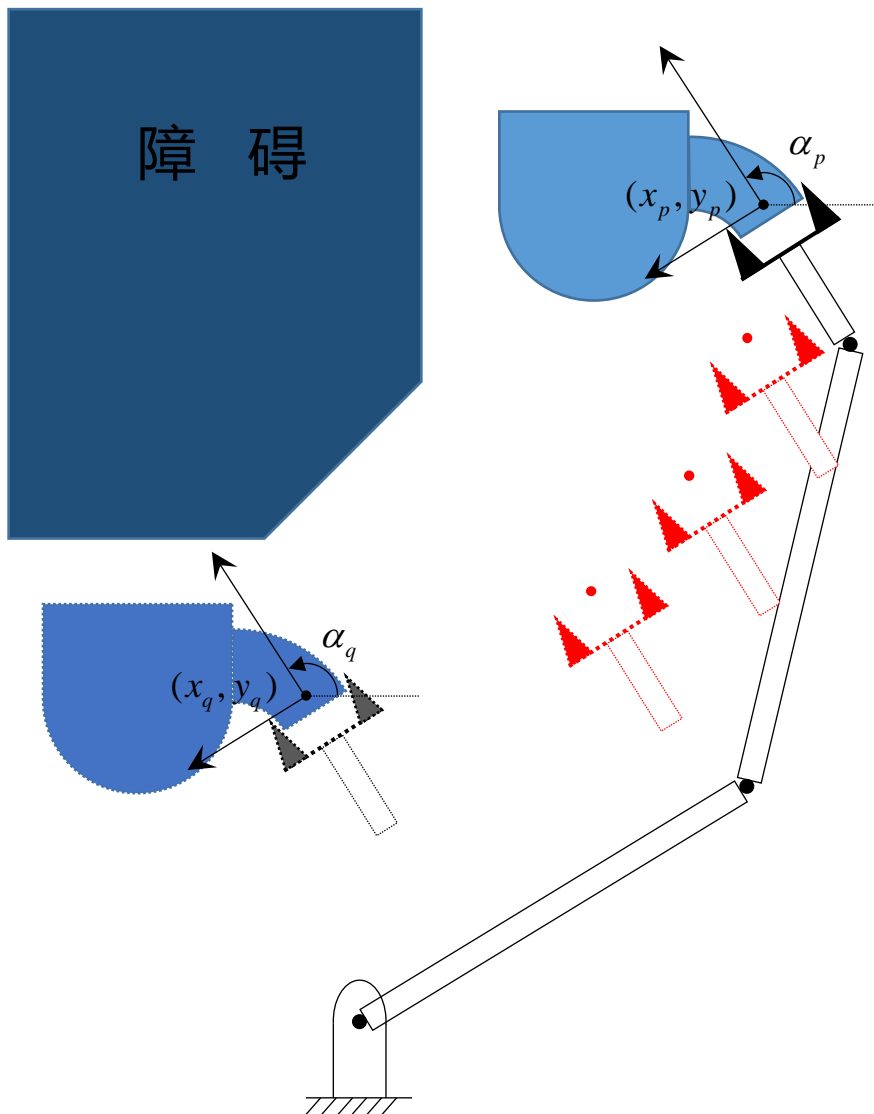


机器人建模与控制

第6章 机器人轨迹规划

6.1 路径与轨迹



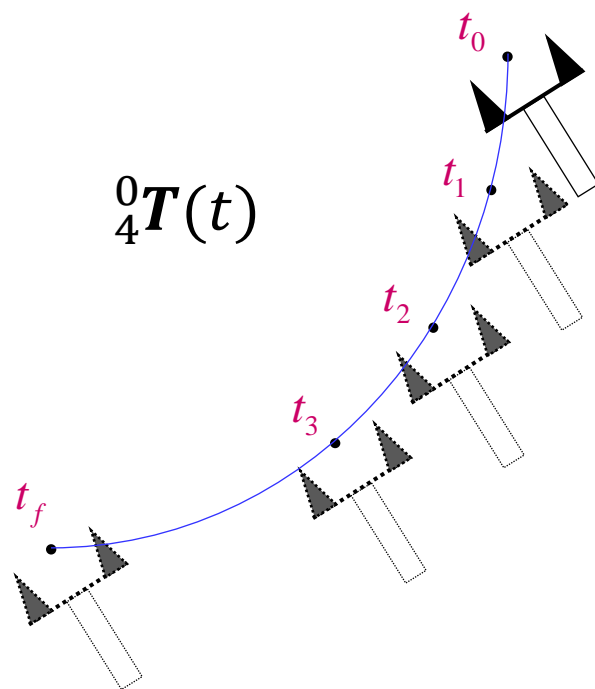
- 机器人将盛满水的杯子由 P 移到 Q
- 因存在障碍物，机器人末端不能简单地沿直线段 PQ 移动，而是需要绕过障碍物，例如沿图中的一系列红点移动
- 移动过程中，机器人末端的姿态需要保持不变（姿态角 α 恒定）
- 末端位姿形成了笛卡尔空间中

$$\text{以 } {}^0_4T_P = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & x_p \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & y_p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 为首、}$$

$$\text{以 } {}^0_4T_Q = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & x_q \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & y_q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 为尾}$$

的位形序列，即笛卡尔空间路径

6.1 路径与轨迹



- 笛卡尔空间路径是运动的纯几何描述，与时间无关
- **笛卡尔空间轨迹** $[x(t), y(t), \alpha(t)]^T$ 则是指定了时间律的笛卡尔空间曲线
- 笛卡尔空间轨迹不仅包含机器人末端位姿信息，还包含速度和加速度信息
- 通过逆运动学，可以将笛卡尔空间路径和笛卡尔空间轨迹分别变换为**关节空间路径**和**关节空间轨迹**

6.1 路径与轨迹



- **路径**：机器人位形的一个特定序列，而不考虑机器人位形的时间因素
- **轨迹**：与何时到达路径中的每个部分有关，强调了时间性和连续性
- 轨迹规划问题与数值分析中的**函数插值问题**有密切的联系，不少插值算法在机器人轨迹规划中得到应用
- 通常期望机器人的运动是**平滑**的，为此，要求关节空间轨迹是一个**连续的**且具有**连续一阶导数**的**光滑**函数，有时还希望**二阶导数**也是**连续的**
- 在某些轨迹规划问题中，对路径点的**速度或加速度**也有给定值

6.2 关节空间规划方法

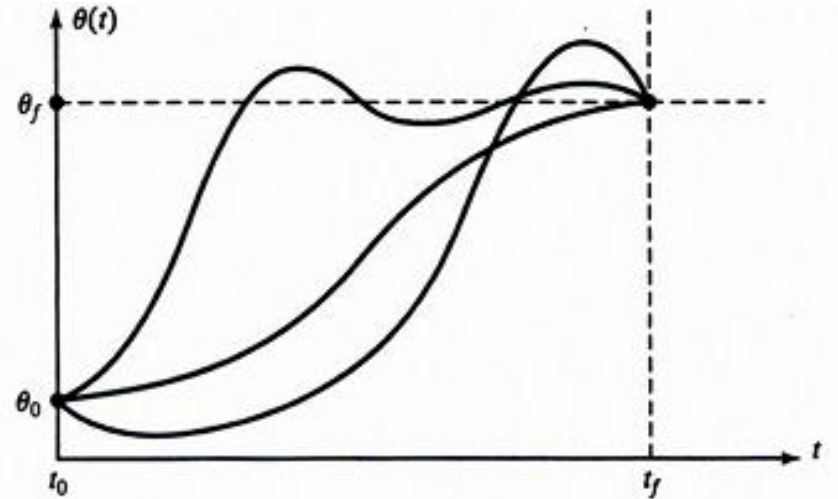


- 以关节角的函数来描述轨迹的轨迹生成方法
- 机械臂运动轨迹的每个路径点通常是用**工具坐标系**相对于**工作台坐标系**的期望位姿来确定的
- 通过**逆运动学**方法，我们可以将每个路径点转化为一组期望的关节变量，从而设计出一系列光滑函数，按照这些函数变化的关节变量确保机器人运动轨迹经过各路径点并最终达到目标点
- 要求所有关节**同时达到**相应的关节变量期望值，以在笛卡尔空间中获得工具坐标系的预期路径点

6.2 关节空间规划方法

6.2.1 三次多项式

- 对某个关节，要求在 t_0 时刻的初始角度为 ϕ_0 ，在 t_f 时刻的目标角度为 ϕ_f
- 有无数条光滑曲线 $\phi(t)$ 符合上述要求



- 为获得一条确定的光滑运动曲线，至少需要对 $\phi(t)$ 施加四个约束条件

$$\phi(0) = \phi_0, \phi(t_f) = \phi_f, \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0, \dot{\phi}(t_f) = \dot{\phi}_f$$

