第八章 状态空间模型分析与设计

吴俊

junwuapc@zju.edu.cn

内容

- 回顾与简介
- 状态空间模型及求解
- 可控性和可观性
- 线性变换和标准型
- **SISO** 系统状态反馈
- 状态反馈**:** 稳态误差分析
- **SISO** 系统状态观测器
- **…………..**

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换

系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

令$x = Tz, T$为非奇异方阵

新的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \hat{A}z + \hat{B}u \\ y = CTz + Du = \hat{C}z + Du \end{cases}$$

选择合适的变换，使$\hat{A}$ 具有特殊的结构形式，如对角阵（约当阵）、能控标准型、能观标准型等等, 可方便系统分析与设计

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换

1） 对角标准型

定理：当且仅当$A\in R^{n\times n}$有n个独立（线性无关）的特征向量时，存在非奇异方阵T使$T^{-1}AT$为对角矩阵

例：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 能否对角化？若能，求变换阵

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

求λ=5的特征向量,$(\lambda I-A)\phi=0$

$$\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=0$$

用高斯消去法，得 $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=0$，解为 $\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q\\q\\q\end{bmatrix},0\neq q\in C.$ 取$q=1,\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换

例：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

求$\lambda=-1$的特征向量，$\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=0$， 解为$\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\-q_1-q_2\end{bmatrix}, 0\neq\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}\in C^2$

取$q_1=1, q_2=0, \begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，取$q_1=0, q_2=1, \begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

3个线性无关的特征向量$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$　　A 可对角化

变换阵T即由n个线性无关的特征向量构成

$$T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

当$A\in R^{n\times n}$有n个互异特征值时，由于1 个特征值至少有1 个对应的特征向量，而对应n个互异特征值的n 个特征向量必线性无关，所以A 可对角化

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换

2） Jordan （约当）标准型

设$A \in R^{n\times n}$的互异特征值为$\lambda_1(\sigma_1$重)、$\lambda_2(\sigma_2$重)、…、$\lambda_p(\sigma_p$重)

A没有n个线性无关的特征向量时，不可对角化，但一定可以化为约当标准型

仅讨论简单情形：$\forall i \in \{1,\cdots,p\}$,每个互异特征值$\lambda_i$ 只有1 个独立的特征向量

$\forall i \in \{1,\cdots,p\}$,构造并求解如下$\sigma_i$个向量方程

$$
\begin{aligned}
(\lambda_i I - A)v_{i1} &= 0 \\
(\lambda_i I - A)v_{i2} &= -v_{i1} \\
(\lambda_i I - A)v_{i3} &= -v_{i2} \\
&\vdots \\
(\lambda_i I - A)v_{i\sigma_i} &= -v_{i,\sigma_i-1}
\end{aligned}
$$

得特征向量$v_{i1} \in C^n$及广义特征向量v_{i2} ,$\cdots$,$v_{i\sigma_i} \in C^n$

变换阵T 即由特征向量及广义特征向量构成

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换

例：将$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&3&0\end{bmatrix}$化成对角型或约当型

解:$|\lambda I-A|=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

求得λ=2的特征向量$\begin{bmatrix}1&2&4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

求得$\lambda=-1$的特征向量$\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,只有2个独立的特征向量，不可对角化

构造并求解$(\lambda I-A)\zeta=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\-2&-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\\zeta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$，得广义特征向量$\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

化约当型的$T=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\4&1&-1\end{bmatrix}$ ⇨ $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换

3） SISO 系统能控标准型

假设给定系统是完全能控的,则可以将其转换为能控标准型

完全能控的系统, $\mathrm{rank} M_C = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$

系统的特征多项式$\Delta(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$

构造$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 变换阵$T_C = M_C L$

变换后得能控标准型

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换

3） SISO 系统能观标准型

假设给定系统是完全能观的, 则可以将其转换为能观标准型.

(A,b,c,d) —对偶原理→ $(A^{\mathrm{T}},c^{\mathrm{T}},b^{\mathrm{T}},d)$

↓

能控标准型

$(T_C^{-1}A^{\mathrm{T}}T_C, T_C^{-1}c^{\mathrm{T}}, b^{\mathrm{T}}T_C, d)$

←对偶原理—

能观标准型

$(T_C^T A T_C^{-T}, T_C^T b, c T_C^{-T}, d)$

化能观标准型的$T_O = T_C^{-T}$

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换——举例

Example 8-4-1 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

将其变换为可控标准型.

