# 自动控制理论
# Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

# 第五章 Chapter 5

# 根轨迹分析法 (Root Locus)

# 第五章主要内容

- 根轨迹概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

# 广义根轨迹

1. 正反馈系统根轨迹(或 K<0)
2. 参数根轨迹
3. 纯滞后系统根轨迹

# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

系统开环传递函数为$G(s)H(s)$，负反馈系统（$K$>0）时：

$$G(s)H(s)=\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)\cdots(s-p_u)}=K[G(s)H(s)]_1=-1$$

- 若系统是正反馈系统，则其特征方程如下：

$$1-G(s)H(s)=0 \Rightarrow G(s)H(s)=1$$

正反馈系统的幅值条件和相角条件为

$$|G(s)H(s)|=1$$ —— 幅值条件

$$\angle G(s)H(s)=0°+h\cdot 360°(h=0,1,2,\cdots)$$

—— 相角条件

# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

比较正反馈系统和负反馈系统的根轨迹，不同之处在于相角条件。

对比

$$\angle G(s)H(s) = 0° + h\cdot 360°(h = 0,1,2,\cdots)$$ —— 正反馈

$$\angle G(s)H(s) = 180° + h\cdot 360°(h = 0,1,2,\cdots)$$ —— 负反馈

对比：正反馈系统根轨迹被称为$0^{o}$ 根轨迹或负参数根轨迹($K$<0)；

负反馈系统根轨迹被称为 $180^{o}$ 根轨迹。

常见零度根轨迹的来源：

1）分子或分母$s$最高次幂的系数为负的因子；

2）控制系统中包含正反馈回路；

由于相角条件不同，所有与相角条件有关的根轨迹绘制法则也就不同。

# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

## ➢ 回顾常规根轨迹的绘制法则

- 规则 1：根轨迹的起点和终点
- 规则 2：根轨迹的分支数、对称性和连续性
- 规则 3：根轨迹的渐近线
- 规则 4：实轴上的根轨迹
- 规则 5：根轨迹的分离点和分离角
- 规则 6：复数极点(或零点)：出射角与入射角
- 规则 7：根轨迹与虚轴的交点
- 规则 8：根轨迹分支的交叉点与非交叉点
- 规则 9：系统根之和守恒

# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

**规则 3：** 当s趋于∞时，根轨迹的渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{2h\pi}{n-w}$$

**规则 4：** 实轴上的根轨迹

若实轴上的搜索点$s$右侧实数零极点数是**偶数**，则该点在根轨迹上

**规则 6：** 复数极点(或零点)：出射角(入射角 )

**出射角**

$$\varphi_{p_k} = 0^\circ + \sum_{j=1}^{w} \angle(p_k - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \angle(p_k - p_i)$$

**入射角**

$$\psi_{z_k} = 0^\circ + \sum_{i=1}^{n} \angle(z_k - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{w} \angle(z_k - z_j)$$

# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

**例 5-13** 开环传递函数$G(s)H(s)$，分别绘制负反馈系统根轨迹和正反馈系统根轨迹，并给出使系统稳定的$K$值范围。

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

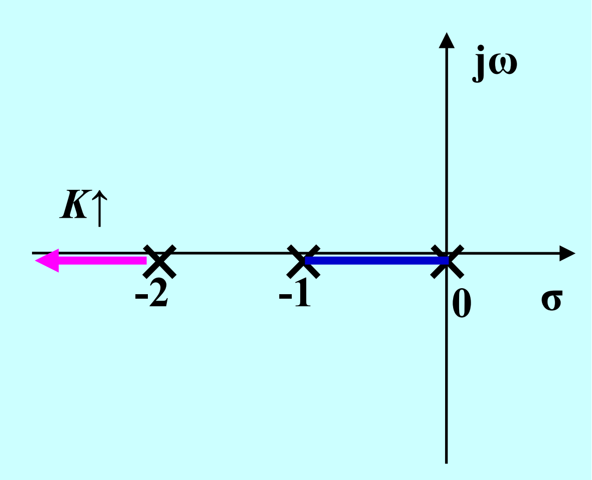
**1. 负反馈系统**

1) 开环极点： $n=3,\quad p_1=0,\quad p_2=-1,\quad p_3=-2$

开环零点： $w=0$

2) 根轨迹由3条分支

3) 实轴上的根轨迹：[-1, 0], (-∞,-2]



# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

4) 渐近线的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180°}{n-w} = \frac{(1+2h)180°}{3} = \pm 60°, 180°$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1+p_2+p_3}{n-w} = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

5) 实轴上[-1， 0]之间的分离点 $d$

$$-K = s^3 + 3s^2 + 2s$$

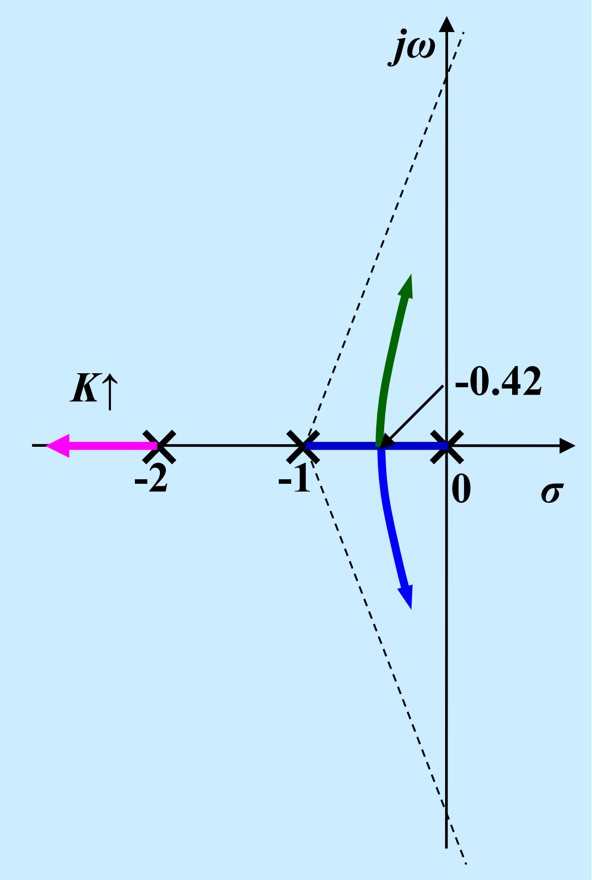
$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d} = 3d^2 + 6d + 2 = 0$$

$$d = -0.42$$

$$d = -1.58$$ （舍弃）

分离角：

$$\frac{(2h+1)180°}{l} = \frac{(2h+1)180°}{2} = \begin{cases} 90° \\ -90° \end{cases}$$



# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

6) 根轨迹与虚轴的交点

特征方程:

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$s = j\omega$代入特征方程

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + K = 0$$

$$\begin{cases} 3\omega^2 = K \\ \omega^3 = 2\omega \end{cases}$$

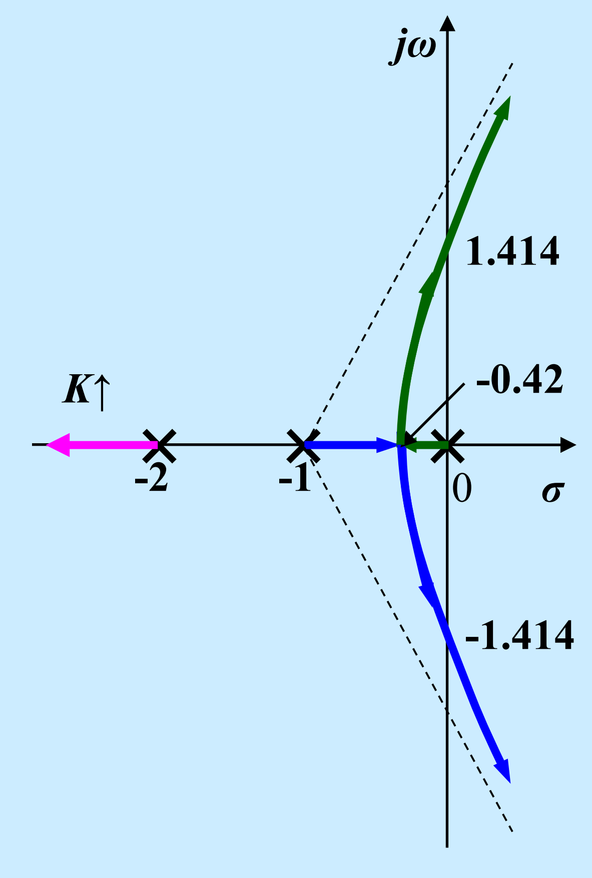
Routh表:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \dfrac{6-K}{3} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