- 这些约束条件唯一确定了一个三次多项式 $\phi(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$

6.2 关节空间规划方法

6.2.1 三次多项式

- 联立求解4个方程，得到4个未知的数值，便可算出任意时刻的关节位置，控制器据此驱动关节到达所需的位置

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\dot{\phi}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\phi_0 = a_0$$

$$\phi_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3$$

$$\dot{\phi}_0 = a_1$$

$$\dot{\phi}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2$$

$$a_0 = \phi_0, a_1 = \dot{\phi}_0, a_2 = -\frac{3\phi_0 - 3\phi_f + 2\dot{\phi}_0 t_f + \dot{\phi}_f t_f}{t_f^2}, a_3 = \frac{2\phi_0 - 2\phi_f + \dot{\phi}_0 t_f + \dot{\phi}_f t_f}{t_f^3}$$

- 尽管每一关节是用同样步骤分别进行轨迹规划的，但所有关节自始至终都是同步驱动

6.2 关节空间规划方法

6.2.1 三次多项式

$$a_0 = \phi_0, a_1 = \dot{\phi}_0, a_2 = -\frac{3\phi_0 - 3\phi_f + 2\dot{\phi}_0 t_f + \dot{\phi}_f t_f}{t_f^2}, a_3 = \frac{2\phi_0 - 2\phi_f + \dot{\phi}_0 t_f + \dot{\phi}_f t_f}{t_f^3}$$

- **例6-1:**考虑机器人的某一关节，要求在1秒内关节角从 10° 运动到 45° 。要求关节从静止状态开始运动，并终止在静止状态。给出满足以上要求的三次多项式。

已知 $\phi_0 = 10$, $\phi_f = 45$, $\dot{\phi}_0 = 0$, $\dot{\phi}_f = 0$, $t_f = 1$, 可求得:

$$a_0 = 10, a_1 = 0, a_2 = 105, a_3 = -70 \quad \longrightarrow \quad \phi(t) = 10 + 105t^2 - 70t^3$$

6.2 关节空间规划方法

6.2.2 五次多项式

- 三次多项式可以指定 t_0 ($= 0$)和 t_f 时刻关节角度和速度，如果需要同时指定 t_0 和 t_f 时刻关节角的加速度，则可以采用五次多项式来规划轨迹：

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$\dot{\phi}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$

$$\ddot{\phi}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

6.2 关节空间规划方法

6.2.2 五次多项式

- 方程组及求解结果

$$\phi_0 = a_0$$

$$\phi_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5$$

$$\dot{\phi}_0 = a_1$$

$$\dot{\phi}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4$$

$$\ddot{\phi}_0 = 2a_2$$

$$\ddot{\phi}_f = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3$$

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$\dot{\phi}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$

$$\ddot{\phi}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

$$a_0 = \phi_0$$

$$a_1 = \dot{\phi}_0$$

$$a_2 = \frac{\ddot{\phi}_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{20\phi_f - 20\phi_0 - (8\dot{\phi}_f + 12\dot{\phi}_0)t_f - (3\ddot{\phi}_0 - \ddot{\phi}_f)t_f^2}{2t_f^3}$$

$$a_4 = \frac{30\phi_0 - 30\phi_f + (14\dot{\phi}_f + 16\dot{\phi}_0)t_f + (3\ddot{\phi}_0 - 2\ddot{\phi}_f)t_f^2}{2t_f^4}$$

$$a_5 = \frac{12\phi_f - 12\phi_0 - (6\dot{\phi}_f + 6\dot{\phi}_0)t_f - (\ddot{\phi}_0 - \ddot{\phi}_f)t_f^2}{2t_f^5}$$

6.2 关节空间规划方法

6.2.2 五次多项式

- **例6-2:**考虑机器人的某一关节，要求在1秒内关节角从 10° 运动到 45° 。要求关节从静止状态开始运动，并终止在静止状态。同时要求初始加速度和终止加速度均为 $0^\circ/\text{s}^2$ 。给出满足以上要求的五次多项式。

已知 $\phi_0 = 10$, $\phi_f = 45$, $\dot{\phi}_0 = 0$, $\dot{\phi}_f = 0$, $\ddot{\phi}_0 = 0$, $\ddot{\phi}_f = 0$, $t_f = 1$, 可求得:

$$a_0 = 10, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 350, a_4 = -525, a_5 = 210$$

从而求得五次多项式

$$\phi(t) = 10 + 350t^3 - 525t^4 + 210t^5$$

6.2 关节空间规划方法

6.2.3 考虑关节中间点的三次多项式轨迹

- 通过重复使用三次多项式和五次多项式，可以生成经过关节中间点 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ 的关节角路径
- 使用三次多项式可以指定经过关节中间点的角度和速度
- 使用五次多项式可以指定经过关节中间点的角度、速度和加速度
- 以下讨论以三次多项式为例

$$\phi(t_0) = \phi_0 \quad \phi_0 = a_0$$

$$\phi(t_f) = \phi_f \quad \phi_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3$$

$$\dot{\phi}(t_0) = \dot{\phi}_0 \quad \dot{\phi}_0 = a_1$$

$$\dot{\phi}(t_f) = \dot{\phi}_f \quad \dot{\phi}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2$$

$$a_0 = \phi_0$$

$$a_1 = \dot{\phi}_0$$

$$a_2 = -\frac{3\phi_0 - 3\phi_f + 2\dot{\phi}_0 t_f + \dot{\phi}_f t_f}{t_f^2}$$

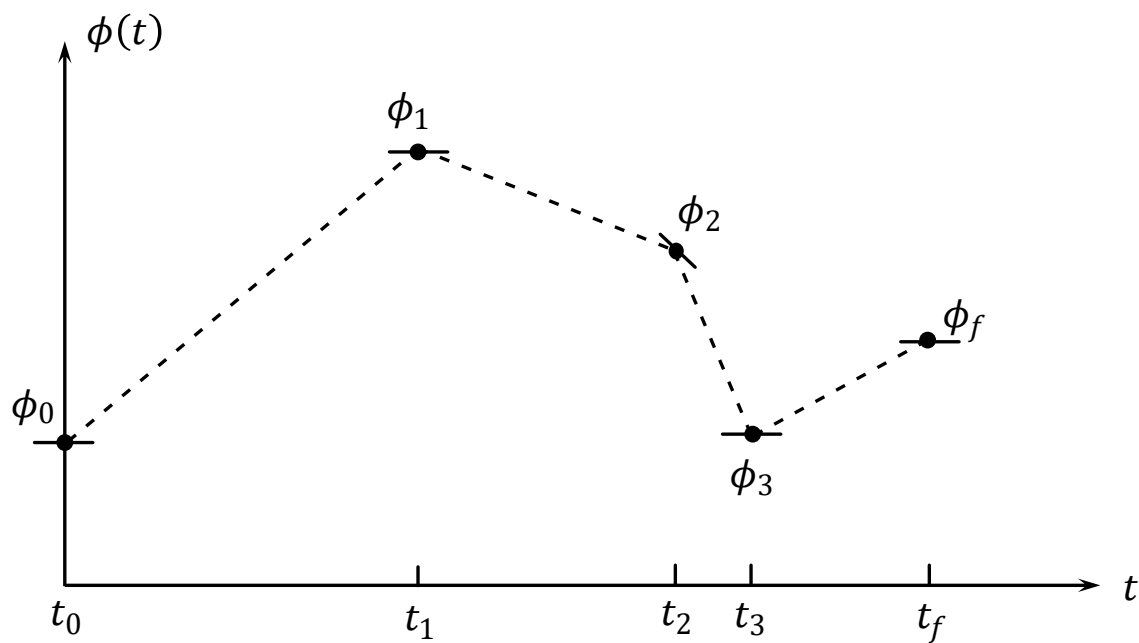
$$a_3 = \frac{2\phi_0 - 2\phi_f + \dot{\phi}_0 t_f + \dot{\phi}_f t_f}{t_f^3}$$

6.2 关节空间规划方法

- 确定中间点的期望关节速度:
- 根据工具坐标系的笛卡尔速度确定中间点的速度。通常可利用在中间点上计算出的操作臂的雅克比逆矩阵, 把中间点的笛卡尔期望速度“映射”为期望的关节速度
- 如果操作臂在某个特定的中间点上处于奇异位形, 则用户将无法在该点处任意指定速度, 所以中间点要尽可能避开奇异位形
- 用户通常难以在中间点给出笛卡尔期望速度

