第七章 动态规划

- 动态规划问题的基本概念与建模
- 动态规划的基本原理与求解
- 应用举例

例1：问题的引出

例1：某运输公司有500辆运输卡车，超负荷运输（每天满载行驶500km以上）时，年利润25万元/辆，卡车的年损坏率为0.3；低负荷运输（每天行驶300km以下），年利润16万元/辆，年损坏率为0.1。现要求制定5年计划，如何分配不同负荷下的卡车数量，使5年的总利润最大。

例1的线性规划模型

$$\max z = \sum_{i=1}^{5}(25x_{ih} + 16x_{il})$$

s.t. $x_{ih} + x_{il} = x_{ia} \qquad i = 1\cdots 5$

$$x_{ia} = (1-0.3)x_{i-1,h} + (1-0.1)x_{i-1,l} \qquad i = 2\cdots 5$$

$$x_{1a} = 500$$

$$x_{ih}, x_{il}, x_{ia} \geq 0$$

特点：递推关系

动态规划的应用对象

美国数学家R. Bellman 于50年代提出动态规划

应用对象：多阶段决策优化

阶段类型：

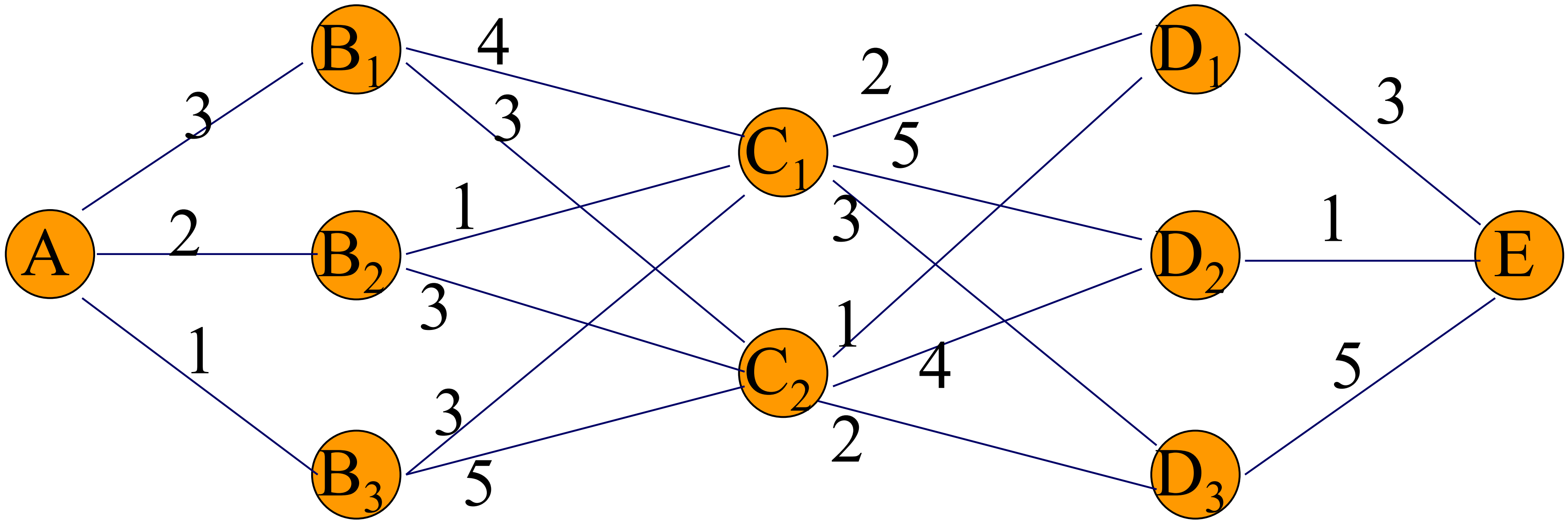
1）时间阶段

2）空间阶段

3）求解阶段

例2：最短路线问题

沿着线路网络，在A、E之间铺设一条管路，如何使总长度最小。

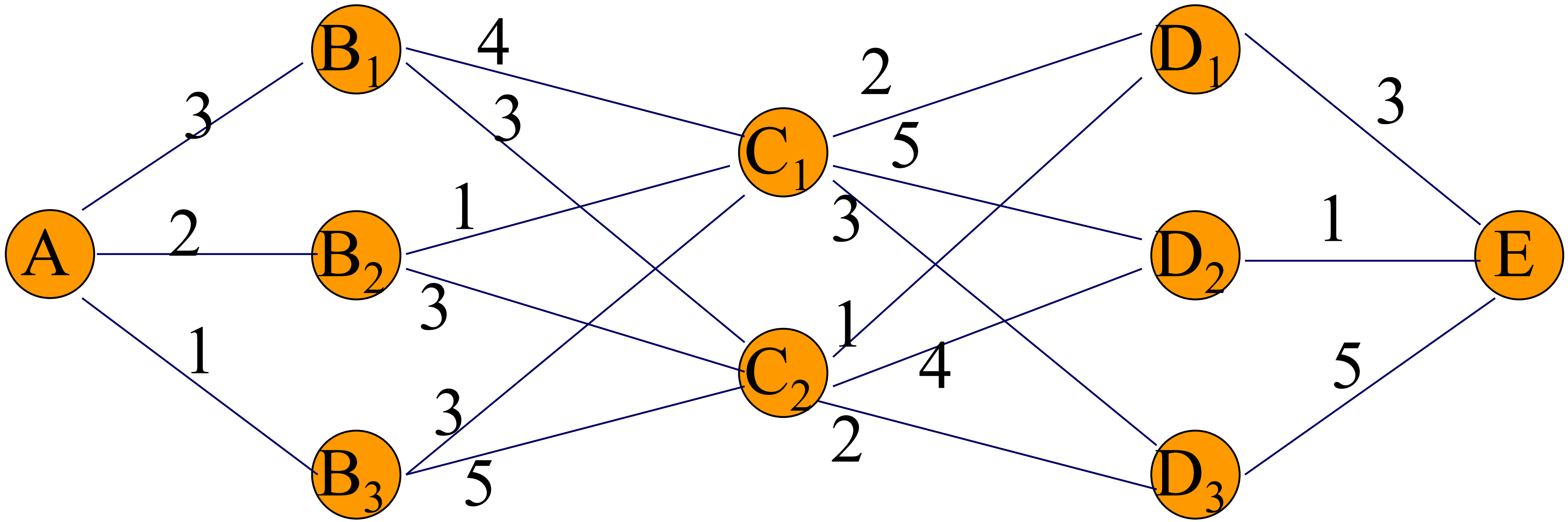


动态规划的基本概念

1。阶段
2。状态
3。决策和策略
4。状态转移方程
5。指标函数

1、阶段

- 阶段：问题过程按时间、空间的特征分解成若干相互联系的阶段。



2、状态

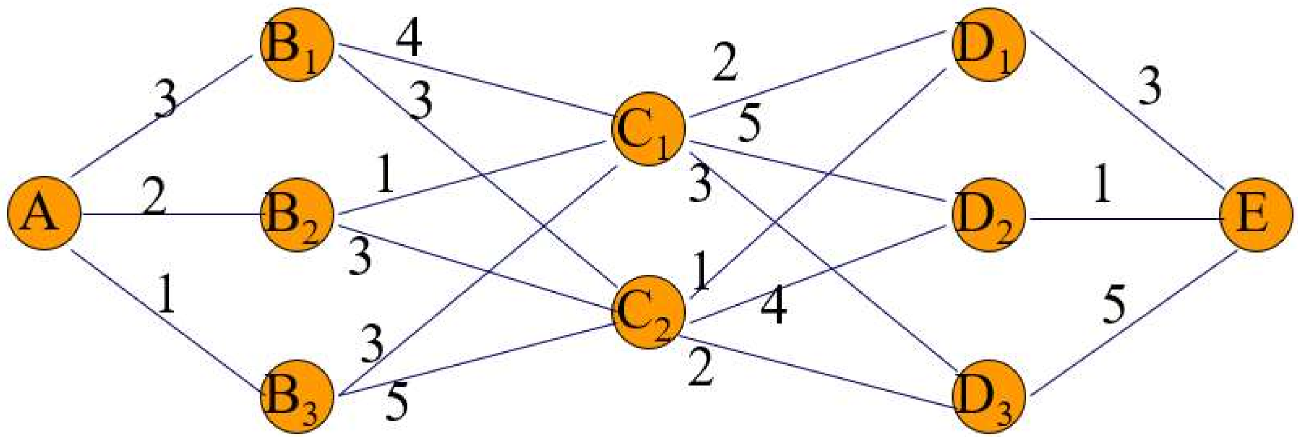
- 状态：k阶段开始（或结束）时的客观条件，记为$s_k \in S_k$，S_k为k阶段状态集合。

如例2中，$S_1=\{A\}$

$S_2=\{B_1, B_2, B_3\}$

$S_3=\{C_1, C_2\}$

$S_4=\{D_1, D_2, D_3\}$



3、决策

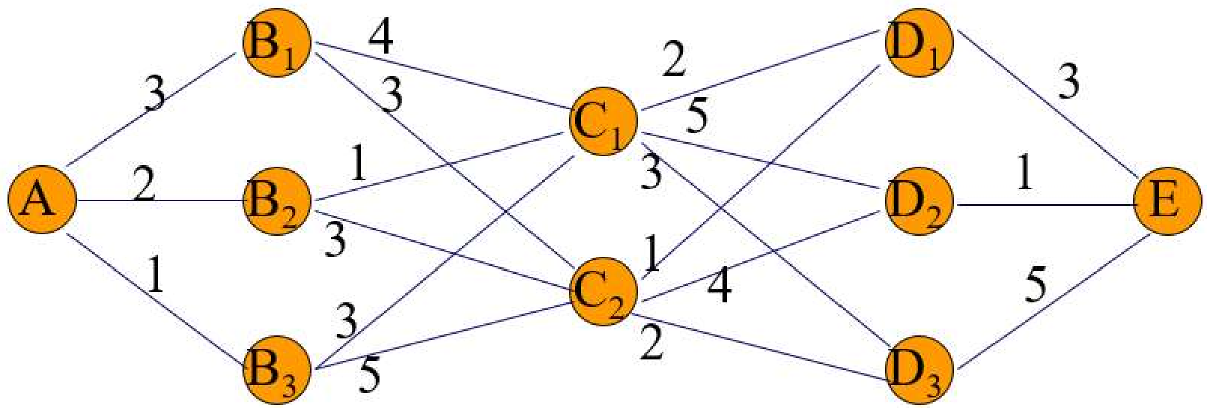
- 决策：依据状态做出的决定，记为 $u_k(s_k)\in D_k(s_k)$, $D_k\,(s_k)$为状态s_k的允许决策集合。

