2024-2025学年 秋学期

现代控制理论

Modern Control Theory

学在浙大 http://course.zju.edu.cn
用自己的浙大通行证账号登录

主讲：吴俊　徐巍华

第7章 线性离散时间控制系统分析与综合

徐巍华

浙江大学智能系统与控制研究所

玉泉校区教十八235室

whxu@zju.edu.cn

13600549753

回顾

7-5 离散系统的稳定性与稳态误差

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- 稳态误差

S域到z域的映射

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j2\pi\omega/\omega_s}$$

$$|z| = e^{\sigma T}, \qquad \angle z = \omega T$$

- ✓ s平面上的多值，映射为z平面上的单值；
- ✓ s平面上的带域，映射为z平面上的圆域；
- ✓ s平面上的虚轴，映射为z平面上的单位圆；
- ✓ s平面上的左半平面，映射为z平面上的单位圆内。

稳定性

BIBO
Bounded-Input Bounded-Output

- **离散系统稳定的定义**:若离散系统在**有界输入序列**作用下，其**输出序列也是有界**的，则称该离散系统是稳定的。

连续系统稳定的充要条件:

闭环系统的特征根均位于s平面的**左半平面**;

离散控制系统稳定的充要条件:

闭环系统的特征根均位于z平面的**单位圆之内**;

推论1：若有一个或一个以上的闭环特征根在单位圆外，系统就不稳定;

推论2：若有一个或一个以上的闭环特征根在单位圆上时，系统就处于临界稳定。

稳定性分析方法

A

直接求特征根

B

Z域：

根轨迹

C

W域：

w变换+劳斯稳定判据

w变换+根轨迹

D

Z域：

朱利稳定判据

z-w变换（双线性变换）

连续系统 $\Longleftrightarrow$ 劳斯判据：特征根在s左半平面

离散系统 $\Longleftrightarrow$ 特征根在z平面单位圆内部

z平面单位圆内 $\Longleftrightarrow$ s左半平面

即：**必须寻求一种变换，使z平面上单位圆内映射到一个新平面的虚轴之左，我们称该新平面为w平面。**

根据双线性变换

$$z=\frac{w+1}{w-1} \quad \text{或} \quad w=\frac{z+1}{z-1}$$

令

$$z=x+jy \qquad w=u+jv$$

则

$$w = u + jv = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x-1)^2 + y^2} - j\frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

当:

$$x^2 + y^2 = 1$$

(z平面的单位圆方程)

$$w = -j\frac{2y}{(x-l)^2 + y^2}$$

即：z平面的单位圆上的点对应于w平面虚轴

当:

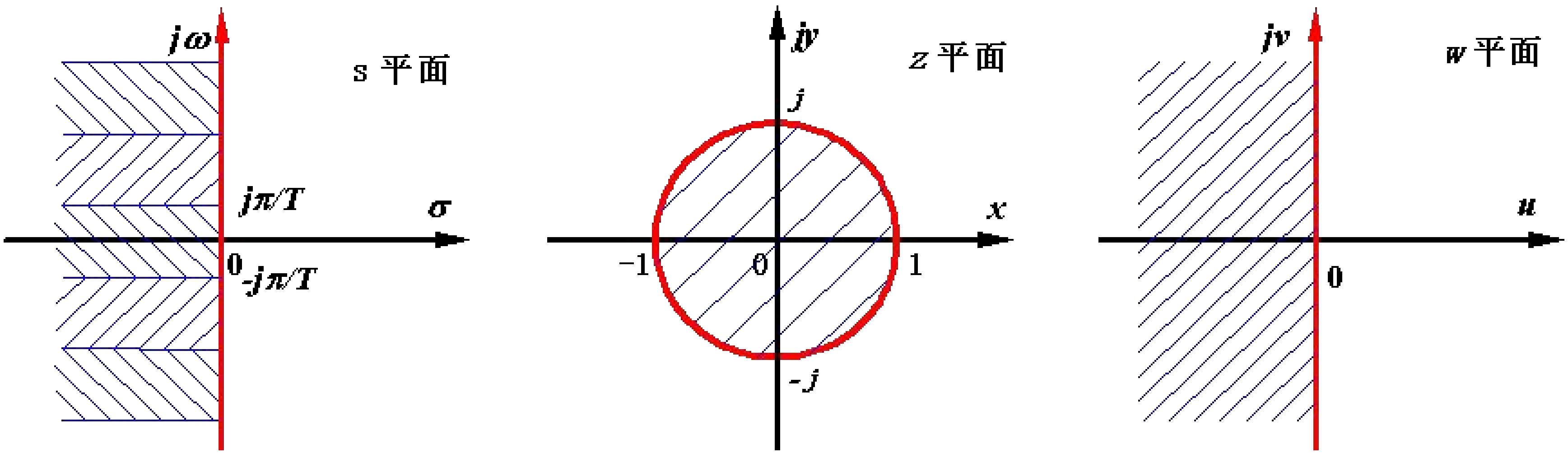
$$x^2 + y^2 < 1$$

(z平面的单位圆内部)

$$\operatorname{Re} w = u < 0$$

即：z平面的单位圆内的点对应于w平面左半平面

s平面、z平面、w平面的映射关系



由双线性变换，可以直接应用劳斯判据判别系统的稳定性。

例　设采样控制系统的特征方程为

$$D(z)=45z^3-117z^2+119z-39=0$$

试用劳斯判据判别稳定性。

解： 因为

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$

代入特征多项式中，有

$$45\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3-117\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2+119\left(\frac{w+1}{w-1}\right)-39=0$$

化简得

$$w^3+2w^2+2w+40=0$$

列劳斯表

$$\begin{array}{lll} w^3 & 1 & 2 \\ w^2 & 2 & 40 \\ w^1 & -18 & \\ w^0 & 40 & \end{array}$$

由于第一列元素的符号有两次改变，则有两个根在右半平面（w域)，即有两个根处于平面单位圆外(z域)，故该系统不稳定。

例　设采样控制系统的特征方程为

$$D(z)=45z^3-117z^2+119z-39=0$$

试判别稳定性。

解：

```
>>c=[45 -117 119 -39];
>> roots(c)

ans =

   1.0000 + 0.6667i
   1.0000 - 0.6667i
   0.6000 + 0.0000i
```

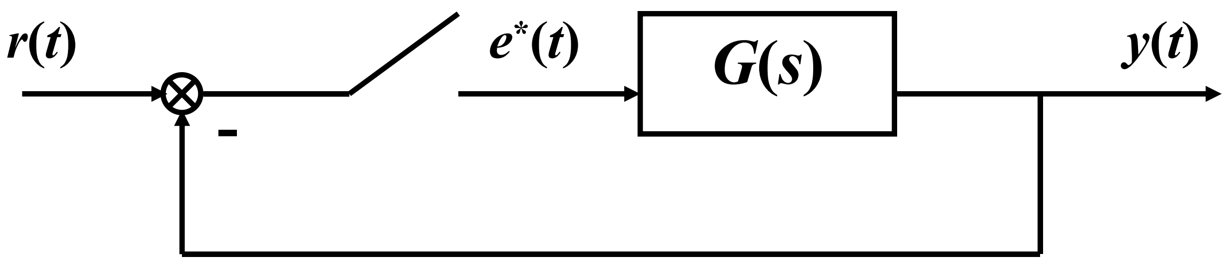
稳态误差

- **稳态误差系数**表明了系统在稳态时输出**跟踪**给定类型输入的情况.。

如图所示稳定的单位负反馈系统 (与连续系统类似)

可以很容易得到误差脉冲传递函数

$$G_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}$$



$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$

与连续系统类似，根据系统开环脉冲传递函数在z=1的极点的个数而分为0型、1型、2型……系统。

稳态误差的来源

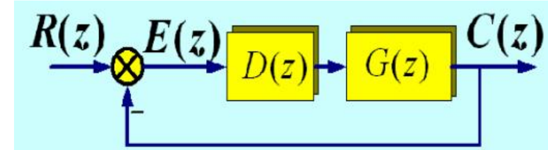
1．指令信号作用下的离散系统稳态误差

(1) 输入信号为单位阶跃函数

(2) 输入信号为单位斜坡信号

(3) 输入信号为单位加速度信号

2．干扰作用下的离散系统稳态误差



离散及连续系统稳态误差系数

误差系数	连续系统	离散系统
K_p	$\lim\limits_{s\to 0} D(s)G(s)$	$\lim\limits_{z\to 1} D(z)G(z)$
K_v	$\lim\limits_{s\to 0} sD(s)G(s)$	$\frac{1}{T}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)D(z)G(z)$
K_a	$\lim\limits_{s\to 0} s^2D(s)G(s)$	$\frac{1}{T^2}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2D(z)G(z)$

离散系统稳态误差

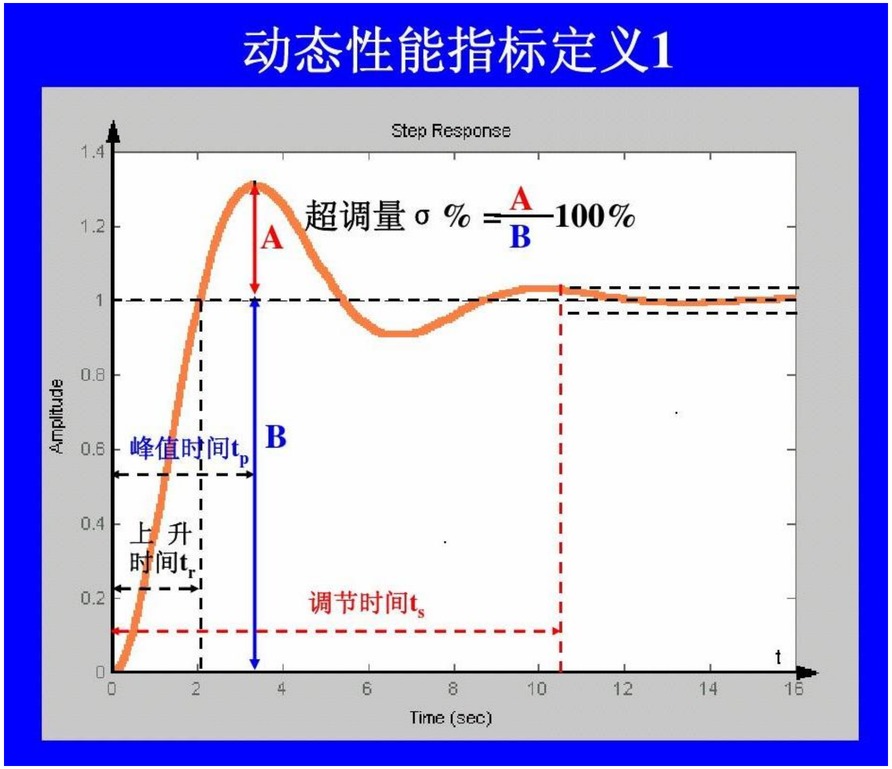
e_{ss}^*	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=\frac{1}{2}t^2$
0型系统	$1/(1+K_p)$	∞	∞
I型系统	0	$1/K_v$	∞
II型系统	0	0	$1/K_a$

主要内容

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- **离散系统的动态性能分析**
- 离散系统的数字校正

回顾：连续系统的动态性能分析

- **时域**
  - 典型输入信号
  - **时间响应**
    - 微分方程求解
      - 经典/拉氏变换
  - **时域性能指标**
    - **基于系统单位阶跃响应（过渡过程）给出的反映系统动态性能的指标---T_r，T_p，σ，T_s，T_d，n，e_{ss}**
    - 基于误差计算的性能指标---ISE, ITSE,IAE, ITAE



- **频域**
  - 谐振峰值，谐振频率，频带宽度，系统带宽……

$\Phi(z)=C(z)/R(z)$

若离散控制系统的闭环脉冲传递函数为$\Phi(z)$

则**系统对单位阶跃输入的输出响应**为　　$R(z)=z/(z-1)$

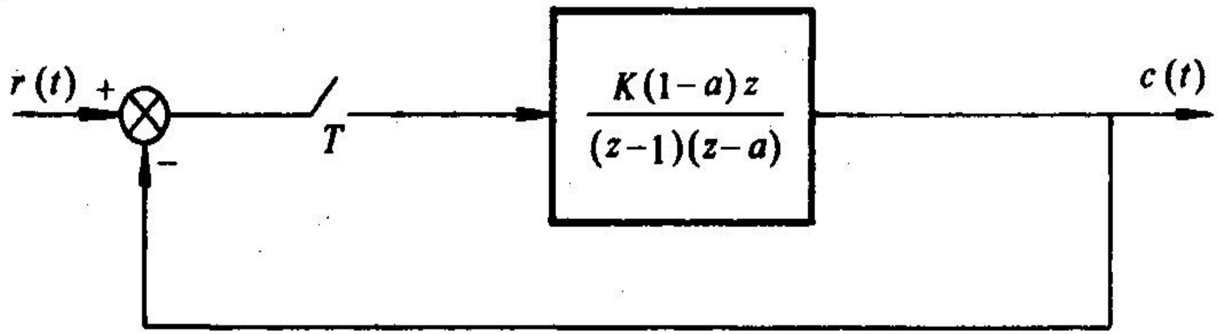
$$C(z)=\frac{\Phi(z)}{1-z^{-1}}$$

应用长除法，将分子分母相除，再用z反变换，即可得输出信号的脉冲序列$C^*(t)$。

$C^*(t)$代表线性定常离散系统在单位阶跃输入作用下的响应过程

对一个稳定性较好的系统，过渡过程在有限个采样周期结束，故只需相除前几项，就能求得t_s、 σ等指标。

例 **求下图所示系统的t_s、σ 近似值。已知K=2，a=0.368，T=0.1s。**



解

$$G(z)=\frac{K(1-a)z}{(z-1)(z-a)}=\frac{2(1-0.368)z}{(z-1)(z-0.368)}=\frac{1.264z}{z^2-1.368z+0.368}$$

闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{1.264z}{z^2-0.104z+0.368}$$

系统的单位阶跃响应为

$$C(z)=\frac{\Phi(z)}{1-z^{-1}}=\frac{1.264z}{(1-z^{-1})(z^2-0.104z+0.368)}$$

$$C(z)=\frac{\Phi(z)}{1-z^{-1}}=\frac{1.264z}{(1-z^{-1})(z^{2}-0.104z+0.368)}$$

$$=\frac{1.264z^{2}}{z^{3}-1.104z^{2}+0.472z-0.368}$$

将分子分母相除，可得

$$C(z)=1.264z^{-1}+1.369z^{-2}+0.945z^{-3}+0.851z^{-4}$$
$$+1.008z^{-5}+1.106z^{-6}+\cdots$$

因此采样输出为

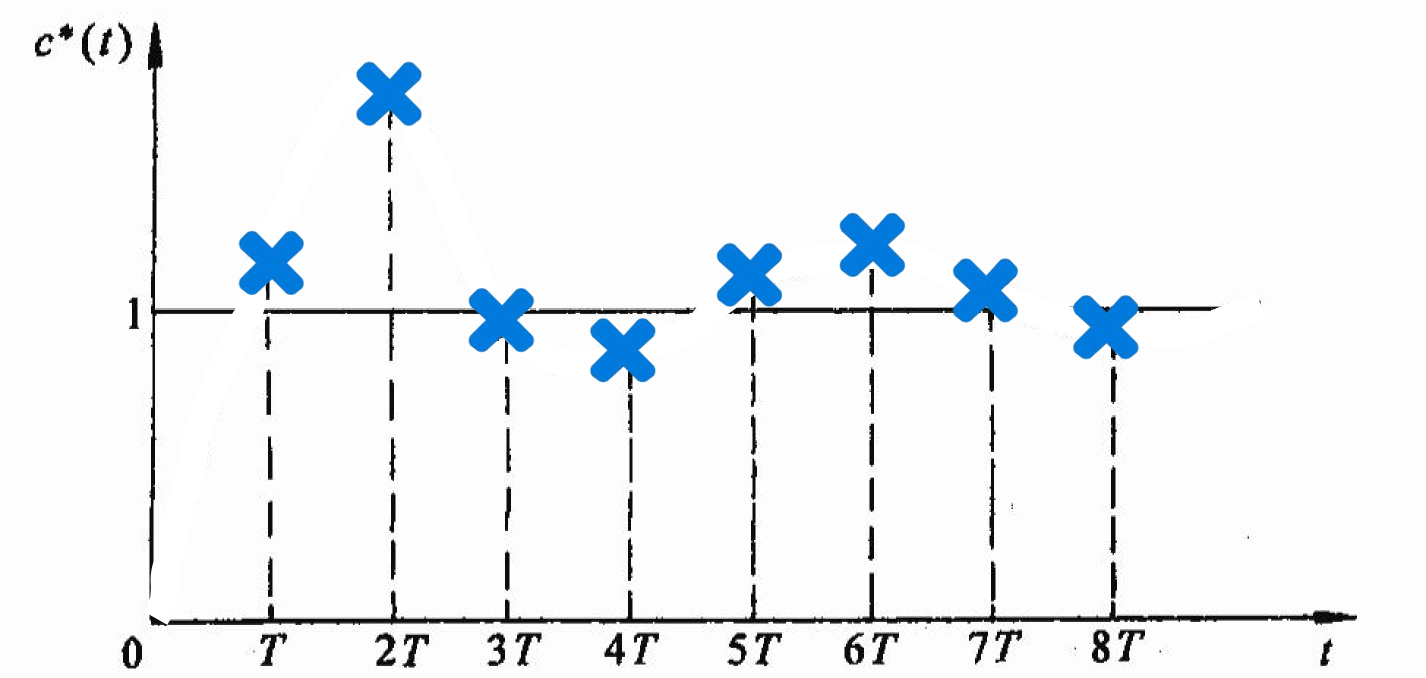
$$c^{*}(t)=1.264\delta(t-T)+1.396\delta(t-2T)+0.945(t-3T)$$

$$+0.851\delta(t-4T)+1.008\delta(t-5T)+1.106\delta(t-6T)+\cdots$$

圆滑连接图中各点，便得到了系统输出响应曲线c(t)的大致波形

$$c^*(t) = 1.264\delta(t-T) + 1.396\delta(t-2T) + 0.945(t-3T)$$

$$+ 0.851\delta(t-4T) + 1.008\delta(t-5T) + 1.106\delta(t-6T) + \cdots$$



由该波形曲线可得

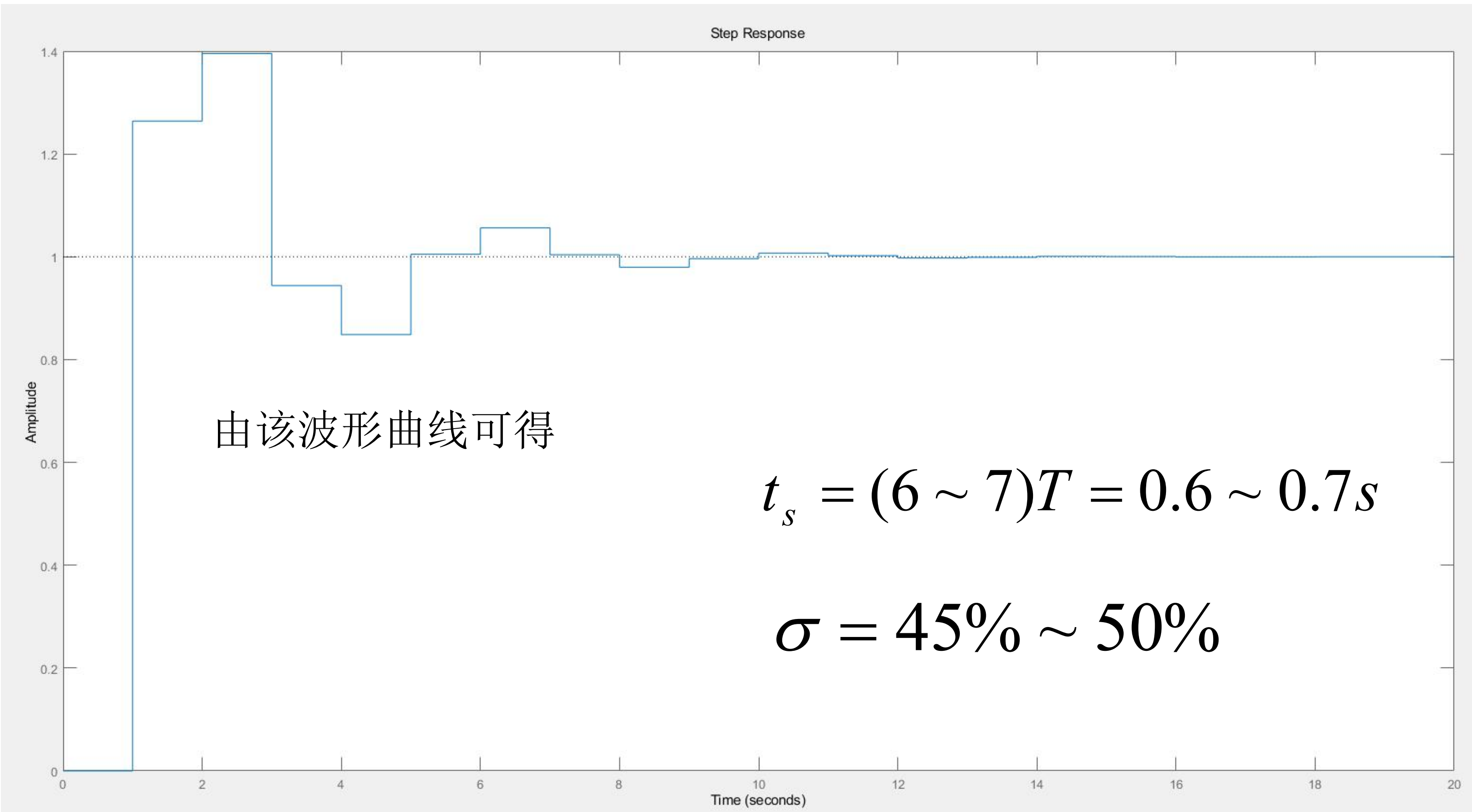
$$t_s = (6 \sim 7)T = 0.6 \sim 0.7s$$

$$\sigma = 45\% \sim 50\%$$

dstep(NUM,DEN) plots the step response of the polynomial transfer function G(z) = NUM(z)/DEN(z) where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of z.

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{1.264z}{z^{2}-0.104z+0.368}$$

```
>> num=[1.264 0];
>> den=[1 -0.104 0.368];
>> dstep(num,den)
```



由该波形曲线可得

$$t_s=(6\sim7)T=0.6\sim0.7s$$

$$\sigma=45\%\sim50\%$$

impulse
step
lsim
initial

单位脉冲响应

impulse - Impulse response plot of dynamic system;

dimpulse - Impulse response of discrete-time linear systems.

单位阶跃响应

step - Step response plot of dynamic system;

dstep - Step response of discrete-time linear systems.

任意输入响应

lsim - Plot simulated time response of dynamic system to arbitrary inputs

dlsim - Simulation of discrete-time linear systems.

零输入响应

initial - Initial condition response of state-space model

dinitial - Initial condition response of discrete-time linear systems.

离散系统的时间响应

➢ 离散系统的时间响应

闭环脉冲传递函数 → 输出Z变换 → 输出脉冲序列

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}$$

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$C(z)=\frac{z}{z-1}\Phi(z)$$

$$c^*(t)$$

$c^*(t)$ 代表线性定常离散系统在单位阶跃输入下的响应过程

离散系统时域指标的定义与连续系统相同

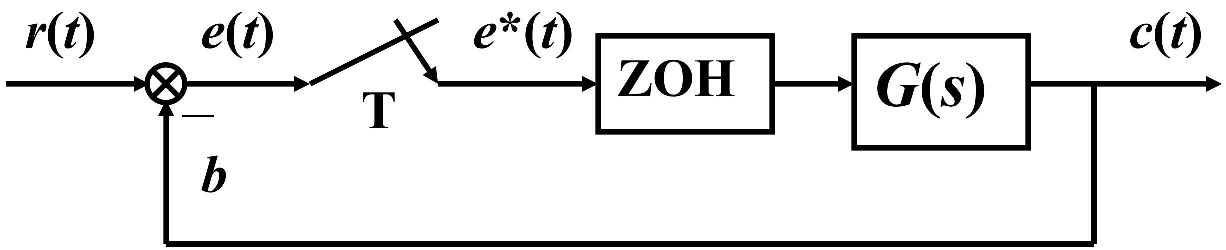
可以根据单位阶跃响应曲线方便地分析离散系统的动态和稳态性能

瞬态响应

➢ 离散系统的时间响应

闭环脉冲传递函数 → 输出Z变换 → 输出脉冲序列

例



$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

采样周期 T=1

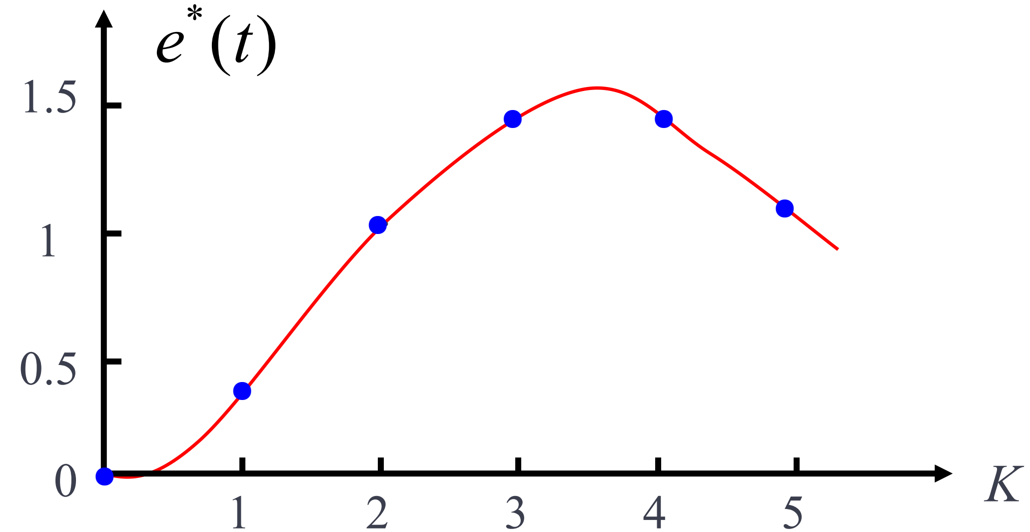
开环脉冲传递函数（T=1）： $G(z)=\dfrac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)}$

