自动控制理论

Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第六章 Chapter 6

频率特性分析法(Frequency Response)

第六章关键词

- 频率、频率响应、频率特性
- 幅频特性、相频特性
- 对数频率特性（BODE图）
- 极坐标图（奈奎斯特图）
- 奈奎斯特稳定判据
- 稳定裕度（幅值裕度、相位裕度）
- 频域性能

第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性

Nyquist稳定性判据

Nyquist稳定性判据提供了一种从开环传递函数$G(j\omega)H(j\omega)$的频率特性曲线来判定闭环系统稳定性的图解方法，使用方便。

稳定负反馈系统的特征方程 $B(s)=1+G(s)H(s)$ 的根不在S右半平面或虚轴上，若

$$\left.\begin{aligned} G(s)&=N_1/D_1 \\ H(s)&=N_2/D_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(s)=1+\frac{N_1N_2}{D_1D_2}=\frac{\underline{D_1D_2+N_1N_2}}{D_1D_2}$$

$B(s)$的零点 $\Updownarrow$ $\Phi(s)$的极点

闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{N_1D_2}{\underline{D_1D_2+N_1N_2}}$$

Nyquist稳定性判据

$$B(s)=1+\frac{N_1N_2}{D_1D_2}=\frac{D_1D_2+N_1N_2}{D_1D_2}$$

稳定性条件可以表示为：

对于一个稳定的系统，$B(s)$的零点不在S右半平面或虚轴上。

Nyquist稳定性判据将$B(s)$位于右半平面零点和极点的个数与$G(s)H(s)$的极坐标图联系在一起。

$$\left.\begin{aligned}G(s)&=N_1/D_1\\H(s)&=N_2/D_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow G(s)H(s)=N_1N_2/D_1D_2$$

限制条件：

1) 假设所有的控制系统都是线性的或者在操作点处是线性的。

2) 开环传递函数$G(s)H(s)$分母D_1D_2的阶次大于等于分子N_1N_2的阶次。这意味着$\lim_{s\to\infty}G(s)H(s)\to 0$或常数。

Nyquist稳定性判据

$$B(s)=1+\frac{N_1N_2}{D_1D_2}=\frac{D_1D_2+N_1N_2}{D_1D_2}$$

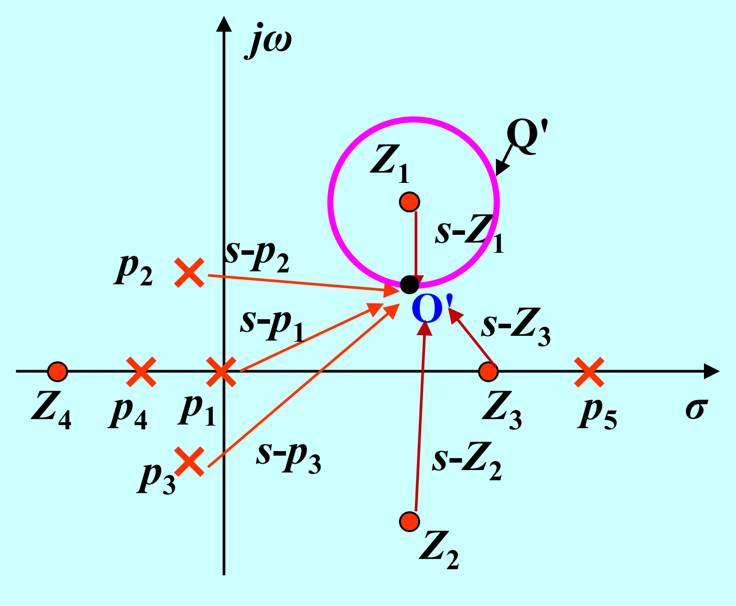
考虑$B(s)$为s的有理分式函数，特征方程$B(s)$ 因式分解为如下形式

$$B(s)=\frac{(s-Z_1)(s-Z_2)\cdots(s-Z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

——注意Z_i和 p_j的符号。

$\Phi(s)$的极点

GH的极点

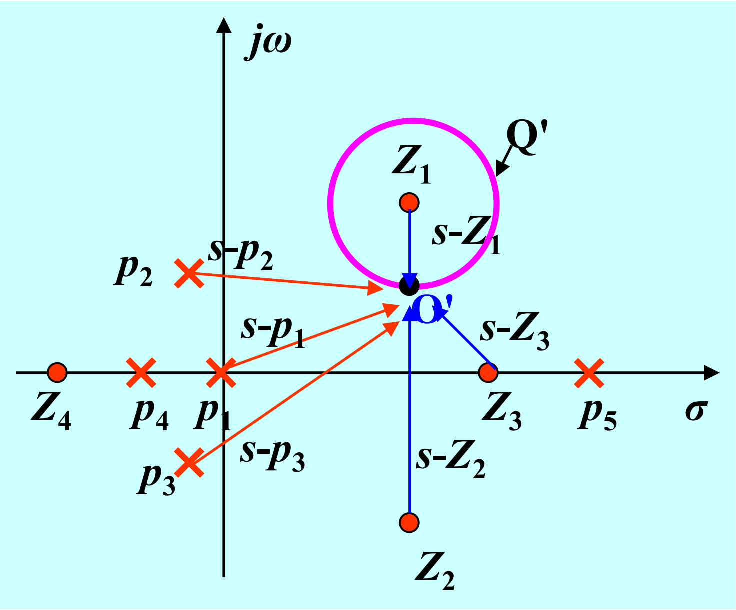


- 在S平面绘制函数$B(s)$的零极点
- 任意绘制闭合曲线Q′ 包围零点Z_1
- O′是闭合曲线 Q′上的任意一点，坐标为$s=\sigma+j\omega$, 绘制从所有零极点到该点（O′）的线段（图上并未画全）

