)_{ss} = \frac{K_0}{1+K_0} R_0 = Y_0$$

➤ 对于 0 型系统, 为了生成期望的常数输出  $Y$ , 要求**稳态误差  $E_0$  为常数**, 即  $K_0 E_0 = y(t)_{ss} = \text{常数} = Y_0$ 。

显然

$$Dr(t)_{ss} = Dy(t)_{ss} = 0$$



➤ 因此, 对于 0 型系统, 常数输入产生常数输出和常数误差信号。



# 情况 1: 0 型系统 (m=0)

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m}$$

➤ 斜坡输入:  $r(t)=R_1t, R(s)=R_1/s^2$

$$E(s) = \frac{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) R(s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) + K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)}$$

$$e(t)_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_1 t}{1 + K_0} = \infty$$

对于斜坡输入  $r(t)=R_1 t u_{-1}(t)$ , 稳态输出为

$$y(t)_{ss} = Y_0 + Y_1 t$$

$$Y_1 = \frac{K_0 R_1}{1 + K_0}; Y_0 = 0$$

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m} \Big|_{m=0} = \frac{Y_0 + Y_1 t}{K_0}$$

$$e(t)_{ss} = r(t) - y(t)_{ss} = R_1 t - Y_0 - Y_1 t$$

➤ 对于 0 型系统, 斜坡函数输入产生斜坡函数输出 (斜率较输入函数的斜率小); 因此, 误差将随时间增加并趋向于无穷值。

➤ 所以, 0 型系统无法跟踪斜坡输入。

➤ 同样地, 0 型系统也无法跟踪抛物线输入。

# 情况 2: 1 型系统 (m=1)

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m}$$

➤ 阶跃输入:  $r(t)=R_0(t), R(s)= R_0/s$

$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R_0}{K_1} = 0$$

$$\therefore e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) R(s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) + K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)} \right]$$

➤ 因此, 具有常数输入的 **1 型系统** 将产生 **与输入等值的** 常数稳态输出。

➤ 也就是说, 对于 **1 型系统**, 在阶跃输入作用下, 系统输出与输入之间具有 **零** 稳态误差, 即当  $r(t)=R_0 u_{-1}(t)$  时,

$$e(t)_{ss} = r(t)_{ss} - y(t)_{ss} = 0$$

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m} \Big|_{m=1} = 0$$

➤ 对于阶跃输入, 稳态输出必定为常数。

$$y(t)_{ss} = Y_0 u_{-1}(t)$$

$$e(t)_{ss} = r(t) - y(t)_{ss} = R_0 - Y_0 = 0$$

$$Y_0 = R_0$$

$$Dy(t)_{ss} = 0 = K_1 E_0$$

$$E_0 = 0$$

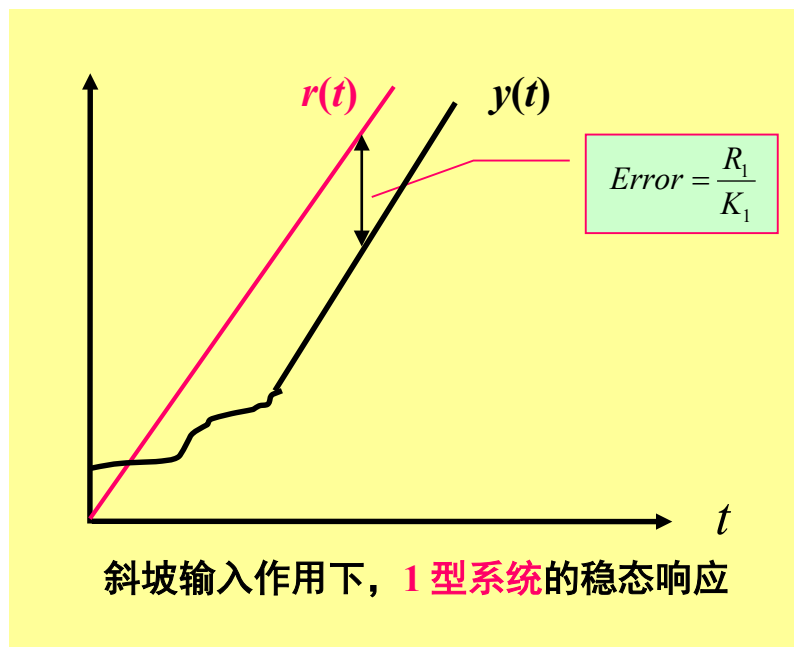
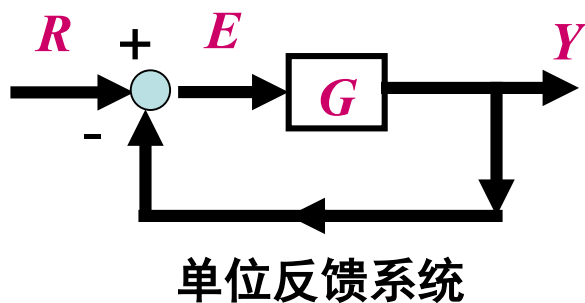
# 情况 2: 1 型系统 ( $m=1$ )

➤ 斜坡输入:  $r(t)=R_1t, R(s)=R_1/s^2$

$$\therefore e(t)_{ss} = \frac{R_1}{K_1} = \text{常数} = E_0 \neq 0$$

$$\therefore e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) R(s)}{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) + K_m (1+T_1 s)(1+T_2 s) \cdots (1+T_w s)} \right]$$

