第二章 连续信号的分析

浙江大学 电气工程学院

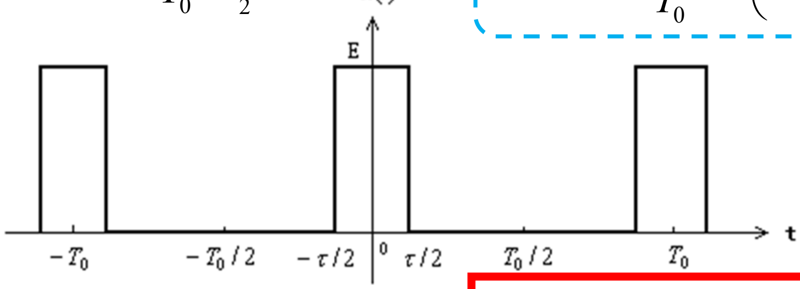
杨欢

yanghuan@zju.edu.cn

回顾

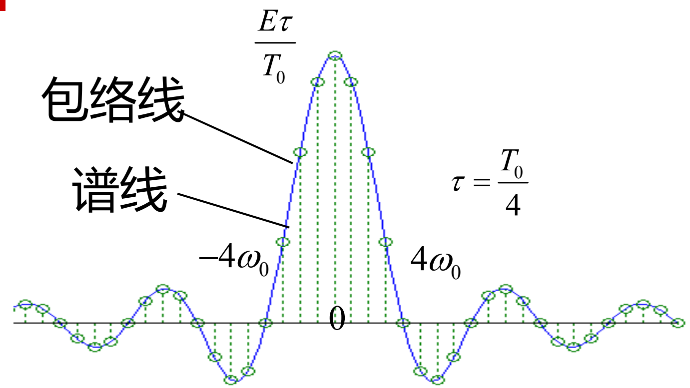
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$



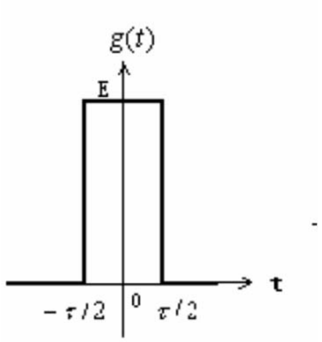
周期信号傅里叶级数
CFS

$$X(n\omega_0)=\frac{E\tau}{T_0}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$



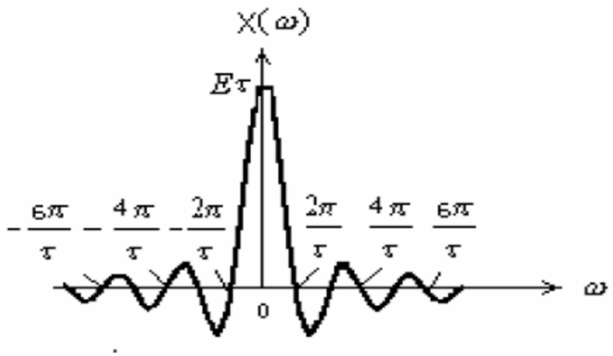
周期脉冲的复傅里叶系数等于单脉冲傅里叶变换在$n\omega_0$频率点的值除以T_0。

$$\boxed{X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\bullet X_0(n\omega_0)}$$



非周期信号傅里叶变换
CTFT

$$X(\omega)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



回顾

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

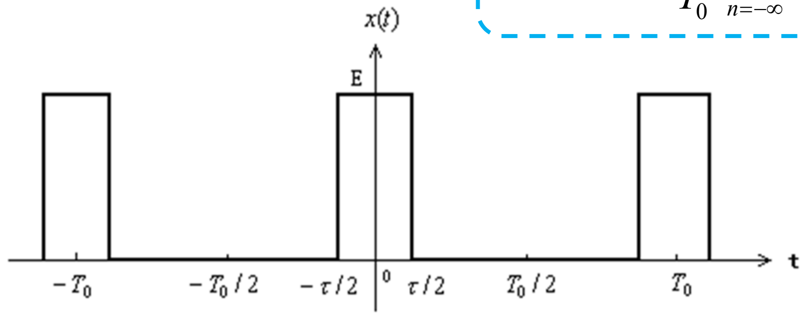
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

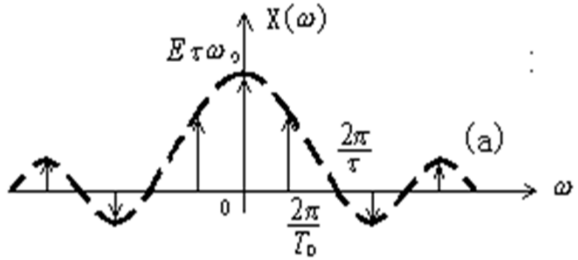
一般周期信号傅里叶变换

CTFT

$$\boxed{X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\bullet X\left(n\omega_0\right)\delta\left(\omega-n\omega_0\right)}$$

$$X(\omega)=2\pi\frac{E\tau}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$$





周期脉冲的傅立叶变换（频谱密度函数）由无穷多个冲激函数组成，这些冲激函数位于周期信号的各谐波频率处，其强度为各相应幅度X($n\omega_0$）的2π倍

非周期信号的频谱分析

- 常用非周期信号的傅立叶变换
  - 矩形脉冲信号（门函数）

$$g(t)=\begin{cases} E & |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases} \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\omega)=E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

  - 单位冲激信号

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathbf{1}$$

  - 单位阶跃信号

$$u(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

非周期信号的频谱分析

➲ 常用周期信号的傅立叶变换

➢ **复指数信号**

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

➢ **正弦信号**

$$\sin\omega_0 t \xrightarrow{\mathscr{F}} -j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathscr{F}} \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

➢ **一般周期信号**

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} \xrightarrow{\mathscr{F}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

傅立叶变换的基本性质

- 线性
- 奇偶性
- 对偶性
- 尺度变换特性
- 时移特性
- 频移特性
- 微分特性
- 积分特性
- 帕斯瓦尔定理
- 卷积定理

线性（叠加性）

若

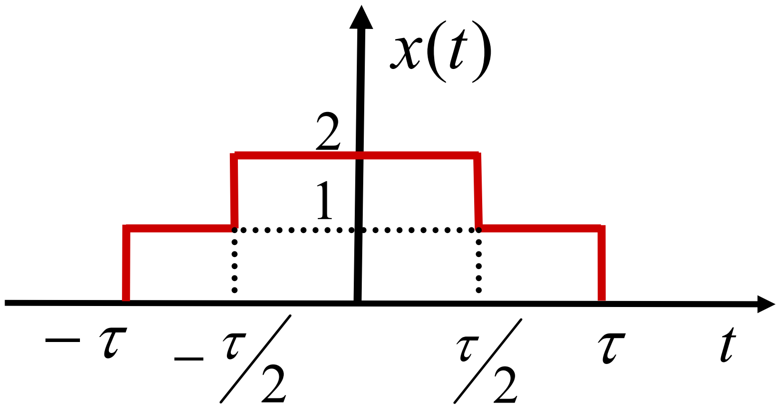
$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$$

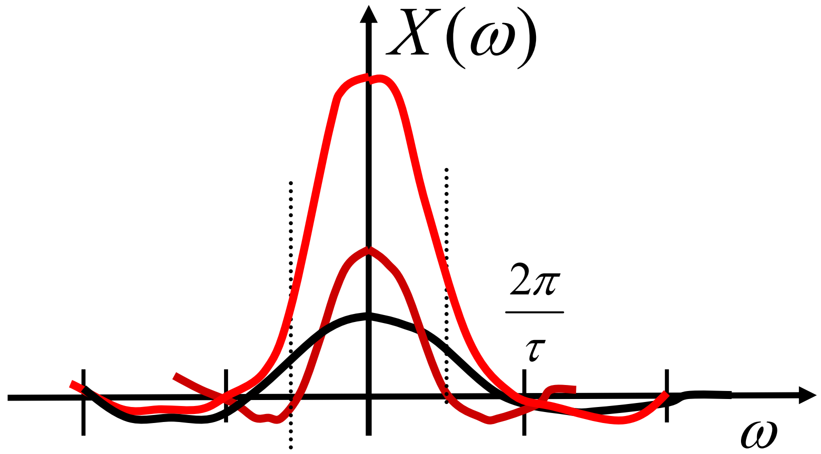
$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

则

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

求：*x*(*t*) 的傅立叶变换





$$x(t)=[u(t+\tfrac{\tau}{2})-u(t-\tfrac{\tau}{2})]+[u(t+\tau)-u(t-\tau)]$$

$$X(\omega)=\tau[Sa(\omega\tau/2)+2Sa(\omega\tau)]$$

线性（叠加性）

- 例如单位阶跃信号$u(t)=\boxed{1/2}+\boxed{\mathrm{sgn}(t)/2}$

$$F[e^{-a|t|}]=\frac{2a}{a^2+\omega^2} \xrightarrow{\text{a趋于零}} X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

$$X(\omega)=\lim_{a\to 0}[-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}]=\begin{cases}\dfrac{2}{j\omega} & \omega\neq 0\\ 0 & \omega=0\end{cases}$$

$$\mathcal{F}[u(t)]=\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)]=\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

