

2024-2025学年 秋学期

现代控制理论

Modern Control Theory

学在浙大 <http://course.zju.edu.cn>
用自己的浙大通行证账号登录

主讲：吴俊 徐巍华



CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956



第7章 线性离散时间控制系统分析与综合

徐巍华

浙江大学智能系统与控制研究所

玉泉校区教十八235室

whxu@zju.edu.cn

13600549753



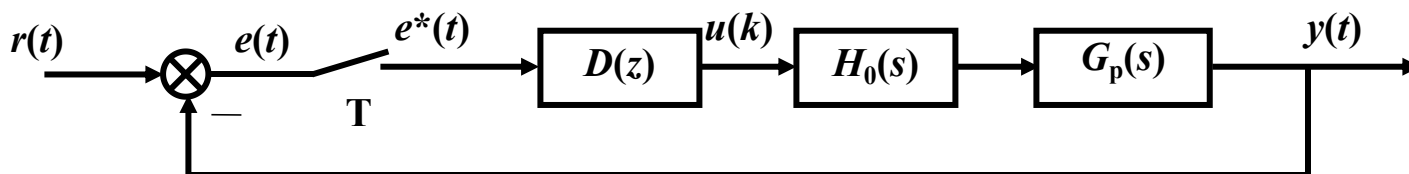
主要内容



- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- **离散系统的动态性能分析**
- **离散系统的数字校正**



➤ 采样控制系统的常用结构



其中 $D(z)$ 表示数字控制器， $u(k)$ 是离散时间信号， $H_0(s)$ 是零阶保持器。

➤ 数字控制器的设计方法通常分为：模拟化设计方法和数字化设计方法。



- 模拟化设计方法

$$D(s) \rightarrow D(z)$$

微分方程的离散化

- 数字化设计方法

对连续控制器进行离散化

- z变换法
 - 1、前向差分法
 - 2、后向差分法
 - 3、零极点匹配映射法
 - 4、Tustin映射法

数学实质：

在一定的采样方式和保持方式下，
由系统的连续模型来导出等价的离散模型，
并建立起两者系数之间的关系式。



• z变化法

- **对连续对象直接z变换**，只能保证前后系统的冲激响应在采样点值相同。
- 如果变换前连续对象是稳定的，也就是极点在s左半平面，则变换后离散系统也是稳定的，其极点在单位圆内。
- 这种变换方法产生较大的频率混叠，也就是s域内一个极点的虚部对应到z域一个虚部，而另一个s域极点的虚部只要满足是刚才s域极点虚部加减 $k\omega_s$ 则映射到z域同一个虚部，无法区分高频和低频，这是很大的缺陷，**因此很少用，如果非要用，需要提高采样频率。**



回顾：模拟化设计方法



(1) 前向差分法离散化

利用级数展开可将 $z=e^{sT}$ 写成以下形式

$$z=e^{sT}=1+sT+\dots\approx 1+sT$$

可得

$$s = \frac{z-1}{T}$$

思想：相当于积分中用前向矩形来近似积分。

即给定模拟控制器传递函数 $D(s)$ ，其等效离散传递函数 $D(z)$ 为：

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

这种方法s域左半平面映射到z域 $z<1$ 区域，显然包含不稳定区域，因此连续系统稳定离散系统可能不稳定，因此这种方法很少用。
不产生频率混叠但产生畸变。



(2) 后向差分法离散化

利用级数展开还可将 $Z=e^{sT}$ 写成以下形式

$$Z = e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} \approx \frac{1}{1-sT}$$

$$\text{即: } s = \frac{z-1}{Tz}$$

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

思想：相当于积分中用**后向矩形**来代替积分

则给定模拟控制器传递函数 $D(s)$,
其等效离散传递函数 $D(z)$ 为:

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$$

s域左半平面映射到z域以0.5为圆心0.5为半径的圆，也就是说，原来连续系统稳定，则离散系统稳定。

不产生频率混叠，但是存在频率畸变(大圆变小圆)。



回顾：模拟化设计方法



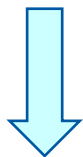
(3) Tustin法

利用 $z = e^{sT} = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}}$ 再Taylor展开得到:

• 由于 $s \equiv (1/T) \ln z$

$\ln z$ 可展开为:

$$\ln z = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right)$$



$$x = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$s \equiv \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

思想：相当于用梯形来代替积分

不产生频率混叠，且s左半平面映射到z域单位圆内，这是我们很希望看到的结果。

变化前后频率发生畸变：

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_1 T}{2}$$

高频有较大畸变。



回顾：模拟化设计方法



(4) 极点—零点匹配映射法。

先对 $G_c(s)$ 的分子分母多项式进行因式分解。

- $G_c(s)$ 中的有限极点与零点 $s=-a$ 映射为 $D(z)$ 中的极点或零点 $z=\exp(-aT)$,
- 而 $G_c(s)$ 中的无穷远处的零点则映射为 $D(z)$ 中位于-1的零点。
- 最后确定 $D(z)$ 的增益, 使 $D(z)$ 的增益在某一主频处与 $G_c(s)$ 的增益匹配。

一阶补偿器:

$$G_C(s) = K \frac{s+a}{s+b}$$



$$D(z) = C \frac{z-A}{z-B}$$

$$A = e^{-aT}$$

$$B = e^{-bT}$$

$$C \frac{1-A}{1-B} = K \frac{a}{b}$$

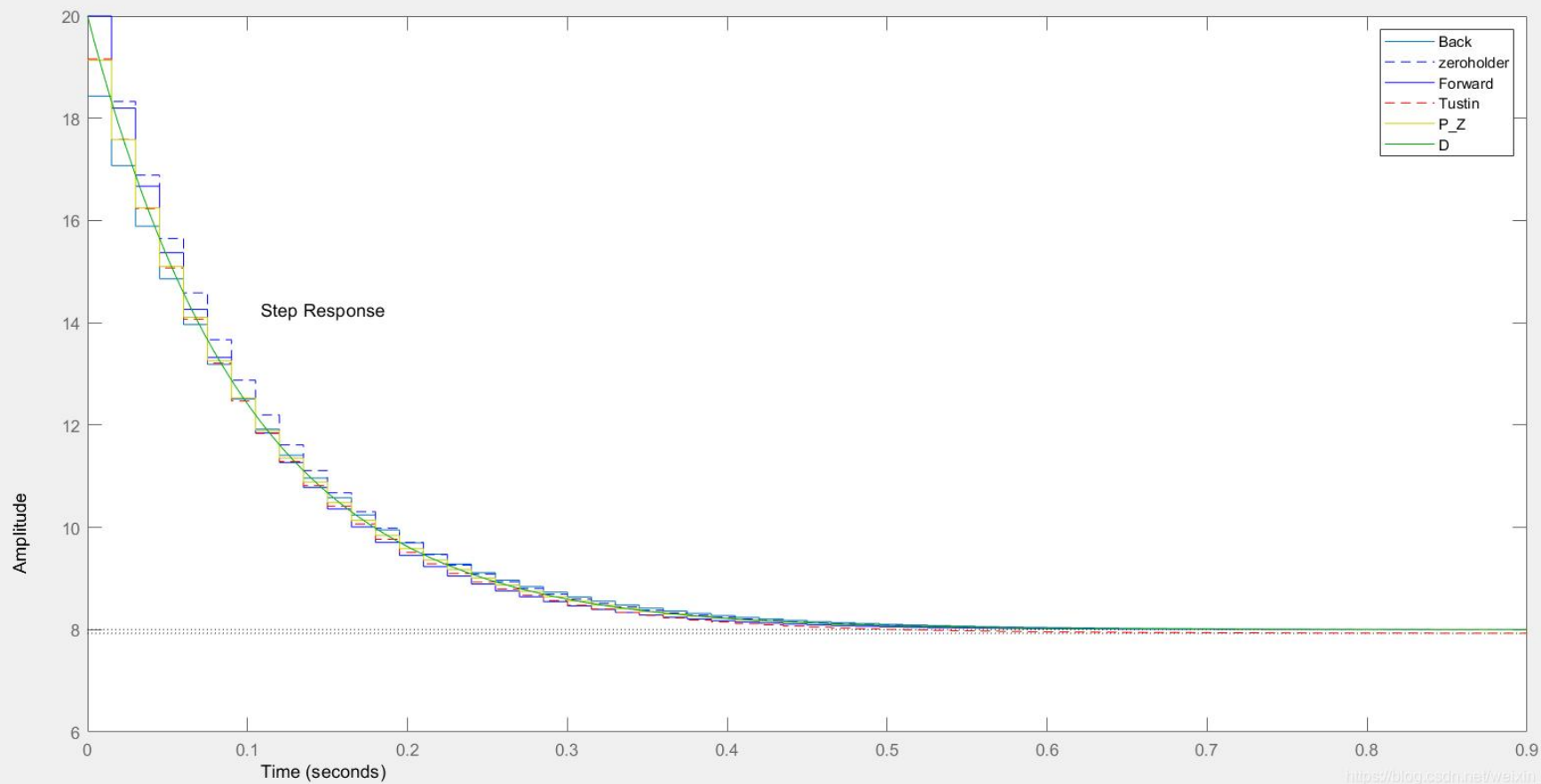
- 拥有Tustin变换的优点和缺点。
- 适用于给定连续传递函数为零极点形式。
- 分子少的零点用z域-1点凑。(Tustin变换可得)
- 不存在频率混叠。
- 不能保证频率不畸变。
- 原系统稳定则离散系统稳定。

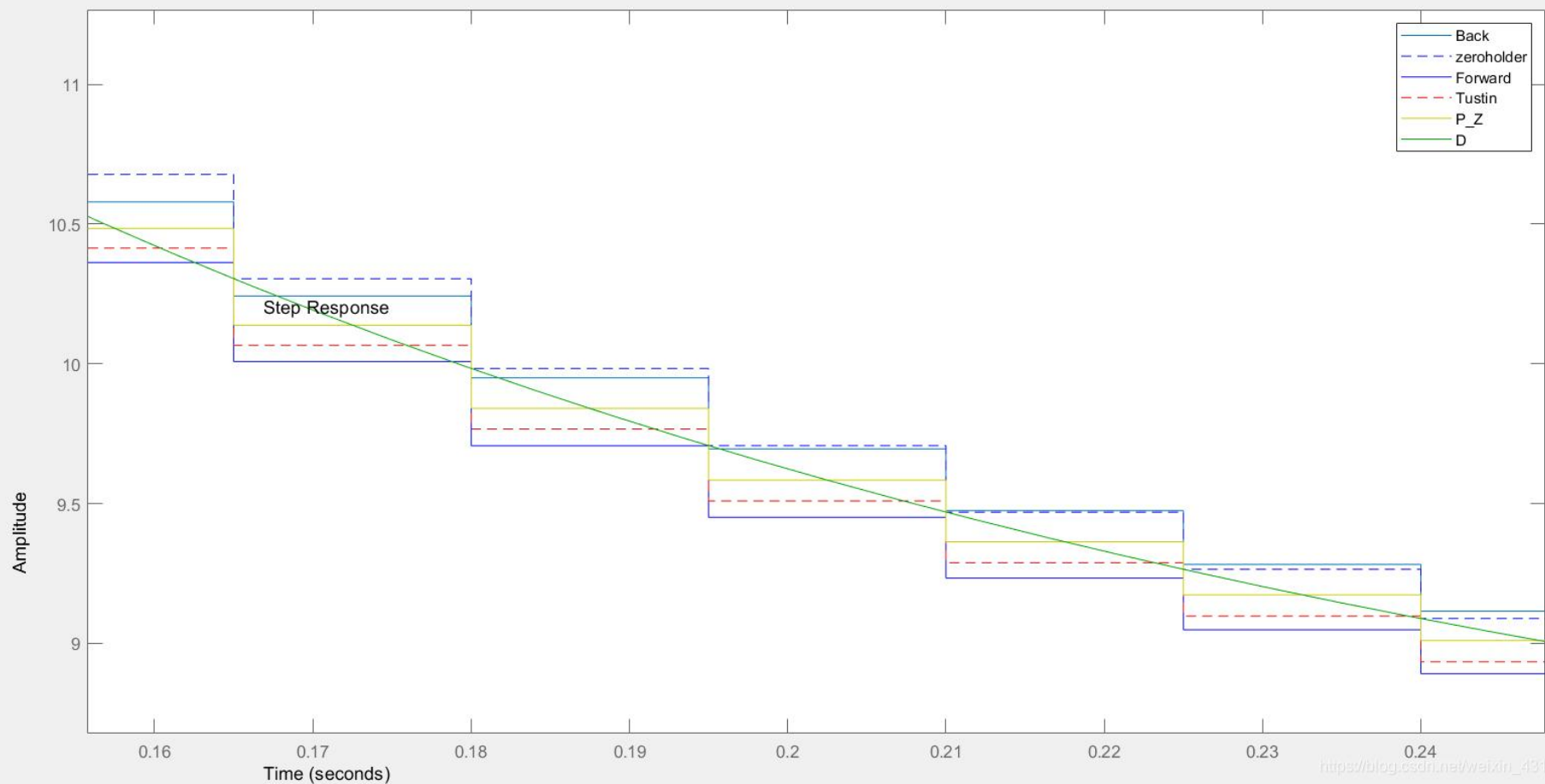


绘图比较



```
s = tf('s');  
z = tf('z',0.015);  
D = 20*(s+4)/(s+10);  
Back = (21.2-20*z^(-1))/(1.15-z^(-1)); %后向差分  
zeroholder = c2d(D,0.015); %0阶保持器  
Forward = 20*(z-0.94)/(z-0.85); %前向差分  
Tustin = (19.16-18.05*z^(-1))/(1-0.86*z^(-1)); %双线性变换  
  
k = 8*(1-exp(-0.15))/(1-exp(-0.06));  
P_Z = k*(1-z^(-1)*exp(-0.06))/(1-z^(-1)*exp(-0.15)); %零极点配置法  
  
step(Back,zeroholder,'--',Forward,'-',Tustin,'r--',P_Z,'y-',D,'g-');  
legend;
```

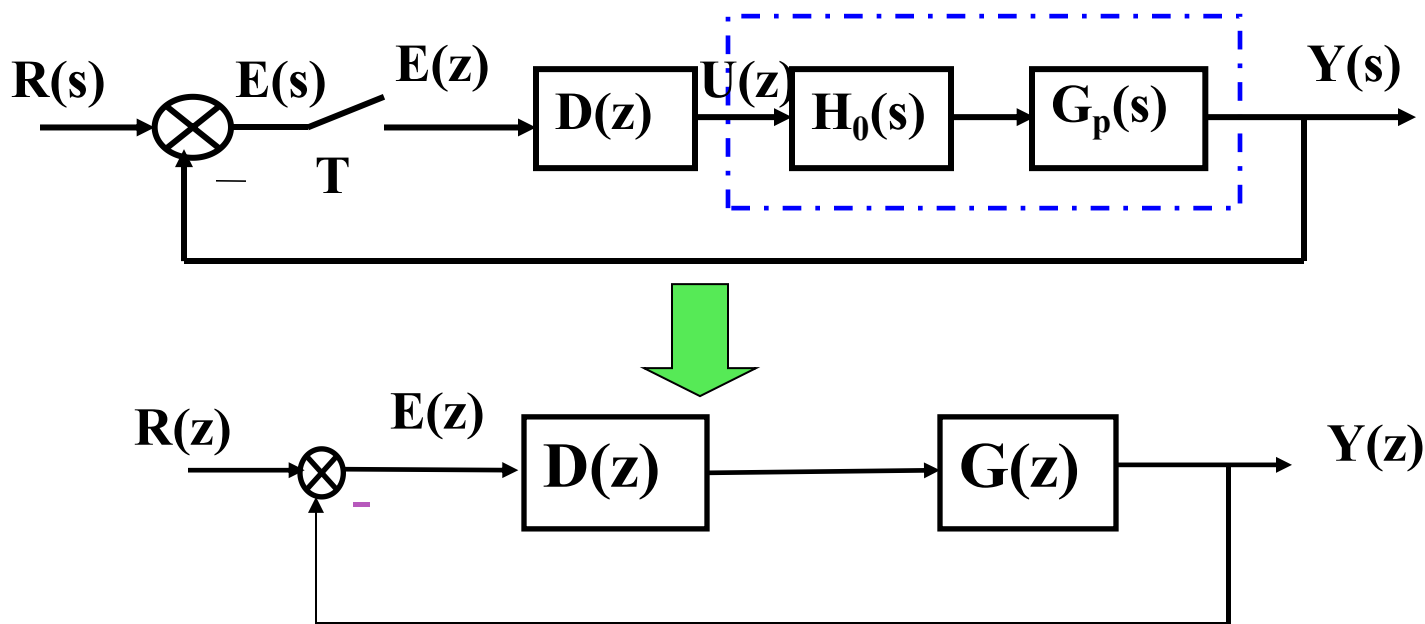




综合来看Tustin变换的性质较优。



- 模拟化设计方法
- 数字化设计方法



➤ 数字控制器的设计任务是根据未校正的脉冲传递函数 $G(z) = G_p H_0(z)$ 选择合适的 $D(z)$ ，使开环脉冲传递函数 $G(z)D(z)$ 符合要求。



常用的数字化设计方法



(1) **z 域的根轨迹设计方法。**根据期望的闭环极点位置，可以用 z 平面的根轨迹方法进行设计。**一般不在 z 域采用频率响应方法。因为包含 $z=\exp(j\omega T)$ ，无法利用 s 域中简易的对数作图法。**



(2) **z 域解析设计的方法。**由性能指标和 $G(z)$ 提出闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 或闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_e(z)$ 应有的形式，再推算出 $D(z)$ ，必须满足物理可实现条件。