➤ 斜坡函数作用下, 1 型系统将产生常数误差信号。



# 情况 2: 1 型系统 (m=1)

➤ 斜坡输入:  $r(t)=R_1t, R(s)=R_1/s^2$

➤ 对于斜坡输入  $r(t)=R_1tu_{-1}(t)$ , 稳态输出为:

$$y(t)_{ss} = Y_0 + Y_1t$$

$$Y_1 = R_1; Y_0 = -\frac{R_1}{K_1}$$

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m} \Big|_{m=1} = \frac{Y_1}{K_1}$$

$$e(t)_{ss} = R_1t - Y_0 - Y_1t$$

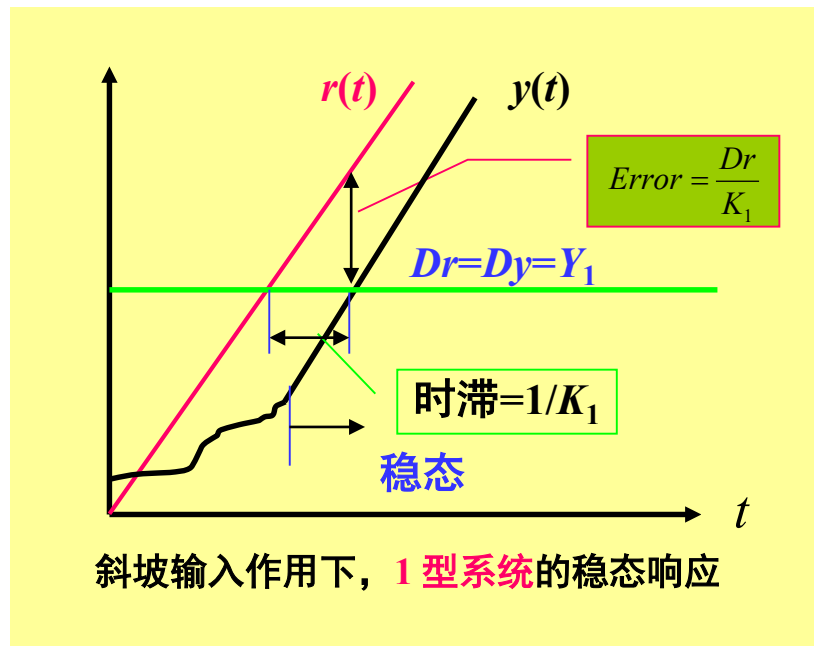
$$e(t)_{ss} = \frac{R_1}{K_1}$$

$$K_1 E_0 = Dy(t)_{ss} = \text{常数} = Y_1$$

$$e(t)_{ss} = E_0 = \frac{R_1}{K_1} = \frac{Dr}{K_1} = \frac{Dy_{ss}}{K_1}$$

➤ 斜坡输入的斜率同斜坡输出的斜率相等。

➤ 稳态输出存在时滞。



# 情况 2: 1 型系统 (m=1)

$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m}$$

➤ 抛物线输入:  $r(t)=R_2 t^2/2, R(s)=R_2/s^3$

$$E(s) = \frac{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) R(s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) + K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)}$$

对于抛物线输入  $r(t)=R_1 t u_{-1}(t)$ , 稳态输出为:

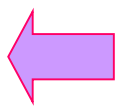
$$\therefore y(t)_{ss} = \frac{Y_2}{2} t^2 + Y_1 t + Y_0$$



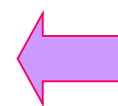
$$e(t)_{ss} = \frac{D^m y(t)_{ss}}{K_m} = \frac{Dy(t)_{ss}}{K_1}$$



$$e(t)_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{R_2 t}{K_1} - \frac{R_2}{K_1^2} \right] = \infty$$



$$\therefore e(t)_{ss} = r(t) - y(t)_{ss} = \frac{R_2 t}{K_1} - \frac{R_2}{K_1^2}$$



$$Y_2 = R_2; Y_1 = -\frac{R_2}{K_1}; Y_0 = \frac{R_2}{K_1^2}$$

➤ 具有抛物线输入的 1 型系统将产生抛物线输出, 但误差将随时间增加并趋向于无穷值。

➤ 也就是说, 1 型系统无法跟踪抛物线输入。

# 情况 3: 2 型系统 (m=2)

➤ 阶跃输入:  $r(t)=R_0(t), R(s)= R_0/s$

➤ 斜坡输入:  $r(t)=R_1t, R(s)= R_1/s^2$

$$\therefore e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) R(s)}{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) + K_m (1+T_1 s)(1+T_2 s) \cdots (1+T_w s)} \right]$$

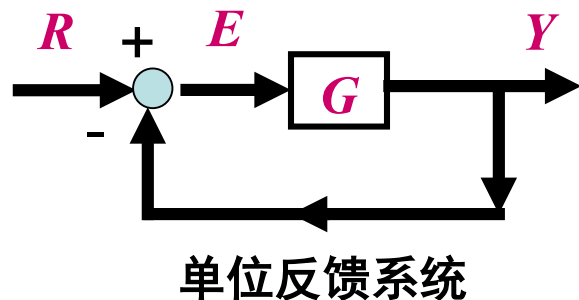
$$\therefore e(t)_{ss} = 0$$

➤ 用同样的分析方法分析可知, **2 型系统**能够无误差地跟踪阶跃输入, 即:

$$y(t)_{ss} = r(t) = R_0 u_{-1}(t)$$

$$e(t)_{ss} = 0$$

$$\therefore e(t)_{ss} = 0$$



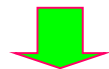
➤ **2 型系统**能够无误差地跟踪斜坡输入, 即

$$y(t)_{ss} = r(t) = R_1 t$$

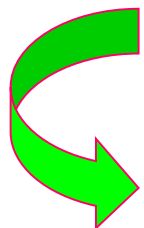
$$e(t)_{ss} = 0$$

## 情况 3: 2 型系统 ( $m=2$ )

➤ 抛物线输入:  $r(t)=R_2t^2/2, R(s)=R_2/s^3$



$$\therefore e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) R(s)}{s^m (1+T_a s)(1+T_b s) \cdots (1+T_u s) + K_m (1+T_1 s)(1+T_2 s) \cdots (1+T_w s)} \right]$$



$$e(t)_{ss} = \frac{R_2}{K_2} = \text{常数} = E_0 \neq 0$$

➤ 因此, 在抛物线输入作用下, **2 型系统**将产生抛物线输出, 且误差信号为常数。即在 2 型系统中, 为了生成抛物线输出, 要求误差  $E_0$  为常数。