奇偶性

无论$x(t)$是实函数还是复函数，均成立

$$F[x(t)] = X(\omega)$$

$$F[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$

时域共轭
频域共轭
并且翻转

奇偶性

证明：由傅立叶变换定义式

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Downarrow$$

$$X^*(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt$$

$$\Downarrow$$

$$X^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = F[x^*(t)]$$

奇偶性

讨论：若$x(t)$是实函数

$$X(\omega)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega t dt}_{R(\omega)}-j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega t dt}_{I(\omega)}$$

偶函数

$R(\omega)$

奇函数

$I(\omega)$

$$R(\omega)=R(-\omega)$$

$$I(\omega)=-I(-\omega)$$

$$X(-\omega)=X^{*}(\omega)$$

$$\left.\begin{aligned}|X(\omega)|&=\sqrt{R^{2}(\omega)+I^{2}(\omega)}\\ \varphi(\omega)&=\arctan\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right)\end{aligned}\right\}$$

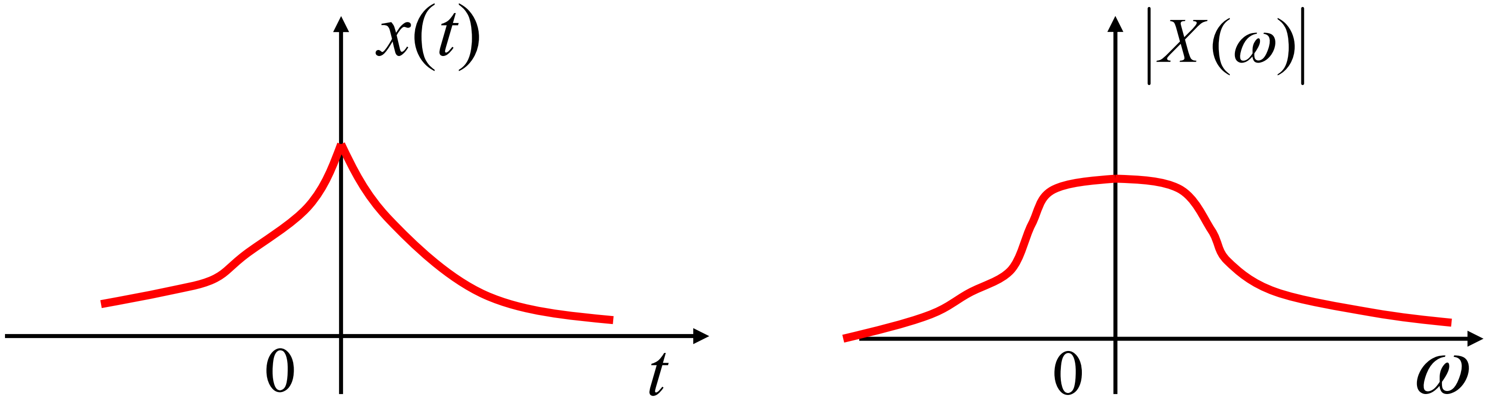
实函数傅立叶变换幅度谱为偶函数，相位谱为奇函数

奇偶性

实偶函数的傅立叶变换仍为实偶函数

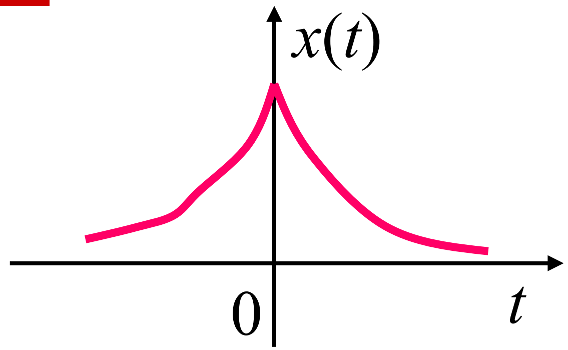
$$x(t) = e^{-\alpha|t|} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

$$X(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad \varphi(\omega) = 0$$



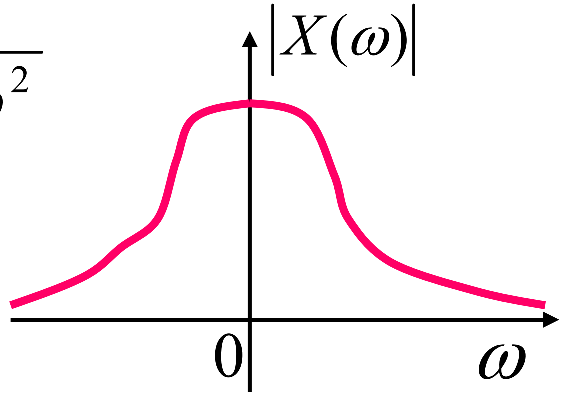
双边指数信号

$$x(t) = e^{-a|t|} \qquad a > 0$$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

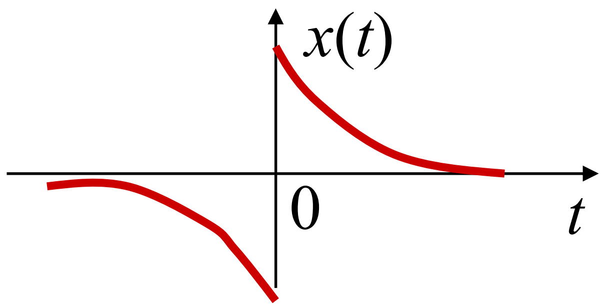
$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

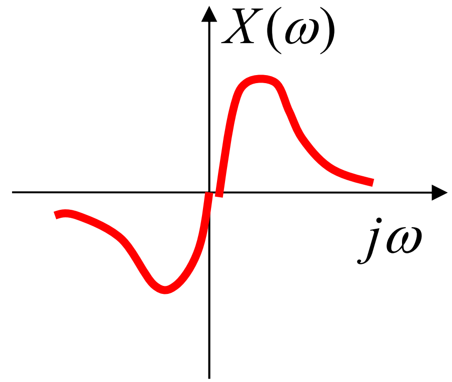


奇偶性

实奇函数的傅立叶变换则为虚奇函数

$$x(t)=\begin{cases} e^{-at} & (t>0) \\ -e^{-at} & (t<0) \end{cases}$$

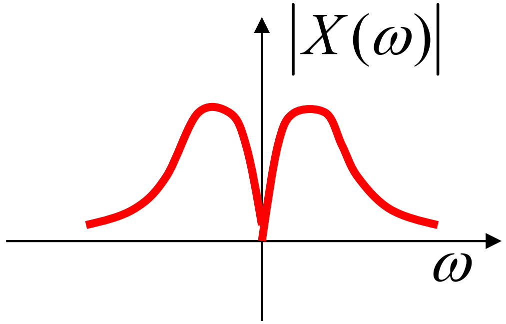


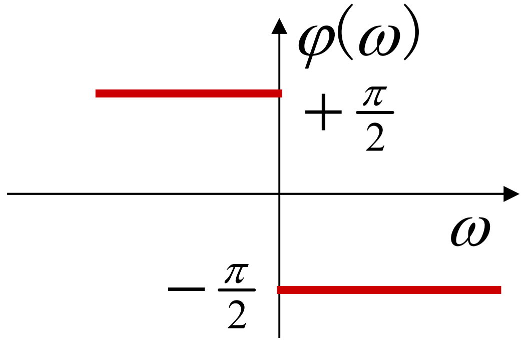


$$X(\omega)=\frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$|X(\omega)|=\frac{2|\omega|}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (\omega>0) \\ +\dfrac{\pi}{2} & (\omega<0) \end{cases}$$





对偶性

- 若 $x(t)\leftrightarrow X(\omega)$ 则 $X(t)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

证明： 由傅立叶反变换式

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$x(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$\Downarrow$$

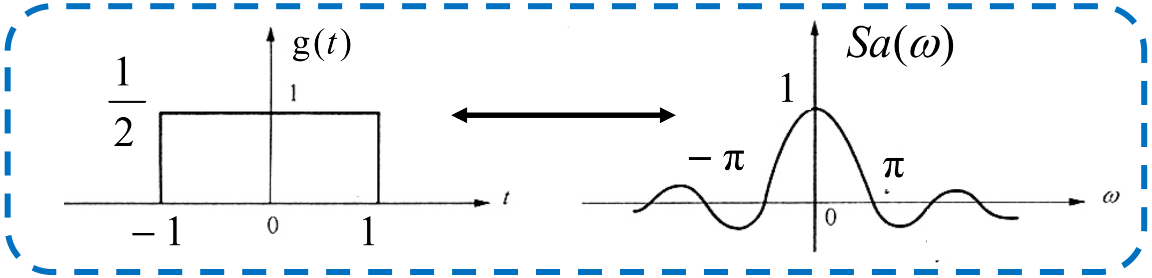
$$x(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j\omega t}dt=2\pi x(-\omega)$$