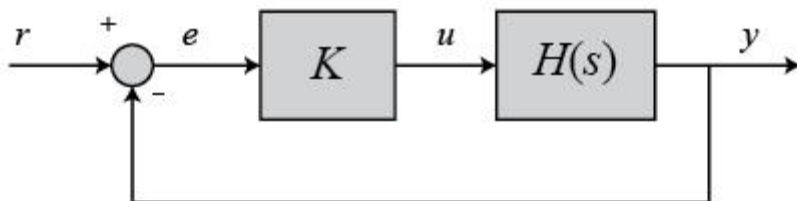
(3) **w 域的设计方法。**在 w 平面可以采用所有的频域设计方法。注意是伪频。



(1) z域根轨迹设计方法



●回顾：s域根轨迹设计方法

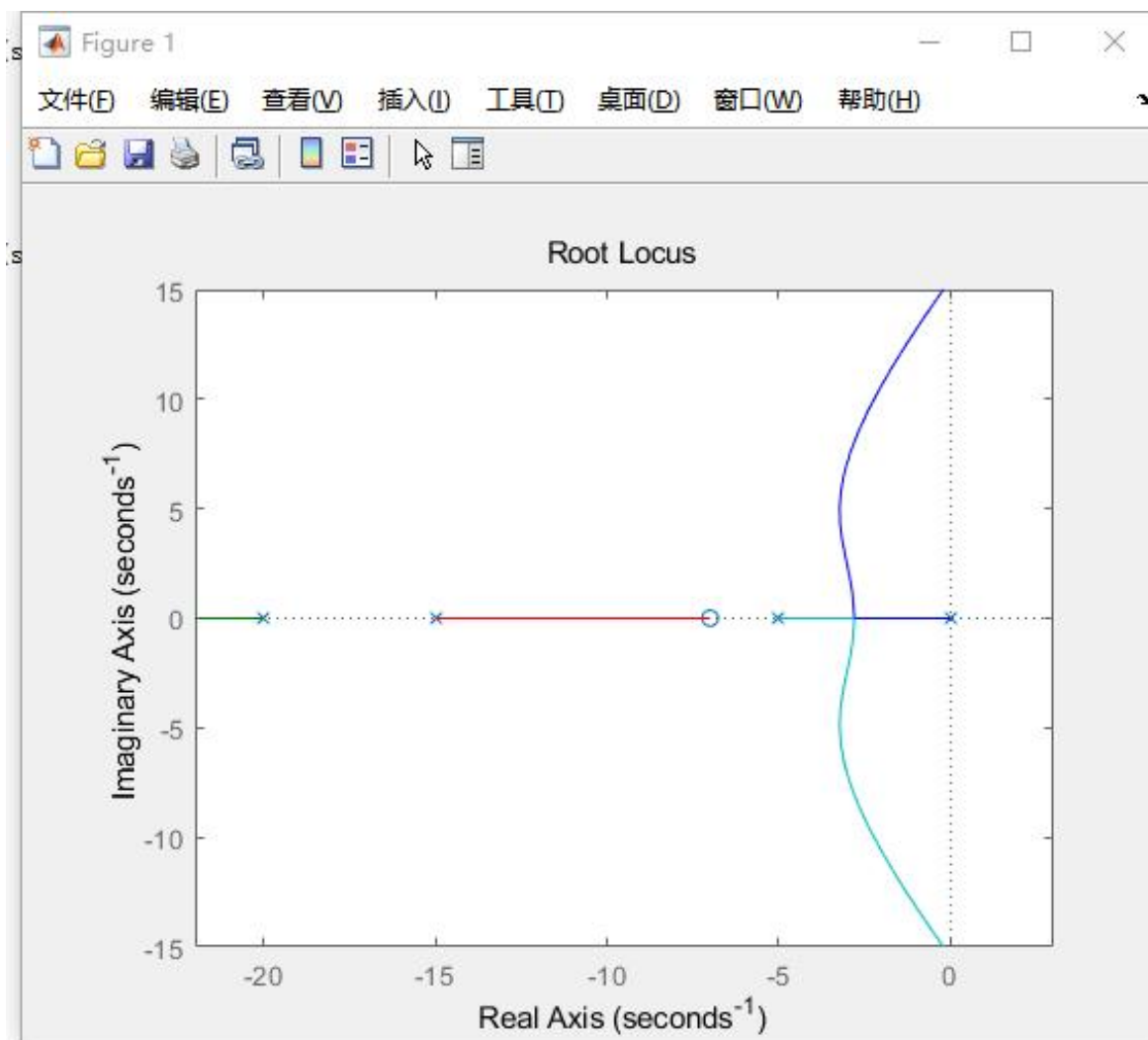


开环传递函数 $H(s)$
比例增益 K

根轨迹：通常是在比例增益 K 在 0 到 ∞ 变化时系统闭环极点的轨迹曲线。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 7}{s(s + 5)(s + 15)(s + 20)}$$

```
s = tf('s');  
sys = (s + 7)/(s*(s + 5)*(s + 15)*(s + 20));  
rlocus(sys)  
axis([-22 3 -15 15])
```

上图显示了纯比例控制器的所有可能的闭环极点位置。
在这种情况下，并非所有这些闭环极点位置都满足我们的设计标准。

假设设计标准是**5%**的过冲（超调）和**1s**的上升时间，

从根轨迹选择K的值

为了确定轨迹的哪一部分可以接受，可以使用 **sgrid(zeta,wn)** 命令绘制恒定阻尼比和自然频率的线。

它的两个参数是**阻尼比(ζ)**和**自然频率(ω_n)** [如果是想查看可接受的范围，则它们是一个向量]。

在我们的问题中，我们需要一个小于5%的超调(这意味着阻尼比 ζ 大于0.7)和一个上升时间为1s(这意味着自然频率 ω_n 大于1.8)。

假设设计标准是5%的过冲（超调）和1s的上升时间

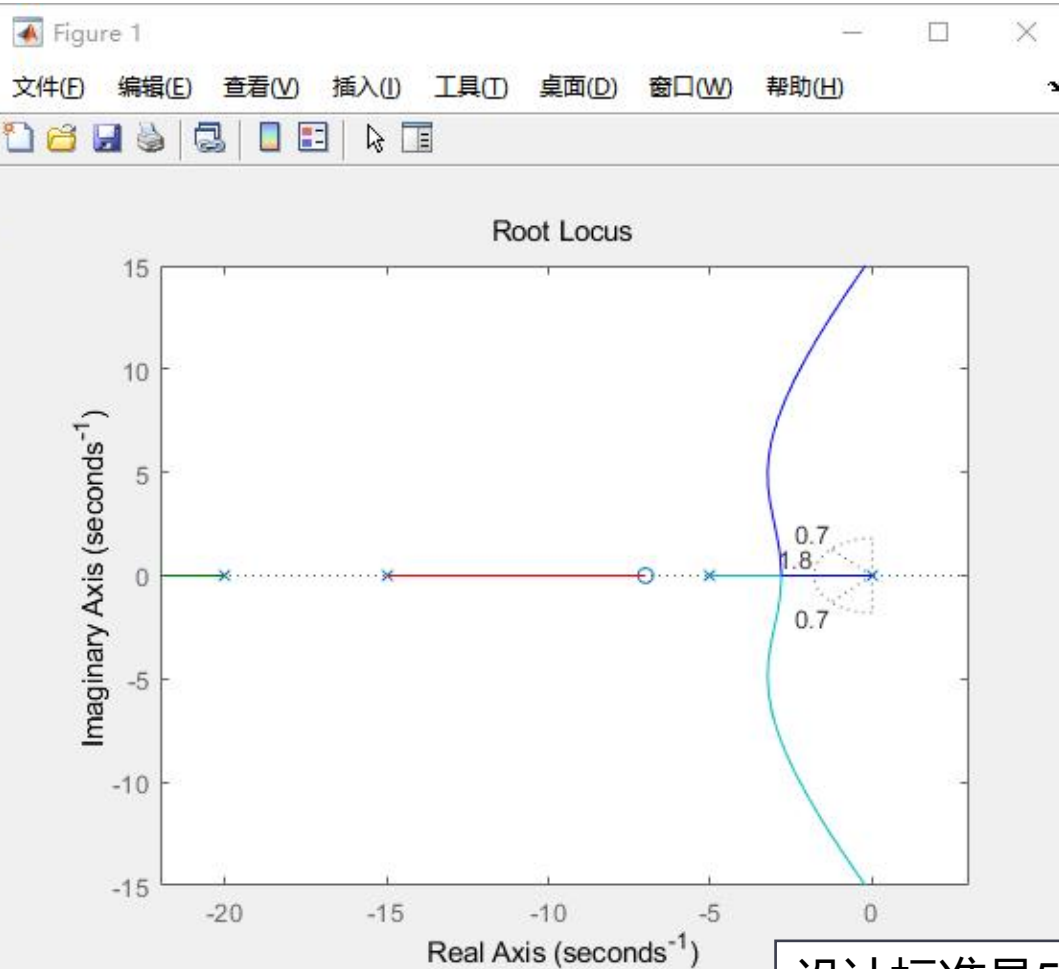
$$0.05 > M_p = e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

$$\Rightarrow \zeta > 0.6906$$

$$1 > T_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow \omega_n > 1.8$$

```
zeta = 0.7;  
wn = 1.8;  
sgrid(zeta,wn)
```



两条呈 45° 角的虚线表示极点位置，其中 $\zeta = 0.7$

在这些线之间 $\zeta > 0.7$

在这些线之外 $\zeta < 0.7$

半圆表示自然频率 $\omega_n = 1.8$ 的极点位置

在圆内 $\omega_n < 1.8$

在圆外 $\omega_n > 1.8$

设计标准是5%的过冲（超调）和1s的上升时间

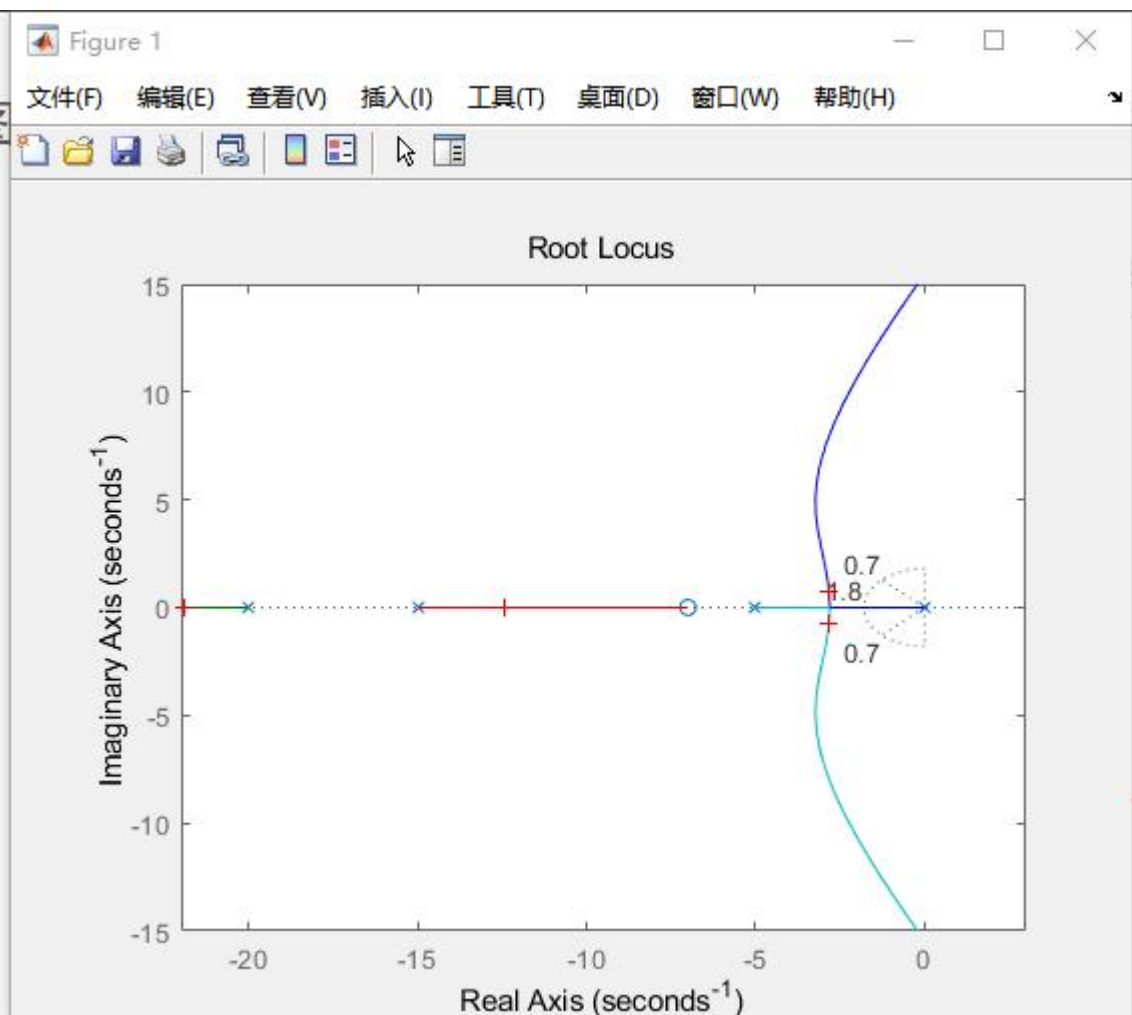
- 要使超调量小于5% (ζ 大于0.7)，极点必须位于两条带角度的虚线之间
- 要使上升时间短于1s (ω_n 大于1.8)，极点必须位于虚线半圆之外。

从上图可以看出，所需区域内有一部分根轨迹。

因此，在这种情况下，我们只需要一个比例控制器即可将极点移至所需区域。

可以在MATLAB中使用**rlocfind**命令在轨迹上选择所需要的极点：

```
[k,poles] = rlocfind(sys)
```



```
>> [k,poles] = rlocfind(sys)  
Select a point in the graphics  
window
```

selected_point =

-2.8353 + 0.7430i

k =

332.0253

poles =

-21.9275 + 0.0000i

-12.4230 + 0.0000i

-2.8247 + 0.7436i

-2.8247 - 0.7436i

闭环响应（验证）

```
sys_cl = feedback(k*sys,1)
```

```
>> sys_cl = feedback(k*sys,1)
```

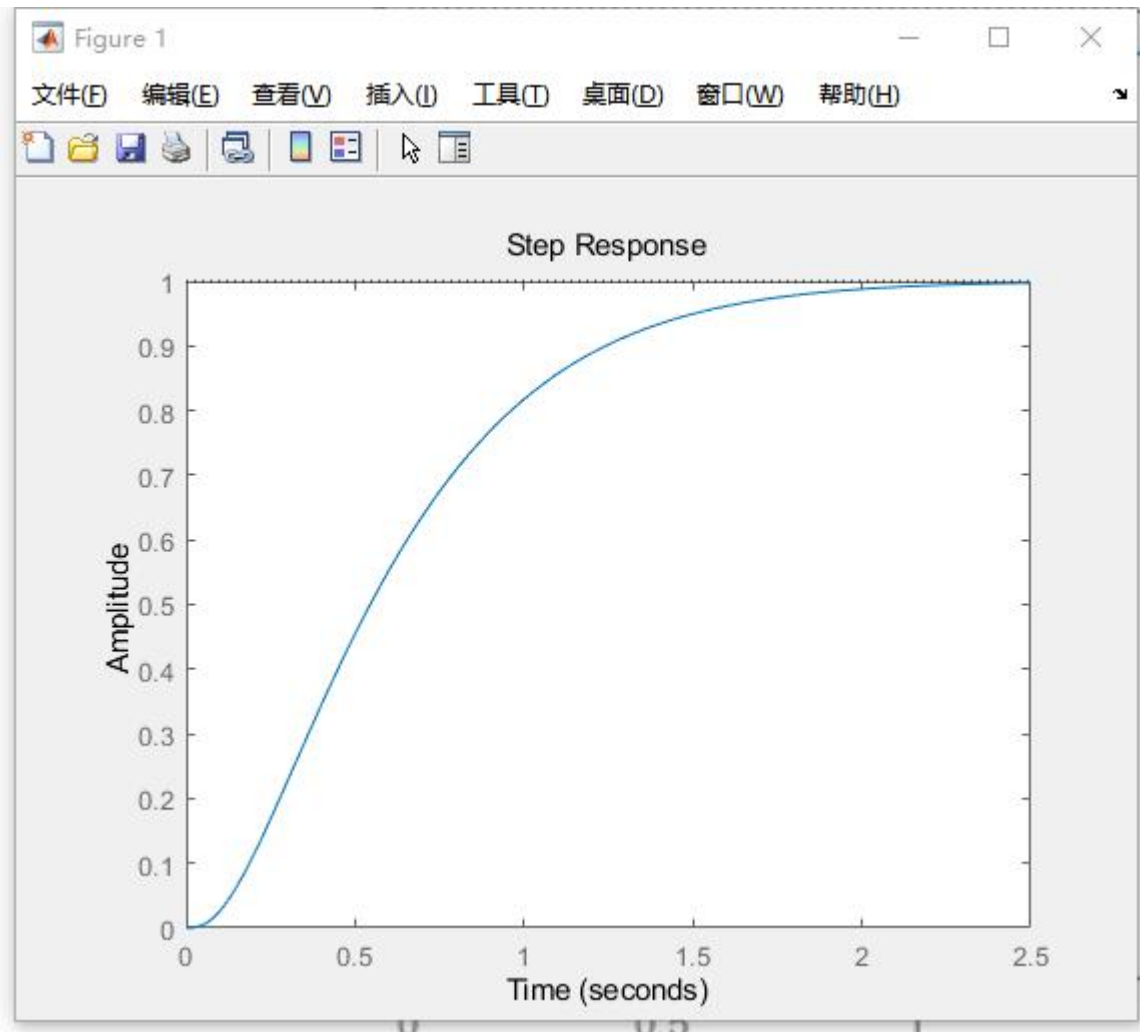
```
sys_cl =
```

$$332 s + 2324$$

$$s^4 + 40 s^3 + 475 s^2 + 1832 s + 2324$$

Continuous-time transfer function.

```
step(sys_cl)
```



正如我们预期的那样，该响应的过冲小于5%，上升时间小于1s。

使用控制系统设计器进行根轨迹设计

controlSystemDesigner函数可用于分析和设计。

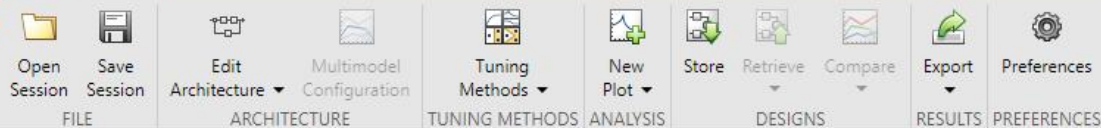
以根轨迹作为设计方法来改善闭环系统的阶跃响应。

针对上述相同的模型，首先定义传递函数 $H(s)$

```
s = tf('s');  
sys = (s + 7)/(s*(s + 5)*(s + 15)*(s + 20));
```

```
controlSystemDesigner(sys)
```

