机器人建模与控制

第2章 空间描述和变换

2.6 姿态的单位四元数表示

2.6.1 四元数

在 $\{A\}$ 中描述相对静止的 $\{B\}$ 时，将欧拉角、固定角和等效轴角等旋转角限制在$(-\pi, \pi]$或$[-\pi/2, \pi/2]$是合适的

若 $\{B\}$ 在 $\{A\}$ 中的运动已预知旋转角不会穿越限制区间$(-\pi, \pi]$或$[-\pi/2, \pi/2]$的边界，对旋转角进行限制也是合适的

若 $\{B\}$ 在 $\{A\}$ 中连续多圈翻滚或翻滚范围较大，不宜对旋转角作限制

这时的旋转角计算公式可在原公式上扩展得到

2.6 姿态的单位四元数表示

引入三个虚数单位i, j, k, 并规定 $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1$

由此规定，可推得 $\mathrm{ij}=\mathrm{k}, \mathrm{ji}=-\mathrm{k}, \mathrm{jk}=\mathrm{i}, \mathrm{kj}=-\mathrm{i}, \mathrm{ki}=\mathrm{j}, \mathrm{ik}=-\mathrm{j}$

不满足乘法交换律

对任何 $(\eta \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$**，其对应的四元数为**$\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3$

记$\mathbb{H}$为由全体四元数构成的集合

四元数加法的定义

$$
\begin{aligned}
&(\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3)+(\xi+\mathrm{i}\delta_1+\mathrm{j}\delta_2+\mathrm{k}\delta_3)\\
&=(\eta+\xi)+\mathrm{i}(\varepsilon_1+\delta_1)+\mathrm{j}(\varepsilon_2+\delta_2)+\mathrm{k}(\varepsilon_3+\delta_3)
\end{aligned}
$$

2.6 姿态的单位四元数表示

$\mathrm{ij} = \mathrm{k}, \mathrm{ji} = -\mathrm{k}, \mathrm{jk} = \mathrm{i}, \mathrm{kj} = -\mathrm{i}, \mathrm{ki} = \mathrm{j}, \mathrm{ik} = -\mathrm{j}$

四元数乘法的定义

$$
\begin{aligned}
(\eta + \mathrm{i}\varepsilon_1 + \mathrm{j}\varepsilon_2 + \mathrm{k}\varepsilon_3)(\xi + \mathrm{i}\delta_1 + \mathrm{j}\delta_2 + \mathrm{k}\delta_3) = {} & (\eta\xi - \varepsilon_1\delta_1 - \varepsilon_2\delta_2 - \varepsilon_3\delta_3) \\
& + \mathrm{i}(\eta\delta_1 + \varepsilon_1\xi + \varepsilon_2\delta_3 - \varepsilon_3\delta_2) \\
& + \mathrm{j}(\eta\delta_2 - \varepsilon_1\delta_3 + \varepsilon_2\xi + \varepsilon_3\delta_1) \\
& + \mathrm{k}(\eta\delta_3 + \varepsilon_1\delta_2 - \varepsilon_2\delta_1 + \varepsilon_3\xi)
\end{aligned}
$$

四元数共轭的定义

$\eta + \mathrm{i}\varepsilon_1 + \mathrm{j}\varepsilon_2 + \mathrm{k}\varepsilon_3$ 的共轭 $(\eta + \mathrm{i}\varepsilon_1 + \mathrm{j}\varepsilon_2 + \mathrm{k}\varepsilon_3)^* = \eta - \mathrm{i}\varepsilon_1 - \mathrm{j}\varepsilon_2 - \mathrm{k}\varepsilon_3$

四元数模长的定义

$\eta + \mathrm{i}\varepsilon_1 + \mathrm{j}\varepsilon_2 + \mathrm{k}\varepsilon_3$ 的模长 $|\eta + \mathrm{i}\varepsilon_1 + \mathrm{j}\varepsilon_2 + \mathrm{k}\varepsilon_3| = \sqrt{\eta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}$

2.6 姿态的单位四元数表示

2.6.2 单位四元数表示

单位四元数是模长等于1的四元数，记S^3为全体单位四元数构成的集合

单位四元数的共轭还是单位四元数

单位四元数η+iε_1+jε_2+kε_3可直接描述3维姿态$\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)\in SO(3)$:

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{pmatrix}$$

若已知$\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)\in SO(3)$，求相应的单位四元数：

若$r_{11}+r_{22}+r_{33}>-1$，可得两组反号的单位四元数

$$\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}=2|\eta|$$
$$\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}=2|\varepsilon_1|, \mathrm{sgn}(r_{32}-r_{23})=\mathrm{sgn}(2\eta\varepsilon_1)$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1} \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1} \end{pmatrix}$$

2.6 姿态的单位四元数表示

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\varepsilon_1^2-1 & 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_1\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2^2-1 & 2\varepsilon_2\varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_1\varepsilon_3 & 2\varepsilon_2\varepsilon_3 & 2\varepsilon_3^2-1 \end{bmatrix}$$

若$r_{11}+r_{22}+r_{33}=-1$，r_{11}、r_{22}和r_{33}不会同时等于-1

$$\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}=2|\eta|=0\Rightarrow\eta=0$$

以$r_{11}\neq-1$为例，可得两组反号的单位四元数

$$\begin{pmatrix}\eta\\ \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{12})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{13})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1} \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix}\eta\\ \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{12})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{13})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{sgn}(r_{12})=\mathrm{sgn}(\varepsilon_1\varepsilon_2)$$
$$\mathrm{sgn}(r_{12})=\mathrm{sgn}(\varepsilon_1\varepsilon_3)$$

2.6 姿态的单位四元数表示

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1\end{pmatrix}$$

若$r_{11}+r_{22}+r_{33}>-1$，计算公式 $\begin{pmatrix}\eta\\ \boldsymbol{\varepsilon}\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}\\ \operatorname{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}\\ \operatorname{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1}\\ \operatorname{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1}\end{pmatrix}$

得到两组欧拉参数 $\begin{pmatrix}\eta\\ \boldsymbol{\varepsilon}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\eta=\cos\frac{\theta}{2},\ \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_x\sin\frac{\theta}{2}\\ k_y\sin\frac{\theta}{2}\\ k_z\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

当$\theta=2k\pi$时，利用 $\sin\frac{\theta}{2}=0$ 使得$\boldsymbol{\varepsilon}$为零向量

2.6.3 单位四元数乘法与坐标系旋转

对应 $\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3\in S^3$，有旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)=\begin{pmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{pmatrix}$

对应 $\xi+\mathrm{i}\delta_1+\mathrm{j}\delta_2+\mathrm{k}\delta_3\in S^3$，有旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_\delta(\xi)=\begin{pmatrix} 2(\xi^2+\delta_1^2)-1 & 2(\delta_1\delta_2-\xi\delta_3) & 2(\delta_1\delta_3+\xi\delta_2) \\ 2(\delta_1\delta_2+\xi\delta_3) & 2(\xi^2+\delta_2^2)-1 & 2(\delta_2\delta_3-\xi\delta_1) \\ 2(\delta_1\delta_3-\xi\delta_2) & 2(\delta_2\delta_3+\xi\delta_1) & 2(\xi^2+\delta_3^2)-1 \end{pmatrix}$

对应 $\zeta+\mathrm{i}\rho_1+\mathrm{j}\rho_2+\mathrm{k}\rho_3\in S^3$，有旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_\rho(\zeta)=\begin{pmatrix} 2(\zeta^2+\rho_1^2)-1 & 2(\rho_1\rho_2-\zeta\rho_3) & 2(\rho_1\rho_3+\zeta\rho_2) \\ 2(\rho_1\rho_2+\zeta\rho_3) & 2(\zeta^2+\rho_2^2)-1 & 2(\rho_2\rho_3-\zeta\rho_1) \\ 2(\rho_1\rho_3-\zeta\rho_2) & 2(\rho_2\rho_3+\zeta\rho_1) & 2(\zeta^2+\rho_3^2)-1 \end{pmatrix}$

如果 $(\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3)(\xi+\mathrm{i}\delta_1+\mathrm{j}\delta_2+\mathrm{k}\delta_3)=\zeta+\mathrm{i}\rho_1+\mathrm{j}\rho_2+\mathrm{k}\rho_3$，可证得 $\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)\boldsymbol{R}_\delta(\xi)=\boldsymbol{R}_\rho(\zeta)$

右乘联体左乘基　　适用于单位四元数

2.6 姿态的单位四元数表示

原点不变条件下的3维向量的转换公式 ${}^{A}\boldsymbol{P} = {}_{B}^{A}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P}$

记 ${}^{B}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ${}^{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

