

# 2021 秋矩阵论回忆卷

by Oddyti

一、

1.

(1) 证明:  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

(2) 证明: 若  $P^{-1}AP = B$ , 则  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

2. 若  $A^T = -A$ , 证明  $e^A$  为酉矩阵。

二、

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H, \text{ 若 } a = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H b, \text{ 求证 } \|Aa - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2$$

三、

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, I, \quad h_j(x) = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, J$$

1. 混合外罚函数进行无约束, 一个。

2. 混合内罚函数进行无约束, 两个。

3. 混合拉格朗日函数进行无约束, 一个。

四、

$A, B$  为 Hermitian 矩阵,  $x \neq 0$ 。

1. Rayleigh 商为  $R(x) = \frac{x^H Ax}{x^H x}$ , 求  $R(x)$  的最大值以及对应的  $x$ 。

2. 广义 Rayleigh 商为  $R(x) = \frac{x^H Ax}{x^H Bx}$ , 求  $R(x)$  的最大值以及对应的  $x$ 。

五、

1. 证明:  $d[\text{tr}(X^T X)] = 2\text{tr}(X^T dX)$

2. 求  $f(x) = a^T x$  与  $f(x) = x^T Ax$  的 Hessian 矩阵。

六、

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 求  $A$  的特征多项式

1. 求  $\sin A$

$$\text{提示: } \sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{(2n-1)}}{(2n+1)!}$$

七、

$$\text{已知: } y = X\beta + \varepsilon, E\{\varepsilon\} = 0, E\{\varepsilon^H \varepsilon\} = \sigma^2 I$$

现在设计:  $e = Ay$  满足  $E\{e - \varepsilon\} = 0$  使得  $E\{(e - \varepsilon)^H(e - \varepsilon)\}$  最小, 请证明上述优化问题可以等价:

$$\min[tr(A^T A) - 2tr(A)], \quad s.t. AX = O$$

## 八、 简答题

1. 说明条件数的物理意义以及与奇异值的关系。
1. 说明标准正交变换的过程以及与白（色）噪声的关系。
1. 说明 Tikhonov 正则化与反正则化的目的。