Solution: (1)

$$\text{Rank } M_C=\text{Rank}\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}0 & 3 & -10\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 9\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}0 & 3 & -10\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & 9\end{bmatrix}\neq 0$$

$$\therefore \text{Rank } M_C=3$$

系统是 完全可控的.

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换——举例

Example 8-4-1 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

将其转换为可控标准型。

Solution: (2)

$$|sI - A| = \begin{vmatrix}s+1 & -1 & -2\\ 0 & s+2 & -1\\ 0 & 0 & s+3\end{vmatrix} = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3+6s^2+11s+6$$

$$= s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

(3) 构造矩阵 **L**

$$L=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & & \iddots & \iddots & \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 6 & 1\\ 6 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

线性变换与标准型

1. 状态空间表达式的线性变换——举例

Example 8-4-1 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

将其转换为可控标准型.

Solution:

$$\therefore \mathrm{T_c}=M_{\mathrm{c}}L=\begin{bmatrix}0 & 3 & -10\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11 & 6 & 1\\ 6 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

(4) 可控标准型

$$\therefore \mathrm{T_c}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ -2 & 8 & -8\\ 2 & -18 & 28\end{bmatrix}$$

??这种情况下不一定需要求

$$A_c=T_c^{-1}AT_C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$$

$$b_c=T_c^{-1}b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$c_c=cT_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

线性变换与标准型

2.非奇异线性变换的不变特性

采用状态空间模型描述一个动态系统时，其形式不是惟一的。如

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

可以在不同的状态空间实现。

能控标准型：

$$\Sigma_c:\begin{bmatrix}\dot{x}_{c1}\\ \dot{x}_{c2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}$$

能观标准型：

$$\Sigma_o:\begin{bmatrix}\dot{x}_{o1}\\ \dot{x}_{o2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o2}\end{bmatrix}$$

对角型：

$$\Sigma_\Lambda:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

不同形式间必然存在内在的联系，因为它们代表了同一个动态系统。

代表同一个动态系统的状态方程可以不同，所有“不同”表达形式的背后实质上是本质上的“同”。这些“同”表现在：系统的特征方程、特征多项式、特征值、能控性、能观性、输入输出关系等等内在的和外部的特性经过线性变换都将保持不变。

线性变换与标准型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

令 x=Tz

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

2.非奇异线性变换的不变特性

(1) controllability unchanged (能控性保持不变)

$$\begin{aligned} \because \hat{\mathrm{M}}_C &= \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \cdots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}ATT^{-1}B & \cdots & (T^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}AB & \cdots & T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = T^{-1}\boldsymbol{M}_c \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{Rank}\,\hat{\mathrm{M}}_C = \mathrm{Rank}\ \mathrm{T}^{-1}\mathbf{M}_c = \mathrm{Rank}\ \mathbf{M}_c$$

(2) observability unchanged (能观性保持不变)

$$\because \hat{\mathrm{M}}_O = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CT(T^{-1}AT)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} = \mathbf{M}_O T$$

$$\therefore \mathrm{Rank}\,\hat{\mathrm{M}}_O = \mathrm{Rank}\ \mathbf{M}_O\mathbf{T} = \mathrm{Rank}\ \mathbf{M}_O$$

线性变换与标准型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

令 x=Tz

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

2.非奇异线性变换的不变特性

(3) characteristic equation unchanged (特征方程保持不变)

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(s) &= \left|sI - \hat{A}\right| = \left|sI - T^{-1}AT\right| = \left|T^{-1}sIT - T^{-1}AT\right| \\ &= \left|T^{-1}(sI - A)T\right| = \left|T^{-1}\right|\left|sI - A\right|\left|T\right| = \left|sI - A\right| = \Delta(s)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \hat{\Delta}(s) = \Delta(s)$$

(4) input/output transfer function unchanged (输入/输出G(s)保持不变)