例2中：

$D_1(A)=\{B_1,\ B_2,\ B_3\}$ $u_1(A)=B_i$ $i=1,2,3$

$D_2(B_1)=\{C_1,\ C_2\}$ $u_2(B_1)=C_i$ $i=1,2$

……



策略

- 策略各阶段决策依次构成的决策序列。记为

$$p_{1,n}=\{u_1(s_1), u_2(s_2),\ldots, u_n(s_n)\}\in \mathrm{P}$$

P为允许策略集合。

例2中

允许策略的总数为：$3\times2\times3\times1=18$

动态规划的目的是要选择最优的一种策略

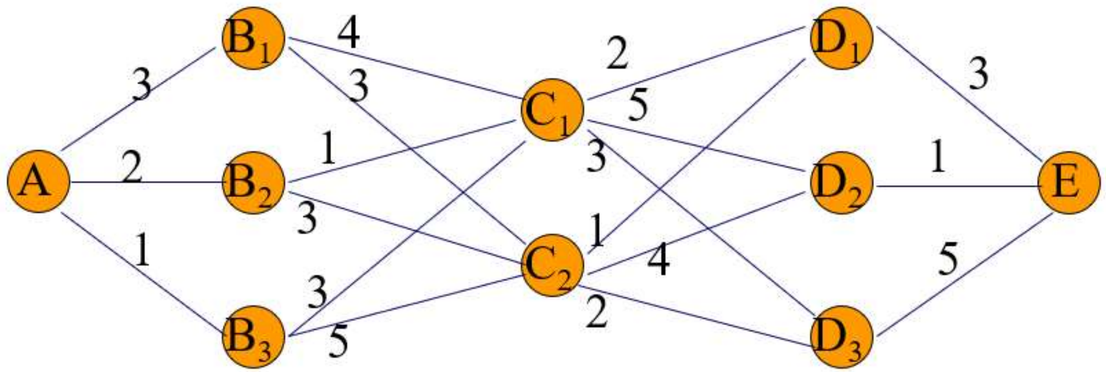
4、状态转移方程

- 状态转移方程：描述当前状态在给定决策下转移至下一阶段的过程：

$$s_{k+1}=T_k(s_k, u_k(s_k))$$

状态转移方程给出了一种一步递推关系。

在例2中：　$s_{k+1}=u_k(s_k)$



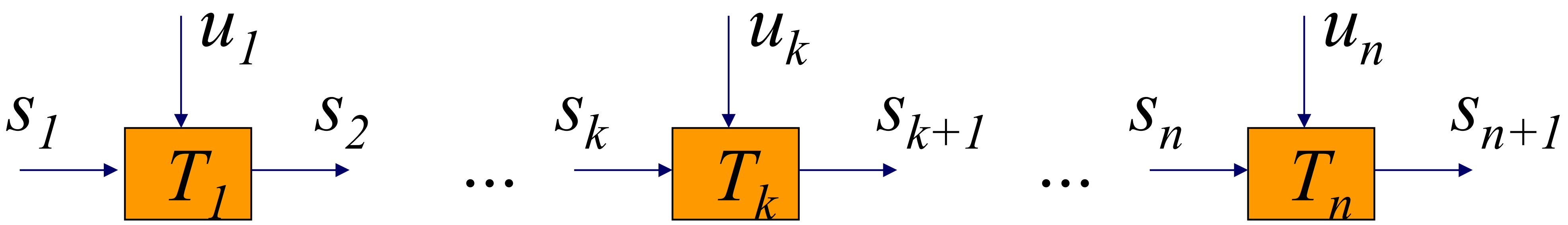
状态的无后效性

- 状态的无后效性：给定某阶段的状态s_k，则以后各阶段的状态s_l（$l>k$）都只受s_k的影响，与之前的状态无关。

动态规划要求问题的状态具有无后效性！

问题：如果不满足无后效性如何处理？

子过程与子策略

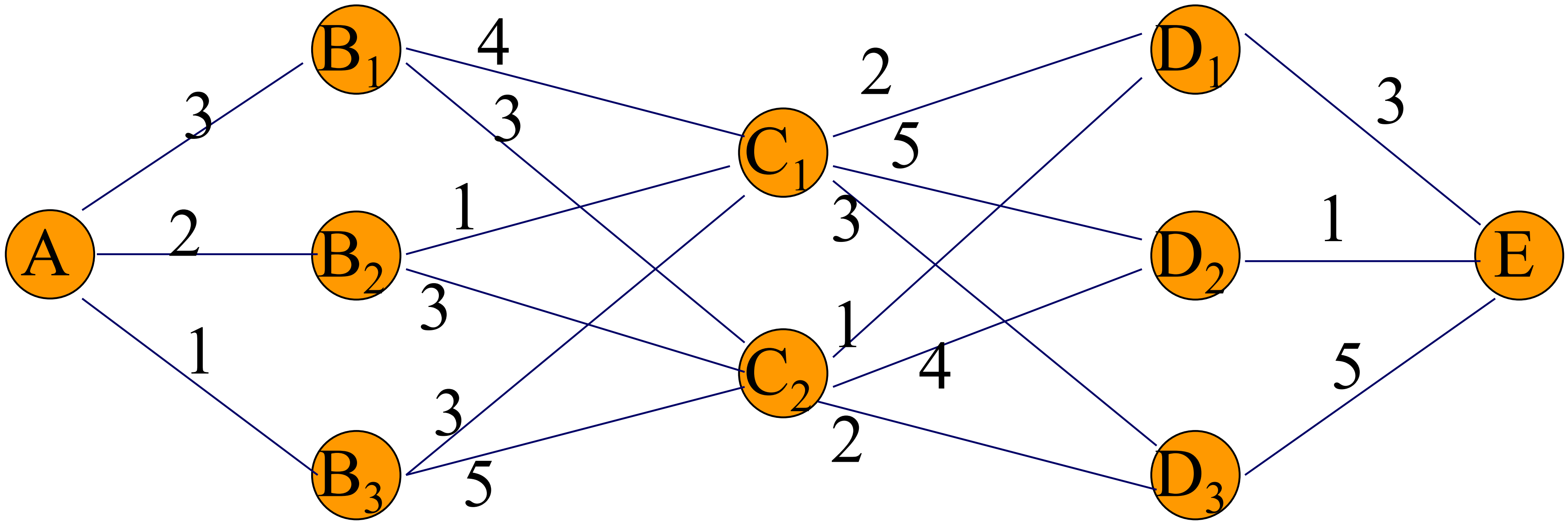


- 后部子过程策略，从k阶段开始到终了阶段的决策子序列，记为

$$p_{k,n}(s_k)=\{u_k(s_k),\ u_{k+1}(s_{k+1}),\ldots,\ u_n(s_n)\}\in P_{k,n}(s_k)$$

5、指标函数

- 指标函数：评价沿子策略$p_{k,n}$过程性能优劣的函数，记为$V_{k,n}(s_k, p_{k,n})$。



$$V_{4,4}(D_1, p_{4,4}) = V_{4,4}(D_1, u_{4}) = v_4(D_1, E) = 3$$

指标函数的可分离性

为了实现动态规划的递推结构，要求

指标函数具有可分离性

$$V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) = \varphi_k(s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n}))$$

φ_k是$V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$的严格单调函数。

求和型指标函数

φ_k的常见的形式有：

$$V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) = V_{k,k}(s_k, u_k) + V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$$

$$= v_k(s_k, u_k) + V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$$

$$= \sum_{j=k}^{n} v_j(s_j, u_j)$$

阶段指标函数

乘积型指标函数

$$V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) = V_{k,k}(s_k, u_k)V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$$

$$= \prod_{j=k}^{n} v_j(s_j, u_j)$$

最优策略与最优指标函数

最优指标函数：

$$f_k(s_k) = V_{k,n}(s_k, p_{k,n}^*) = \underset{p_{k,n} \in P_{k,n}}{opt} V_{k,n}(s_k, p_{k,n})$$

$p^*_{k,n}$为最优策略

系统的整体优化目标：

$$f_1(s_1) = \underset{p_{1,n} \in P_{1,n}}{opt} V_{1,n}(s_1, p_{1,n}) = V_{1,n}(s_1, p_{1,n}^*)$$

第七章 动态规划

- 动态规划问题的基本概念与建模
- 动态规划的基本原理与求解
- 应用举例

最优化原理

- 最优化原理： 最优策略的子策略是对应子问题的最优策略。

$$V_{1,n}(s_1, p^*_{1,n}) = \mathop{opt}_{p_{1,k-1}\in P_{1,k-1}} \left(V_{1,k-1}(s_1, p_{1,k-1}) + \mathop{opt}_{p_{k,n}\in P_{k,n}} V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) \right)$$

$$f_1(s_1) = \mathop{opt}_{p_{1,k-1}\in P_{1,k-1}} \left(V_{1,k-1}(s_1, p_{1,k-1}) + f_k(s_k) \right)$$

最优化原理只是策略最优的一个必要条件

最优化定理

◆ 最优化定理：策略$p^*_{1,n}$是最优策略的充要条件是，对于所有的k，都有：

$$\boxed{f_1(s_1)}$$

$$\boxed{f_k(s_k)}$$

$$V_{1,n}(s_1, p^*_{1,n})$$

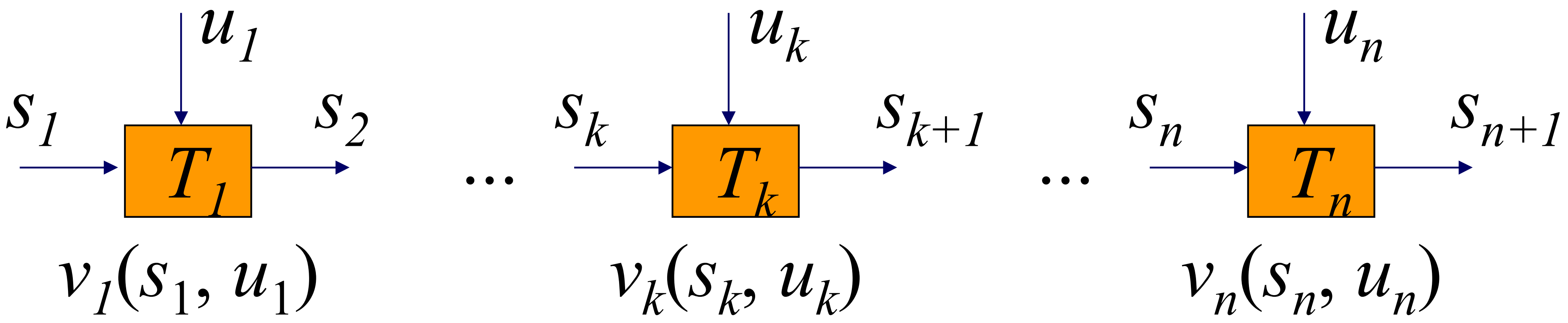
$$= \underset{p_{1,k-1} \in P_{1,k-1}}{opt} \left(V_{1,k-1}(s_1, p_{1,k-1}) + \underset{p_{k,n} \in P_{k,n}}{opt} V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) \right)$$

逆序解法

逆序解法：

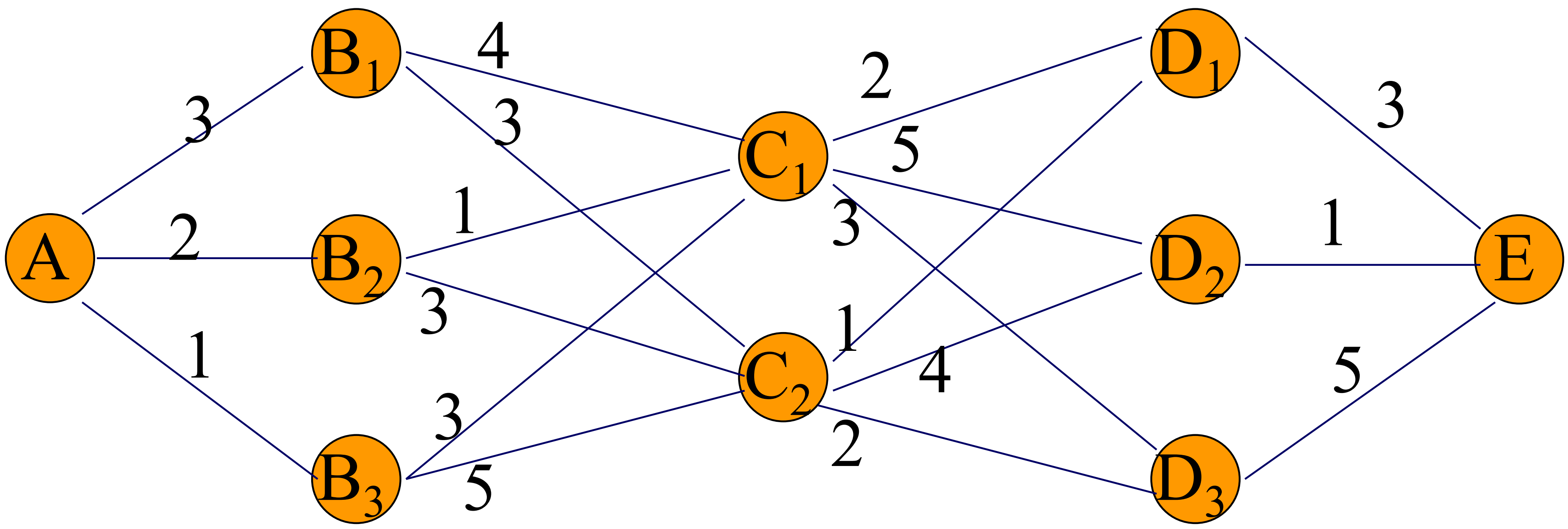
$$f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{opt} \left(v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) \right)$$