# 小结

➤ 对于 **0 型系统**，常数输入将产生常数输出，且**具有常数值**的稳态误差。

➤ **0 型系统**无法跟踪**斜坡或抛物线输入**。

➤ 对于 **1 型系统**，**阶跃输入**作用下，系统具有**零**稳态误差；**斜坡函数输入**作用下，系统将产生**常数值**的稳态误差。

➤ **1 型系统**无法跟踪**抛物线输入**。

➤ **2 型系统**能够**无**误差地跟踪**阶跃或斜坡输入**；而在**抛物线输入**作用下，系统将产生**抛物线输出**，且具有**常数值**的稳态误差  $E_0$ 。

➤ **0、1、2 型单位反馈系统**的稳态响应特征分析及结论**仅适用于稳定系统**。



# 主要内容

---

- 引言
- 劳斯稳定性判据
- 反馈系统型别
- **稳态误差系数**
  - 稳态误差系数
  - 稳态阶跃误差系数
  - 稳态斜坡误差系数
  - 稳态抛物线误差系数
- 稳态误差系数的应用
- 非单位反馈系统

# 稳态误差系数

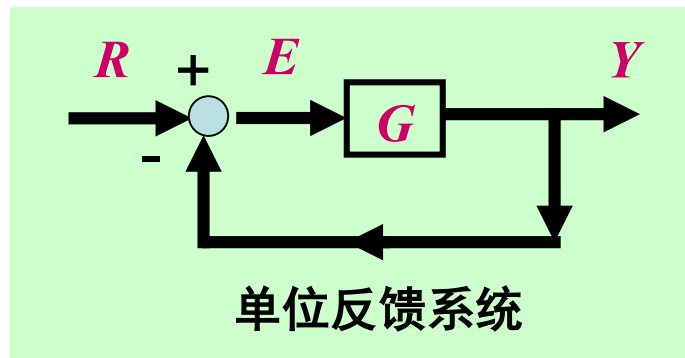
➤ 系统误差系数是在给定的参考输入（常数或慢时变）下，单位反馈稳定控制系统稳态精度的一种度量。

➤ 当存在常数误差信号时，输出变量的微分为常数：

当  $e(t)_{ss}=E_0$  时，有

$$K_m E_0 = D^m y(t)_{ss} = \text{常数} = C_m$$

前向传递函数增益



➤ 误差系数与系统型别无关，可适用于任何型别的系统，并根据输入信号的特定形式进行定义，如阶跃、斜坡和抛物线输入。误差系数仅仅适用于稳定的单位反馈系统。

# 稳态阶跃误差系数（位置误差系数）

- 阶跃误差系数定义为

$$\text{阶跃误差系数} = \frac{\text{输出稳态值 } y(t)_{ss}}{\text{误差信号稳态值 } e(t)_{ss}} = K_p$$

并且仅适用于阶跃输入： $r(t)=R_0u_{-1}(t)$ 。

- 注意到  $Y(s)$  的形式，应用终值定理可得

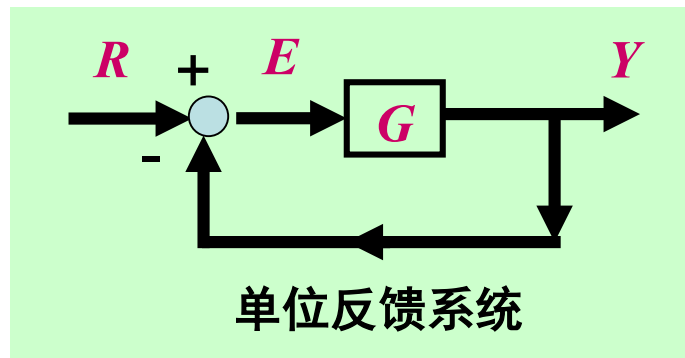
$$y(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{sG(s)}{1+G(s)} \frac{R_0}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{G(s)}{1+G(s)} R_0 \right]$$

- $E(s)$  的表达式为

$$E(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{G(s)} \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

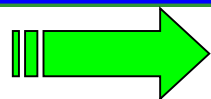
$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1+G(s)} R_0 \right]$$

$$\text{阶跃误差系数 } K_p = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{G(s)}{1+G(s)} R_0 \right]}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1+G(s)} R_0 \right]}$$



- 分子和分母不会同时为零，或同时为无穷值。

# 稳态阶跃误差系数（位置误差系数）



- 因此，阶跃误差系数定义为：

$$\text{阶跃误差系数} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K_p$$

- 将上式应用于各型别系统可得

$$K_p = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_0(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{(1+T_as)(1+T_bs)(1+T_cs)\cdots} = K_0 \\ \infty \\ \infty \end{cases}$$

0 型系统

1 型系统

2 型系统

# 稳态斜坡误差系数（速度误差系数）

## ➤ 斜坡误差系数定义为

$$\text{斜坡误差系数} = \frac{\text{输出微分的稳态值 } Dy(t)_{ss}}{\text{误差信号稳态值 } e(t)_{ss}} = K_v$$

并且仅适用于斜坡输入： $r(t)=R_1tu_{-1}(t)$ 。

## ➤ 注意到输出变量的一阶导数为：

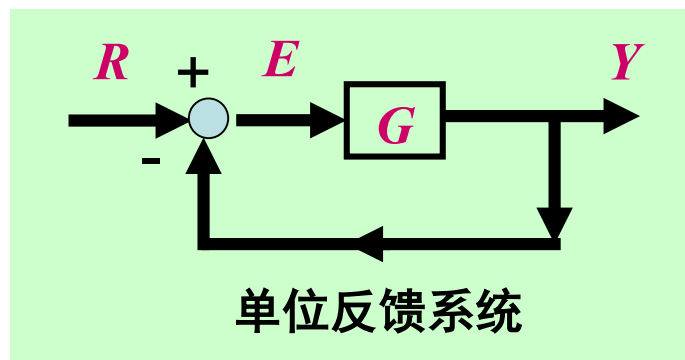
$$L[Dy(t)] = sY(s) = \frac{sG(s)}{1+G(s)} R(s) \Rightarrow Dy(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^2 G(s)}{1+G(s)} \frac{R_1}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{G(s)}{1+G(s)} R_1 \right]$$

## ➤ 稳态误差 $e(t)$ 为：

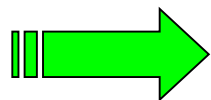
$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s}{1+G(s)} \frac{R_1}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1+G(s)} \frac{R_1}{s} \right]$$

$$\text{斜坡误差系数} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{G(s)}{1+G(s)} R_1 \right]}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1+G(s)} \frac{R_1}{s} \right]}$$

