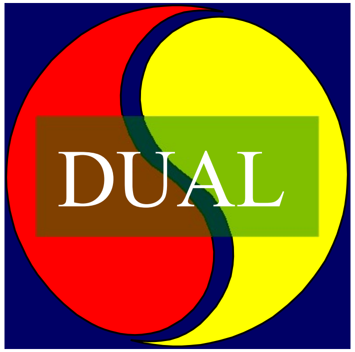
第二章　线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



对偶的定义

原问题

$\max\ z = \boldsymbol{cx}$

$s.t.\quad \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$

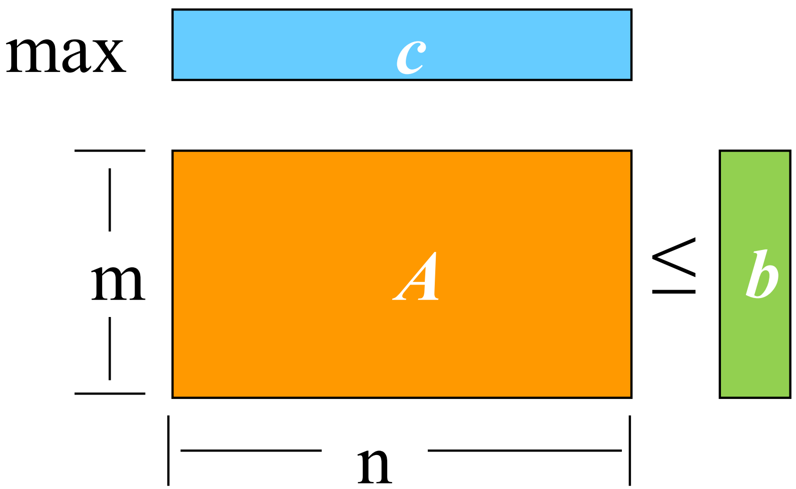
$\qquad\quad \boldsymbol{x} \ge 0$

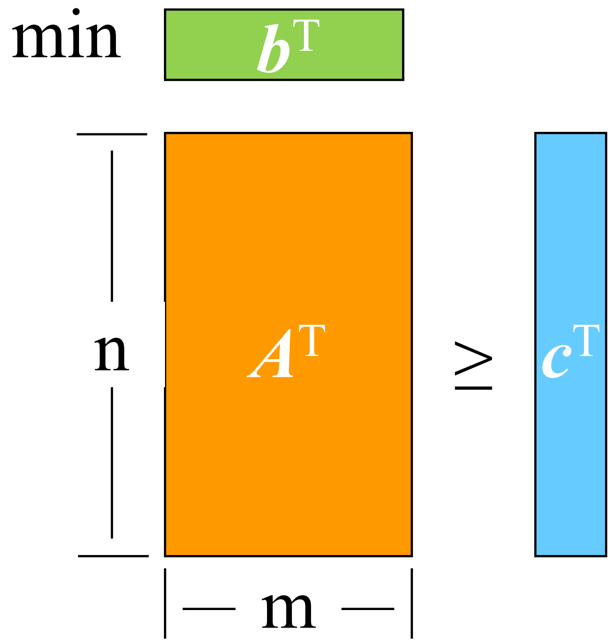
对偶问题

$\min\ w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{s.t.}\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}^T$

$\qquad\quad \boldsymbol{y} \ge 0$





自返性

$$\max z = \boldsymbol{cx} \quad s.t.\ \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge 0$$

对偶的定义

$$\min w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \quad s.t.\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{y} \ge 0$$

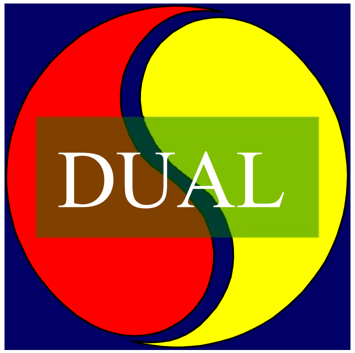
$$\max w = -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \quad s.t.\ -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \le -\boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{y} \ge 0$$

对偶的定义

$$\min z = -\boldsymbol{cx} \quad s.t.\ -\boldsymbol{Ax} \ge -\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge 0$$