$$f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$$

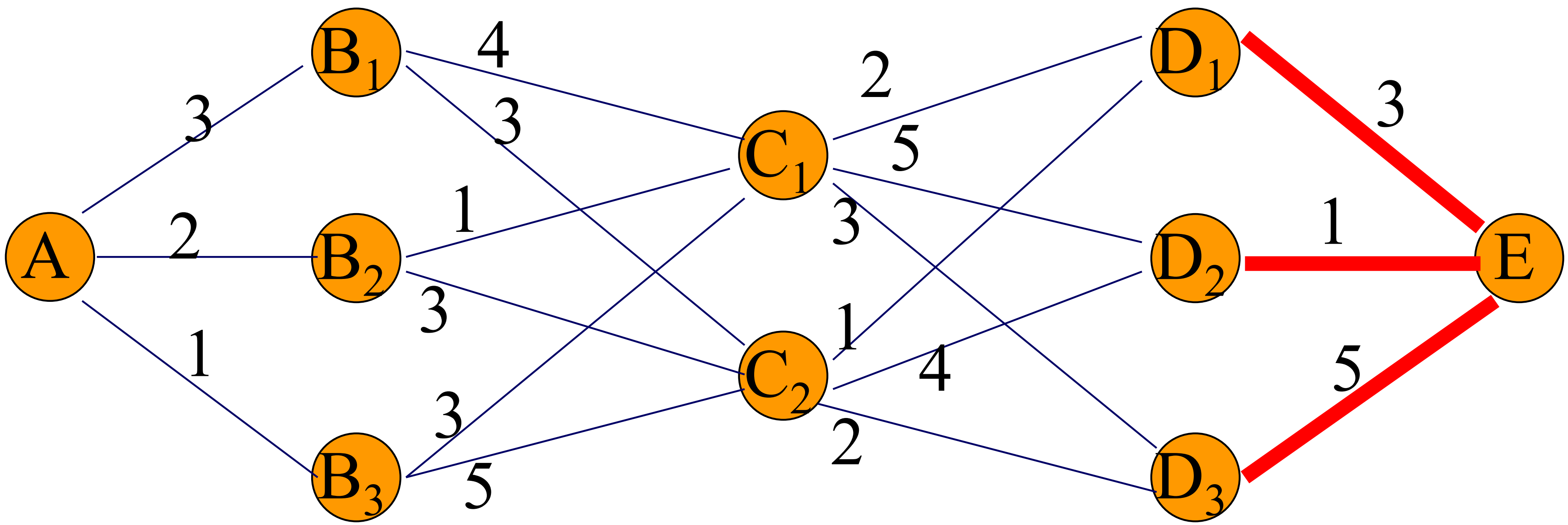


例2：逆序法解

沿着线路网络，在A、E之间铺设一条管路，如何使总长度最小。



第1步

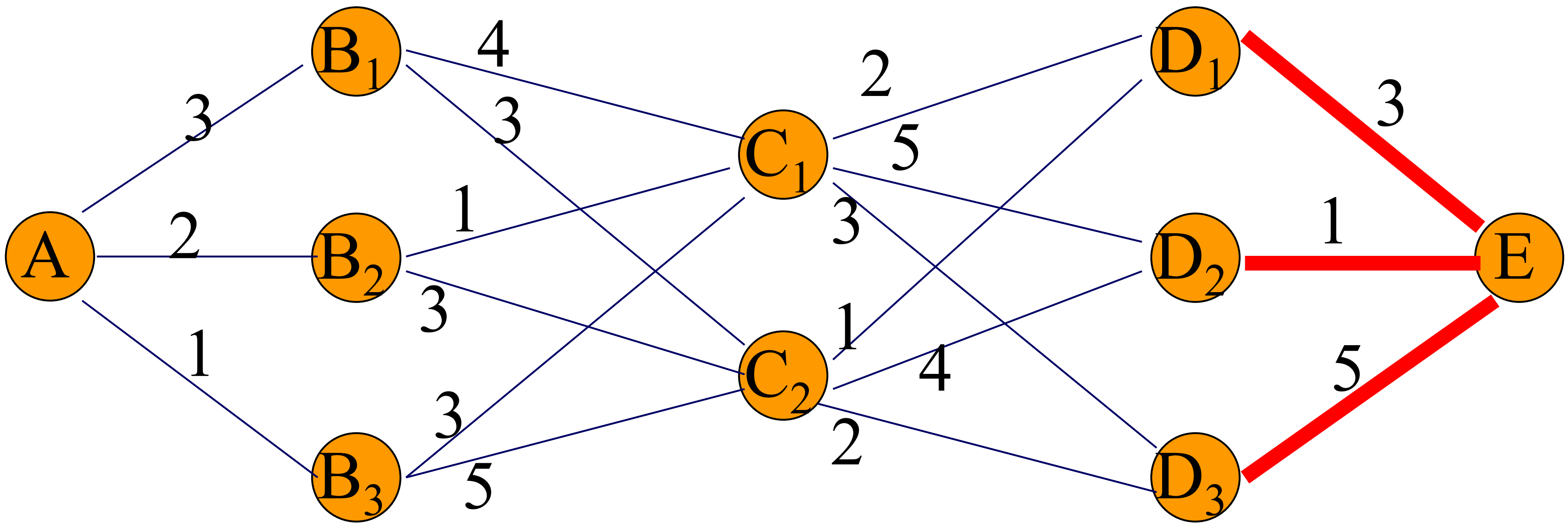


$S_4=\{D_1,\ D_2,\ D_3\}$， $u_4(s_4)=\{\ E\ \}$,

$$f_4(s_4)=\min_{u4\ \in D4\ (s4)}\{\ v_4(s_4,u_4)+f_5(s_5)\}$$

$$f_4(D_1)=v_4(D_1,E)=3,\quad f_4(D_2)=1,\quad f_4(D_3)=5$$

第2步

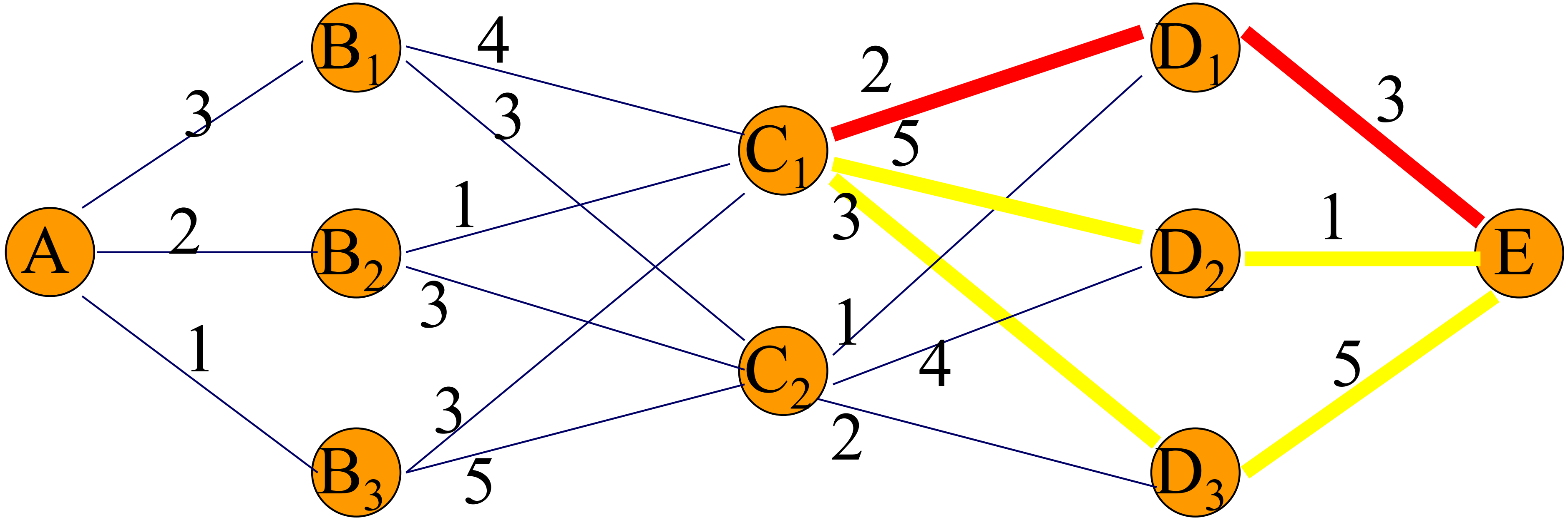


$S_3 = \{C_1, \ C_2\}$

$$f_3(s_3) = \min_{u_3 \in D_3(s_3)} \{ v_3(s_3, u_3) + f_4(s_4) \}$$

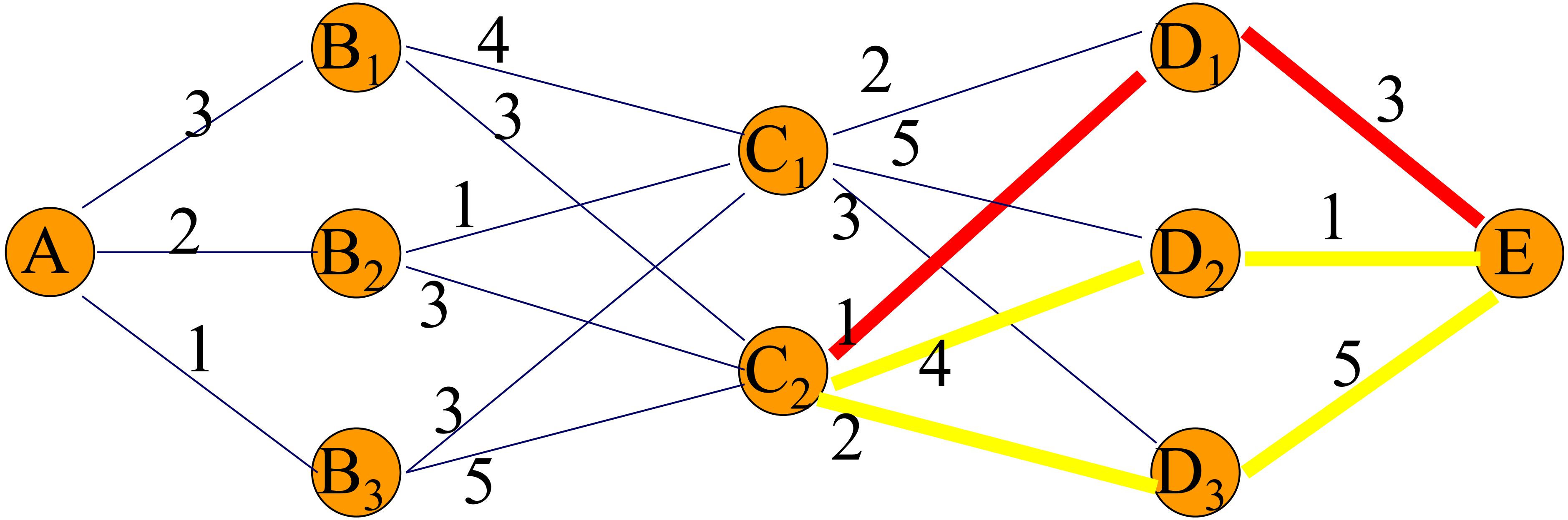
$D_3(C_1) = \{D_1, \ D_2, \ D_3\}$; $D_3(C_2) = \{D_1, \ D_2, \ D_3\}$