数学基础

当点O′ 沿着闭合曲线Q′顺时针旋转一周时，$(s-Z_1)$有向线段顺时针旋转 360°。

其他有向线段净旋转角 0°。



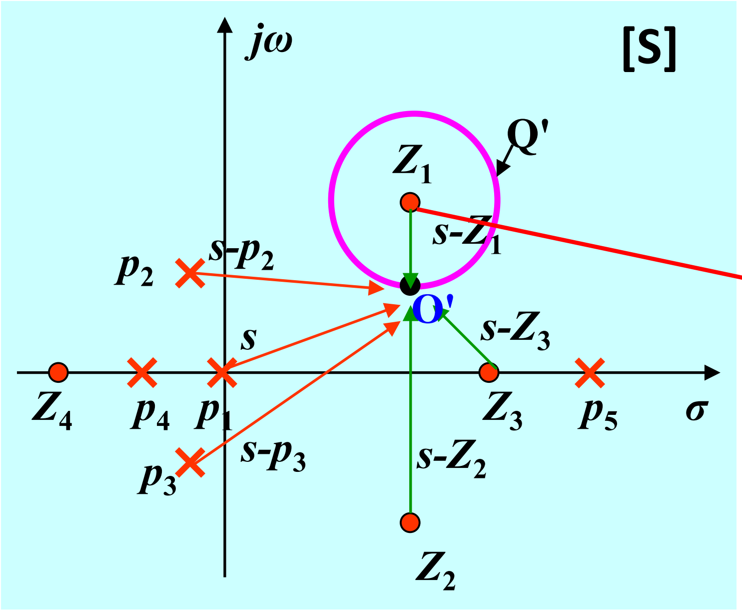
注意：
$$B(s)=\frac{(s-Z_1)(s-Z_2)\cdots(s-Z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

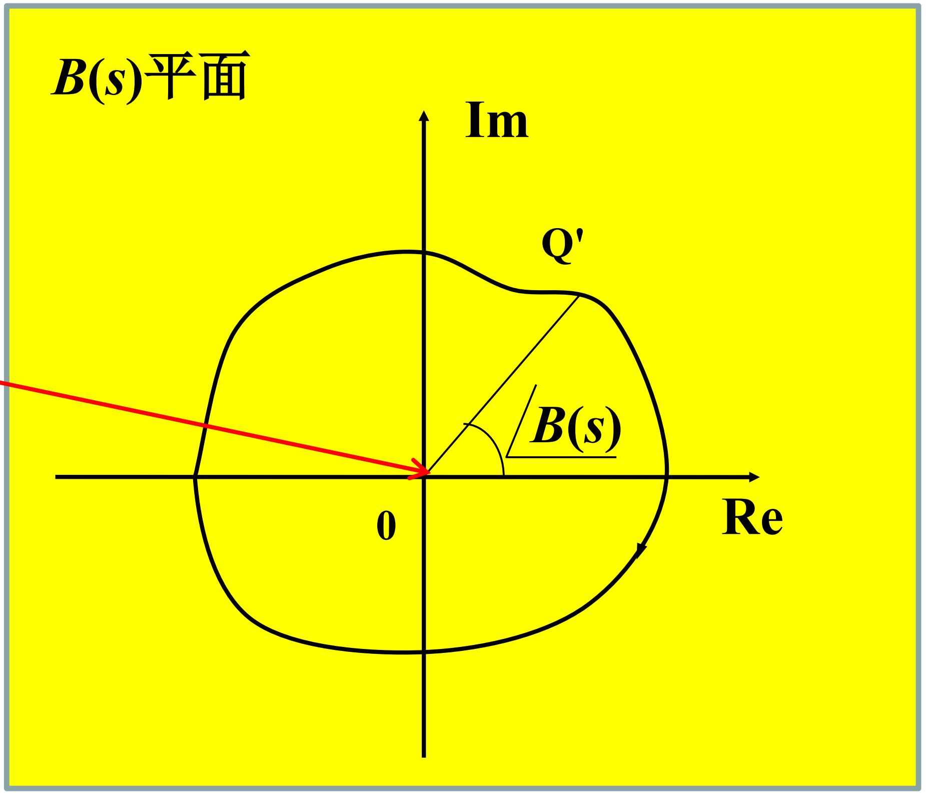
$$\angle B(s)=\sum\angle(s-Z_i)-\sum\angle(s-p_j)$$

结论:

$(s-Z_1)$ 顺时针旋转360°，则$B(s)$也顺时针旋转360°。

数学基础



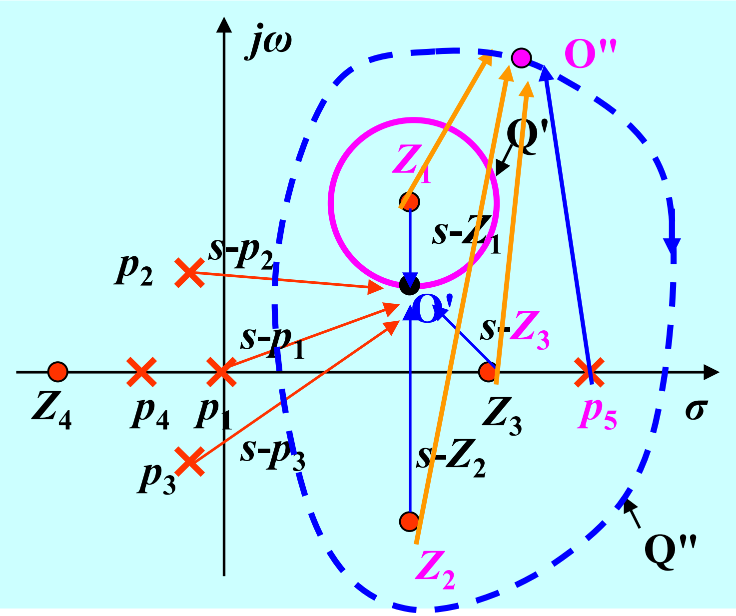


注意到：Z_1 是$B(s)$的零点，位于 $B(s)$平面的原点。

数学基础

现在考虑一包含零点Z_1, Z_2, Z_3和极点p_5的闭合曲线 Q″。

当 点 O″ 沿着闭合曲线Q″顺时针旋转一周时，从每个被包围零极点出发的有向线段顺时针旋转360°。



$B(s)$的净旋转角等于 p_5 的旋转角度减去零点 $Z_1, Z_2,$ 和Z_3的旋转角度。

$B(s)=1+G(s)H(s)$的旋转角度为 360° –3×360° = –720°
——???