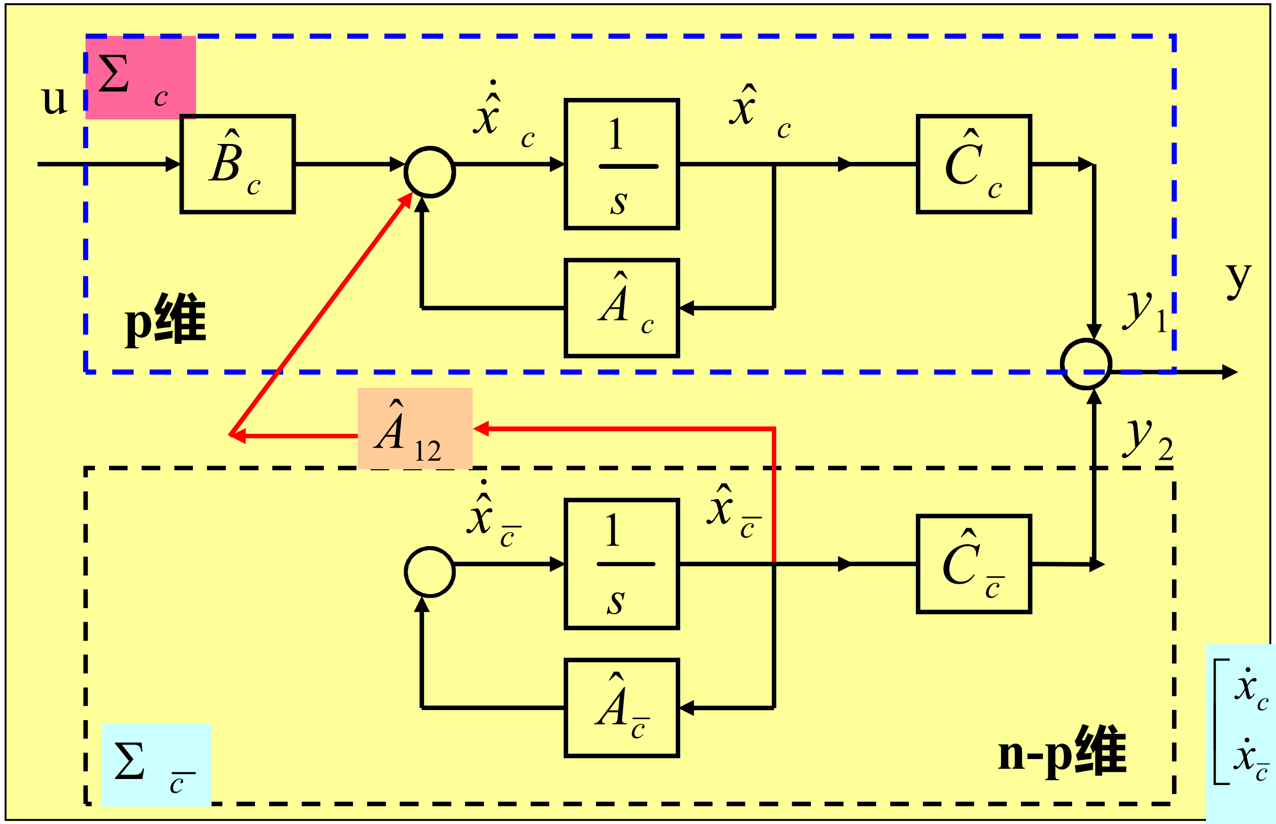
$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{G}}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{\mathrm{B}} = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}\mathrm{B} \\ &= CT[T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}\mathrm{B} \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}\mathrm{B} = C(sI - A)^{-1}\mathrm{B} = G(\mathrm{s})\end{aligned}$$

$$\therefore\ \hat{G}(s) = G(s)$$

……………...