第二章　线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



对偶问题的性质

- 弱对偶性：$cx \leq b^T y$
- 最优性：$cx = b^T y \Rightarrow x$、y均为最优解
- 强对偶性：设x^0、y^0分别是原始问题和对偶问题的可行解，则必存在最优解x^*、y^*，且有$cx^* = b^T y^*$
- 互补松弛性：最优解的充要条件

$$(Ax - b)^T y = 0 \text{ 和 } x^T (A^T y - c^T) = 0$$

$$x_s^T y = 0 \text{ 和 } x^T y_s = 0$$

对偶问题的性质

◆ 弱对偶性：原问题可行解的目标函数值小于等于对偶问题可行解的目标函数值。

推导：设$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$分别是原始问题和对偶问题的可行解，有

$$z=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^0 \le \boldsymbol{y}^{0T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 \le \boldsymbol{y}^{0T}\boldsymbol{b}=w$$

说明：目标函数值互为对方问题的上、下界

推论：一个问题是无界解时，另一个问题无可行解

最优性

设x^0、y^0分别是原始问题和对偶问题的可行解，则当$cx^0=b^Ty^0$时， x^0、y^0均为最优解。

证：设x^*、y^*分别是原始问题和对偶问题的最优解，有

$$cx^0 \le cx^* \le b^Ty^* \le b^Ty^0$$

所以 $cx^o = cx^* = b^Ty^* = b^Ty^0$

强对偶性

设$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$分别是原始问题和对偶问题的可行解，则必存在最优解$\boldsymbol{x}^*$、$\boldsymbol{y}^*$，且有$\boldsymbol{cx}^*=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*$。

证：由弱对偶性知原问题的目标函数值有上界，对偶问题的目标函数值有下界，故均有最优值。

设原问题的最优解为$\boldsymbol{x}^*$时，有$\boldsymbol{x}_B{}^*=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，由单纯形法的矩阵分析，可知$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$是一个可行解，满足：

$$w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B{}^* = \boldsymbol{cx}^* = z^*$$

由最优性得 $w = z^* = w^*$

单纯形法的矩阵分析

初始单纯形表

	$\boldsymbol{c}$	**0**
0 $\quad \boldsymbol{x_s} \quad \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}$	**I**
σ_j	$\boldsymbol{c}$	**0**

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \overline{c}_i a_{ij}$$

$$\sigma_j = c_j - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{p}_j$$

$$\boldsymbol{c}_B \triangleq [\overline{c}_1, \cdots, \overline{c}_m]$$

最终单纯形表

	$\boldsymbol{c}$	**0**
$\boldsymbol{c_B} \quad \boldsymbol{x_B} \quad \boldsymbol{B^{-1}b}$	$\boldsymbol{B^{-1}A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$
σ_j	$\boldsymbol{c - c_B B^{-1} A}$	$\boldsymbol{-c_B B^{-1}}$

$$\sigma_j = c_j - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{p}_j$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}$$

原问题和对偶问题解的关系

(1)两个问题都有可行解，则都有最优解。

(2)一个问题有无界解，另一个问题必无可行解。

(3)两个问题都无可行解

互补松弛性

可行解$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$分别是原始问题和对偶问题最优解的充要条件是

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b})^T\boldsymbol{y}^0=0 \text{ 和 } \boldsymbol{x}^{0T}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{c}^T)=0$$

或

$$\boldsymbol{x}_s^{0T}\boldsymbol{y}^0=0 \text{ 和 } \boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{y}_s^{0}=0\text{。}$$

互补松弛性证明（充分性）

充分性

原问题

$\max z = \boldsymbol{cx}$

$s.t.\quad \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}$

$\quad\quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_s \geq 0$

对偶问题

$\min w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

$s.t.\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{c}^T$

$\quad\quad \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_s \geq 0$

可得：$z = \boldsymbol{cx}^0 = \boldsymbol{x}^{0T}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{y}_s{}^0) = \boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{y}_s{}^0$

$w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0 = (\boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{x}_s{}^{0T})\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{x}_s{}^{0T}\boldsymbol{y}^0$

互补松弛性证明（必要性）

必要性

若$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$是最优解,有：$\boldsymbol{cx}^0=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0=z^*=w^*$

原问题

$\max z=\boldsymbol{cx}$

$s.t.\quad \boldsymbol{Ax}\le\boldsymbol{b}$

$\qquad\quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_s \ge 0$

对偶问题

$\min w=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{s.t.}\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{c}^T$