$$\angle B(s)=\sum\angle(s-Z_i)-\sum\angle(s-p_j)$$

数学基础

点 O″沿着闭合曲线 Q″顺时针运动一周时，$B(s)=1+G(s)H(s)$旋转的圈数为 –2，

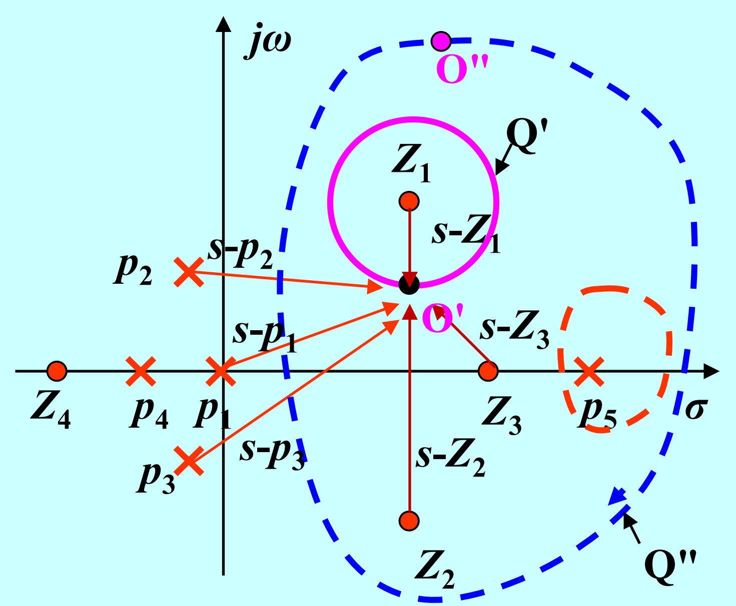
i.e.

N = (被包围的极点数) - (被包围的零点数) = 1 – 3 = -2

其中负号表示顺时针（cw）旋转的角度

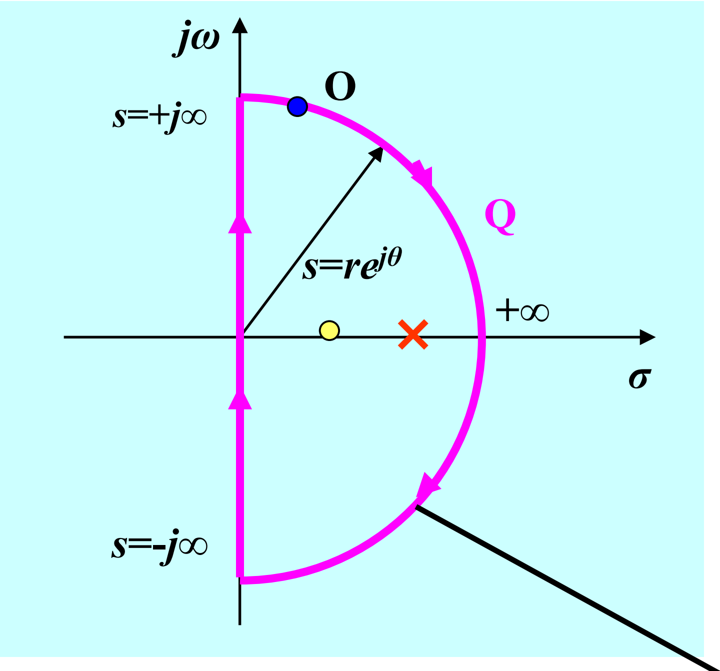
若闭合曲线 Q″仅包含一个极点p_5时，随着点 O″ 顺时针旋转一周，$B(s)$逆时针旋转的圈数 N=1。

对于任意的闭合曲线，当闭合曲线上任意一点沿着闭合曲线旋转一周时，$B(s)$中所有闭合曲线外的极点和零点对应的旋转角度为0。



数学基础

考虑一包围整个S右半平面的闭合曲线Q



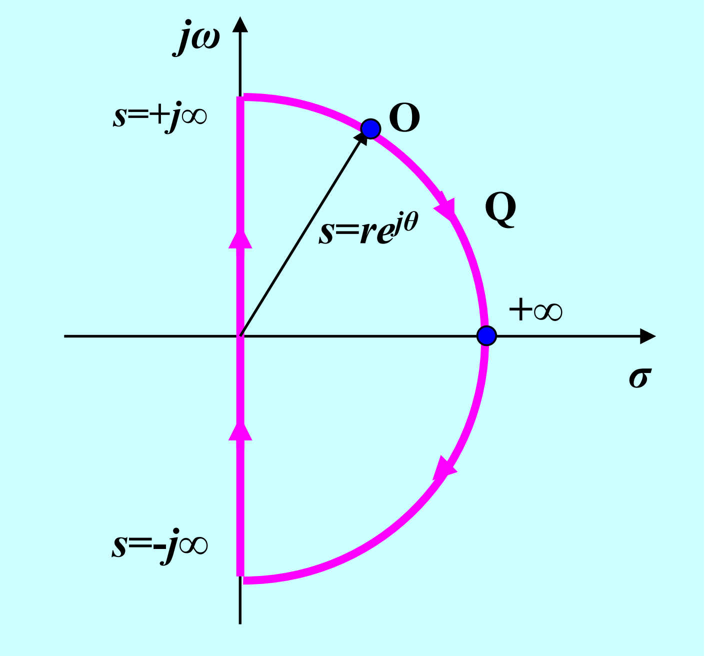
闭合曲线Q包围了$B(s)$所有具有正实部的极点和零点。

为了运用幅角定理，闭合曲线Q不能经过$B(s)$的任意极点和零点。

＜注意复习：复变函数中的幅角定理（映射定理）＞

Nyquist 闭合曲线

数学基础



注意：

1. $B(s)$的零点产生的**顺时针**旋转圈数等于$B(s)$在右半平面的零点数 Z_R。
2. $B(s)$的极点产生的**逆时针**旋转圈数等于$B(s)$在右半平面的极点数 P_R 。
3. $B(s)=1+G(s)H(s)$**围绕原点**旋转的圈数N 等于$B(s)$在右半平面的极点数P_R 减去零点数Z_R。 N 可能为正（逆时针）、为负（顺时针）或零。

上述结论可以用方程来表示

$$N=\frac{[1+G(s)H(s)]相角变化}{2\pi}=P_R-Z_R$$

$B(s)$围绕原点旋转的圈数

其中逆时针旋转为正，顺时针旋转为负。

数学基础

$$\left.\begin{aligned}G(s)&=N_1/D_1\\H(s)&=N_2/D_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow B(s)=1+\frac{N_1N_2}{D_1D_2}=\frac{D_1D_2+N_1N_2}{D_1D_2}$$