3.线性定常系统的结构分解：能控分解

- **能控分解是指将一个n维的不可控系统按能控性分解为完全能控与完全不能控2个子系统，分别为 p 维与（n-p）维**



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{C}_c & \hat{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

线性变换与标准型

3.线性定常系统的结构分解：能控分解

- **设不可控系统的动态方程：** $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$　$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

$$\mathrm{Rank} M_C = \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = p < n$$

问题：能否再从M_c中选取？

方法：从可控性矩阵M_c中选出 p 个线性无关的列向量。再附加上任意尽可能简单的（n-p）个线性无关的列向量，构成非奇异的 T，进行非奇异变换：

$$x = T\begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} p\text{行} \\ (n-p)\text{行} \end{array} \qquad \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} p\text{行} \\ (n-p)\text{行} \end{array}$$

$$\hat{C} = CT = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \hat{C}_c & \hat{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \\ p\text{列} \quad (n-p)\text{列} \end{array}$$

- **经过上述非奇异变换后系统特点:(1) 分解出了p×p维能控子系统** $\Sigma_c : (\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c)$ **；(2)能控子系统的传递函数与原系统的相同。**

3.线性定常系统的结构分解：能控分解

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\hat{A}_c & \hat{A}_{12}\\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}\qquad \hat{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}\hat{B}_c\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}\qquad \hat{C}=CT=\begin{bmatrix}\hat{C}_c & \hat{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

- **经过上述非奇异变换 $T=\begin{bmatrix}T_1 & T_2\end{bmatrix}$ 后的 p 维能控子系统动态方程**

$$\Sigma_c:(\hat{A}_c,\hat{B}_c,\hat{C}_c):\ \begin{aligned}\dot{\hat{x}}_c&=\hat{A}_c\hat{x}_c+\hat{A}_{12}\hat{x}_{\bar{c}}+\hat{B}_cu\\ y_c&=\hat{C}_c\hat{x}_c\end{aligned}$$

经过上述非奇异变换后的 (n-p) 维不能控子系统动态方程

$$\Sigma_{\bar{c}}:(\hat{A}_{\bar{c}},\hat{C}_{\bar{c}}):\ \begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{\bar{c}}&=\hat{A}_{\bar{c}}\hat{x}_{\bar{c}}\\ y_{\bar{c}}&=\hat{C}_{\bar{c}}\hat{x}_{\bar{c}}\end{aligned}$$

- **注： 从变换矩阵 T 的选取不惟一性可知：虽然系统能控性规范分解的诸系数阵可能不相同，但其M_c秩是不变的，分解后的分块形式是不变的。**

3.线性定常系统的结构分解：能控分解

Example 8-4-3 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}x$$

请按能控性分解该系统。

解：(1)判别能控性

$$\operatorname{rank} M_C=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&1&1&2&3&4\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&2&3&4\end{bmatrix}=2=p<3=n$$

(2)构成非奇异变换阵 T:

$$\therefore T=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad\Rightarrow\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