6.2 关节空间规划方法

- 确定中间点的期望关节速度的方法之一：



- 将相邻的关节中间点用直线相连，则该直线的斜率就是两个相邻关节中间点的平均速度
- 如果某一关节中间点前后两段直线的斜率符号相反，则可将该点的速度取为0，如 ϕ_1 和 ϕ_3 处
- 如果某一关节中间点前后两段直线的斜率符号相同，则可将该点的速度取为两者的平均值，如 ϕ_2 处

6.2 关节空间规划方法

- 确定中间点的期望关节速度的方法之二：
- 不直接指定关节中间点处的速度，而是以保证相邻两段三次多项式加速度连续为原则选取三次多项式系数

- 考虑三个相邻的关节中间点，依次为 ϕ_i ， ϕ_j 和 ϕ_k

- 连接 ϕ_i 和 ϕ_j 的三次多项式为

$$\phi_{ij}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, t \in [0, t_{f1}]$$

- 连接 ϕ_j 和 ϕ_k 的三次多项式为

$$\phi_{jk}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3, t \in [0, t_{f2}]$$

- 注意：这里将第二段三次多项式的起始时间定为0，目的是简化系数计算

6.2 关节空间规划方法

$$\phi_{ij}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3, t \in [0, t_{f1}]$$

$$\phi_{jk}(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3, t \in [0, t_{f2}]$$

- 两个三次多项式需要满足如下的条件:

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(0) &= \phi_i \\ \phi_{ij}(t_{f1}) &= \phi_j \\ \phi_{jk}(0) &= \phi_j \\ \phi_{jk}(t_{f2}) &= \phi_k \\ \dot{\phi}_{ij}(0) &= \dot{\phi}_i \\ \dot{\phi}_{jk}(t_{f2}) &= \dot{\phi}_k \\ \dot{\phi}_{ij}(t_{f1}) &= \dot{\phi}_{jk}(0) \\ \ddot{\phi}_{ij}(t_{f1}) &= \ddot{\phi}_{jk}(0)\end{aligned}$$

带入三次多项式可得:



$$\begin{aligned}a_0 &= \phi_i \\ a_0 + a_1t_{f1} + a_2t_{f1}^2 + a_3t_{f1}^3 &= \phi_j \\ b_0 &= \phi_j \\ b_0 + b_1t_{f2} + b_2t_{f2}^2 + b_3t_{f2}^3 &= \phi_k \\ a_1 &= \dot{\phi}_i \\ b_1 + 2b_2t_{f2} + 3b_3t_{f2}^2 &= \dot{\phi}_k \\ a_1 + 2a_2t_{f1} + 3a_3t_{f1}^2 &= b_1 \\ 2a_2 + 6a_3t_{f1} &= 2b_2\end{aligned}$$

求解上述线性方程组即可得到 a_0, a_1, a_2, a_3 和 b_0, b_1, b_2, b_3

6.2 关节空间规划方法

- **例:** 试求解两条三次多项式曲线的系数, 使得两者连成的曲线在中间点处具有连续的加速度, 曲线起点和终点的速度和加速度均为零。

假设起始角为 ϕ_0 , 中间点为 ϕ_v , 目标点为 ϕ_g

第一个三次曲线为 $\phi(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$

第二个三次曲线为 $\phi(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$

在一个时间段内, 每条三次曲线的起始时刻为 $t = 0$, 终止时刻 $t = t_{f_i}$,

其中 $i = 1$ 或 $i = 2$

6.2 关节空间规划方法

$$\phi(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

$$\phi(0) = \phi_0 \quad \phi(t_{f_1}) = \phi_v \quad \dot{\phi}(0) = 0$$

$$\phi(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

$$\phi(0) = \phi_v \quad \phi(t_{f_2}) = \phi_g \quad \dot{\phi}(t_{f_2}) = 0$$

● 方程组及求解结果

$$\phi_0 = a_{10}$$

$$\phi_v = a_{10} + a_{11}t_{f_1} + a_{12}t_{f_1}^2 + a_{13}t_{f_1}^3$$

$$\phi_v = a_{20}$$

$$\phi_g = a_{20} + a_{21}t_{f_2} + a_{22}t_{f_2}^2 + a_{23}t_{f_2}^3$$

$$0 = a_{11}$$

$$0 = a_{21} + 2a_{22}t_{f_2} + 3a_{23}t_{f_2}^2$$

$$a_{11} + 2a_{12}t_{f_1} + 3a_{13}t_{f_1}^2 = a_{21}$$

$$2a_{12} + 6a_{13}t_{f_1} = 2a_{22}$$

速度连续

加速度连续

$$a_{10} = \phi_0$$

$$a_{11} = 0$$

$$a_{12} = \frac{12\phi_v - 3\phi_g - 9\phi_0}{4t_f^2}$$

$$a_{13} = \frac{-8\phi_v + 3\phi_g + 5\phi_0}{4t_f^3}$$

$$a_{20} = \phi_v$$

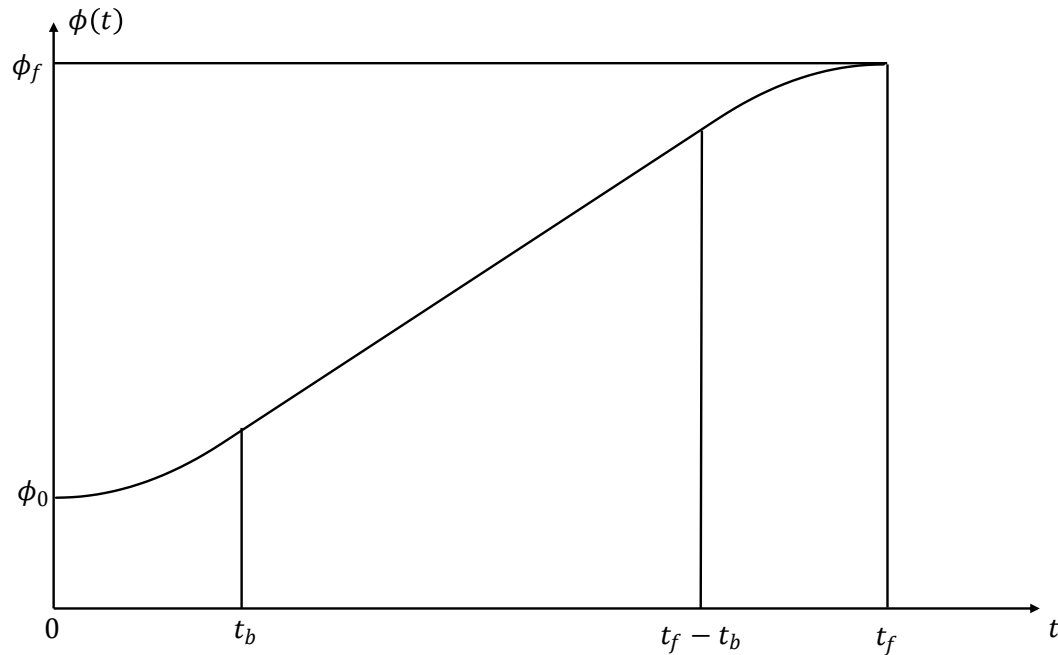
$$a_{21} = \frac{3\phi_g - 3\phi_0}{4t_f}$$

$$a_{22} = \frac{-12\phi_v + 6\phi_g + 6\phi_0}{4t_f^2}$$

$$a_{23} = \frac{8\phi_v - 5\phi_g - 3\phi_0}{4t_f^3}$$

6.2 关节空间规划方法

6.2.4 带抛物线过渡的直线段

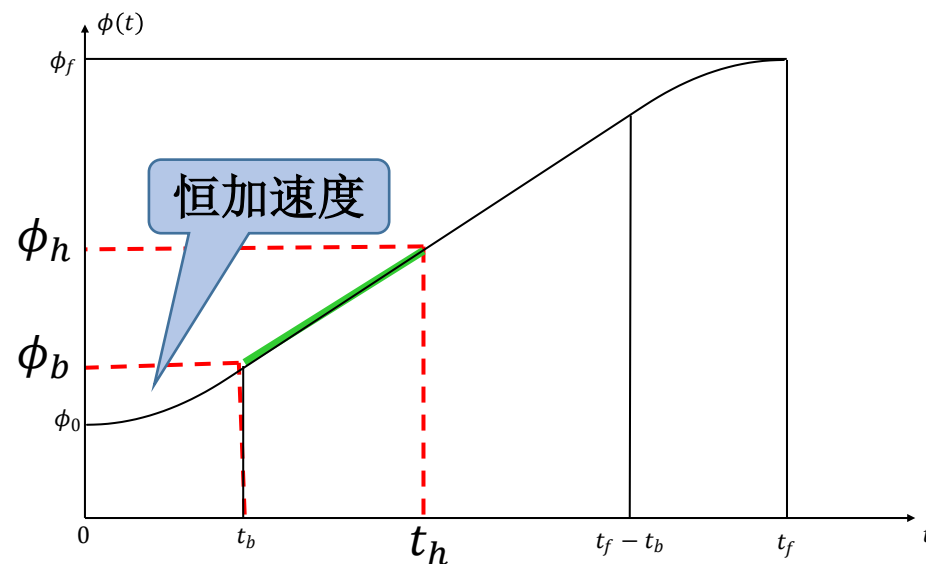


- 轨迹中间段为直线，使机器人关节以恒定速度在起点和终点位置之间运动
- 为使起点和终点处速度连续，起点和终点附近区域用抛物线进行过渡，在过渡区域内加速度恒定
- 以下讨论假设起点和终点的速度为零