闭环系统脉冲传递函数（T=1）： $\phi(z)=\dfrac{G(z)}{1+G(z)}=\dfrac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$

单位阶跃响应： $C(z)=0.368z^{-1}+z^{-2}+1.4z^{-3}+1.4z^{-4}+1.147z^{-5}+\cdots$

单位阶跃响应： $C(z)=0.368z^{-1}+z^{-2}+1.4z^{-3}+1.4z^{-4}+1.147z^{-5}+\cdots$

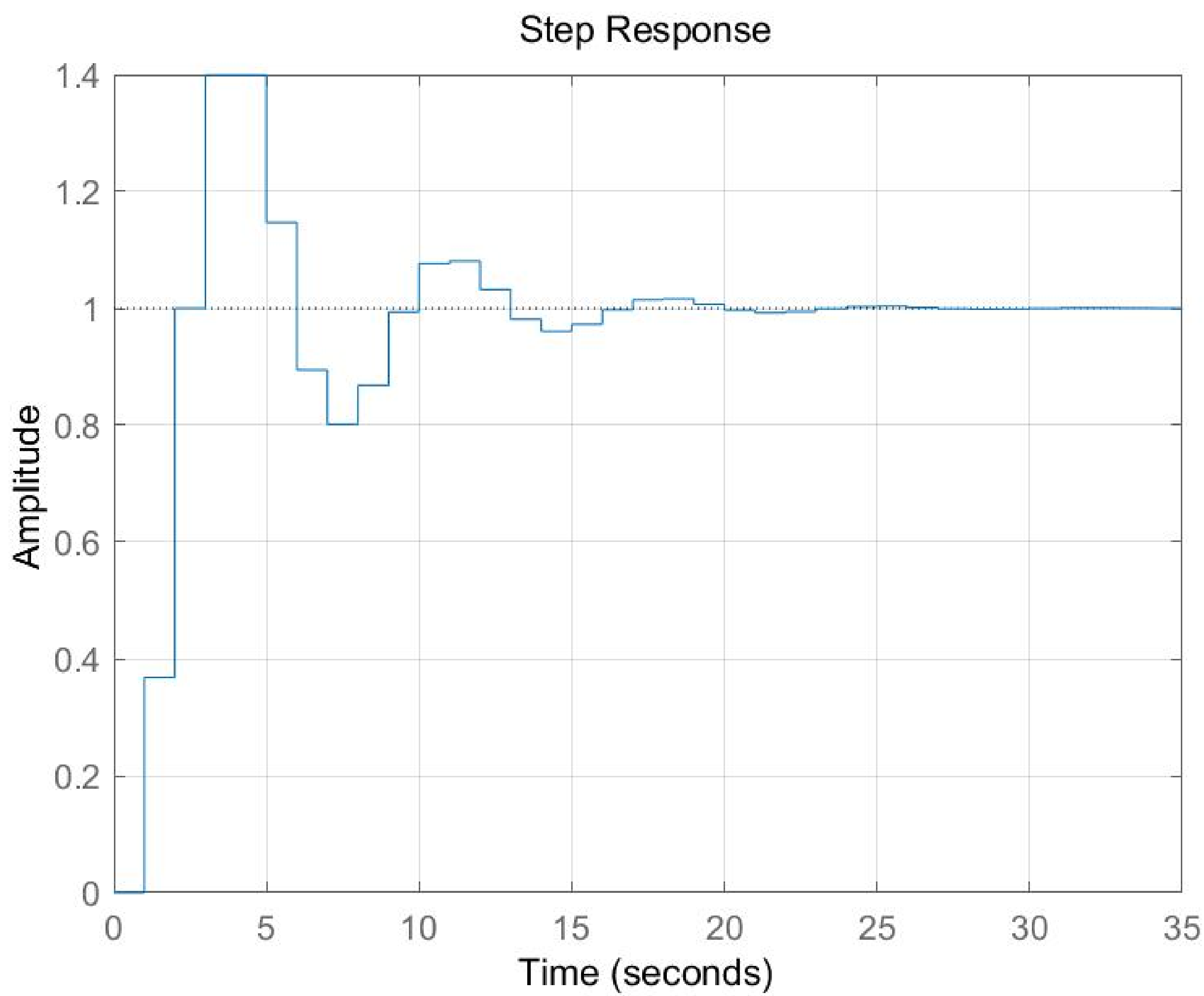
$$\begin{aligned}\therefore c(0)&=0\\ c(1)&=0.3678\\ c(2)&=1\\ c(3)&=1.4\\ c(4)&=1.4\\ c(5)&=1.147\\ &\vdots\end{aligned}$$



响应曲线

$$\phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

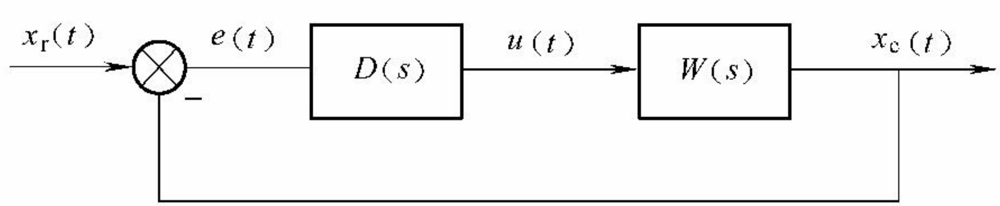
$$\therefore c(0) = 0$$
$$c(1) = 0.3678$$
$$c(2) = 1$$
$$c(3) = 1.4$$
$$c(4) = 1.4$$
$$c(5) = 1.147$$
$$\vdots$$

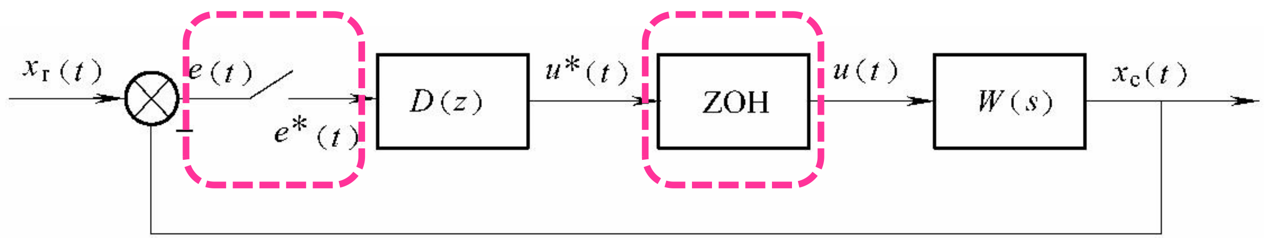


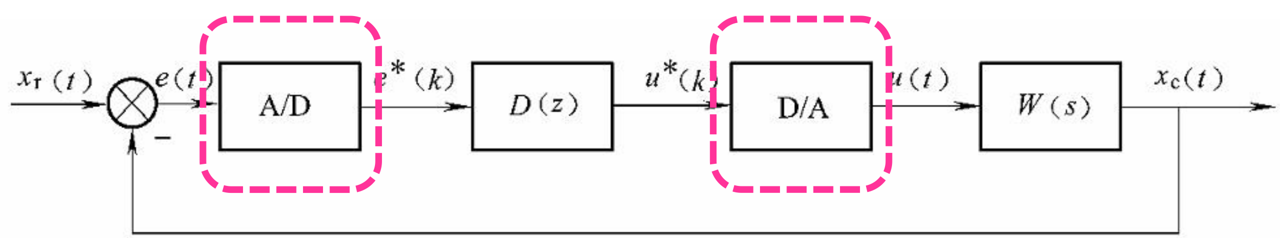
瞬态响应

➢ 采样器和保持器对动态性能的影响

- 自动控制系统按照**信号形式**可分为三种类型
  - 连续控制系统
  - 采样控制系统
  - 数字控制系统







瞬态响应

> 采样器和保持器对动态性能的影响

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

有保持器的采样系统

无保持器的采样系统

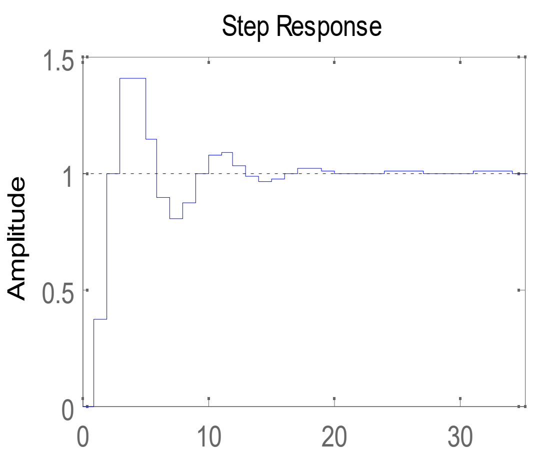
连续系统

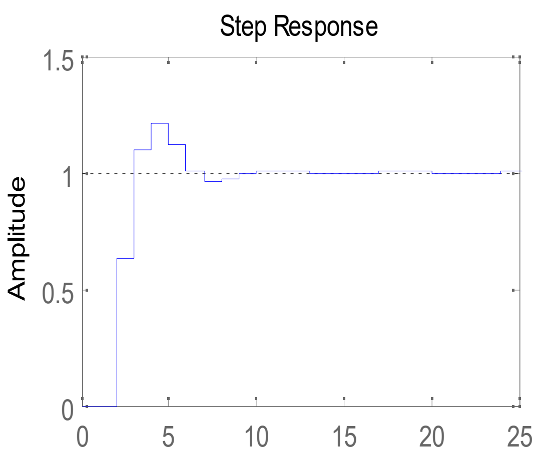
$$G(z)=\frac{C(z)}{E(z)}=Z\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\}=\frac{0.368(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

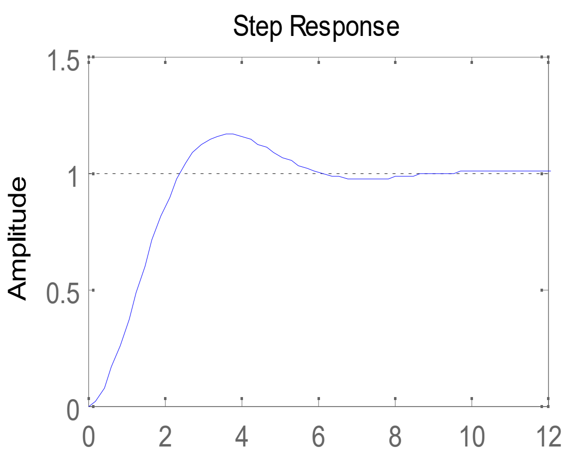
$$\phi(z)=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$

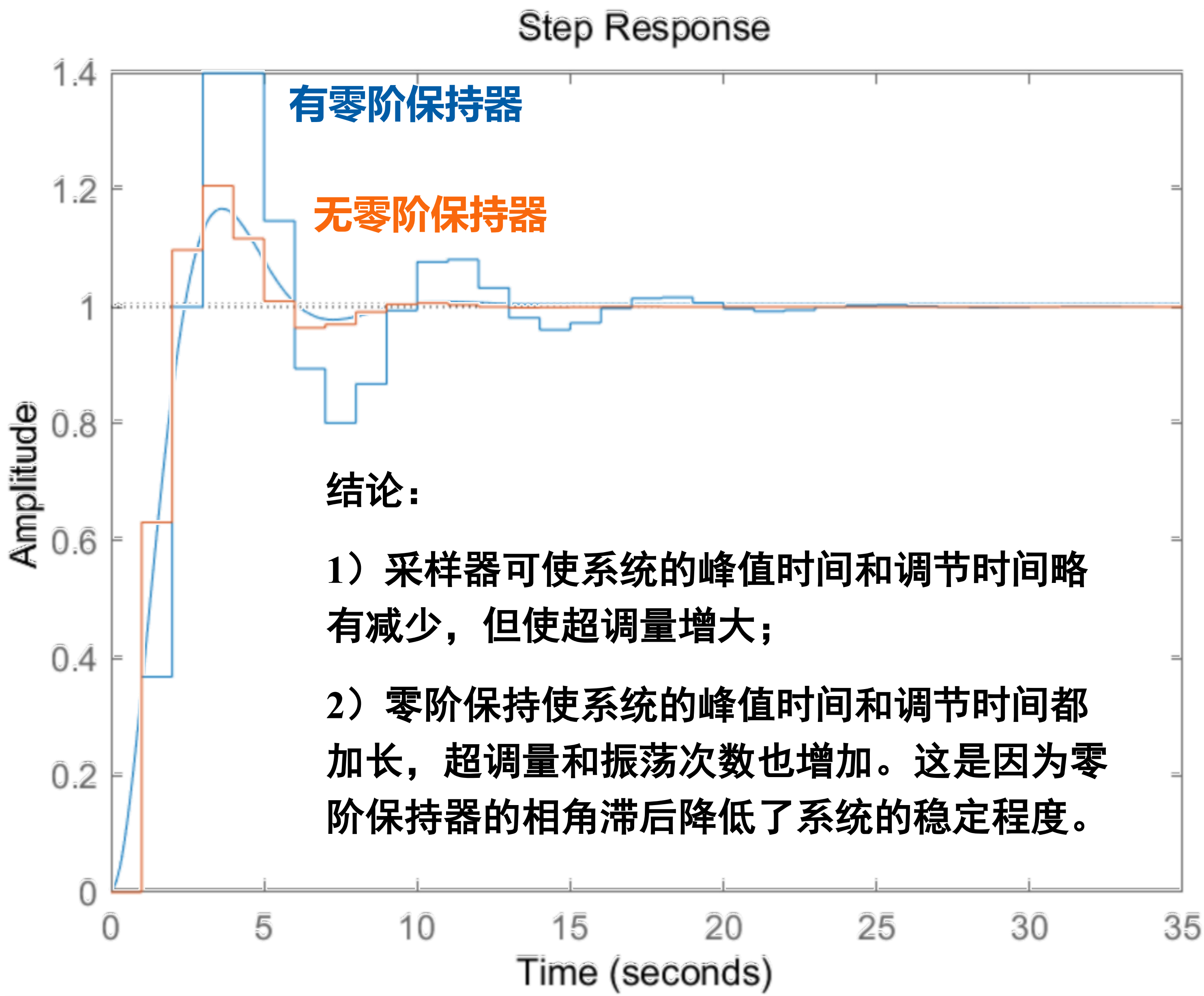
$$\phi(z)=\frac{0.632z}{z^2-0.736z+0.368}$$

