机器人建模与控制

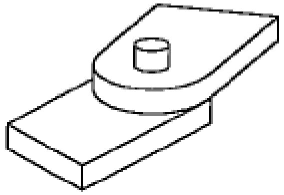
第3章 机器人运动学

3.1 串联机构中的运动学参量

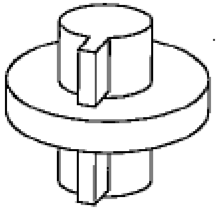
3.1.1 串联机构的组成

使两个刚体直接接触而又能产生一定相对运动的联接称为运动副，机器人的运动副也称关节，连杆即指由关节所联的刚体

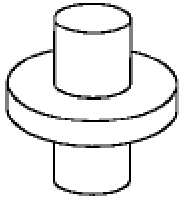
若运动副联结的两刚体之间为面与面的接触，则称运动副为低副。六种常用的低副：



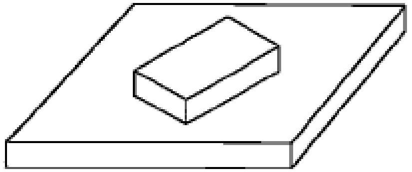
转动副（转动型关节）



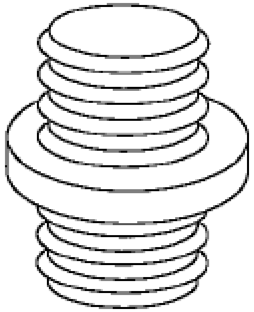
移动副（平动型关节）



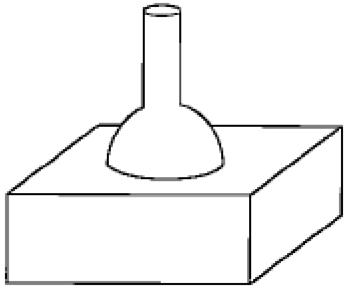
圆柱副



平面副



螺旋副

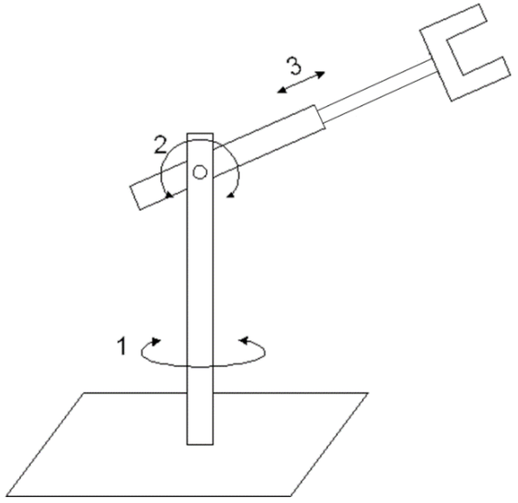


球面副

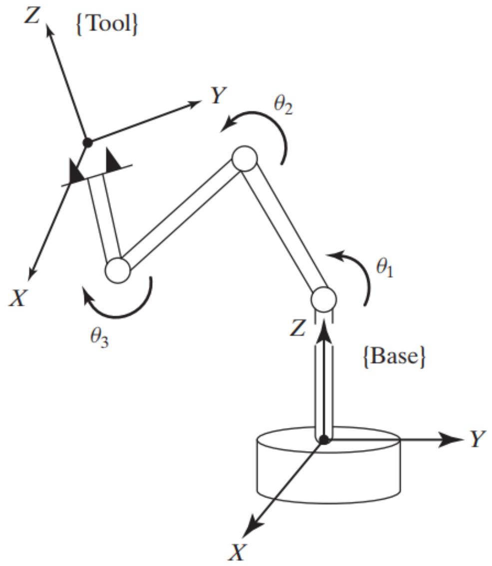
本课程中的关节仅限转动副和移动副

3.1 串联机构中的运动学参量

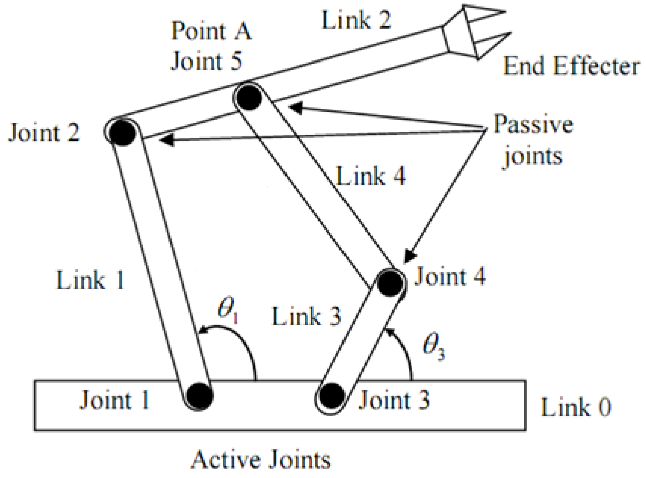
串联机构：多个连杆通过关节以串联形式连接成首尾不封闭的机械结构



串联机械臂



串联机械臂



非串联机械臂

本课程仅研究串联机械臂（串联机器人）

3.1 串联机构中的运动学参量

从串联机器人基座进行编号

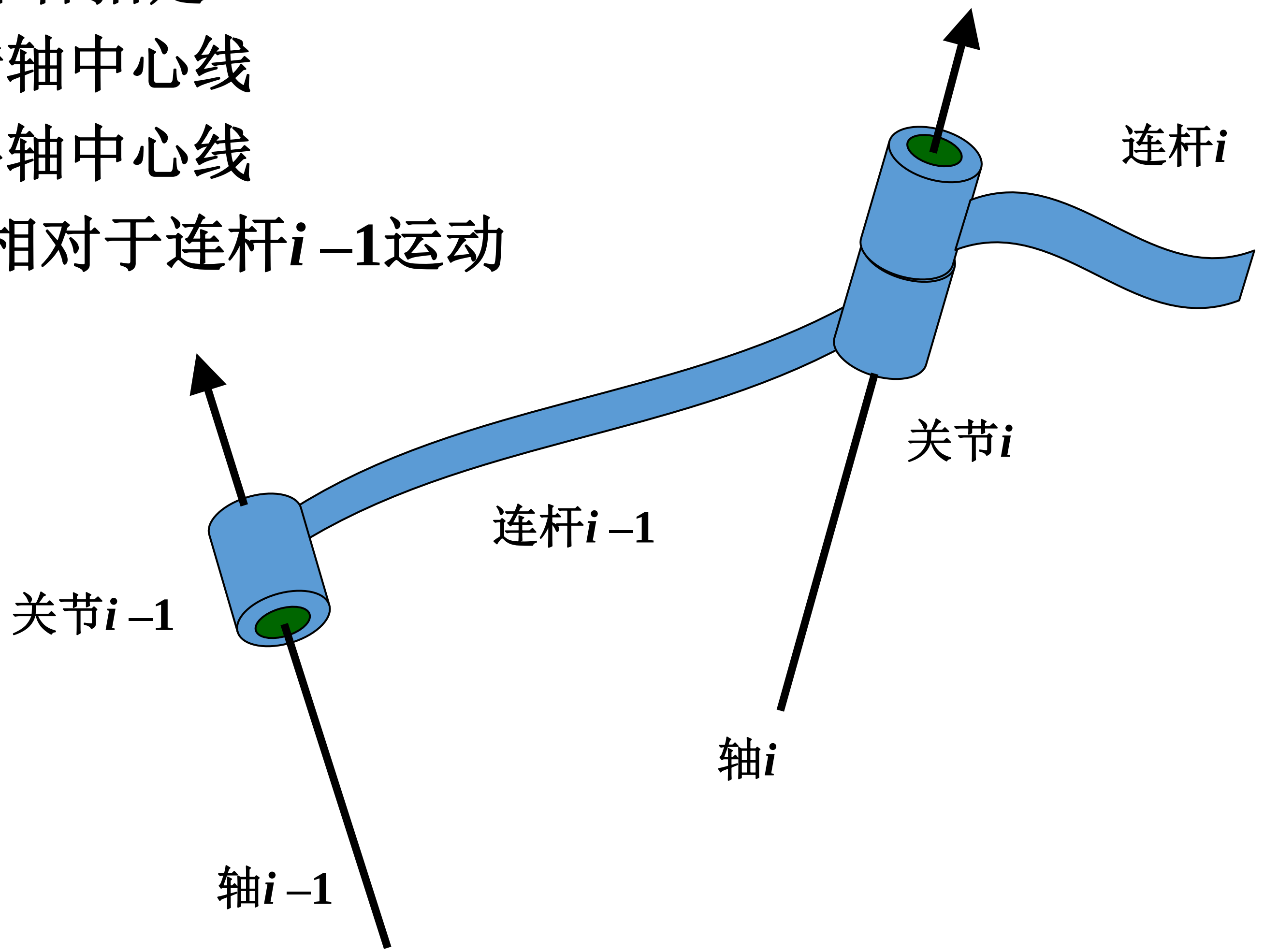
- 固定基座为连杆0
- 第一个可动连杆为连杆1
- 以此类推，机器人最末端的连杆为连杆N
- 连杆0与连杆1通过关节1连接，…，连杆N-1与连杆N通过关节N连接