6.2 关节空间规划方法



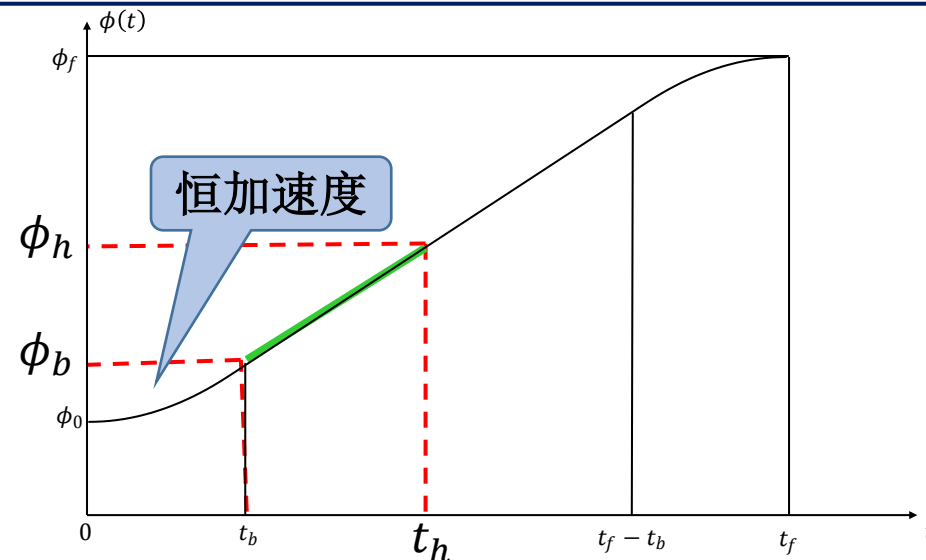
- 假设两端的抛物线具有相同的持续时间，采用相同的恒定加速度（符号相反）



- 存在多个解，每个结果都对称于时间中点 t_h 和位置中点 ϕ_h
- 拟合区段终点的速度必须等于直线段的速度，即 $\dot{\phi}t_b = \frac{\phi_h - \phi_b}{t_h - t_b}$
- 其中， $\phi_b = \phi_0 + \frac{1}{2}\ddot{\phi}t_b^2$ 是抛物线终点的 ϕ 值， $\ddot{\phi}$ 是抛物线的加速度
- 考虑时间中点 $t_h = t_f/2$ 及位置中点 $\phi_h = (\phi_0 + \phi_f)/2$ ，代入上式有

$$\ddot{\phi}t_b^2 - \ddot{\phi}t_ft_b + (\phi_f - \phi_0) = 0$$

6.2 关节空间规划方法



- 解一元二次方程 $\ddot{\phi}t_b^2 - \ddot{\phi}t_ft_b + (\phi_f - \phi_0) = 0$

$$t_b = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\phi}^2 t_f^2 - 4\ddot{\phi}(\phi_f - \phi_0)}}{2\ddot{\phi}}$$

- 上述解存在的条件是 $\ddot{\phi}$ 足够大, 满足:

$$\ddot{\phi} \geq \frac{4(\phi_f - \phi_0)}{t_f^2}$$

6.2 关节空间规划方法

- **例6-3:**考虑机器人的某一关节，要求在5秒内关节角从 10° 运动到 50° 。要求关节从静止状态开始运动，并终止在静止状态。过渡段的加速度幅值为 $10^\circ/\text{s}^2$ ，给出满足以上要求的带抛物线过渡的直线段。

- 已知 $\phi_0 = 10$, $\phi_f = 50$, $\ddot{\phi} = 10$, $\dot{\phi}_0 = 0$, $\dot{\phi}_f = 0$, $t_f = 5$, 可求得:

$$t_b = \frac{\ddot{\phi}t_f - \sqrt{\ddot{\phi}^2t_f^2 - 4\ddot{\phi}(\phi_f - \phi_0)}}{2\ddot{\phi}} = \frac{10 \times 50 - \sqrt{10^2 \times 5^2 - 4 \times 10 \times (50 - 10)}}{2 \times 10} = 1$$

- [0,1]段的抛物线:

$$\phi(t) = 10 + 5t^2$$

- [1,4]段的直线方程:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= 15 + 10 \times (t - 1) \\ &= 5 + 10t\end{aligned}$$

- [4,5]段的抛物线:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= 50 - 5(5 - t)^2 \\ &= 50 - 5(25 - 10t + t^2) \\ &= -75 + 50t - 5t^2\end{aligned}$$

6.2 关节空间规划方法

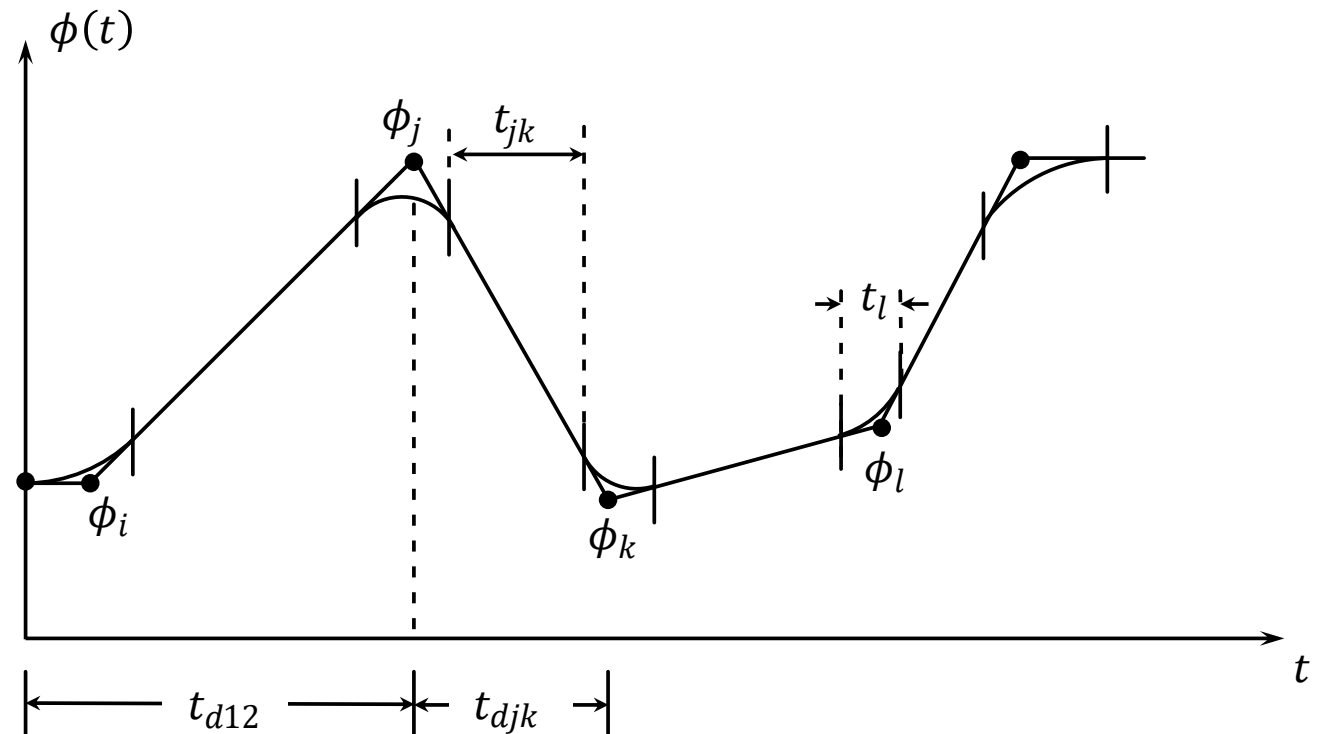
6.2.5 考虑关节中间点的带抛物线过渡的直线段

- 前面的方法要求初始速度和最终速度均为零。如果路径要求过中间点，则运动轨迹段有多个。机械臂运动到第一个运动段末端后，还将向下一点运动，速度并不为零，否则，机械臂将表现为时走时停的状态
- 在各运动段之间运用抛物线过渡时，使用相邻点的位置和时间间隔等边界条件计算运动段的速度，设定加速度的大小，计算抛物线拟合的时间，从而得到运动段的轨迹。重复这一过程直至计算出所有运动段并达到终点
- 注意：需检验加速度值是否超过限定