CONTROL SYSTEM



Controllers And Fixed Blocks

F
C
G
H

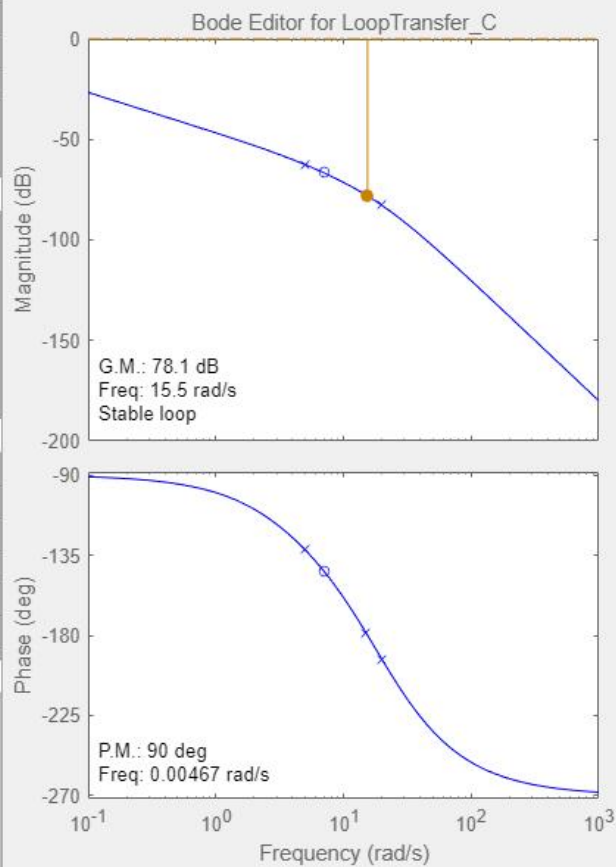
Designs

Responses

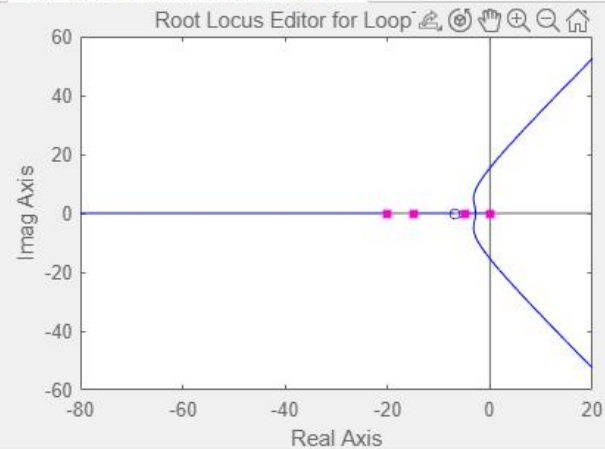
LoopTransfer_C
IOTransfer_r2y
IOTransfer_r2u
IOTransfer_du2y
IOTransfer_dy2y
IOTransfer_n2y

Preview

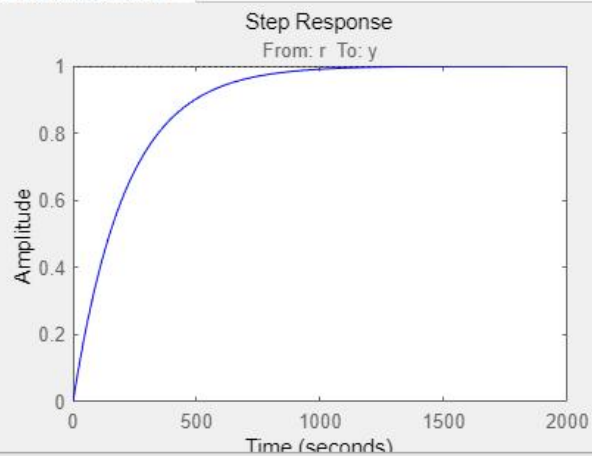
Bode Editor for LoopTransfer_C



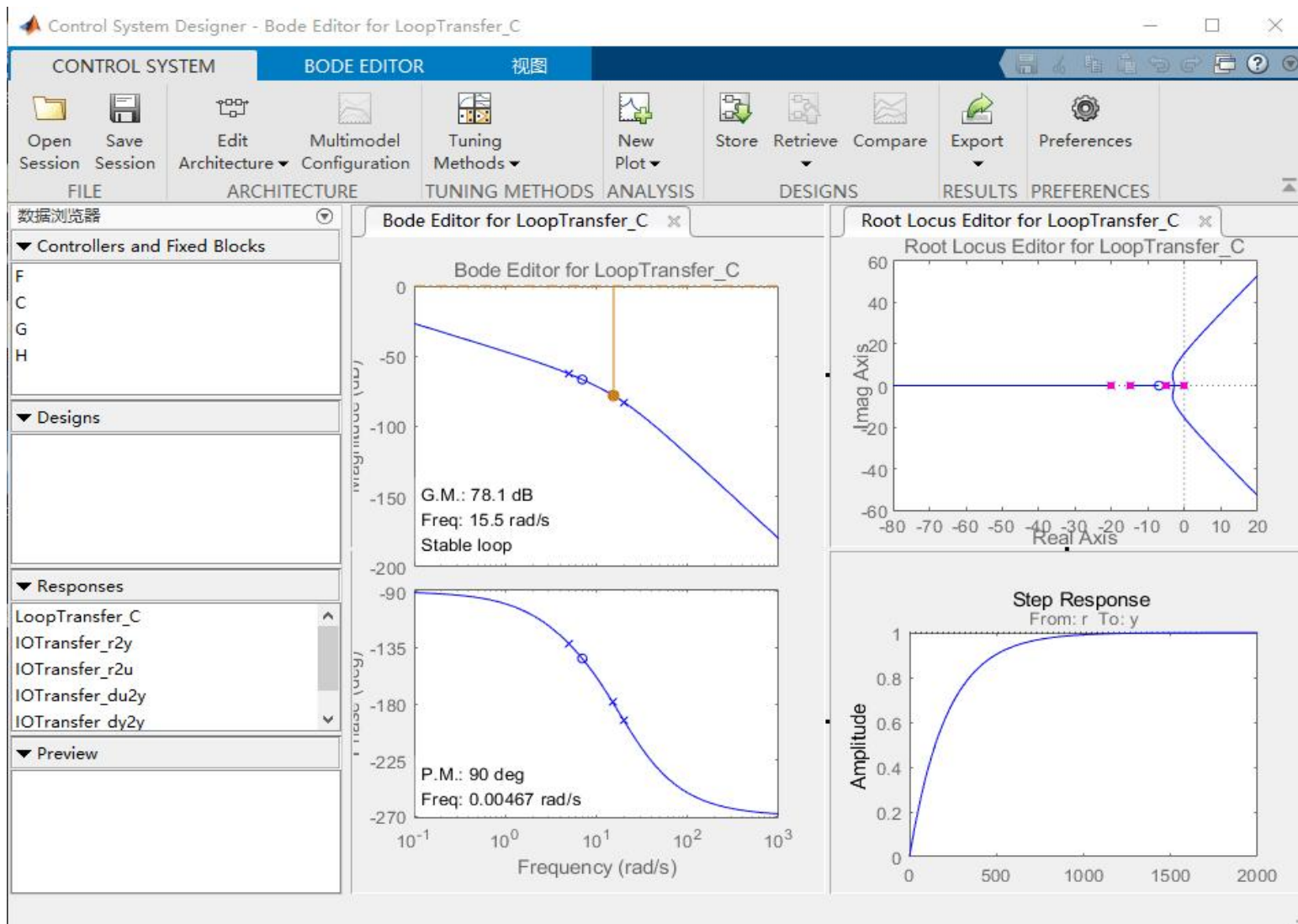
Root Locus Editor for LoopTransfer_C



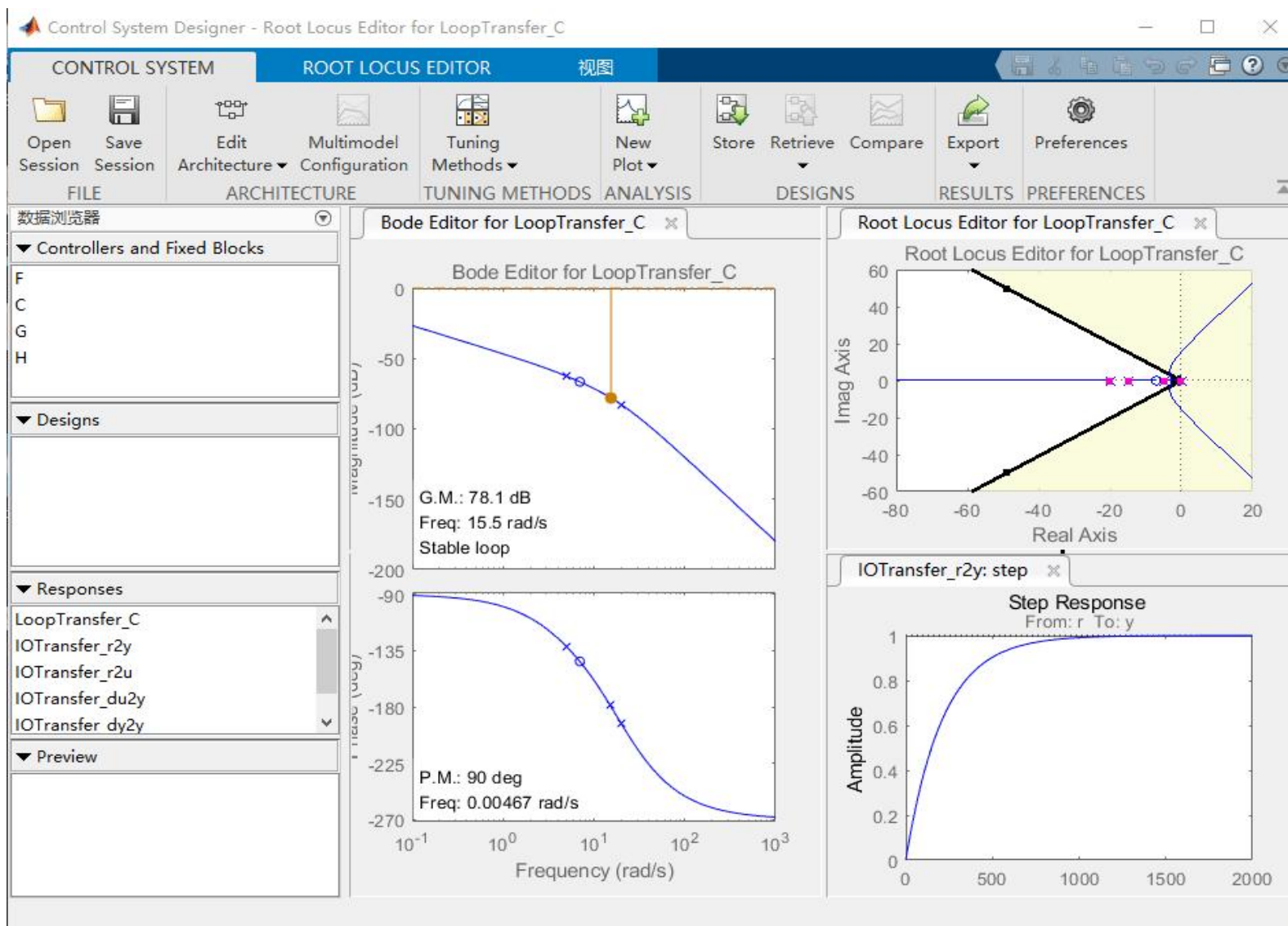
IOTransfer_r2y: step



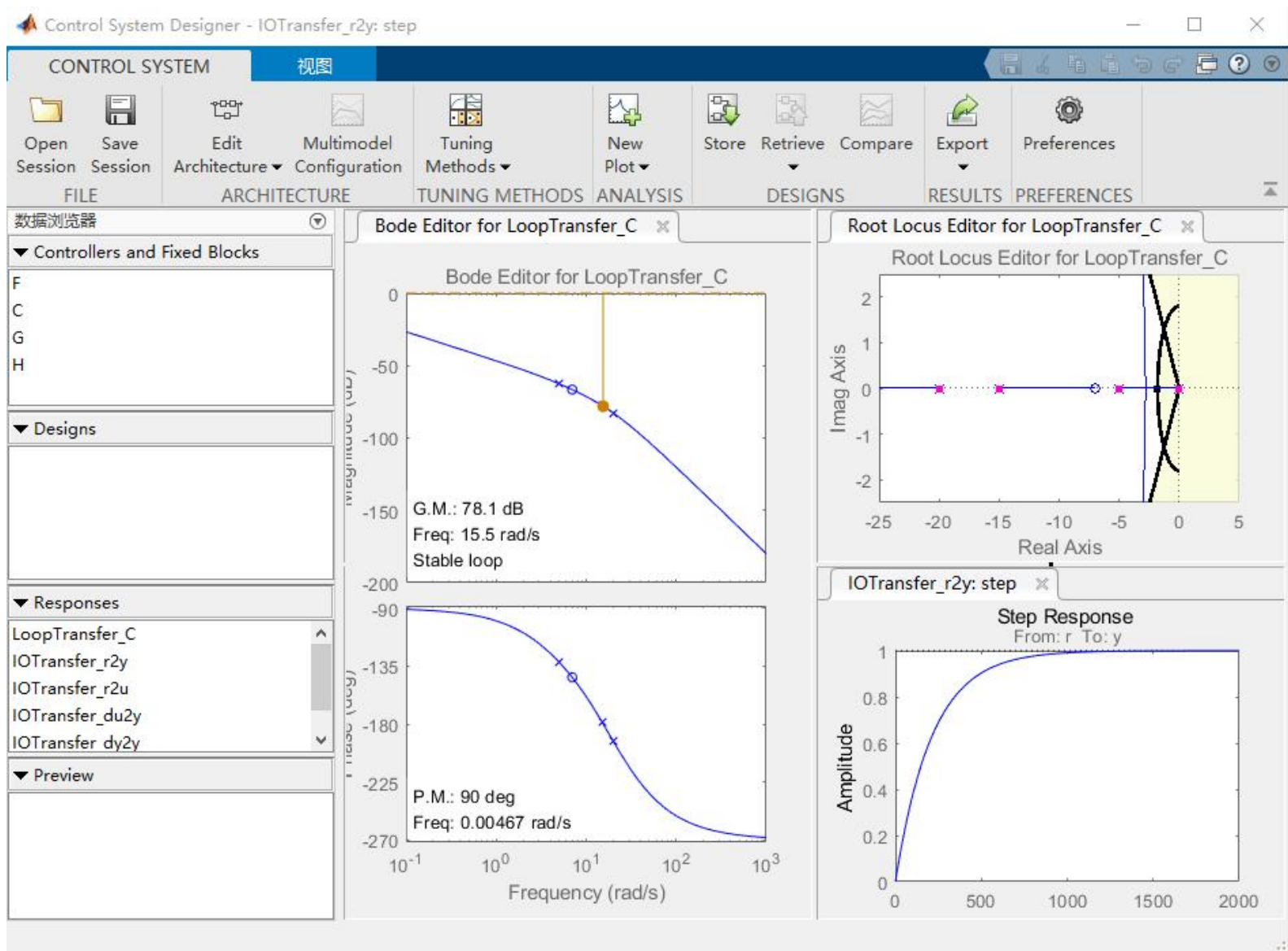
下一步是将设计要求添加到“根轨迹”图中，**右键**设计需求，然后单击新建，直接在图上完成。可以为稳定时间，超调百分比，阻尼比，自然频率，区域约束，设置系统要求。