为 $X(t)$ 的傅立叶变换

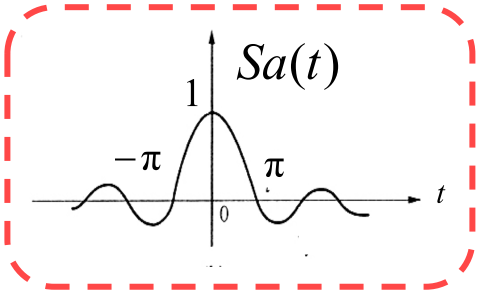
对偶性

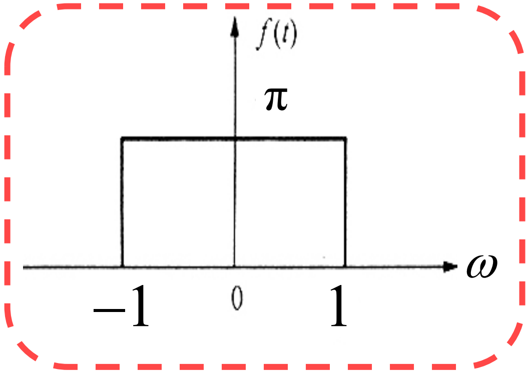
➲ **求取样函数 $x(t)=Sa(t)$ 的傅立叶变换**

$$g(t) \leftrightarrow E \cdot \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \xrightarrow[E=1/2]{\tau=2} g(t) \leftrightarrow Sa(\omega)$$

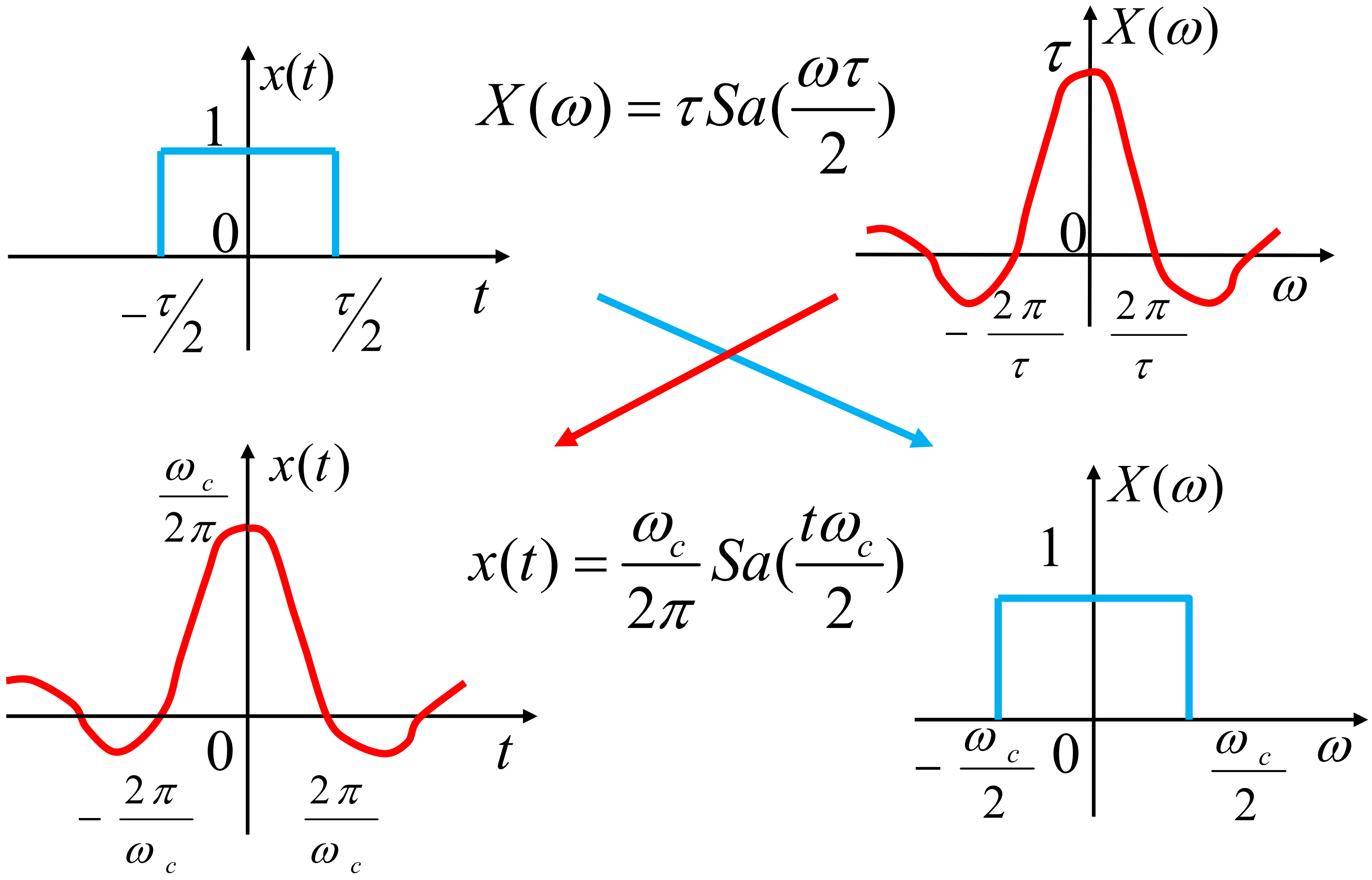


$$Sa(t) \leftrightarrow 2\pi \cdot g(\omega)$$





对偶性



$$X(\omega)=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$x(t)=\frac{\omega_c}{2\pi}Sa\left(\frac{t\omega_c}{2}\right)$$

对偶性

- **例：** 求单位直流信号的傅立叶变换

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

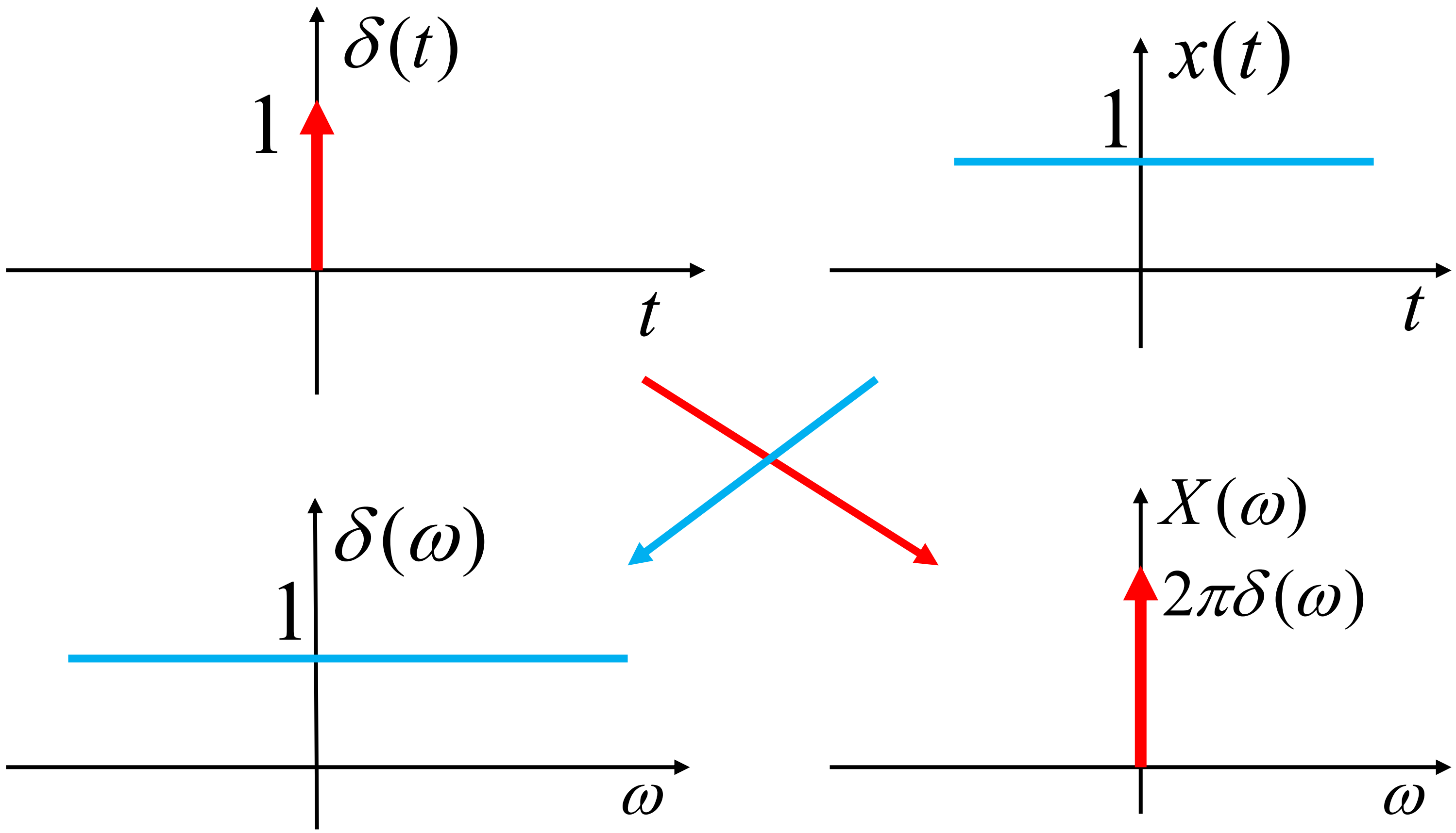
因$\delta(t)$是偶函数,故

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$f(t)$为直流信号，只在$\omega = 0$时有值，其傅里叶变换符合这种情况。

$$F[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \xrightarrow{\text{a趋于零}} X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