## ➤ 不会为不定式 $0/0$ 或 $\infty/\infty$ 。



# 稳态斜坡误差系数（速度误差系数）



- 因此，斜坡误差系数定义为：

$$\text{斜坡误差系数} = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K_v$$

- 将上式应用于各型别系统可以得到

$$K_v = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK_0(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{(1+T_as)(1+T_bs)(1+T_cs)\cdots} = 0 \\ K_1 \\ \infty \end{cases}$$

0 型系统

1 型系统

2 型系统

# 稳态抛物线误差系数（加速度误差系数）

➤ 抛物线误差系数定义为

$$\text{抛物线误差系数} = \frac{\text{输出二次微分的稳态值 } D^2 y(t)_{ss}}{\text{误差信号稳态值 } e(t)_{ss}} = K_a$$

并且仅适用于抛物线输入： $r(t) = (R_2 t^2 / 2) u_{-1}(t)$ 。

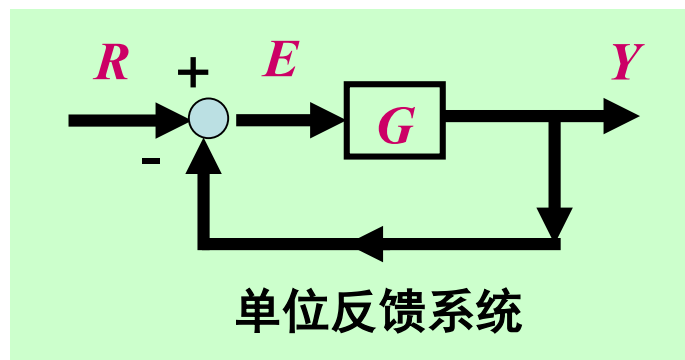
➤ 输出的二阶微分为：

$$L[D^2 y(t)] = s^2 Y(s) = \frac{s^2 G(s)}{1 + G(s)} R(s)$$



应用终值定理

$$D^2 y(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s [s^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{G(s)}{1 + G(s)} R_2 \right]$$



# 稳态抛物线误差系数（加速度误差系数）

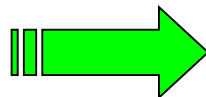
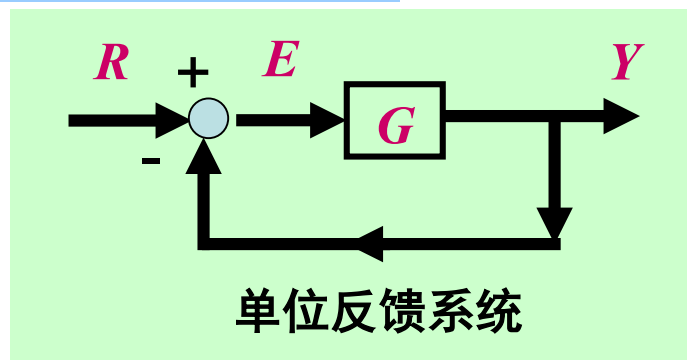
➤ 稳态误差  $e(t)$  为

$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s}{1+G(s)} \frac{R_2}{s^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1+G(s)} \frac{R_2}{s^2} \right]$$

$$D^2 y(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[s^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{G(s)}{1+G(s)} R_2 \right]$$

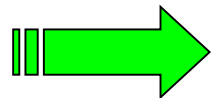
抛物线误差系数 =  $\frac{\text{输出二次微分的稳态值 } D^2 y(t)_{ss}}{\text{误差信号稳态值 } e(t)_{ss}} = K_a$

$$\text{抛物线误差系数} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{G(s)}{1+G(s)} R_2 \right]}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1+G(s)} \frac{R_2}{s^2} \right]}$$





# 稳态抛物线误差系数（加速度误差系数）



- 因此，**抛物线误差系数**定义为

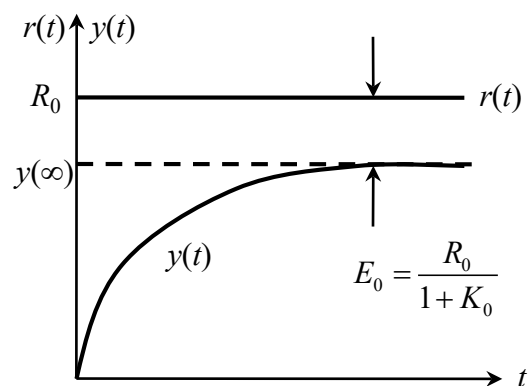
$$\text{抛物线误差系数} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = K_a$$

- 将上式应用于各型别系统可得

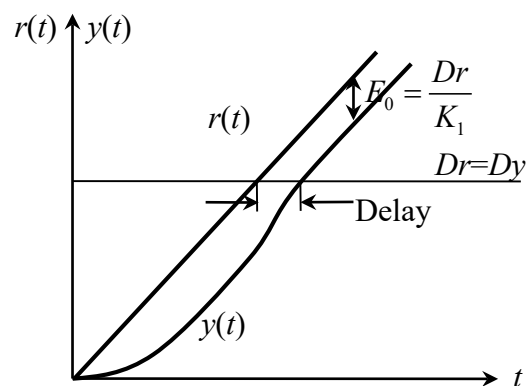
$$K_a = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K_0 (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots}{(1 + T_a s)(1 + T_b s)(1 + T_c s) \cdots} = 0 & \text{0 型系统} \\ 0 & \text{1 型系统} \\ K_2 & \text{2 型系统} \end{cases}$$