$$\frac{6-K}{3} = 0 \Rightarrow K = 6$$

$$3s^2 + K = 0 \Rightarrow s = \pm j1.414$$

$K > 6$ 时，该系统不稳定



# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

**2. 正反馈系统（或$K$<0）**

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

1) 开环极点： $n=3,\quad p_1=0,\quad p_2=-1,\quad p_3=-2$

开环零点： $w=0$

2) 有三条根轨迹分支

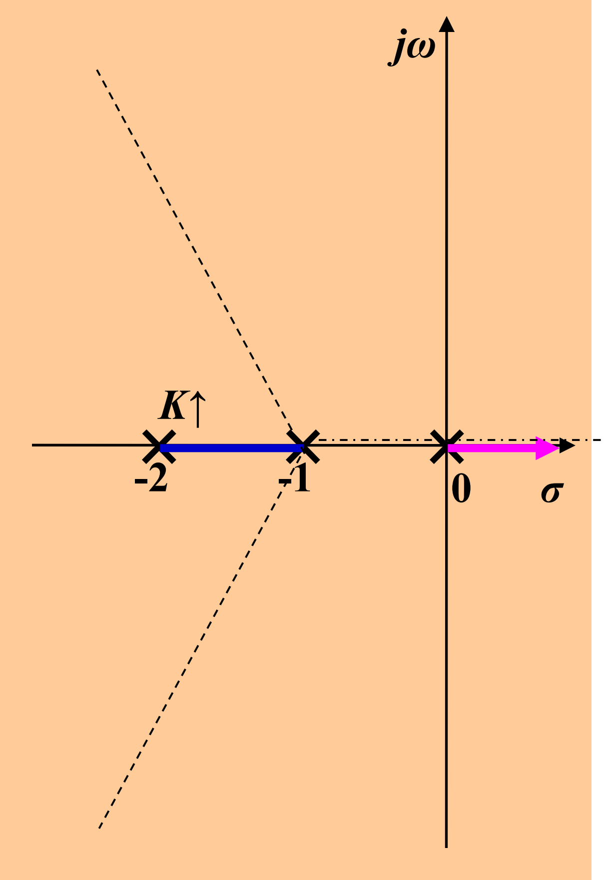
3) 实轴上的根轨迹[0, ∞)，[ -2, -1]

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma=\frac{2h\times180^\circ}{n-w}=\frac{2h\times180^\circ}{3}=\pm120^\circ,0^\circ$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3}{n-w}=\frac{0-1-2}{3}=-1$$



# 广义根轨迹——（1）正反馈根轨迹

5) 实轴上[-2 , -1]间的分离点 $d$

$$-K=s^3+3s^2+2s$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=3d^2+6d+2=0$$

$d=-0.42$ （舍弃）

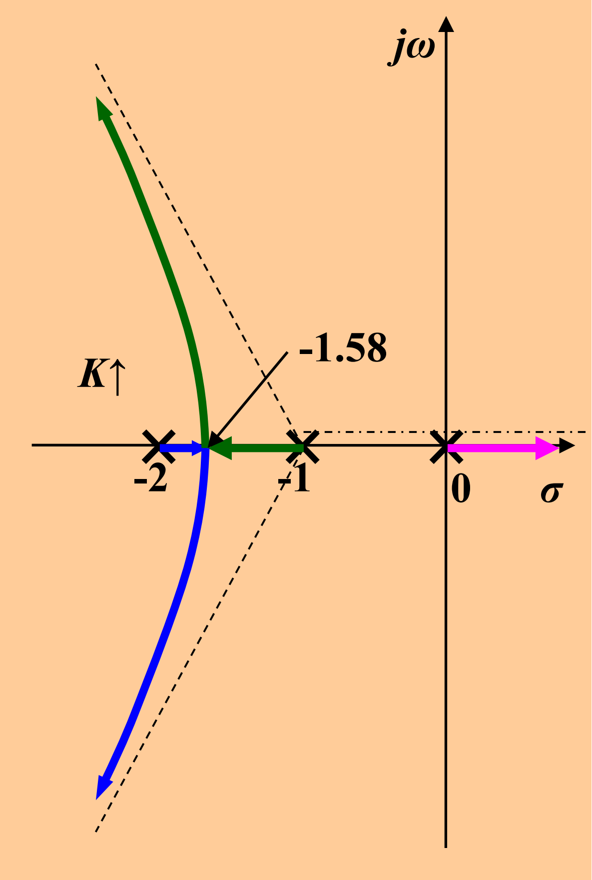
$d=-1.58$

分离角：

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{l}=\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

$K>0$ 时正反馈系统不稳定

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



# 广义根轨迹 ——（2）参数根轨迹

**定义：**

常规根轨迹 —— 闭环系统特征方程的根是根轨迹增益的函数，例如：

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

参数根轨迹 —— 闭环系统特征方程的根是其他参数(非根轨迹增益)的函数，如时间常数 $T$。例如：

$$G(s)H(s)=\frac{2}{s(Ts+1)(s+1)}$$

绘制参数根轨迹的目的 —— 了解闭环系统特征方程的根随其他参数变化的情况。

# 广义根轨迹 ——（2）参数根轨迹

分析方法：引入等效单位反馈系统和等效传递函数概念，然后采用常规根轨迹绘制法则绘制参数根轨迹。闭环特征方程：

$$1+G(s)H(s)=0$$

等效变换

$$A\frac{P(s)}{Q(s)}=-1$$

$A$是除$K$外任意的其他变化参数

$P(s)$和$Q(s)$是与$A$无关的首一多项式

$$Q(s)+AP(s)=1+G(s)H(s)=0$$

等效单位反馈系统的等效开环传递函数：

$$[G(s)H(s)]_e=A\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

# 广义根轨迹 ——（2）参数根轨迹

**参数根轨迹绘制方法：**

写出开环传递函数$G(s)H(s)$

⇩

特征方程$1+G(s)H(s)=0$

⇩

等效开环传递函数$[G(s)H(s)]_e$
（使关注的参数成为根轨迹增益）

⇩

用等效开环传递函数$[G(s)H(s)]_e$ 绘制根轨迹

$$[G(s)H(s)]_e=\frac{A\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

注：这种方法的关键在于寻找“等效” $[G(s)H(s)]_e$，这里的“等效”仅仅是闭环极点相同这一点上成立，而闭环零点一般是不同的，不是闭环传递函数的“等效”。

# 广义根轨迹 ——（2）参数根轨迹

例 5-14 开环传递函数$G(s)H(s)$，绘制参数 $T$（$T>0$）变化时的根轨迹。

$$G(s)H(s)=\frac{2}{s(Ts+1)(s+1)}$$

1) 特征方程：

$$\Delta(s)=s(Ts+1)(s+1)+2$$

$$Ts^2(s+1)+s^2+s+2=0$$

等效根轨迹增益

$$1+\frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}=0$$

$$[G(s)H(s)]_e=\frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

等效开环传递函数：

$$\Delta'(s)=1+[G(s)H(s)]_e=0$$

闭环系统特征根相同！

# 广义根轨迹 ——（2）参数根轨迹

$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

2) 开环极点： $n=2,\ p_1=-0.5+j1.323,\ p_2=-0.5-j1.323$

开环零点： $w=3,\ z_1=0,\ z_2=0,\ z_3=-1$

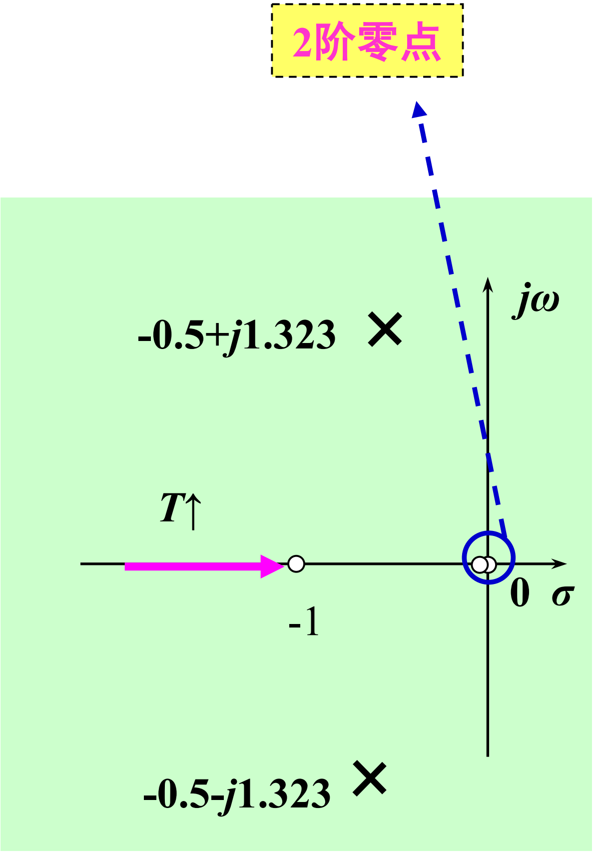
3) 3条根轨迹分支(注意：*w*>*n*)