(3)计算各矩阵

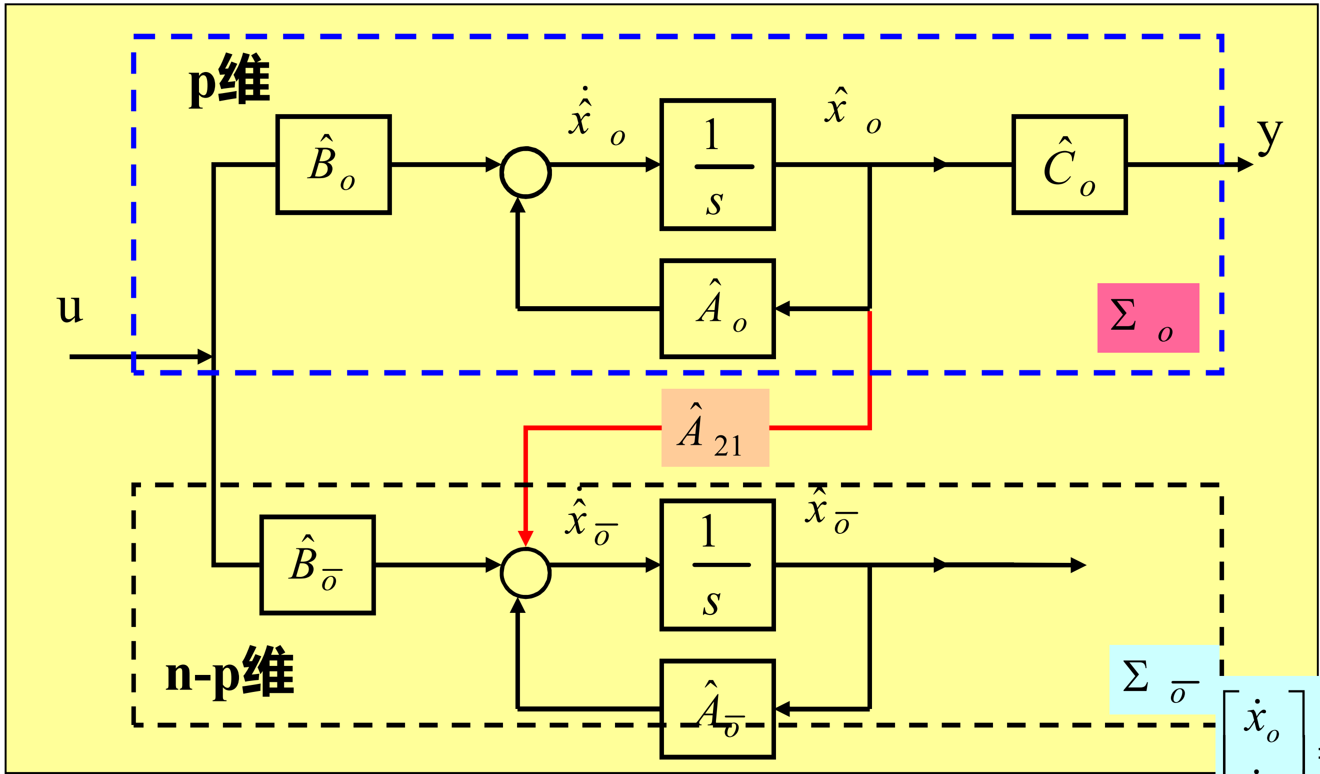
$$\hat{A}=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\1&2&1\\\hline 0&0&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\hat{A}_c&\hat{A}_{12}\\\hline 0&\hat{A}_{\bar{c}}\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline 0&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\hat{B}_c\\\hline 0\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{C}=CT=\left[\begin{array}{cc|c}0&2&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\hat{C}_c&\hat{C}_{\bar{c}}\end{array}\right]$$

3.线性定常系统的结构分解：能观分解

- 能观分解是指将一个不可观的系统按能观性分解为完全能观与完全不能观2个子系统，分别为 p 维与（n-p）维



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_o\\ \dot{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_o & \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_o\\ \hat{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\hat{C}_o & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$

线性变换与标准型

3.线性定常系统的结构分解：能观分解

- 设不可观系统的动态方程： $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$　　$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

$$\mathrm{Rank}\, M_o = p < n$$

$$x = T\begin{bmatrix} \hat{x}_o \\ \hat{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

问题：能否再从M_o中选取？

方法：从可观性矩阵M_o中选出 p 个线性无关的行向量，再附加上任意尽可能简单的(n-p)个线性无关的行向量，构成非奇异的 T^{-1}，进行非奇异变换：

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \hat{A}_o & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p\text{行} \\ (n-p)\text{行} \end{array}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_o \\ \hat{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} p\text{行} \\ (n-p)\text{行} \end{array}$$

$$\hat{C} = CT = \begin{array}{cc} [\hat{C}_o & 0] \\ p\text{列} & (n-p)\text{列} \end{array}$$

- 经过上述非奇异变换后系统特点:(1) 分解出了p×p 维能观子系统 $\Sigma_o : (\hat{A}_o, \hat{B}_o, \hat{C}_o)$；(2)能观子系统的传递函数与原系统的相同。

线性变换与标准型

3.线性定常系统的结构分解：能观分解

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \hat{A}_o & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p\text{行} \\ (n-p)\text{行} \end{array}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix} \hat{B}_o \\ \hat{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} p\text{行} \\ (n-p)\text{行} \end{array}$$

$$\hat{C}=CT=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \hat{C}_o & 0 \end{bmatrix} \\ p\text{列} \quad (n-p)\text{列} \end{array}$$

- **经过上述非奇异变换后的 p 维能观子系统动态方程**

$$\Sigma_o:(\hat{A}_o,\hat{B}_o,\hat{C}_o):\dot{\hat{x}}_o=\hat{A}_o\hat{x}_o+\hat{B}_ou$$
$$y=\hat{C}_o\hat{x}_o$$