若特征方程$B(s)$旋转圈数为N，则表示$B(s)$的有向线段必须围绕原点旋转$N\times360$ 度。

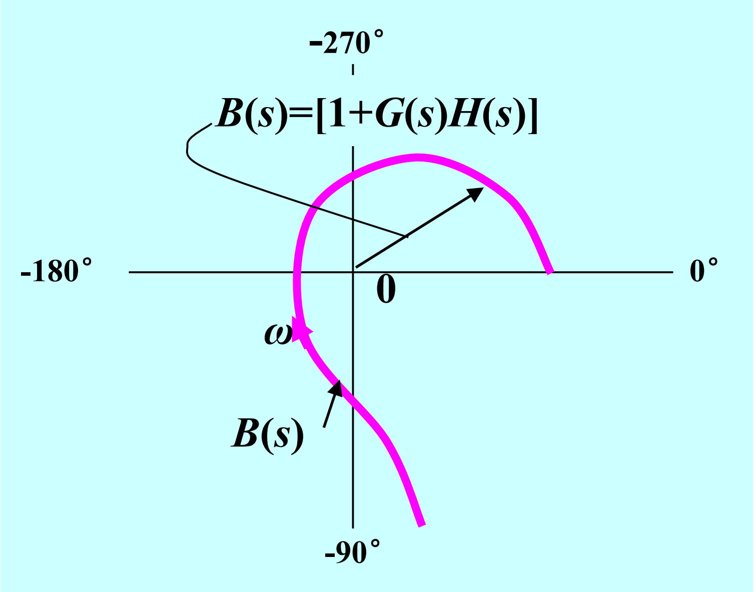
$$N=P_R-Z_R$$

$$Z_R=P_R-N$$

位于右半平面的开环极点数

闭环特征方程在右半平面的根的个数

注意： $B(s)$的零点 ⇔ $\Phi(s)$的极点



一般地，P_R是已知的，N可以从$B(s)$极坐标图中获得，问题便转化为从极坐标图得到的N及已知的P_R，可以求出Z_R，也就可判系统稳定性。

数学基础

$N = P_R - Z_R$　$Z_R = P_R - N$　$\left.\begin{array}{l} G(s) = N_1/D_1 \\ H(s) = N_2/D_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B(s) = 1 + \frac{N_1N_2}{D_1D_2} = \frac{D_1D_2 + N_1N_2}{D_1D_2}$

