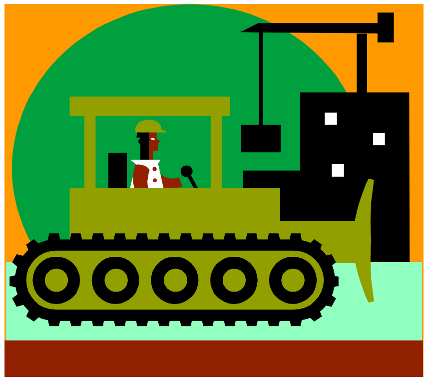
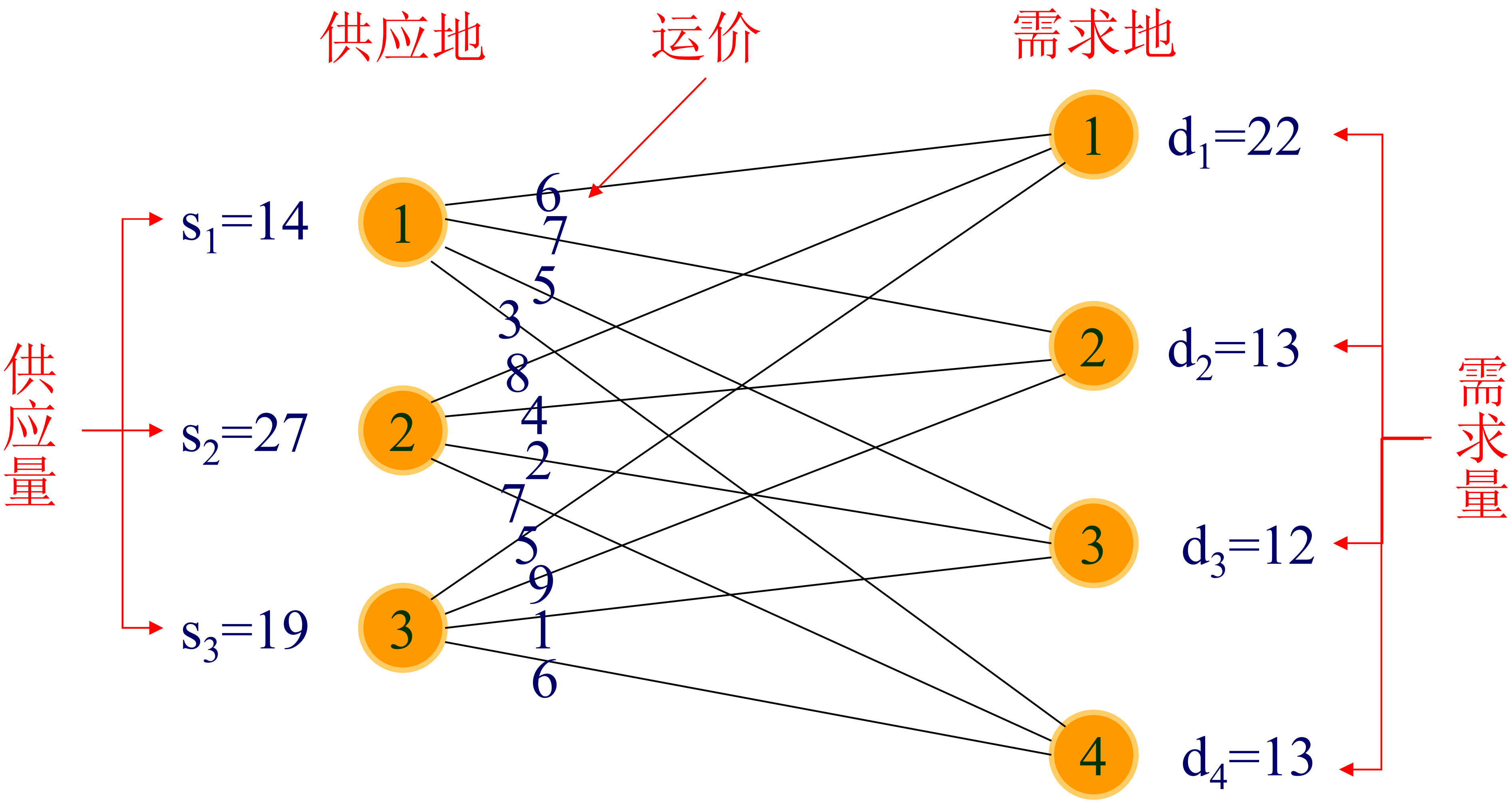
第三章 运输规划简介

- 运输问题及其数学模型
- 产销平衡问题的表上作业法
- 产销不平衡问题
- 有转运问题
- 应用举例



问题提出


供应地
运价
需求地
供应量
$s_1=14$
$s_2=27$
$s_3=19$
1
2
3
6
7
5
3
8
4
2
7
5
9
1
6
1
2
3
4
$d_1=22$
$d_2=13$
$d_3=12$
$d_4=13$
需求量

