浙江大学 20 21 – 20 22 学年 秋 学期

《矩阵论》课程期末考试试卷

课程号： 67190080（本科生），开课学院： 信电学院

考试试卷：A 卷 √、B 卷（请在选定项上打 √）

考试形式：闭 √、开卷（请在选定项上打 √），允许带 一张手写 A4 纸 入场

考试日期： 2021 年 11 月 14 日,考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名：______________学号：______________所属院系（专业）：______________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、（14 分）

（1）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，

证明：a) $tr(\boldsymbol{AB})=tr(\boldsymbol{BA})$；b) 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $tr(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 为实反对称矩阵（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$），则 $e^{\boldsymbol{A}}$ 为酉矩阵.

二、（12 分）设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解，令

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b},$$

证明：对于 $\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{n}$，$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|_2\le\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2$.

三、（12 分）考虑约束优化问题

$$\min_{x \in R^n} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{subject to} \quad g_i(\boldsymbol{x}) \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, I; \quad h_j(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, J$$

（1）利用混合**外罚**函数法将约束优化问题转化为无约束优化问题，写出一种转化后的无约束优化目标函数形式。

（2）利用混合**内罚**函数法将约束优化问题转化为无约束优化问题，写出**两种**转化后的无约束优化目标函数形式。

（3）利用混合约束优化的增广 Lagrangian 乘子法将约束优化问题转化为无约束优化问题，写出一种转化后的无约束优化目标函数形式。

四、（10 分）下列 Rayleigh 商问题，其中 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 Hermitian 正定矩阵。

（1）已知 Rayleigh 商 $R(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x}}$，求 $R(\boldsymbol{x})$ 的极大值及相应的 $\boldsymbol{x}$ 向量。

（2）已知广义 Rayleigh 商 $R(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}$，求 $R(\boldsymbol{x})$ 的极大值及相应的 $\boldsymbol{x}$ 向量。

注：可用矩阵的特征值及特征向量表示求解量。

五、（14 分）

（1）证明 $\mathrm{d}\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\right]=2\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{X})$， $\boldsymbol{X}$ 为实矩阵；

（2）求实标量函数 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 和 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的 Hessian 矩阵， $\boldsymbol{x}$ 、 $\boldsymbol{a}$ 为实向量， $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵。

六、（14 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（1）试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式；

（2）利用 Caley–Hamilton 定理计算 $\sin\boldsymbol{A}$。提示：

$$\sin\boldsymbol{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\boldsymbol{A}^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\cdots$$

七、（12 分）令观测数据向量由线性回归模型

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad E\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \boldsymbol{0}, \quad E\left\{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}^{\mathrm{T}}\right\} = \sigma^2 \boldsymbol{I}$$

产生。现在希望设计一个滤波器矩阵 $\boldsymbol{A}$，其输出向量 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 满足 $E\{\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\varepsilon}\} = \boldsymbol{0}$，并且可以使得 $E\left\{(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\varepsilon})\right\}$ 最小化。证明这个最优化问题等效为

$$\min\left[\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right) - 2\,\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}\right)\right]$$

约束条件为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$，其中，$\boldsymbol{O}$ 为零矩阵（假定数据矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$ 无关）。

八、简答题（12 分）

（1）对于线性方程，简述条件数的物理意义及与矩阵奇异值的关系。（3 分）

（2）请简述标准正交变换的过程，并简要说明它和噪声白化间关系。（5 分）

（3）简述 Tikhonov 正则化与反正则化的目的。（4 分）