为了确定末端执行器在3维空间的位置和姿态，串联机器人至少需要6个关节

3.1 串联机构中的运动学参量

3.1.2 连杆长度与连杆转角

- 用空间中的直线“轴*i*”表示关节*i*的轴线
- 轴*i*的正方向由设计者指定
- 转动型关节：旋转轴中心线
- 平动型关节：平移轴中心线
- 连杆*i*绕（沿）轴*i*相对于连杆*i* –1运动



3.1 串联机构中的运动学参量

若轴$i-1$和轴i不平行，它们有唯一的公垂线段

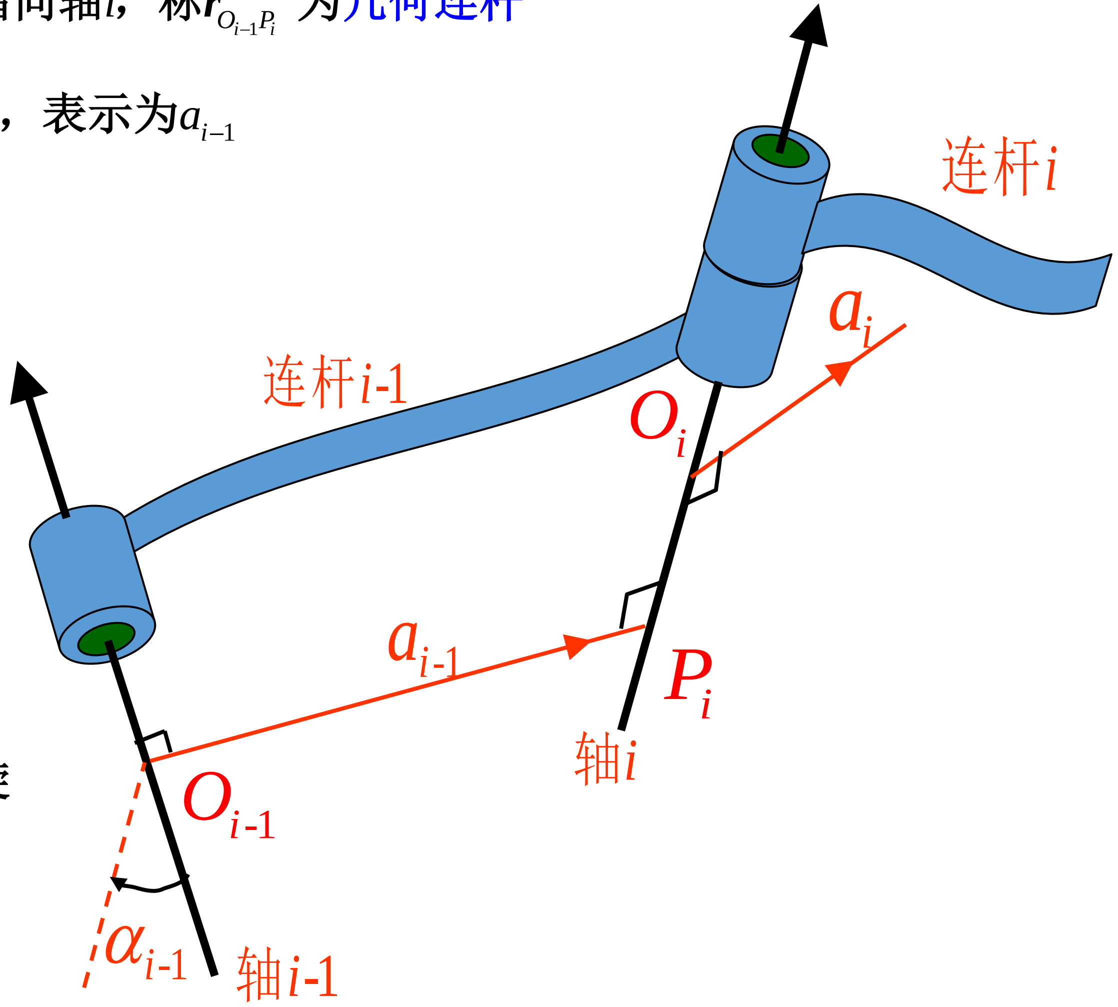
若轴$i-1$和轴i平行，它们的公垂线段不唯一，可按需取一条公垂线段

公垂线段$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$的正方向为轴$i-1$指向轴$i$，称$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$为几何连杆

连杆长度：公垂线段$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$的长度，表示为$a_{i-1}$

当$a_{i-1}=0$时，我们并不将零长度的$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$视为传统的零向量，而是在与轴$i-1$和轴$i$同时垂直的方向中选一个作为$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$的正方向

连杆转角：过轴$i-1$作一个平面垂直于$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$，然后将轴$i$投影到该平面上，按照轴$i-1$绕$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$旋转到轴$i$投影的思路以右手螺旋法则确定轴$i-1$与轴$i$夹角的值，此夹角即为连杆转角$\alpha_{i-1}$