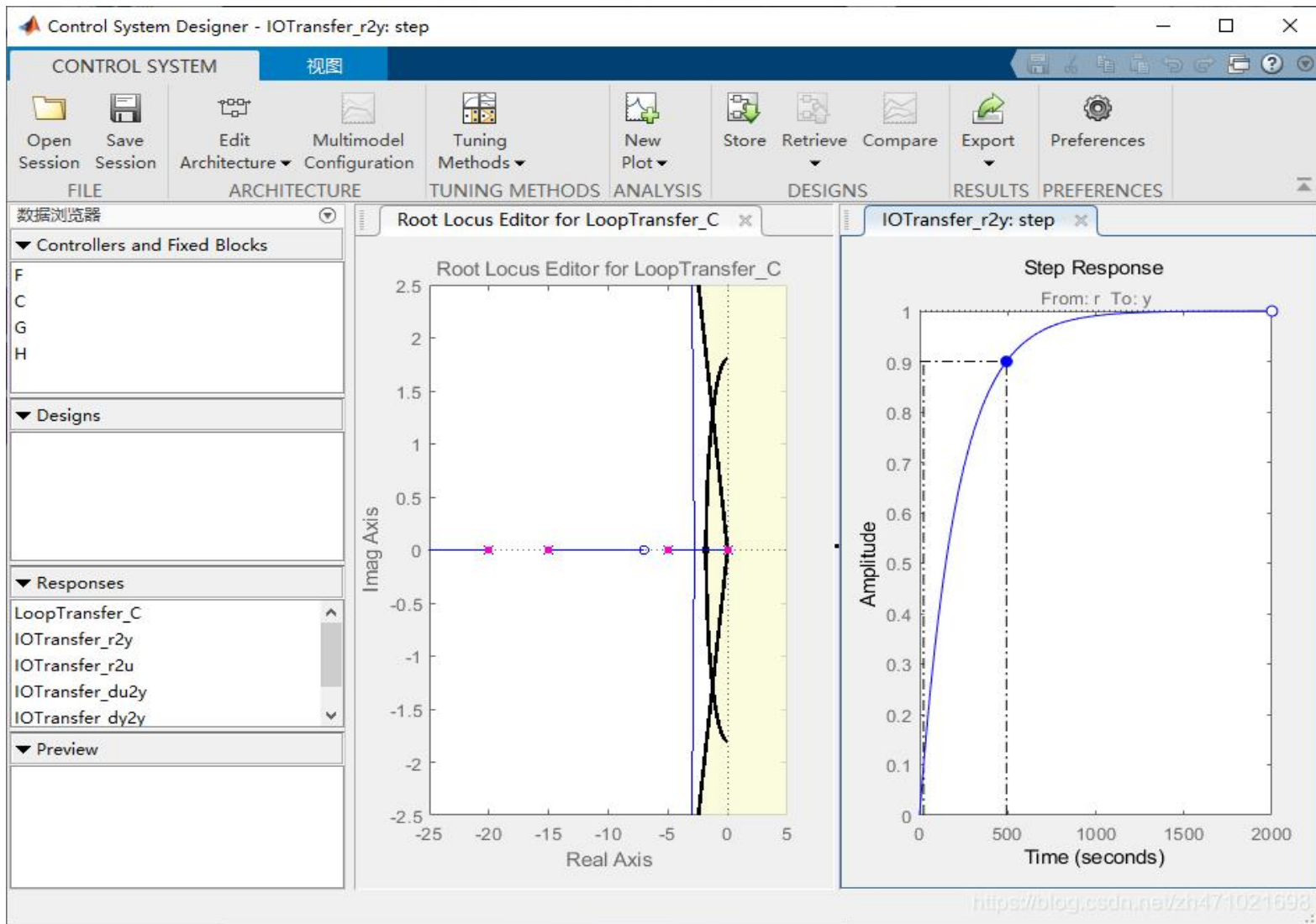
右键单击某个轴并选择属性，然后选择极限(limits)，以放大根轨迹，将实轴限制更改为-25到5，将虚轴限制更改为-2.5到2.5。



同样，我们可以查看相应的关键参数，在阶跃响应图上，右键单击该图，然后转到特性并选择峰值响应和上升时间。屏幕上现在应该有两个大圆点，指示这些参数的值。单击这些点中的每一个，将弹出一个包含信息的框。

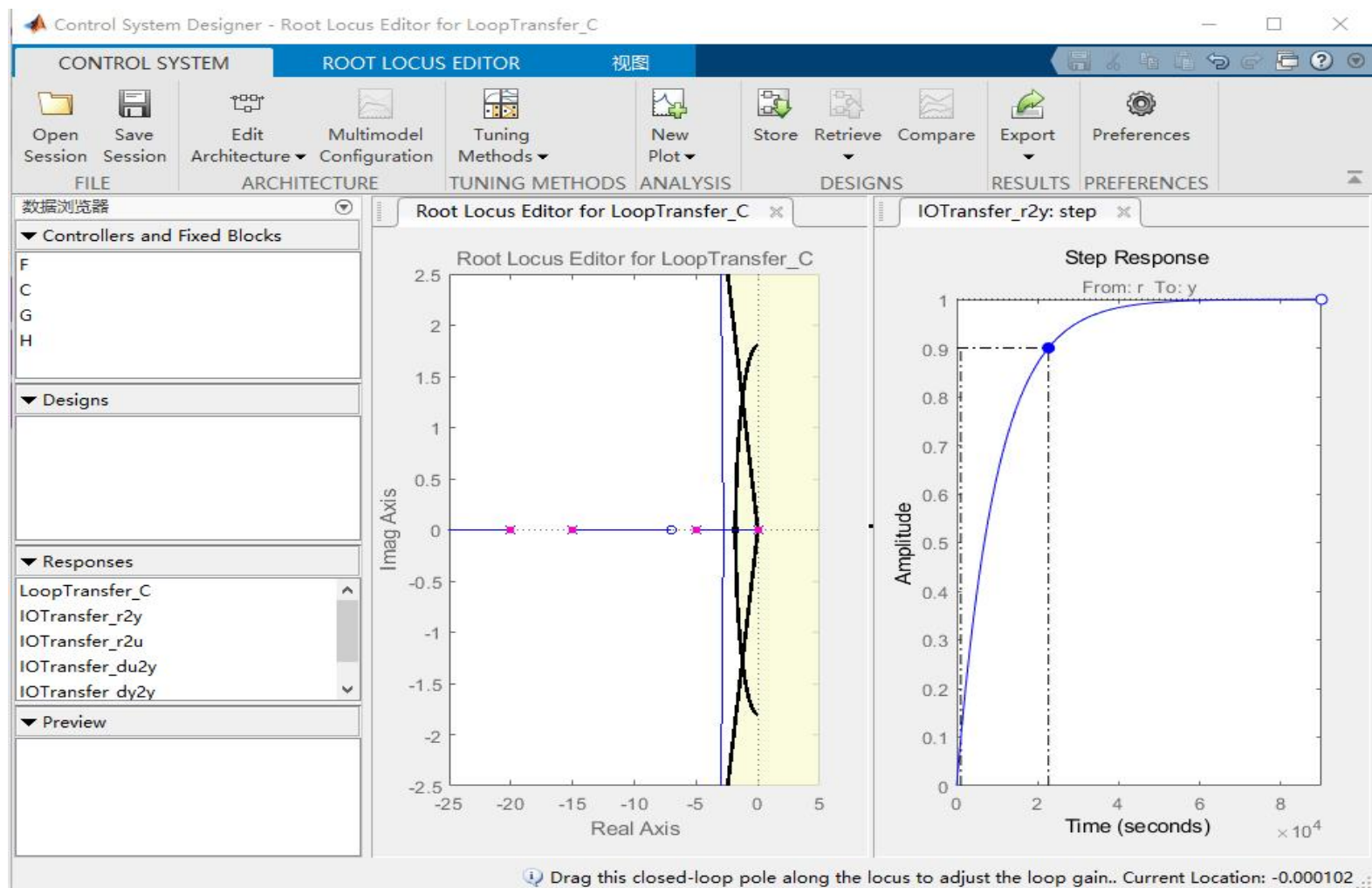


当关闭伯德图后，可以显示为：

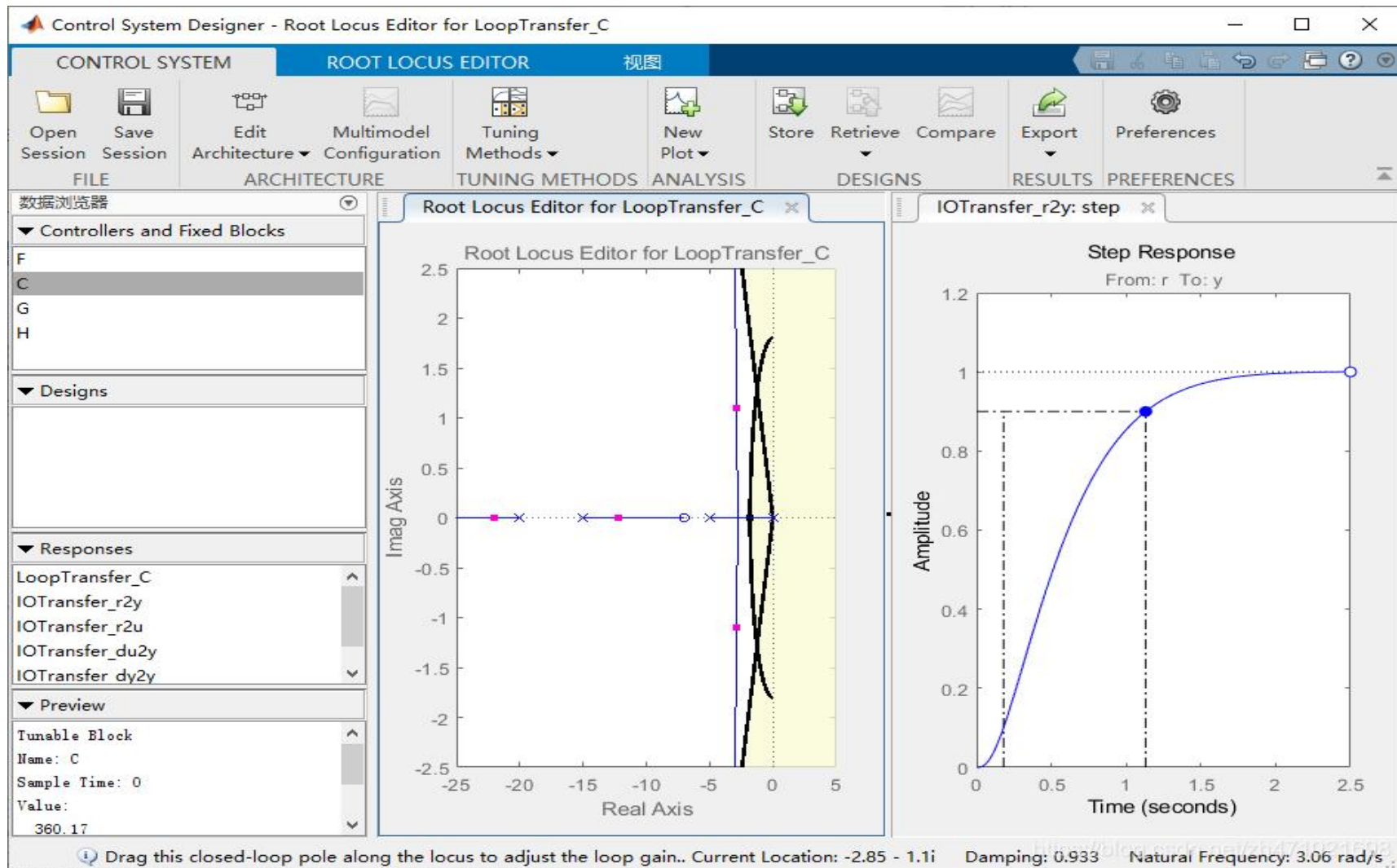


正如阶跃响应上的特性所示，过冲是可以接受的，但上升时间太大。根轨迹上的粉红色框显示了当前所选控制增益 K 的对应闭环极点位置。

要解决此问题，我们需要为增益 K 选择一个新值。
类似于我们使用 `rlocfind` 命令的方式，可以直接在根轨迹图上更改控制器的增益，单击并将最接近虚轴的粉红色框拖动到我们的根轨迹图的可接受区域，如下所示：



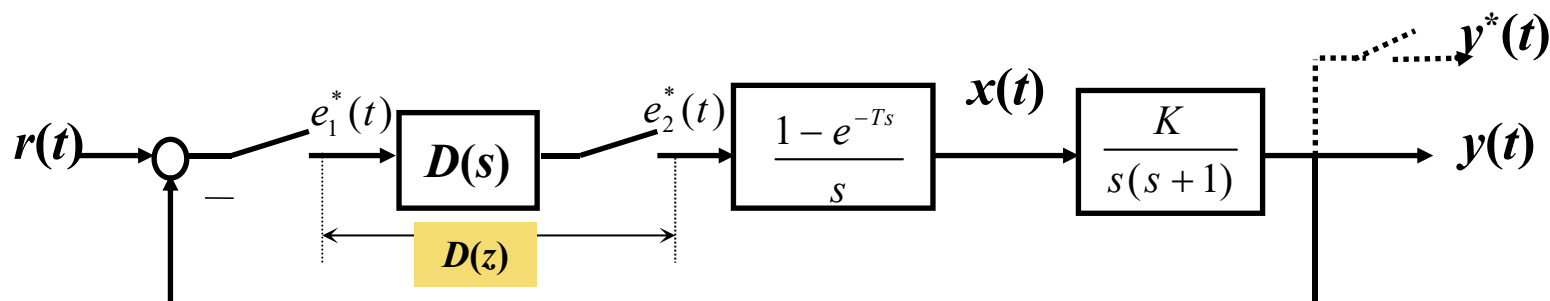
在窗口的“预览”（Preview）框中，可以看到环路增益已更改为360。检查闭环阶跃响应图，现在已经满足我们的两个要求。





(1) z域根轨迹设计方法

例7-5-2 如图所示系统，若要求（期望）**阻尼比 $\zeta=0.707$** 以及**调节时间 $t_s=4s$** ，（已知采样周期 $T=1s$ ），如何设计控制器 $D(z)$ 和 K 能满足要求？



串接了数字控制器 $D(z)$ 的采样控制系统

$$t_s = \frac{4}{|\sigma|} = 4 \Rightarrow \sigma = -1$$

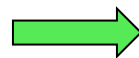


$$e^{\sigma T} = e^{-T} \Big|_{T=1} = 0.368$$

$$\omega_n = \frac{|\sigma|}{\zeta} = \frac{1}{0.707} = 1.414$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 1.414 \sqrt{1 - 0.707^2} = 1$$

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -1 \pm j1$$



$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{(\sigma \pm j\omega_d)T} \Big|_{T=1} \\ &= 0.368(\cos 1 \pm j \sin 1) \\ &= 0.199 \pm j0.310 \end{aligned}$$

期望闭环极点



(1) z域根轨迹设计方法



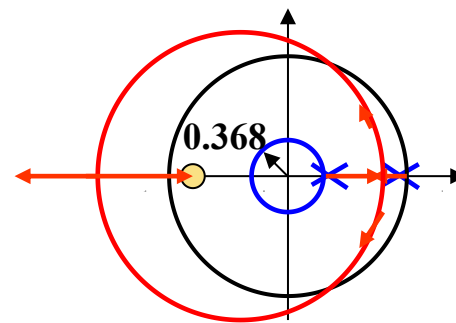
$$G(z) = \frac{Y(z)}{E_2(z)} = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(s+1)} \right] = \frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

- 系统的根轨迹如图所示。
- 很显然，根轨迹与半径为0.368的圆没有交点，因此调节时间无法满足。
- 采用串接数字控制器 $D(z)$ 来提高系统的性能。

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E_2(z)} = \frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

- 设计控制器 $D(z)$ 使得根轨迹与半径为0.368的圆相交。可将控制器设计为

$$D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{z - 0.368}{z - z_d}$$



$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{(\sigma \pm j\omega_d)T} \Big|_{T=1} \\ &= 0.368(\cos 1 \pm j \sin 1) \\ &= 0.199 \pm j0.310 \end{aligned}$$



(1) z域根轨迹设计方法



期望极点

$$z_{1,2} = 0.199 \pm j0.310$$

$$D(z) = \frac{z - 0.368}{z - z_d}$$

$$\text{则 } G(z)D(z) = \frac{0.368K(z + 0.717)}{(z - 1)(z - z_d)}$$

$$1 + G(z_1)D(z_1) = 0$$

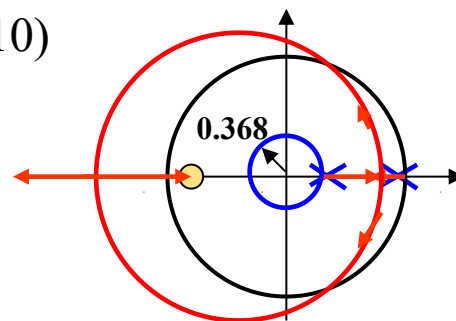
$$1 + \frac{0.368K(0.199 + j0.310 + 0.717)}{(0.199 + j0.310 - 1)(0.199 + j0.310 - z_d)} = 0$$

$$0.368K(0.906 + j0.310) = (0.801 - j0.310)(0.199 - z_d + j0.310)$$

$$0.333K + j0.114K = 0.255 - 0.801z_d + j(0.187 + 0.310z_d)$$

$$\begin{cases} 0.333K = 0.255 - 0.801z_d \\ 0.114K = 0.187 + 0.310z_d \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 1.175 \\ z_d = -0.171 \end{cases}$$





(1) z域根轨迹设计方法



$$G(z)D(z) = \frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-z_d)}$$

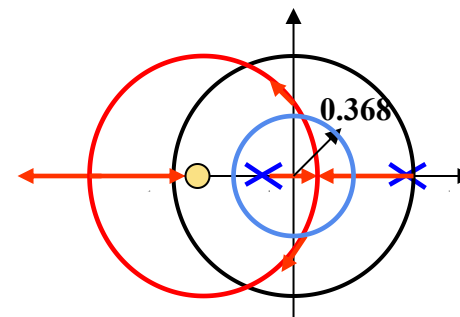
$$\begin{cases} K = 1.175 \\ z_d = -0.171 \end{cases}$$

因此，前向通道传递函数为：

$$D(z)G(z) = \frac{0.432(z+0.717)}{(z-1)(z+0.171)}$$

新的根轨迹如图所示。闭环传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{0.432(z+0.717)}{z^2 - 0.397z + 0.139} \\ &= \frac{0.432(z+0.717)}{(z-0.198+j0.316)(z-0.198-j0.316)} \end{aligned}$$