$$\phi(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$







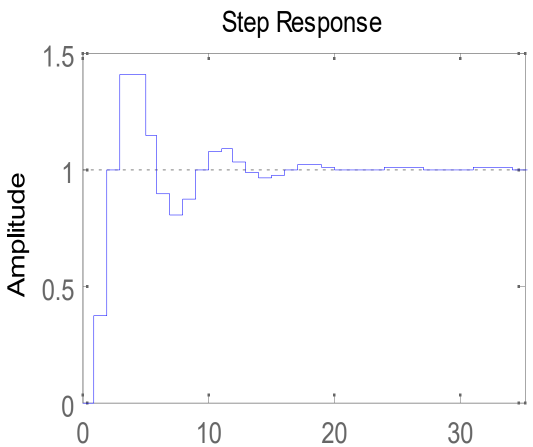


结论：

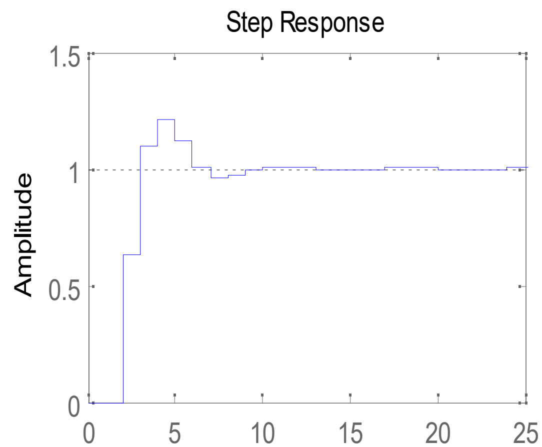
1）采样器可使系统的峰值时间和调节时间略有减少，但使超调量增大；

2）零阶保持使系统的峰值时间和调节时间都加长，超调量和振荡次数也增加。这是因为零阶保持器的相角滞后降低了系统的稳定程度。

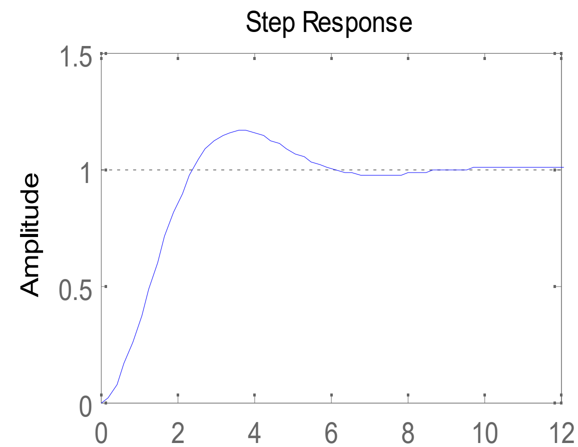
瞬态响应



有保持器的采样系统



无保持器的采样系统



连续系统

结论：

1）采样器可使系统的峰值时间和调节时间略有减少，但使超调量增大；

2）零阶保持使系统的峰值时间和调节时间都加长，超调量和振荡次数也增加。这是因为零阶保持器的相角滞后降低了系统的稳定程度。

➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

通常离散控制系统的闭环脉冲传递函数可表示为（设系统无重极点）

$$G_B(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(z-P_k)}$$

当系统输入$r(t)$ 为单位阶跃时，其系统输出的Z变换$C(z)$为

$$C(z)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(z-P_k)}\cdot\frac{z}{z-1}$$

展开成部分分式，有

$$C(z)=\frac{C(1)}{R(1)}\cdot\frac{z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k z}{z-P_k}$$

其中，各分式的系数 C_k 可用留数法求取

$$C_k=\lim_{z\to p_k}K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(z-P_k)}\cdot\frac{1}{z-1}$$

$c^*(t)$的稳态部分

瞬态响应

$$C(z) = \frac{C(1)}{R(1)} \cdot \frac{z}{z-1} + \sum_{k=1}^{n} \boxed{\frac{C_k z}{z - P_k}}$$

➢ 闭环零极点与瞬态响应的关系

1) P_k为正实根，对应的瞬态分量

$$c_k(nT) = Z^{-1}\{\frac{C_k z}{z - P_k}\} = C_k P_k^{\,n}$$

令 $P_k = e^{aT};\ a = \frac{1}{T}\ln P_k$ 　则 $c_k(nT) = C_k e^{anT}$

2) 当P_k为负实根，则对应的瞬态分量为

$$c_k(nT) = C_k P_k^{\,n}$$

$$c_k(nT)=C_kP_k^n$$

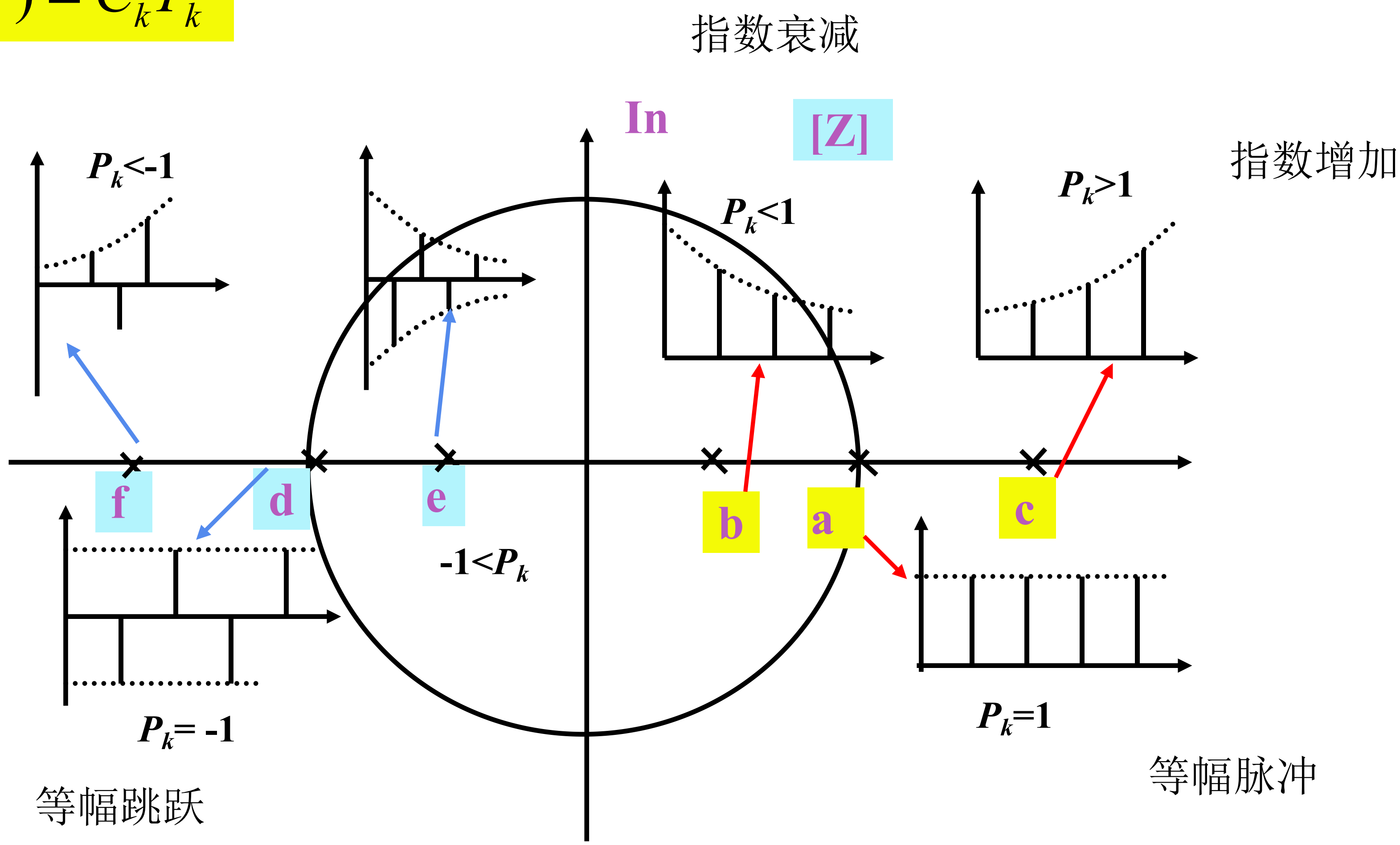
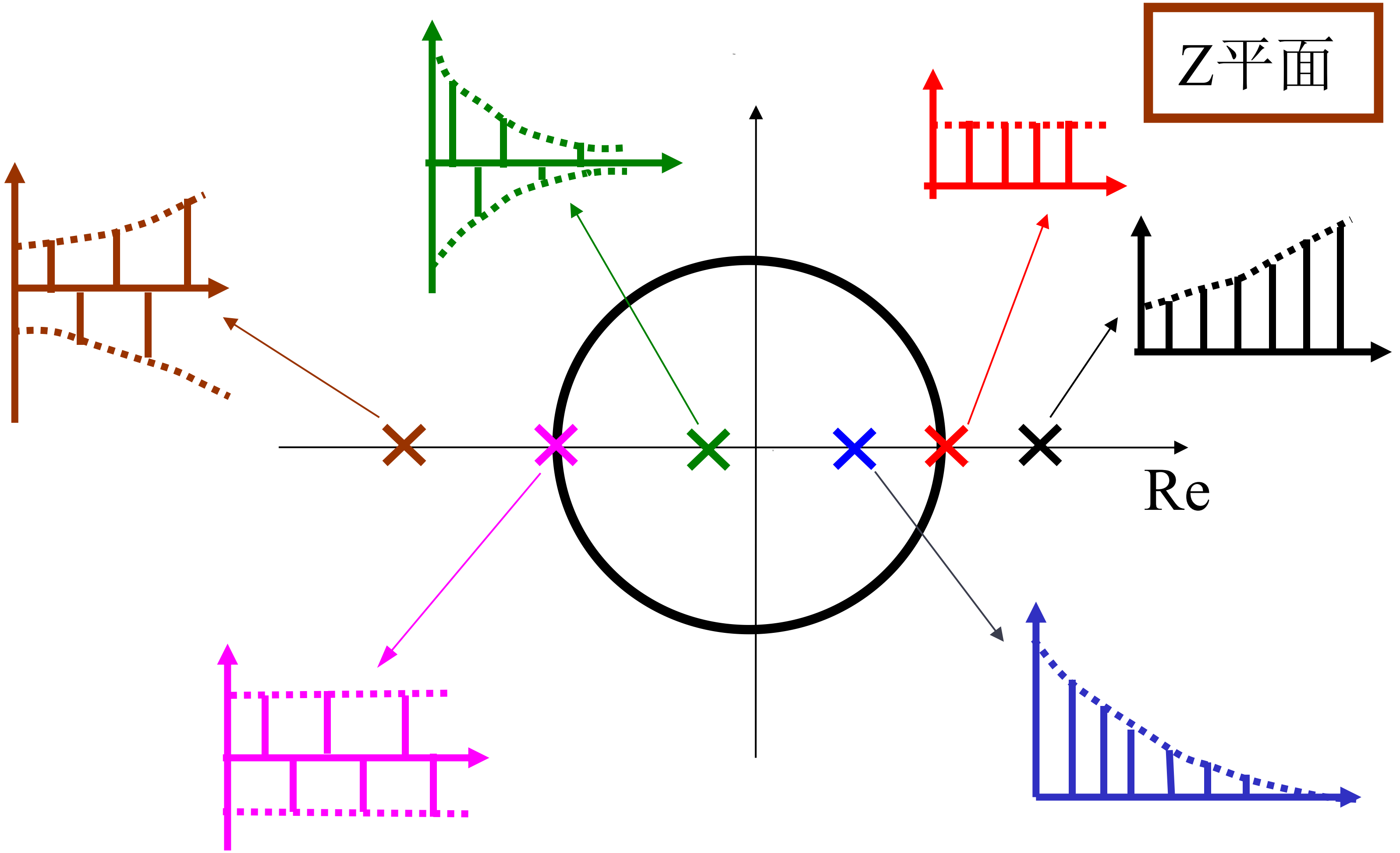