直流和冲激函数的频谱的对称性



对偶性

- 矩形脉冲　与 Sa函数
- 冲激函数　与 直流信号

尺度变换特性

- 若

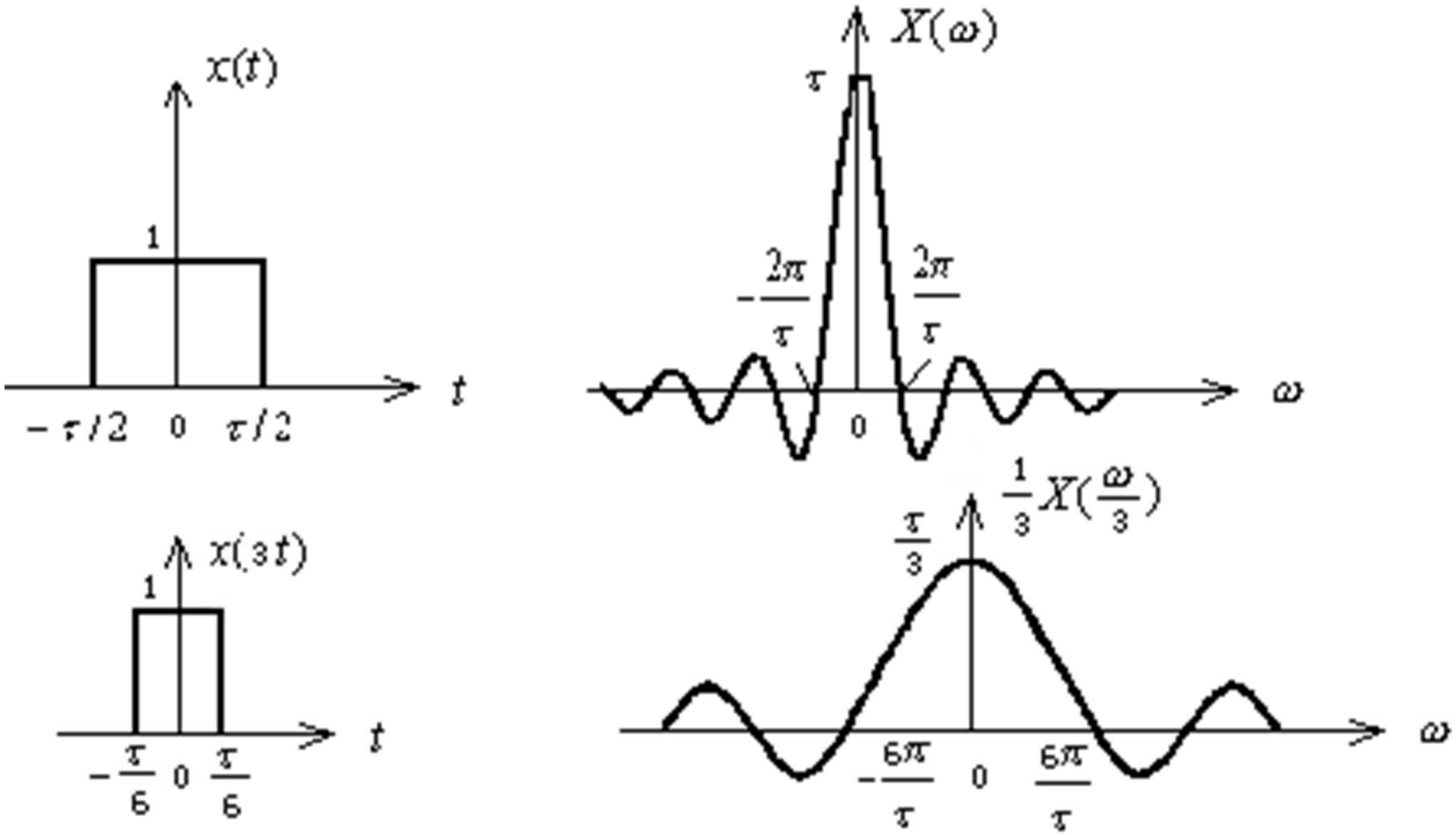
$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

- 则

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

根据傅立叶变换定义式证明

尺度变换特性



$x(t)$
1
t
$-\tau/2$
0
$\tau/2$
$X(\omega)$
τ
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
0
ω
$x(3t)$
1
t
$-\frac{\tau}{6}$
0
$\frac{\tau}{6}$
$\frac{1}{3}X(\frac{\omega}{3})$
$\frac{\tau}{3}$
$-\frac{6\pi}{\tau}$
0
$\frac{6\pi}{\tau}$
ω

尺度变换特性

➲ **例：** 如设 $a = -1$，那么有：

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$$

➢ **说明：信号在时域中沿纵轴翻转等效于在频域中频谱也沿纵轴翻转。**

尺度变换特性

如果$a>1$，相当于$f(t)$在时域上压缩了a倍，傅里叶变换相当于扩展了a倍。这是由于信号的波形压缩a倍，相当于信号随时间变化加快a倍，所以它所包含的频率分量增加a倍，也就是说频谱展宽a倍。因此，如果在信号传输过程中要**压缩信号的持续时间**，则不得不以**展宽频带**作为代价的。所以在通信系统中，**通信速度和占用频带宽度是一对矛盾**。

思考

$Sa\left(\frac{t}{2}\right)$的傅里叶变换为________________，$\int_{-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t =$____________。

思考

$Sa\left(\frac{t}{2}\right)$的傅里叶变换为$\boxed{2\pi\prod(\omega)}$，$\int_{-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t =$ $\boxed{2\pi}$。

已知 $F[g(t)] = E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 令 $E = \frac{1}{2}$ $\tau=2$

则 $F[g(t)] = Sa(\omega)$

$$\prod(\frac{t}{\tau}) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

根据对偶性和尺度变换特性

$$F[Sa(t)] = 2\pi g(\omega) = \pi\prod(\frac{\omega}{2})$$

$$F[Sa(\frac{t}{2})] = 2 \cdot \pi\prod(\frac{\omega}{2\cdot\frac{1}{2}}) = 2\pi\prod(\omega)$$

由傅里叶变换定义

$$F[Sa(\frac{t}{2})] = \int_{-\infty}^{+\infty} Sa(\frac{t}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = 2\pi\prod(\omega)$$ 取$\omega=0$

时移特性

在时域：

信号沿时间轴平移t_0,等效于在频域中幅度频谱不变，而相位谱产生了附加的相位变化

若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

则 $x(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0} X(\omega)$

证明：根据傅立叶变换定义式求证。

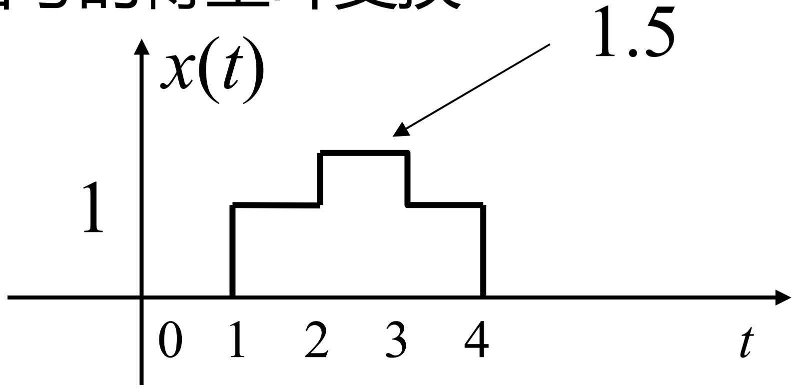
带有尺度变换的时移特性

$$F\left[x(at-t_0)\right]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

- $t_0=0$，即尺度变换
- $a=1$，即时移特性

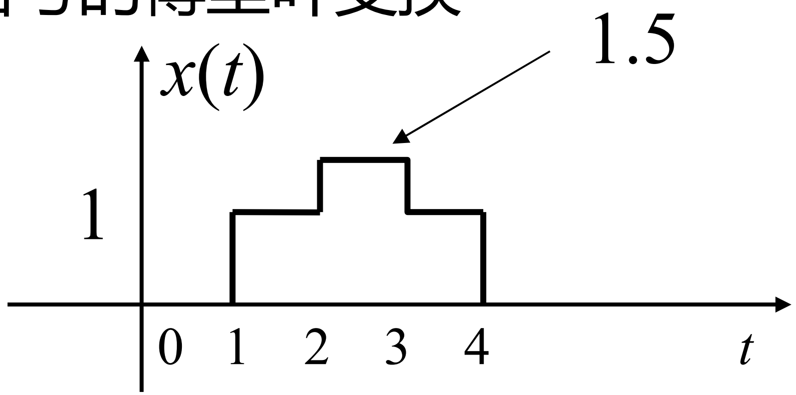
时移特性

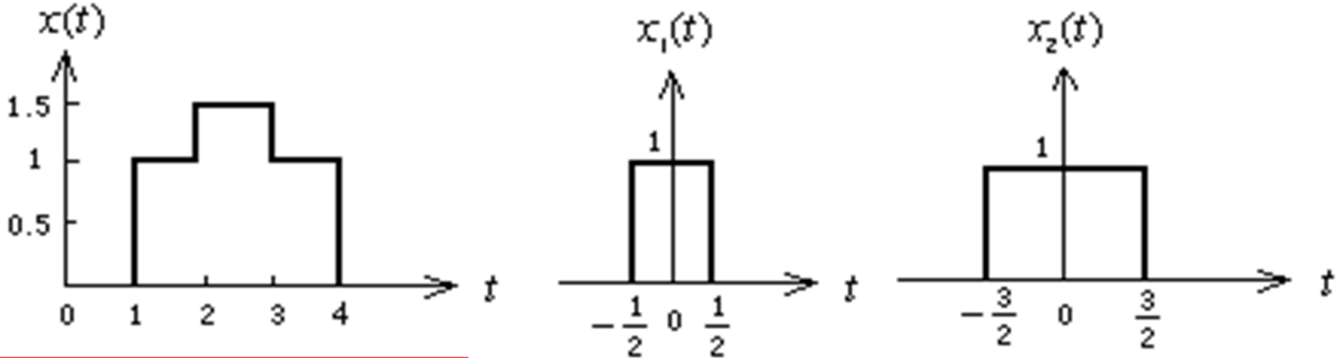
例：求图示信号的傅里叶变换



时移特性

例：求图示信号的傅里叶变换





$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2}x_1(t-\frac{5}{2})+x_2(t-\frac{5}{2})}$$ $$X_1(\omega)=Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$ $$X_2(\omega)=3Sa\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$