(1) z域根轨迹设计方法



➤ 数字控制器 $D(z)$ 在时域的表达式为差分方程

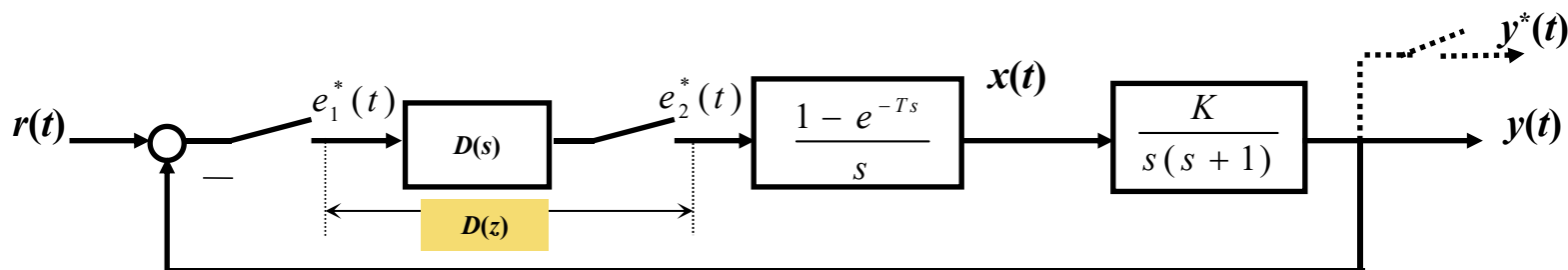
$$D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{z - 0.368}{z + 0.171}$$



$$e_2(kT) = e_1(kT) - 0.368e_1[(k-1)T] - 0.171e_2[(k-1)T]$$

➤ 显然，该方程很容易由计算机实现。

补偿前后的单位阶跃响应曲线可以自己用MATLAB实现一下试试。



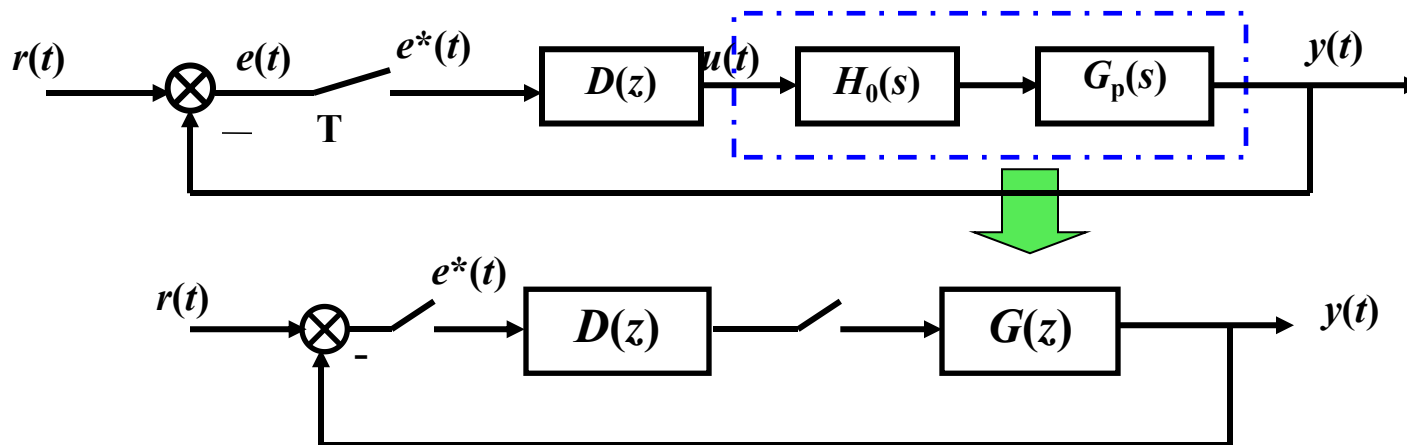
串接了数字控制器 $D(z)$ 的采样控制系统



(2) z域解析设计的方法



- 设如图所示的数字系统，其等效的结构框图为



数字控制系统框图



(2) z域解析设计的方法



- 对于如图所示的数字系统可求得其**闭环脉冲传递函数**为

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

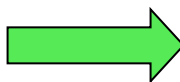
待求的数字控制器为

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)[1 - \Phi(z)]}$$



- 又如图所示的数字系统的**闭环误差脉冲传递函数**为

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + D(z)G(z)}$$

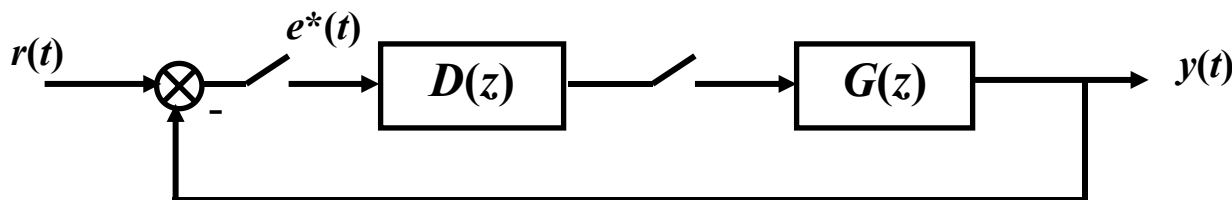


$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$



$$\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$$



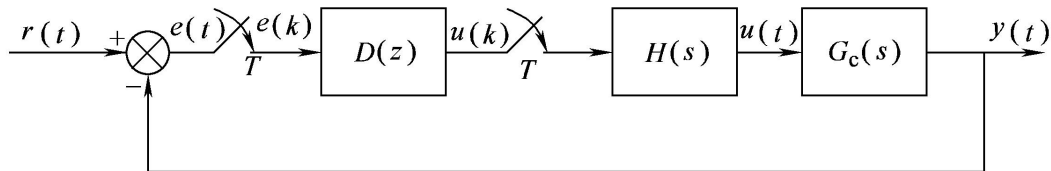
数字控制系统框图



数字控制器的离散化设计步骤(z域解析设计法)



1.根据控制系统的性能指标要求和其它约束条件，确定所需的闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$



2.求广义对象的脉冲传递函数 $G(z)$ 。

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = Z[H(s)G_C(s)] = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_C(s)\right]$$

3.求取数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ 。

$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \longrightarrow D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}$$

4.根据 $D(z)$ 求取控制算法的递推计算公式

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}}, \quad (n \geq m)$$



由数字控制器D(z)的一般形式:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}}, \quad (n \geq m)$$

则: 数字控制器的输出U(z)为

$$U(z) = \sum_{i=0}^m b_i z^{-i} E(z) - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} U(z)$$

因此, 数字控制器D(z)的计算机控制算法为

$$u(k) = \sum_{i=0}^m b_i e(k-i) - \sum_{i=1}^n a_i u(k-i)$$

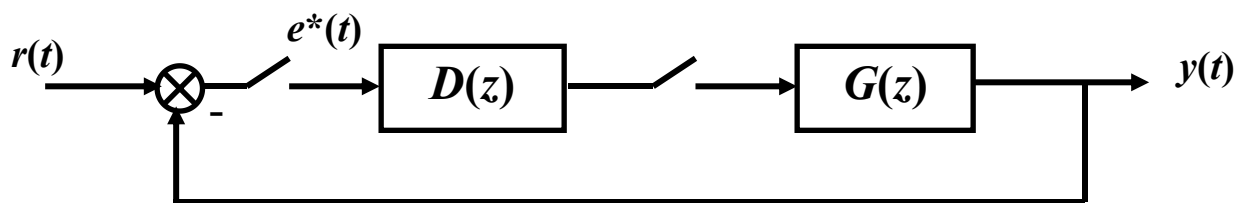
按照上式, 就可编写出控制算法程序。



(2) z域解析设计的方法



- 可见，z域解析设计的方法关键是根据性能指标的需要选择合适的闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 或闭环误差脉冲传递函数 $\Phi_e(z)$ 。
- 设计出的数字控制器 $D(z)$ ，必须满足物理可实现条件：
 - 数字控制器 $D(z)$ 分子多项式的阶次不得大于分母多项式的阶次；
 - $D(z)$ 没有单位圆上（一个 $z=1$ 的极点除外）和单位圆外的极点。



数字控制系统框图

z域解析设计的方法主要有最少拍系统设计、无波纹最少拍系统设计、最小均方差系统设计等



➤ 回顾：有限时间响应系统

当闭环脉冲传递函数所有极点**都分布**在**原点**时，此时的系统具有一个很特别的响应，即在有限时间结束过渡过程，达到稳态，此时的闭环脉冲传递函数具有如下形式

$$G_B(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n} = \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \dots + \frac{b_0}{a_n} z^{-n}$$

其单位脉冲响应

$$h^*(t) = \frac{b_n}{a_n} \delta(t) + \frac{b_{n-1}}{a_n} \delta(t - T) + \dots + \frac{b_0}{a_n} \delta(t - nT)$$

即在单位脉冲作用下，该系统的瞬态响应能在 nT 内结束，即 n 拍可结束过渡过程，这个特点是连续系统所不具备的。

在采样过程中，通常称 **一个采样周期** 为 **一拍**



最少拍（最小拍）系统设计



- **最少拍系统**：在典型输入作用下，能以**有限拍**结束响应过程，且在采样时刻无稳态误差的离散系统。
- 最少拍系统的设计：是针对典型输入进行的。

- **常见的典型输入**：

- 单位阶跃函数
- 单位速度函数
- 单位加速度函数

$$\mathcal{Z}[1(t)] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}[t] = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{2}t^2\right] = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{\frac{1}{2}T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

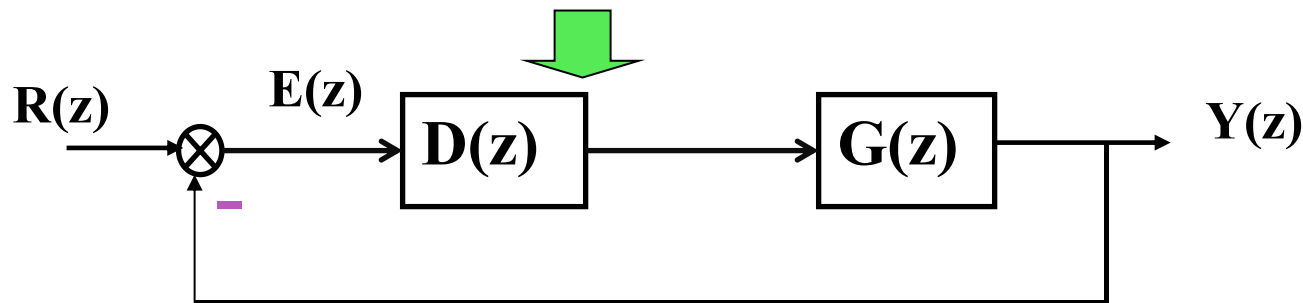
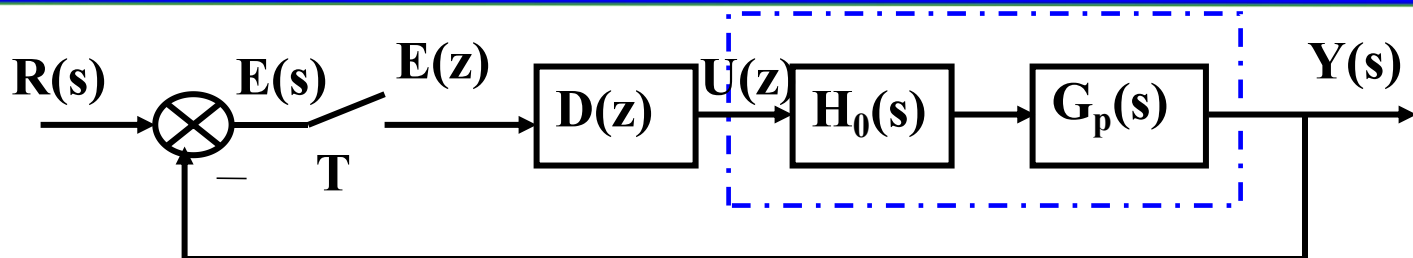
一般形式：

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}$$

$A(z)$ 是不含 $(1-z^{-1})$ 因子的 z^{-1} 多项式



假设 $G_p(s)$ 严格因果
(分母阶次高于分子阶次)



$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s} G_p(s) \right]$$
$$= (1 - z^{-1}) (h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots) = g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)} = \phi_1 z^{-1} + \phi_2 z^{-2} + \dots$$

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + G(z)D(z)} = 1 - \Phi(z) = 1 + \psi_1 z^{-1} + \psi_2 z^{-2} + \dots$$

本节中， $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 等多
用 z^{-1} 幂级数的形式表达



最少拍系统的设计原则



若系统广义被控对象 $G(z)$ 无延迟且在 z 平面单位圆上及单位圆外无零极点,

要求: 选择闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$, 使系统在典型输入作用下, 经最少采样周期后

能使输出序列在各采样时刻的稳态误差为零, 达到完全跟踪的目的,

从而确定所需要的数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ 。

$$\Phi(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)} = \phi_1 z^{-1} + \phi_2 z^{-2} + \dots$$

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + G(z)D(z)} = 1 - \Phi(z) = 1 + \psi_1 z^{-1} + \psi_2 z^{-2} + \dots$$



无稳态误差最少拍系统的设计



工程应用背景：随动系统，伺服系统，运动控制，...

最少拍控制的定义：所谓最少拍控制，就是要求闭环系统对于某种典型的输入在最少个采样周期内达到无静差的稳态。

➤ 无稳态误差最少拍系统

离散系统的误差信号Z变换式：

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)z^{-k}$$

最少拍系统的含义是设计 $D(z)$ ，使得当 $k > N$ ， $e(k) \equiv 0$ 且 N 最少

即：

$$E(z) = \sum_{k=0}^N e(k)z^{-k}, \quad N \text{ 为满足要求的最小整数}$$

➤ 设计目标：在系统稳定的基础上

(1) 对典型输入信号的稳态偏差为零（在采样时刻上）；【对典型输入函数，输出在采样时刻上无稳态误差；】

(2) 对典型输入信号的过渡过程最短（一个 T 称为一拍）；【过渡过程（函数）在最少个采样周期内结束。】

(3) 控制器是物理可实现的。



设计目标：



在系统稳定的基础上

- (1) 对典型输入信号的稳态偏差为零（在采样时刻上）
- (2) 对典型输入信号的过渡过程最短（最少拍）
- (3) 控制器是物理可实现的。

前提：稳定性

一个稳定系统的脉冲传递函数的特征方程的根，必须全部位于单位圆内。

如果 $G(z)$ 中包含有单位圆上或单位圆外的零点或极点时，必须通过选择 $\Phi(z)$ ，使它们能抵消 $G(z)$ 中的不稳定零、极点。

其方法是：

- ① 在 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$ 中，以零点的形式把 $G(z)$ 的不稳定极点包含在内；
- ② 在 $\Phi(z)$ 中，以零点的形式把 $G(z)$ 的不稳定零点包含在内；

$$\Phi(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)} = \phi_1 z^{-1} + \phi_2 z^{-2} + \dots$$

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + G(z)D(z)} = 1 - \Phi(z) = 1 + \psi_1 z^{-1} + \psi_2 z^{-2} + \dots$$

典型输入信号

最少拍系统的设计, 是针对典型输入作用进行的。

常见的典型输入, 有**单位阶跃函数**、**单位速度函数**和**单位加速度函数**。

其 z 变换分别为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{阶跃: } r(t) = 1(t), \quad R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ \text{斜坡: } r(t) = t, \quad R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ \text{加速度: } r(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad R(z) = \frac{\frac{1}{2}T^2z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{通式}} R(z) = \frac{A(z)}{\underline{(1 - z^{-1})^m}}$$

式中: $A(z)$ -----不含因子 $(1 - z^{-1})$ 的关于 z^{-1} 的多项式;

m 的值: 阶跃 $m=1$; 斜坡 $m=2$; 加速度 $m=3$ 。



无稳态误差最少拍系统的设计



► 设典型输入信号: $r(t) = R_i t^i, i = 0, 1, 2...$

典型输入 $r(t)$

$r(t)=1(t)$

$r(t)=t$

$r(t)=t^2/2$

$Z[r(t)]$

$$\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$\frac{T^2 z^{-1} (1+z^{-1}) / 2}{(1-z^{-1})^3}$$

则其 z 变换表达式为

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}$$

式中 $m=i+1$, 且 $A(z)$ 为不含 $(1-z^{-1})$ 因子的 z^{-1} 多项式

$A(z)$

$$m = 1$$
$$A(z) = 1$$

$$m = 2$$
$$A(z) = Tz^{-1}$$

$$m = 3$$
$$A(z) = T^2 z^{-1} (1+z^{-1}) / 2$$

稳态误差为零的条件

误差的脉冲传递函数为：
$$E(z) = R(z)[1 - \Phi(z)] = \frac{A(z)[1 - \Phi(z)]}{(1 - z^{-1})^m}$$

稳态误差为零的条件可由下式给出：

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot R(z) \cdot [1 - \Phi(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} [1 - \Phi(z)] = 0 \end{aligned}$$

因此，满足 $e_{ss} = 0$ 的条件是： $1 - \Phi(z) = \Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$

式中, $F(z)$ 是不含 $(1 - z^{-1})$ 因子的多项式，待定。

为使 $\Phi(z)$ 最简单，阶数最低，一般取 $F(z)=1$ 。

其意义是使 $\Phi(z)$ 的全部极点均位于平面的原点. 从而有

$$1 - \Phi(z) = \Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m$$



设计目标：



在系统稳定的基础上

- (1) 对典型输入信号的**稳态偏差**为零（在采样时刻上）
- (2) 对典型输入信号的**过渡过程**最短（最少拍）
- (3) 控制器是**物理可实现的**。



无稳态误差最少拍系统的设计



设计分析步骤

根据设计原则，需要求出稳态误差 $e(\infty)$ 的表达式！

➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(1) 对典型输入信号的稳态偏差为零

根据终值定理

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) R(z) \Phi_e(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} \Phi_e(z) \end{aligned}$$

为使系统的稳态误差为零，可令 $\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$

上式中 $F(z)$ 在 $z=1$ 处无零点，即不含 $(1 - z^{-1})$ 因子。

为了使求出的 $D(z)$ 简单，阶数最低，可取 $F(z)=1$



设计目标：



在系统稳定的基础上

- (1) 对典型输入信号的**稳态偏差**为零（在采样时刻上）
- (2) 对典型输入信号的**过渡过程**最短（最少拍）
- (3) 控制器是**物理可实现的**。



无稳态误差最少拍系统的设计



➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(2) 对典型输入信号的过渡过程最短

由前推导，系统的闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 1 - (1 - z^{-1})^m F(z) = \sum_{k=0}^N \varphi(k) z^{-k}$$

当 $\Phi(z)$ 展开为 z^{-1} 的多项式时，显然项数越少(N越小)，响应速度越快。

不妨取 $F(z)$ 为1——物理意义是使 $\Phi(z)$ 所有极点位于 z 平面的原点。

下面分别分析不同典型输入下的系统设计。



无稳态误差最少拍系统的设计



➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(2) 对典型输入信号的过渡过程最短

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

最少拍

$$F(z) = 1$$

1) 当典型输入为阶跃

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$m = 1, A(z) = 1$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z) = 1 - z^{-1}$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = z^{-1}$$

由前，控制器：

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{z^{-1}}{G(z)(1 - z^{-1})}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot z^{-1} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1 - z^{-1}) \frac{1}{(1 - z^{-1})} = 1$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = 0$$

$$e(0) = 1, e(1) = e(2) = \dots = 0$$

设计的系统在1拍后即已经无偏差。

① 单位阶跃输入作用下

当 $r(t) = 1(t)$ 时, 有 $m = 1, A(z) = 1$, 则

$$1 - \Phi(z) = \Phi_e(z) = 1 - z^{-1}, \quad \Phi(z) = z^{-1}$$

于是

$$D(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})G(z)}$$

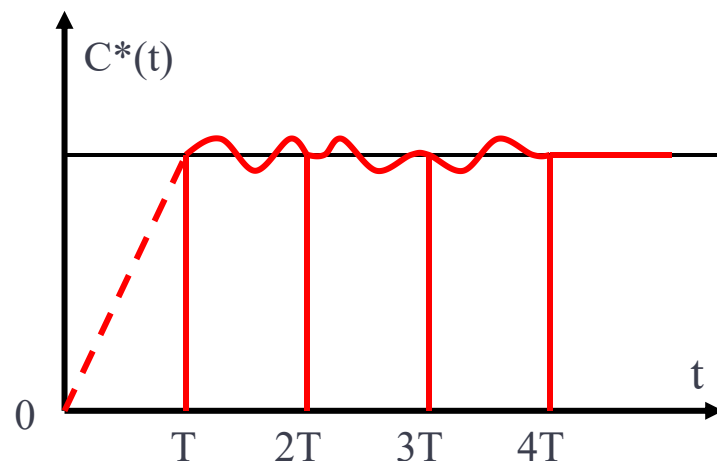
可知

$$E(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} \Phi_e(z) = 1$$

表明: $e(0) = 1, e(T) = e(2T) = \dots = 0$.

