自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第三章 CHAPTER 3

连续时间控制系统的时域分析

第三章关键词

- 全解（Complete solution）—— 时间响应
- 稳态响应（ Steady-State Response ）
- 暂态响应（ Transient Response ）
- 系统动态特性（Dynamics of System）
  - 一阶系统（First-order System）
  - 二阶系统（Second-order System）
- 时域性能指标（Time-response specifications）
- 状态转移矩阵（State transition matrix, STM）

第三章主要内容

- 概述
- 微分方程求解
- 控制系统时域性能指标与时域分析
- 高阶系统的暂态响应
- 状态方程的求解与分析

主要内容

- **状态方程的求解与分析**
  - –状态方程
  - –状态转移矩阵（**State transition matrix, STM**）
  - –计算状态转移矩阵
  - –状态方程的全解

状态方程

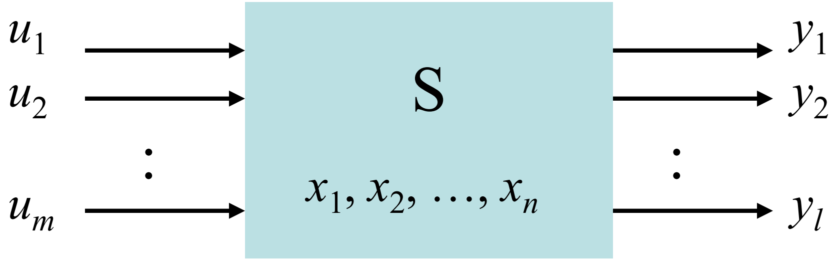
状态空间模型

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$ 状态方程

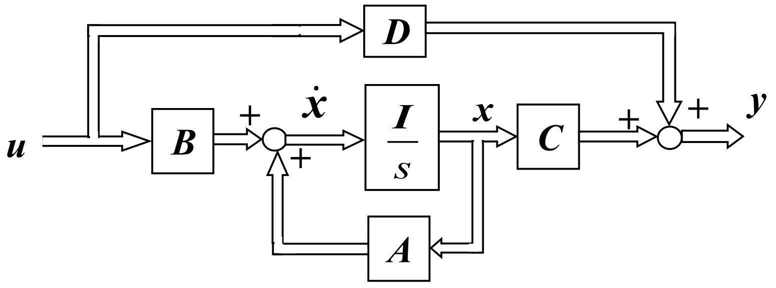
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$ 输出方程

- 状态变量 $x(t)$, $u(t)$, 和 $y(t)$ 是列向量，A, B, C 和 D 是矩阵，对于线性时不变系统，这些矩阵的元素都是常数。
- 系统具有 m 个输入，l 个输出和 n 个状态变量。

- 为了得到系统输出 $y(t)$，首先要求解状态方程。



系统的一般表示



状态空间模型

状态转移矩阵

- 首先考虑齐次状态方程，即输入变量 $u(t)=0$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

- 如果 $n=1$ 且初始条件为 $x(t=0)=x(0)$，则状态方程为标量方程，表示了一个一阶系统。可以很容易求得标量方程的解：

$$\dot{x}(t)=ax(t) \Rightarrow x(t)=e^{at}x(0)$$

- 假定初始时刻为 t_0，对于任意初始条件 $x(t_0)$，如果 $x(t_0)$ 已知，则有：

$$x(t)=e^{a(t-t_0)}x(t_0)$$

状态转移矩阵

- 考察标量方程的解，其中，$x(t)=e^{at}x(0)$

$$e^{at}=1+\frac{at}{1!}+\frac{(at)^2}{2!}+\frac{(at)^3}{3!}+\cdots+\frac{(at)^k}{k!}+\cdots$$

[请复习e^x的幂级数展开$(-\infty<x<\infty)$]

- 利用拉氏变换，有

$$\dot{x}(t)=ax(t) \xrightarrow{\text{LT}} sX(s)-x(0)=aX(s)$$

$$x(t)=L^{-1}[(s-a)^{-1}]x(0)$$

- 比较通过不同方式求得的解，它们应该相等。于是：

$$\boxed{e^{at}=L^{-1}[(s-a)^{-1}]}$$

状态转移矩阵

- 对比标量方程和状态方程，状态方程的解类似于标量方程的解；利用拉普拉斯变换求解状态方程

$n=1$　　$\dot{x}(t) = ax(t)$ → $x(t) = e^{at}x(0)$

⋮　　　　$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$

$n=n$　　$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ $\xrightarrow{\text{LT}}$ $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$

$$\boldsymbol{x}(t) = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)$$

于是
$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}t}{1!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]$$