- 根据稳态误差系数定义和响应曲线可以确定参数 $K_0$ 、 $K_1$ 和 $K_2$ 的值。

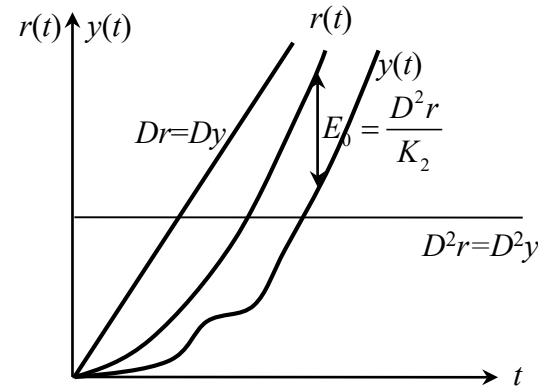
# 稳态误差系数



0型系统对阶跃输入响应



1型系统对斜坡输入响应



2型系统对抛物线输入响应



# 稳定系统的稳态误差系数和稳态误差

系统 型别	稳态误差系数			稳态误差		
	$K_p$	$K_v$	$K_a$	阶跃输入 $R_0(t)$	斜坡输入 $R_1 t$	抛物线输入 $\frac{R_2}{2} t^2$
0	$K_0$	0	0	$\frac{R_0}{1 + K_p}$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	$K_1$	0	0	$\frac{R_1}{K_v}$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	$K_2$	0	0	$\frac{R_2}{K_a}$

# 主要内容

---

- 引言
- 劳斯稳定性判据
- 反馈系统型别
- 稳态误差系数
- 稳态误差系数的应用
  - 稳态误差系数的应用
  - 对于多项式输入:  $t^{m+1}$
- 非单位反馈系统

# 稳态误差系数的应用

➤ 注意：稳态误差系数只能用来求解稳定的单位反馈系统的误差。

例 1 已知单位反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{50}{(0.1s + 1)(2s + 1)}$$

试求位置(step)误差系数 $K_p$ ，速度(ramp)误差系数 $K_v$ ，加速度(parabolic)误差系数 $K_a$ 。

解：首先判断系统的稳定性。

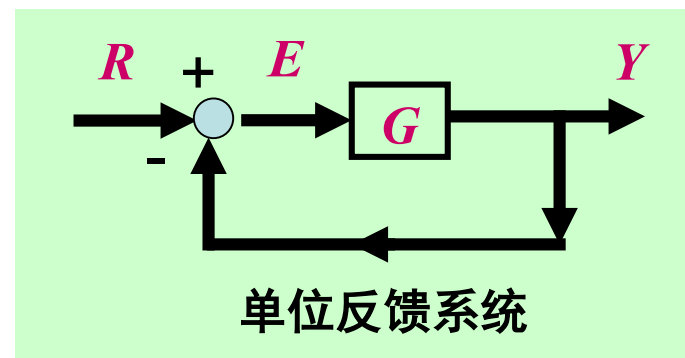
因为 $m=0$ ，这是“0”型系统，故有

位置误差系数 $K_p$  
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{50}{(0.1s + 1)(2s + 1)} = 50$$

速度误差系数 $K_v$  
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = 0$$

加速度误差系数 $K_a$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = 0$$



# 稳态误差系数的应用

**例 2** 已知单位反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)}$$

试求位置误差系数 $K_p$ ，速度误差系数 $K_v$ ，加速度误差系数 $K_a$ 。

**解：**首先判断系统的稳定性。

因为 $m=1$ ，这是“1”型系统，故有

位置误差系数 $K_p$

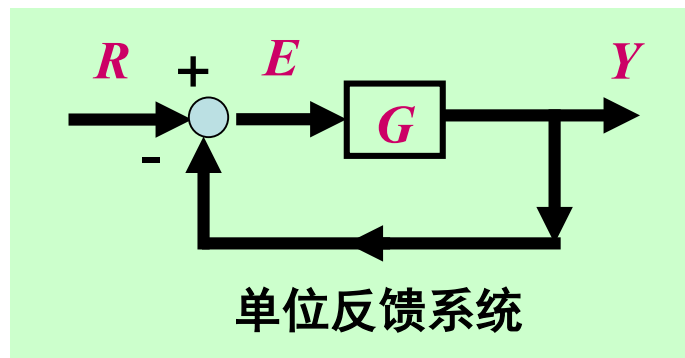
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

速度误差系数 $K_v$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)} = \frac{K}{200}$$

加速度误差系数 $K_a$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = 0$$



# 稳态误差系数的应用

**例 3** 已知单位反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

试求位置误差系数 $K_p$ ，速度误差系数 $K_v$ ，加速度误差系数 $K_a$ 。

**解：**首先判断系统的稳定性。

因为 $m=2$ ，这是“2”型系统，故有

位置误差系数 $K_p$

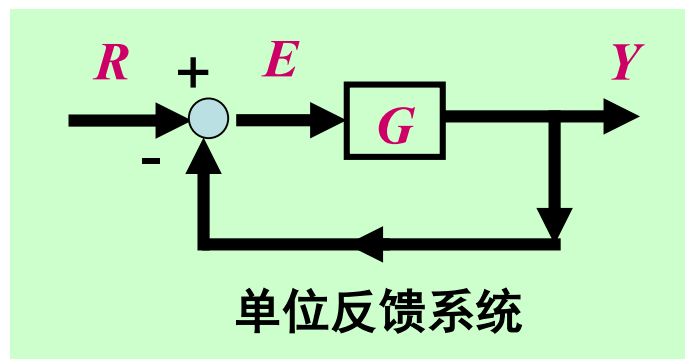
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

速度误差系数 $K_v$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \infty$$

加速度误差系数 $K_a$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)} = 1$$



# 稳态误差系数的应用

$$G(s) = \frac{100}{(0.1s + 1)(s + 5)}$$

**例 4** 已知单位反馈系统的开环传递函数：

试求输入分别为  $r(t) = 2t$  和  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时，系统的稳态误差。

**解：** 首先判断系统的稳定性。

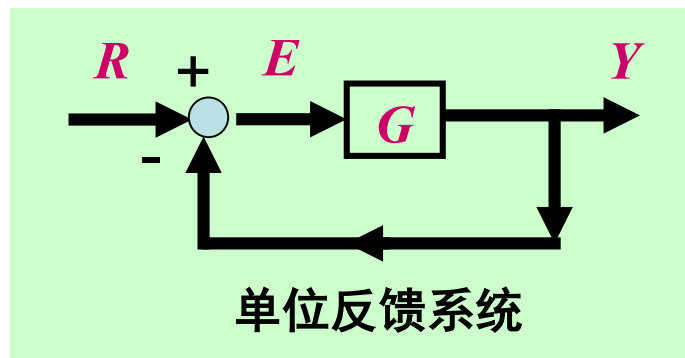
因为  $m=0$ ，这是“0”型系统，故有

位置误差系数  $K_p$  
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100}{(0.1s + 1)(s + 5)} = 20$$