可见, 最少拍系统经过一拍便可完全跟踪输入, 如图

这样的离散系统称为一拍系统, 其 $t_s = T$.





无稳态误差最少拍系统的设计



2) 当典型输入为斜坡

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots$$

$$m = 2, A(z) = Tz^{-1}$$

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

最少拍

$$F(z) = 1$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

由前，控制器：

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{G(z)(1 - z^{-1})^2}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{(2z^{-1} - z^{-2})Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \underline{2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots}$$

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1 - z^{-1})^2 \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = Tz^{-1}$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = 0$$

$$e(0) = 0, e(1) = T, e(2) = e(3) = \dots = 0$$

设计的系统在2拍后即已经无偏差。

② 单位斜坡输入作用下

当 $r(t) = t$ 时, 有 $m = 2$, $A(z) = Tz^{-1}$, 则

$$1 - \Phi(z) = \Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2, \quad \Phi(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

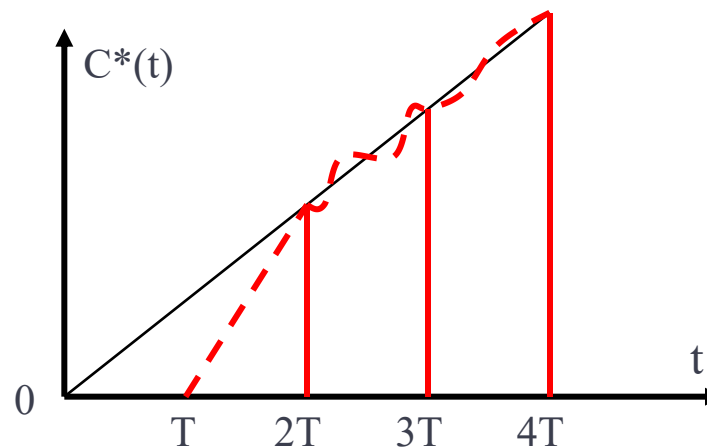
于是

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{z^{-1}(2 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2 G(z)}$$

且有

$$E(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} \Phi_e(z) = Tz^{-1}$$

表明: $e(0) = 0$, $e(T) = T$, $e(2T) = \dots = 0$.



最少拍系统的单位
斜坡响应序列

可见, 最少拍系统经过二拍便可完全跟踪输入, 如图

这样的离散系统称为二拍系统, 其 $t_s = 2T$.



无稳态误差最少拍系统的设计



3) 当典型输入为抛物线

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^m}$$

$$m = 3, A(z) = \left[(Tz^{-1})^2 + z^{-1} \right] / 2$$

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z)$$

最少拍

$$F(z) = 1$$

$$R(z) = \frac{T^2 z^{-1} (1+z^{-1}) / 2}{(1-z^{-1})^3} = \frac{T^2}{2} z^{-1} + 2T^2 z^{-2} + \frac{9T^2}{2} z^{-3} + 8T^2 z^{-4} + \dots$$

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z) = (1-z^{-1})^3$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$$

由前, 控制器:

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}}{G(z)(1-z^{-1})^3}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{(3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3})T^2 z^{-1} (1+z^{-1}) / 2}{(1-z^{-1})^3} = \frac{3T^2}{2} z^{-2} + \frac{9T^2}{2} z^{-3} + 8T^2 z^{-4} + \dots$$

$$E(z) = R(z) - Y(z) = \frac{T^2}{2} z^{-1} + \frac{T^2}{2} z^{-2}$$

$$e(0) = 0, e(1) = \frac{T^2}{2}, e(2) = \frac{T^2}{2}, e(3) = e(4) = \dots = 0$$

$$e(\infty) = 0$$

设计的系统在3拍后即已经无偏差。

③ 单位加速度输入作用下

当 $r(t) = t^2 / 2$ 时, 有 $m = 3$, $A(z) = \frac{1}{2}T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})$, 则

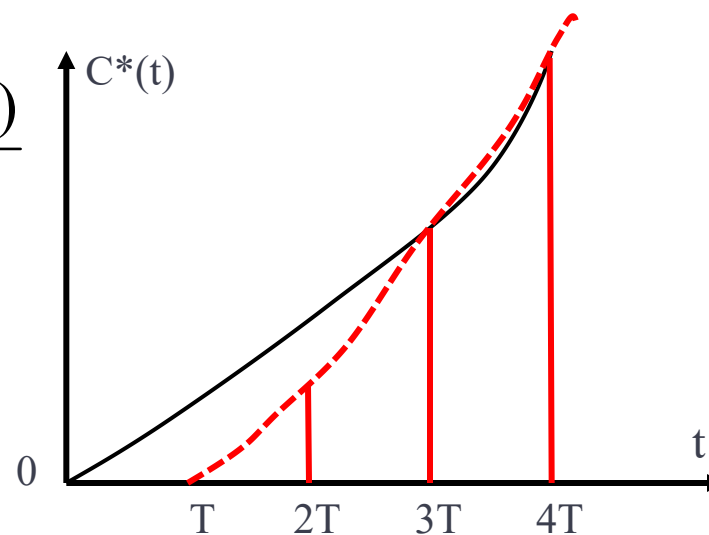
$$1 - \Phi(z) = \Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^3, \quad \Phi(z) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$$

于是
$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{z^{-1}(3 - 3z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^3 G(z)}$$

且有
$$E(z) = \frac{1}{2}T^2 z^{-1} + \frac{1}{2}T^2 z^{-2}$$

表明:
$$e(0) = 0, e(T) = e(2T) = \frac{1}{2}T^2,$$

$$e(3T) = e(4T) = \cdots = 0.$$



最少拍系统的单位
加速度响应序列

可见, 最少拍系统经过三拍便可完全跟踪输入, 如图所示.

这样的离散系统称为三拍系统, 其

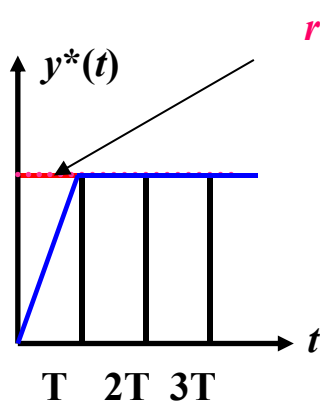
$$t_s = 3T$$



无稳态误差最少拍系统的设计

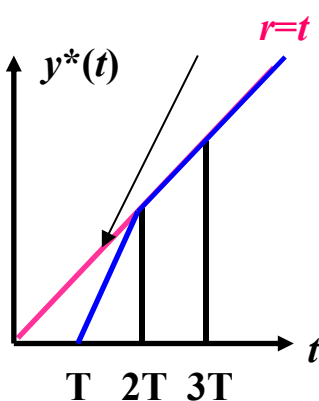


下图绘制的曲线分别是单位阶跃、单位斜坡、抛物线输入时，其输出响应为无稳态误差的最少拍系统。



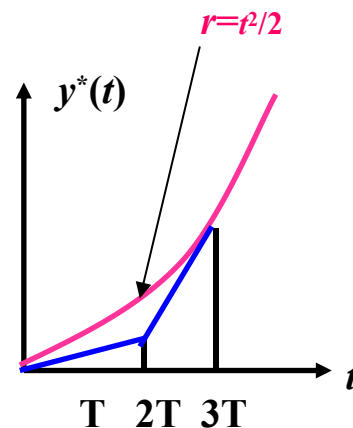
(a) 单位阶跃输入

$$Y(z) = z^{-1} + z^{-2} + \dots$$



(b) 斜坡输入

$$Y(z) = 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots$$



(c) 抛物线输入

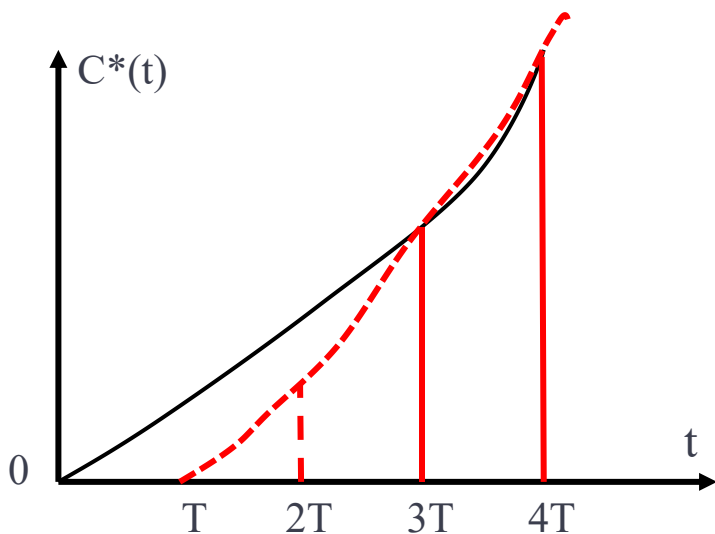
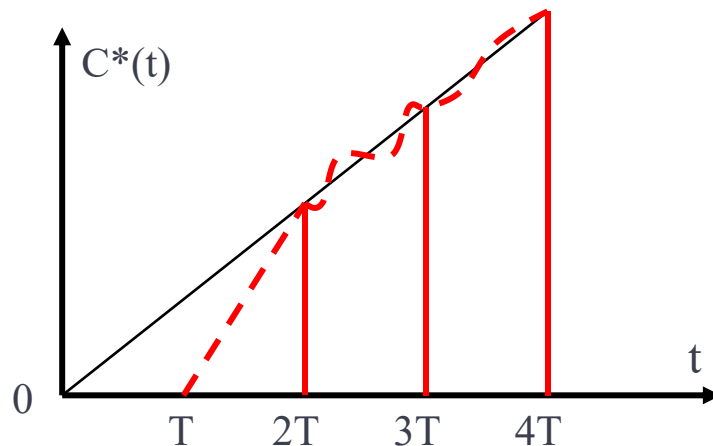
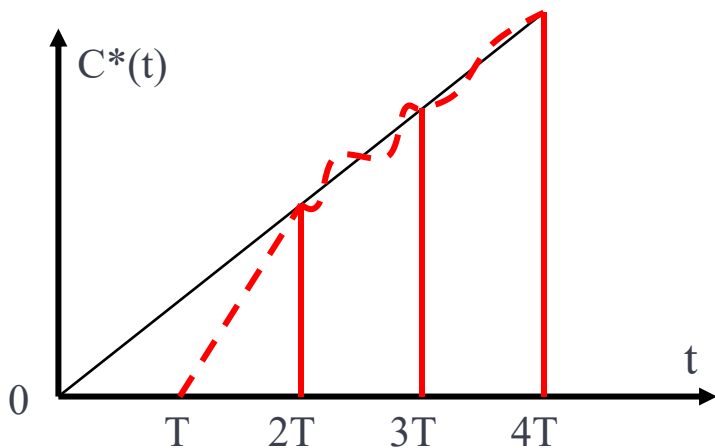
$$Y(z) = \frac{3T^2}{2} z^{-2} + \frac{9T^2}{2} z^{-3} + 8T^2 z^{-4} + \dots$$



无稳态误差最少拍系统的设计



► **纹波**即系统输出在采样时刻已达到稳态，而在两个采样时刻间输出在变化。



输出响应具有纹波：

即最少拍系统是在最小的几个采样周期后，系统输出在采样时刻无偏差，但在其间还是有纹波的——即稳态偏差不为零。

无纹波无稳态误差最少拍系统的设计



无稳态误差最少拍系统的设计



无稳态误差最少拍系统设计结果

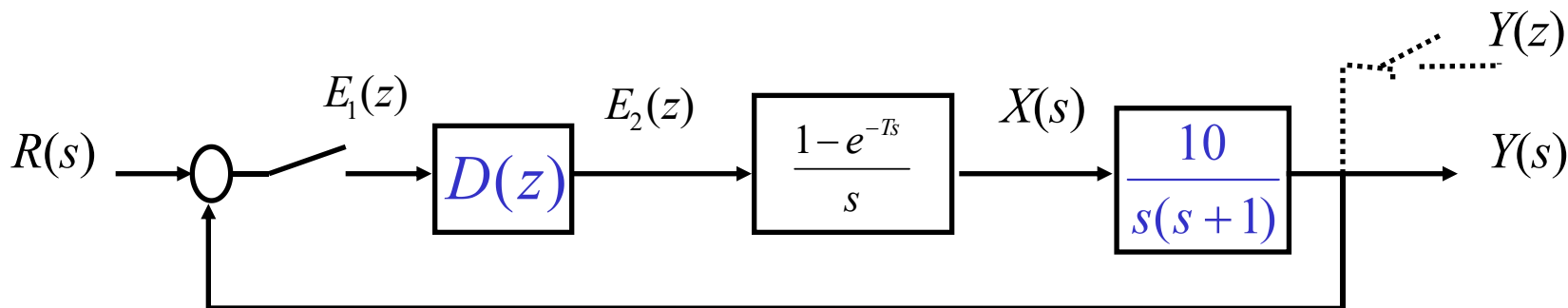
典型输入		闭环脉冲传递函数	数字控制器D(z)	最少拍 (T)
1(t)	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	z^{-1}	$\frac{z^{-1}}{G(z)(1-z^{-1})}$	1T
t	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$2z^{-1} - z^{-2}$	$\frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{G(z)(1-z^{-1})^2}$	2T
t ²	$\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$	$\frac{3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}}{G(z)(1-z^{-1})^3}$	3T



无稳态误差最少拍系统的设计



例 7-4-1 已知离散控制系统结构如图所示。采样周期 $T=1$ 秒。设计一数字控制器 $D(z)$ 使系统对**单位斜坡输入**为无稳态误差的最少拍响应系统。并绘制 $r(t)$ 、 $e_1^*(t)$ 、 $e_2^*(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y^*(t)$



最少拍响应系统示意图

解：1)求开环传递函数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{10}{s(s+1)}$$



无稳态误差最少拍系统的设计



解: 2) 求开环脉冲传递函数 $G(z)$

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{10}{s^2(s+1)}\right] = \frac{3.68(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}$$

误差为0 $\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$

最少拍 $F(z) = 1$

3) 求闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ ($T=1s$)

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$m = 2$$

$$A(z) = Tz^{-1} = z^{-1}$$

为使系统的稳态误差为零

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

令 $F(z)=1$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

4) 求数字控制器 $D(z)$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{G(z)(1 - z^{-1})^2} = \frac{0.543(z-0.5)(z-0.368)}{(z-1)(z+0.718)}$$