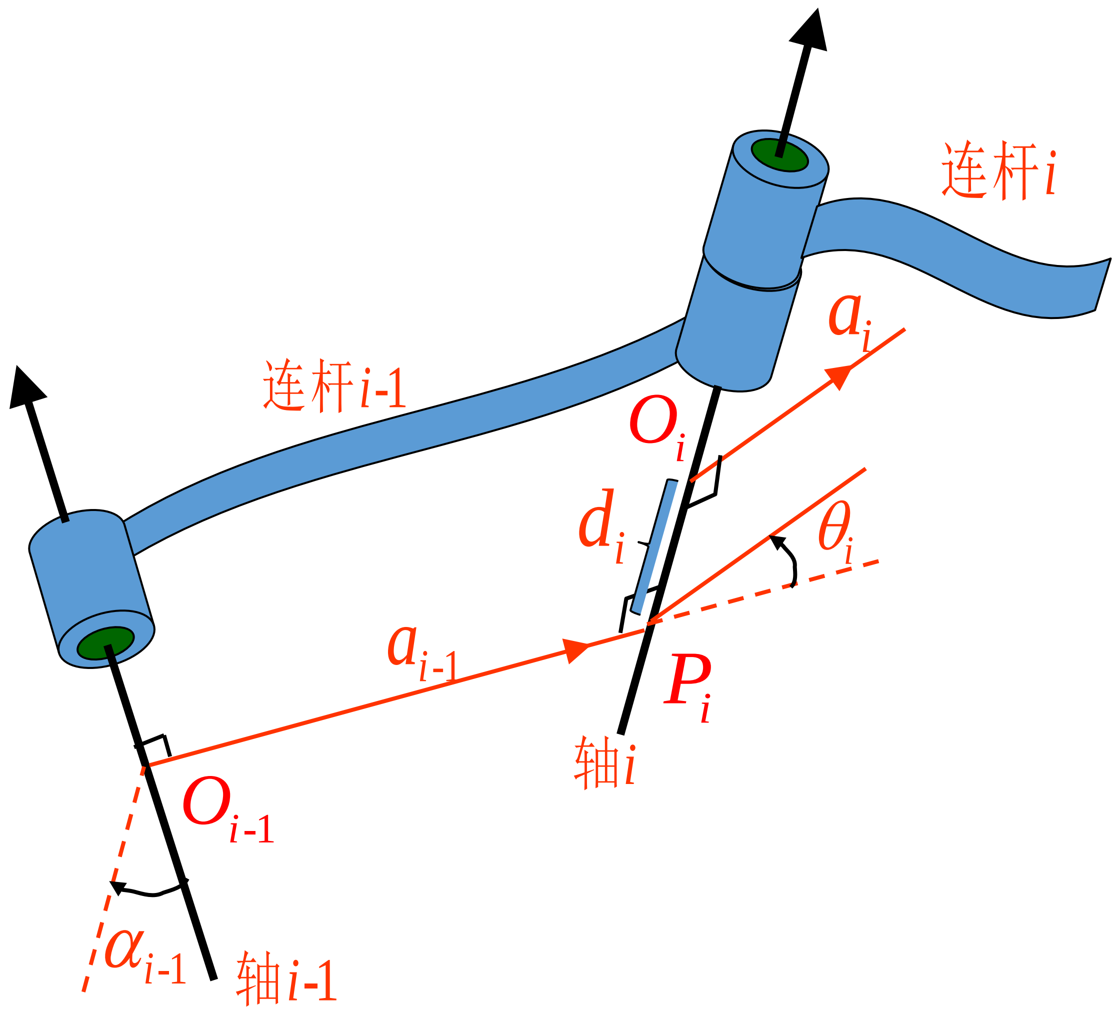


3.1.3 连杆偏距与关节角

连杆偏距：从P_i 到O_i 的有向距离，记为d_i

关节角：过$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$ 作一个平面垂直于轴i ，然后将$\boldsymbol{r}_{O_iP_{i+1}}$ 投影到该平面上，在平面内按照$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$ 绕轴i 旋转到$\boldsymbol{r}_{O_iP_{i+1}}$ 投影的思路以右手螺旋法则确定$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$ 与$\boldsymbol{r}_{O_iP_{i+1}}$ 夹角的值，此旋转角度即为关节角θ_i

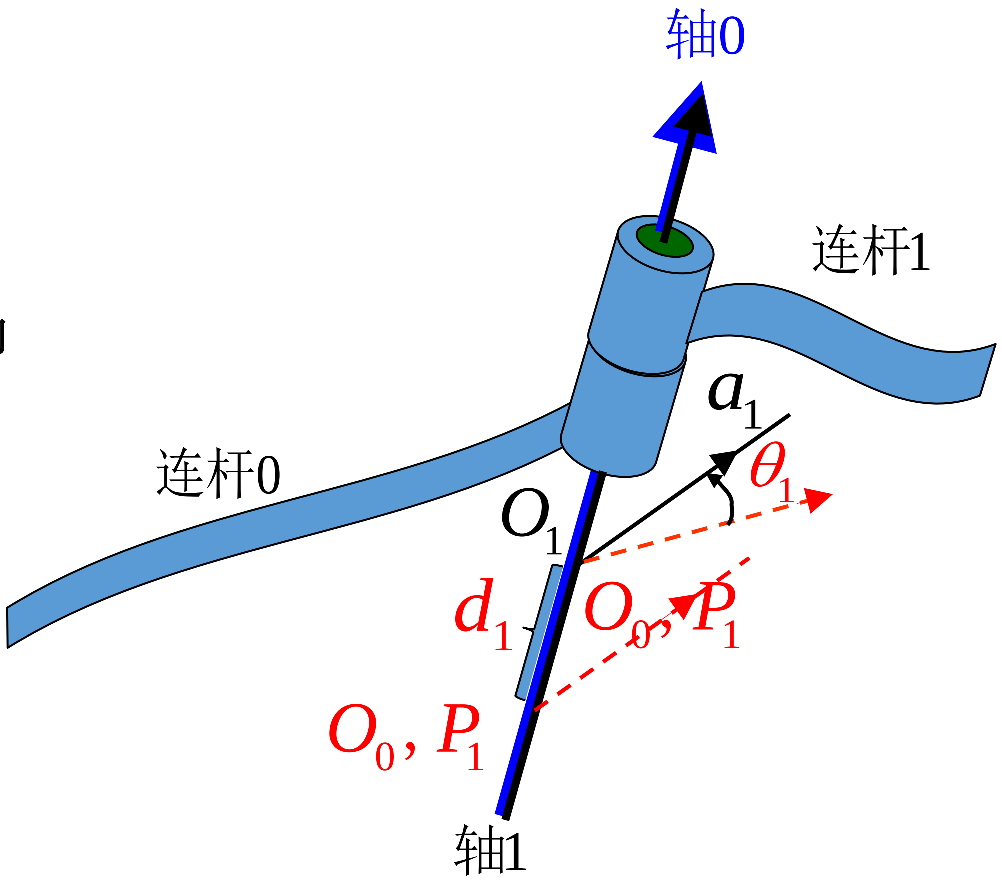
连杆长度a_{i-1}、连杆转角α_{i-1}、连杆偏距d_i 和关节角θ_i 都称为关节i 的运动学参量



3.1 串联机构中的运动学参量

3.1.4 首末关节的运动学参量

- 设定一个虚拟的轴0与轴1重合，即取$a_0=0, \alpha_0=0$
- 若关节1是转动关节，取d_1=0，而$\boldsymbol{r}_{O_0P_1}$的方向则任取与轴1垂直的某个方向，取$\boldsymbol{r}_{O_0P_1}$的方向就是决定$\boldsymbol{r}_{O_1P_2}$的零位方向
- 若关节1是滑动关节，取θ_1=0，而$\boldsymbol{r}_{O_0P_1}$的位置则任取轴1上的某个点，取$\boldsymbol{r}_{O_0P_1}$的位置就是决定$\boldsymbol{r}_{O_1P_2}$的零位位置
- $\boldsymbol{r}_{O_0P_1}$是一个固定不动的几何连杆