4) 实轴上的根轨迹： (∞ , -1]

5) 极点–0.5+*j*1.323处的出射角$\Phi_{1_D}$

$$\begin{aligned}\varphi_{1_D} &= (1+2h)180^\circ + \left(\psi_1+\psi_2+\psi_3\right)-\varphi_1 \\ &= (1+2h)180^\circ + (69.3^\circ+110.7^\circ+110.7^\circ)-90^\circ \\ &= 20.7^\circ\end{aligned}$$

对应地，极点 –0.5-*j*1.323处的出射角为 –20.7°



# 广义根轨迹 ——（2）参数根轨迹

$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

## 6) 根轨迹与虚轴的交点

**特征方程：** $\Delta(s) = s(Ts+1)(s+1)+2 = Ts^3+(T+1)s^2+s+2$

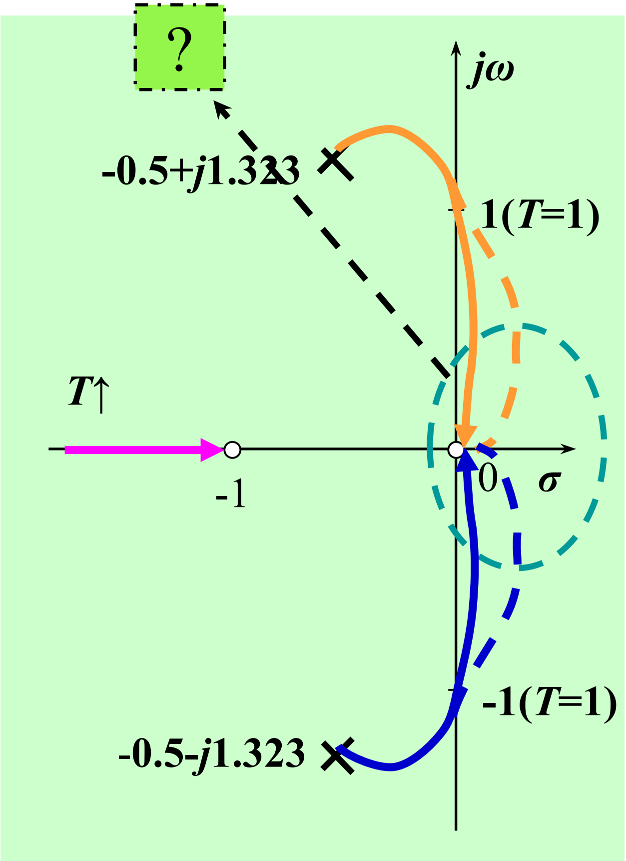
**Routh 表：**

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T & 1 \\ s^2 & T+1 & 2 \\ s^1 & 1-\dfrac{2T}{T+1} & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

$$1-\frac{2T}{T+1}=0 \quad \Rightarrow \quad T=1$$

**由$s^2$ 行构造辅助方程：**

$$(T+1)s^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j\sqrt{\frac{2}{T+1}}=\pm j1$$



# 广义根轨迹 ——（2）参数根轨迹

$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

根轨迹接近零点$z_1$=0时的方向(入射角)

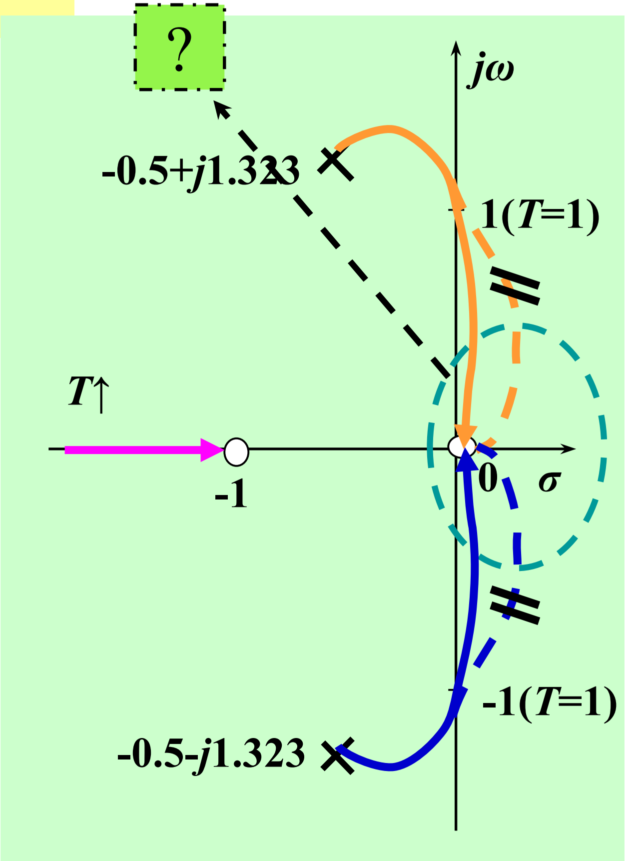
$$\psi_{1_A} = (1+2h)180° + \left(\angle(z_1-p_1)+\angle(z_1-p_2)\right) - \left(\angle(z_1-z_2)+\angle(z_1-z_3)\right)$$
$$= (1+2h)180° - (\psi_{1_A} + 0°)$$

$$\psi_{1_A} = 90°$$

对应地，根轨迹接近零点$z_2$=0时的方向(入射角)为 -90°

**注意：** 通常，当极点数$n$小于零点数时，可以用1/$T$ 作为绘制根轨迹时的变化参数。

请试试看这个例题！



# 根轨迹方法举例

**例5-15**　单位负反馈系统($K$>0)的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+2s+2)}$

绘制根轨迹。

注意有一个在S右半面的开环极点

解：1) 开环极点： $n=4,\quad p_1=0,\quad p_2=1,\quad p_{3,4}=-1\pm j1$

开环零点： $w=1, z_1=-1$

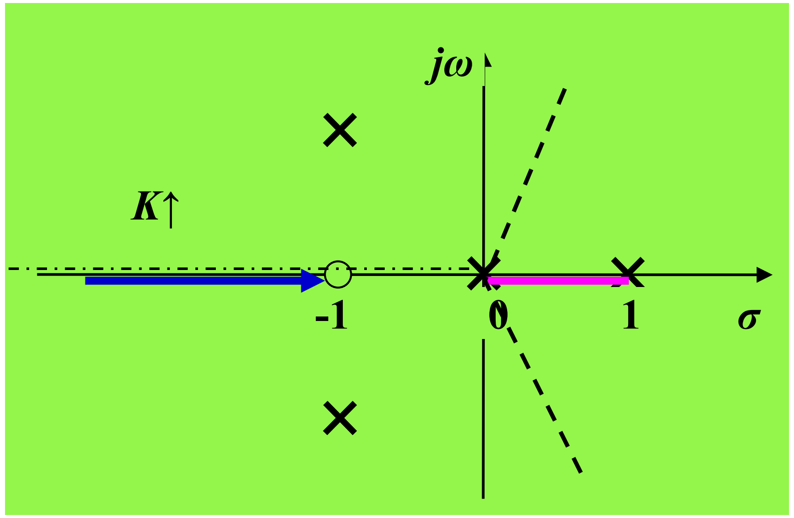
2) 有4条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹 [0 , 1]，( -∞, -1]

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\pm 60^\circ,180^\circ$$

与实轴的交点 $\sigma_0=\dfrac{p_1+p_2+p_3+p_4-z_1}{n-w}=0$



# 根轨迹方法举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+2s+2)}$$

5) 实轴上的分离点和会合点

$$s^4+s^3-2s+K(s+1)=0 \Rightarrow -K=\frac{s^4+s^3-2s}{s+1}$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=d^4+2d^3+d^2-\frac{2}{3}=0$$