时移特性

$$x(t)=\frac{1}{2}x_1(t-\frac{5}{2})+x_2(t-\frac{5}{2})$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{2}\omega}X_1(\omega)+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{2}\omega}X_2(\omega)$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{2}\omega}\left[\frac{1}{2}Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)+3Sa\left(\frac{3\omega}{2}\right)\right]$$

$$X_1(\omega)=Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$X_2(\omega)=3Sa\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$

求三脉冲信号的频谱

单矩形脉冲 $f_0(t)$ 的频谱为 $F_0(\omega)=E\tau Sa(\dfrac{\omega\tau}{2})$

有如下三脉冲信号

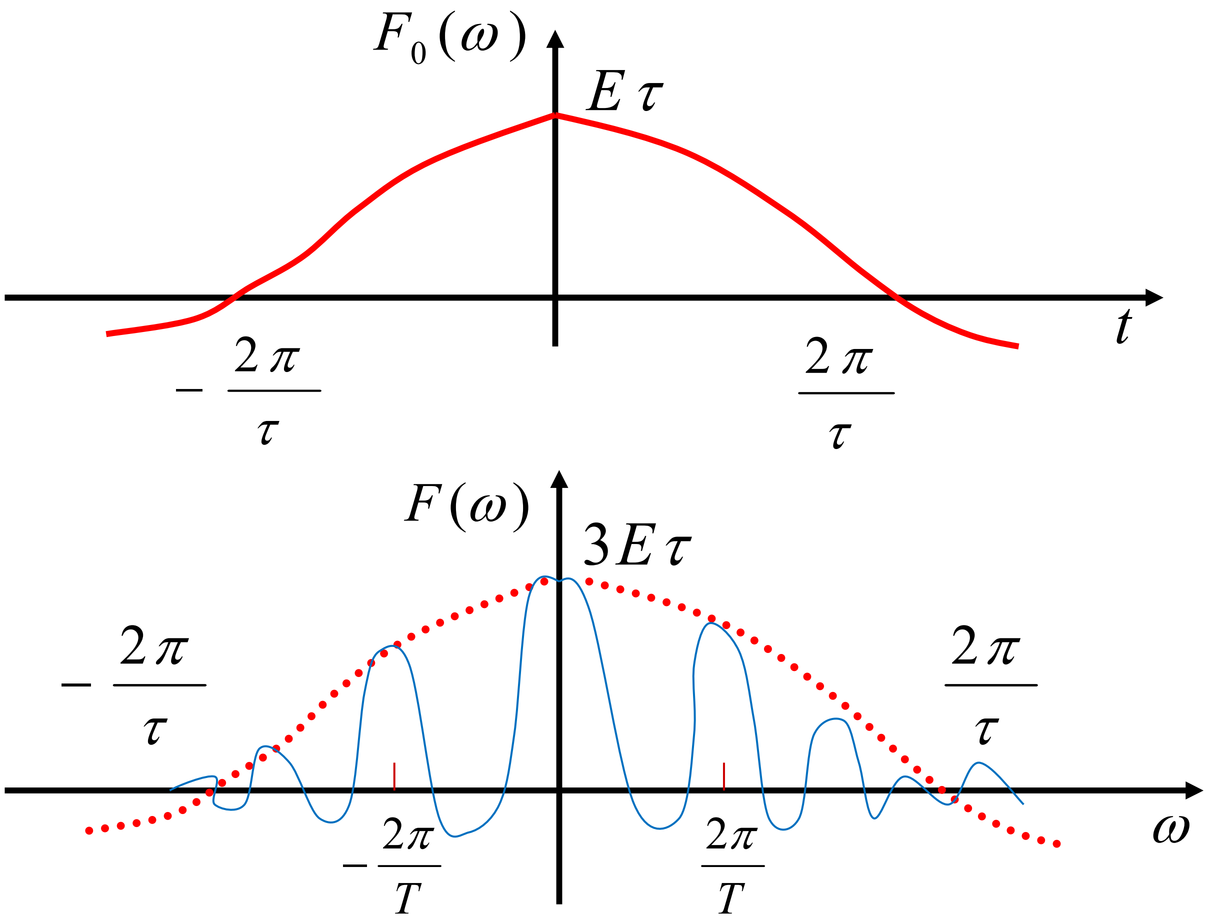
$$f(t)=f_0(t)+f_0(t+T)+f_0(t-T)$$

其频谱为

$$F(\omega)=F_0(\omega)(1+e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})$$

$$=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})(1+2\cos\omega T)$$

求三脉冲信号的频谱


$F_0(\omega)$
$E\tau$
t
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$F(\omega)$
$3E\tau$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
ω
$-\frac{2\pi}{T}$
$\frac{2\pi}{T}$

频移特性

在时域将信号$x(t)$乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$ ，对应于在频域将原信号的频谱右移ω_0，即往高频段平移，实行频谱的搬移（**调制**）。

- 若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
- 则

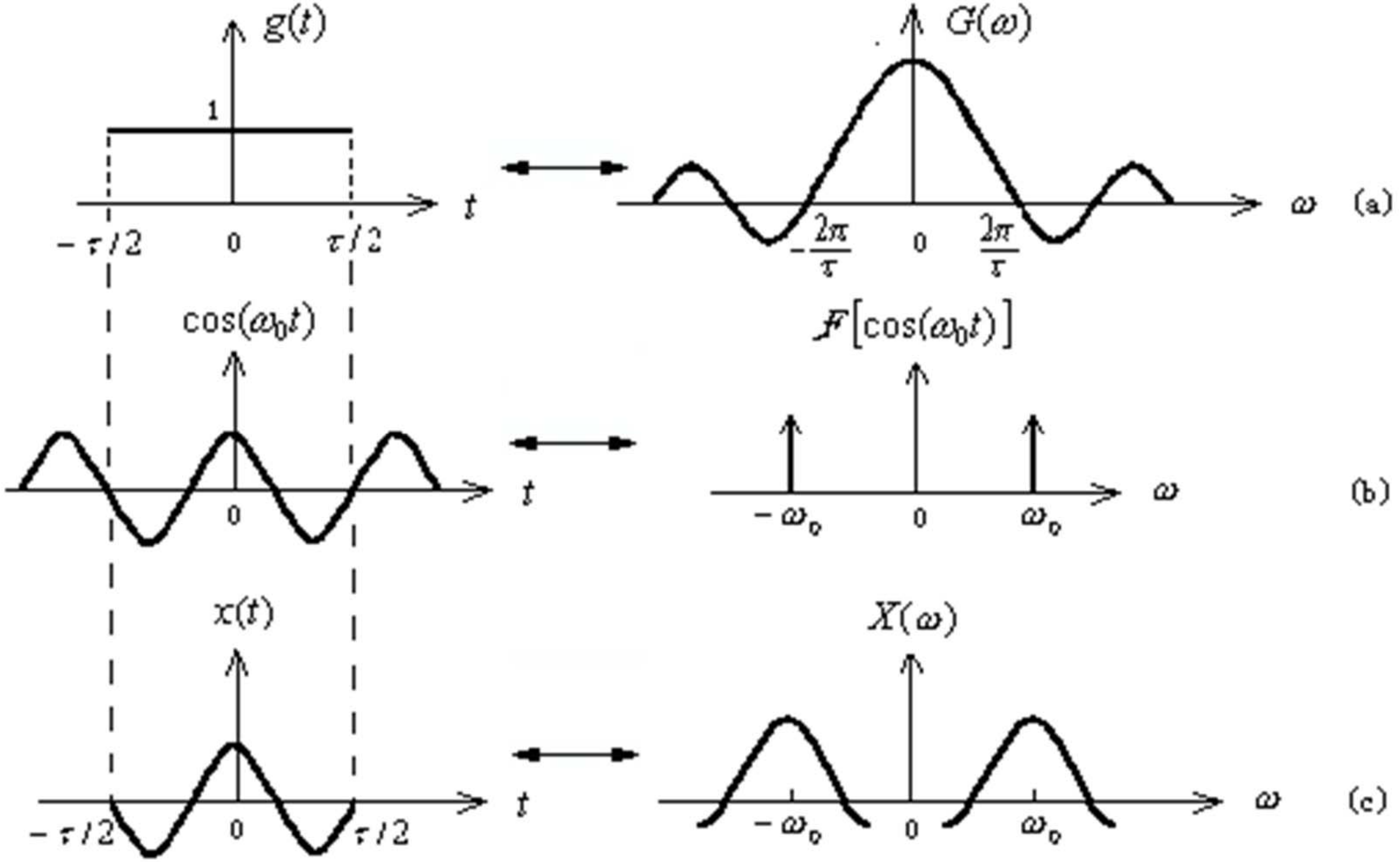
$$x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow X\left(\omega \mp \omega_0\right)$$