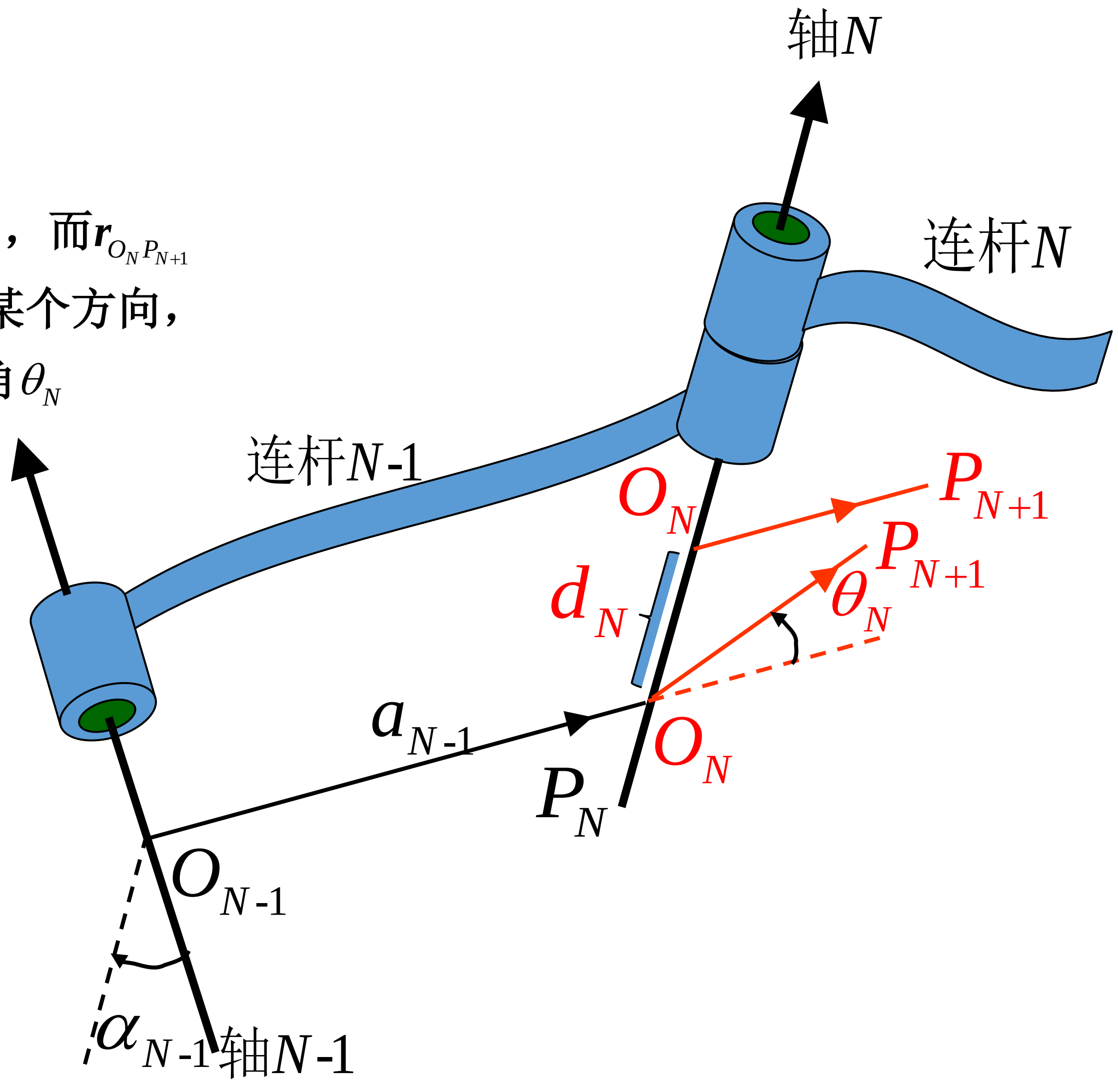


3.1 串联机构中的运动学参量

- 轴$N-1$ 和轴N 存在，a_{N-1} 和α_{N-1} 已知，需要选取长度任意的$\boldsymbol{r}_{O_N P_{N+1}}$

- 若关节N 是转动关节，取$d_N=0$，而$\boldsymbol{r}_{O_N P_{N+1}}$的方向则任取与连杆$N$ 固连的某个方向，$\boldsymbol{r}_{O_N P_{N+1}}$ 与$\boldsymbol{r}_{O_{N-1} P_N}$ 的夹角即是关节角θ_N

- 若关节N 是滑动关节，取$\theta_N=0$，而点O_N 则任取轴N 上与连杆N 固连的某个点，O_N 与P_N 的相对位移即决定了连杆偏距d_N



3.2 建立坐标系的非标准D-H(Denavit-Hartenberg)方法

3.2.1 运动学参量表

- a_{i-1}和α_{i-1}是固定不变的参数，不会随着关节i的运动而变化

- 若关节i是转动关节，则d_i是固定不变的参数，θ_i是会随着关节i的运动而变化的关节变量，即：

  3个连杆参数 a_{i-1}, α_{i-1}, d_i　　1个关节变量θ_i

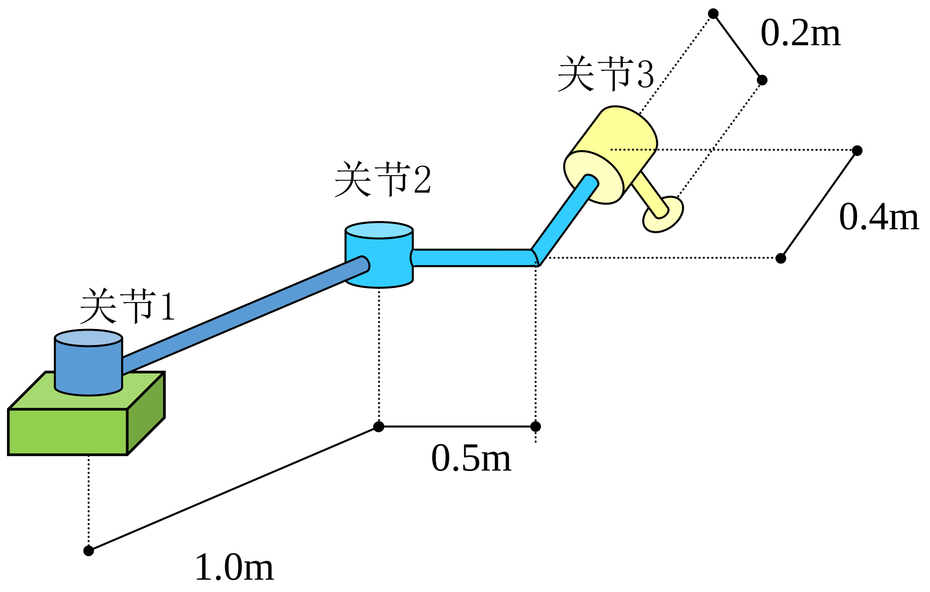
- 若关节i是滑动关节，则θ_i是固定不变的参数，d_i是会随着关节i的运动而变化的关节变量，即：

  3个连杆参数 a_{i-1}, α_{i-1}, θ_i　　1个关节变量d_i

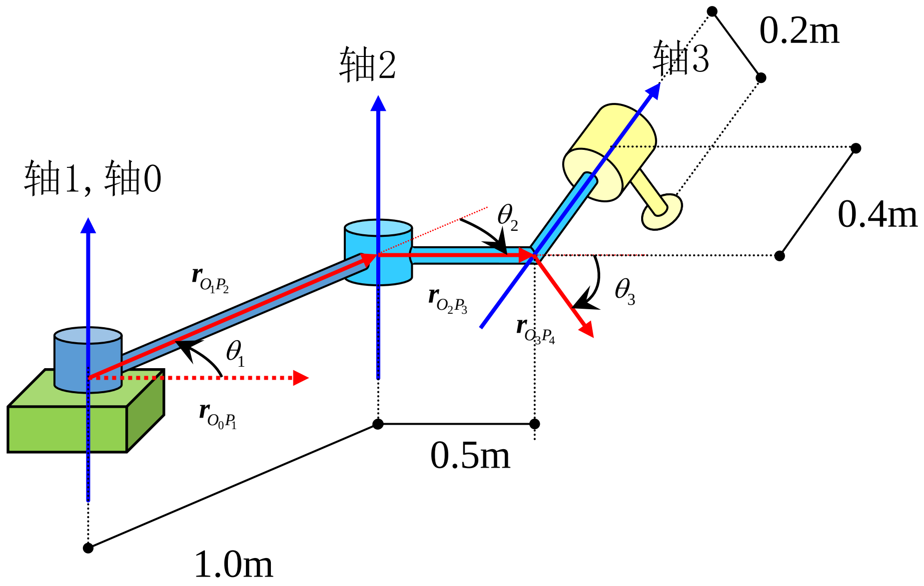
- 一个有N个关节的串联机构，有$4N$个运动学参量，其中$3N$个是连杆参数、N个是关节变量，它们包含了串联机构的全部空间几何信息