$d_1=0.55$ $d_2=-1.55$ $d_{3,4}=-0.5\pm j0.75$ （舍弃）

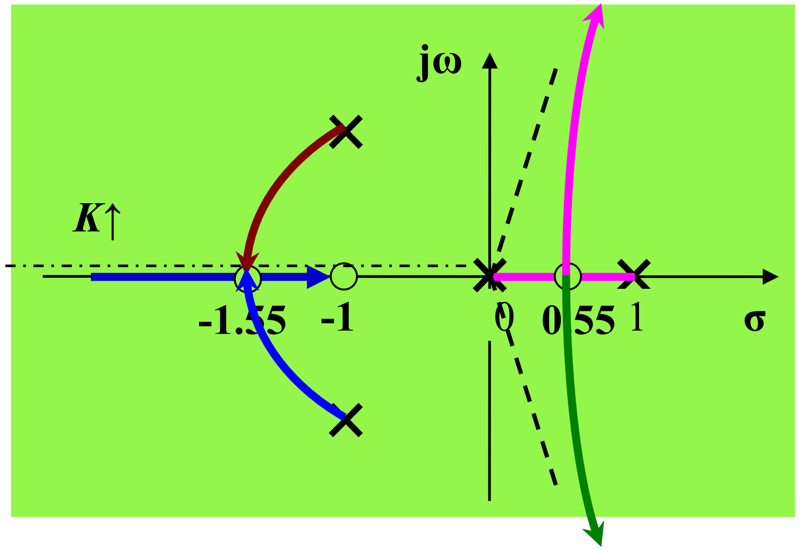
分离角：$\dfrac{(2k+1)180^\circ}{l}=\dfrac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$

6) 极点 –1+*j*1处的出射角 $\Phi_{3_D}$

$$\begin{aligned}\phi_{3_D}&=(1+2h)180^\circ-(\phi_1+\phi_2+\phi_4)+\psi_1\\&=(1+2h)180^\circ-(135^\circ+153.4^\circ+90^\circ)+90^\circ\\&=-108.6^\circ\end{aligned}$$

极点-1-*j*1处的出射角为108.6°

7)与虚轴没有交点




因此，该系统不稳定。

# 根轨迹方法举例

例 5-16　某单位负反馈系统（$K$>0）的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

绘制其根轨迹。

解：1) 开环极点：　$n=4,\quad p_1=0,\quad p_2=1,\quad p_{3,4}=-2\pm j2\sqrt{3}$

开环零点：　$w=1, z_1=-1$

2) 有4条根轨迹分支

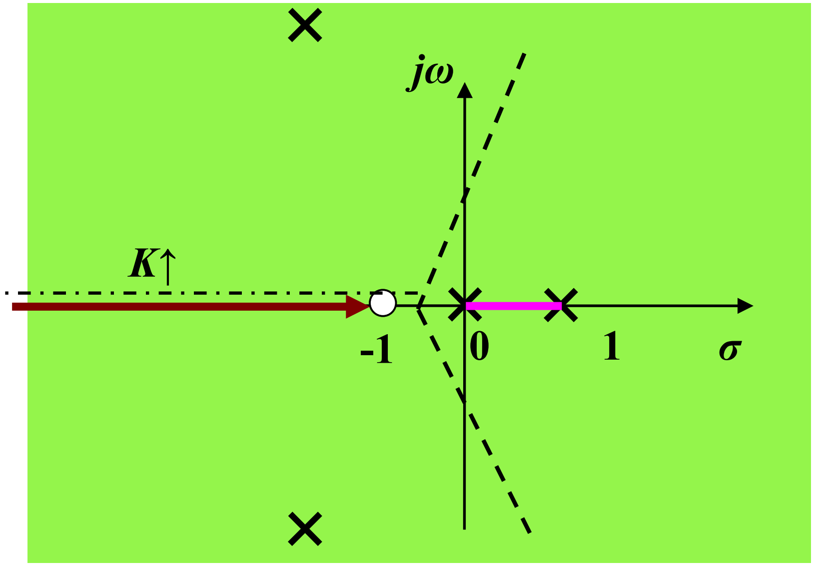
3) 实轴上的根轨迹 [0 , 1]，( -∞, -1]

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\pm 60^\circ,180^\circ$$

与实轴的交点

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4-z_1}{n-w}=-\frac{2}{3}$$



# 根轨迹方法举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

5) 实轴上的分离点和会合点

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=3s^4+10s^3+21s+24s-16=0$$

$d_1=0.46$  $d_2=-2.22$

$d_{3,4}=-0.79\pm j2.46$ （舍弃）

分离角（会合角）：

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l}=\frac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

6) 极点 –2+*j*3.46处的出射角 $\Phi_{3_D}$

$$\phi_{3_D}=(1+2h)180^\circ-(\phi_1+\phi_2+\phi_4)+\psi_1=-54.5^\circ$$

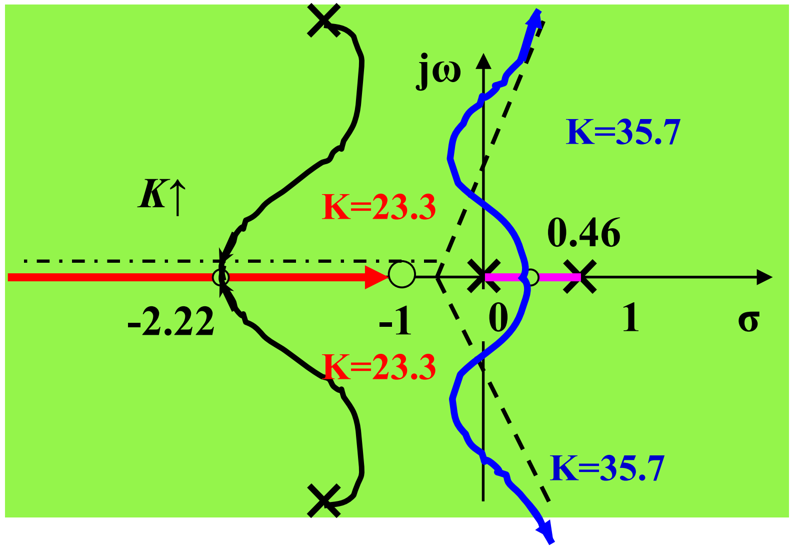
极点 -2-*j*3.46 处的出射角为 54.5°

7) 与虚轴的交点

$s_{1,2}=\pm j1.56(K=23.3)$

$s_{3,4}=\pm j2.56(K=35.7)$

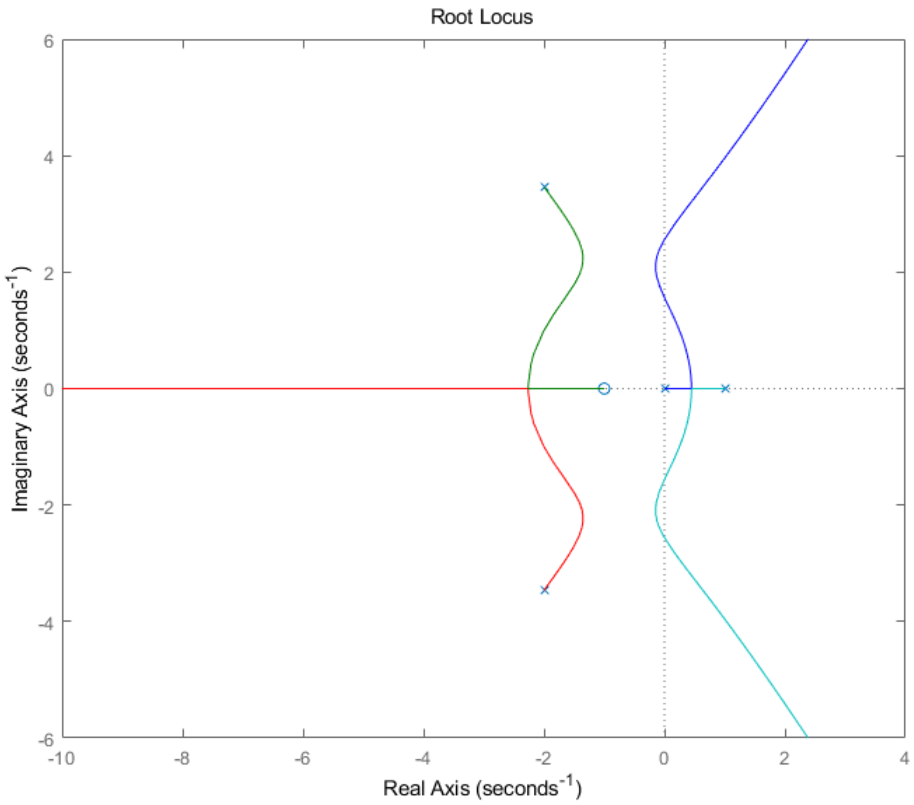
当$23.3<K<35.7$时系统稳定




该系统是条件稳定。

# 根轨迹方法举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$



# 根轨迹方法举例

**例 5-17** 单位负反馈系统开环传递函数 $G(s)H(s)=\dfrac{K(1-s)}{s(s+2)}$

绘制根轨迹(其中 $K>0$)