- 证明

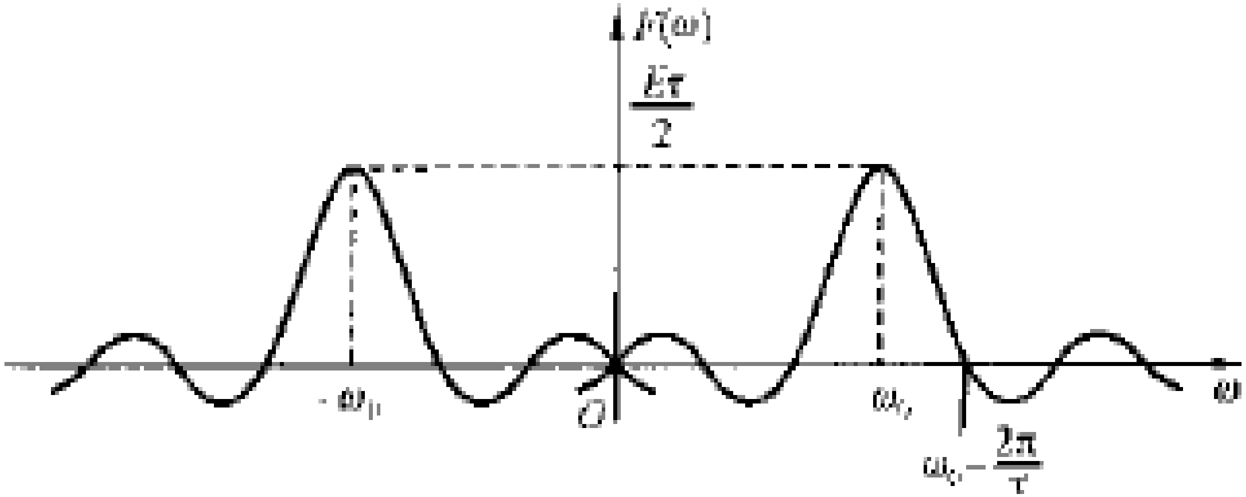
$$F[x(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = X(\omega - \omega_0)$$

- 同理 $F[x(t)e^{-j\omega_0 t}] = X(\omega + \omega_0)$

频移特性

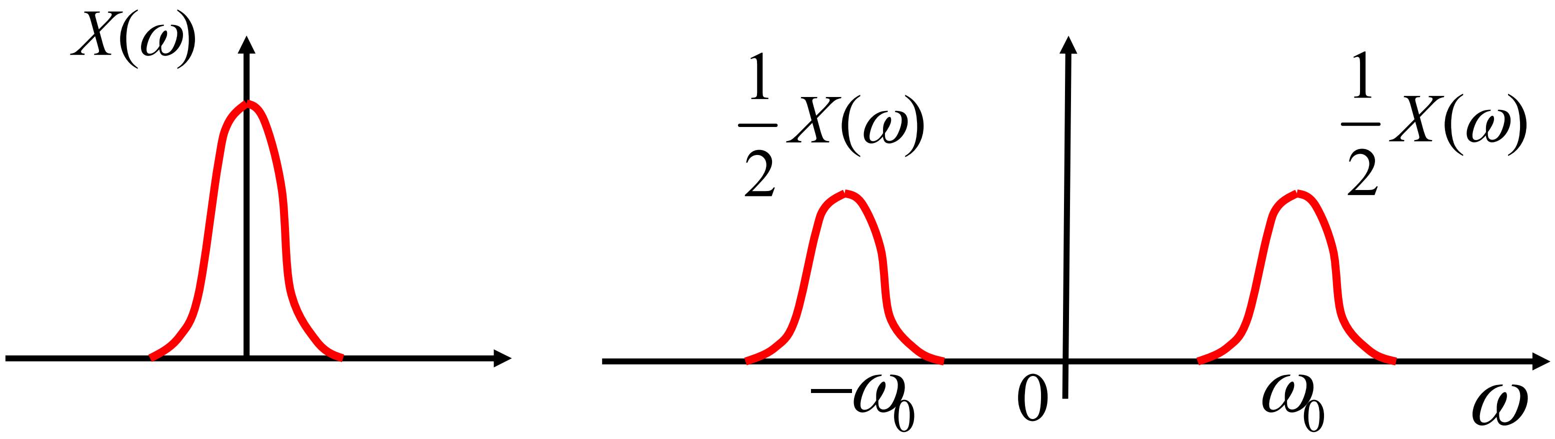


频移特性



频移特性

- **例：** 频移性的应用：通信系统中信号的调制。



调制与解调请参考郑君里《信号与系统》P297-301

频移特性

例：实函数 $f(t) \leftrightarrow F(\omega) = a(\omega) - \mathrm{j}b(\omega)$，$f_0(t) = f(t) + f(-t)$

求：$x(t) = [f_0(t+1) + f_0(t-1)]\cos(\omega_0 t)$ 的傅立叶变换。

解：由奇偶性 $F^*(\omega) = F(-\omega)$ 及尺度变换 $f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$

$$F_0(\omega) = F(\omega) + F(-\omega) = 2\,\mathrm{Re}[F(\omega)] = 2a(\omega)$$

由时移性和线性特性

$$f_0(t+1) + f_0(t-1) \leftrightarrow F_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} + F_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = 2F_0(\omega)\cos\omega = 4a(\omega)\cos\omega$$

由 $f(t)\cos\omega t$ 的傅立叶变换得

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\cdot 4[a(\omega-\omega_0)\cos(\omega-\omega_0) + a(\omega+\omega_0)\cos(\omega+\omega_0)]$$

$$= 2a(\omega-\omega_0)\cos(\omega-\omega_0) + 2a(\omega+\omega_0)\cos(\omega+\omega_0)$$

微分特性

- 若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
- 则 $\dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$

- 时域的微分运算对应于频域乘以 $j\omega$ 因子，相应地增强了高频成分。
- **好用、需谨慎!**

  可以由信号的微分特性反推原信号的傅立叶变换，但由于信号的微分运算丢失了原始信号的直流分量信息，因此不包含$X(\omega)$在 $\omega = 0$ 处的信息。

微分特性

例：求三角脉冲 $x(t)=\begin{cases}E(1-\frac{2}{\tau}|t|) & (|t|<\frac{\tau}{2})\\ 0 & (|t|>\frac{\tau}{2})\end{cases}$ 的频谱

- **方法一：**代入定义计算
- **方法二：**利用二阶导数的FT

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{2E}{\tau}\left[\delta(t+\tfrac{\tau}{2})+\delta(t-\tfrac{\tau}{2})-2\delta(t)\right]$$