3.2 建立坐标系的非标准D-H(Denavit-Hartenberg)方法

例2. 8. 1：下图所示为一个3关节串联机械臂，该臂的末端装有吸盘作为操作工具。试在此机构上建立几何连杆、写出各连杆参数的值并列出各关节变量



3.2 建立坐标系的非标准D-H(Denavit-Hartenberg)方法



运动学参量表

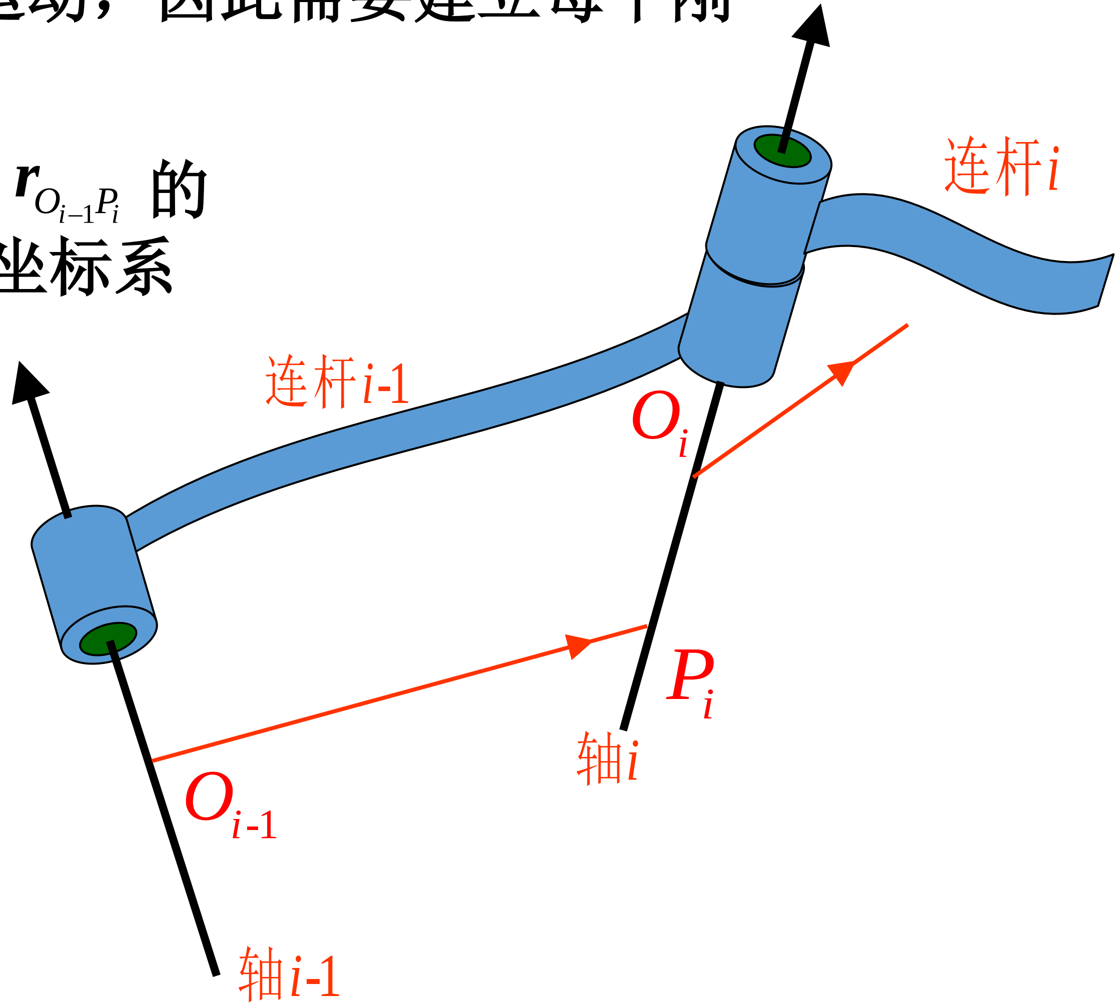
关节i	α_{i-1}(rad)	a_{i-1}(m)	d_i(m)	θ_i(rad)
1	0	0	0	θ_1
2	0	1	0	θ_2
3	-π/2	0.5	0	θ_3

运动学参量表结果不唯一

3.2 建立坐标系的非标准D-H(Denavit-Hartenberg)方法

3.2.2 连杆联体坐标系的配置

- 串联机器人是一个多体系统（N+1个刚体），描述机器人的运动即是描述N+1个刚体的运动，因此需要建立每个刚体（实物连杆）的联体坐标系
- 几何连杆 $\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$ 与连杆i-1固连，$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$ 的联体坐标系也是连杆i-1的联体坐标系



3.2 建立坐标系的非标准D-H(Denavit-Hartenberg)方法

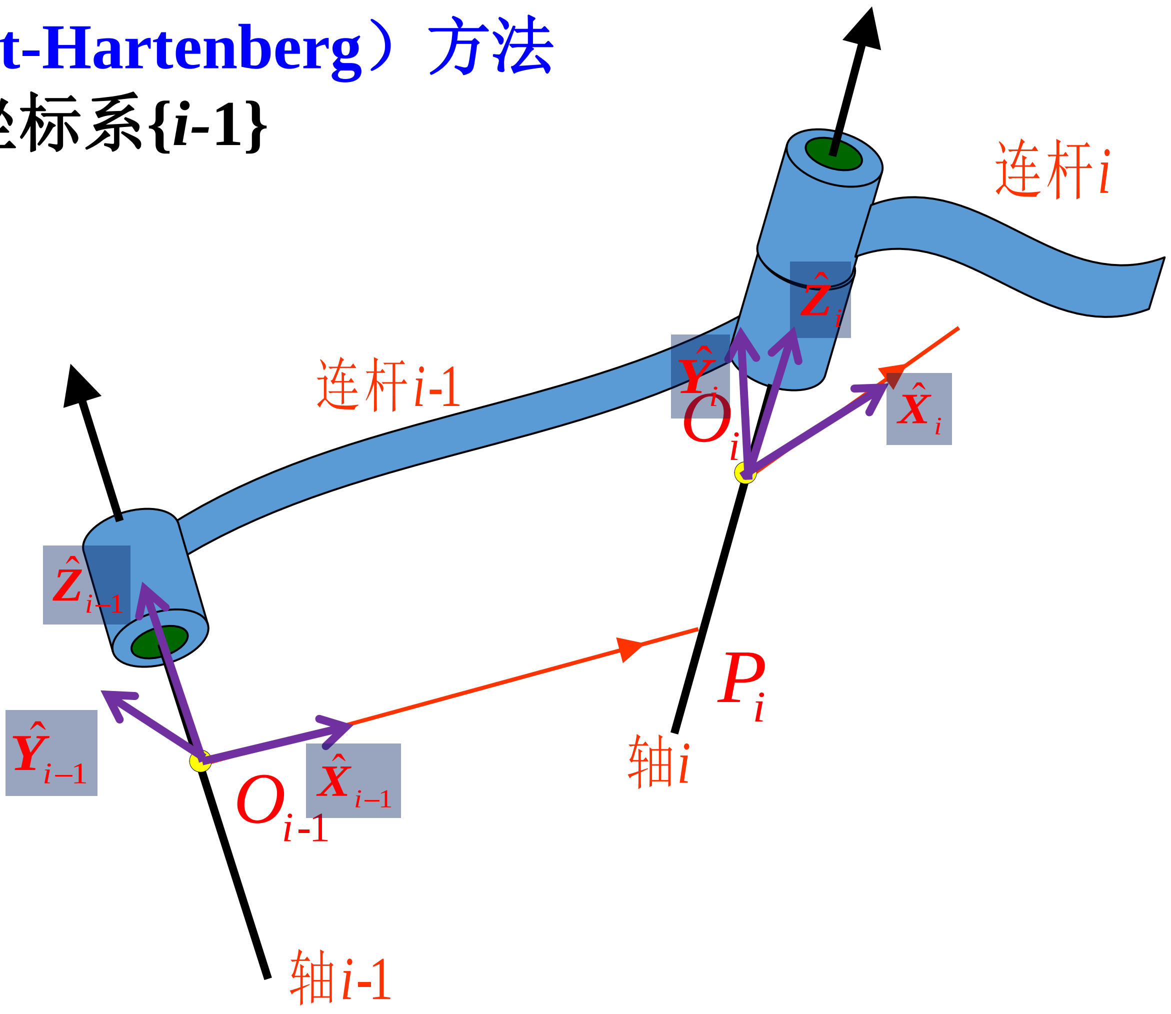
- **非标准D-H（Denavit-Hartenberg）方法**
  建立连杆*i*-1的联体坐标系{*i*-1}