**解：**

$$G(s)H(s)=\frac{K(1-s)}{s(s+2)}=\frac{-K(s-1)}{s(s+2)}$$

注意选取$K<0$的规则

1) 开环极点： $n=2,\quad p_1=0,\quad p_2=-2$

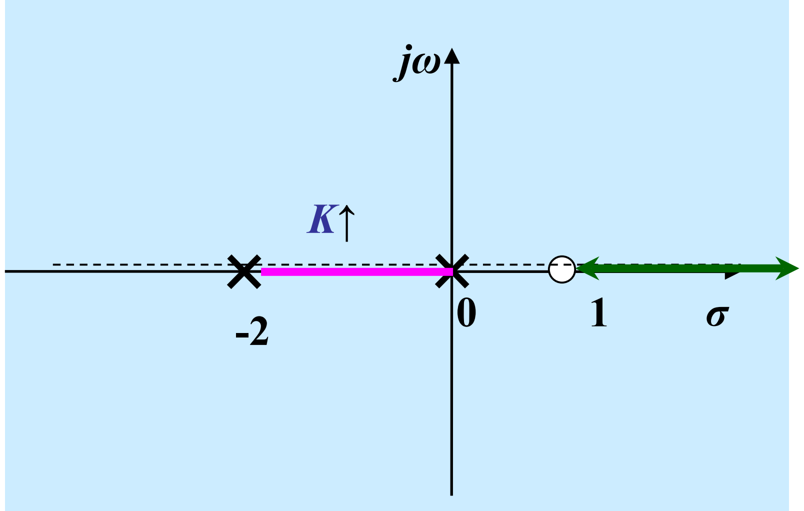
开环零点： $w=1, z_1=1$

2) 有2条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹 [0 , -2], [1,∞)

4) 渐近线与实轴的夹角 $\gamma=\dfrac{2h\cdot 180^\circ}{n-w}=0^\circ$

与实轴的交点 $\sigma_0=\dfrac{p_1+p_2-z_1}{n-w}=\dfrac{0-2-1}{2-1}=-3$



# 根轨迹方法举例

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-s)}{s(s+2)}$$

### 5) 实轴上的分离点和会合点

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d} = s^2 - 2s - 2 = 0$$

$$d_1 = -0.732(\text{breakaway point})$$

$$d_2 = 2.732(\text{breakin point})$$

### 6) 根轨迹与虚轴的交点

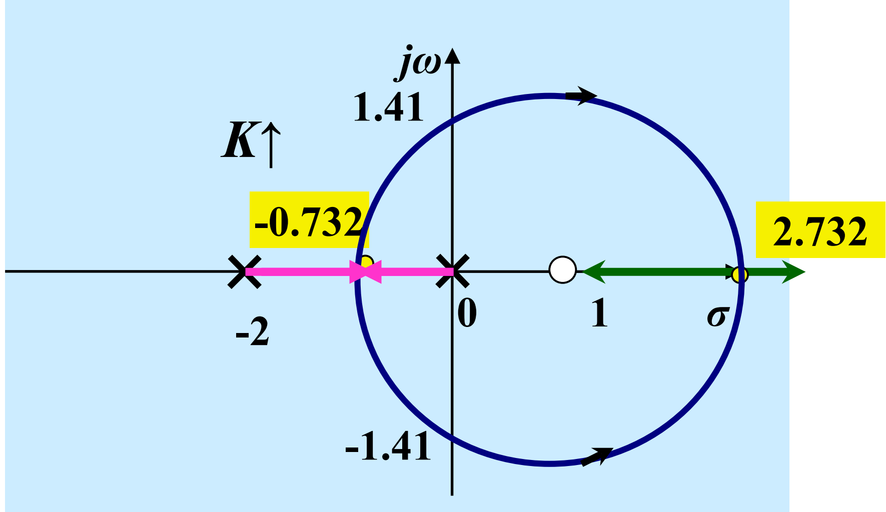
$$\Delta\big|_{s=jw} = s^2 + (2-K)s + K = 0$$

$$w = \pm\sqrt{2}, \qquad K = 2$$

因此，系统是条件稳定（当0<*K*<2）。

分离角（会合角）

$$\frac{(2h+1)180°}{l} = \frac{(2h+1)180°}{2} = \begin{cases} 90° \\ -90° \end{cases}$$



# 根轨迹方法举例

例5-18　设一控制系统的前向通道传递函数$G(s)$与反馈通道传递函数$H(s)$分别如下，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)} \qquad H(s)=(s+1)$$

解：开环传递函数$G(s)H(s)$出现了零极点对消情况，此时如何绘制根轨迹？先作一分析：

闭环传递函数为：
$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

闭环特征方程：
$$[s(s+2)+K](s+1)=0$$

若直接以$GH$为开环传递函数绘制根轨迹，闭环特征方程变成：

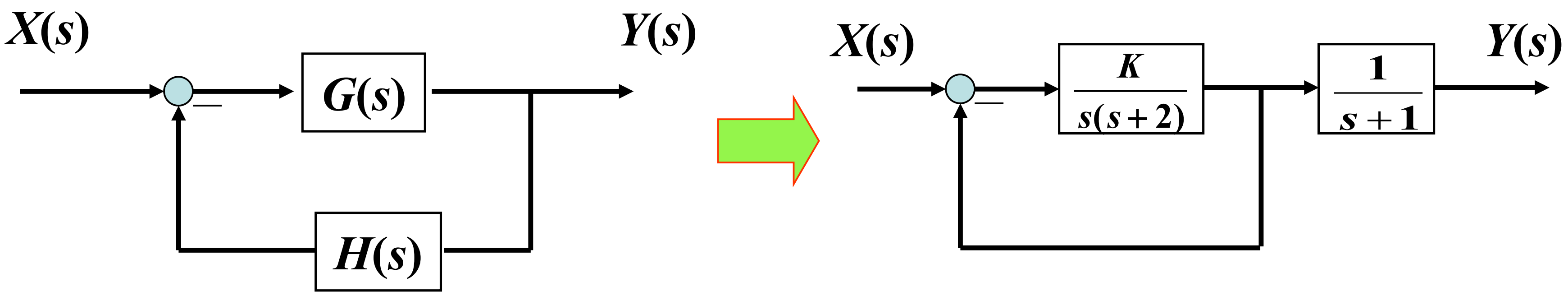
$$s(s+2)+K=0$$

闭环系统少了一个极点。因此，在绘制好根轨迹后，应将对消的极点也作为一个闭环极点补上（它不随$K$变化而变化）。

# 根轨迹方法举例

例5-18　设一控制系统的前向通道传递函数$G(s)$与反馈通道传递函数$H(s)$分别如下，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\qquad H(s)=(s+1)$$



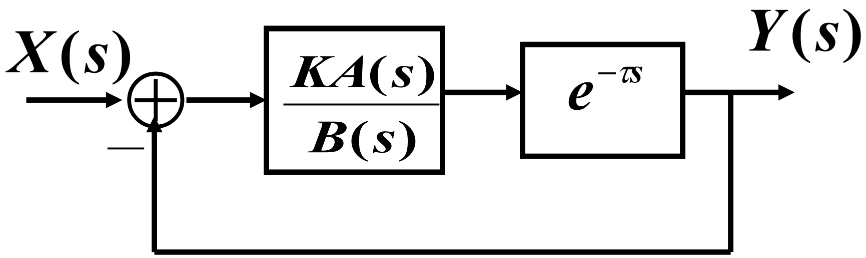

基于对消极点后的$GH$绘制根轨迹的话，闭环系统少了一个极点。因此，在绘制好根轨迹后，应将对消的极点也作为一个闭环极点补上(它不随$K$变化而变化)。

对此例而言，对消的闭环极点正好落在根轨迹上。

# 广义根轨迹——（3）纯滞后的根轨迹

考虑如图所示具有纯滞后环节(滞后时间$\tau$)的系统

$$G(s)H(s)=K\frac{A(s)}{B(s)}e^{-\tau s}$$




系统的特征方程为

$$1+G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}=0$$

$$s=\sigma+j\omega$$

幅值条件 $\left|G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}\right|=1$ $\Rightarrow$ $\left|G_1(\sigma+j\omega)H_1(\sigma+j\omega)\right|e^{-\sigma\tau}=1$

相角条件 $\angle G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}=(2h+1)\pi$

$$\angle G_1(\sigma+j\omega)H_1(\sigma+j\omega)=(2h+1)\pi+\omega\tau$$

- 当 $\tau=0$，意味着系统中没有纯滞后，仅有$n$个根满足相角条件；
- 当 $\tau\neq0$，则满足相角条件的有无穷多个根；
- 其根轨迹依然关于实轴对称。

# 广义根轨迹——（3）纯滞后的根轨迹

幅值条件$K=|\sigma+\mathrm{j}\omega|\cdot|\sigma+\mathrm{j}\omega-p_1|e^{\sigma\tau}$