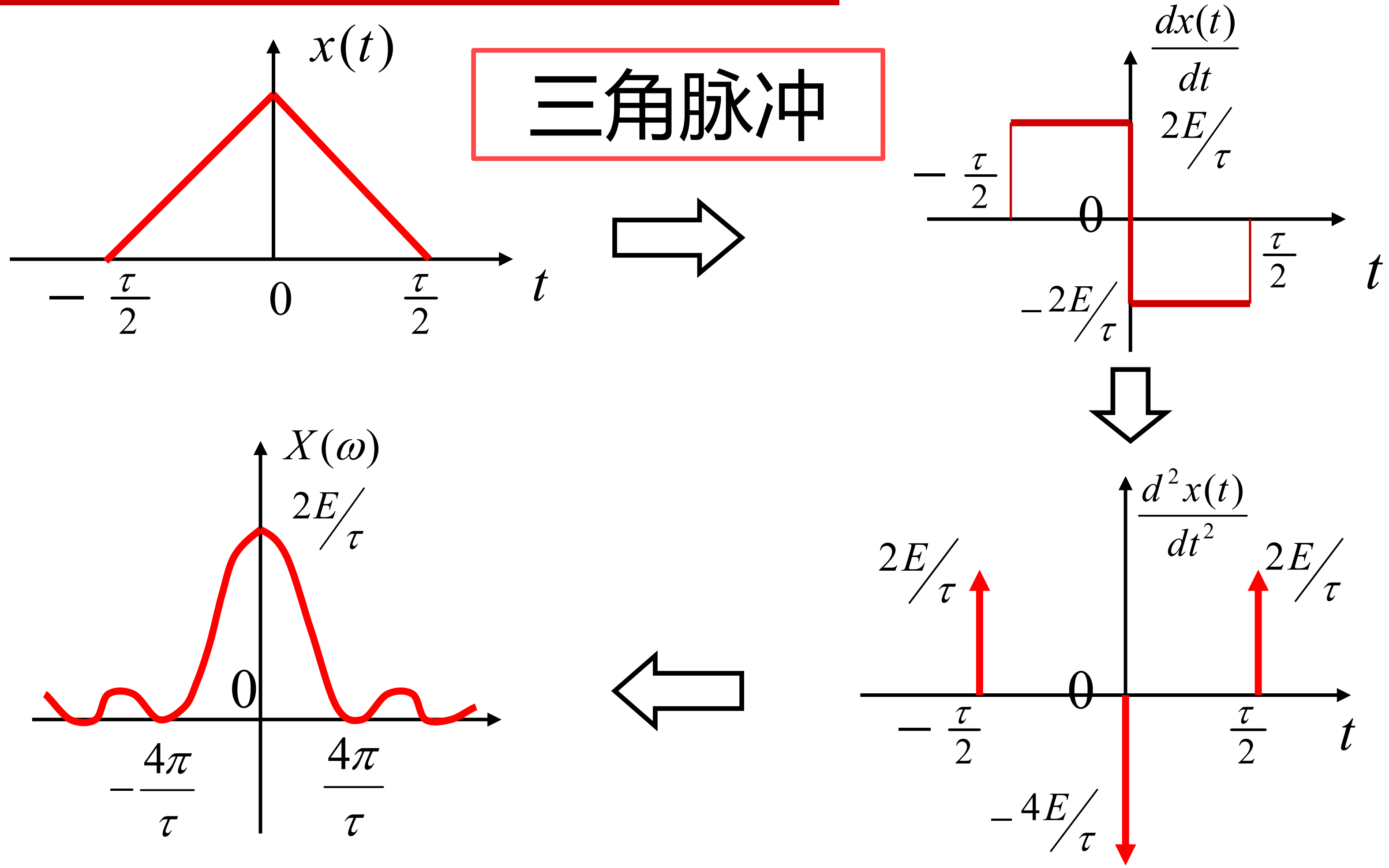
FT

$$(j\omega)^2X(\omega)=\frac{2E}{\tau}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-2)$$

$$=-\frac{8E}{\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)=-\frac{\omega^2E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$\boxed{X(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})}$$

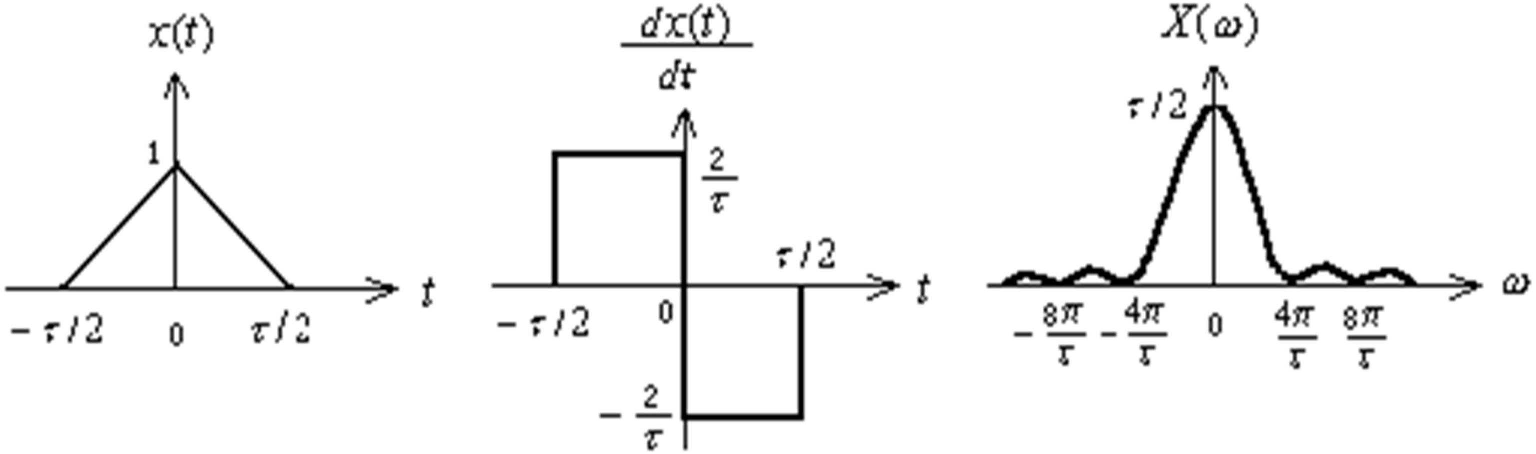
微分特性



三角脉冲
$x(t)$
$-\frac{\tau}{2}$
0
$\frac{\tau}{2}$
t
$\frac{dx(t)}{dt}$
$2E/\tau$
$-2E/\tau$
$\frac{d^2x(t)}{dt^2}$
$2E/\tau$
$2E/\tau$
$-4E/\tau$
$X(\omega)$
$2E/\tau$
$-\frac{4\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$

微分特性

- **方法三：**利用一阶导数的FT



思考：如果$x(t)$及各阶导数中存在直流量怎么办?

$$X_{(1)}(\omega)=Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\left[e^{j\frac{\omega\tau}{4}}-e^{-j\frac{\omega\tau}{4}}\right]$$

$$=Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\left[j2\sin\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\right]$$

$$X(\omega)=\frac{X_{(1)}(\omega)}{j\omega}$$

$$=\frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

微分特性

- 利用微分特性**反推**信号傅里叶变换的公式

$$X(\omega)=\frac{1}{(j\omega)^{\mathrm{n}}}X_{(\mathrm{n})}(\omega)+\pi\left[x(+\infty)+x(-\infty)\right]\delta(\omega)$$

- **例：** 符号函数sgn(t)

$x(+\infty)=1;\ \ x(-\infty)=-1;\qquad X_{(1)}(\omega)=F(2\cdot\delta(t))=2$

$$F(\mathrm{sgn}(t))=\frac{X_{(1)}(\omega)}{j\omega}=\frac{2}{j\omega}$$

- 如单位阶跃函数$u(t)$

$x(+\infty)=1;\ \ x(-\infty)=0;\qquad X_{(1)}(\omega)=F(\delta(t))=1$

$$F(u(t))=\frac{X_{(1)}(\omega)}{j\omega}=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

积分特性

- 若

$$\omega=0, \left|\frac{X(\omega)}{\omega}\right|<\infty \quad or \quad X(0)=0$$

$$F[x(t)] = X(\omega)$$

- 则

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

积分特性

- 若

$$F[x(t)] = X(\omega)$$

$$\boxed{X(0) \neq 0}$$

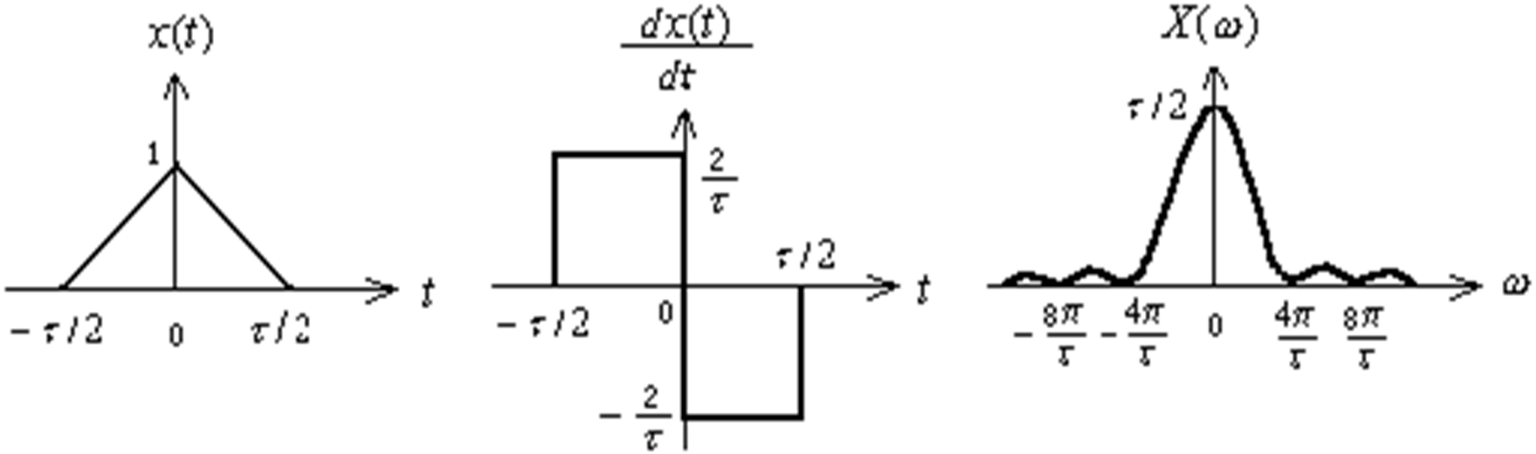
- 则

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \boxed{\pi X(0)\delta(\omega)}$$

- 时域的积分运算对应于频域乘以1/jω因子，相应地增强了低频成分，减少了高频成分。

积分特性

- 利用FT的积分性质



$$X_{(1)}(\omega)=Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\left[e^{j\frac{\omega\tau}{4}}-e^{-j\frac{\omega\tau}{4}}\right]$$

$$=Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\left[j2\sin\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\right]$$

$$X(\omega)=\frac{X_{(1)}(\omega)}{j\omega}+\pi X_1(0)\delta(\omega)$$

$$=\frac{\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

帕斯瓦尔定理

- 若 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

- 则 $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

帕斯瓦尔定理表明，信号的总能量也可由频域求得，即从单位频率的能量 $\left(|X(\omega)|^2/2\pi\right)$ 在整个频率范围内积分得到。

帕斯瓦尔定理

$$\boxed{x(t) \leftrightarrow X(\omega)} \Longrightarrow \boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega}$$