第2步（1）



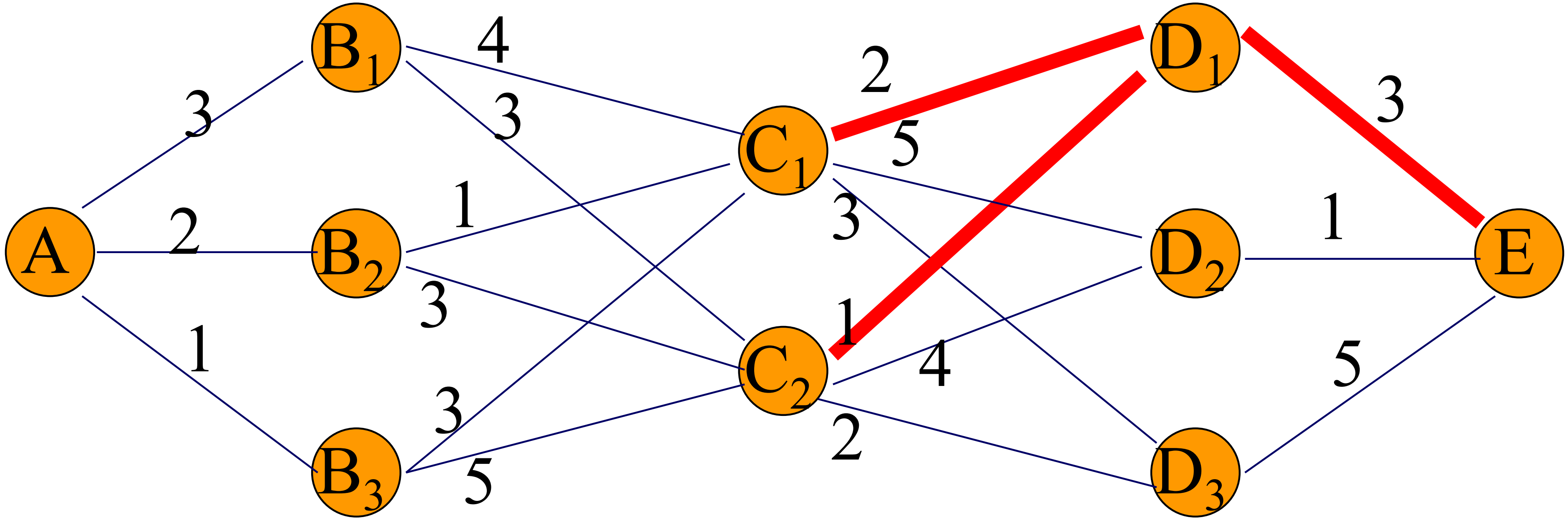
$$f_3(C_1)=\min\begin{Bmatrix} v_3(C_1,D_1)+f_4(D_1) \\ v_3(C_1,D_2)+f_4(D_2) \\ v_3(C_1,D_3)+f_4(D_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2+3 \\ 5+1 \\ 3+5 \end{Bmatrix}=5$$

第2步（2）



$$f_3(C_2)=\min\begin{Bmatrix} v_3(C_2,D_1)+f_4(D_1) \\ v_3(C_2,D_2)+f_4(D_2) \\ v_3(C_2,D_3)+f_4(D_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1+3 \\ 4+1 \\ 2+5 \end{Bmatrix}=4$$

第3步

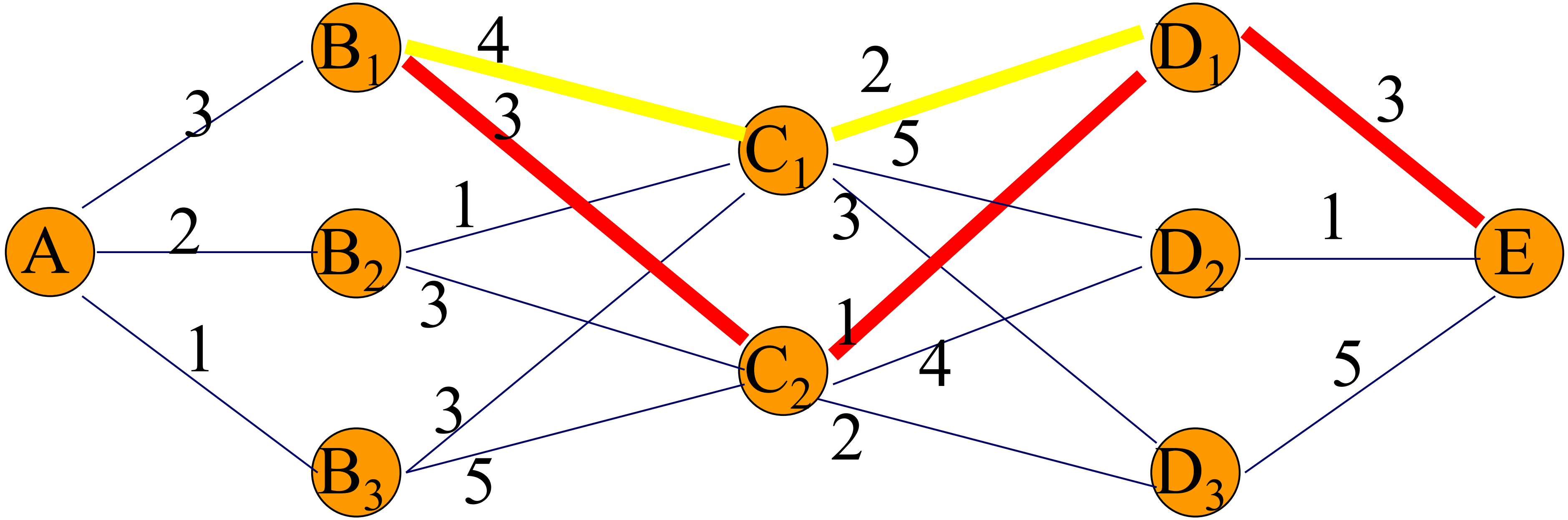


$S_2=\{B_1, \ B_2, \ B_3\}$

$$f_2(s_2)=\min_{u2 \in D2(s2)}\{ v_2(s_2, u_2)+f_3(s_3)\}$$

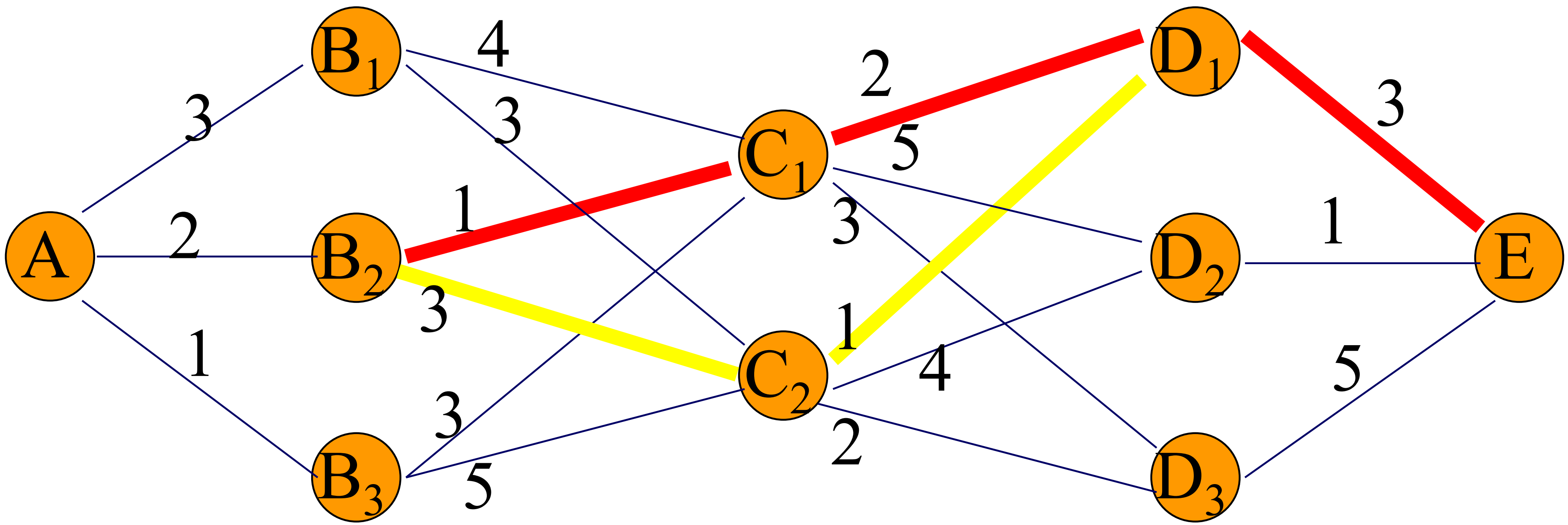
$D_2(B_1)=\{C_1,C_2\}$; $D_2(B_2)=\{C_1,C_2\}$; $D_2(B_3)=\{C_1,C_2\}$

第3步(1)



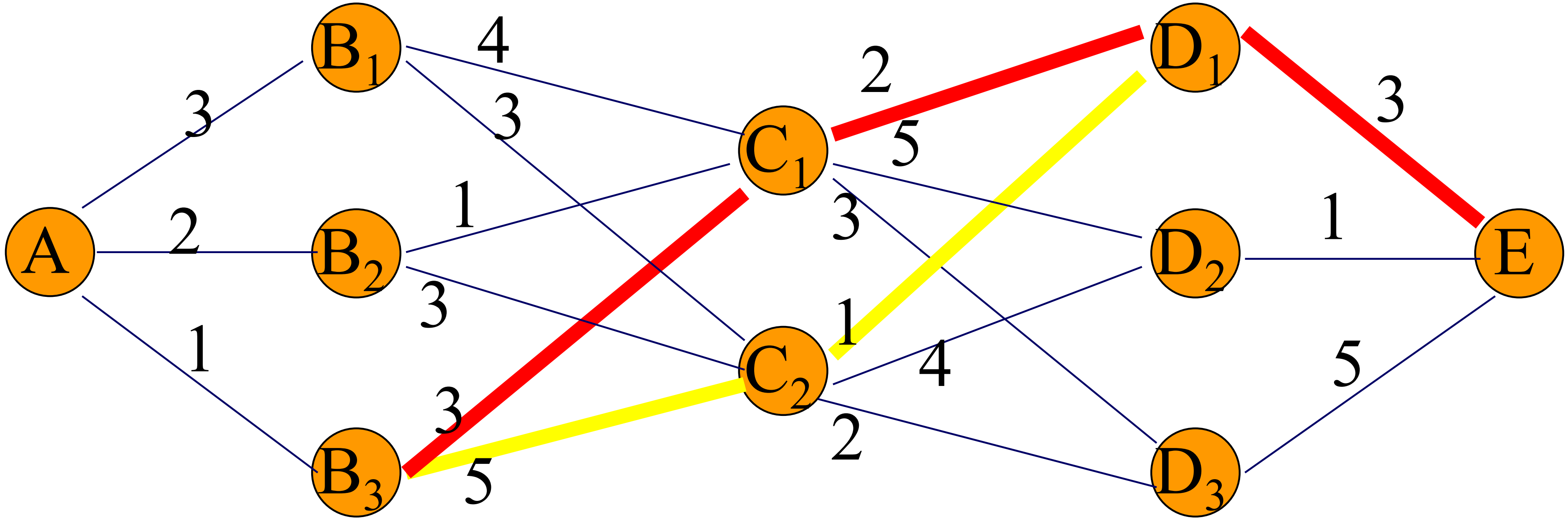
$$f_2(B_1)=\min\begin{Bmatrix} v_2(B_1,C_1)+f_3(C_1) \\ v_2(B_1,C_2)+f_3(C_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4+5 \\ 3+4 \end{Bmatrix}=7$$