旋转矩阵基于单位四元数表达为

$$
{}_{B}^{A}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\varepsilon}(\eta) = \begin{pmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{pmatrix}
$$

命题：上述3维向量的转换公式可基于单位四元数表达为

$$
\mathrm{i}x_2+\mathrm{j}y_2+\mathrm{k}z_2 = (\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3)(\mathrm{i}x_1+\mathrm{j}y_1+\mathrm{k}z_1)(\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3)^*
$$

2.6 姿态的单位四元数表示

2.6.4 欧拉参数

基于等效轴角表示的单位向量$(k_x\ \ k_y\ \ k_z)^{\mathrm{T}}$和旋转角$\theta\in R$，定义欧拉参数

$(\eta\quad \varepsilon_1\quad \varepsilon_2\quad \varepsilon_3)^{\mathrm{T}}$，其中

$$\eta=\cos\frac{\theta}{2},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_x\sin\frac{\theta}{2}\\ k_y\sin\frac{\theta}{2}\\ k_z\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

一个标量和一个长度不超过1的3维向量

满足约束 $\eta^2+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2=1$

记U为由全体欧拉参数构成的集合

U是R^4中的单位超球面　　　　单位四元数与欧拉参数一一对应

2.6 姿态的单位四元数表示

对任何的$\boldsymbol{R}$∈SO(3)，是否都存在η+iε_1+jε_2+kε_3∈S^3，使得$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)$？

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} k_x^2 v\theta+c\theta & k_x k_y v\theta-k_z s\theta & k_x k_z v\theta+k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta+k_z s\theta & k_y^2 v\theta+c\theta & k_y k_z v\theta-k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta-k_y s\theta & k_y k_z v\theta+k_x s\theta & k_z^2 v\theta+c\theta \end{pmatrix}$$

$$v\theta=1-c\theta$$

$$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\eta^2-1$$

由 $\eta=\cos\frac{\theta}{2}$，知

$$v\theta=1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\eta\sin\frac{\theta}{2}$$

代入并由 $\varepsilon_1=k_x\sin\frac{\theta}{2},\varepsilon_2=k_y\sin\frac{\theta}{2},\varepsilon_3=k_z\sin\frac{\theta}{2}$，得

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)$$

欧拉参数表示

对任何的$\boldsymbol{R}$∈SO(3)，都存在η+iε_1+jε_2+kε_3∈S^3，使得$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_\varepsilon(\eta)$

2.6 姿态的单位四元数表示

在R^4中定义Grassmann积

$$\begin{pmatrix}\eta\\ \boldsymbol{\varepsilon}\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\xi\\ \boldsymbol{\delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta\xi-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}\\ \eta\boldsymbol{\delta}+\xi\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3\\ \varepsilon_1 & \eta & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \eta & -\varepsilon_1\\ \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\xi\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{pmatrix}$$

H中的乘法相当于R^4中的Grassmann积

如果有 $\begin{pmatrix}\eta\\ \boldsymbol{\varepsilon}\end{pmatrix}\in U$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$

如果还有 $\begin{pmatrix}\xi\\ \boldsymbol{\delta}\end{pmatrix}\in U$，则 $(\xi\ \ \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\xi\\ \boldsymbol{\delta}\end{pmatrix}=1$ 即 $\begin{pmatrix}\eta\xi-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}\\ \eta\boldsymbol{\delta}+\xi\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\delta}\end{pmatrix}\in U$

U中任意两个向量的Grassmann积仍是U中的向量

令 $\zeta=\eta\xi-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}=\eta\xi-\varepsilon_1\delta_1-\varepsilon_2\delta_2-\varepsilon_3\delta_3$

$$\boldsymbol{\rho}=\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\end{bmatrix}=\eta\boldsymbol{\delta}+\xi\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\delta}=\begin{pmatrix}\eta\delta_1+\varepsilon_1\xi+\varepsilon_2\delta_3-\varepsilon_3\delta_2\\ \eta\delta_2-\varepsilon_1\delta_3+\varepsilon_2\xi+\varepsilon_3\delta_1\\ \eta\delta_3+\varepsilon_1\delta_2-\varepsilon_2\delta_1+\varepsilon_3\xi\end{pmatrix}$$

U中的Grassmann积相当于SO(3)中的乘法

基于Grassmann积，欧拉参数可在U中直接描述3维姿态和3维坐标系旋转

右乘联体左乘基 适用于欧拉参数

Thanks !