

1. 设 $\{X_{ij}, i \geq 0\}$ 是时齐的 Markov 链，状态空间 $i = (1, 2, 3)$ ，初始分布为 $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = 1/3$ 。其一步转移矩阵是

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

则下列叙述正确的是

选项：

- A. $f_{23} = 1/2$
- B. 状态1是零常返的
- C. $\mu_2 = 93/20$
- D. $\mu_3 = 93/20$

答案：D

2. 设 $X(t) = A + Bt$, $t \geq 0$ 。这里随机变量 A 和 B 服从相同的 0-1 分布， $P(A = 1) = p \in (0, 1)$ 。若 $E[A(B - 1)] = 0$ 。

则该过程的所有样本函数

选项：

- A. 有两条，且分别为 $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 0$ 。
- B. 有四条，且分别为 $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = t$, $x_4(t) = 1$ 。
- C. 有三条，且分别为 $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = t$ 。
- D. 有三条，且分别为 $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = 1$ 。

答案：A

3. 设 $X(t) = 5 \sin(\pi t + \Theta)$, $t \geq 0$ ，其中 Θ 是随机变量，且满足 $P(\Theta = 0) = 0.2$, $P(\Theta = \pi/2) = 0.8$ 。则 $R_X(0, 1) =$

选项：

- A. -20
- B. 16
- C. 0
- D. -4

答案：A

4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时齐的 Markov 链, 状态空间 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 一步转移概率为:

- $P_{00} = P_{21} = 1$
- $P_{12} = P_{13} = P_{32} = P_{33} = \frac{1}{2}$
- $P_{40} = P_{42} = P_{44} = \frac{1}{3}$

初始分布为 $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = \frac{1}{3}$ 。则

$$P_{33}^{(4)} =$$

选项:

- A. 1/8
- B. 1/4
- C. 3/16
- D. 5/16

答案: D

5. 已知 $X(t) = At + |B|$, $-\infty < t < \infty$, 其中 A 和 B 相互独立, A 服从 0-1 分布, 且 $P(A = 1) = 0.5$, $B \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。则该过程的均值函数 $\mu_X(t)$ 和自协方差函数 $R_X(t, s)$ 分别为:

- A. $\mu_X(t) = 0.5t + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, $R_X(t, s) = ts + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(t + s) + 1$
- B. ☒ $\mu_X(t) = 0.5t + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, $R_X(t, s) = 0.5ts + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(t + s) + 1$
- C. $\mu_X(t) = 0.5t + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $R_X(t, s) = 0.5ts + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(t + s) + 1$
- D. $\mu_X(t) = 0.5t + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $R_X(t, s) = 0.5ts + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t + s) + 1$

答案: B

6. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时齐的Markov链，状态空间 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，一步转移概率为：

- $P_{00} = P_{21} = 1$
- $P_{12} = P_{13} = P_{32} = P_{33} = \frac{1}{2}$
- $P_{40} = P_{42} = P_{44} = \frac{1}{3}$

初始分布为 $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = \frac{1}{3}$ 。则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{40}^{(n)} =$$

选项：

- A. 1/3
- B. 1/5
- C. 1/2
- D. 1/6

答案：C

7. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时齐的Markov链，状态空间 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，一步转移概率为：

- $P_{00} = P_{21} = 1$
- $P_{12} = P_{13} = P_{32} = P_{33} = \frac{1}{2}$
- $P_{40} = P_{42} = P_{44} = \frac{1}{3}$

初始分布为 $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = \frac{1}{3}$ 。则关于正常返态的平均回转时的叙述错误的是：

- A. $\mu_0 = 1$
- B. $\mu_1 = 3$
- C. $\mu_2 = 3$
- D. $\mu_3 = \frac{3}{2}$

答案：D

8. 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是正态过程, 且 $E[X(t)] = 0$, $Cov(X(t), X(s)) = ts + \min(t, s)$, 则 $X(2) - X(1)$ 服从

选项:

- A. $N(0, 4)$
- B. $N(0, 5)$
- C. $N(0, 2)$
- D. $N(0, 3)$

答案: C

9. 假设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 和 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 二阶矩都存在且相互独立, 令 $Z(t) = X(t)Y(t)$, $t \geq 0$ 。则下列等式中恒成立的是

选项:

- A. $C_Z(t, t + \tau) = C_X(t, t + \tau)C_Y(t, t + \tau)$
- B. $R_Z(t, t + \tau) = R_X(t, t + \tau)R_Y(t, t + \tau)$
- C. $D_Z(t) = D_X(t)D_Y(t)$
- D. $\mu_Z(t) = \mu_X(t)\mu_Y(t)$

答案: B、D

10. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时齐的Markov链, 状态空间 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 一步转移概率为:

- $P_{00} = P_{21} = 1$
- $P_{12} = P_{13} = \frac{1}{2}$
- $P_{32} = P_{33} = \frac{1}{2}$
- $P_{40} = P_{42} = P_{44} = \frac{1}{3}$

初始分布为 $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = \frac{1}{3}$ 。则下列选项中正确的值是:

选项:

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{22}^{(n)} = \frac{1}{3}$
- B. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{02}^{(n)} = 0$
- C. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1) = \frac{1}{6}$
- D. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{2}$

答案: A、B、C、D