经过上述非奇异变换后的 (n-p) 维不能观子系统动态方程

$$\Sigma_{\bar{o}}:(\hat{A}_{\bar{o}},\hat{B}_{\bar{o}}):\dot{\hat{x}}_{\bar{o}}=\hat{A}_{\bar{o}}\hat{x}_{\bar{o}}+\hat{A}_{21}\hat{x}_o+\hat{B}_{\bar{o}}u$$

由上能控能观的规范分解方法知道：能控、能观的分解结果不是惟一的，这在变换矩阵T的选取中可以充分体现。但分解后的分块形式是一样的。

线性变换与标准型

3.线性定常系统的结构分解：能观分解

Example 8-4-4 系统表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}x$$

请按能观性分解该系统。

解：(1)判别能观性

$$\text{rank } \mathrm{M_O}=\text{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=2=p<3=n$$

(2)构成非奇异变换阵 T^{-1}：

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow T=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

(3)计算各矩阵

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{cc|c}0&1&0\\1&0&0\\ \hline 1&1&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\hat{A}_o&0\\ \hline \hat{A}_{21}&\hat{A}_{\bar{o}}\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hline 0&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\hat{B}_o\\ \hline \hat{B}_{\bar{o}}\end{array}\right]\begin{array}{l}p\text{行}\\(n-p)\text{行}\end{array}$$

$$\hat{C}=CT=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\hat{C}_o&0\end{array}\right]$$

3.线性定常系统的结构分解：能控能观分解

- 对于一般不完全能控不完全能观的线性系统，通过合适的线性非奇异变换可实现系统结构的规范分解，其规范分解的表达式(形式）：

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{co} \\ \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{A}_{co} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{c\bar{o}} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ \hline 0 & 0 & \hat{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{x}_{co} \\ \hat{x}_{c\bar{o}} \\ \hat{x}_{\bar{c}o} \\ \hat{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} \hat{B}_{co} \\ \hat{B}_{c\bar{o}} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{C}_{co} & 0 & \hat{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{array}\right] \hat{x}$$

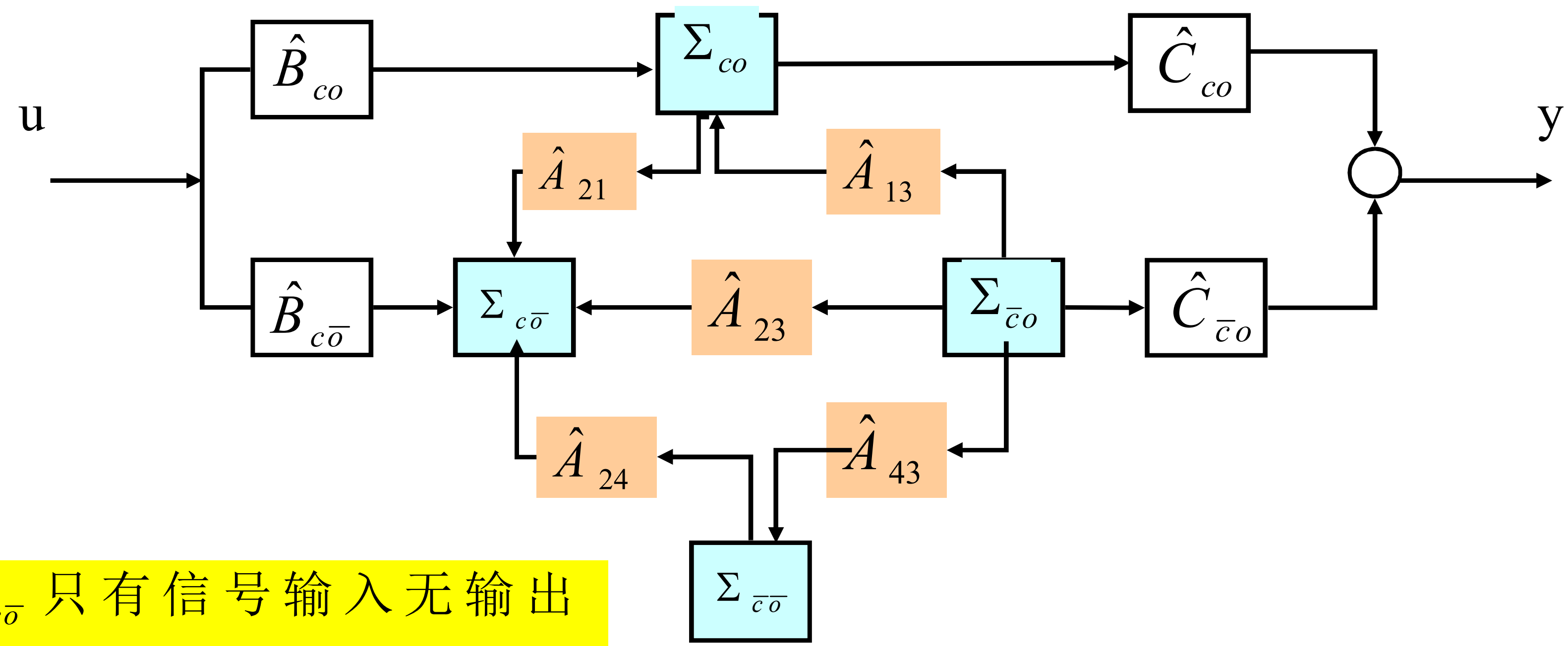
考察上式的传递函数： $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \hat{C}_{co}(sI - \hat{A}_{co})^{-1}\hat{B}_{co} = G_{co}(s)$