图1　闭环实极点分布与相应瞬态响应


Z平面
Re

瞬态响应

若$P_k=1$，即闭环极点位于右半Z平面上圆周上，闭环系统瞬态响应$c_k(nT)$为等幅脉冲；对应图1中 a点对应波形。

若$P_k<1$，则闭环极点位于单位圆内，此时$a<0$，则输出响应$c_k(nT)$ 呈指数衰减状；对应图1中 b点对应波形。

若$P_k>1$，闭环极点位于单位圆外，此时$a>0$，则输出响应$c_k(nT)$ 呈指数增加状，对应图1中 c点对应波形。

若$P_k= -1$，输出响应分量$c_k()$对应图1中d点波形，呈等幅跳跃输出。

若$|P_k|<1$，输出响应分量$c_k(NT)$ 对应图1中e点波形。

若$|P_k|>1$，输出响应分量$c_k(NT)$对应图1中f点波形，呈发散跳跃变化。

1、当特征根为正实数时

$$c_i(kT) = \mathrm{c}_i p_i^{\,k} \quad \begin{cases} p_i > 1 & \text{单调发散} \\ 0 < p_i < 1 & \text{单调收敛} \end{cases}$$

2、当特征根为负实数时

$$c_i(kT) = \mathrm{c}_i p_i^{\,k} \quad \begin{cases} |p_i| > 1 & \text{交错发散} \\ 0 < |p_i| < 1 & \text{交错收敛} \end{cases}$$

3、当特征根为一对共轭复数

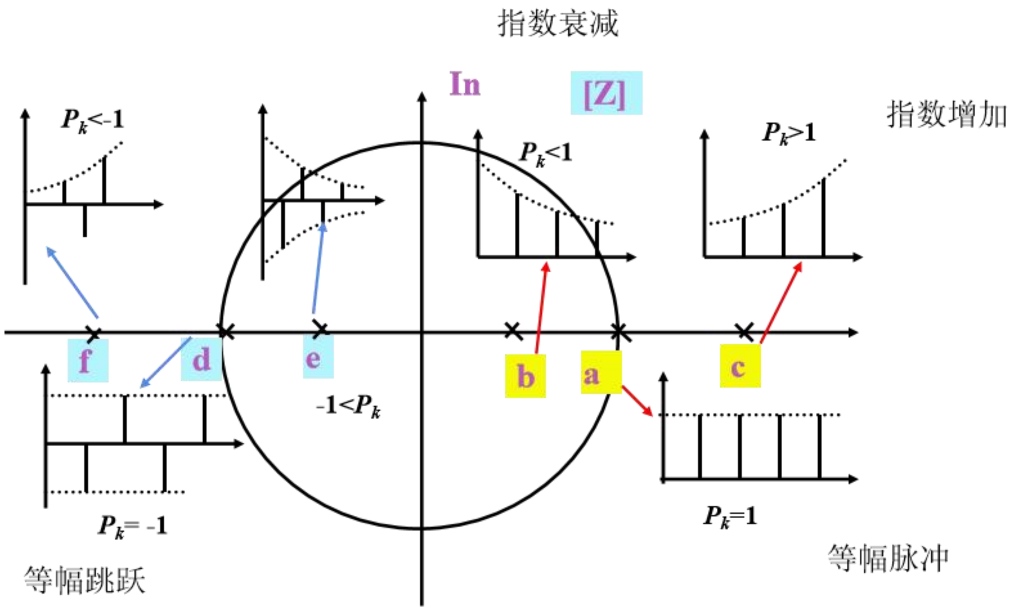
$$p_i = |p_i| e^{j\theta_i} \qquad \overline{p}_i = |p_i| e^{-j\theta_i}$$

$$c_i(kT) = 2|\mathrm{c}_i||\mathrm{p}_i|^{\mathrm{k}} \cos(\mathrm{k}\theta_i + \varphi_i) \quad \begin{cases} |p_i| > 1 \\ 0 < |p_i| < 1 \end{cases}$$

4、*pi* 位于单位圆上，临界稳定。$Pi = +1$，恒值等幅。$Pi = -1$，交错等幅。

5、*Pi* 位于圆心，具有无穷大稳定度。

由图可见:



若闭环实数极点位于右半 z 平面, 则输出动态响应形式为**单向正脉冲序列.**

实数极点位于单位圆内, 脉冲序列收敛, 且实数极点越接近原点, 收敛越快;

实极点位于单位圆上, 脉冲序列等幅变化;

实极点位于单位圆外, 脉冲序列发散.

若闭环实数极点位于左半z平面, 则输出动态响应形式为**双向交替脉冲序列.**

实数极点位于单位圆内, 双向脉冲序列收敛;

实极点位于单位圆上, 双向脉冲序列等幅变化;

实极点位于单位圆外, 双向脉冲序列发散.

瞬态响应

$$c_k(nT) = C_k P_k^n$$

3) 当P_k，P_{k+1}为一对共轭复根时，为

$$P_k = \left|P_k\right| e^{j\theta_k} \quad 与 \quad P_{k+1} = \left|P_k\right| e^{-j\theta_k}$$

此时，C_k，C_{k+1} 也为一对共轭复数

$$C_k = \left|C_k\right| e^{j\phi_k} \quad 与 \quad C_{k+1} = \left|C_k\right| e^{-j\phi_k}$$

则它们对应的瞬态分量$c_{k,\,k+1}(nT)$ 为

$$\begin{aligned} c_{k,k+1}(nT) &= \left|C_k\right|\left|P_k\right|^n e^{j(n\theta_k+\phi_k)} + \left|C_k\right|\left|P_k\right|^n e^{-j(n\theta_k+\phi_k)} \\ &= 2\left|C_k\right|\left|P_k\right|^n \cos(n\theta_k + \phi_k) \end{aligned}$$

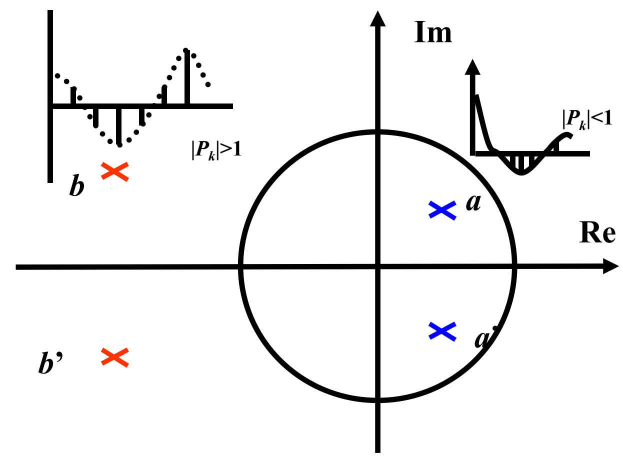
瞬态响应

$$c_k(nT)=C_kP_k^n$$

$$c_{k,k+1}(nT)=|C_k||P_k|^n\,e^{j(n\theta_k+\phi_k)}+|C_k||P_k|^n\,e^{-j(n\theta_k+\phi_k)}$$
$$=2|C_k||P_k|^n\cos(n\theta_k+\phi_k)$$

若$|P_k|<1$，则对应的瞬态响应分量为振幅衰减的正弦振荡，对应图2中a点对应的波形。

若$|P_k|>1$，则对应的瞬态响应分量为发散正弦振荡，对应图2中b点对应的波形。



闭环复极点分布与相应瞬态响应

令$\theta_k=\omega T$ ⇒ $\omega=\dfrac{\theta_k}{T}$

为系统对应瞬态分量的振荡频率，其振荡周期 $T_d=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi T}{\theta_k}$