$\qquad\quad \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_s \ge 0$

可得：$\boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0\le\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0=w^*=z^*=\boldsymbol{cx}^0\le\boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0$

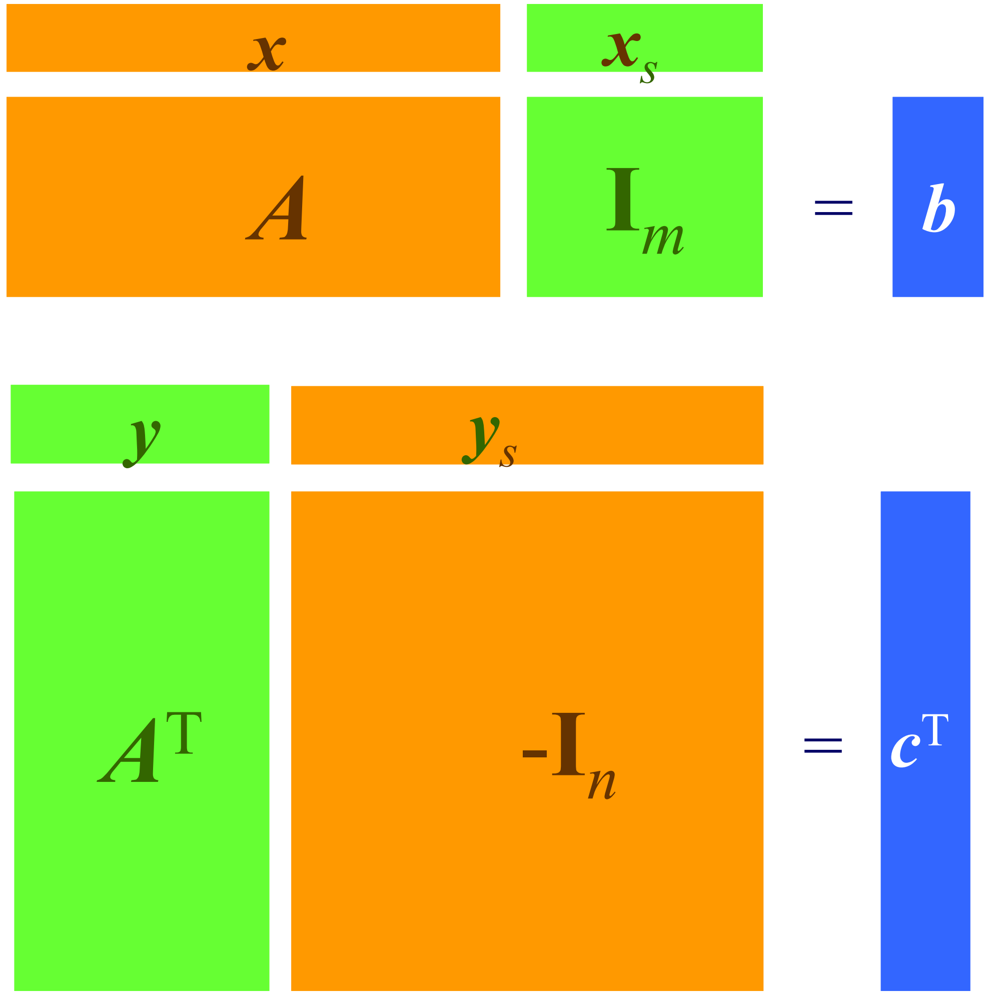
即：$z^*=w^*=\boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0$