对于稳定系统来说，$B(s)$在S右半平面没有零点（$Z_R=0$），因此：

对于稳定系统，$B(s)$逆时针围绕原点旋转的圈数一定等于$B(s)$右半平面的极点数（开环传递函数右半平面的极点数）。

例如

若$B(s)$顺时针旋转一圈，则表明$Z_R>P_R$，其中$P_R\geq 0$，则闭环系统不稳定。

若$B(s)$的旋转圈数为0，则$Z_R=P_R$，系统或者稳定（$P_R=0$）或者不稳定（$P_R>0$）。

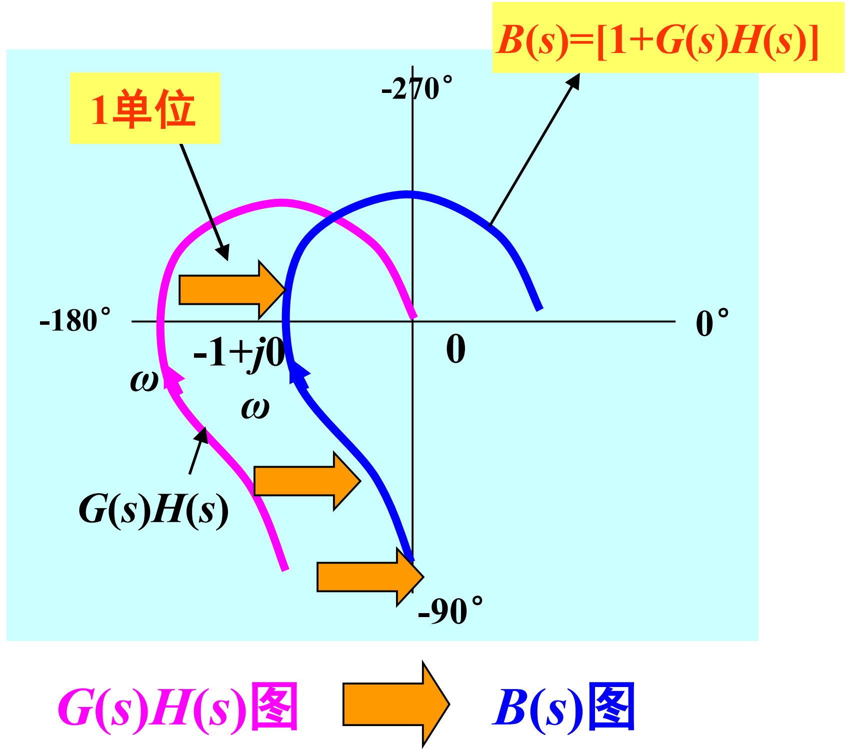
若$P_R=0$，则$Z_R=0$，系统稳定

若$P_R>0$，则$Z_R>0$，系统不稳定

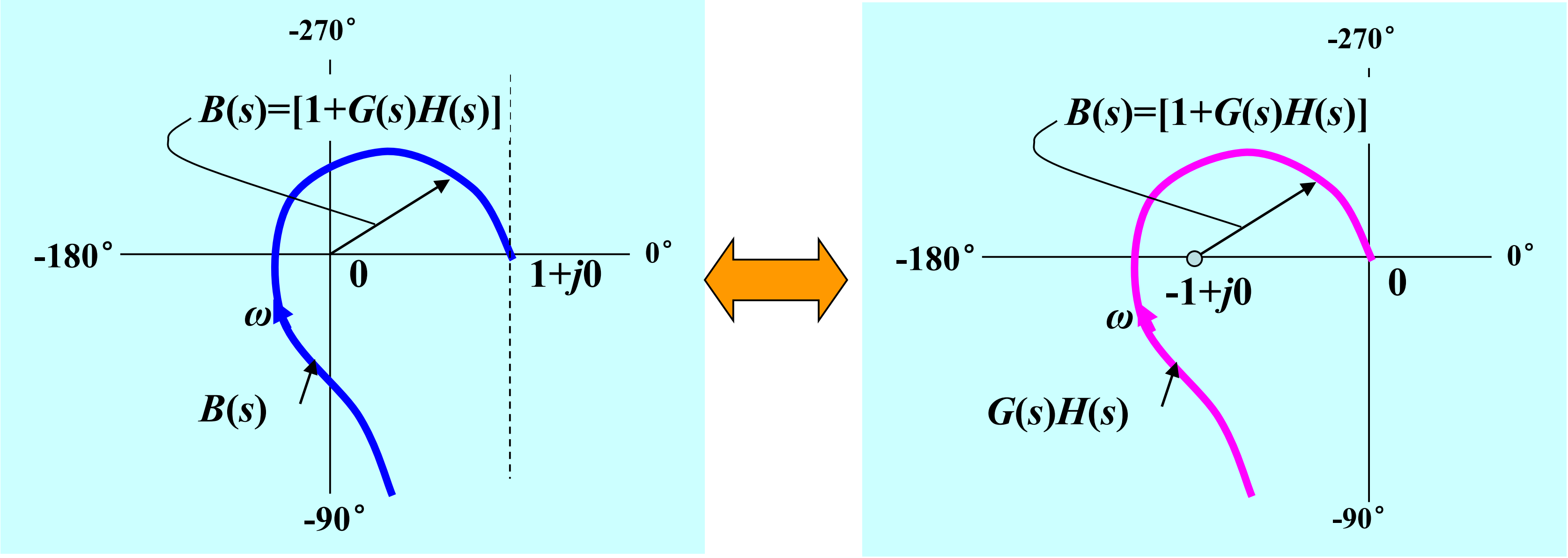
从G(s)H(s)绘制B(s)图

由于$G(s)H(s)$ 已知，可以绘制极坐标图（如右图）

将$G(s)H(s)$的极坐标图 右移一个单位，得到 $B(s)$图 $(B(s)=G(s)H(s)+1)$



从G(s)H(s)绘制B(s)图



$B(s)$图　　　　$G(s)H(s)$图

原来讨论问题是关注$B(s)$极坐标图围绕原点转N圈与$B(s)$零极点的关系，现在可以在已知开环$G(s)H(s)$极坐标图情况下直接看其围绕$(-1, j0)$的情况，两者完全等价！

Nyquist稳定性判据

$$\left.\begin{array}{l} G(s)=N_1/D_1 \\ H(s)=N_2/D_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B(s)=1+\frac{N_1N_2}{D_1D_2}=\frac{D_1D_2+N_1N_2}{D_1D_2} \qquad Z_R=P_R-N$$

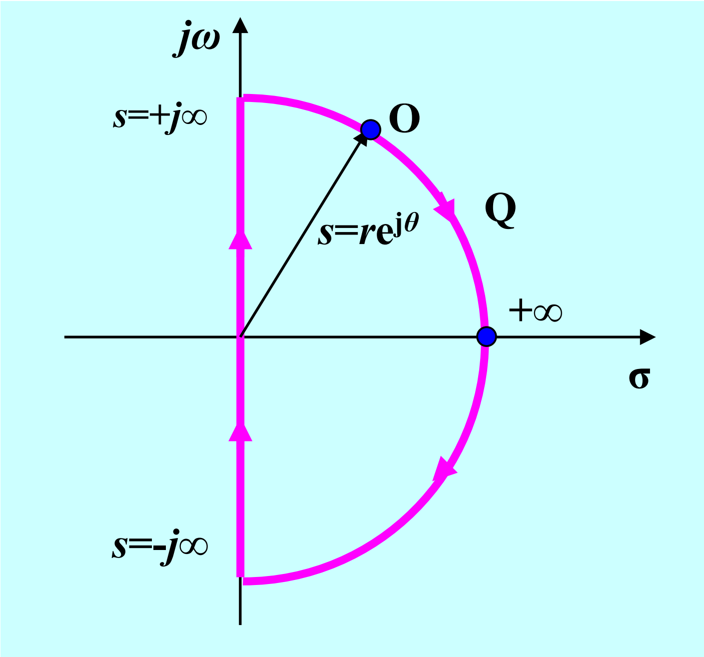
一般情况下，实际系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$ 在右半平面没有极点，即 $P_R=0$，在这种情况下 $Z_R=-N$。因此

对于稳定系统，若$G(s)H(s)$在右半平面没有极点，则$G(s)H(s)$围绕 $-1+j0$ 点的圈数为零。

对于$G(s)H(s)$在右半平面有极点，但分母不是因式分解的形式的情况，可以对D_1D_2应用Routh判据来确定右半平面的极点个数（Routh表中第一列符号变化的次数即右半平面的极点数）