振荡周期 $T_d=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi T}{\theta_k}$

设一个振荡周期中所包含的脉冲个数为n，采样周期为T，则

$$nT=T_d=\frac{2\pi T}{\theta_k}$$

所以 $$n=\frac{2\pi}{\theta_k}$$

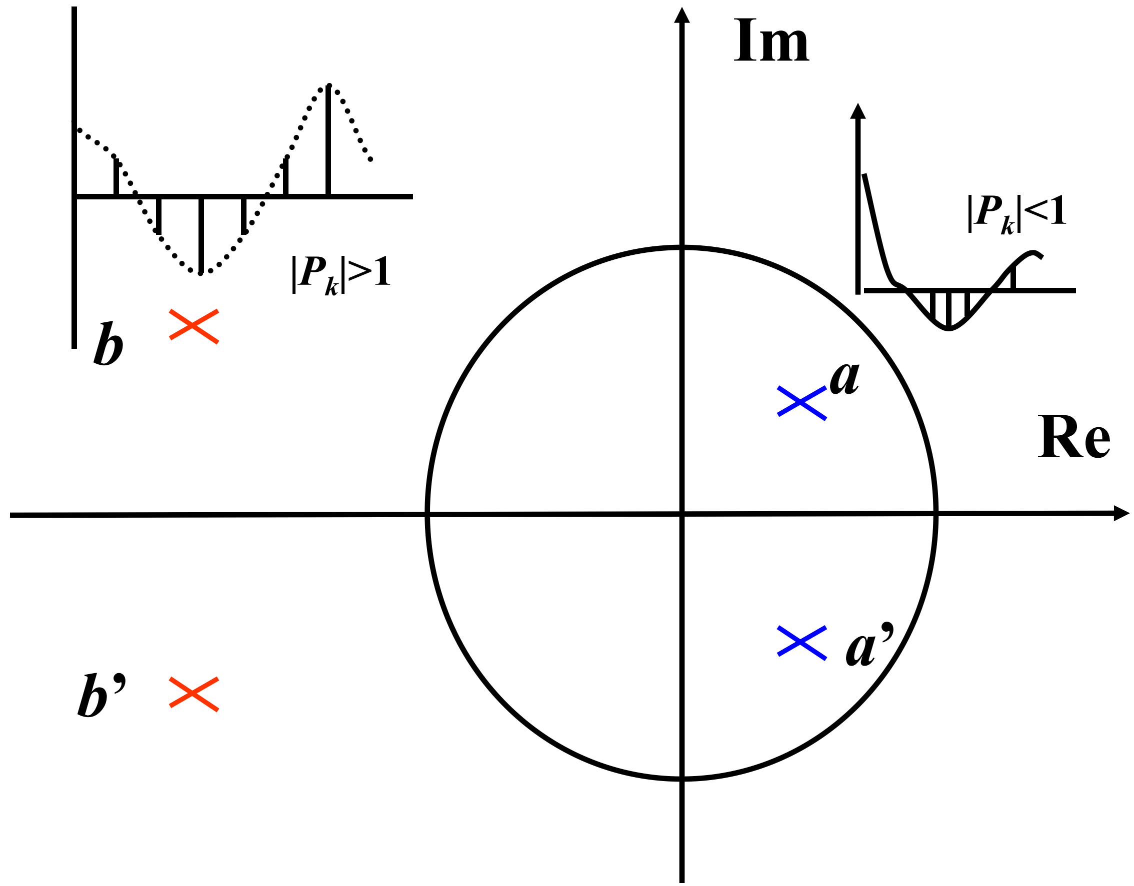


图2　闭环共轭复数极点分布与相应瞬态响应

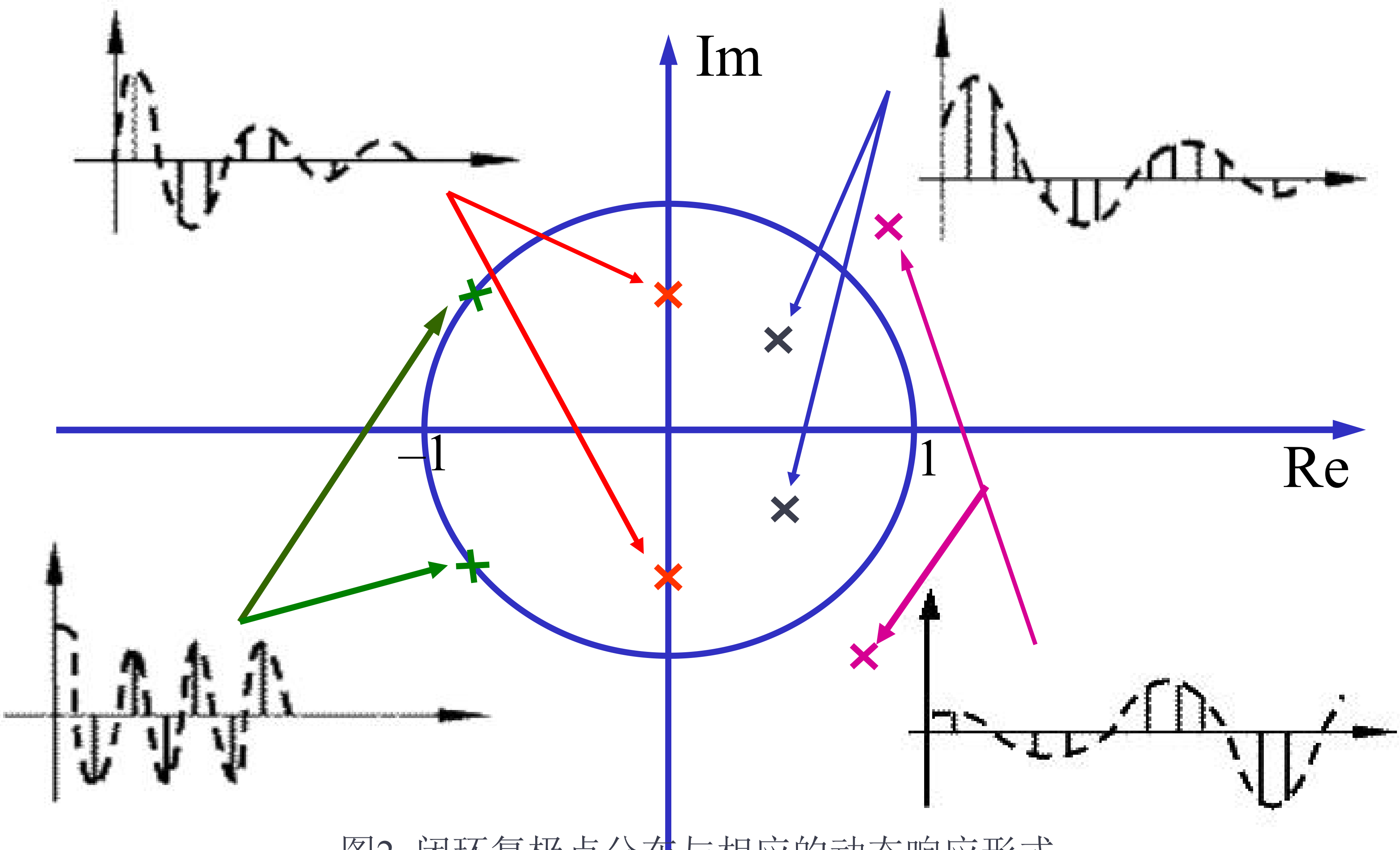


图2 闭环复极点分布与相应的动态响应形式

由图可见:

位于 z 平面上单位圆内的共轭复数极点, 对应输出动态响应的形式为振荡收敛脉冲序列, 但复极点位于左半单位圆内所对应的振荡频率, 要高于右半单位圆内的情况.

- 当闭环复极点位于 z 平面上左半单位圆内时, 由于输出衰减脉冲交替变号, 故动态过程质量很差;
- 当闭环复极点位于右半单位圆内时, 由于输出衰减高频振荡, 故动态过程性能欠佳.
- 因此, 在离散系统设计时, 应把闭环复极点安置**在 z 平面的右半单位圆内, 且尽量靠近原点.**

当 $\Phi(z)$ 的所有极点均位于原点时, 相应的输出脉冲序列必在有限拍(即有限个采样周期)内结束, 这是离散系统特有的现象

瞬态响应

➢ 有限时间响应系统

当**闭环脉冲传递函数所有极点都分布在原点**时，此时的系统具有一个很特别的响应，即在有限时间结束过渡过程，达到稳态，此时的闭环脉冲传递函数具有如下形式

$$G_B(z)=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{a_n z^n}=\frac{b_n}{a_n}+\frac{b_{n-1}}{a_n}z^{-1}+\cdots+\frac{b_0}{a_n}z^{-n}$$

其单位脉冲响应

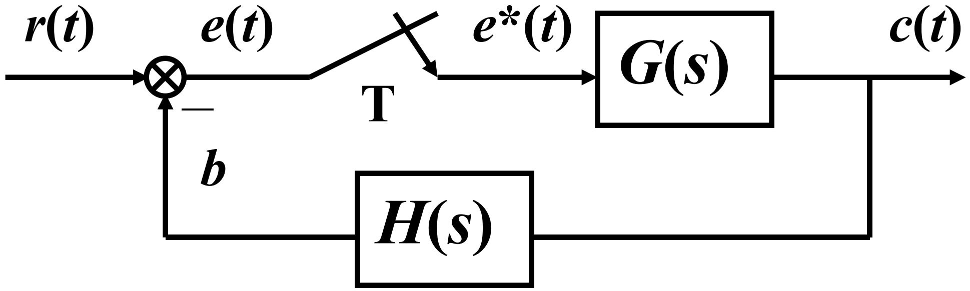
$$h^*(t)=\frac{b_n}{a_n}\delta(t)+\frac{b_{n-1}}{a_n}\delta(t-T)+\cdots+\frac{b_0}{a_n}\delta(t-nT)$$

即在单位脉冲作用下，该系统的瞬态响应能在nT内结束，即n拍可结束过渡过程，这个特点是连续系统所不具备的。

瞬态响应

例7-4-4 采样反馈系统如图所示，其中 $H(s)=1$，采样周期为 T=1，试求使系统稳定的K值范围?

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$



当 $0<K<4.2$，系统稳定。

例7-4-6 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为 $z=0.368\pm j0.482$ ，试分析采样反馈系统的瞬态响应?

$$z = e^{sT} = e^{-\omega T \mathrm{ctg}\eta + j\omega T} = e^{-\omega T \mathrm{ctg}\eta} \angle \omega T$$

$$\eta = \cos^{-1}\zeta$$

瞬态响应

例7-4-6 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为 z=0.368±j0.482，试分析采样反馈系统的瞬态响应?

$$s = -0.5 \pm j0.9187 \qquad \zeta = 0.48$$

解：1) 闭环特征根 z^*= 0.368±j0.482，则

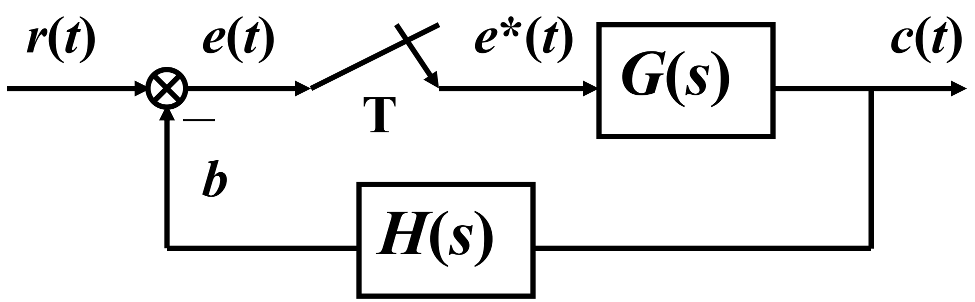
$$K^* = \frac{0.482 \cdot \sqrt{0.482^2 + (1-0.368)^2}}{\sqrt{0.368^2 + 0.482^2}} = 0.632 = 0.632K$$

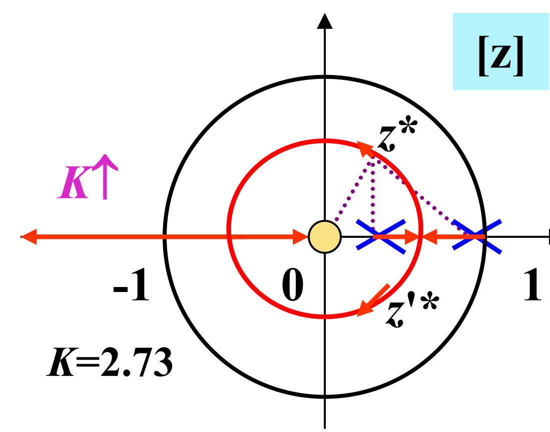
$$GH(z) = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

2) 闭环传函

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.632z}{(z-0.368+j0.482)(z-0.368-j0.482)}$$

$$G_B = \frac{GH(z)}{1+GH(z)} = \frac{K^*z}{(z-z^*)(z-z'^*)}$$





瞬态响应

例7-4-6 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为 z=0.368±j0.482， 试分析采样反馈系统的瞬态响应？

解：3) 对于单位阶跃输入

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

输出 Z变换表达式$C(z)$

法1：

$$C(z)=\frac{0.632z}{(z^2-0.736z+0.368)}\cdot\frac{z}{z-1}$$
$$=0.632\mathrm{z}^{-1}+1.096\mathrm{z}^{-2}+1.205\mathrm{z}^{-3}+1.12\mathrm{z}^{-4}+1.014\mathrm{z}^{-5}+\cdots$$

$C(z)$的逆变换为

$$c(kT)=0\delta(t)+0.632\delta(t-T)+1.096\delta(t-2T)+1.205\delta(t-3T)+\cdots$$

注意： 采样瞬时的 $c(kT)$序列为$C(z)$ 表达式中对应项的系数。

例7-4-6 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为 z=0.368±j0.482， 试分析采样反馈系统的瞬态响应?

解：3) 对于单位阶跃输入

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

输出 Z变换表达式$C(z)$

$$C(z)=\frac{0.632z}{(z^2-0.736z+0.368)}\cdot\frac{z}{z-1}\Rightarrow\frac{C(z)}{z}=\frac{1}{z-1}+\frac{-z+0.368}{(z^2-0.736z+0.368)}$$

法2：

$$C(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z(z-e^{-0.5}\cos 1)}{(z^2-2ze^{-0.5}\cos 1+e^{-1})}$$

$C(z)$的逆变换

$$c(kT)=1-e^{-0.5kT}\cos kT$$

这种方式称为"解析式"表达式（不会引入误差）。

注意：$C(z)$只能表示$c(t)$在kT采样时刻的采样值$c^*(t)$，不能反映出采样周期之间的信息。

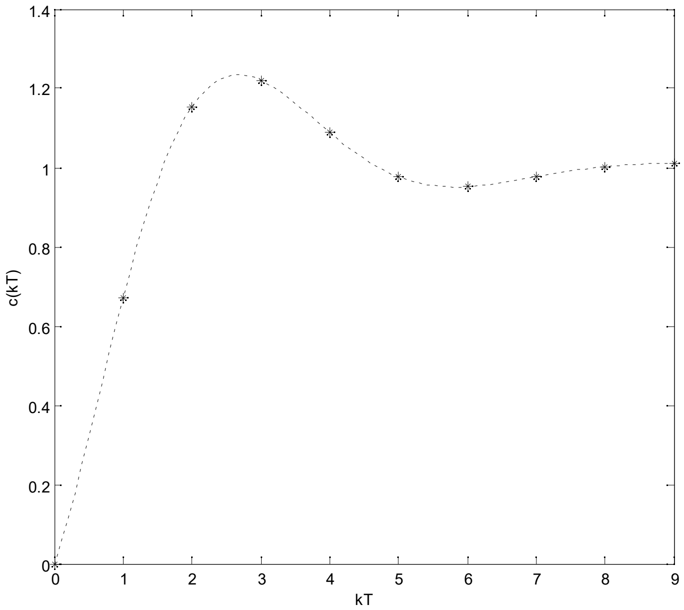
瞬态响应

法1的$C(z)$的逆变换 是“开放”式

$$c(kT)=0\delta(t)+0.632\delta(t-T)+1.096\delta(t-2T)+1.205\delta(t-3T)+\cdots$$

法2的$C(z)$的逆变换为“解析”式

$$c(kT)=1-e^{-0.5kT}\cos kT$$



系统的单位阶跃响应如图。注意：连续的线仅是连接了顶点而已。真实得到的值只有每个采样瞬间才有值。

注意：采样瞬时的 $c(kT)$序列为$C(z)$ 表达式中对应项的系数。

瞬态响应

- 连续系统中通常采用的**分析方法**可以同样应用于离散系统，如：根轨迹，瞬态响应等。
- 可以根据期望的阻尼比ζ和回复时间t_s**来选择期望的闭环特征根**。注意 [s] 平面到 [z] 平面的映射关系。
- **注意** $c(kT)$ 或 $c^*(t)$序列中的初值和终值。

可以根据期望的阻尼比ζ和回复时间ts来选择期望的闭环特征根。

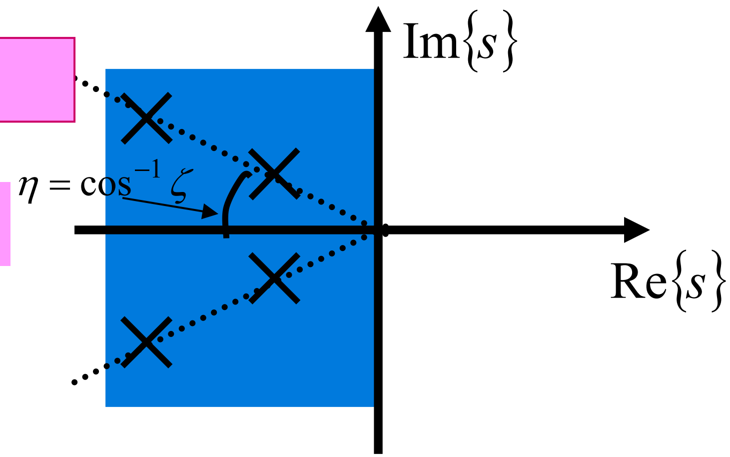
回顾：连续系统

➢ **闭环零极点与瞬态响应的关系，先回忆在连续系统中的重要动态指标**

$$M_o = \sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad 0 \le \zeta < 1$$