输入输出描述(传递函数/矩阵), 仅是对系统结构的一种不完全描述。只有对完全能控能观系统，传递函数/矩阵才能充分表达系统的结构。

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{co} \\ \dot{\hat{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} \hat{A}_{co} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{c\bar{o}} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ \hdashline 0 & 0 & \hat{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{x}_{co} \\ \hat{x}_{c\bar{o}} \\ \hat{x}_{\bar{c}o} \\ \hat{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} \hat{B}_{co} \\ \hat{B}_{c\bar{o}} \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc:cc} \hat{C}_{co} & 0 & \hat{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{array}\right] \hat{x}$$

系统结构规范分解方块图：



$\Sigma_{c\bar{o}}$ 只有信号输入无输出

$\Sigma_{\bar{c}o}$ 只有信号输出无输入

只有Σ_{co}能实现信号

由输入u到输出y间的传递

3.线性定常系统的结构分解

- **系统可分解为四个子系统**： (1)能控能观S_{CO}; (2)能控不能观S_C; (3)不能控能观S_O;(4)不能控不能观S_u.

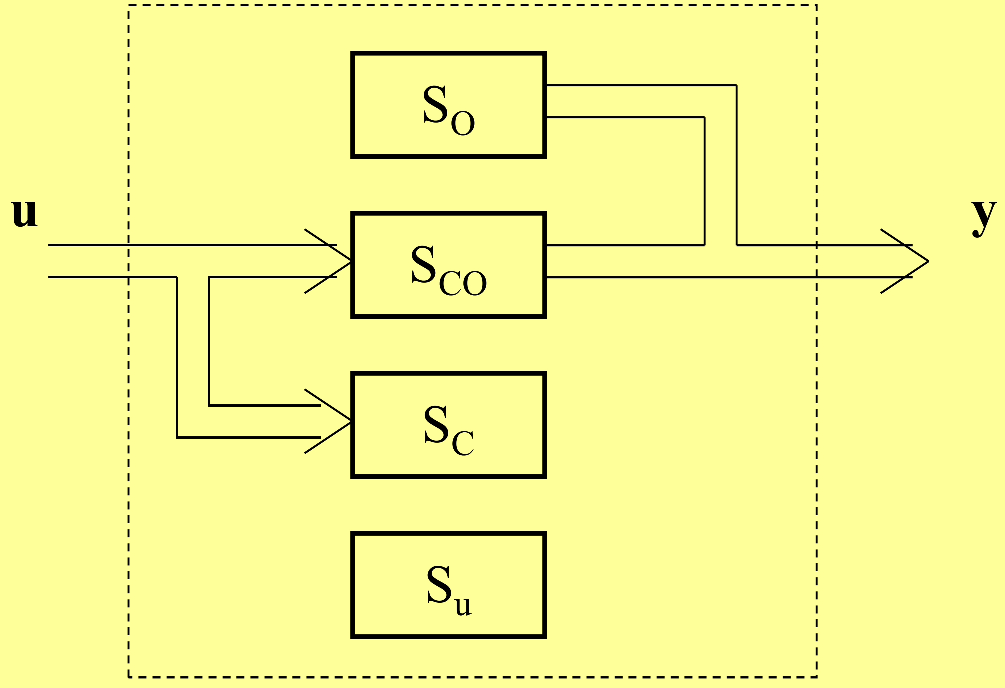


Fig. 系统的四种可能分解结构

4. 能控性&能观性与传递函数

如图所示的SISO系统中,只有 S_{CO} 出现在传递函数中

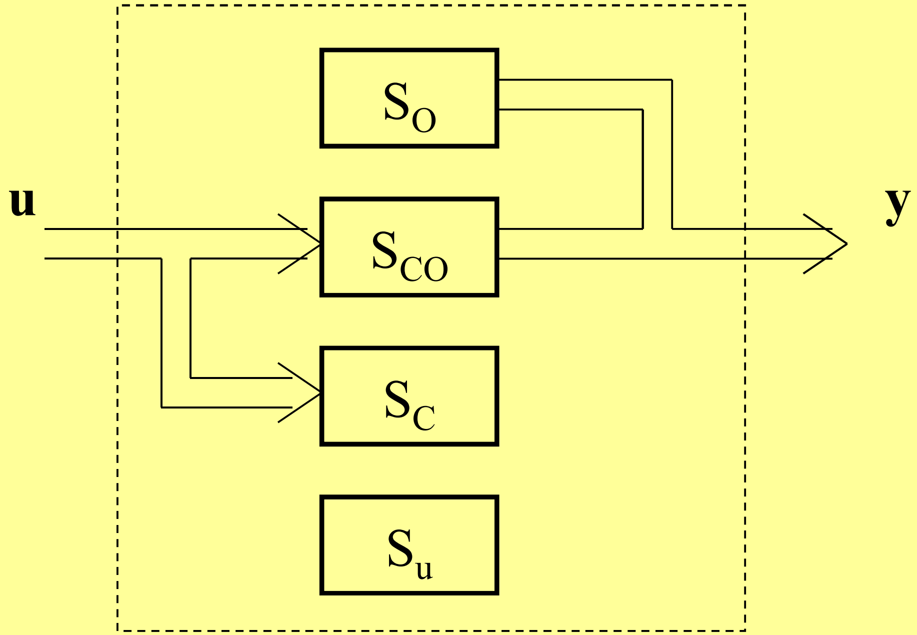


Fig. 系统的四种可能分解结构

如果SISO系统(A,b,c,d)在求传递函数的过程中出现零极点对消,则必有下列情况之一:

（1） (A,b,c,d)不完全能控;

（2） (A,b,c,d)不完全能观

SISO系统(A,b,c,d)完全能控完全能观的充要条件是在由(A,b,c,d)求传递函数的过程中不出现零极点对消