O_{i-1}为{*i*-1}的原点

轴*i*-1为{*i*-1}的z轴

$\boldsymbol{r}_{O_{i-1}P_i}$ 为{*i*-1}的x轴

右手定则定{*i*-1}的y轴

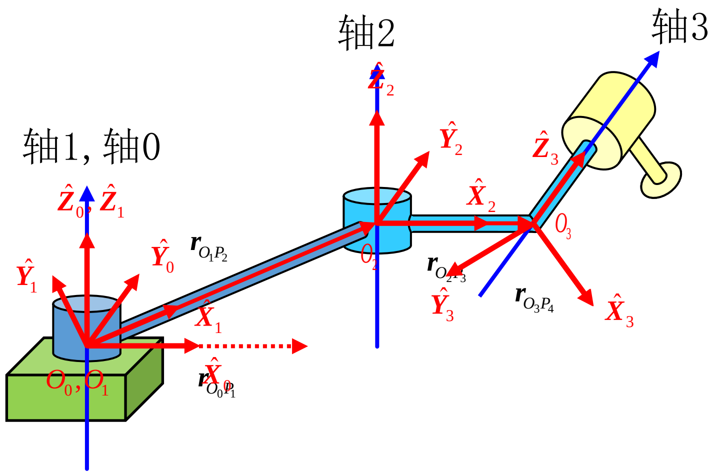


Matlab的Link函数的方法选项

’modefied’为非标准D-H法；’standard’或缺省为标准D-H法

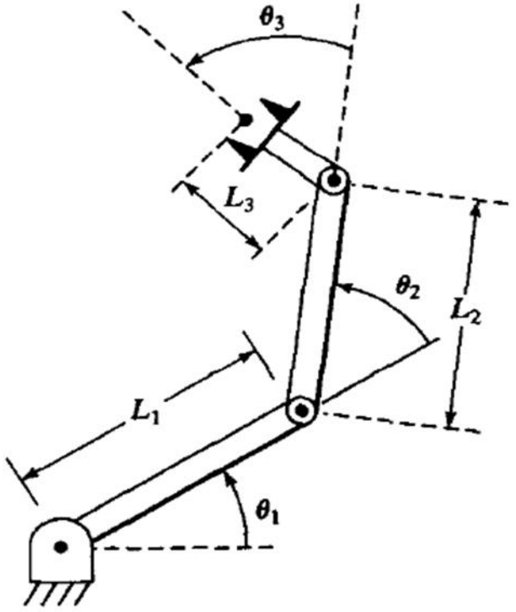
3.2 建立坐标系的非标准D-H(Denavit-Hartenberg)方法

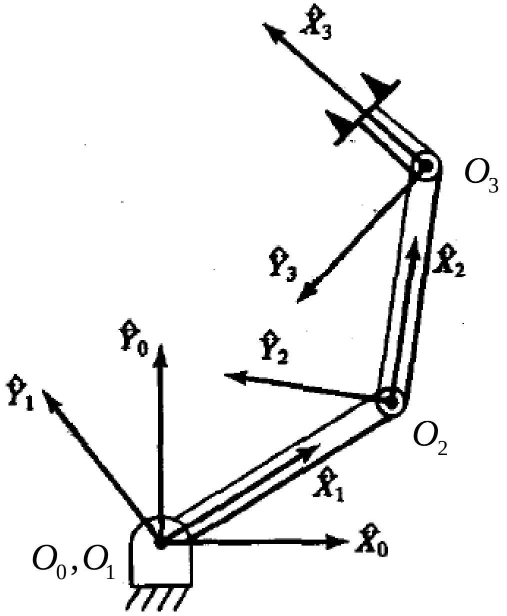
例2.8.2：采用改进D-H方法建立例2.8.1的连杆联体坐标系



3.2 建立坐标系的非标准D-H(Denavit-Hartenberg)方法

例2.8.3：采用非标准D-H方法建立如图机器人的连杆联体坐标系





运动学参量表

关节i	α_{i-1}(rad)	a_{i-1}(m)	d_i(m)	θ_i(rad)
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