等 ζ 线

相同的超调，与阻尼比 ζ 有关



由上式可见，最大百分比超调量完全由 ζ 决定， ζ 越小，超调量越大。

当 ζ =0时，σ%= 100%，当 ζ =1时， σ% =0。

瞬态响应

- 在s平面，定义阻尼比为常数的射线为

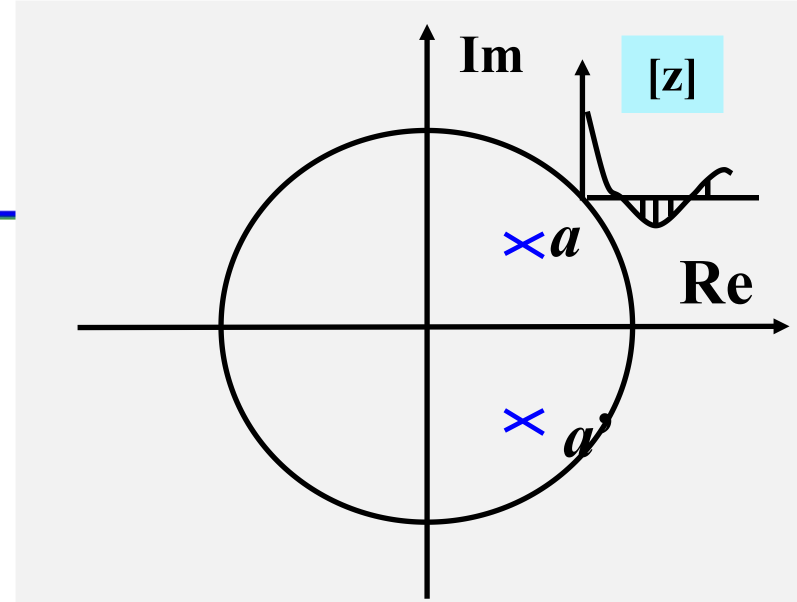
$$s=\sigma+j\omega=-\omega \operatorname{ctg}\eta+j\omega$$

其中 $\eta=\cos^{-1}\zeta$

因此

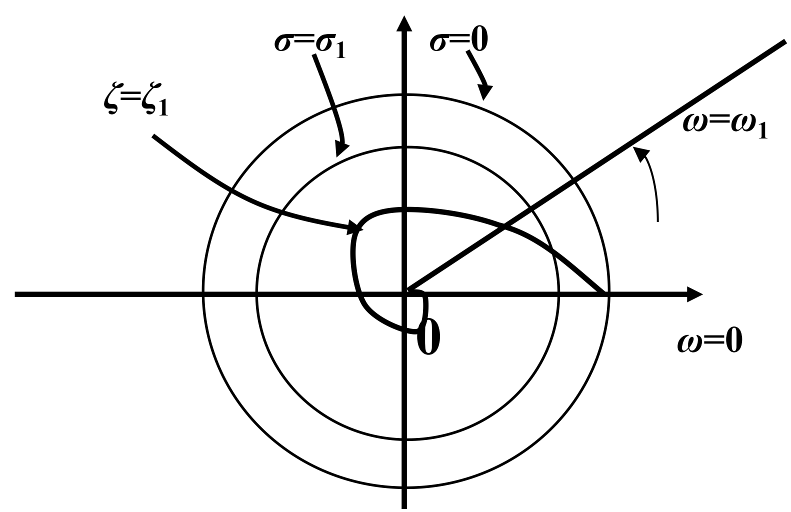
$$z=e^{sT}=e^{-\omega T\operatorname{ctg}\eta+j\omega T}=e^{-\omega T\operatorname{ctg}\eta}\angle\omega T$$

如图所示



闭环复极点分布与相应瞬态响应

[z] 平面



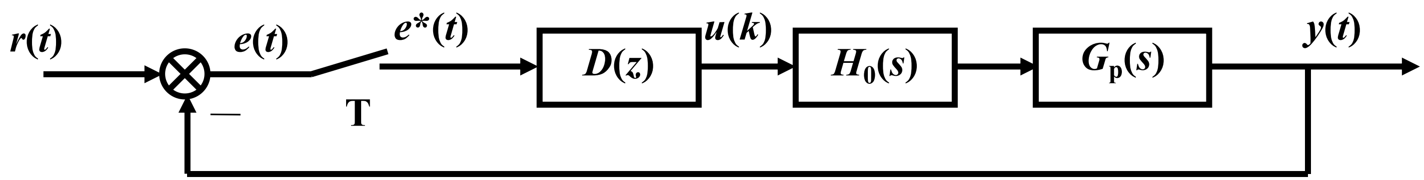
离散系统分析

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- 稳态误差
- 瞬态响应

主要内容

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- **离散系统的数字校正**

➢ 采样控制系统的常用结构



其中$D(z)$表示数字控制器，$u(k)$是离散时间信号，$H_0(s)$是零阶保持器。

线性连续系统状态空间模型的离散化

- 离散系统的工作状态可以分为以下两种情况：
  - 整个系统工作于单一的离散状态；
  - 系统工作在连续和离散两种状态的混合状态。

状态方程既有一阶微分方程组又有一阶差分方程组

为了能对这种系统运用离散系统的分析方法和设计方法，

要求**整个系统统一用离散状态方程来描述**。

由此,提出了**连续系统的离散化**问题。

- **模拟化（连续化）设计方法**
- **数字化（离散化）设计方法**

（1）模拟化（连续化）设计方法

先设计校正装置的传递函数D(s)，然后采用某种离散化方法，将它变成计算机算法。

（2）数字化（离散化）设计方法

已知被控对象的传递函数或特性G(Z)，根据所要求的性能指标，设计数字控制器。

模拟化设计方法

一种离散系统的等效设计方法

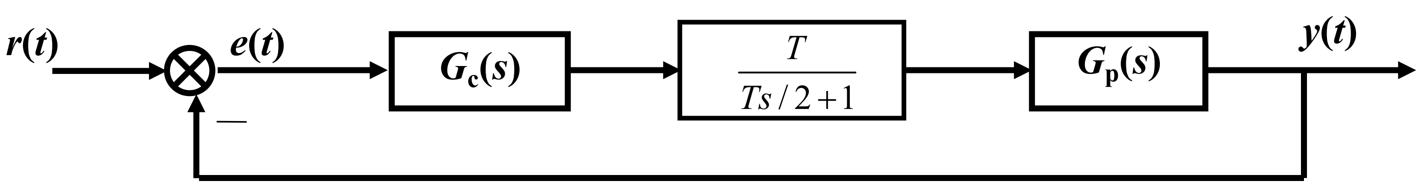
先按连续时间系统的设计方法设计一个模拟的控制器$G_c(s)$，再将其离散化得到数字控制器$D(z)$

- **设数字控制系统中采用零阶保持器。则由exp(-Ts)的Pade近似**

$$e^{-Ts}=\frac{e^{-\frac{T}{2}s}}{e^{\frac{T}{2}s}}\approx\frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}=-\frac{s-\frac{2}{T}}{s+\frac{2}{T}}$$

将零阶保持器近似表示为：

$$H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\approx\frac{T}{\frac{T}{2}s+1}=\frac{2T}{Ts+2}$$



- **设计出模拟$G_c(s)$后，对其进行离散化。 ——关键一步**

帕德近似Pade近似

- 和泰勒近似一样是一种对任意函数的近似方法。
- 但是和泰勒近似相比，它更加准确。并且当泰勒级数不收敛的时候，它依然是收敛的。

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_m x^m}$$

- 为方便起见，一般设b0=1
- n和m可以是任意阶数. 阶数越高，和原函数越接近.
- 如何计算帕德近似的系数？帕德近似的阶数n，m和泰勒级数n+m阶展开相对应。

Padé approximants:

例：对 $f(x)=e^x$. 用 $P(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x}$ 近似.

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

$$P(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

$\Rightarrow$

$$a_0+a_1x+a_2x^2=1+(b_1+1)x+\left(\frac{1}{2}+b_1\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{b_1}{2}\right)x^3+\frac{b_1}{6}x^4+C$$

$a_0=1$

$a_1=b_1+1 \quad a_1=\frac{2}{3}$

$a_2=\frac{1}{2}+b_1 \quad a_2=\frac{1}{6}$

$0=\frac{1}{6}+\frac{b_1}{2} \quad b_1=-\frac{1}{3}$

$$e^x\approx\frac{\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x+1}{-\frac{1}{3}x+1}$$

$$e^{-Ts}=\frac{e^{-\frac{T}{2}s}}{e^{\frac{T}{2}s}}\approx\frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}=-\frac{s-\frac{2}{T}}{s+\frac{2}{T}}$$

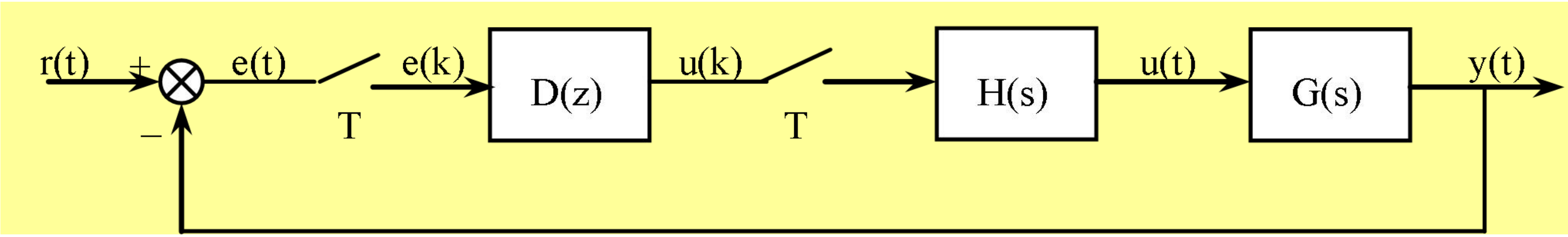
模拟化设计方法

忽略控制回路中所有的零阶保持器和采样器，在S域中按连续系统进行初步设计，求出连续控制器，然后通过某种近似，将连续控制器离散化为数字控制器，并由计算机来实现。

设计步骤

- 设计假想的连续控制器
- 选择采样周期 T
- 将D(s)离散化为D(z)
- 设计由计算机实现的控制算法
- 校验

计算机控制系统的结构框图：



这是一个采样系统的框图：控制器D(Z)的输入量是偏差，U(k)是控制量

H(S)是零阶保持器

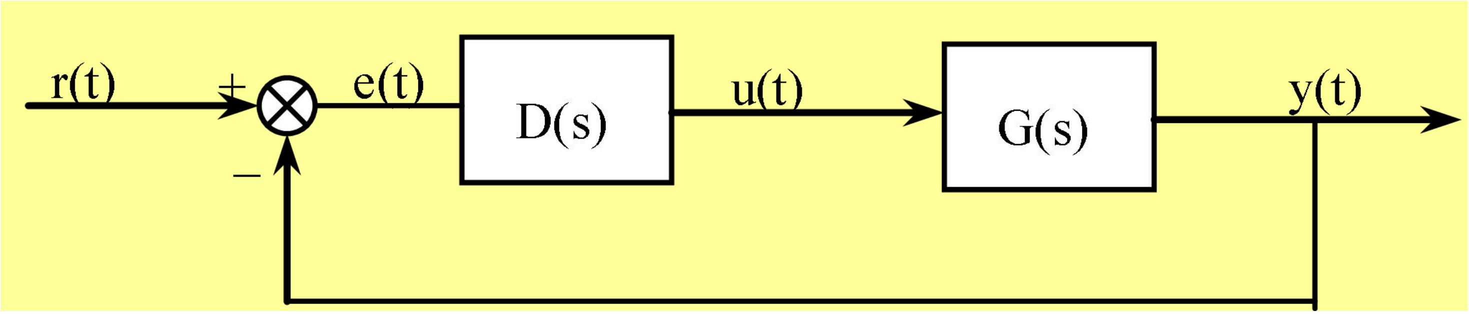
$$H(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}\approx\frac{1-1+sT-\frac{(sT)^2}{2}+\cdots}{s}$$

$$=T(1-s\frac{T}{2}+\cdots)\approx Te^{-s\frac{T}{2}}$$

G(S)是被控对象的传递函数

步骤1：假想的连续控制器D(S)