数学模型

$$
\begin{array}{llllllllllllllll}
\min & z= & 6x_{11} & +7x_{12} & +5x_{13} & +3x_{14} & +8x_{21} & +4x_{22} & +2x_{23} & +7x_{24} & +5x_{31} & +9x_{32} & +10x_{33} & +6x_{34} & & \\
\hline
s.t. & x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & & & & & & & = & 14 \\
 & & & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & & & & & & = & 27 \\
 & & & & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & & = & 19 \\
\hline
 & x_{11} & & & & +x_{21} & & & & +x_{31} & & & & & = & 22 \\
 & & x_{12} & & & & +x_{22} & & & & +x_{32} & & & & = & 13 \\
 & & & x_{13} & & & & +x_{23} & & & & +x_{33} & & & = & 12 \\
 & & & & x_{14} & & & & +x_{24} & & & & +x_{34} & & = & 13 \\
\hline
 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & & = & 0
\end{array}
$$

产销平衡问题的一般模型

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

产销平衡约束

问题的特点

1 .A矩阵稀疏

$$P_{ij}=[\,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0]^T$$

第i个　　第$m+j$个

2 .基变量只有m+n-1个

3 .一定存在（有界）最优解

$$x_{ij}=\frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i}=\frac{a_i b_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$$

可行解

运输表上的单纯形法

销地 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	$\boxed{c_{11}}$ x_{11}	$\boxed{c_{12}}$ x_{12}	$\cdots$	$\boxed{c_{1n}}$ x_{1n}	a_1
A_2	$\boxed{c_{21}}$ x_{21}	$\boxed{c_{22}}$ x_{22}	$\cdots$	$\boxed{c_{2n}}$ x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	$\boxed{c_{m1}}$ x_{m1}	$\boxed{c_{m2}}$ x_{m2}	$\cdots$	$\boxed{c_{mn}}$ x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

初始基可行解

销地 产地	1	2	3	4	产量
1	6 **14**	7	5	3	14
2	8 **8**	4 **13**	2 **6**	7	27
3	5	9	10 **6**	6 **13**	19
销量	22	13	12	13	

最优性检验

产地 \ 销地	1	2	3	4	产量
1	6 14	7 5	5 5	3 7	14
2	8 8	4 13	2 6	7 9	27
3	5 -11	9 -3	10 6	6 13	19
销量	22	13	12	13	

$\sigma_{32}= c_{32} -c_{22}+c_{23}- c_{33}= 9-4+2-10=-3$

位势法

- 对偶问题：

$$\max w = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

s.t. $u_i + v_j \le c_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

$$u_i, v_j \ free$$

检验数： $\sigma_{ij} = c_{ij} - \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{p}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

基变量部分： $u_i + v_j = c_{ij}$ 对偶解不唯一，称为位势

等价性

问题：位势法所得的检验数是否唯一？

$$\sigma_{32} = c_{32} - c_{22} + c_{23} - c_{33}$$

$$= c_{32} - (u_2 + v_2) + (u_2 + v_3) - (u_3 + v_3)$$

$$= c_{32} - (u_3 + v_2)$$

解的改进

销地 产地	1	2	3	4	产量
1	6 14	7 5	5 5	3 7	14
2	8 8	4 13	2 6	7 9	27
3	5 -11	9 -3	10 6	6 13	19
销量	22	13	12	13	

改进后运输表

产地 \ 销地	1	2	3	4	产量
1	6 / 14	7 / 5	5 / 5	3 / -4	14
2	8 / 2	4 / 13	2 / 12	7 / -2	27
3	5 / 6	9 / 8	10 / 11	6 / 13	19
销量	22	13	12	13	

最终运输表

产地＼销地	1	2	3	4	产量
1	6 / 1	7 / 5	5 / 5	3 / 13	14
2	8 / 2	4 / 13	2 / 12	7 / 2	27
3	5 / 19	9 / 8	10 / 11	6 / 4	19
销量	22	13	12	13	

产销不平衡问题的数学模型

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

产大于销问题

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

标准化

思路：化为平衡问题

方法：增加一个假象的销地 $n+1$，

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij} \qquad c_{i,n+1} = 0 \qquad i = 1,\ldots,m$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n+1$$

产小于销问题

思路：如果产小于销问题如何处理？

方法：增加一个假象的产地 m+1，

$$\min z=\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \quad c_{m+1,j}=0 \quad i=j,\ldots,n$$