非标准D-H方法建立的连杆联体坐标系不唯一

3.3 机器人正运动学

3.3.1 相邻连杆联体坐标系的变换

$$
{}^{i-1}_{\ i}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

记关节i的关节变量为ϕ_i

若关节i是转动型关节，则 $\phi_i = \theta_i$

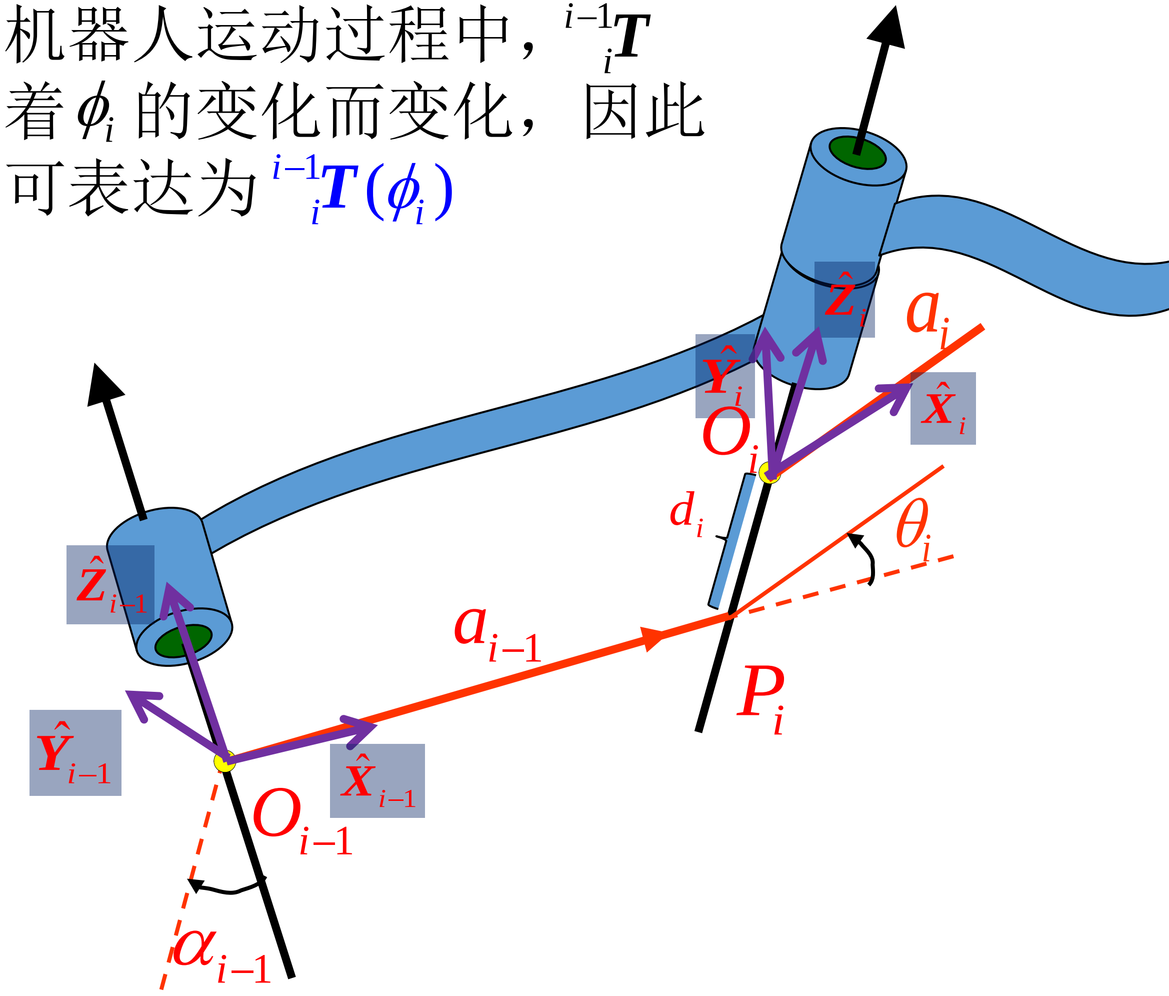
若关节i是平动型关节，则 $\phi_i = d_i$

在机器人运动过程中，${}^{i-1}_{\ i}\boldsymbol{T}$ 随着ϕ_i的变化而变化，因此也可表达为${}^{i-1}_{\ i}\boldsymbol{T}(\phi_i)$

{i-1}经四步变换成为{i}

沿联体x轴平移 a_{i-1}　　沿联体z轴平移d_i

绕联体x轴旋转 α_{i-1}　　绕联体z轴旋转θ_i



3.3 机器人正运动学

3.3.2 正运动学问题及其求解

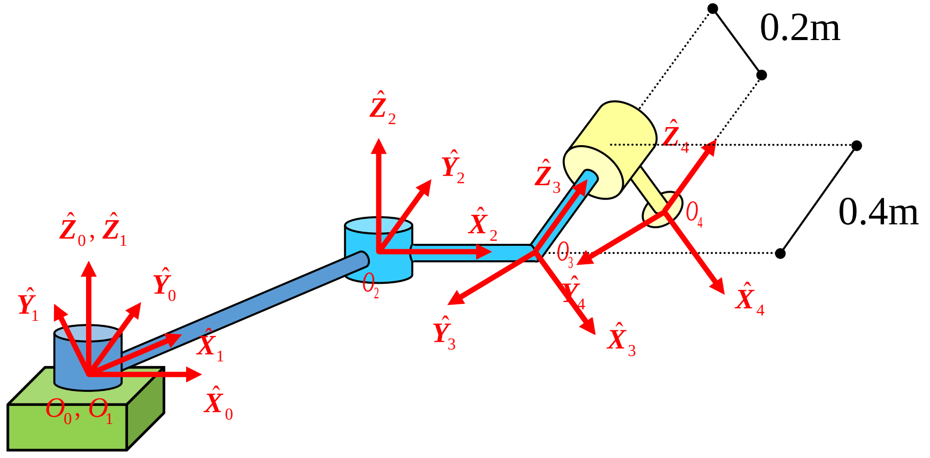
正运动学问题：已知各关节变量的值，以基座坐标系为参考系，求末端工具联体坐标系的位姿

解法：$ {}^{0}_{n}\boldsymbol{T}(\phi_1,\phi_1,\cdots,\phi_n) = {}^{0}_{1}\boldsymbol{T}(\phi_1)\,{}^{1}_{2}\boldsymbol{T}(\phi_2)\cdots{}^{n-1}_{n}\boldsymbol{T}(\phi_n) $

$$
{}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}(\phi_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

3.3 机器人正运动学

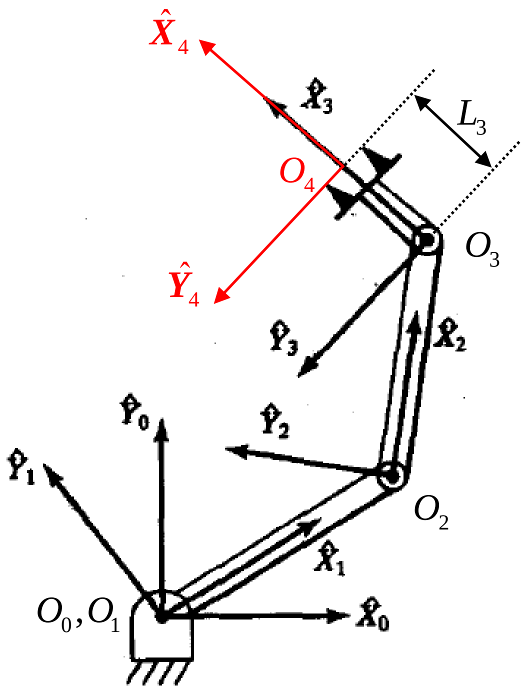
为描述例2. 8. 1中的操作工具吸盘，建立了吸盘联体坐标系{4}，其原点为吸盘中心、姿态与{3}相同



$$
{}^{3}_{4}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{0}_{4}\boldsymbol{T}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = {}^{0}_{1}\boldsymbol{T}(\theta_1)\,{}^{1}_{2}\boldsymbol{T}(\theta_2)\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{T}(\theta_3)\,{}^{3}_{4}\boldsymbol{T}
$$