6.2 关节空间规划方法

- 用 j, k 和 l 表示三个相邻的路径点
- 位于路径点 k 处的拟合区段的时间间隔为 t_k
- 位于点 j 和 k 之间的直线段的时间间隔为 t_{jk}
- 点 j 和 k 之间总的的时间间隔为 t_{djk}
- 直线段的速度为 $\dot{\phi}_{jk}$
- 点 j 处拟合区段的加速度为 $\ddot{\phi}_j$

存在许多可能解，这取决于
每个拟合区段的加速度值



6.2 关节空间规划方法

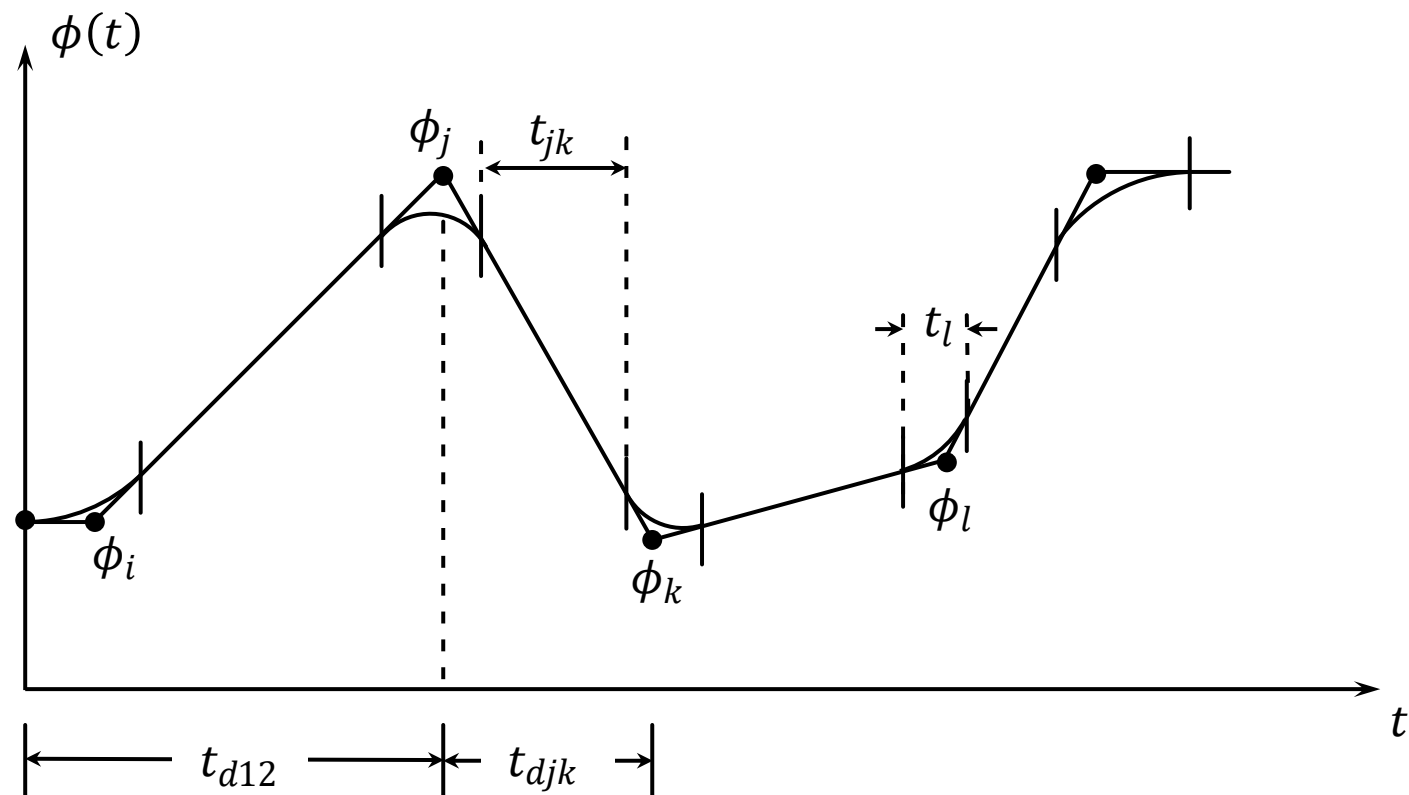
- 对于内部路径点，由加速度绝对值计算各时长的公式：

$$\dot{\phi}_{jk} = \frac{\phi_k - \phi_j}{t_{djk}}$$

$$\ddot{\phi}_k = \text{SGN}(\dot{\phi}_{kl} - \dot{\phi}_{jk})|\ddot{\phi}_k|$$

$$t_k = \frac{\dot{\phi}_{kl} - \dot{\phi}_{jk}}{\ddot{\phi}_k}$$

$$t_{jk} = t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k$$

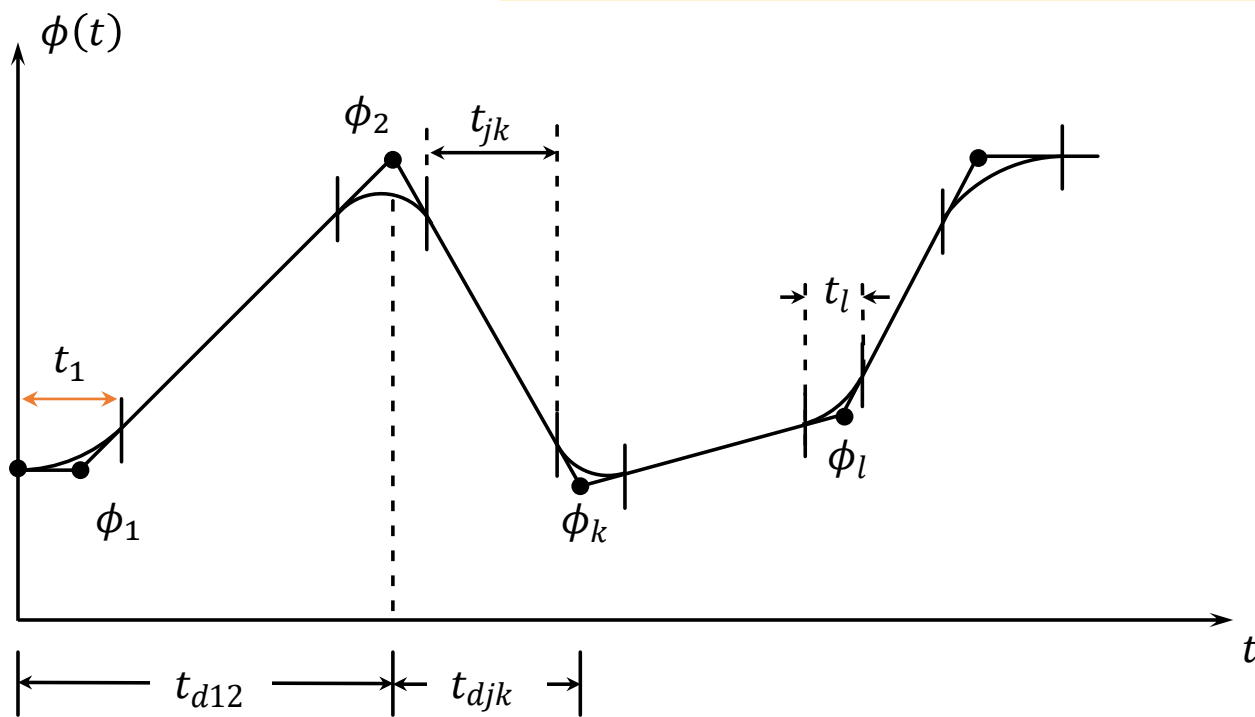


6.2 关节空间规划方法

- 对于第一个路径段，由 $\frac{\phi_2 - \phi_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} = \ddot{\phi}_1 t_1$ ，取 $\ddot{\phi}_1 = \text{SGN}(\phi_2 - \phi_1)|\ddot{\phi}_1|$