无稳态误差最少拍系统的设计



解：5) 求系统输出 $Y(z)$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = (2z^{-1} - z^{-2}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots$$

$$y^*(t) = 2\delta(t-2) + 3\delta(t-3) + \dots$$

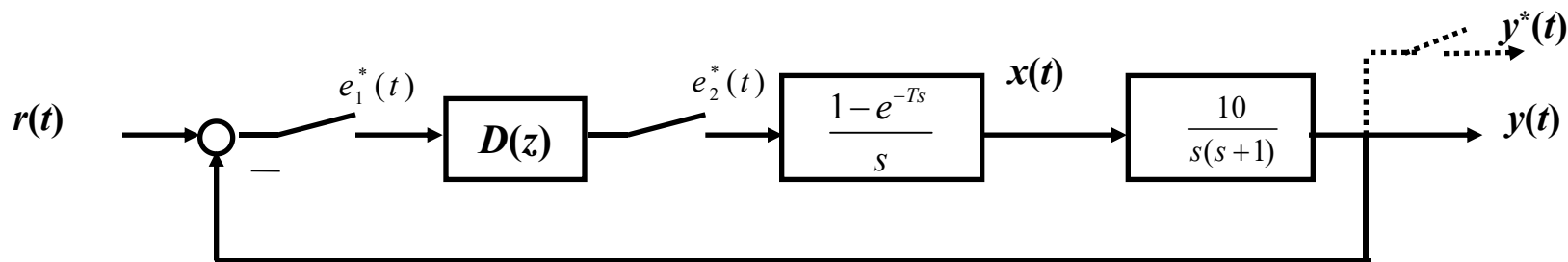
6) 求系统偏差

$$E_1(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1 - z^{-1})^2 \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = z^{-1}$$

$$e_1^*(t) = \delta(t-1)$$

$$\begin{aligned} E_2(z) &= D(z)E_1(z) = \frac{0.543(1-0.5z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})} z^{-1} \\ &= 0.543z^{-1} - 0.319z^{-2} + 0.39z^{-3} - 0.119z^{-4} + \dots \end{aligned}$$

$$e_2^*(t) = 0.543\delta(t-1) - 0.319\delta(t-2) + 0.39\delta(t-3) - 0.119\delta(t-4) + \dots$$



解：7)

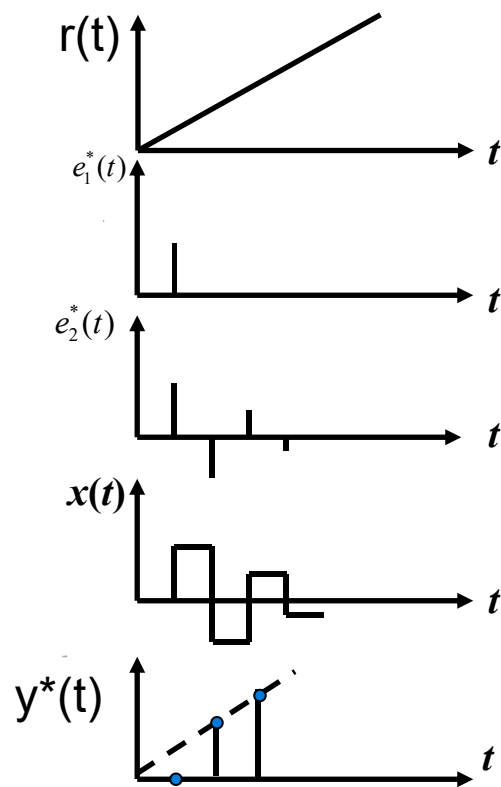
根据上述所求各式，可绘制它们的波形如图所示：

$$e_1^*(t) = \delta(t-1)$$

$$e_2^*(t) = 0.543\delta(t-1) - 0.319\delta(t-2) + 0.39\delta(t-3) - 0.119\delta(t-4) + \dots$$

$$y^*(t) = 2\delta(t-2) + 3\delta(t-3) + \dots$$

该系统是针对斜坡输入来设计 $D(z)$ 的，假定输入为单位阶跃与抛物线，系统输出？系统适应能力如何？





无稳态误差最少拍系统的设计



$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

- 当 $r(t)=1(t)$ 时, 其输出

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

最少拍

$$F(z) = 1$$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = (2z^{-1} - z^{-2}) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \underline{2z^{-1}} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

比较

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + \underline{z^{-1}} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

2拍后达到稳态, 单位阶跃出现100%超调;

- 当 $r(t) = t^2/2$ 时, 系统输出

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = (2z^{-1} - z^{-2}) \frac{T^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3} = \underline{z^{-2} + 3.5z^{-3} + 7z^{-4} + 11.5z^{-5} + \dots}$$

比较

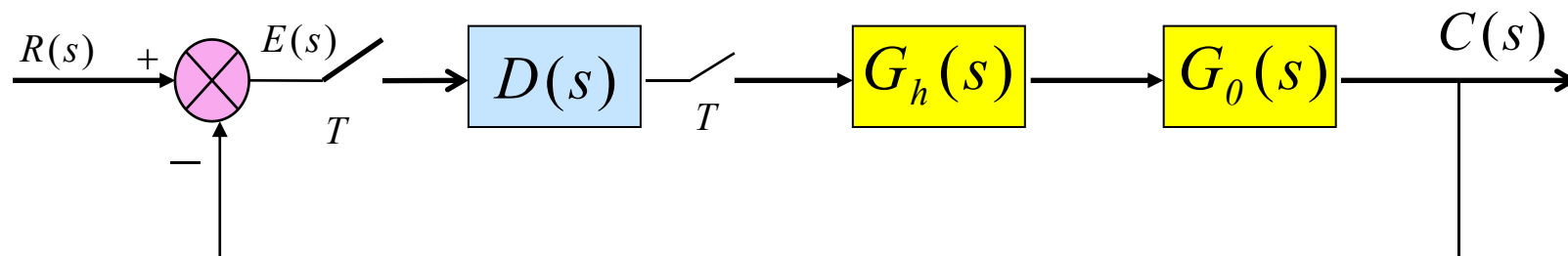
$$R(z) = \frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3} = \underline{0.5z^{-1} + 2z^{-2} + 4.5z^{-3} + 8z^{-4} + 12.5z^{-5} + \dots}$$

2拍后达到稳态, 稳态偏差为1

- 可见:

对单位阶跃和单位斜坡输入, 2拍后均达到稳态(对单位阶跃出现100%超调); 但对单位抛物线输入, 稳态偏差为1。

例： 设单位采样控制系统的框图如下：



$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad ; \quad G_o(s) = \frac{4}{s(0.5s + 1)} \quad ; \quad T = 0.5s$$

试求在单位斜坡信号作用下最少拍系统的 $D(Z)$ 。

解：

$$G(z) = Z[G_h(s)G_o(s)] = \frac{0.736 z^{-1}(1 + 0.717 z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.368 z^{-1})}$$

输入信号为单位斜坡信号, 所以

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2 \quad \Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

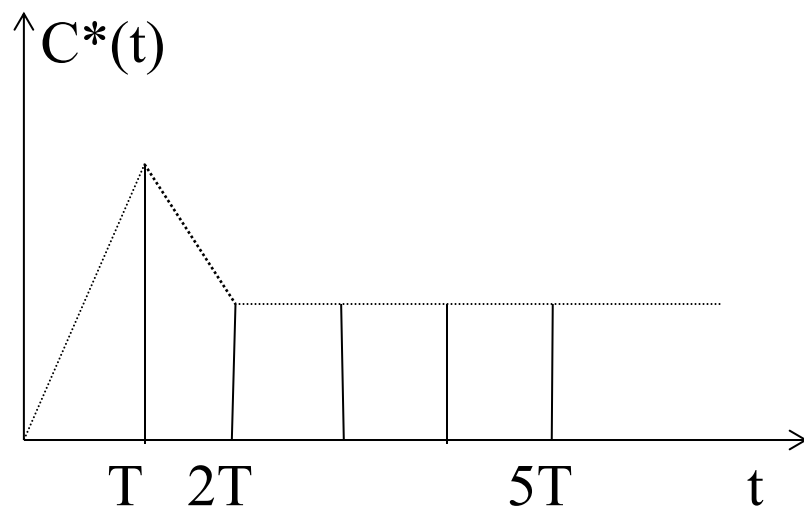
$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{2.717(1 - 0.368 z^{-1})(1 - 0.5 z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.717 z^{-1})}$$

加入校正装置后, 最少拍系统的开环脉冲传递函数

$$D(z)G(z) = \frac{2z^{-1}(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2}$$

若输入信号不是单位斜坡信号,而是单位阶跃信号,
系统的输出信号的Z变换为:

$$\begin{aligned} C(z) &= R(z)\Phi(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}(2z^{-1} - z^{-2}) \\ &= 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots + z^{-n} + \cdots \end{aligned}$$

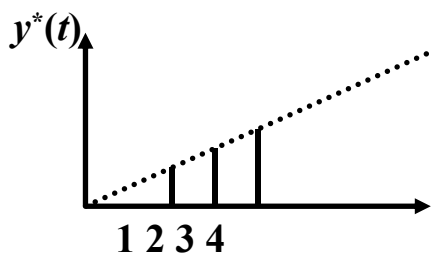


调整时间:两拍

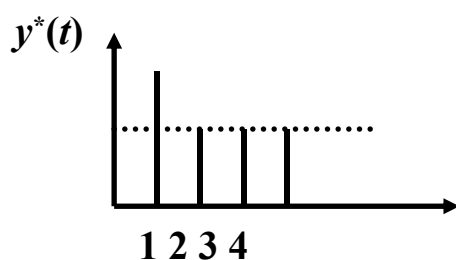
超调量:100%



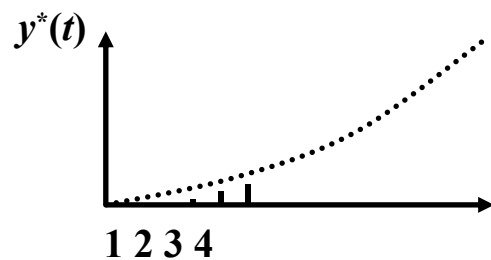
无稳态误差最少拍系统的设计



斜坡输入



阶跃输入



抛物线输入

- 1) **快速性方面**: 按单位斜坡输入设计的最少拍系统, 在各种典型输入作用下, 其动态过程均为二拍;
- 2) **准确性方面**: 系统对单位阶跃和单位斜坡输入, 在采样时刻均无稳态误差, 但对单位加速度输入, 采样时刻的稳态误差为常量 T^2 ;
- 3) **动态性能方面**: 单位斜坡输入下的响应性能较好, 单位阶跃输入响应性能较差, 有100%的超调, 故按某种典型输入设计的最少拍系统, 适应性较差;
- 4) **平稳性**: 系统进入稳态后, 非采样时刻一般均**存在纹波**, 此设计方法不实用。



无稳态误差最少拍系统的设计



$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

小结

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

最少拍

$$F(z) = 1$$

- 最少拍系统的调节时间只与选择的闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 的形式有关，而与典型输入信号无关；（上例说明了这个问题）
- 这类数字控制器对输入信号的适应能力差；
- 输出响应具有纹波：即最少拍系统是在最少的几个采样周期后，系统输出在采样时刻无偏差，但在其间还是有纹波的——即稳态偏差不为零。
 - 解决方法：设计无纹波的最少拍系统。



设计目标：



在系统稳定的基础上

- (1) 对典型输入信号的稳态偏差为零（在采样时刻上）
- (2) 对典型输入信号的过渡过程最短（最少拍）
- (3) 控制器是物理可实现的。



$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)[1 - \Phi(z)]}$$

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

$\Phi_e(z)$ 的零点 $z=1$ 正好可以补偿 $G(z)$ 在单位圆上的极点 $z=1$

$\Phi(z)$ 已包含 $G(z)$ 的传递函数延迟 z^{-1}



➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(3) 数字控制器的物理可实现问题

为了使求出的 $D(z)$ 是物理可实现的, 在最少拍设计中, $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 的选择应遵循以下原则:

- ① $D(z)$ 在物理上应是可实现的有理多项式, 而且零点的数目不能大于极点的数目;
- ② $1 - \Phi(z)(= \Phi_e(z))$ 应把 $G(z)$ 在单位圆上及单位圆外的极点作为自己的零点;
- ③ $\Phi(z)$ 应把 $G(z)$ 在单位圆上及单位圆外的零点作为自己的零点, 当 $G(z)$ 含有 z^{-1} 因子时, 要求 $\Phi(z)$ 也含有 z^{-1} 的因子.

当 $G(Z)$ 含有单位圆上或单位圆外的零点、极点时，闭环脉冲传递函数选择的原则：

- (1) 用 $\Phi_e(Z)$ 的零点补偿 $G(Z)$ 在单位圆上或圆外的极点。
- (2) 用 $\Phi(Z)$ 的零点补偿 $G(Z)$ 在单位圆上或圆外的零点。
- (3) $G(z)$ 中常含有 Z^{-1} 的因子，为了保证 $D(Z)$ 能实现，要求 $\Phi(z)$ 也必须有 Z^{-1} 的因子。

又
$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$$

所以 $\Phi_e(z)$ 应该包含常数项1和 Z^{-1}



无稳态误差最少拍系统的设计



➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(3) 数字控制器的物理可实现问题

待求的数字控制器为

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{1 - (1 - z^{-1})^m}{G(z)(1 - z^{-1})^m} = \frac{z^m - (z - 1)^m}{G(z)(z - 1)^m} \\ &= \frac{B(z)}{G(z)[z^m - B(z)]} = \frac{B(z)}{\frac{M(z)}{N(z)}[z^m - B(z)]} = \frac{N(z)B(z)}{M(z)[z^m - B(z)]} \end{aligned}$$

• 从上式看，当 $F(z)=1$ 时，控制器物理可实现（ $D(z)$ 的分子阶次 \leq 分母的阶次），要求 $G(z)$ 的极点最多只能比其零点多一个

z 的 $(m-1)$ 次多项式

- 当 $F(z)=1$ ， $m \leq 3$ 时，若 $G(z)$ 有单位圆上或单位圆外零点，则 $D(z)$ 必有相同极点
- 当 $F(z)=1$ 时，若 $G(z)$ 在被 $(z-1)^m$ 抵消后还有单位圆上或单位圆外极点，则 $D(z)$ 必有相同零点
- 通过选择 $F(z)$ 解决

$$F(z) = \frac{1 - \Phi(z)}{(1 - z^{-1})^m} = \frac{\Phi_e(z)}{(1 - z^{-1})^m} = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}$$

会出现不稳定零极点抵消，工程上不容许
 $G(z)D(z)$ 出现不稳定零极点对消



数字化设计方法



当 $G(z)$ 具有单位圆上和单位圆外零极点的情况，
数字控制器的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

最少拍

$$F(z) = 1$$

当开环脉冲传递函数 $G(z)$ 有单位圆上或单位圆外零点时，由式

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

令：

- 若 $G(z)$ 有 d 个滞后环节 z^{-1} ，即 $G(z)$ 的分母阶次比分子阶次高 d 阶，则 $\Phi(z)$ 包含 z^{-d} 因子；
- $\Phi(z)$ 的零点包含 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的零点；
- $\Phi_e(z)$ 的零点包含 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的极点；

设 $F(z)=1+a_1z^{-1}$ ，并在 $\Phi(z)$ 设待定系数，由关系式 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$ ，求解有关待定系数，最后选定 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 。若无解，则 $F(z)$ 阶次加1。



数字化设计方法



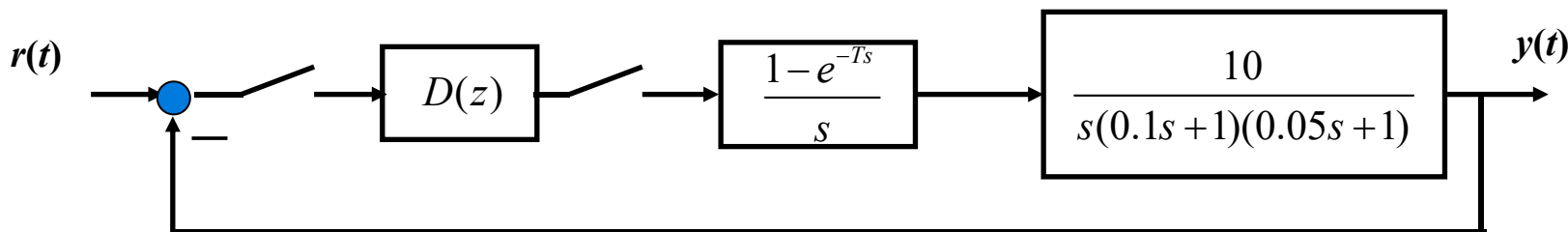
$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

例 7-5-4 已知离散控制系统结构如图所示。采样周期 $T = 0.2$ 秒。求 $D(z)$ ，使系统对单位阶跃响应为最少拍响应系统。



解：1) 求开环脉冲传递函数 $G(z)$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{10}{s^2(1+0.1s)(1+0.05s)} \right] = \frac{0.76z^{-1}(1+0.05z^{-1})(1+1.065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.135z^{-1})(1-0.0185z^{-1})}$$

开环脉冲传递函数有一单位圆外的**零点**： $z = -1.065$

一单位圆上的极点： $z = 1$

一滞后环节： z^{-1}



数字化设计方法



$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

$$G(z) = \frac{0.76z^{-1}(1 + 0.05z^{-1})(1 + 1.065z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.135z^{-1})(1 - 0.0185z^{-1})}$$

为此, 令

$$\Phi(z) = b_1 z^{-1}(1 + 1.065z^{-1})$$

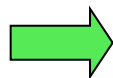
$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})$$

由关系式

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$$



$$\begin{cases} a_1 = 1.065b_1 \\ 1 - a_1 = b_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_1 = 0.516 \\ b_1 = 0.484 \end{cases}$$

所以

$$\Phi(z) = 0.484z^{-1}(1 + 1.065z^{-1})$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + 0.516z^{-1})$$



$$G(z) = \frac{0.76z^{-1}(1+0.05z^{-1})(1+1.065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.135z^{-1})(1-0.0185z^{-1})}$$

$$\Phi(z) = 0.484z^{-1}(1+1.065z^{-1})$$

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})(1+0.516z^{-1})$$

于是，求得的数字控制器 $D(z)$ 为

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{0.636(1-0.0185z^{-1})(1-0.135z^{-1})}{(1+0.05z^{-1})(1+0.516z^{-1})}$$