相角条件$\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega)+\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega-p_1)+\omega\tau=(1+2h)\pi$

例5-20：$G(s)H(s)=\dfrac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)}=\dfrac{Ke^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{s(s-p_1)}$，负反馈，$K>0,\tau>0,p_1<0$

当$\omega$=0时，即对实轴上的点，相角条件与不含纯滞后环节时相同，实轴根轨迹法则依然成立

无论有无纯滞后，（$p_1$,0）上都有实分离点

当$|\omega|$足够小时，相角条件可近似于无纯滞后的

$\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega)+\angle(\sigma+\mathrm{j}\omega-p_1)=(1+2h)\pi$

这意味着对$(p_1,0)$,实分离点求法依然成立

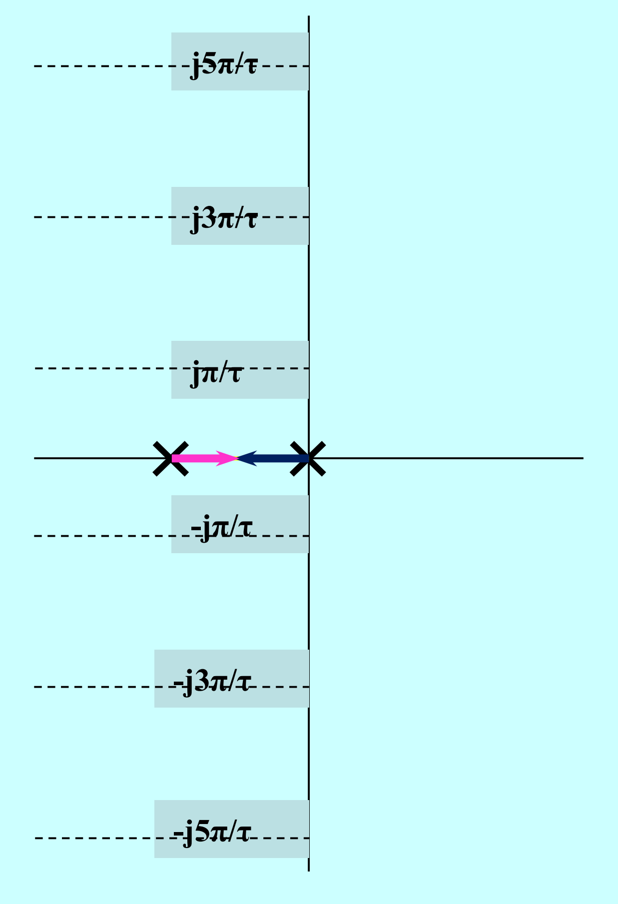
$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r-p_1}=0\Rightarrow \text{实分离点}r=\frac{p_1}{2}$$

起点：$K=|\sigma+j\omega|\cdot|\sigma+j\omega-p_1|e^{\sigma\tau}=0$

$\Rightarrow$ $\sigma+j\omega=0$，$\sigma+j\omega=p_1$，$\sigma=-\infty$

设$-\infty+\mathrm{j}\omega_1$是起点，由相角条件知

$$\omega_1=\frac{(-1+2h)\pi}{\tau},\quad h=0,\pm1,\pm2,\cdots$$



# 广义根轨迹——（3）纯滞后的根轨迹

**例5-20：** $G(s)H(s)=\dfrac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)}=\dfrac{Ke^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{s(s-p_1)}$

幅值条件$K=|\sigma+j\omega|\cdot|\sigma+j\omega-p_1|e^{\sigma\tau}$

相角条件$\angle(\sigma+j\omega)+\angle(\sigma+j\omega-p_1)+\omega\tau=(1+2h)\pi$

终点$|s|\angle\gamma$

由相角条件知终点的$\omega$必为常值

$\angle\gamma=0(\sigma=+\infty)$

**σ=+∞时，由相角条件：**

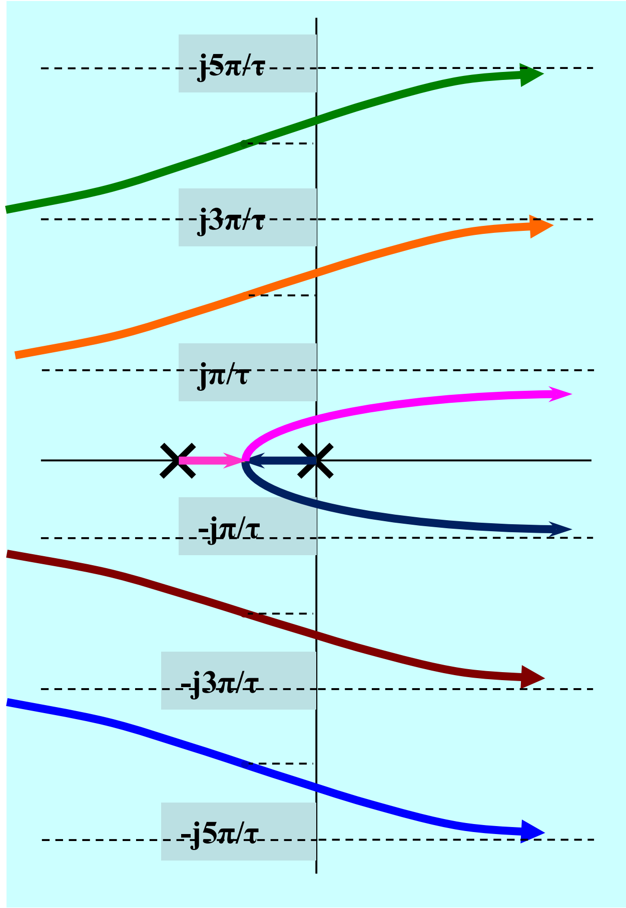
$$\omega_2=\frac{(1+2h)\pi}{\tau},\quad h=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

设$\sigma+j\dfrac{2h\pi}{\tau}\quad(h=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是根轨迹上的点

由相角条件知$\sigma=\dfrac{p_1}{2}$

这些点分别对应不同的$K$

**基于上述点，可大致勾勒根轨迹**

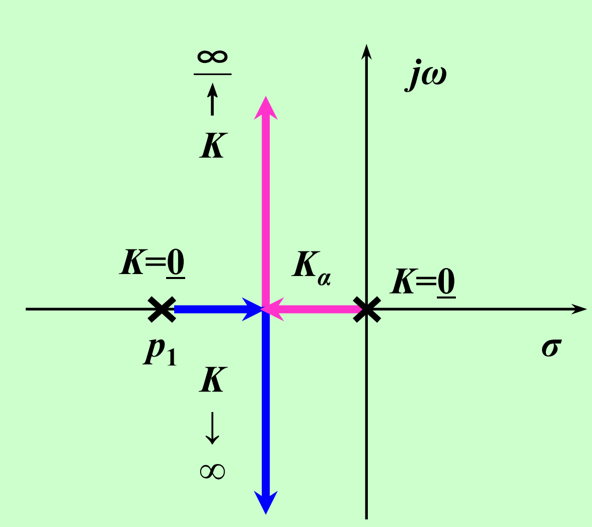


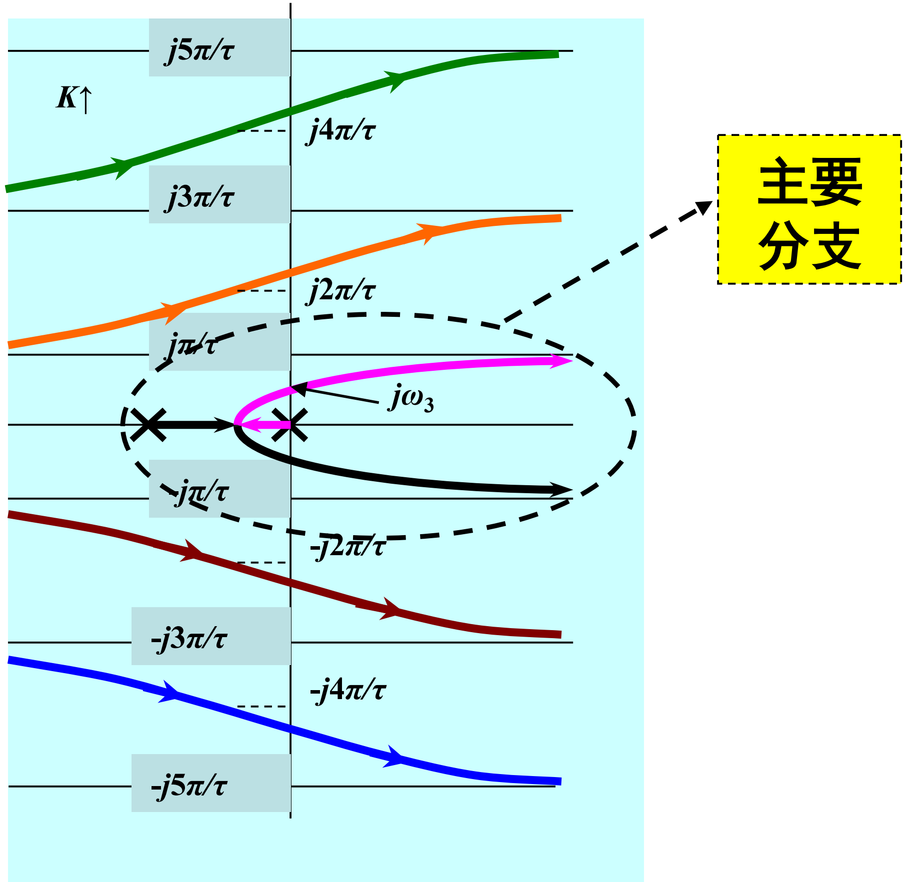
# 广义根轨迹——（3）纯滞后的根轨迹

比较有/无纯滞后环节系统的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)}=\frac{Ke^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{s(s-p_1)}$$