速度误差系数  $K_v$  与加速度误差系数  $K_a$  均为零。又因是线性系统，满足迭加原理，故当输入分别为  $r(t) = 2t$  和  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时，系统的稳态误差为

$$e(\infty) = \infty$$

这是因为“0”型系统不能跟踪斜坡输入与抛物线输入之故。





# 稳态误差系数的应用

**例 5** 已知单位反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}$$

试求输入分别为  $r(t) = 2t$  和  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时，系统的稳态误差。

**解：** 首先判断系统的稳定性。

因为  $m=1$ ，这是“1”型系统，故有

位置误差系数  $K_p$  
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

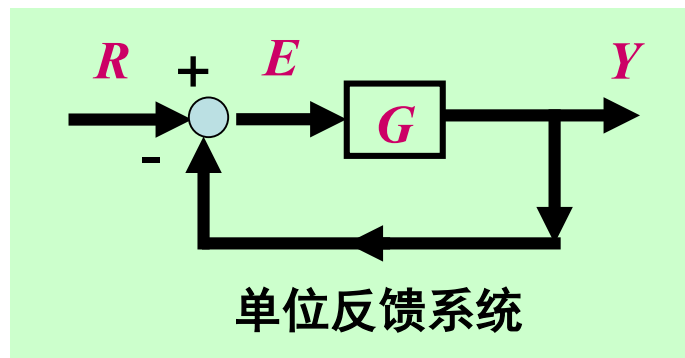
速度误差系数  $K_v$  
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)} = 10$$

加速度误差系数  $K_a$  为零。当输入为  $r(t) = 2t$  时，系统稳态误差：

$$e(\infty) = \frac{R_1}{K_v} = \frac{2}{10} = 0.2$$

当输入为  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  
$$e(\infty) = \infty$$

因“1”型系统不能跟踪抛物线输入。



# 稳态误差系数的应用

**例 6** 已知单位反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$$

试求输入分别为  $r(t) = 2t$  和  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时，系统的稳态误差。

**解：** 首先判断系统的稳定性。

因为  $m=2$ ，这是“2”型系统，故有

位置误差系数  $K_p$  与速度误差系数  $K_v$

$$K_p = K_v = \infty$$

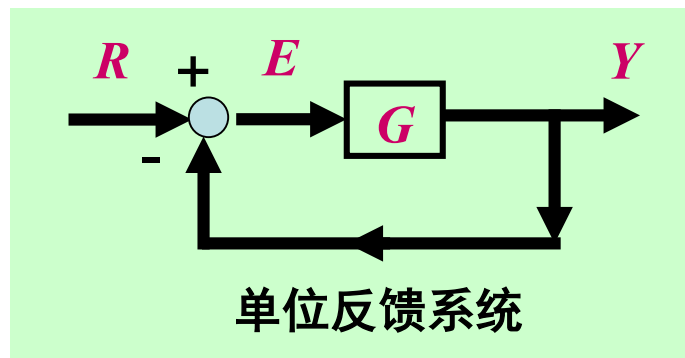
加速度误差系数  $K_a$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)} = 0.1$$

当输入为  $r(t) = 2t$   $e(\infty) = 0$

当输入为  $r(t) = 2 + 2t + t^2$

$$e(\infty) = \frac{R_2}{K_a} = \frac{2}{0.1} = 20$$



# 对于多项式输入： $t^{m+1}$

- **注意：** $m$  型系统可以以零稳态误差跟踪具有  $t^{m-1}$  形式的输入；也可以跟踪具有  $t^m$  形式的输入，但存在常数稳态误差；不能跟踪具有  $t^{m+1}$  形式的输入，因为稳态误差趋向于无穷值。
- 如果输入只持续有限时间，误差也是有限的，可以通过对下式取拉普拉斯反变换并代入时间值计算误差。

$$E(s) = \frac{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) R(s)}{s^m (1 + T_a s)(1 + T_b s) \cdots (1 + T_u s) + K_m (1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_w s)}$$

- 最大允许误差限制了输入  $t^{m+1}$  作用于系统的时间。

# 减小或消除稳态误差

---

- 提高型别
- 增大稳态误差系数
- 改变结构

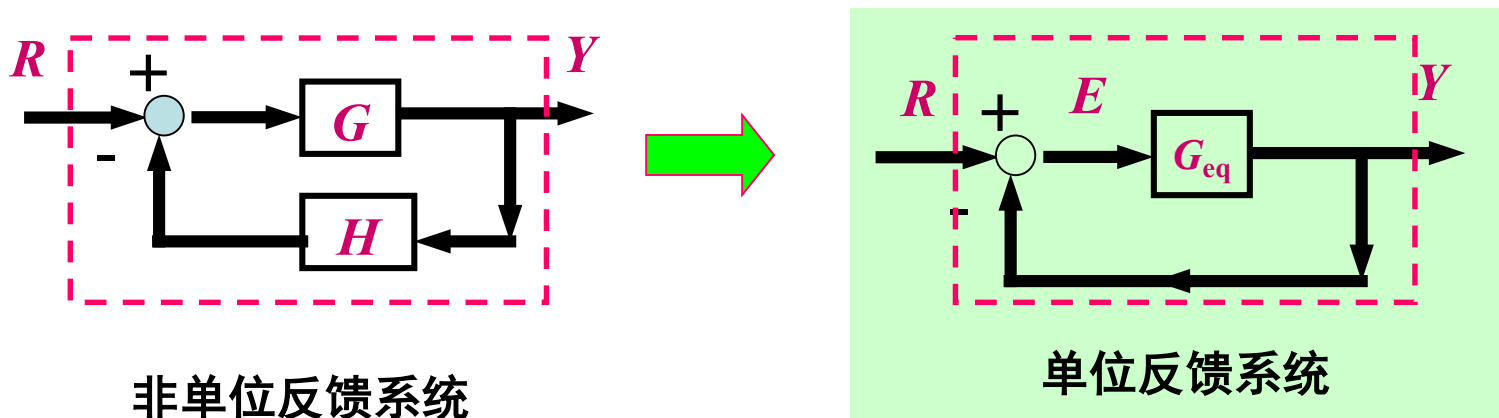
# 主要内容

---

- 引言
- 劳斯稳定性判据
- 反馈系统型别
- 稳态误差系数
- 稳态误差系数的应用
- 非单位反馈系统

# 非单位反馈系统

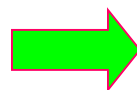
- 非单位反馈系统可以通过数学变换转换为等价的单位反馈系统，再通过分析等价系统的型别和稳态误差系数来分析原系统的误差。