此时，数字控制器 $D(z)$ 在物理上可实现，且无不稳定零极点对消。

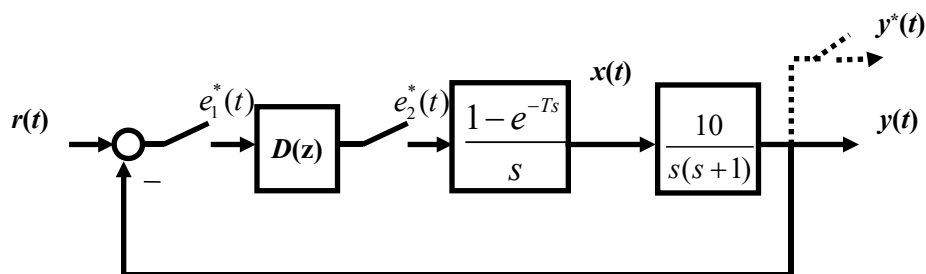
系统的单位阶跃响应输出为

$$Y(z) = \frac{0.484z^{-1}(1+1.065z^{-1})}{1-z^{-1}} = 0.484z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

系统输出从第二拍达到稳态，延长了一拍达到稳态。



回顾例7-5-3

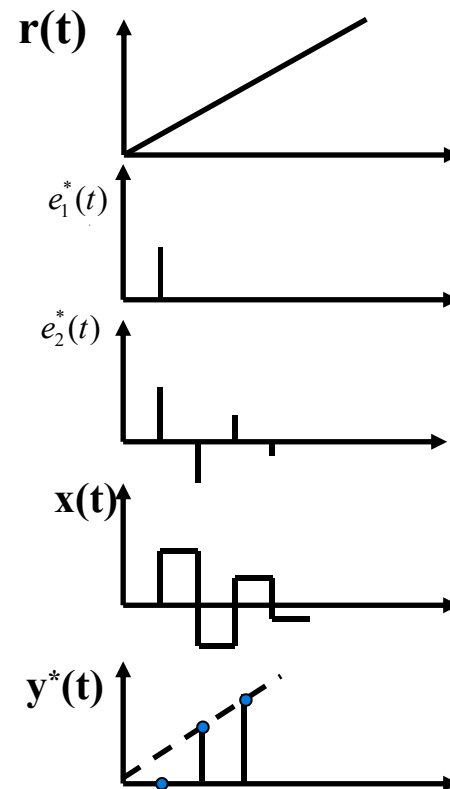


$$G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

按斜坡输入设计

$$D(z) = \frac{0.543(1-0.5z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})}$$

$D(z)$ 的输出未能在 $y^*(t)$ 进入稳态的同时作常值输出



无纹波最少拍系统的设计要求是：在某一种典型输入作用下设计的系统，其输出响应经过尽可能少的采样周期后，不仅在采样时刻输出可以完全跟踪输入，而且在非采样时刻不存在纹波。



无纹波无稳态误差最少拍控制的必要条件



- 为了在稳态过程中获得无纹波的平滑输出，被控对象 $G(s)$ 必须有能力给出与输入 $r(t)$ 相同的平滑输出。
- 针对单位斜坡输入 $r(t)=t$ 设计最少拍系统， $G(s)$ 的稳态输出也必须是斜坡函数
 - 因此 $G(s)$ 必须有1个积分环节，使被控对象在零阶保持器常值输出信号作用下，稳态输出位等速变化量
- 同理：针对单位加速度输入 $r(t)=t^2/2$ 设计最少拍系统，则 $G(s)$ 至少应包含2个积分环节。
-
 - **$G(s)$ 至少含 $m-1$ 个积分环节**

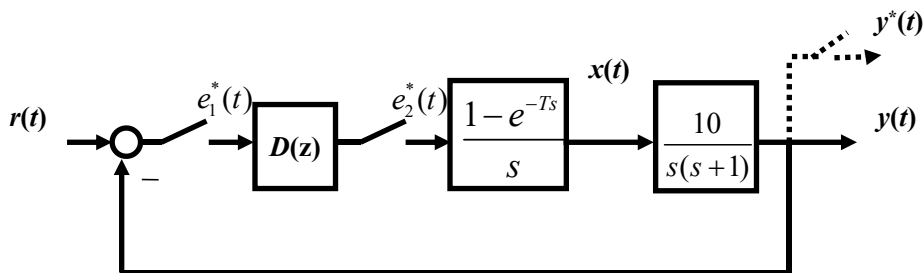
一般地说，若输入信号为

$$r(t) = R_0 + R_1 t + \frac{1}{2} R_2 t^2 + \cdots + \frac{1}{(q-1)!} R_{q-1} t^{q-1}$$

则无纹波最少拍系统的必要条件是：被控对象传递函数 $G_0(s)$ 中，至少应包含 $(q-1)$ 个积分环节。



无纹波无稳态误差最少拍控制的附加条件



$$G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

按斜坡输入设计

$$D(z) = \frac{0.543(1-0.5z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})}$$

$D(z)$ 的输出未能在 $y^*(t)$ 进入稳态的同时作常值输出

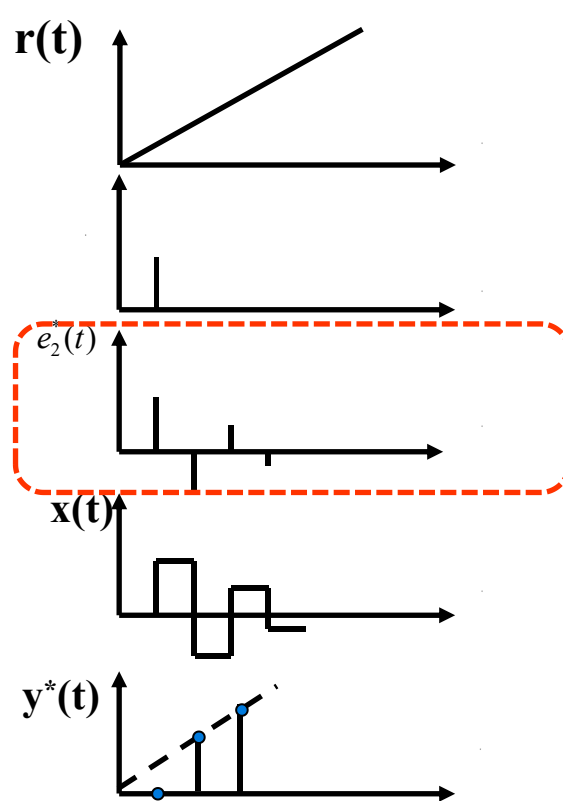
• $D(z)$ 的输出在有限拍后作某个常值输出

根据 z 变换定义, 有

$$E_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_2(nT)z^{-n}$$

如果经过 l 个采样周期后, 脉冲序列 $e_2(nT)$ 进入稳态, 有

$$e_2(lT) = e_2[(l+1)T] = \dots = \text{常值 (可以是零)}$$



$E_2(z)$ 为 z^{-1} 的有限多项式



无纹波无稳态误差最少拍控制的附加条件



$E_2(z)$ 为 z^{-1} 的有限多项式

$$E_2(z) = D(z)E_1(z) = D(z)\Phi_e(z)R(z)$$

➤为了使输出波纹消除，希望 $E_2(z)$ 在有限拍后作常值输出

即： $G_{e2}(z)$ 是 z^{-1} 的有限次多项式

$$G_{e2}(z) = \frac{E_2(z)}{R(z)} = \frac{D(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \frac{1}{G(z)} = \frac{\Phi(z)}{G(z)} = \frac{\Phi(z)Q(z)}{K_G \cdot P(z)}$$

式中， $P(z) = (1 - p_1 z^{-1}) \cdots (1 - p_u z^{-1})$ 和 $Q(z) = (1 - q_1 z^{-1}) \cdots (1 - q_v z^{-1})$

分别是 $G(z)$ 的零点多项式和极点多项式

K_G 是 $G(z)$ 的增益

若令 $\Phi(z) = P(z)K_\Phi(1 - f_1 z^{-1}) \cdots (1 - f_r z^{-1})$

$\Phi(z)$ 的零点应抵消 $G(z)$ 的全部零点

则 $G_{e2}(z) = \frac{Q(z)K_\Phi(1 - f_1 z^{-1}) \cdots (1 - f_r z^{-1})}{K_G}$ 是 z^{-1} 的有限次多项式



无纹波无稳态误差最少拍系统的设计



无纹波无稳态误差最少拍系统的设计原则

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

- $G(s)$ 至少含 $m-1$ 个积分环节
- 若 $G(z)$ 有 d 个滞后环节 z^{-1} , 则 $\Phi(z)$ 包含 z^{-d}
- $\Phi(z)$ 包含 $G(z)$ 的全部零点
- $\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z)$ 包含 $G(z)$ 在单位圆上或单位圆外的全部极点

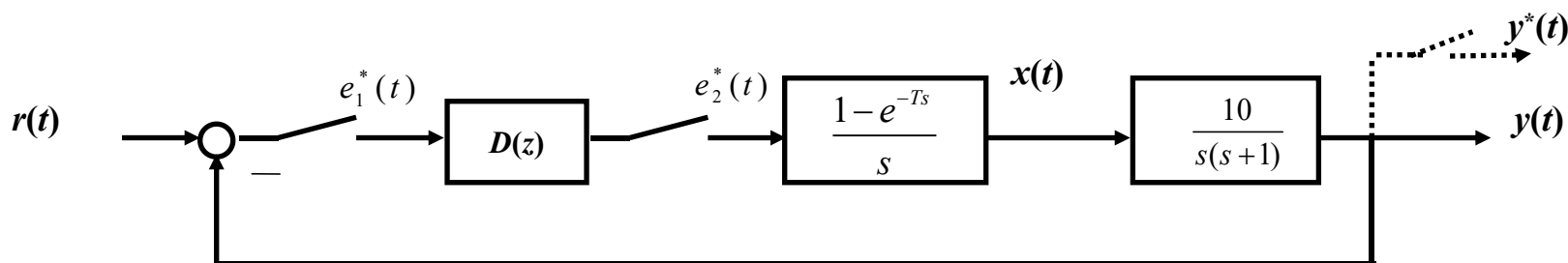
设 $F(z)=1+a_1z^{-1}$, 并在 $\Phi(z)$ 设待定系数, 由关系式 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$, 求解有关待定系数, 最后选定 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 。若无解, 则 $F(z)$ 阶次加1。



无纹波无稳态误差最少拍系统的设计



例 7-5-5 已知离散控制系统结构如图所示。采样周期 $T=1$ 秒。设计一数字控制器 $D(z)$ 使系统对**单位斜坡输入**为**无纹波无稳态误差**的最少拍响应系统。



解：1) 求开环脉冲传递函数 $G(z)$

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{10}{s^2(s+1)} \right] = \frac{3.68z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}$$



无纹波无稳态误差最少拍系统的设计



$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} \quad G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

无纹波附加条件

解: 2) 选取 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$, 并求出

选取 $\Phi(z)$ 为

$$\Phi(z) = z^{-1}(1+0.718z^{-1})(\beta_0 + \beta_1 z^{-1})$$

选取 $\Phi_e(z)$ 为

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^2(1+\alpha_1 z^{-1})$$

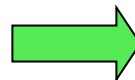
无纹波比有纹波增加一阶 ($G(z)$ 一个单位圆内零点)

由关系式 $\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$

得:

$$\begin{aligned} & 1 - \beta_0 z^{-1} - (0.718\beta_0 + \beta_1)z^{-2} - 0.718\beta_1 z^{-3} \\ &= 1 - (2 - \alpha_1)z^{-1} - (2\alpha_1 - 1)z^{-2} + \alpha_1 z^{-3} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -0.718\beta_1 \\ 2\alpha_1 - 1 = 0.718\beta_0 + \beta_1 \\ 2 - \alpha_1 = \beta_0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0.593 \\ \beta_0 = 1.407 \\ \beta_1 = -0.825 \end{array} \right.$$



无纹波无稳态误差最少拍系统的设计



于是

$$\Phi(z) = 1.407z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})(1 - 0.586z^{-1})$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + 0.593z^{-1})$$

3) 求取 $D(z)$

所以

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{0.383(1 - 0.586z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.593z^{-1})}$$

此时可求

$$G_{e2}(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)} = 0.383(1 - z^{-1})(1 - 0.586z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})$$

$$\begin{aligned} E_2(z) &= G_{e2}(z)R(z) = \frac{0.383z^{-1}(1 - 0.368z^{-1})(1 - 0.586z^{-1})}{(1 - z^{-1})} \\ &= 0.383z^{-1} + 0.01z^{-2} + 0.09(z^{-3} + z^{-4} \dots) \end{aligned}$$

第三拍起达到稳态



数字化设计方法（小结）



无稳态误差最少拍系统设计

可实现性：要求 $G(z)$ 分母的极点最多只能比其零点多一个

► 设典型输入信号：

$$r(t) = R_i t^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m}$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z) = (1 - z^{-1})^m$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

当 $G(z)$ 具有单位圆上和单位圆外零极点的情况，数字控制器的设计

令：若 $G(z)$ 包含 z^{-d} 因子，则 $\Phi(z)$ 包含 z^{-d} 因子；

$\Phi(z)$ 包含开环脉冲传递函数 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的零点；

$\Phi_e(z)$ 包含开环脉冲传递函数 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的极点。

由关系式 $\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$ ，求解有关待定系数，最后选定 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 。

无纹波无稳态误差最少拍系统的设计

在有纹波无稳态误差设计的基础上，附加条件： $\Phi(z)$ 包含 $G(z)$ 的零点多项式

$G(z)$ 在单位圆内的零点就是无纹波最少拍系统比有纹波最少拍系统增加的拍数



○ 模拟化设计方法

- 将控制器先看成是连续的，设计好以后再离散化实现，如不满足性能指标则重新设计。如设计数字PID控制器

。



○ 数字化设计方法

- 直接在 z 域设计离散的数字控制器，而将对象离散化后实现。如：最少拍数字控制器。



第七章主要内容



- 离散系统基本概念
- 信号的采样
- Z变换理论
- 离散系统的数学模型
- 离散系统分析
- **数字控制系统设计**

模型：差分方程、离散时间状态方程、脉冲传递函数

分析与综合的问题：稳定性分析、时间响应、稳态误差

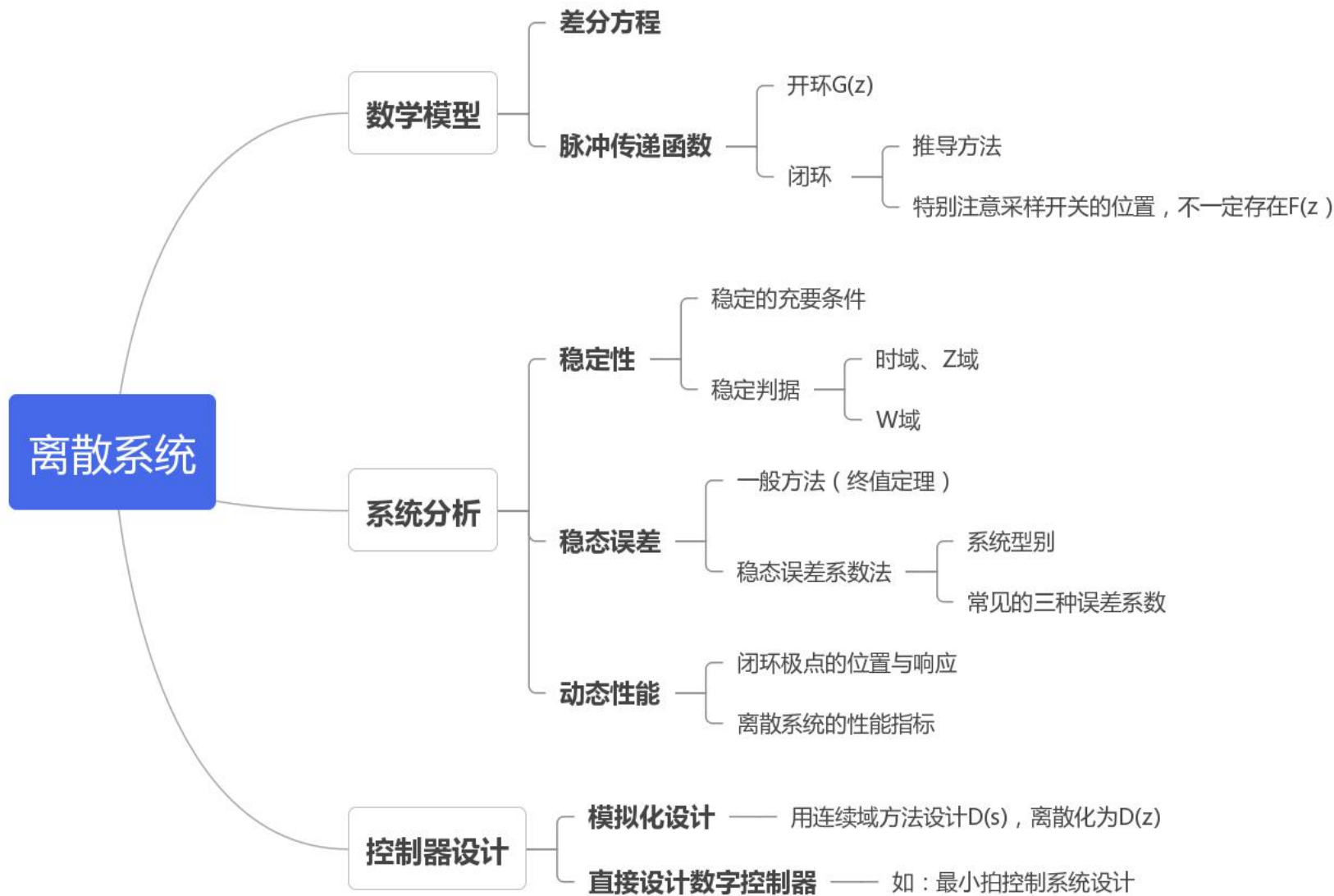
方法：差分方程求解、根轨迹、Routh判据、特征方程求根.....

注意：重点掌握与连续时间系统的相似之处与区别



本章主要知识脉络图

数学基础：
z变换、z反变换、线性代数





徐巍华

浙江大学智能系统与控制研究所

玉泉校区教十八235室

whxu@zju.edu.cn

13600549753



CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956