$$G_1(s)H_1(s)=\frac{K}{s(s-p_1)}$$



# 广义根轨迹——（3）纯滞后的根轨迹

**例5-20的结论：**

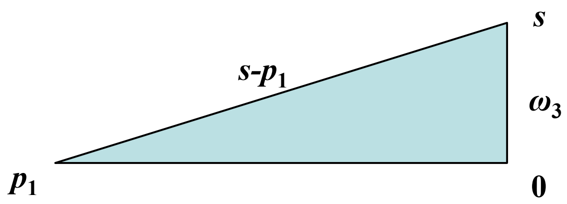
- 无纯滞后的系统有两条根轨迹分支，且对所有的$K$>0，系统是稳定的。 具有纯滞后的系统有无穷多个根轨迹分支，且根轨迹渐近线平行于实轴。

- 有两条根轨迹分支最接近原点，对系统的稳定性影响最大，因此是主根轨迹分支。

- 系统稳定的增益$K$的最大值由虚轴上满足相角条件的频率 $\omega_3$ 确定

$$\angle(s)+\angle(s-p_1)+(\omega_3\tau)=(1+2h)180^\circ$$

$$\omega_3\tau=180^\circ-90^\circ-\angle(s-p_1)$$

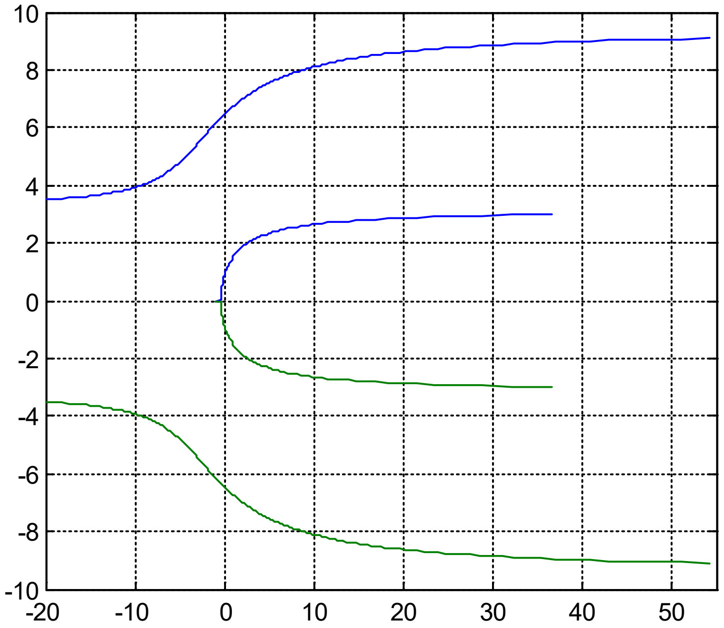


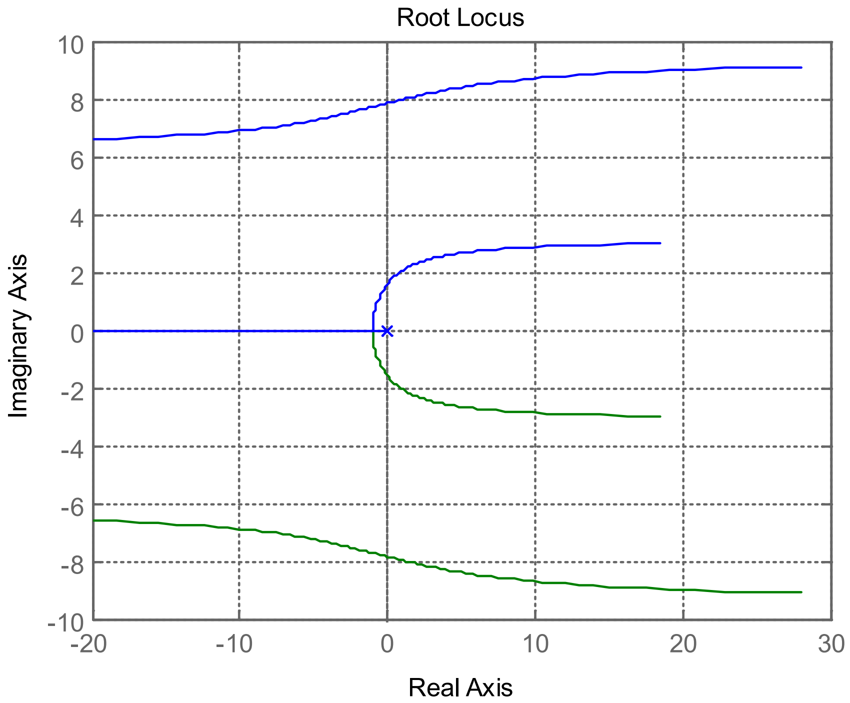

$$K=|s||s-p_1|=\omega_3\sqrt{p_1^2+\omega_3^2}$$

# 广义根轨迹——（3）纯滞后的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-s}}{s(s+1)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-s}}{s}$$



# 广义根轨迹——（3）纯滞后的根轨迹

也可以用其他的近似方法来处理纯滞后，如有理函数近似。其中Pade近似是一种常用的方法，近似后可以用根轨迹绘制法则绘制根轨迹。

$$G_1(s)H_1(s)=\frac{K}{s(s-p_1)}$$

$$e^{-\tau s}=\frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s}=-\frac{s-\frac{2}{\tau}}{s+\frac{2}{\tau}}$$

注意：
$K^*<0$

$$G(s)H(s)=\frac{Ke^{-\tau s}}{s(s-p_1)}=\frac{K^*(s-\frac{2}{\tau})}{s(s-p_1)(s+\frac{2}{\tau})}$$

系统中若有纯滞后存在，相比于无纯滞后存在，系统的稳定性会降低。

# 广义根轨迹——（3）纯滞后的根轨迹

例 5-21　控制系统的开环传递函数为

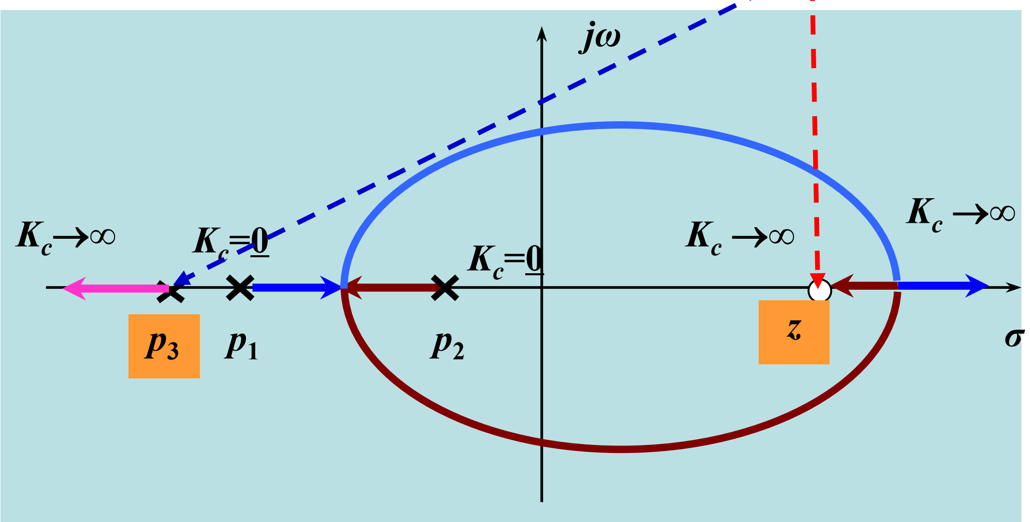
$$G(s)H(s)=\frac{K_cK_vK_0K_me^{-\tau s}}{(T_0s+1)(T_ms+1)}$$