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1 + G_{eq}(s)}$$

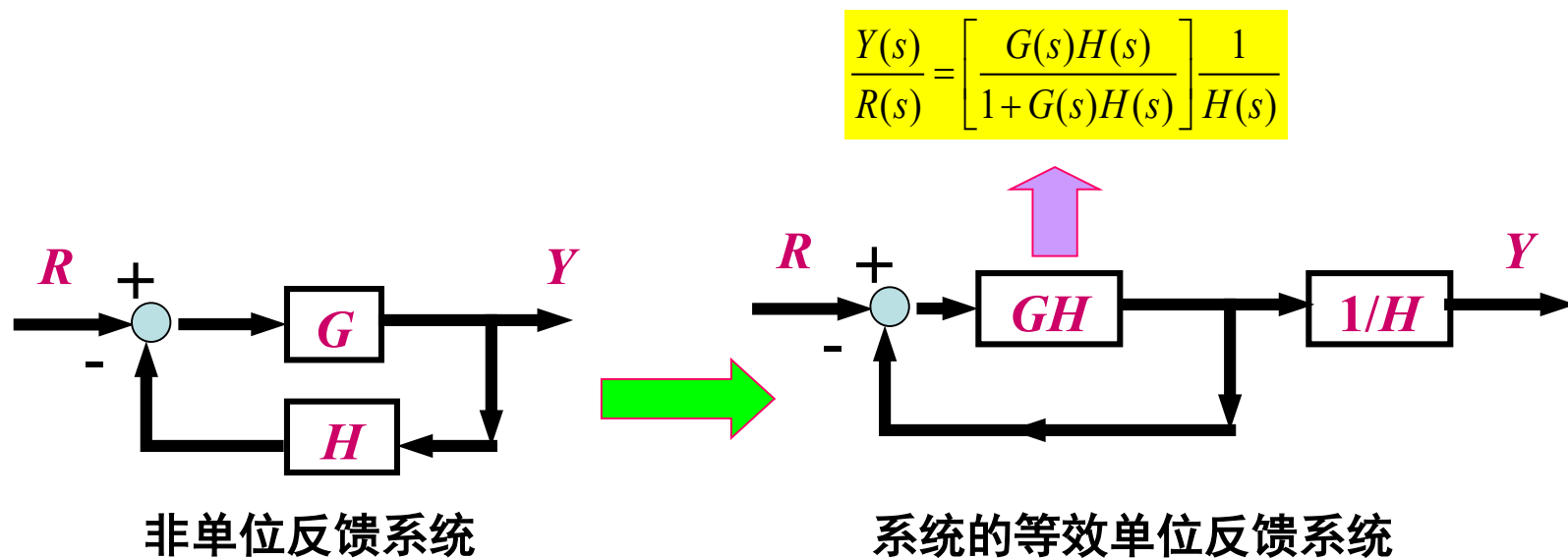


$$G_{eq}(s) = \frac{N(s)}{D(s) - N(s)}$$

- 当非单位反馈系统稳定时，其稳态性能特征可以基于上式进行分析

# 非单位反馈系统

## ➤ 非单位反馈系统的等效表示



➤ 当  $H$  为常数时，有利于利用单位反馈系统方法进行系统设计。

# 本章小结

---

## ➤ 劳斯稳定性判据

- 劳斯稳定性判据
- 劳斯稳定性判据的应用
- 相对稳定性

## ➤ 稳态误差

- 反馈系统型别
- 稳态误差系数

## ➤ 非单位反馈系统

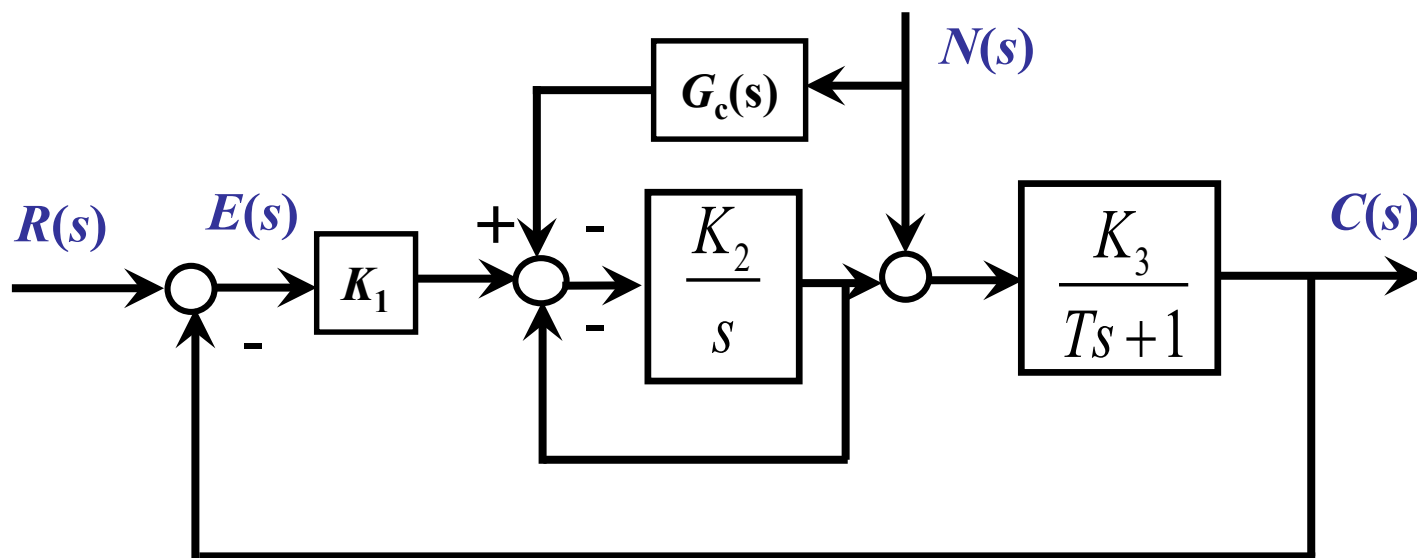


# 自主练习1

系统结构图如下所示

1) 如干扰输入  $N(t)=1(t)$ ，设计  $G_c(s)$  使系统稳态误差为零

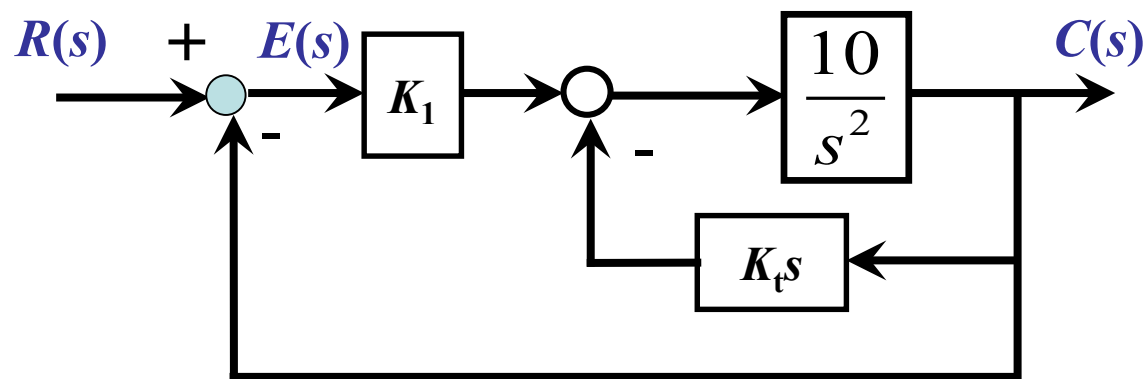
2) 如干扰输入  $N(t)=At$ ，设计  $G_c(s)$  使系统稳态误差为零



# 自主练习2

绘图仪的定位控制系统结构图如下。试分析

- (1)若没有测速反馈( $K_t=0$ )，系统动态性能如何(单位阶跃输入)?
- (2)设 $K_1=10$ ， $R(t)=1(t)$ 。分析 $K_t$ 变化时，系统动态性能指标的变化规律(超调量、回复时间)，并作图( $K_t$ -指标)