原始问题和对偶问题变量、松弛变量的维数

$\max\ z=\boldsymbol{cx}$

$s.t.\quad \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{b}$

$\qquad \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_s\geq 0$



$\min\ w=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

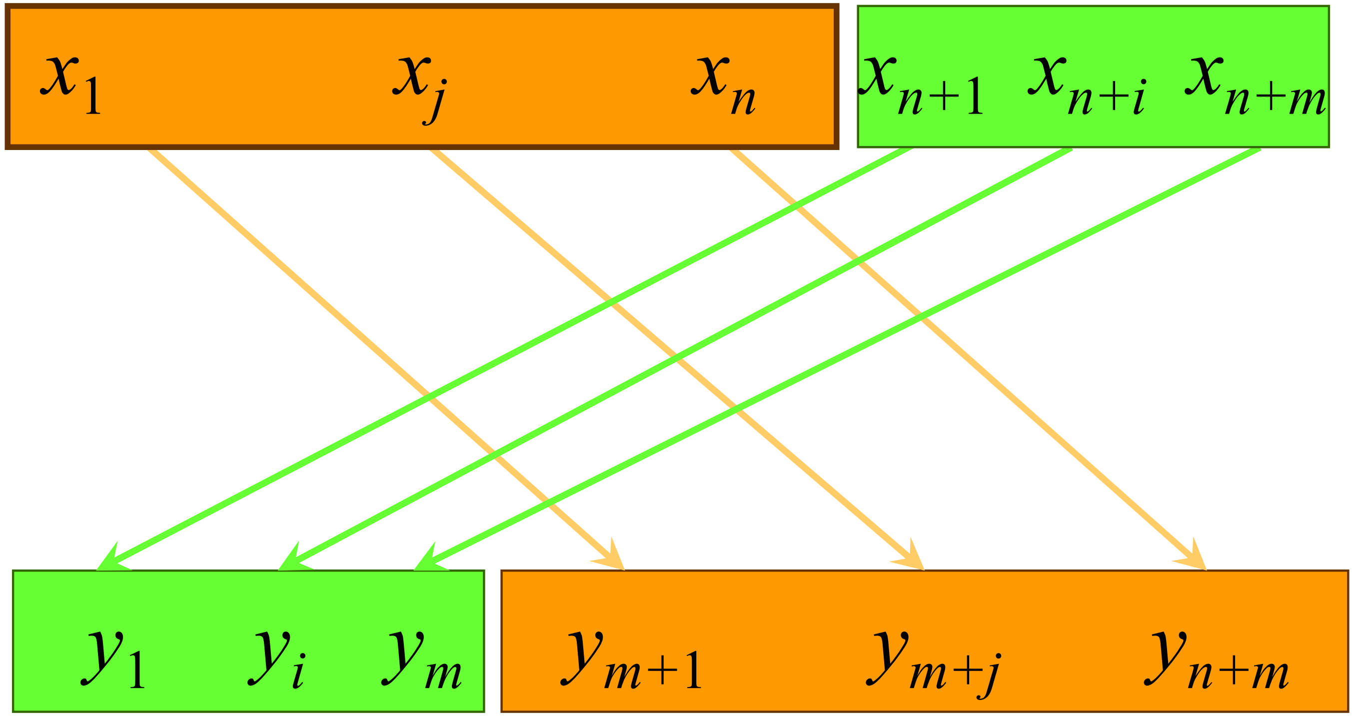
$s.t.\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_s=\boldsymbol{c}^T$

$\qquad \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}_s\geq 0$

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}_s=0$

$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}_s=0$

原变量和对偶变量的对应关系



$x_j y_{m+j}=0 \quad y_i x_{n+i}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$

在一对变量中，其中一个大于0，另一个一定等于0

互补松弛性定理的应用举例

例： $min\ z = 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$

$$(LP)\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5 \geq 4 \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5 \geq 3 \\ x_i \geq 0 \qquad (i=1 \ldots 5) \end{cases}$$

用对偶理论求(LP)的最优解

对偶问题的解

解：对偶问题(DP)为：

$$\max w = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 2 & ① \\ y_1 - y_2 \le 3 & ② \\ 2y_1 + 3y_2 \le 5 & ③ \\ y_1 + y_2 \le 2 & ④ \\ 3y_1 + y_2 \le 3 & ⑤ \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

其对偶解

$y_1^* = 4/5$

$y_2^* = 3/5$

$w^* = 5$

用对偶问题解求原问题解

将y_1^*，y_2^*代入，知②, ③, ④为严格不等式

由$\boldsymbol{x}^{*T}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{c}^T)=0$得：$x_2 = x_3 = x_4 = 0$