第3步(2)



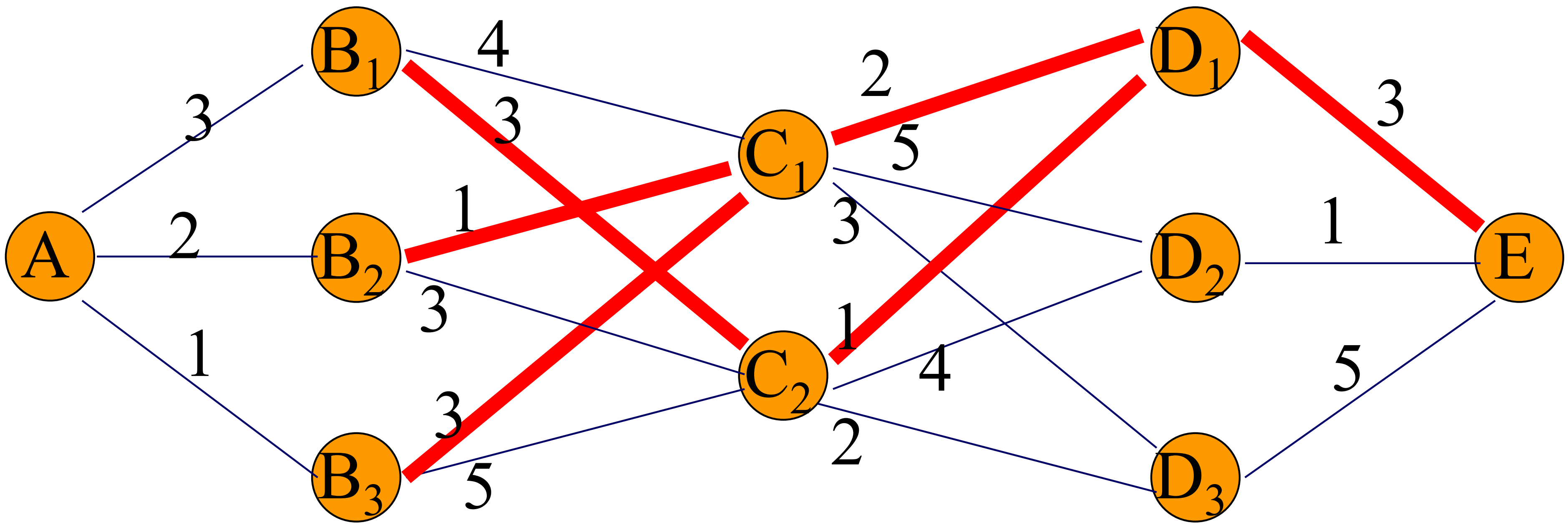
$$f_2(B_2)=\min\begin{Bmatrix} v_2(B_2,C_1)+f_3(C_1) \\ v_2(B_2,C_2)+f_3(C_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1+5 \\ 3+4 \end{Bmatrix}=6$$

第3步(3)



$$f_2(B_3)=\min\begin{Bmatrix} v_2(B_3,C_1)+f_3(C_1) \\ v_2(B_3,C_2)+f_3(C_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3+5 \\ 5+4 \end{Bmatrix}=8$$

第4步

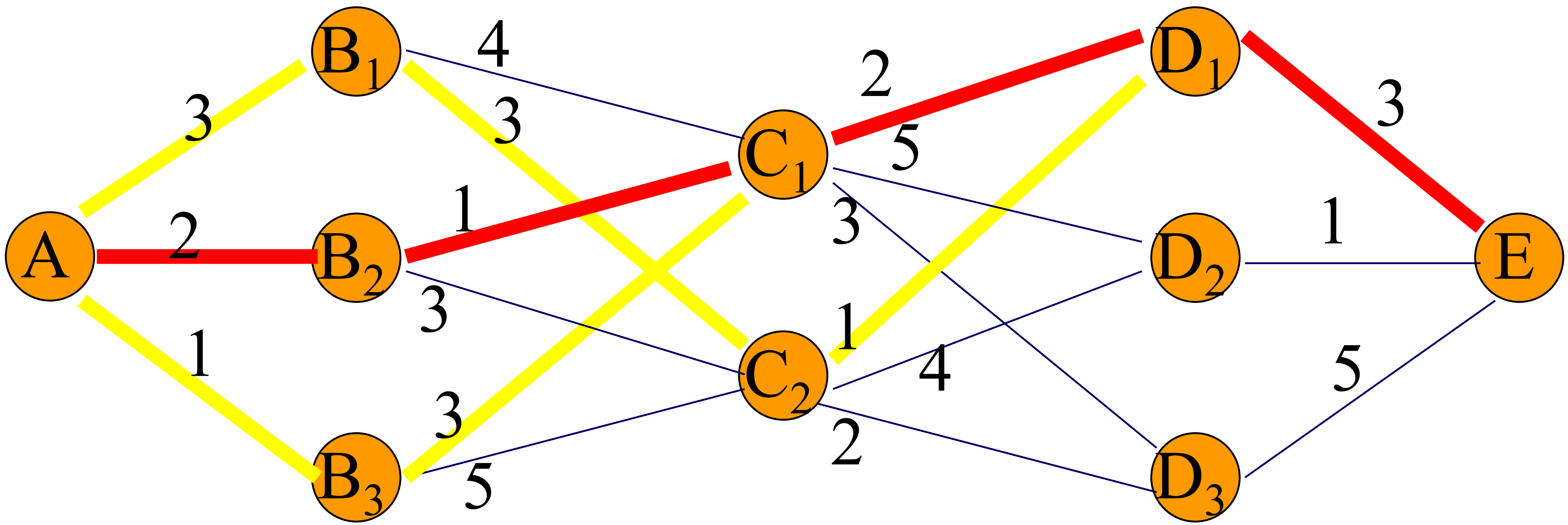


$S_1=\{A\}$

$$f_1(s_1)=\min_{u_2 \in D_1(s_1)}\{\, v_1(s_1, u_1)+f_2(s_2)\}$$

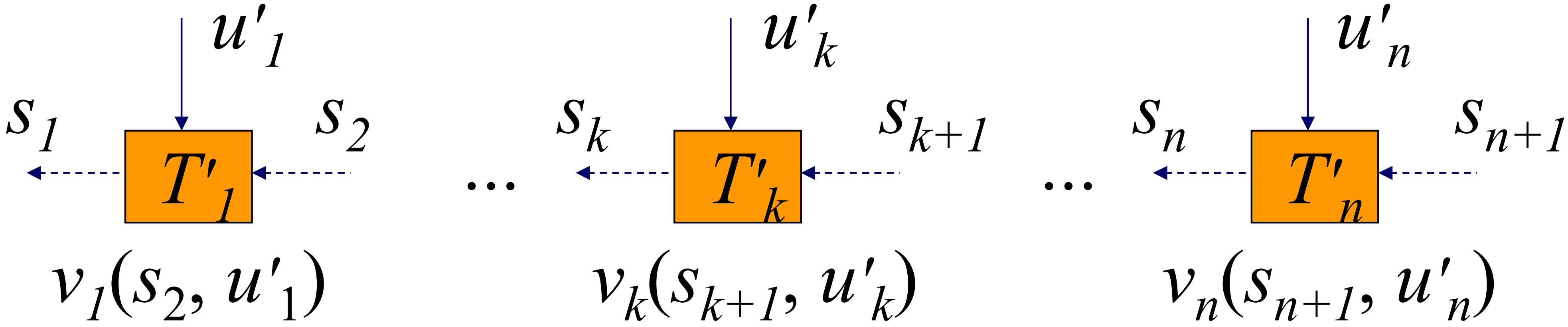
$D_1(A)=\{B_1, B_2, B_3\}$

第4步(1)



$$f_1(A)=\min\begin{Bmatrix} v_1(A,B_1)+f_2(B_1) \\ v_1(A,B_2)+f_2(B_2) \\ v_1(A,B_3)+f_2(B_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3+7 \\ 2+6 \\ 1+8 \end{Bmatrix}=8$$

顺序解法



状态转移方程： $s_{k+1}=T_k(s_k, u_k(s_k))$

$\Leftrightarrow s_k=T'_k(s_{k+1}, u'_k(s_{k+1}))$

阶段指标函数： $v_k(s_k, u_k) \Leftrightarrow v_k(s_{k+1}, u'_k)$

最优指标函数： $f_k(s_{k+1})$表示起点s_1到s_{k+1}的最优效益值

顺序解法迭代方式

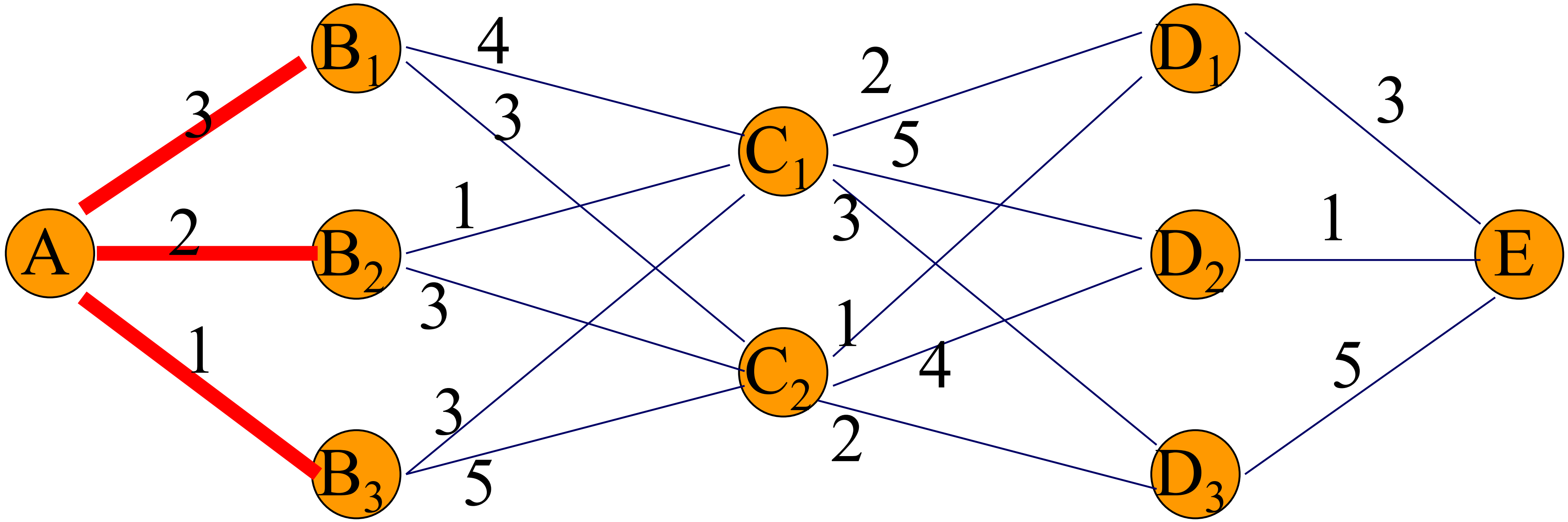
顺序解法迭代方式：

$$f_k(s_{k+1}) = \underset{u_k \in D_k(s_{k+1})}{opt} \left(v_k(s_{k+1}, u_k) + f_{k-1}(s_k) \right)$$