- 其中，A 是方阵，exp[At] 是与 A 具有相同阶数的方阵。实际上，exp[At]是无穷级数，且该无穷级数收敛，具有闭合形式。对于线性定常系统，exp[At] 称为系统的状态转移矩阵 (state transition matrix, STM)，可记为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \exp[\boldsymbol{A}t]$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau) = e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} = \exp[\boldsymbol{A}(t-\tau)]$$

状态转移矩阵

***n*阶方阵A**

$$e^{At}=\exp[At]=\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{A}t}{1!}+\frac{(\boldsymbol{A}t)^2}{2!}+\frac{(\boldsymbol{A}t)^3}{3!}+\cdots+\frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!}$$

t^k的拉普拉斯变换为$\frac{k!}{s^{k+1}}$

e^{At}的拉普拉斯变换为$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\frac{k!}{s^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{s^{k+1}}$

$$(sI_n-A)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{s^{k+1}}$$

$$=\left(I_n+\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\frac{A^3}{s^3}+\cdots\right)-\left(\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\frac{A^3}{s^3}+\frac{A^4}{s^4}+\cdots\right)=I_n$$

e^{At}的拉普拉斯变换为$(sI_n-A)^{-1}$

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI_n-A)^{-1}\right]$$

状态转移矩阵

$$e^{At}=I+\frac{At}{1!}+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\cdots+\frac{(At)^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}$$

- 线性时不变系统 $\Phi(t)=e^{At}$

注意：两者在概念上有区别。

STM：具有相应的物理意义，且适用于时变系统和离散系统

Matrix exponent（矩阵指数）：数学函数

- 作为函数，e^{At}具有如下性质：

1) 如果 A 是对角阵，则 exp[At] 也是对角阵

$$A=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n] \Leftrightarrow e^{At}=diag[e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}]$$

2)
$$\frac{d}{dt}\exp(At)=A\exp(At)=\exp(At)A$$

3) 如果 t 和 p 是相互独立的变量，则有

$$\exp[A(t+p)]=\exp(At)\exp(Ap)$$

状态转移矩阵

$$e^{At}=I+\frac{At}{1!}+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\cdots+\frac{(At)^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}$$

4) $\exp(At)\big|_{t=0}=I$

5) e^{At} 总是非奇异矩阵，其逆矩阵为

$$[\exp(At)]^{-1}=\exp(-At)$$

6) 对于 $n\times n$ 方阵 A 和 B，如果有 $AB=BA$，则

$$\exp(At)\exp(Bt)=\exp[(A+B)t]$$

7) 对于任意非奇异矩阵 T，有

$$\exp(T^{-1}ATt)=T^{-1}\exp(At)T$$

$$\frac{(T^{-1}ATt)^2}{2!}=\frac{(T^{-1}AT)^2t^2}{2!}=\frac{(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)t^2}{2!}$$

状态转移矩阵

> STM（状态转移矩阵）刻画了系统的非强迫响应或自由响应，具有如下性质：

1. $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,\tau)=\boldsymbol{A\Phi}(t,\tau)$ 且 $\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}$

2. $\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)$，对任意 t_0,t_1,t_2

3. $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t) \quad \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(-t)$

4. $\boldsymbol{\Phi}(t_1+t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_1)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_2)\cdot\boldsymbol{\Phi}(t_1) \quad \Rightarrow$

   $\boldsymbol{\Phi}(t)\cdots\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\Phi}^q(t)=\boldsymbol{\Phi}(qt)$，$q$ 是正整数

5. $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为非奇异阵（t 为有限值）

对于线性时不变系统，$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=\exp[\boldsymbol{A}t]$

$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}}$　　　$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]}$

状态转移矩阵的计算

➢ 对于给定的矩阵 A，计算 STM 闭合形式的方法：

1) 方法 1——直接计算

$$e^{At}=I+\frac{At}{1!}+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\cdots+\frac{(At)^k}{k!}+\cdots$$

2) 方法 2—— 利用拉普拉斯变换

$$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}] \Rightarrow \Phi(s)=(sI-A)^{-1}$$

3) 方法 3——矩阵 A 对角化

$$\because \Lambda=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n] \Leftrightarrow e^{\Lambda t}=diag[e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}]$$

$$\therefore A=T\Lambda T^{-1},\Lambda=T^{-1}AT=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n] \Leftrightarrow \exp(At)=\exp(T\Lambda T^{-1}t)=T\exp(\Lambda t)T^{-1}$$

4) 方法 4——Cayley-Hamilton 定理

$$e^{At}=\exp[At]=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k$$

状态转移矩阵的计算：1）直接计算

例 1 假定 A 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，利用方法1求解 $\exp(At)$。

解：

$$\because\ A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad 及 \quad A^3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=A$$

$$\therefore\ A=A^3=A^5=\cdots \quad 及 \quad A^2=A^4=A^6=\cdots$$

$$e^{At}=I+\frac{At}{1!}+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\cdots+\frac{(At)^k}{k!}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots & \frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^6}{6!}+\cdots\\ 0 & 1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots & t+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots\\ 0 & t+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots & 1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})-1\\ 0 & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\ 0 & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算：2）拉氏变换