由$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b})^T\boldsymbol{y}^*=0$，$y_1^*$、$y_2^* > 0$，知：

$$\begin{cases} x_1+3x_5=4 \\ 2x_1+x_5=3 \end{cases}$$

$$\therefore x^* = [1, 0, 0, 0, 1]^T$$

$$z^*=5$$

其他对偶关系

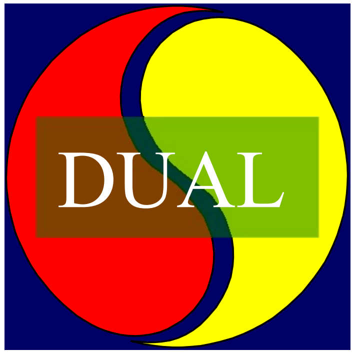
$\max z = \boldsymbol{cx}$ $s.t.\quad \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$\min w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ $s.t.\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}^T$ $\boldsymbol{y} \geq 0$
$\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$	$\Leftrightarrow$	$\boldsymbol{y} \leq 0$
$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$	$\Leftrightarrow$	$\boldsymbol{y}$ free
$\boldsymbol{x} \leq 0$	$\Leftrightarrow$	$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^T$
$\boldsymbol{x}$ free	$\Leftrightarrow$	$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^T$

原问题与对偶问题的对应关系

原问题	对偶问题
约束	原变量
原变量	约束
原变量	松弛变量
松弛变量	原变量
基解	检验数
检验数	基解

第二章　线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



基解和检验数对应关系举例

例：

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 8x_3$$

$$\text{LP：}\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min w = 5y_1 + y_2$$

$$\text{DP：}\begin{cases} 3y_1 + y_2 \ge 9 \\ y_1 + y_2 \ge 5 \\ y_1 + 8y_2 \ge 8 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

初始单纯形表

			9	5	8	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	5	3	1	1	1	0
0	x_5	1	1	1	8	0	1
	σ_j		9	5	8	0	0

最终单纯形表

			9	5	8	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	2	0	-2	-23	1	-3
9	x_1	1	1	1	8	0	1
	σ_j		0	-4	-64	0	-9

此时：原问题的最优解：$\boldsymbol{x}^*=[1, 0, 0, 2, 0]^T$， $z^*=9$

对偶问题的最优解

根据互补松弛性：

$$\begin{cases} x_j \; y_{m+j} = 0 \quad (j = 1 \cdots\cdots n) & x_{n+i} \, y_i = 0 \quad (i = 1 \cdots\cdots m) \\ x_j \longrightarrow y_{2+j} \quad (j = 1 \cdots\cdots 3) & x_{3+i} \longrightarrow y_i \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

$$n = 3, \; m = 2$$

$x_1 \longrightarrow y_3$ $\quad x_2 \longrightarrow y_4$ $\quad x_3 \longrightarrow y_5$

$x_4 \longrightarrow y_1$ $\quad x_5 \longrightarrow y_2$

得：$y^* = [0, 9, 0, 4, 64]^T$

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i a_{ij} = c_j - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{p}_j$$

单纯形法的矩阵描述

$$\sigma_j = c_j - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{p}_j$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}$$

初始单纯形表

	c_B	c_N	0
0 x_s b	B	N	I
σ_j	c_B	c_N	0

迭代后单纯形表

	c_B	c_N	0
c_B x_B $B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
σ_j	0	$c_N - c_B B^{-1} N$	$-c_B B^{-1}$

基解与检验数的对应关系

性质：单纯形表上，原问题的检验数对应对偶问题的一个基解

证明：对偶问题的约束方程 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\text{-}\boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{c}^T$

记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}]$ $\boldsymbol{y}_s=[\boldsymbol{y}_{sB}^T\ \boldsymbol{y}_{sN}^T]^T$ $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{c}_B\ \boldsymbol{c}_N]$

约束方程可改写为：

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}\text{-}\boldsymbol{y}_{sB} = \boldsymbol{c}_B{}^T$$

$$\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{y}\text{-}\boldsymbol{y}_{sN} = \boldsymbol{c}_N{}^T$$

基解与检验数的对应关系

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_{sB}=\boldsymbol{c}_B{}^T$$

$$\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_{sN}=\boldsymbol{c}_N{}^T$$

取 $\boldsymbol{y}_{sB}$ =0为对偶问题的非基变量，可得唯一解：

m个

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{y}_{sN}=-(\boldsymbol{c}_N-\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}$$

m个

n-m个

可见 $[\boldsymbol{y}^T\ \boldsymbol{y}_{sB}^T\ \boldsymbol{y}_{sN}^T]^T$ 为对偶问题的基解。

单纯形表上的对应关系

原变量	x_B	x_N	x_s
检验数	0	$c_N - c_B B^{-1} N$	$-c_B B^{-1}$
对偶变量	$-y_{sB}$	$-y_{sN}$	$-y$

$$\begin{cases} \sigma_j = -y_{m+j} \\ \sigma_{n+i} = -y_i \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n) \end{cases}$$