$$f_0(s_1) = 0$$

k阶段状态

第1步

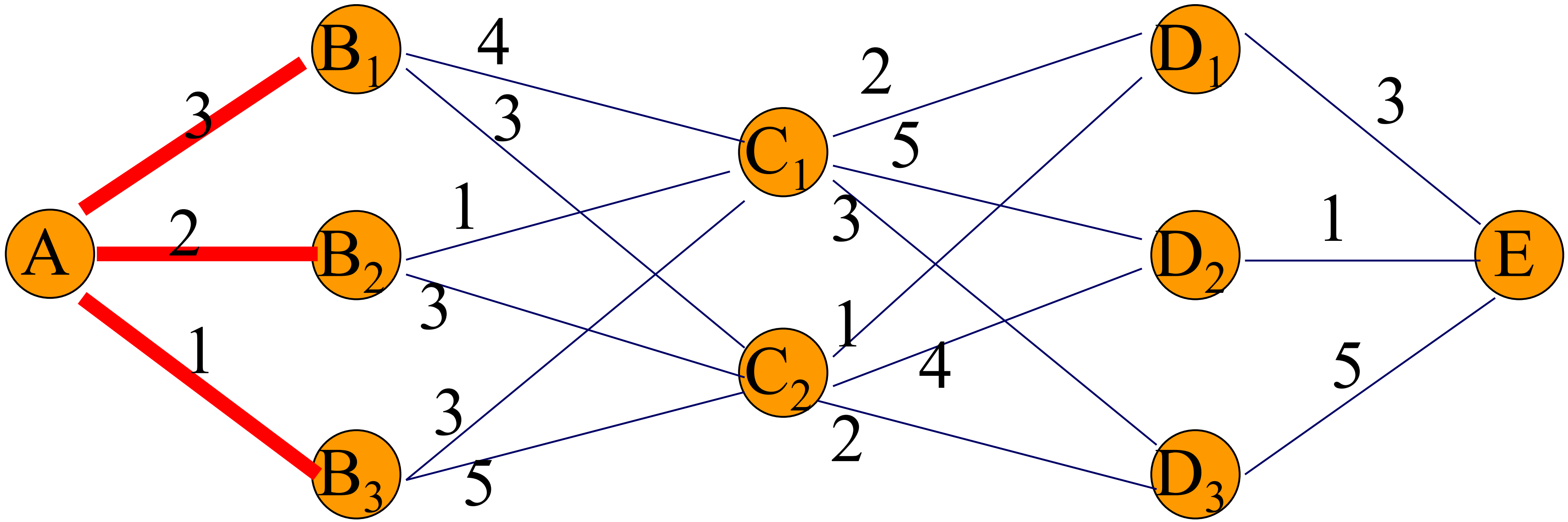


$S_2=\{B_1, B_2, B_3\}$， $u_1(s_2)=\{A\}$,

$f_1(s_2)=v_1(s_2, u_1)$

$f_1(B_1)= v_1(B_1, A)=3$, $f_1(B_2)=2$, $f_1(B_3)=1$

第2步

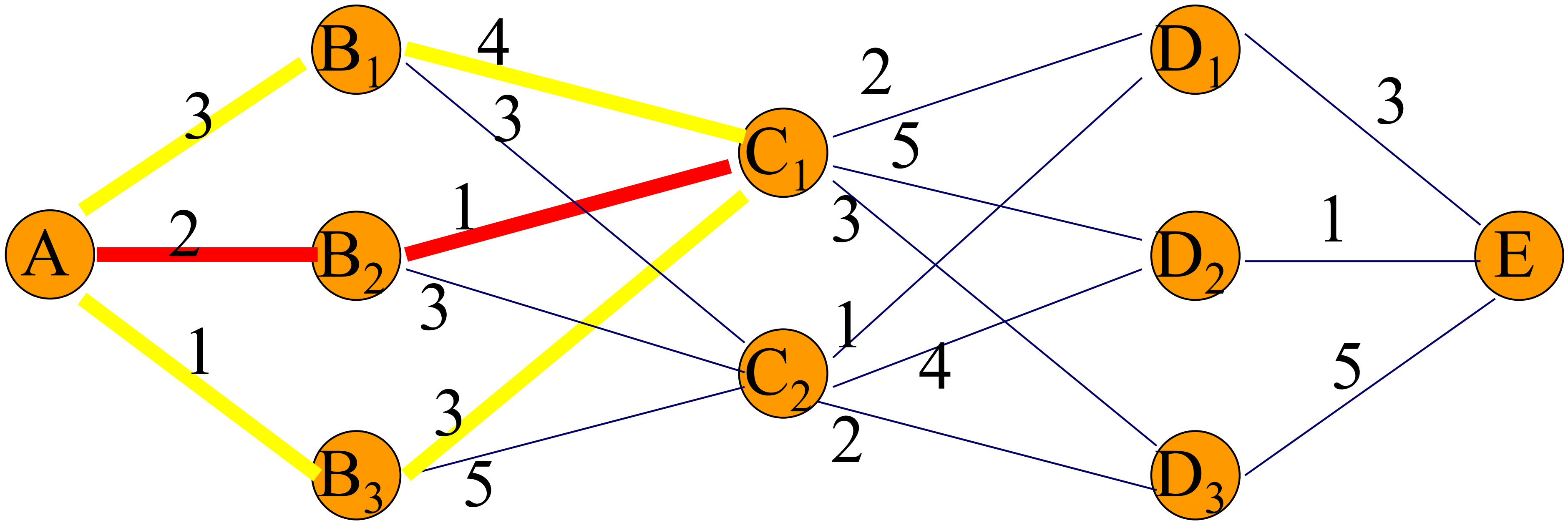


$S_3=\{C_1,\ C_2\}$

$$f_2(s_3)=\min_{u_2 \in D_2(s_3)}\{\, v_2(s_3, u_2)+f_1(s_2)\}$$

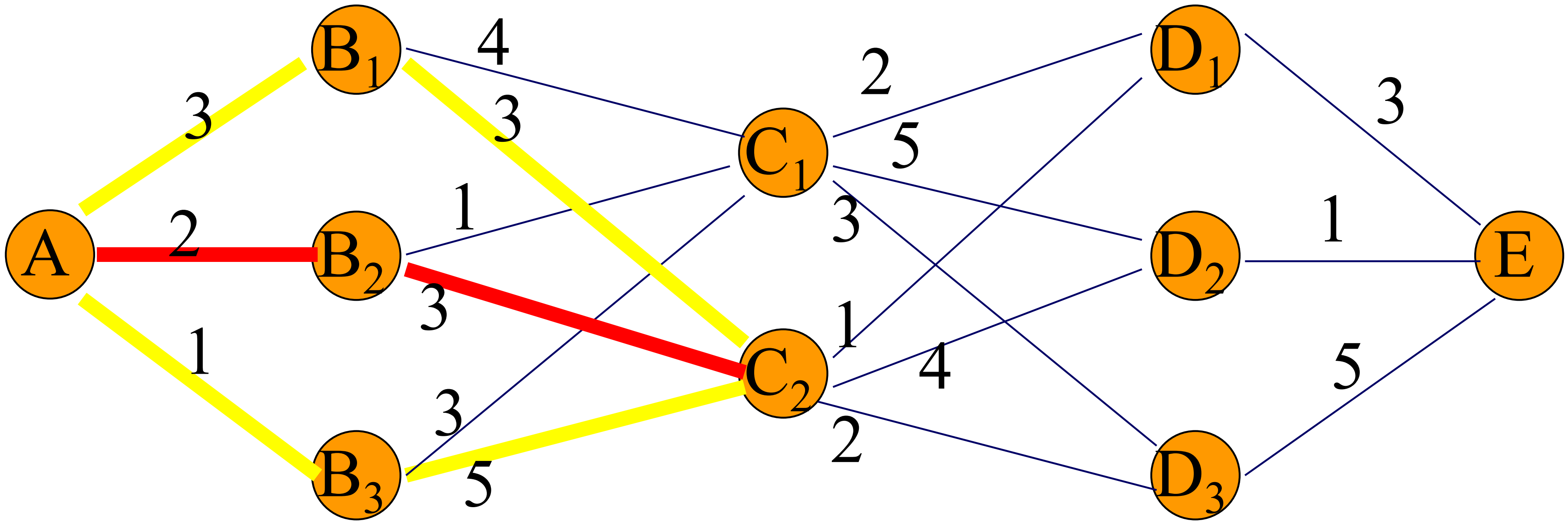
$D_2(C_1)=\{B_1,\ B_2,\ B_3\}$; $D_2(C_2)=\{B_1,\ B_2,\ B_3\}$

第2步（1）



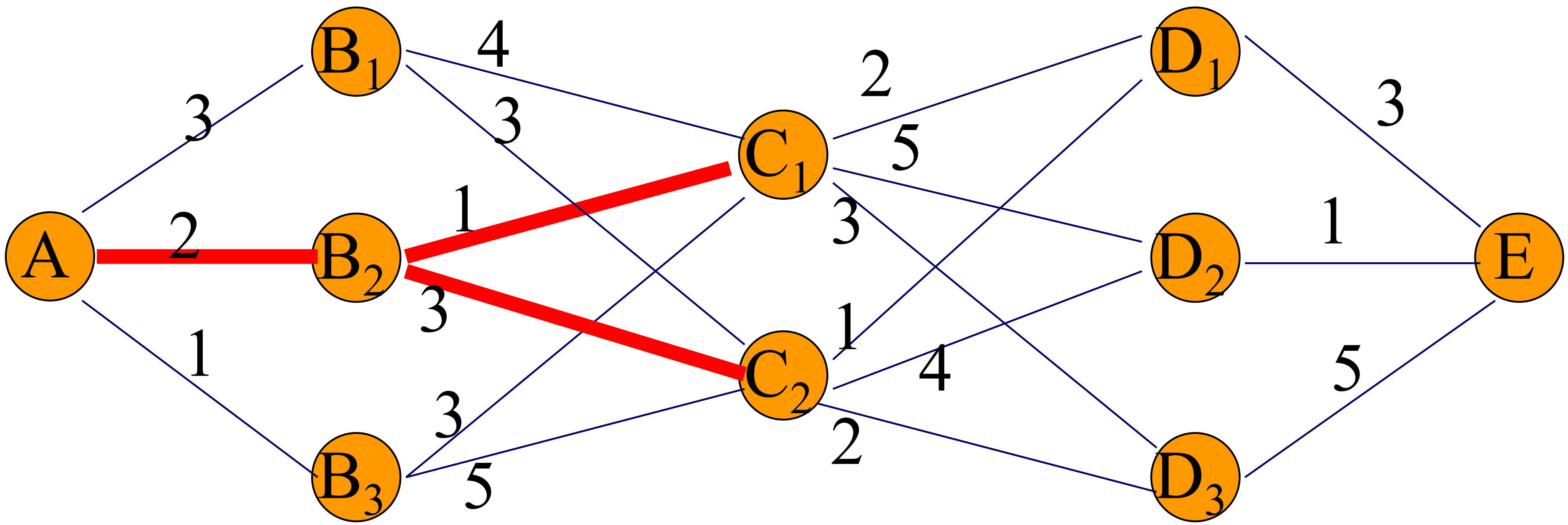
$$f_2(C_1)=\min\begin{Bmatrix} v_2(C_1,B_1)+f_1(B_1) \\ v_2(C_1,B_2)+f_1(B_2) \\ v_2(C_1,B_3)+f_1(B_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4+3 \\ 1+2 \\ 3+1 \end{Bmatrix}=3$$

第2步（2）



$$f_2(C_2)=\min\begin{Bmatrix} v_2(C_2,B_1)+f_1(B_1) \\ v_2(C_2,B_2)+f_1(B_2) \\ v_2(C_2,B_3)+f_1(B_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3+3 \\ 3+2 \\ 5+1 \end{Bmatrix}=5$$