- 可计算得到

$$t_1 = t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\phi_2 - \phi_1)}{\ddot{\phi}_1}}$$



- 进而

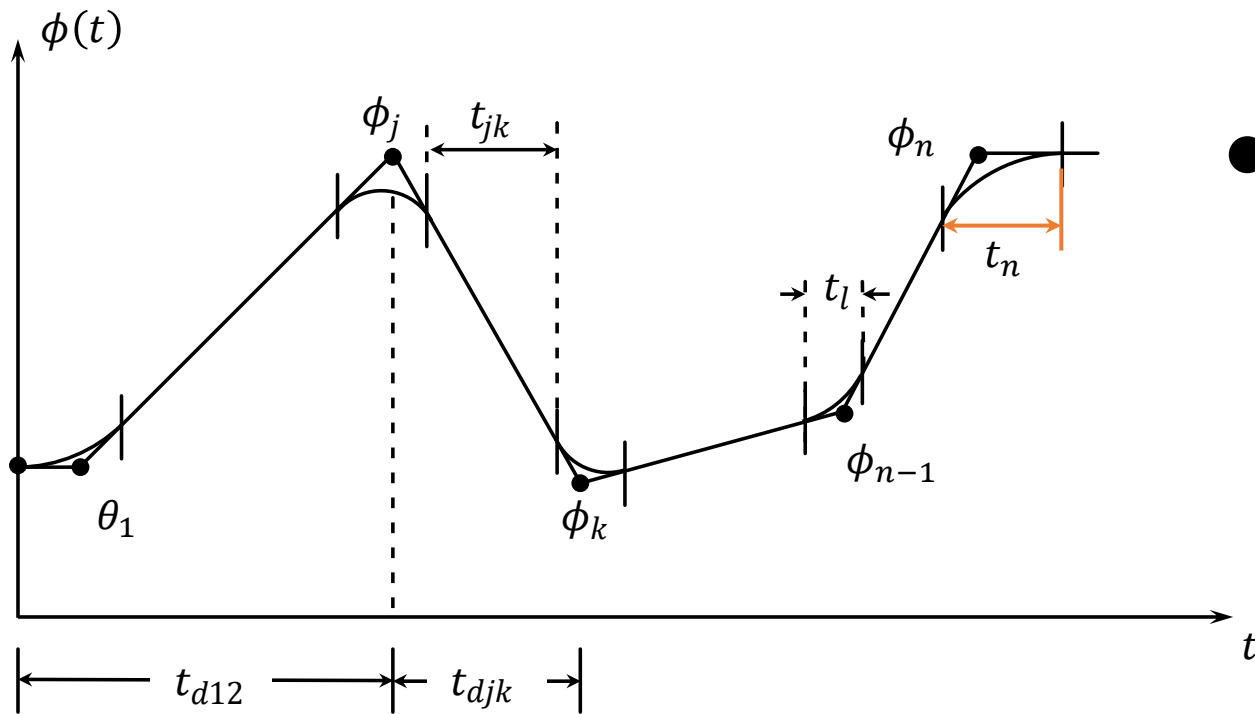
$$\dot{\phi}_{12} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1}$$

$$t_{12} = t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2}t_2$$

6.2 关节空间规划方法

- 对于最后一个路径段，同样由 $\ddot{\phi}_n = \text{SGN}(\phi_{n-1} - \phi_n) |\ddot{\phi}_n|$ 和 $\frac{\phi_{n-1} - \phi_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} = \ddot{\phi}_n t_n$

- 可计算得到
$$t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 - \frac{2(\phi_n - \phi_{n-1})}{\ddot{\phi}_n}}$$



- 进而

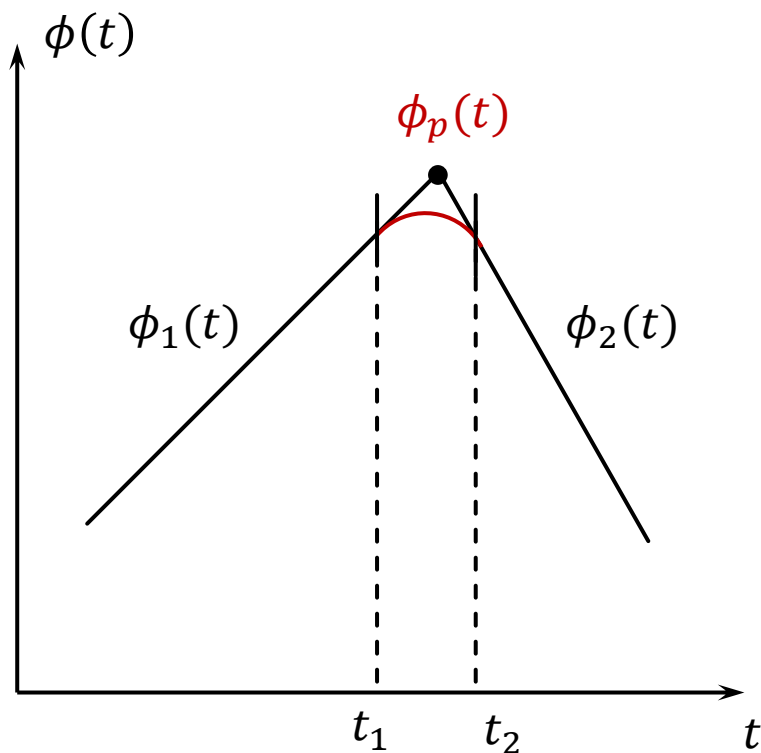
$$\dot{\phi}_{(n-1)n} = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n}$$

$$t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2}t_{n-1}$$

6.2 关节空间规划方法

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{jk} &= \frac{\phi_k - \phi_j}{t_{djk}} \\ \ddot{\phi}_k &= \text{SGN}(\dot{\phi}_{kl} - \dot{\phi}_{jk})|\ddot{\phi}_k| \\ t_k &= \frac{\dot{\phi}_{kl} - \dot{\phi}_{jk}}{\ddot{\phi}_k} \\ t_{jk} &= t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$?

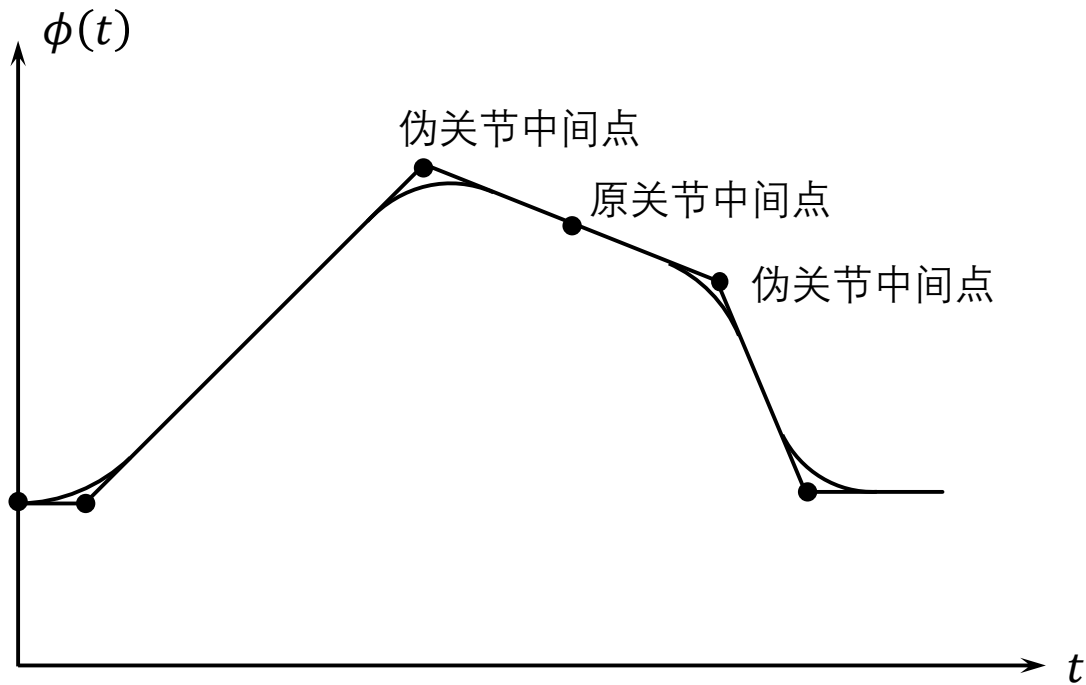


- 考虑抛物线 $\phi_p(t) = \frac{1}{2}a(t - t_a)^2 + \phi_a$
- 直线 $\phi_1(t)$ 与 $\phi_p(t)$ 交于 t_1 , 有
$$\phi_1(t) = a(t_1 - t_a)(t - t_1) + \phi_p(t_1)$$
- 直线 $\phi_2(t)$ 与 $\phi_p(t)$ 交于 t_2 , 有
$$\phi_2(t) = a(t_2 - t_a)(t - t_2) + \phi_p(t_2)$$
- 两式联立可解得 $\phi_1(t)$ 与 $\phi_2(t)$ 相交于