闭合曲线Q

应用 Nyquist稳定判据时，闭合曲线必须包围整个右半平面，以保证右半平面的所有零点和极点都被包围进去。



闭合曲线Q包围S的整个右半平面闭合曲线由以下两部分组成：

1) 一部分是$-j\infty$ 到$+j\infty$的虚轴；

2) 另一部分是包含右半平面的半径为无穷大的半圆。

闭合曲线Q

1) 从-$j\infty$ 到 +$j\infty$的虚轴：

这部分沿虚轴的路径可以表示为 $s=j\omega$， 其中ω取值范围为 -∞ 到 +∞，绘制这部分对应的$B(s)$图

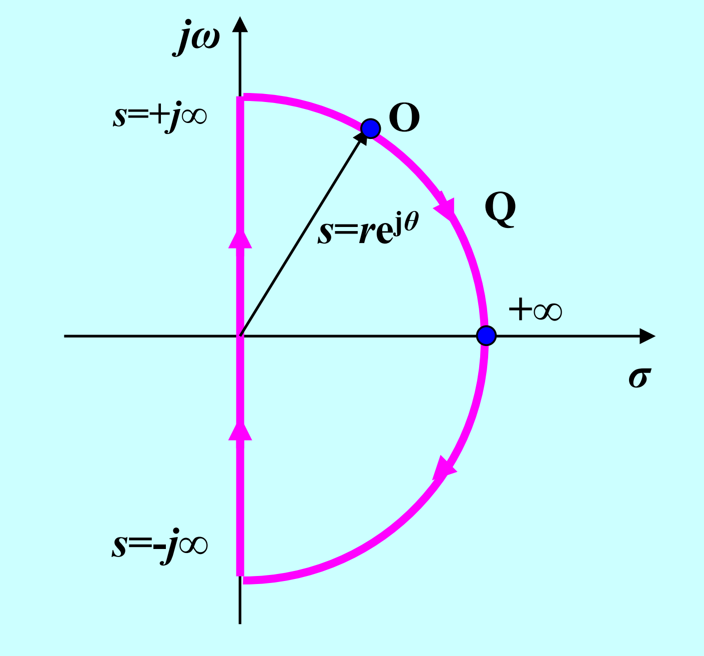
2) 包含右半平面的半径为无穷大的半圆：

Nyquist判据的其中一个要求就是

$\lim_{s\to\infty} G(s)H(s) \to 0$ 或常数。

$$\lim_{s\to\infty} G(s)H(s) \to 0 \text{ or } K$$

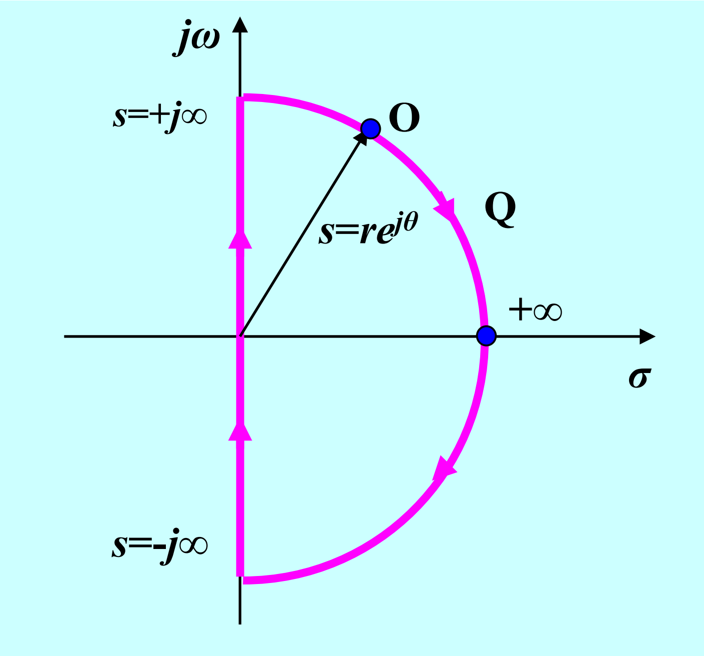
$$\lim_{s\to\infty} \left[1+G(s)H(s)\right] \to 1 \text{ or } (1+K)$$



闭合曲线Q

当点O沿着闭合曲线中半径为无穷大的半圆移动时，相应的$B(s)$图是一个固定的点。

因此，点O沿着虚轴从$-j\infty$变化到$+j\infty$与沿着整个闭合曲线运动时，$B(s)$旋转的角度相等。



结论：

$B(s)$旋转的角度变化仅与点O沿虚轴从$-j\infty$ 到 $+j\infty$变化有关。

幅相特性曲线的对称性

考虑如下传递函数（T_1 和 T_2 为正）

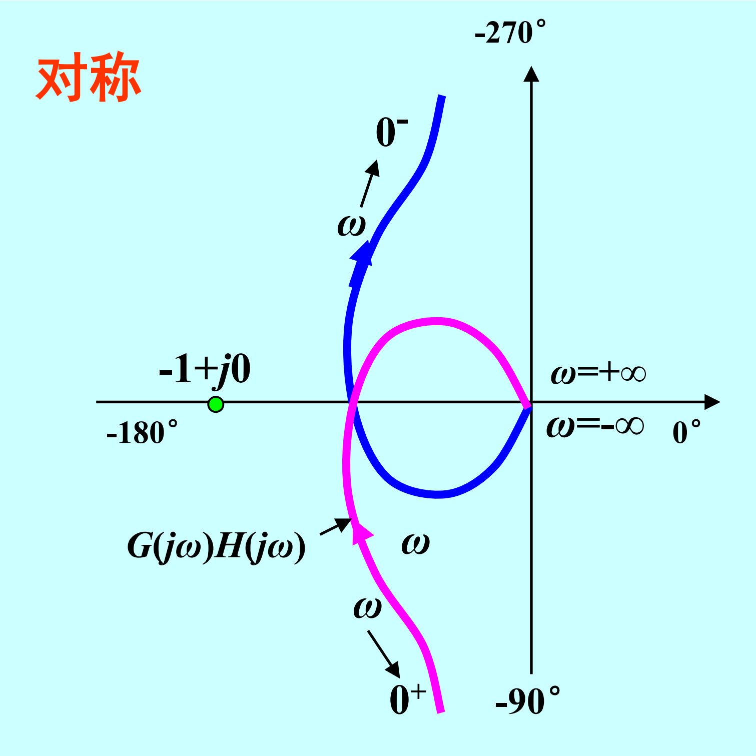
$$G(s)H(s)=\frac{K_1}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

令$s=j\omega$，代入上述$G(s)H(s)$，绘制$G(j\omega)H(j\omega)$的极坐标图。

当s沿虚轴变化时$G(s)H(s)$图：

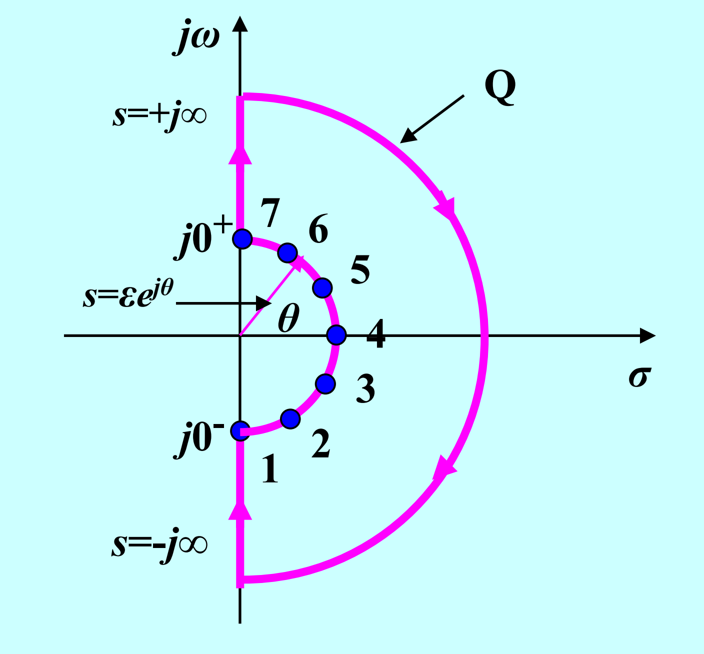
1) $j0^+<j\omega<j\infty$，正频率的极坐标图；

2) $-j\infty<j\omega<j0^-$，负频率的极坐标图。



原点处开环极点的影响

若传递函数$G(s)H(s)$在分母上有一个s，由于闭合曲线Q不能通过任一零点或极点，因此对闭合曲线Q进行修正，避免穿越原点（如图所示）



闭合曲线Q上很小的半圆$s=\varepsilon e^{j\theta}$，$\varepsilon\to 0$ 且 $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$