第3步

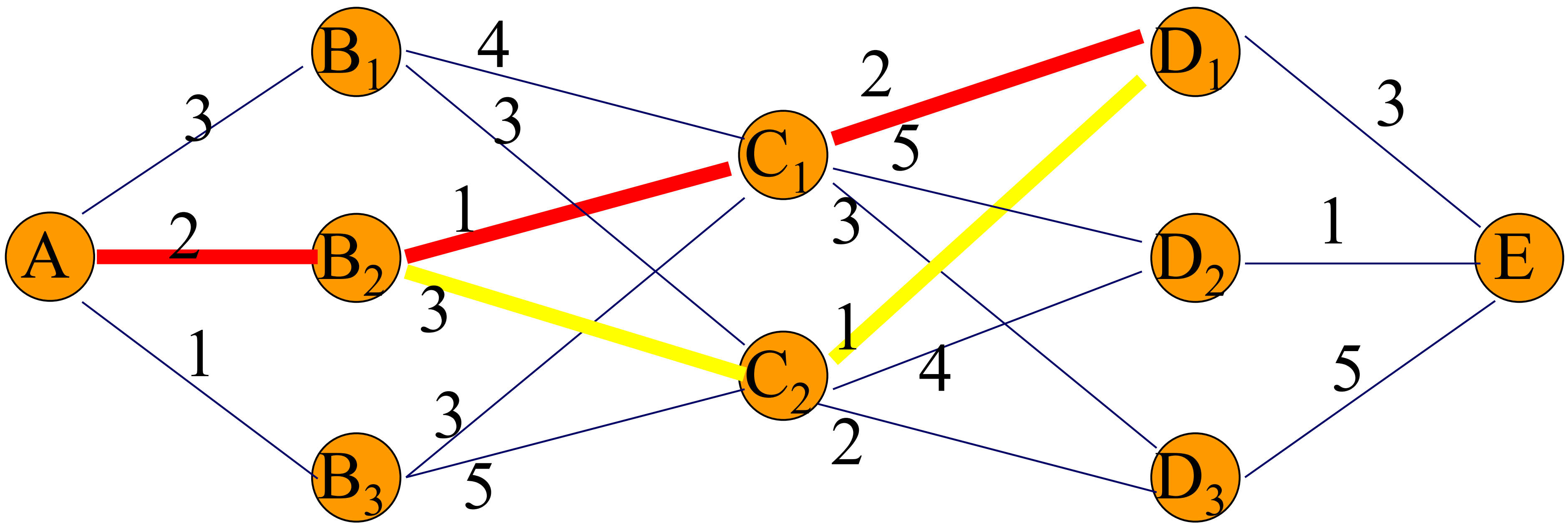


$S_4=\{D_1, \quad D_2, \quad D_3\}$

$$f_3(s_4)=\min_{u_3 \in D_3(s_4)}\{\, v_3(s_4, u_3)+f_2(s_3)\}$$

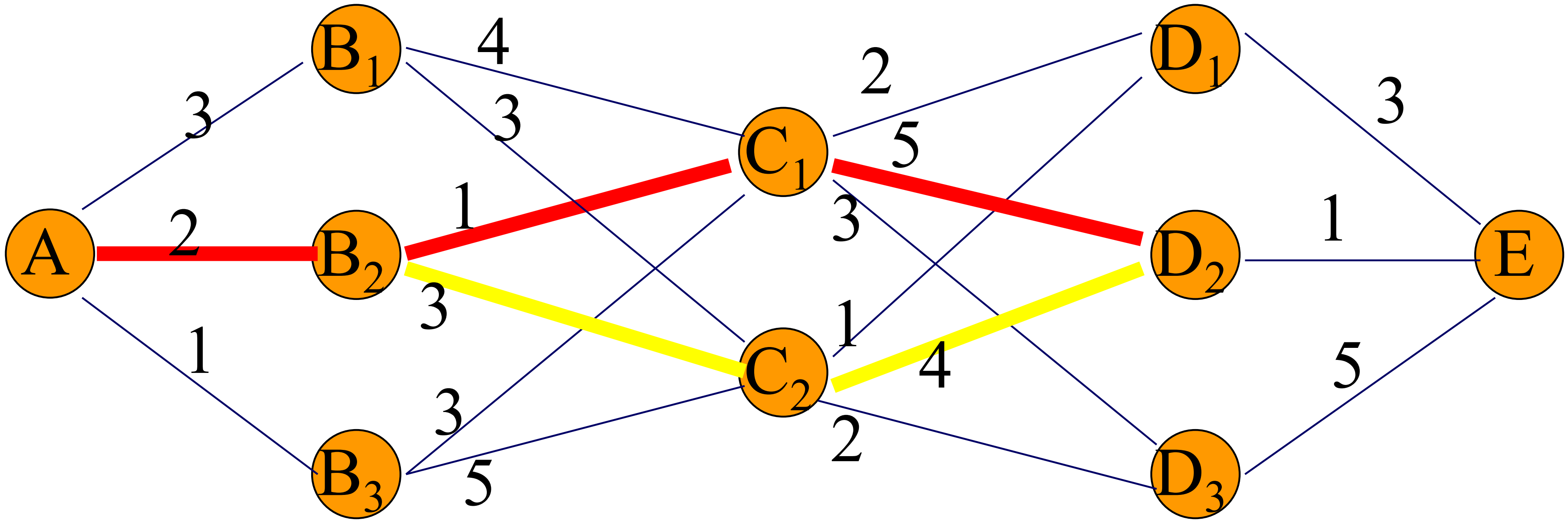
$D_3(D_1)=\{C_1,C_2\}$; $D_3(D_2)=\{C_1,C_2\}$; $D_3(D_3)=\{C_1,C_2\}$

第3步(1)



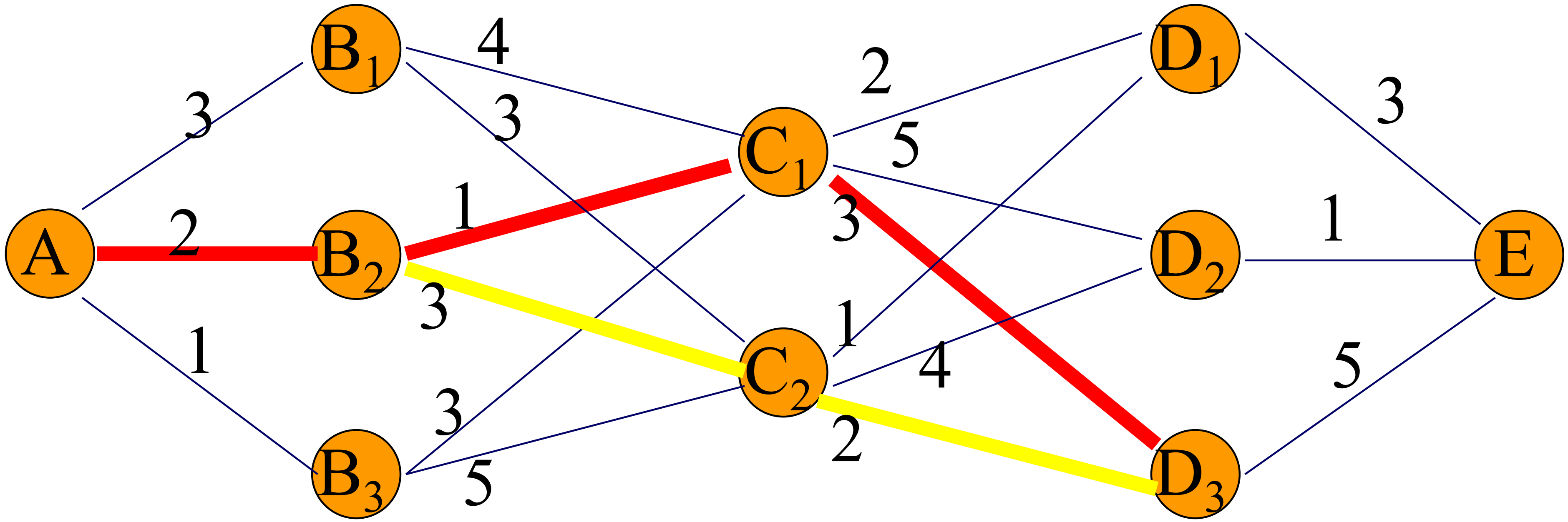
$$f_3(D_1)=\min\begin{Bmatrix} v_3(D_1,C_1)+f_2(C_1) \\ v_3(D_1,C_2)+f_2(C_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2+3 \\ 1+5 \end{Bmatrix}=5$$

第3步(2)



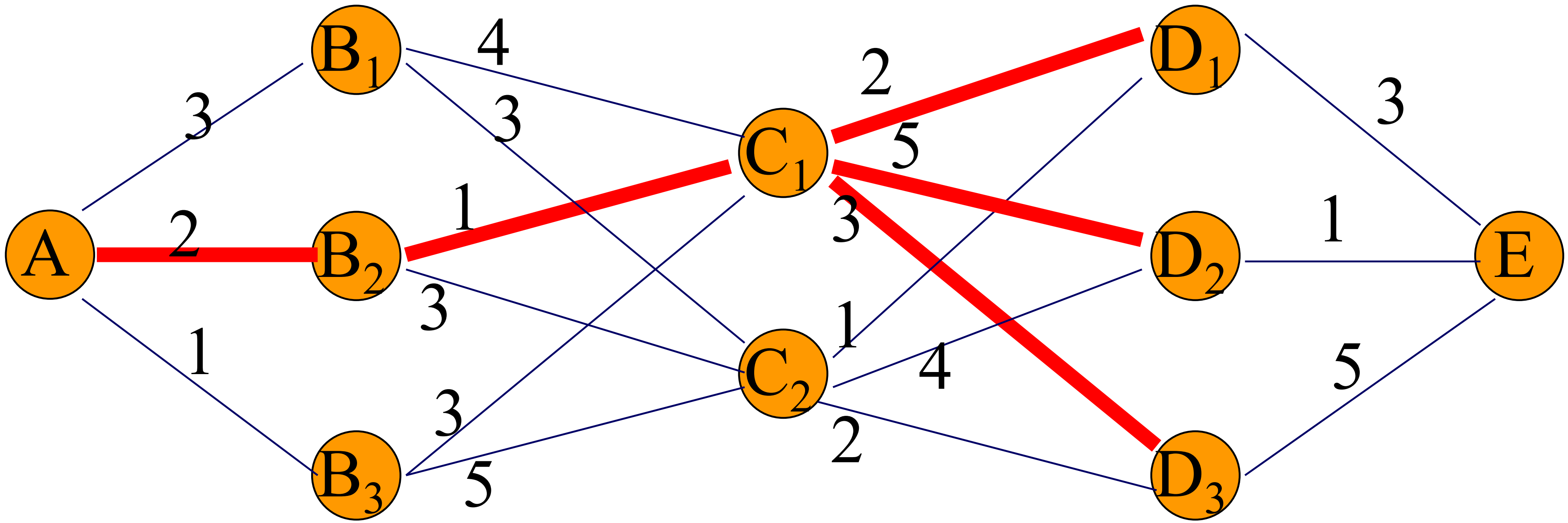
$$f_3(D_2) = \min\begin{Bmatrix} v_3(D_2, C_1) + f_2(C_1) \\ v_3(D_2, C_2) + f_2(C_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5+3 \\ 4+5 \end{Bmatrix} = 8$$

第3步(3)



$$f_3(D_3)=\min\begin{Bmatrix} v_3(D_3,C_1)+f_2(C_1) \\ v_3(D_3,C_2)+f_2(C_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3+3 \\ 2+5 \end{Bmatrix}=6$$