- (3)设 $K_1=10$ ，输入 $R(t)$ 分别为单位阶跃和单位斜坡。分析 $K_t$ 变化时，系统稳态误差 $e_{ss}$ 的变化规律。



# 自主练习3

某闭环系统微分方程如右，

$$T_1 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} = K_2 u(t)$$

$$u(t) = K_1 [r(t) - b(t)]$$

$$T_2 \frac{db(t)}{dt} + b(t) = c(t)$$

$T_1$ 、 $T_2$  和  $K_2$ 。初始条件全部为零

(1) 给出该系统的方块图；

(2) 将方块图等价变换为单位负反馈形式；

(3) 为使系统稳定， $K_1$ 、 $K_2$ 、 $T_1$ 、 $T_2$  应满足什么条件？

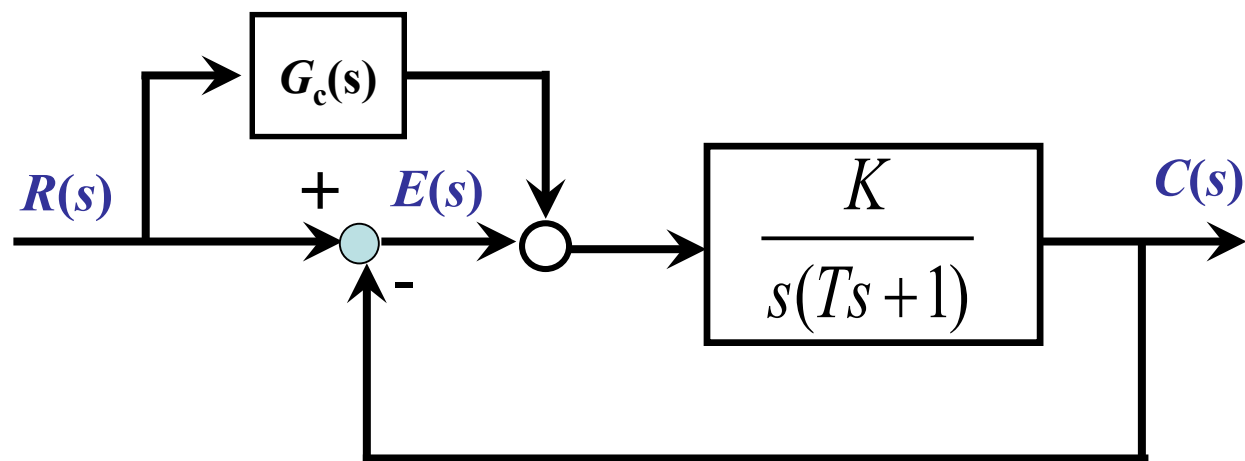
(4) 如果要求当  $r(t) = 1 + t$  时， $c(t)$  对  $r(t)$  的稳态误差不大于正常数  $\varepsilon_0$ 。

试求  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $T_1$ 、 $T_2$  所满足的条件。此时如果系统的输入为单位抛物线，稳态误差为多少？

# 自主练习4

系统结构图如下所示。

- (1)设计 $G_c(s)$ ，使输入 $r(t)=At$ 作用下的系统稳态误差为零；
- (2)在以上讨论确定了 $G_c(s)$ 的基础上，若被控对象开环增益增加了 $\Delta K$ ，试分析相应的稳态误差是否还能为零？





---

*The End*