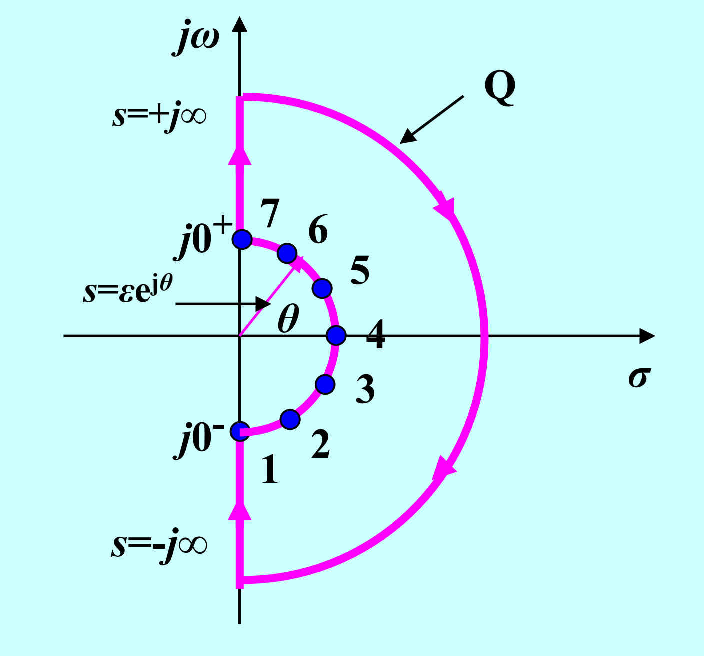
$$G(s)H(s)=\frac{K_1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$s\to 0$

$$G(s)H(s)=\frac{K_1}{s}=\frac{K_1}{\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K_1}{\varepsilon}e^{-j\theta}=\frac{K_1}{\varepsilon}e^{j\psi}$$

原点处开环极点的影响

$$G(s)H(s)=\frac{K_1}{s}=\frac{K_1}{\varepsilon\ e^{j\theta}}=\frac{K_1}{\varepsilon}e^{-j\theta}=\frac{K_1}{\varepsilon}e^{j\psi}$$

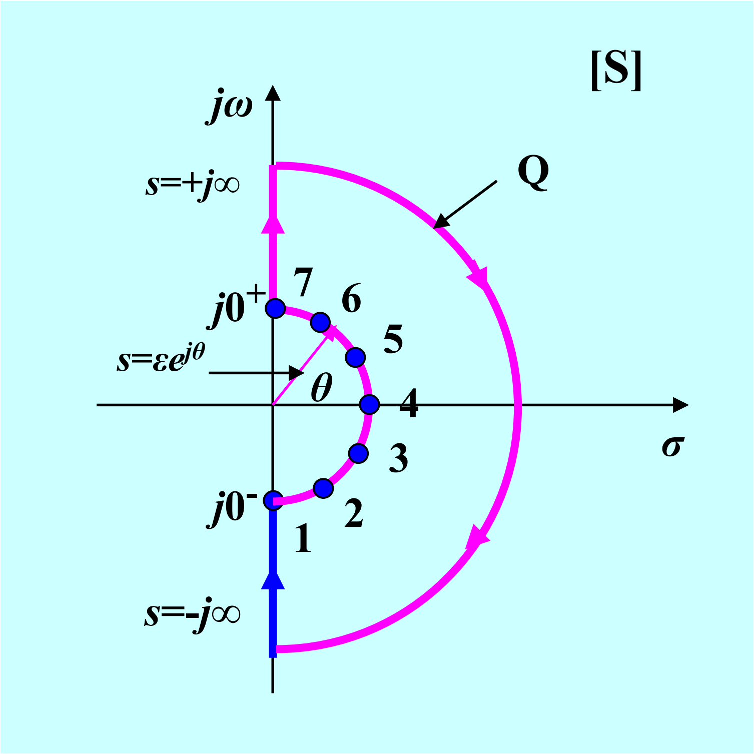


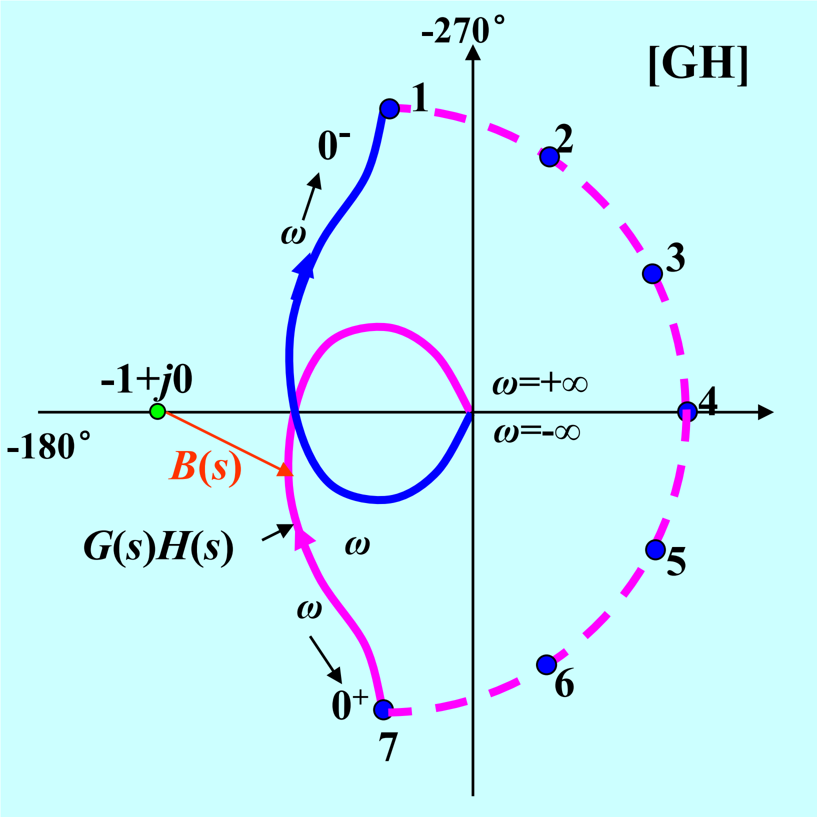
其中：当 $\varepsilon \to 0$ 时，$K_1/\varepsilon \to \infty$