设计的第一步就是找一种近似的结构，来设计一种假想的连续控制器D(S)，这时候我们的结构图可以简化为：



已知G(S)来求D(S)的方法有很多种，比如频率特性法、根轨迹法等。

步骤2：选择采样周期T

香农采样定理给出了从采样信号恢复连续信号的最低采样频率。在计算机控制系统中，完成信号恢复功能一般由零阶保持器H(S)来实现。零阶保持器的传递函数为：

$$H(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

其频率特性为

$$H(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=\frac{2e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2})}{2j\omega}$$

$$=T\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}e^{-j\omega T/2}=T\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\angle-\frac{\omega T}{2}$$

从上式可以看出，零阶保持器将对控制信号产生附加相移(滞后)。对于小的采样周期，可把零阶保持器H(S)近似为：

$$H(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}\approx\frac{1-1+sT-\frac{(sT)^2}{2}+\cdots}{s}=T(1-s\frac{T}{2}+\cdots)\approx Te^{-s\frac{T}{2}}$$

$$H(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}\approx\frac{1-1+sT-\frac{(sT)^2}{2}+\cdots}{s}=T(1-s\frac{T}{2}+\cdots)\approx Te^{-s\frac{T}{2}}$$

上式表明，当T很小时，零阶保持器H(S)可用半个采样周期的时间滞后环节来近似。它使得相角滞后了。而在控制理论中，大家都知道，若有滞后的环节，每滞后一段时间，其相位裕量就减少一部分。我们就要把相应减少的相位裕量补偿回来。假定相位裕量可减少5°～15°，则采样周期应选为：

$$T\approx(0.15\sim0.5)\frac{1}{\omega_c}$$

其中ω_C是连续控制系统的剪切频率。

按上式的经验法选择的采样周期相当短。因此，采用连续化设计方法，用数字控制器去近似连续控制器，要有相当短的采样周期。

3.将D(S)离散化为D(Z)

常用的连续系统离散化方法

- 前向差分法
- 后向差分法
- 零极点匹配法
- 双线性变换法
- 冲击响应不变法
- 零阶保持法

前向差分法

利用级数展开可将 $z=e^{sT}$ 写成以下形式

$$z=e^{sT}=1+sT+\ldots\approx 1+sT$$

可得

$$s=\frac{z-1}{T}$$

即给定模拟控制器传递函数 D(s)，其等效离散传递函数 D(z) 为：

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

法2（数值微分）：

设微分控制规律为

$$u(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

两边求拉氏变换后可推导出控制器为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = s$$

采用前向差分近似可得

$$u(k) \approx \frac{e(k+1) - e(k)}{T}$$

上式两边求Z变换后可推导出数字控制器为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{T} = D(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

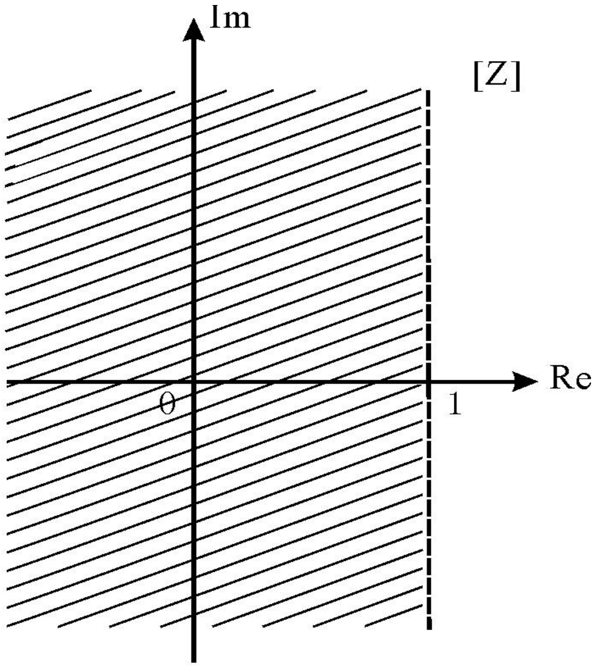
s平面和z平面之间的映射关系

因为s平面上的虚轴是稳定与不稳定区域的分界线，所以应着重研究虚轴在z平面内的映象。

由：$s=\dfrac{z-1}{T}$

知：$Z=1+TS$

令：$s=j\omega$



即：s平面上虚轴映射在z平面上将右移1个单位。

注意：采用前向差分法离散化，D(s)稳定，D(z)不一定稳定。

前向差分法的特点

a) 直接代换，具有串联性，变换方便；

b) 整个s左半平面映射到z平面z=1以左的区域，故D(s)与D(z)不具有相同的稳定性；

c) 因为$D(s)_{|s=0}=D(z)_{|z=1}$，故稳态增益维持不变；

d) 当采样周期T较小时，等效精度较好。

后向差分法

利用级数展开还可将$Z=e^{sT}$写成以下形式

$$Z=e^{sT}=\frac{1}{e^{-sT}}\approx\frac{1}{1-sT}$$

$$\boxed{\text{即：}\ s=\frac{z-1}{Tz}}$$

则给定模拟控制器传递函数D(s)，其等效离散传递函数D(z)为：

$$D(z)=D(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$$

s平面和z平面之间的映射关系、后向差分法的特点？！！

- 在工业控制中，最常用的是PID控制器。一般教材上即是以数字PID控制器为例。

- **标准的模拟PID公式**

$$u(t)=K_c\left[e(t)+\frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt+T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

在控制器的采样时刻 $t=k$T、$t=(k\text{-}1)$T时，离散化（后向差分）的数字PID为

$$u(k)=K_c\left\{e(k)+\frac{T}{T_i}\sum_{j=0}^{k}e(j)+\frac{T_d}{T}\left[e(k)-e(k-1)\right]\right\}$$

$$u(k-1)=K_c\left\{e(k-1)+\frac{T}{T_i}\sum_{j=0}^{k-1}e(j)+\frac{T_d}{T}\left[e(k-1)-e(k-2)\right]\right\}$$

PID的增量公式

$$\Delta u(k)=K_c\left\{e(k)-e(k-1)+\frac{T}{T_i}e(k)+\frac{T_d}{T}\left[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)\right]\right\}$$

极点—零点匹配映射法。

先对$G_c(s)$的分子分母多项式进行**因式分解**。

$G_c(s)$中的有限极点与零点 $s=-a$ 映射为$D(z)$中的极点或零点$z=\exp(-aT)$，

而$G_c(s)$中的无穷远处的零点则映射为$D(z)$中位于-1的零点。

最后确定$D(z)$的增益，使$D(z)$的增益在某一主频处与$G_c(s)$ 的增益匹配。

如： $G_c(s)$具有低通特性，则 $G_c(0)=D(1)$

一阶补偿器：

$$G_C(s)=K\frac{s+a}{s+b} \Rightarrow D(z)=C\frac{z-A}{z-B}$$

$$A=e^{-aT}$$

$$B=e^{-bT}$$

$$C\frac{1-A}{1-B}=K\frac{a}{b}$$

零极点匹配法的转换规则

$$D(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \Rightarrow D(z)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-e^{-Z_iT})}{\prod_{j=1}^{n}(z-e^{-P_iT})}(z+1)^{n-m}\cdot k$$

令 $z=e^{sT}$，将D(s)离散化为D(z)

当$n>m$时,$(z+1)^{n-m}$对应s平面的无穷零点；

比例因子k有增益相等确定： $D(s)\big|_{s=0}=D(z)\big|_{z=1}$

一阶补偿器： $G_C(s) = K\dfrac{s+a}{s+b}$ $\Rightarrow$ $D(z) = C\dfrac{z-A}{z-B}$

$$A = e^{-aT}$$

$$B = e^{-bT}$$

$$C\frac{1-A}{1-B} = K\frac{a}{b}$$

●例：采样周期T=0.003s，超前补偿器为 $G_C(s) = \dfrac{5(s+50)}{s+275}$

$$A = e^{-0.15} = 0.86$$

则离散化

$$B = e^{-0.825} = 0.44 \quad \longrightarrow \quad D(z) = \frac{3.66(z-0.86)}{z-0.44}$$

$$C = 3.66$$

得到稳定的离散控制器。

如果采样周期改变，则相应的零极点位置和放大倍数改变。

例1 已知连续传递函数为 $D(s)=\dfrac{1}{s^2+\dfrac{1}{5}s+1}$

试采用零极点匹配法离散化，设采样周期T=1s。

$$D(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \Rightarrow D(z)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-e^{-Z_iT})}{\prod_{j=1}^{n}(z-e^{-P_jT})}(z+1)^{n-m}\cdot k$$

解：先将分解为零极点形式 $D(s)=\dfrac{1}{[s-(-0.1+j0.995)][s-(-0.1-j0.995)]}$

因T=1s，则 $z_1=e^{(-0.1+j0.995)T}=0.493+j0.759$

$$z_2=e^{(-0.1-j0.995)T}=0.493-j0.759$$

故：$D(z)=\dfrac{k(z+1)^2}{z^2-0.985z+0.819}$

由：$D(s)\big|_{s=0}=D(z)\big|_{z=1}$ 可得 $k=0.209$

所以：$D(z)=\dfrac{0.209(z+1)^2}{z^2-0.985z+0.819}$

零极点匹配法特点

$$D(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \Rightarrow D(z)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-e^{-Z_iT})}{\prod_{j=1}^{n}(z-e^{-P_jT})}(z+1)^{n-m}\cdot k$$

（1）D(z)和D(s)有相同稳定性；

（2）D(s)的零、极点均按照$z=e^{sT}$的关系与平面的零、极点一一对应；

（3）稳态增益匹配，一般按 $D(s)\big|_{s=0}=D(z)\big|_{z=1}$ 关系匹配。

Tustin法（双线性变换法）

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{\frac{-sT}{2}}} = \frac{1+\frac{sT}{2}+\cdots}{1-\frac{sT}{2}+\cdots} \approx \frac{1+\frac{sT}{2}}{1-\frac{sT}{2}}$$

- **由于** $s \equiv (1/T)\ln z$

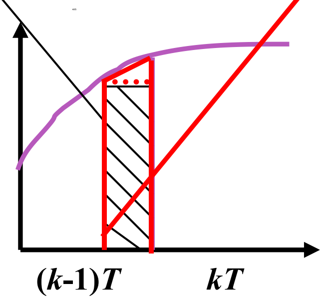
ln*z*可展开为： $\ln z = 2(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots)$ **其中** $x = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$\Downarrow$

$$s \equiv \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

双线性变换也可从数值积分的梯形法对应得到。

几何上，后向差分法代表的积分是矩形积分，而这种为梯形积分。



$x(t)=\dot{p}(t)$

$\dfrac{X(s)}{P(s)}=s$

$$p(k)-p(k-1)=\int_{(k-1)T}^{kT}x(t)dt\approx\frac{1}{2}\left[x(kT)+x((k-1)T)\right]\cdot T$$

$$p(k)\approx p(k-1)+\frac{x(kT)+x((k-1)T)}{2}\cdot T$$

$$p(z)\approx z^{-1}p(z)+\frac{x(z)+z^{-1}x(z)}{2}\cdot T\Rightarrow\frac{P(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\cdot\frac{T}{2}$$

以 $\dfrac{X(z)}{P(z)}$ 近似替代 $\dfrac{X(s)}{P(s)}$ ⇒ $s=\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$　　$z=\dfrac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$

该映射也是一种双线性变换。它将*s*左半平面映射到*z*平面单位圆内，所以也能由稳定的连续控制器产生稳定的离散控制器。但瞬态响应和频率响应均有畸变。

数学实质

- 线性连续系统的时间离散化问题的数学实质,就是**在一定的采样方式和保持方式下,由系统的连续状态空间模型来导出等价的离散状态空间模型,并建立起两者的各系数矩阵之间的关系式。**

几种离散化公式的比较

离散化方法	转换公式	稳定性	稳态增益	频率特性	串联性
前向差分法	$s=\frac{z-1}{T}$	$D(s)$稳定 $D(z)$不一定稳定	维持不变	存在较严重的频率畸变，但没有频率混叠现象	具有串联性
后向差分法	$s=\frac{z-1}{Tz}$	$D(s)$稳定 $D(z)$一定稳定	维持不变	存在较严重的频率畸变，但没有频率混叠现象	具有串联性
双线性变换	$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$	$D(s)$稳定 $D(z)$一定稳定	维持不变	存在频率畸变，但没有频率混叠现象	具有串联性
预修正双线性变换	$s=\frac{\omega_1}{\tan\frac{\omega_1 T}{2}}\cdot\frac{z-1}{z+1}$	$D(s)$稳定 $D(z)$一定稳定	维持不变	存在频率畸变，但没有频率混叠现象，在特征频率ω_1处幅频特性保持不变	具有串联性
零极点匹配	$(s+a)\Rightarrow(z-e^{-aT})$	$D(s)$稳定 $D(z)$一定稳定	需进行稳态增益匹配	变换后频率特性保持较好	具有串联性

数字控制系统

- 模拟化设计方法
- 数字化设计方法

模拟化（连续化）设计方法的优点：

有现成的算法和设计方法；

模拟化（连续化）设计方法的弊端：

要求相当短的采样周期！因此只能实现较简单的控制算法。

数字化（离散化）设计方法：从被控对象的特性出发，直接根据计算机控制理论(采样控制理论)来设计数字控制器。

next：最小拍控制系统的设计