例 2 假定 A 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，利用方法 2求解exp($At$)。

解：

$$\because \boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\0&-1&s\end{bmatrix}^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{21}&\Delta_{31}\\\Delta_{12}&\Delta_{22}&\Delta_{32}\\\Delta_{13}&\Delta_{23}&\Delta_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})-\frac{1}{s}\\0&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})\\0&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})&\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})\end{bmatrix}$$

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\Delta=s(s^2-1)$$

$\Delta_{11}=s^2-1,\ \Delta_{12}=0$ $\quad\Delta_{13}=0$

$\Delta_{21}=s$ $\quad\Delta_{22}=s^2$ $\quad\Delta_{23}=s$

$\Delta_{31}=1$ $\quad\Delta_{32}=s$ $\quad\Delta_{33}=s^2$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\cdots$$

➢ 结果与例1的结果一致

状态转移矩阵的计算：2) 拉氏变换

例 3 假定 A 矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$，利用方法 2求解exp($At$)。

解：

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}$$

$$e^{At}=\boldsymbol{\Phi}(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\Delta=s^2+5s+6$$

$\Delta_{11}=s+5$ $\quad$ $\Delta_{12}=-1$

$\Delta_{21}=6$ $\quad$ $\Delta_{22}=s$

$$e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+3} & \frac{6}{s+2}-\frac{6}{s+3} \\ \frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+3} & \frac{-2}{s+2}+\frac{3}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t} \\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算：3) 矩阵对角化

➢ 对于非对角矩阵 A，可以首先将其对角化，即计算用于对角化 A 的**模态矩阵** T，于是有

$$\because \Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$$

$$e^{\Lambda t} = diag[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]$$

$$\Lambda = T^{-1} A T = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$$

$$\exp(T^{-1} A T t) = T^{-1} \exp(A t) T$$

$$A = T \Lambda T^{-1}$$

$$\exp(A t) = T \exp(\Lambda t) T^{-1}$$

需要满足可对角化条件

状态转移矩阵的计算： 3) 矩阵对角化

– 方法 1 对于友矩阵 $A(A=A_C)$，当矩阵具有不同的特征值 λ_i 时，可以很容易地求得 T（称为 Vandermonde 矩阵，即范德蒙矩阵）

$$
\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]
$$

状态转移矩阵的计算：3）矩阵对角化

– 方法 2 如果矩阵A 不是友矩阵，则可以将模态矩阵 T 定义为 $\boldsymbol{T}=\left[v_{ij}\right]$，

$$[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{v}_i=0$$

v_i为属于λ_i的特征向量

$$[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}][\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\frac{adj[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\left|\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|}=\boldsymbol{I}$$

$$[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]adj[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\left|\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|$$

$$\left|\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=0 \Rightarrow [\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]adj[\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=0$$

$$\Downarrow$$

特征向量 v_i 正比于 adj[λ_i I-A] 的任意非零列

状态转移矩阵的计算： 3) 矩阵对角化

– 方法 3 对于每个特征向量 v_i，计算其 n 个元素，从下面的矩阵方程形成一组（n 个）方程

$$Av_i = \lambda_i v_i \qquad [\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\boldsymbol{v}_i = 0$$

将 λ_i 的各个值代入上述矩阵，令相应元素相等就构成n 个方程

状态转移矩阵的计算：3）矩阵对角化

例 4 假定 A 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}$，利用对角化方法求解exp($At$)。

解： 求得矩阵 A 的特征值为： $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$

- 由于 A 不是对角阵，因此需要计算模态矩阵来对矩阵 A 进行对角化
- 在此例中，A 不是友矩阵，因此需要计算模态矩阵 T，这里利用方法 2 进行计算

对于 $\lambda_1=-2,\quad adj[-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\rightarrow \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}6\\ -2\end{bmatrix}$

对于 $\lambda_1=-3,\quad adj[-3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\rightarrow \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}6 & 6\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & 6\\ -1/3 & -1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\boldsymbol{T}e^{\Lambda t}\boldsymbol{T}^{-1}=T\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_1=-2,\ \ [-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 1 & 3\end{bmatrix}, adj[-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -2\end{bmatrix}\rightarrow \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}6\\ -2\end{bmatrix}$

结果与例 3 的结果一致

状态方程的全解

$$\frac{d}{dt}[M(t)N(t)] = M(t)\dot{N}(t) + \dot{M}(t)N(t)$$

- 通常有两种方法计算状态方程的全解：直接求解方程（时域）和利用拉普拉斯变换（S 域）

– 方法 1：

对于状态方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 　　$x(t)$ 是 $n\times1$ 的状态向量

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

左乘e^{-At}

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)]$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

将该方程在 0 到 t 的时间区间上进行积分

$$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

如何得到 $x(t)$?

