4.4 习题四

考虑线性方程 $\mathbf{Ac}+\mathbf{e}=\mathbf{y}$ ，其中 $\mathbf{e}$ 为零均值加性有色噪声向量。使用加权误差函数 $Q(\mathbf{c})=\mathbf{e}^{\mathbf{H}}\mathbf{W}\mathbf{e}$ 作为向量 $\mathbf{c}$ 最优估计 $\hat{\mathbf{c}}_0$ 的代价函数，其中矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{W}$ 均为 *Hermitian* 正定矩阵。

(1) 求上述无约束优化问题的最优解 $\hat{\mathbf{c}}_0$ 。

(2) 若向量 $\mathbf{c}$ 须满足约束条件 $\mathbf{c}^{\mathbf{H}}\mathbf{y}=\mathbf{1}$, 求该约束优化问题的最优解。

(1) $Q(\mathbf{c})=\mathbf{e}^H\mathbf{W}\mathbf{e}$

$=(\mathbf{y}-\mathbf{Ac})^H\mathbf{W}(\mathbf{y}-\mathbf{Ac})$

$=(\mathbf{y}^H-\mathbf{c}^H\mathbf{A}^H)\mathbf{W}(\mathbf{y}-\mathbf{Ac})$

$=\mathbf{y}^H\mathbf{W}\mathbf{y}-\mathbf{y}^H\mathbf{WAc}-\mathbf{c}^H\mathbf{A}^H\mathbf{W}\mathbf{y}+\mathbf{c}^H\mathbf{A}^H\mathbf{W}\mathbf{c}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{c}^H\mathbf{A}^H\mathbf{c}$

故 $dQ(\mathbf{c})=tr(-(dc^*)^T\mathbf{A}^H\mathbf{W}\mathbf{y}+(dc^*)^T\mathbf{A}^H\mathbf{WAc})$

$=tr(-(\mathbf{A}^H\mathbf{W}\mathbf{y})^T dc^*+(\mathbf{A}^H\mathbf{WAc})^T dc^*)$

故 $\nabla_{\mathbf{c}^*}Q=-\mathbf{A}^H\mathbf{W}\mathbf{y}+\mathbf{A}^H\mathbf{WAc}=\mathbf{0}$

可得 $\hat{\mathbf{c}_0}=(\mathbf{A}^H\mathbf{WA})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{W}\mathbf{y}$

(2) 使用拉格朗日乘子法

令 $L(\mathbf{c},x)=Q(c)+\lambda(1-\mathbf{c}^H\mathbf{y})$

故 $dL(\mathbf{c},x)=tr(-\mathbf{y}^H\mathbf{W}\mathbf{A}d\mathbf{c}+\mathbf{c}^H\mathbf{A}^H\mathbf{W}\mathbf{A}d\mathbf{c})$

故 $\frac{\partial L(\mathbf{c},x)}{\partial \mathbf{c}}=-\mathbf{A}^T\mathbf{W}^Ty^*+\mathbf{A}^T\mathbf{W}^T\mathbf{A}^T\mathbf{c}^*=0$

可得 $\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H\mathbf{A}^H\mathbf{c}=\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H\mathbf{y}$

故 $\mathbf{c}=(\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H\mathbf{A}^H)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H\mathbf{y}$

$=(\mathbf{A}^H)^{-1}(\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H\mathbf{y}$

$=(\mathbf{A}^H)^{-1}\mathbf{y}$