第4步

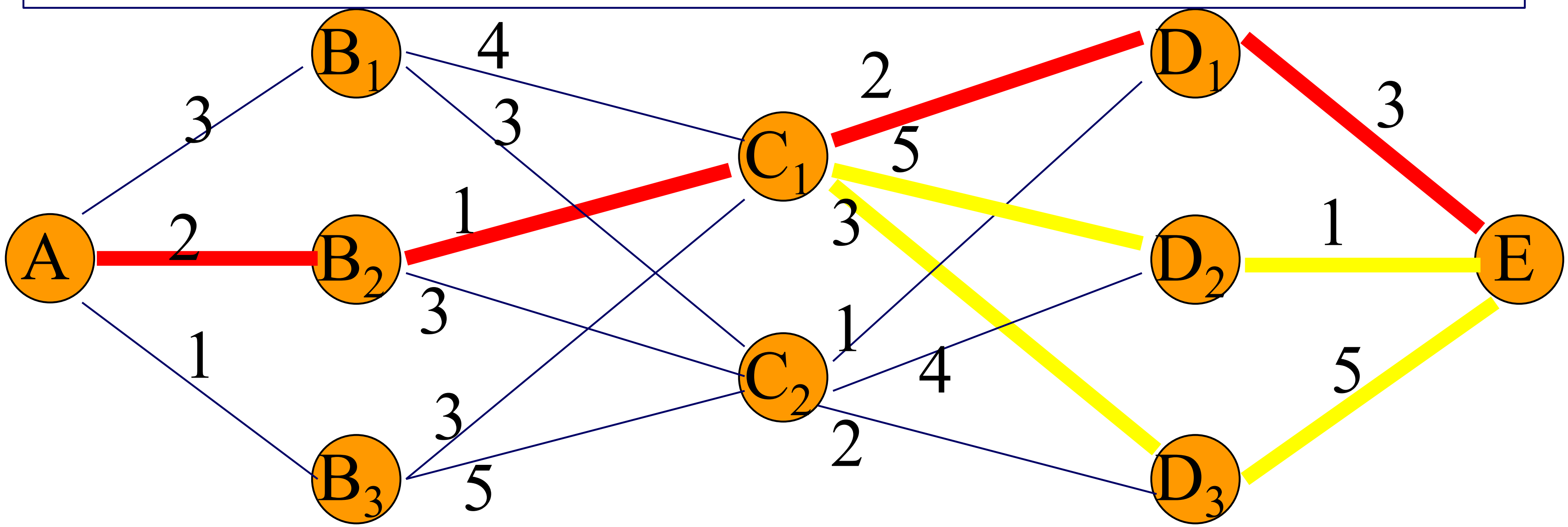


$S_4=\{E\}$

$$f_4(s_5)=\min_{u4\in D4(s5)}\{\,v_4(s_5,\,u_4)+f_3(s_4)\}$$

$D_1(E)=\{D_1,D_2,D_3\}$

第4步(1)



$$f_4(E)=\min\begin{Bmatrix}v_4(E,D_1)+f_3(D_1)\\v_4(E,D_2)+f_3(D_2)\\v_4(E,D_3)+f_3(D_3)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3+5\\1+8\\5+6\end{Bmatrix}=8$$

顺序解法和逆序解法比较

顺序解法和逆序解法无本质区别

若初始状态给定时，用逆序解法比较简单。反之，用顺序解法简单。

第七章 动态规划

- 动态规划问题的基本概念与建模
- 动态规划的基本原理与求解
- 应用举例

应用举例

- ✓ 生产经营问题
- ✓ 背包问题
- ✓ 旅行商（货郎担）问题
- ✓ 设备更新问题
- ✓ 可靠性问题
- ✓ 控制问题

例1：运营规划问题

例1：某运输公司有500辆运输卡车，超负荷运输（每天满载行驶500km以上）时，年利润25万元/辆，卡车的年损坏率为0.3；低负荷运输（每天行驶300km以下），年利润16万元/辆，年损坏率为0.1。现要求制定5年计划，如何分配不同负荷下的卡车数量，使5年的总利润最大。

例1分析

阶段k： 五年计划， $k=1,2,\ldots,5$

状态变量s_k： 第k年度初完好的卡车数目

决策变量u_k： 第k年度初超负荷运行的卡车数目

$0 \le u_k \le s_k$

已知初始状态变量$s_1 = 500$

终止状态s_5未知

故选用逆序解法。

状态转移方程：$s_{k+1}=(1-0.3)u_k+(1-0.1)(s_k-u_k)$
$=0.9s_k-0.2u_k$

注：由于损失率是一个估计，所以s_k、 u_k可看作连续状态变量

阶段指标函数：第k年度的阶段效益

$$v_k(s_k, u_k)=25u_k+16(s_k-u_k)=16s_k+9u_k$$

最优指标函数值的递推方程：

$$f_k(s_k)=\max_{u_k\in D_k(s_k)}\{v_k(s_k, u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$$

$$f_6(s_6)=0$$

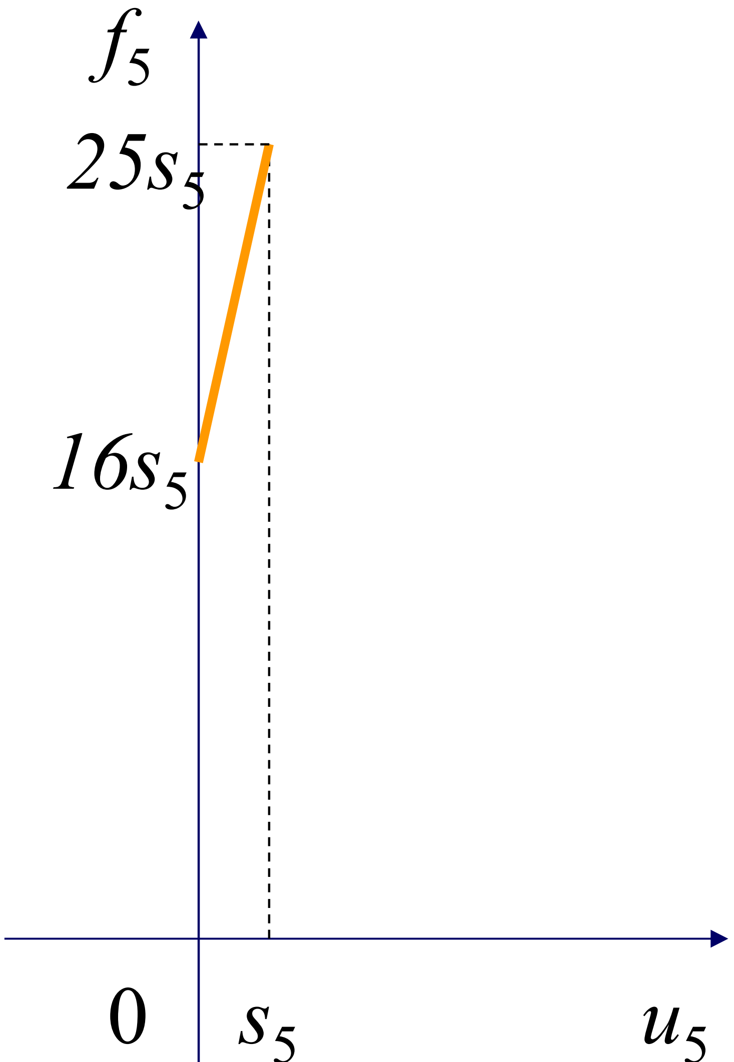
第1步:k=5

$$f_5(s_5)=\max_{0 \le u5 \le S5}\{ v_5(s_5, u_5)+ f_6(s_6)\}$$

$$=\max_{0 \le u_5 \le s_5}\{16s_5+9u_5 + 0\}$$

$$u_5^* = s_5$$

$$f_5(s_5)=25s_5$$



第2步:$k=4$

$$f_4(s_4)=\max_{0\le u_4\le s_4}\{v_4(s_4,u_4)+f_5(s_5)\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le s_4}\{16s_4+9u_4+25s_5\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le s_4}\{16s_4+9u_4+25(0.9s_4-0.2u_4)\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le s_4}\{38.5s_4+4u_4\}$$

$u_4^*=s_4 \qquad f_4(s_4)=42.5s_4$

第3步:$k=3$

$$f_3(s_3)=\max_{0\le u_3\le s_3}\{v_3(s_3,u_3)+f_4(s_4)\}$$

$$=\max_{0\le u_3\le s_3}\{16s_3+9u_3+42.5(0.9s_3-0.2u_3)\}$$

$$=\max_{0\le u_3\le s_3}\{54.25s_3+0.5u_3\}$$

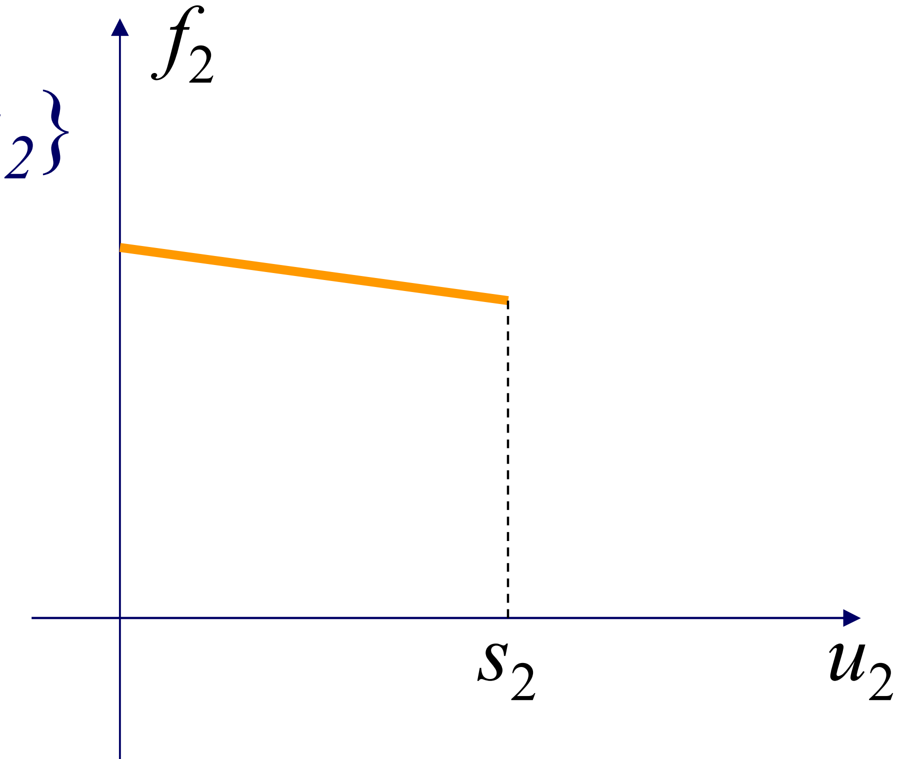
$u_3^*=s_3$ $\qquad f_3(s_3)=54.75s_3$

第4步:$k=2$

$$f_2(s_2)=\max_{0\le u_2\le s_2}\{v_2(s_2,u_2)+f_3(s_3)\}$$

$$=\max_{0\le u_2\le s_2}\{16s_2+9u_2+54.75\,(0.9s_2-0.2u_2)\}$$

$$=\max_{0\le u_2\le s_2}\{65.275s_2-1.95u_2\}$$



$u_2^*=0 \qquad f_2(s_2)=65.275s_2$

第5步:$k=1$

$$f_1(s_1)=\max_{0\le u_1\le s_1}\{v_1(s_1,u_1)+f_2(s_2)\}$$

$$=\max_{0\le u_1\le s_1}\{74.7475s_1-4.055u_1\}$$

$u_1^*=0$

$f_1(s_1)=74.7475s_1$

$=74.7475\times500=37373.75$万元

最优策略

s_1=500　　u_1^*=0　　全部低负荷运行

s_2= 0.9s_1 –0.2 u_1^*=*450*　u_2^*=0

s_3=405　　u_3^*=405　　全部超负荷运行

s_4=283.5　　u_4^*= 283.5

s_5=198.45　　u_5^*= 198.45

s_6=138.15