绘制$K_c$变化时的根轨迹。

解：采用Pade’s 方法来近似纯滞后部分。

$$G(s)H(s)=-\frac{K_cK_vK_0K_m(s-\frac{2}{\tau})}{(T_0s+1)(T_ms+1)(s+\frac{2}{\tau})}=-\frac{K_r(s-\frac{2}{\tau})}{(s+\frac{1}{T_0})(s+\frac{1}{T_m})(s+\frac{2}{\tau})}$$

纯滞后时间$\tau$ 越大，对系统的稳定性和其他特性的影响就越大




比较：若该系统无纯滞后存在，稳定性如何？

# 广义根轨迹——多参数的处理（根轨迹簇）

■例5-22 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k(Ts+1)}{s(s+1)(s+4)}$$

试绘制参数 $k$ 和 $T$ 变化时的根轨迹。

方法：（1）先画出当$T=0$时，$k$ 变化时的根轨迹。与前无殊。

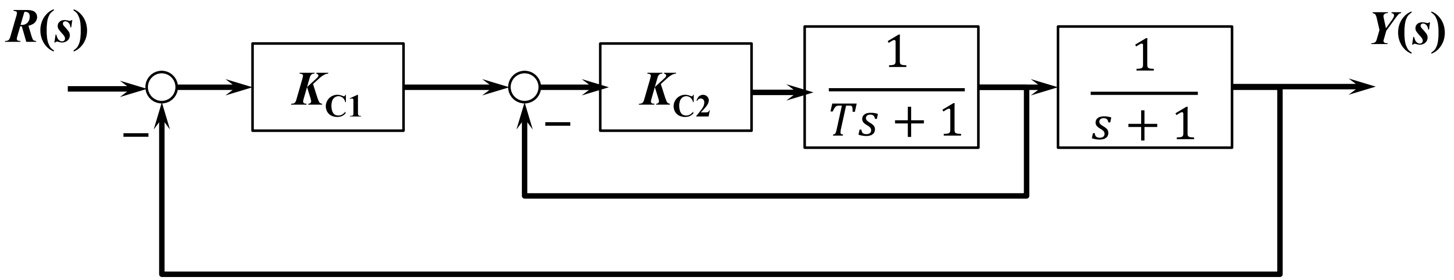
（2）当 $T\neq 0$时，先写出等效开环传递函数

$$G'(s)=\frac{kTs}{s^3+5s^2+4s+k}$$

- 可见只有在取 $k$ 为某些确定值后，才能绘制参数 $T$变化的根轨迹。
- 以$T$为参数的根轨迹的起始点均在 $T$ 为 0 时$k$ 为参数的根轨迹上。
- 最后得到的将是一个根轨迹簇（对应每个$k$值都不同）
- 如此例，分别取 $k$=20, $k$=8, $k$=40……. 试绘制参数$T$变化的根轨迹！

# 广义根轨迹——多参数的处理

➢ 例：绘制图示系统的$T$变化根轨迹（参数$K_{C1}$、$K_{C2}$、$T$>0）。




系统特征方程：

$$(Ts+1)(s+1)+K_{C2}(s+1)+K_{C1}K_{C2}=0$$

$$(Ts+1)(s+1)+K_{C2}[(s+1)+K_{C1}]=0$$

$$1+\frac{Ts(s+1)}{(s+1)+K_{C2}[(s+1)+K_{C1}]}=0$$

系统等效开环传递函数

$$[GH]_e=\frac{Ts(s+1)}{(s+1)+K_{C2}[(s+1)+K_{C1}]}$$

2个开环零点：0，-1
系统的一个开环极点???

# 广义根轨迹——多参数的处理

$$[GH]_e=\frac{Ts(s+1)}{(s+1)+K_{C2}[(s+1)+K_{C1}]}$$

利用等效开环传递函数的分母求开环极点：

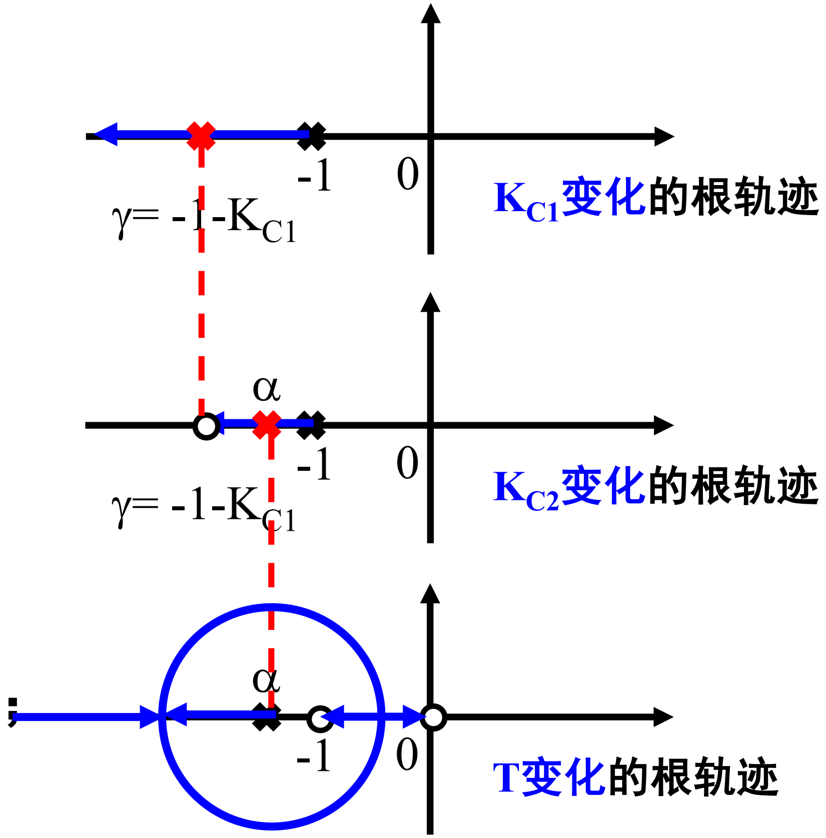
$$(s+1)+K_{C2}[(s+1)+K_{C1}]=0\Rightarrow 1+\frac{K_{C2}[(s+1)+K_{C1}]}{s+1}=0$$

$$[GH]_1=\frac{K_{C2}[(s+1)+K_{C1}]}{s+1}$$

开环极点：-1

开环零点可利用分子求得

$$(s+1)+K_{C1}=0\Rightarrow 1+\frac{K_{C1}}{(s+1)}=0$$




在 $K_{C1}$变化的根轨迹上取某一定值γ，即为$[GH]_1$的开环零点；

绘制出$K_{C2}$变化的根轨迹后，取定某值α即得等效开环传递函数$[GH]_e$的开环极点；

绘制出$T$变化的根轨迹。由于极点数少于零点数，可以绘制$1/T$变化的根轨迹。

# 广义根轨迹——小结

- 参数根轨迹（即将开环传递函数中的其它参数作为可变参数）
  - 关键是由系统闭环特征方程写出等效开环传递函数，将可变参数置于根轨迹增益$K_r$的位置（要求可变参数必须是线性地出现在闭环特征方程中）。
- 对于$K$<0情况（正反馈系统）——零度根轨迹
  - 若无特殊要求，实际上是写出开环传递函数后，视其根轨迹增益$K_r$前的符号决定（设$K_r$总是>0）是采取$K$>0或$K$<0的规则
- 纯滞后的处理 为方便分析，可采用pade多项式近似纯滞后环节（在低频时较为适用）
- 多个可变参数的根轨迹——根轨迹簇——参见例5-22
  - 实际上也只能先选定一个，再画其他的
- 多回路系统的根轨迹——“先内后外”

# 关于根轨迹方法的说明

- 根轨迹分支上的每个点都是闭环极点，利用幅值条件可确定根轨迹上某个特定点所对应的$K$值（用几何或代数的方法）。
- 一旦在根轨迹上找到闭环主导极点，则可利用闭环主导极点的相应的因式去除特征方程，求出其余的闭环极点。—— 可能不太准（除不尽），因为图解时会产生误差。
- 对于某些控制系统，虽然开环传递函数形式是确定的，但当开环极点和零点位置发生变化（甚至可能只是微小变化），将导致根轨迹的重大变化。
- 开环传递函数出现零极点对消，如何处理？—— 参见例5-18
- 注意绘制零度根轨迹与常规根轨迹的异同。

# The End