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

6.2 关节空间规划方法

- 多数带有抛物线连接的直线样条曲线并没有经过那些中间点
- 选取加速度足够大，则实际路径与期望的中间点非常接近



- 若希望操作臂精确经过某中间点，将该点替换为位于其两侧的两个伪中间点，该点在连接两个伪中间点的直线段上，计算仍用前面的公式

6.2 关节空间规划方法

- **例6-4:**考虑机器人的某一关节，指定以下关节路径点：30，45，55，30（单位：度）。各路径段的持续时间分别为3，1，2（单位：秒）。过渡段加速度幅值为 $50^\circ/\text{s}^2$ 。计算各路径段的速度、过渡段时间间隔以及直线段时间间隔。

- （1）过渡段1和直线段12:

过渡段加速度: $\ddot{\phi}_1 = \text{SGN}(45 - 30) \times 50 = 50^\circ/\text{s}^2$

过渡段持续时间: $t_1 = 3 - \sqrt{9 - \frac{2(45-30)}{50}} = 0.101\text{s}$

直线段速度: $\dot{\phi}_{12} = \frac{45-30}{3-0.5 \times 0.101} = 5.09^\circ/\text{s}$

直线段时间间隔: $t_{12} = 3 - 0.101 - \frac{1}{2}t_2 = 2.8499\text{s}$ （这里 t_2 来自下面路径段2的计算）

6.2 关节空间规划方法

(2) 过渡段2、直线段23、过渡段3

直线段23速度: $\dot{\phi}_{23} = \frac{55-45}{1} = 10^\circ/\text{s}$

过渡段2加速度: $\ddot{\phi}_2 = \text{SGN}(10 - 5.09) \times 50^\circ/\text{s}^2 = 50^\circ/\text{s}^2$

过渡段2持续时间: $t_2 = \frac{\dot{\phi}_{23} - \dot{\phi}_{12}}{\ddot{\phi}_2} = \frac{10 - 5.09}{50} = 0.0982\text{s}$

过渡段3加速度: $\ddot{\phi}_3 = \text{SGN}(-13.398 - 10) \times 50^\circ/\text{s}^2 = -50^\circ/\text{s}^2$

过渡段3持续时间: $t_3 = \frac{-13.398 - 10}{-50} = 0.468\text{s}$

直线段23间隔时间: $t_{23} = 1 - 0.5 \times 0.0982 - 0.5 \times 0.468 = 0.7169\text{s}$

(3) 直线段34和过渡段4

过渡段4加速度: $\ddot{\phi}_4 = \text{SGN}(30 - 55) |\ddot{\phi}_4|^\circ/\text{s}^2 = -50^\circ/\text{s}^2$

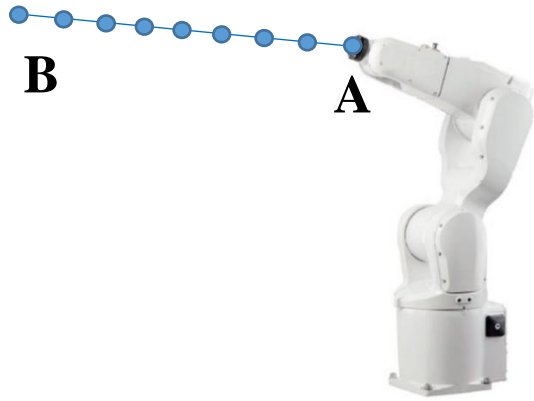
过渡段4时间间隔: $t_4 = 2 - \sqrt{4 - \frac{2(30-55)}{-50}} = 0.268\text{s}$

直线段34速度: $\dot{\phi}_{34} = \frac{30-55}{2-0.5 \times 0.268} = -13.398^\circ/\text{s}$

直线度34时间间隔: $t_{34} = 2 - 0.268 - 0.5 \times 0.468 = 1.498\text{s}$

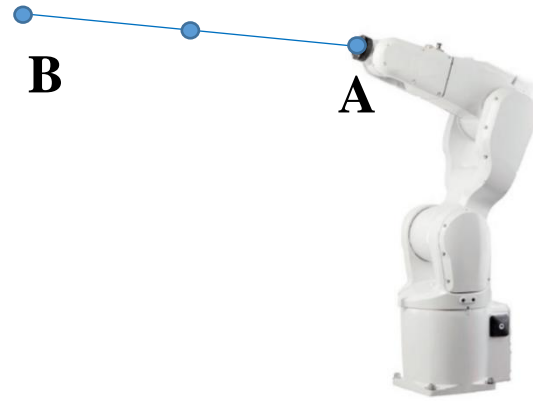
6.3 笛卡儿空间轨迹规划

6.3.1 笛卡儿直线运动



指定一系列中间点

常见的轨迹包括了直线。其他还有圆弧、正弦等形状



直线插值

线性插补：

- 位置分量（XYZ）三方向线性变化。
- 姿态分量，如采用旋转矩阵方式描述每个中间点，那么将无法进行线性插补



6.3 笛卡儿空间轨迹规划

6.3.1 笛卡儿直线运动

- 以笛卡尔空间中机器人末端沿直线运动为例，给定末端的初始位姿 $T(0)$ 和终止位姿 $T(1)$ ，即

$$\begin{bmatrix} R(0) & P(0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} R(1) & P(1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 初始位置 $P(0) = [x_0, y_0, z_0]^T$ 以及终止位置 $P(1) = [x_1, y_1, z_1]^T$

- 期望找出中间位姿

$$T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & P(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $t \in [0,1]$ （注意这里的起止时间做了归一化）
- 机器人末端在笛卡尔空间中沿直线从 $P(0)$ 运动 $P(1)$ ，同时姿态从 $R(0)$ 平滑变化到 $R(1)$

6.3 笛卡儿空间轨迹规划

6.3.1 笛卡儿直线运动

- 对于末端位置轨迹 $P(t)$ ，可以运用前面的多项式或带抛物线过渡直线段的插值方法来获得
- 但这种方法不能直接用于对 $R(t)$ 进行插值，因为插值得到的矩阵一般不满足旋转矩阵的性质
- 解决这一问题的一种方法是采用等效轴角表示姿态
- 姿态的等效轴角描述方法只需要3个数

$$K = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \hat{k}_x \\ \hat{k}_y \\ \hat{k}_z \end{bmatrix}$$

- $[\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{k}_z]^T$: 等效单位转动轴
- θ : 绕该轴的转动量

- 可以对等效轴角表示的三个数运用前面的插值方法来获得其轨迹

6.3 笛卡儿空间轨迹规划

6.3.1 笛卡儿直线运动

- 注意：等效轴角表示并不唯一。举例来说，

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450^\circ \\ 900^\circ \\ 1350^\circ \end{bmatrix} / \sqrt{14}$$

- 表示围绕空间 $[1, 2, 3]^T / \sqrt{14}$ 轴旋转 450° 获得的姿态
- 该最终姿态也等于绕同一轴旋转 $450 + 360n$ 度的结果
- n : 任意整数



6.3 笛卡儿空间轨迹规划

6.3.1 笛卡儿直线运动

- 对两个等效轴角表示的姿态 $K_0 = \begin{bmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0z} \end{bmatrix}$ 和 $K_1 = \begin{bmatrix} k_{1x} \\ k_{1y} \\ k_{1z} \end{bmatrix}$ 插值时，遵循如下的选取规则：
 - 插值时，通常应该选择使得 $\left\| \begin{bmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0z} \end{bmatrix} - (\theta + 360n) \begin{bmatrix} \hat{k}_{1x} \\ \hat{k}_{1y} \\ \hat{k}_{1z} \end{bmatrix} \right\|$ 最小的 n
 - 然后对 $\begin{bmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0z} \end{bmatrix}$ 和 $(\theta + 360n) \begin{bmatrix} \hat{k}_{1x} \\ \hat{k}_{1y} \\ \hat{k}_{1z} \end{bmatrix}$ 运用前面的多项式或带抛物线过渡直线段等插值方法