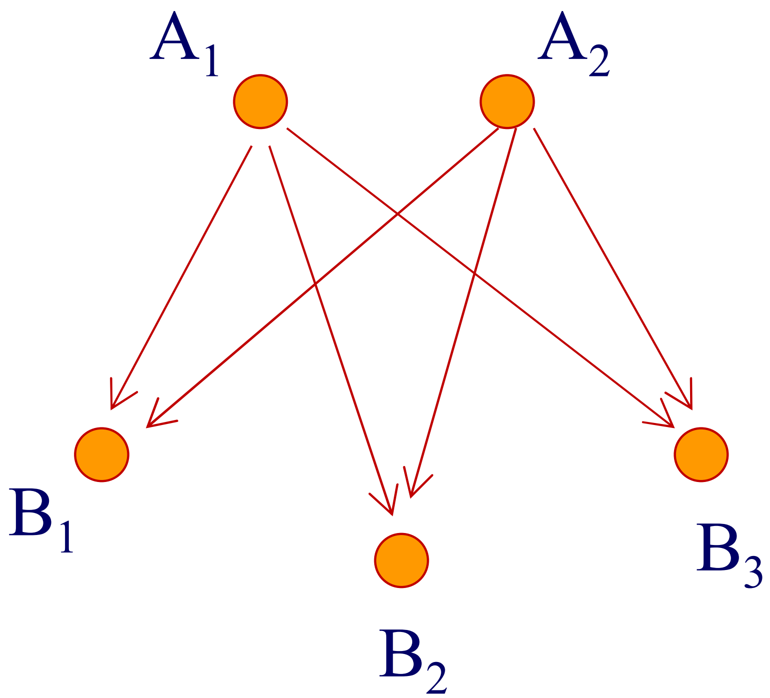
s.t.

$$\sum_{j=1}^{n+1}x_{ij}=a_i \qquad a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$$

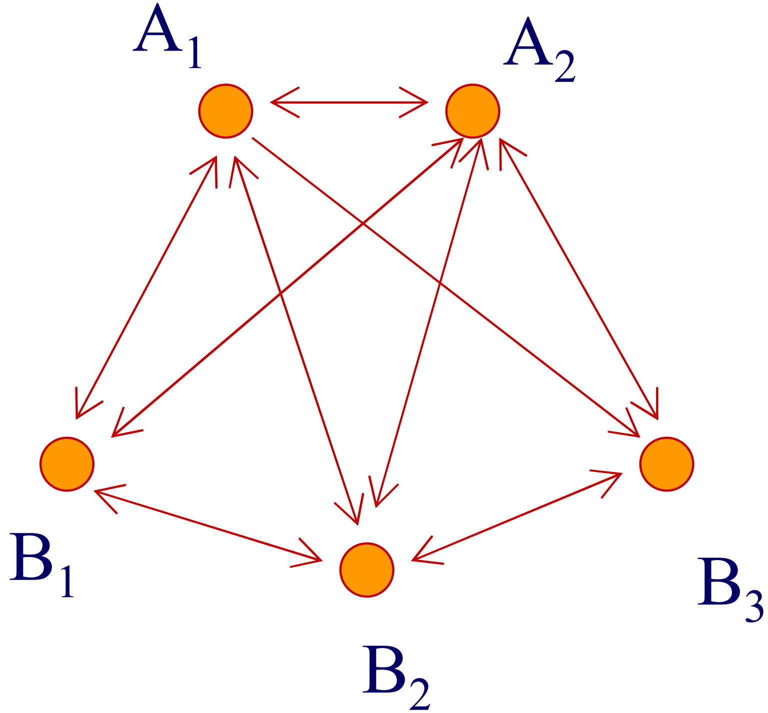
$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j$$

$$x_{ij}\geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,n+1$$

有转运问题



无转运问题



有转运问题

新增“产地”： $a_{m+j}=0 \quad j=1,2,\dots,n$

新增“销地”： $b_i=0 \quad i=1,2,\dots,m$

有转运问题的数学模型

$$\min z = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m+n} c_i t_i$$

产销平衡问题

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = Q$$

s.t. $$\sum_{j=1, j\neq i}^{m+n} x_{ij} = a_i + t_i$$

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{m+n} x_{ij} = b_j + t_j$$

问题：能否取$x_{ii}=t_i$？

问题：能否取$x_{ii}=-t_i$？

$$x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \ldots, m+n; i \neq j$$

$$t_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m+n$$ 第i个节点的转运量

有转运问题的标准化

产销平衡问题

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = Q$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{m+n}\sum_{j=1}^{m+n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m+n} c_i Q$$

$c_{ii} \triangleq -c_i$ $x_{ii} \triangleq Q - t_i$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{m+n} x_{ij} = a_i + Q \qquad i = 1,2,\ldots,m+n$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} x_{ij} = b_j + Q \qquad j = 1,2,\ldots,m+n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i,j = 1,2,\ldots,m+n$$

$$t_i \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m+n$$

第i个节点的转运量