对2.8.3的机器人，建立工具的联体坐标系{4}，其原点为夹具末端中点、姿态与{3}相同

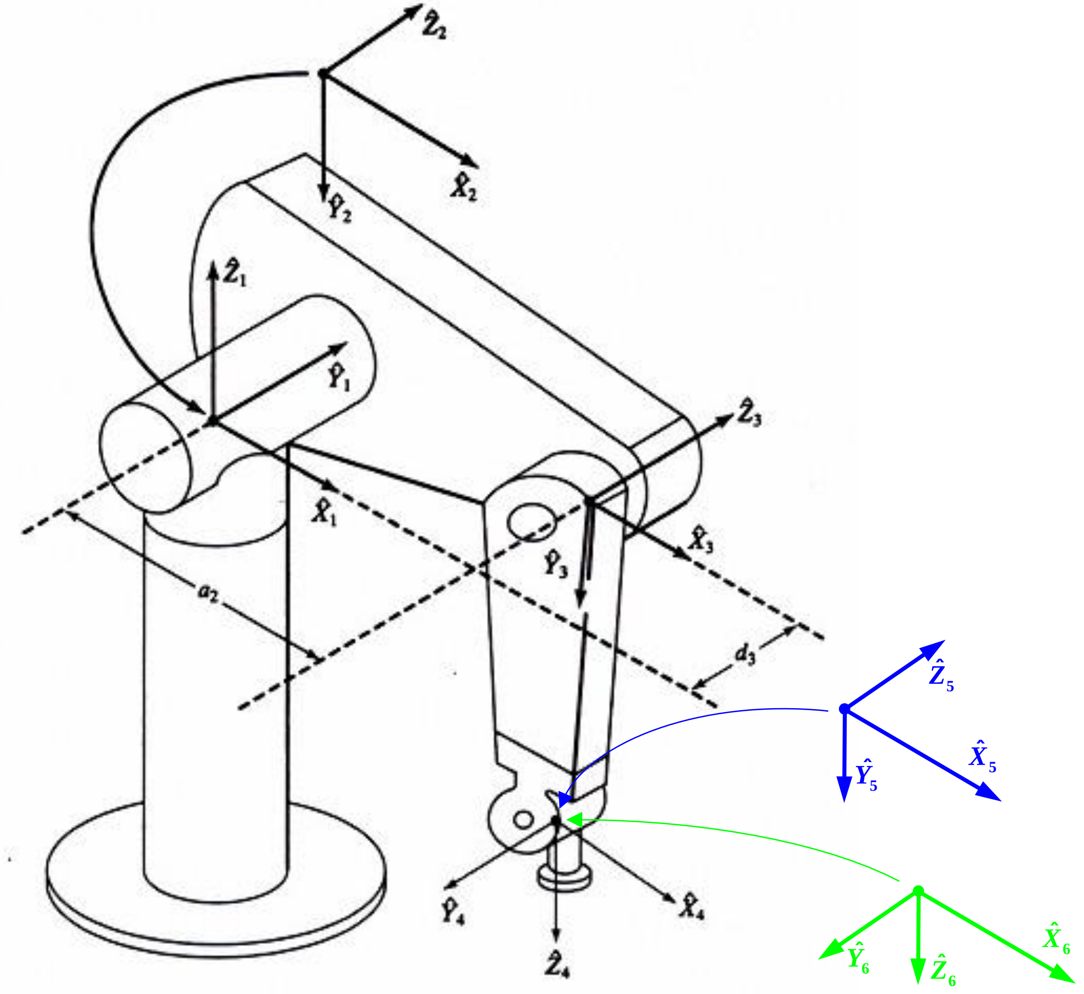


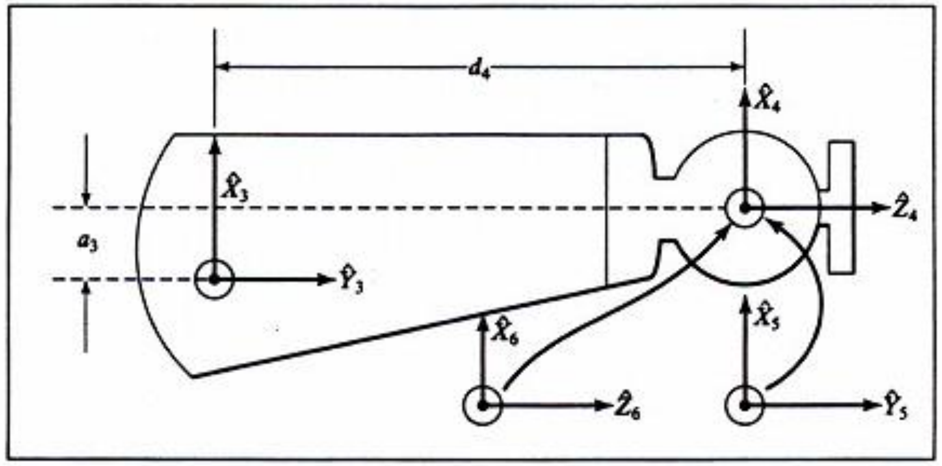
$$ {}^3_4T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^0_4T(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = {}^0_1T(\theta_1)\,{}^1_2T(\theta_2)\,{}^2_3T(\theta_3)\,{}^3_4T $$

3.3.3 PUMA560机器人的运动学方程

6R机构，轴4、5、6相互垂直且交于一点





D-H 连杆参数表

关节i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

求出每对相邻坐标系的齐次变换矩阵

$$ {}^{i-1}_{i}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{0}_{1}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{1}_{2}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{2}_{3}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{3}_{4}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{4}_{5}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{5}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

3.3 机器人正运动学

$$ {}^{3}_{4}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{4}_{5}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{5}_{6}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

从 ${}^{4}_{5}\boldsymbol{T}$ 和 ${}^{5}_{6}\boldsymbol{T}$ 相乘开始:

$$ {}^{4}_{6}\boldsymbol{T} = {}^{4}_{5}\boldsymbol{T}\,{}^{5}_{6}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{3}_{6}\boldsymbol{T} = {}^{3}_{4}\boldsymbol{T}\,{}^{4}_{6}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

3.3 机器人正运动学

$$
{}^{1}_{2}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
{}^{2}_{3}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

因为关节2和关节3是平行的，所以 ${}^{1}_{2}T$ 和 ${}^{2}_{3}T$ 的乘积用和角公式得到一个简化的表达式，只要两个旋转关节轴平行就可以这样处理，因此得到:

$$
{}^{1}_{3}\boldsymbol{T}={}^{1}_{2}\boldsymbol{T}\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
c_{23}=\cos(\theta_2+\theta_3), s_{23}=\sin(\theta_2+\theta_3)
$$

3.3 机器人正运动学

$$
{}^{3}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{3}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

继续矩阵相乘：

$$
{}^{1}_{6}\boldsymbol{T}={}^{1}_{3}\boldsymbol{T}\,{}^{3}_{6}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} {}^{1}r_{11} & {}^{1}r_{12} & {}^{1}r_{13} & {}^{1}p_x \\ {}^{1}r_{21} & {}^{1}r_{22} & {}^{1}r_{23} & {}^{1}p_y \\ {}^{1}r_{31} & {}^{1}r_{32} & {}^{1}r_{33} & {}^{1}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]-s_{23}s_5s_6 \\
{}^{1}r_{21} &= -s_4c_5c_6-c_4s_6 \\
{}^{1}r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]-c_{23}s_5c_6 \\
{}^{1}r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6+s_4c_6]+s_{23}s_5s_6 \\
{}^{1}r_{22} &= s_4c_5s_6-c_4c_6 \\
{}^{1}r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6+s_4c_6]+c_{23}s_5s_6 \\
{}^{1}r_{13} &= -c_{23}c_4s_5-s_{23}c_5 \\
{}^{1}r_{23} &= s_4s_5 \\
{}^{1}r_{33} &= s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5 \\
{}^{1}p_x &= a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23} \\
{}^{1}p_y &= d_3 \\
{}^{1}p_z &= -a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}
\end{aligned}
$$

最后，得到六个连杆坐标变换阵的乘积:

$$
{}_6^0\boldsymbol{T} = {}_1^0\boldsymbol{T}\,{}_6^1\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_5) - s_{23}s_5c_5] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
r_{21} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6 \\
r_{12} &= c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_5] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\
r_{22} &= s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\
r_{32} &= -s_{23}[c_4c_5s_6 - s_4c_6] + c_{23}s_5s_6 \\
r_{13} &= -c_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] - s_1s_4s_5 \\
r_{23} &= -s_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] + c_1s_4s_5 \\
r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\
p_x &= c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1 \\
p_y &= s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_3c_1 \\
p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}
\end{aligned}
$$

3.3.4 笛卡尔空间和关节空间

- 对于具有N个关节的串联机器人，其N 个关节变量可形成一个 $N \times 1$的关节矢量。所有关节矢量构成的空间称为关节空间。关节空间中的每一个关节矢量都确定了机器人的一个位形

- 笛卡尔空间：该空间中的每一个元素可以确定刚体的一个位姿，刚体位置在直角参考系中度量，刚体姿态按照旋转矩阵、欧拉角、固定角、等效轴角、单位四元数或其他合适的描述方式度量

- 正运动学　　关节空间→笛卡尔空间

Thanks!