对应关系与互补松弛性定理一致。

单纯形表同时给出了原问题和对偶问题的基解！

最优解的对应关系

当$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$为最优解时，有：

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}) \leq 0$$

$$- \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \leq 0$$

此时， $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$为原对偶问题可行解

而且是最优解，因为

$$w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = z$$

最终单纯形表同时给出了原问题和对偶问题的最优解！

第二章　线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

单纯形法思路的另一种解释

单纯形法思路：

单纯形法：找基B，满足$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geq 0$，若 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}A$不全$\leq 0$，（即检验数）。

迭代 ⟶ 保持$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geq 0$，使$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\leq 0$

保持$\boldsymbol{x}$为可行解，使$\boldsymbol{y}$演变为可行解

对偶单纯形法的思路

保持$\boldsymbol{y}$为可行解，使$\boldsymbol{x}$演变为可行解

对偶单纯形法：找基B，满足$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \leq 0$，但$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$不全$\geq 0$

迭代 → 保持$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \leq 0$，使$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq 0$

步骤1:构造初始可行解

1．构造一个对偶问题的初始可行解，即要求全部$\sigma_j \leq 0$

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

注意：有的问题难以找到初始可行解，就无法采用对偶单纯形法

举例

例：

$$\min z=2x_1+3x_2+4x_3$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \geq 3 \\ 2x_1-x_2+3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

标准形式：$\max z=-2x_1-3x_2-4x_3$

$$\begin{cases} -x_1-2x_2-x_3+x_4 = -3 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_5 = -4 \\ x_1 \ldots x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始单纯形表

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1
	σ_j		-2	-3	-4	0	0

步骤2：相邻基可形解迭代

2. 如果所有的b_i >0，已是最优解

否则：(1)取x_r为出基变量，满足

$$b_r = \min_i \{b_i < 0\} \qquad i = 1, \ldots, m$$

(2)取x_s为入基变量，满足

$$\theta' = \frac{\sigma_s}{a_{rs}} = \min_i \left\{ \frac{\sigma_j}{a_{rj}} \middle| a_{rj} < 0, j = 1, \ldots, n \right\}$$

问题：如果所有的$a_{rj} \geq 0$，说明什么？

可行性分析

如上选取的目的：保持$\sigma_j' \le 0$，y为可行解

分析：

$$\sigma_j' = \sigma_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}}\sigma_s = a_{rj}\left\{\frac{\sigma_j}{a_{rj}} - \frac{\sigma_s}{a_{rs}}\right\}$$

因为$\sigma_j \le 0$，a_{rs}为主元素，有$a_{rs} < 0$，

当$a_{rj} \ge 0$：$\sigma_j / a_{rj} \le 0$，$\sigma_s / a_{rs} \ge 0$, 所以$\sigma_j' \le 0$

当$a_{rj} < 0$：σ_j / a_{rj} - $\sigma_s / a_{rs} \ge 0$，所以$\sigma_j' \le 0$

确定主元素

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
	σ_j		-2	-3	-4	0	0

迭代后单纯形表

			-2	**-3**	**-4**	**0**	**0**
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	**-1**	**0**	**-5/2**	**1/2**	**1**	**-1/2**
-2	x_1	**2**	**1**	**-1/2**	**3/2**	**0**	**-1/2**
	σ_j		**0**	**-4**	**-1**	**0**	**-1**

步骤3：最优性的检验

3. 最优性检验

判断迭代后所有的b_i'>0？如果不满足，继续迭代

确定主元素

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	[-5/2]	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
	σ_j		0	-4	-1	0	-1

最终单纯形表

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	$2/5$	0	1	$-1/5$	$-2/5$	$1/5$
-2	x_1	$11/5$	1	0	$7/5$	$-1/5$	$-2/5$
	σ_j		0	0	$-9/5$	$-8/5$	$-1/5$

$x^*=[11/5, 2/5, 0, 0, 0]^T$ $y^*=[8/5, 1/5, 0, 0, 9/5]^T$

第二章　线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

灵敏度分析

原始数据A，b，c一般为统计数据、量测值、专家评估数据，不精确且有变动。

灵敏度分析指最优解在参数、约束条件或变量个数发生变化时的影响.