- 能量信号的帕斯瓦尔公式表明信号的能量既可在时域计算，也可在频域计算，结果相同。
- 记能量谱 $\boxed{E(\omega) = |X(\omega)|^2}$ ，为偶函数，丢失了原始信号的相位信息。
- $\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega)}{2\pi} \mathrm{d}\omega :}$ 在单位带宽 Δf 内能量 $\frac{E(\omega)}{2\pi}\Delta\omega = E(\omega) \cdot \Delta f$

总的能量是所有带宽下各个频谱分量的能量贡献和。

思考

- 请从时域和频域两个角度来计算下列信号的能量 $\boldsymbol{E}$ 与功率 $\boldsymbol{P}$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-(4t+\mathrm{j}\pi)}u(t)$$

卷积定理

- 时域卷积定理
- 频域卷积定理

时域卷积定理

- 若

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

- 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

- 两个信号在时域的卷积积分，对应频域中该两信号频谱的乘积。

例：求两个矩形脉冲卷积后的频谱

$$x_1(t)=x_2(t)=\begin{cases}\sqrt{2/\tau} & |t|<\tau/4\\ 0 & |t|>\tau/4\end{cases}$$

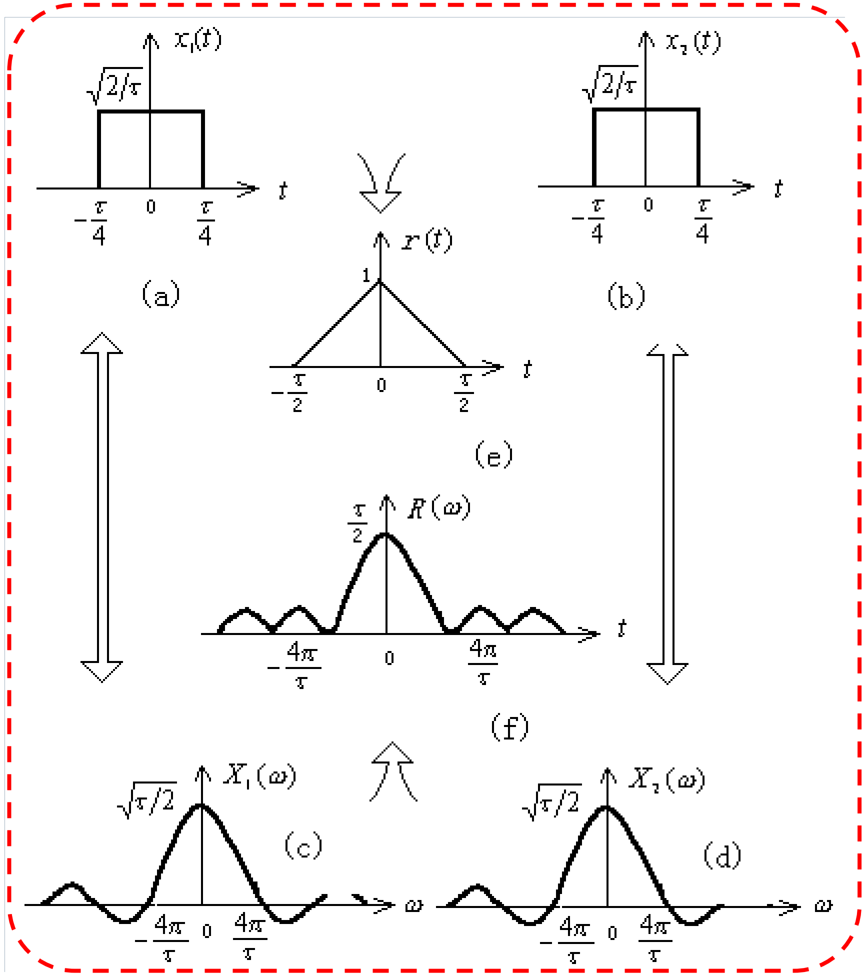
$$X_1(\omega)=X_2(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\tau}}\cdot\frac{\tau}{2}Sa(\frac{\omega\tau}{4})=\sqrt{\frac{\tau}{2}}Sa(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$r(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases}1-2|t|/\tau & |t|<\tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\sqrt{\frac{\tau}{2}}Sa(\frac{\omega\tau}{4})\right]^2=\frac{\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$



频域卷积定理

- 若

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

- 则

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

练习

求傅立叶变换

$$f(t) = \mathrm{e}^{-jt}\,\delta(t-2)$$

$$f(t) = \mathrm{sgn}(t^2 - 9)$$

求傅立叶逆变换

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

$$X(\omega) = [u(\omega) - u(\omega-2)]e^{-j\omega}$$

求傅立叶变换

$$f(t)=e^{-jt}\delta(t-2)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jt}\delta(t-2)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)e^{-j(\omega+1)t}dt=e^{-j2(1+\omega)}$$

$$f(t)=\mathrm{sgn}(t^2-9)$$

$$f(t)=u(t-3)+u(-t-3)-g_{\tau=6}(t)$$

$$F(\omega)=e^{-j3\omega}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]+e^{j3\omega}\left[\pi\delta(-\omega)-\frac{1}{j\omega}\right]-6Sa(3\omega)$$

$$=2\pi\delta(\omega)\cos 3\omega-\frac{2}{\omega}\sin 3\omega-6Sa(3\omega)$$

$$=2\pi\delta(\omega)\cos(3\omega)-12sa(3\omega)$$

$$=2\pi\delta(\omega)-12Sa(3\omega)$$

求傅立叶逆变换

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_0\\ 0 & |\omega|>\omega_0\end{cases}$$

$\Downarrow$

$$F[X(t)]=2\omega_0 Sa(\omega\omega_0)$$

$$F[2\omega_0 Sa(\omega_0 t)]=2\pi X(\omega)$$

$\Downarrow$

$$F^{-1}[X(\omega)]=\frac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)$$

$$X(\omega)=[u(\omega)-u(\omega-2)]e^{-j\omega}$$

$\Downarrow$

$$F[u(t)-u(t-2)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}-(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega})e^{-2j\omega}$$

$$F[(u(t)-u(t-2))e^{-jt}]=$$

$$\pi\delta(\omega+1)+\frac{1}{j(\omega+1)}-(\pi\delta(\omega+1)+\frac{1}{j(\omega+1)})e^{-2j(\omega+1)}$$

$\Downarrow$

$$x(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\omega+1)+\frac{1}{j(\omega+1)}-[\pi\delta(\omega+1)+\frac{1}{j(\omega+1)}]e^{-2j(\omega+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-2j(\omega+1)})\left[\pi\delta(\omega+1)+\frac{1}{j(\omega+1)}\right]$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-2j(-t+1)})\left[\pi\delta(-t+1)+\frac{1}{j(-t+1)}\right]$$

复习 傅里叶变换的基本性质

性质	时域 $x(t)$	频域 $X(\omega)$
定义	$x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ $=\mathrm{Re}(\omega)+j\,\mathrm{Im}(\omega)$
线性	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
奇偶性	$x^*(t)$ $x(t)$ 为实函数	$X^*(-\omega)$ $\mathrm{Re}(\omega)=\mathrm{Re}(-\omega)$ $\mathrm{Im}(\omega)=-\mathrm{Im}(-\omega)$
对偶性	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
尺度变换	$x(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
翻转	$x(-t)$	$X(-\omega)$

复习 傅里叶变换的基本性质

性质	时域 $x(t)$	频域 $X(\omega)$
时移	$x(t\pm t_0)$ $x(at-t_0)$	$e^{\pm j\omega t_0}X(\omega)$ $\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$
频移	$x(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$X(\omega\mp\omega_0)$
时域微分	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
时域卷积	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$
频域卷积	$x_1(t)\cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$

采样信号的频域分析

$$X_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)$$

$$P(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$\Downarrow$$

$$X_s(\omega)=\frac{\omega_s}{2\pi}X(\omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$\Downarrow$$

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

第三节 连续信号的拉普拉斯变换分析

拉普拉斯变换

- 从傅立叶变换到拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的收敛域
- 拉普拉斯变换的性质
- 常用信号的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯反变换
- 单边拉普拉斯变换

信号的复频域分析

- 拉普拉斯变换的几何表示
- 拉普拉斯变换与傅立叶变换的关系
- 由零极点图对傅立叶变换进行几何求解

复习提纲

- 1、为什么要引入拉普拉斯变换?
- 2、拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换定义式是什么?
- 3、什么是拉普拉斯变换的收敛域?
- 4、拉普拉斯变换的性质有哪些?
- 5、双边拉普拉斯变换和单边拉普拉斯变换的联系和区别是什么?

第2次书面作业

- **作业一：**
  - P63（二版）11（4）（5）；14（2）；21
  - P103（三版）24（4）（5）；27（2）；33

- **作业二：**
  - 求 $x(t) = Sa(t)\cos 4t$ 的傅里叶变换$X(\omega)$，并画出频谱图 。
  - 求图中所示 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$
  - 分别在时域和频域中计算的 $x(t)$ 能量和功率

$$x(t) = \mathrm{e}^{-(4t + \mathrm{j}\pi)} u(t)$$