状态方程的全解

从方程 $e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)=\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$，希望得到 $x(t)$

$$e^{At}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)]=e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right]$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

- 利用 STM 和 $t=t_0$ 时刻的初始条件，得到输入变量 $u(t)$ 作用下状态方程的解

令 $\beta=t-\tau$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\ t>t_0$$

状态转移方程

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)d\beta$$

状态方程的全解

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{Bu}(t-\beta)d\beta$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_{zi}(t)+\boldsymbol{x}_{zs}(t)$$

零状态响应：$x(t_0)=0$

零输入响应：$u(t)=0$

状态方程的全解

例 5 在标量单位阶跃函数输入 $u(t)=1$ 作用下，求解下面的状态方程 。

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

解： 矩阵 A 的 STM 由例3, 4 给出

$$\because\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}u(t-\beta)d\beta$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}6e^{-2\beta}-6e^{-3\beta}\\ -2e^{-2\beta}+3e^{-3\beta}\end{bmatrix}\cdot 1d\beta$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\\ e^{-2t}-e^{-3t}\end{bmatrix}$$

- 如果给定初始条件和输出方程，则不仅可以得到**状态变化轨迹**，还可以得到**输出响应**

状态方程的全解

－ 方法 2　拉普拉斯变换

状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$\Big\Downarrow$ LT

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(s)&=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0)+[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)\\&=\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)\end{aligned}$$

LT^{-1} $\Big\Downarrow$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]$$

状态方程的全解

例 6 在标量单位阶跃函数输入 $u(t)=1$ 作用下，求解下面的状态方程（**利用拉普拉斯变换方法**）。

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]$$

解： 矩阵 A 的 $\Phi(s)$ 由例 3 可得

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}6\\ s\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)+\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}6\\ s\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{6}{(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{-1}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{6}{s(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

LT^{-1}

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\\ e^{-2t}-e^{-3t}\end{bmatrix}$$

结果与例 5 的结果一致

例子

例 7 试求如下线性定常系统 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

的状态转移矩阵$\Phi(t)$和状态转移矩阵的逆$\Phi^{-1}(t)$。

解：对于该系统 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

采用拉氏变换方法确定状态转移矩阵：

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

因为

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

例子

例 7 试求如下线性定常系统 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

的状态转移矩阵$\Phi(t)$和状态转移矩阵的逆$\Phi^{-1}(t)$。

解：

$$\Phi(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

因此 $$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

由于 $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$

故可求得状态转移矩阵的逆为

$$\Phi^{-1}(t)=e^{-At}=\begin{bmatrix}2e^{t}-e^{2t} & e^{t}-e^{2t}\\ -2e^{t}+2e^{2t} & -e^{t}+2e^{2t}\end{bmatrix}$$

例子

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+L^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)BU(s)]$$

例 8 求下列系统的时间响应：
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

式中，$u(t)$为$t=0$时作用于系统的单位阶跃函数。

解：对于该系统 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

状态转移矩阵已在例7中求得，即 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$

因此，系统对单位阶跃输入的响应为：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}x(0)+\int_o^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

或
$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

如果初始状态为零，即$x(0)=0$,可将$x(t)$简化为
$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

例子

例9 已知系统的状态转移矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}3e^{-t}-2e^{-2t} & 3e^{-t}-3e^{-2t}\\ -4e^{-2t}+4e^{-t} & -3e^{-2t}+4e^{-t}\end{bmatrix}$ 请求出$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$和$\boldsymbol{A}$。

解：(1) 根据状态转移矩阵的运算性质有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(-t)=\begin{bmatrix}3e^{t}-2e^{2t} & 3e^{t}-3e^{2t}\\ -4e^{2t}+4e^{t} & -3e^{2t}+4e^{t}\end{bmatrix}$$

(2)因为由转移矩阵的**性质1**，关于$\boldsymbol{\Phi}(t)$的微分有

$$\frac{d}{dt}\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{A}\exp(\boldsymbol{A}t)=\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{A}$$

又 $\exp(\boldsymbol{A}t)\big|_{t=0}=\boldsymbol{I}$

$$\therefore\ \boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(0)=\begin{bmatrix}-3e^{-t}+4e^{-2t} & -3e^{-t}+6e^{-2t}\\ 8e^{-2t}-4e^{-t} & 6e^{-2t}-4e^{-t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

本节小结

- 状态方程
- 状态转移矩阵 (STM)
- 状态转移矩阵的计算
- 状态方程的全解
- 状态空间模型的稳定性?

本章总结

- 概述
- 微分方程求解
- 控制系统时域性能指标与时域分析
- 高阶系统的暂态响应
- 状态方程的求解与分析

The End