通常有两类问题：

(1) 参数变化时，最优解如何变？

(2) 最优解/最优基保持不变，参数变化的范围。

最终单纯形表

			c_1	c_2	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n
c_B	基	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
c_1 c_2 $\vdots$ c_m	x_1 x_2 $\vdots$ x_m	$B^{-1}b$	$B^{-1}A = B^{-1}[p_1, p_2, \ldots, p_n]$					
σ_j			$c - c_B B^{-1}A$					

参数变化对解可行性的影响

① $\boldsymbol{b}$的变化： $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

② $\boldsymbol{c}$的变化：

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\sigma}_N = \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_j$$

③ a_{ij}的变化

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{p}_j' = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_j$$

变化的处理

原问题	对偶问题	处理
可行解	可行解	最优解/最优基不变
可行解	非可行解	用单纯形法迭代求解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法迭代求解
非可行解	非可行解	重新编制单纯形表

灵敏度分析例

例：

产品 / 原料	A	B	C	备用资源
甲	1	1	1	12
乙	1	2	2	20
利润	5	8	6	

问：如何安排产品产量，可获最大利润？

建模

解　　$\max z=5x_1+8x_2+6x_3$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 12 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_5=20 \\ x_1 \ldots x_5 \geq 0 \end{cases}$$

最终单纯形表

			5	8	6	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_1	4	1	0	0	2	-1
8	x_2	8	0	1	1	-1	1
	σ_j		0	0	-2	-2	-3

C的灵敏度分析

(1)、非基变量系数c_j

求最优方案不变的前提下，c_3的改变范围

$$\sigma_3 = c_3 - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{p}_3$$

$$= c_3 - [5 \quad 8]\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_3 - 8 \le 0$$

即$c_3 \le 8$

C的灵敏度分析

(2)、基变量系数c_j

求保持最优方案不变， c_1改变的变化范围。

$$\sigma_A = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c_B B^{-1} A}$$

$$=[c_1, 8, 6, 0, 0] - [c_1\ 8]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=[0, 0, -2, -2c_1+8,\ c_1-8] \le 0$$

$$\begin{cases} -2c_1+8 \le 0 \\ c_1-8 \le 0 \end{cases} \qquad 4 \le c_1 \le 8$$

b的灵敏度分析

保持最优方案不变，求b_1的变化范围。

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ 20 \end{pmatrix}\geq 0$$

$$\begin{cases} 2b_1-20\geq 0 \\ -b_1+20\geq 0 \end{cases} \qquad \therefore 10\leq b_1\leq 20$$

A的灵敏度分析

(计划生产的产品工艺结构改变)

(1)、非基变量x_j工艺改变

只影响单纯形表$\boldsymbol{p}_j$列，即 σ_j.

关键看$\sigma_j \leq 0$? 还是>0? 可用类似前述方法解决。

(2)、基变量x_j工艺改变，具体分析

增加新变量的灵敏度分析

例 对于新产品D，已知1个单位D要消耗

甲：3 乙：2

问：保持原有生产比例，利润为多少时，投产产品D有利？

解：
$$\sigma_6 = c_6 - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{p}_6 = c_6 - [5 \;\; 8] \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= c_6 - 12 > 0$$

得 $c_6 > 12$

添加约束灵敏度分析

例 新增加电力约束：13

A、B、C每单位需电 2、1、3

问：原方案是否改变？

解：

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 13$$

原方案 A：4 B：8 C：0

16 >13 原方案要改变

算法小结

(1)71年 Klee　变量n　约束2n

单纯形计算步骤 $O(2^n)$

(2)79年　哈奇扬　椭球法 $O(n^6 L^2)$

*82年　十一次国际数学规划会议*Fulkerson奖

(3)84年　Karmarkar　内点算法 $O(n^{3.5} L^2)$

*88年　十三次国际数学规划会议*Fulkerson奖

常用软件

LINGO：Linear Interactive and Discrete Optimizer

免费试用：**150** 个约束、**300**个变量、**30** 整数变量

芝加哥大学开发

Matlab: Optimization Toolbox

Excel: Excel Solver

IBM CPLEX Optimizer: Matlab\Python\c++

免费版限 **1000** 个变量和 **1000** 个约束，

高校师生可使用教育版

GUROBI（美国）、**COPT**（杉数科技）

阿里、华为、中科院也有线性规划和整数规划产品