线性变换与标准型

4. 能控性&能观性与传递函数

Example 系统表示为

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\quad B\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}4&5&1\end{bmatrix}$$

试判断 系统是否完全能控、是否完全能观.

Solution: 方程为能控标准型，是完全能控的

$$G(s)=c(sI-A)^{-1}b=\frac{s^2+5s+4}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$$

出现零极点对消，系统是完全能控但不完全能观的.

线性变换与标准型

4. 能控性&能观性与传递函数

Example 8-3-8 系统表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

试求: (1) 特征值; (2) 传递函数 Y(s)/U(s); (3) 是否完全能控 、是否完全能观

Solution: (1) $|sI - A| = \begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix} = (s+2)(s+1)$ 特征值: λ_1=-2 λ_2=-1.

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+2)}$$

(3) $RankM_c = Rank\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1$

$RankM_o = Rank\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 2$ 系统不完全能控但完全能观.

线性变换与标准型

4. 能控性&能观性与传递函数

实现问题：

已知传递函数模型$G(s)$,求一个状态空间模型

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

使$c(sI - A)^{-1}b + d = G(s)$

最小实现问题：

已知传递函数模型$G(s)$,求一个完全能控、完全能观的状态空间模型

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

使$c(sI - A)^{-1}b + d = G(s)$

在实现问题中，状态空间模型的阶数大于或等于传递函数模型的阶数

在最小实现问题中，状态空间模型的阶数等于传递函数模型的阶数

Thanks !