6.3 笛卡尔空间轨迹规划

6.3.2 姿态的四元数插值

- 笛卡尔空间中对姿态还可以采用如下的四元数插值
- 前面知识： S^3 中的单位四元数数 $\eta + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3$ 与 \mathbb{U} 中的欧拉参数 $[\eta \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T$ 一一对应
- 考虑两个用欧拉参数（等价于用单位四元数）表示的不同姿态：

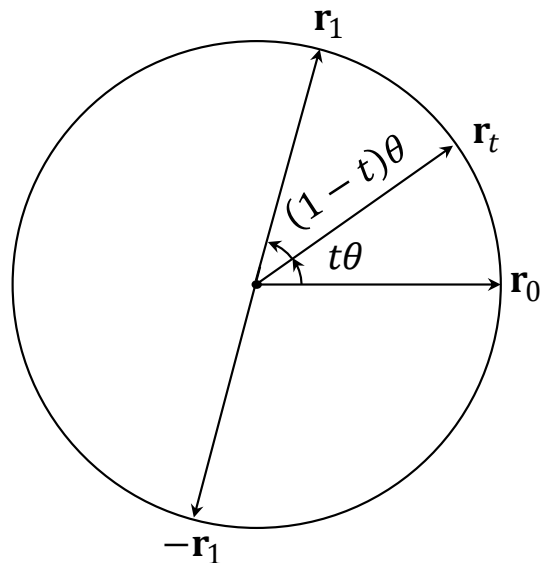
$$\mathbf{r}_0 = [\eta \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T$$

$$\mathbf{r}_1 = [\xi \quad \delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3]^T$$

- $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}_1$ 且 $\mathbf{r}_0 \neq -\mathbf{r}_1$
- 四元数插值目的：找出中间姿态 \mathbf{r}_t ， $t \in [0,1]$ ，使得 \mathbf{r}_0 平滑过渡到 \mathbf{r}_1
- 注意：这里起止时间 t 作了归一化

6.3 笛卡儿空间轨迹规划

6.3.2 姿态的四元数插值



- r_0 和 r_1 确定了 \mathbb{R}^4 中的一个平面，该平面上的任何一个元素（四维向量）都可以表示为 r_0 和 r_1 的线性组合
- 在该平面中，向量 r_0 、 r_1 和 $r_0 - r_1$ 构成一个三角形，对于 r_0 和 r_1 的夹角 θ ，由余弦定理，有

$$2\|r_0\|\|r_1\|\cos\theta = \|r_0\|^2 + \|r_1\|^2 - \|r_0 - r_1\|^2$$

- 注意到 $\|r_0\| = \|r_1\| = 1$

$$\begin{aligned}\|r_0 - r_1\|^2 &= (\eta - \xi)^2 + (\varepsilon_1 - \delta_1)^2 + (\varepsilon_2 - \delta_2)^2 + (\varepsilon_3 - \delta_3)^2 \\ &= (\eta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + (\xi^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) - 2(\eta\xi + \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \varepsilon_3\delta_3) \\ &= \|r_0\|^2 + \|r_1\|^2 - 2r_0 \cdot r_1\end{aligned}$$

- 于是，两个欧拉参数的内积等于它们夹角的余弦值， $r_0 \cdot r_1 = \cos\theta$

6.3 笛卡儿空间轨迹规划

6.3.2 姿态的四元数插值

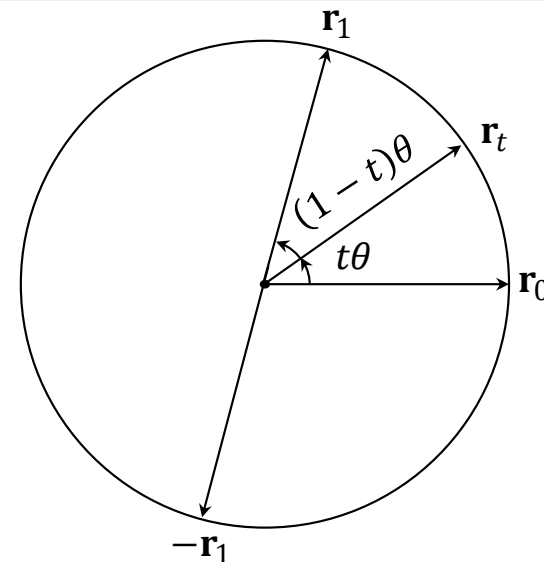
- 将中间姿态 r_t 限制在 r_0 和 r_1 确定的平面中并假设匀速转动
- 四元数插值问题化为一个简单的平面几何问题： r_0 、 r_1 和 r_t 都在平面单位圆上， r_t 从 r_0 匀速旋转到 r_1
- 由于匀速旋转，对于 $t \in [0, 1]$ ， r_0 与 r_t 的夹角是 $t\theta$ ， r_t 与 r_1 的夹角是 $(1-t)\theta$ ，则由欧拉参数内积与夹角余弦值的关系，有

$$r_t \cdot r_1 = \cos((1-t)\theta)$$

$$r_0 \cdot r_t = \cos(t\theta)$$

- 同时， r_t 可以表示为 r_0 和 r_1 的线性组合，即

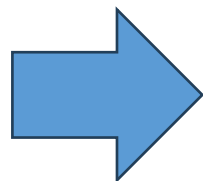
$$r_t = k_0 r_0 + k_1 r_1$$



6.3 笛卡儿空间轨迹规划

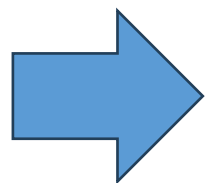
6.3.2 姿态的四元数插值

$$\mathbf{r}_t = k_0 \mathbf{r}_0 + k_1 \mathbf{r}_1$$



$$\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{r}_1 = \cos((1-t)\theta)$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_t = \cos(t\theta)$$



$$\cos(t\theta) = \mathbf{r}_0 \cdot (k_0 \mathbf{r}_0 + k_1 \mathbf{r}_1) = k_0 \|\mathbf{r}_0\|^2 + k_1 \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 = k_0 + k_1 \cos \theta$$

$$\cos((1-t)\theta) = (k_0 \mathbf{r}_0 + k_1 \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_1 = k_0 \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 + k_1 \|\mathbf{r}_1\|^2 = k_0 \cos \theta + k_1$$

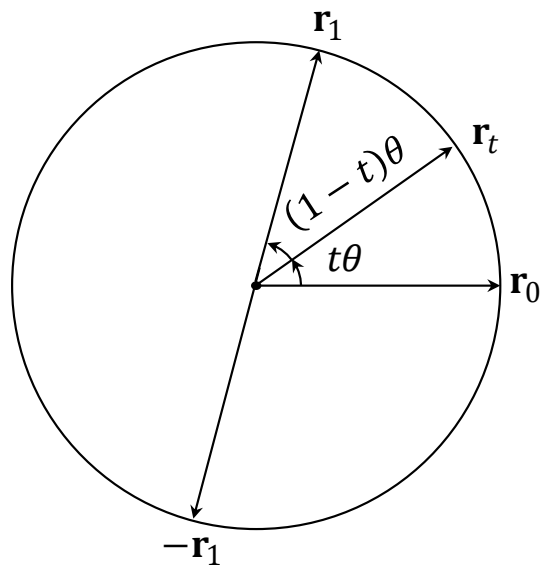
$$\begin{cases} k_0 + k_1 \cos \theta = \cos(t\theta) \\ k_0 \cos \theta + k_1 = \cos((1-t)\theta) \end{cases} \xrightarrow{\text{求解线性方程组}} \begin{aligned} k_0 &= \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin \theta}, k_1 = \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \\ \theta &= \cos^{-1}(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

- 上述插值称为四元数球面线性插值
- Spherical Linear Interpolation, 简称为 **Slerp**

6.3 笛卡儿空间轨迹规划

6.3.2 姿态的四元数插值

- Slerp的钝角处理



- 注意到单位四元数 r 和 $-r$ 表示三维空间中的同一姿态
- 以右图为例：从 r_0 插值到 r_1 跟从 r_0 插值到 $-r_1$ ，最终三维空间姿态是一样的
- 一般应该选取最短路径进行球面线性插值
- 如果两四元数的夹角为钝角，则可通过将其中一个四元数取负，再对得到的两个夹角为锐角的四元数进行球面线性插值

Thanks!