$\psi = -\theta$ 从$\pi/2$ 到 $-\pi/2$变化（当有向线段从 $\varepsilon\angle-\pi/2$ 到 $\varepsilon\angle\pi/2$逆时针变化时）

$\varepsilon\to0^-$ 和 $\varepsilon\to0^+$时，$G(s)H(s)$曲线的终点与第一、四象限的半径为无穷大的半圆相连接。

原点处开环极点的影响



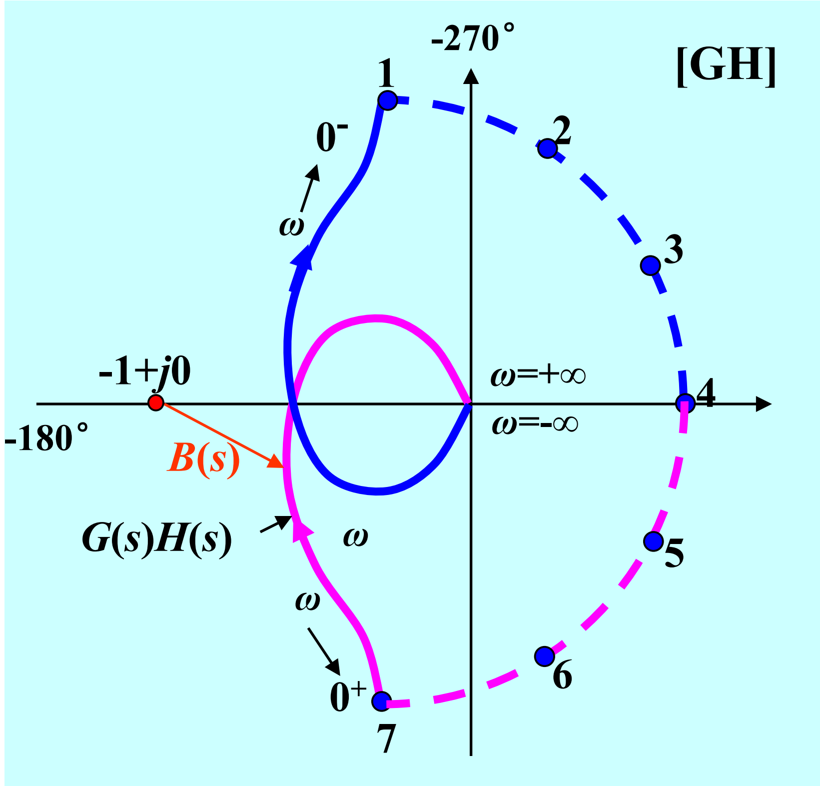


$$G(s)H(s)=\frac{K_1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

当原点移至–1+j0点时，即为 $B(s)$图

点O沿着修正之后的闭合曲线从点1到点7运动时$G(s)H(s)$曲线。

原点处开环极点的影响



$G(s)H(s)$图没有包围$-1+j0$点，因此N为0

$$G(s)H(s)=\frac{K_1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$P_R=0$

$Z_R=P_R-N$

$Z_R=0$

闭环系统稳定

原点处开环极点的影响

若传递函数分母含有s^m 项，则当 $\varepsilon \to 0$

$$G(s)H(s)=\frac{K_m}{s^m}=\frac{K_m}{\varepsilon^m e^{jm\theta}}=\frac{K_m}{\varepsilon^m}e^{-jm\theta}=\frac{K_m}{\varepsilon^m}e^{jm\psi},m=1,2,3,4,\ldots$$

根据前面的示例，从上述方程可以看出，当s从 0^- 向 0^+运动时， $G(s)H(s)$图以无穷大半径顺时针旋转m个半圆（180°）

若 $m=2$，当s沿着半径为ε，相角θ从$-\pi/2$变化到 $\pi/2$时，$G(s)H(s)$旋转一周，即$2\times(180°)=360°$。

由于极坐标图关于实轴对称，因此只要确定$0<\omega<+\infty$的$G(s)H(s)$ 幅相曲线形状， $-\infty<\omega<+\infty$ 时的曲线围绕圈数是$0<\omega<+\infty$时曲线围绕圈数的2倍。

G(jω)H(jω)穿越–1+j0点

当$G(j\omega)H(j\omega)$穿越点–1+j0，围绕的圈数将不确定。这种情况对应于$B(s)$在虚轴上有零点。

应用Nyquist稳定判据的必要条件是闭合曲线不经过任意$B(s)$的极点或零点。

当$G(j\omega)H(j\omega)$穿越–1+j0点，Nyquist稳定判据不能用。

$B(s)$在虚轴上的零点意味着闭环系统将出现持续振荡（与输入无关），这种情况即表示系统不稳定。

回顾：极坐标图（示例）

例6-16-1 设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)}$，$K>0$ $\quad G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)}=\dfrac{-K(s+4)}{s(1-s)}$

试绘制系统开环概略幅相曲线（极坐标图）。

解： 系统开环频率特性为 $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K(j\omega+4)}{j\omega(j\omega-1)}=\dfrac{-5K}{\omega^2+1}+j\dfrac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$

幅频特性为 $\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|=\dfrac{K\sqrt{\omega^2+16}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$

相频特性为 $\angle G(j\omega)H(j\omega)=-180^\circ-90^\circ+\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{4}-(-\operatorname{arctg}\omega)=-270^\circ+\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{4}+\operatorname{arctg}\omega$

开环幅相曲线的起点： $G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle-270^\circ\Rightarrow V_x=\operatorname{Re}G(j0^+)H(j0^+)=-5K$

开环幅相曲线的终点： $G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-90^\circ$

当K不为零，$G(j\omega)H(j\omega)$的实部不为零，故与虚轴无交点。

回顾：极坐标图（示例）

开环幅相曲线的起点：$G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle-270°\Rightarrow V_x=\mathrm{Re}\,G(j0^+)H(j0^+)=-5K$

开环幅相曲线的终点：$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-90°$

当K不为零，$G(j\omega)H(j\omega)$的实部不为零，故与虚轴无交点。

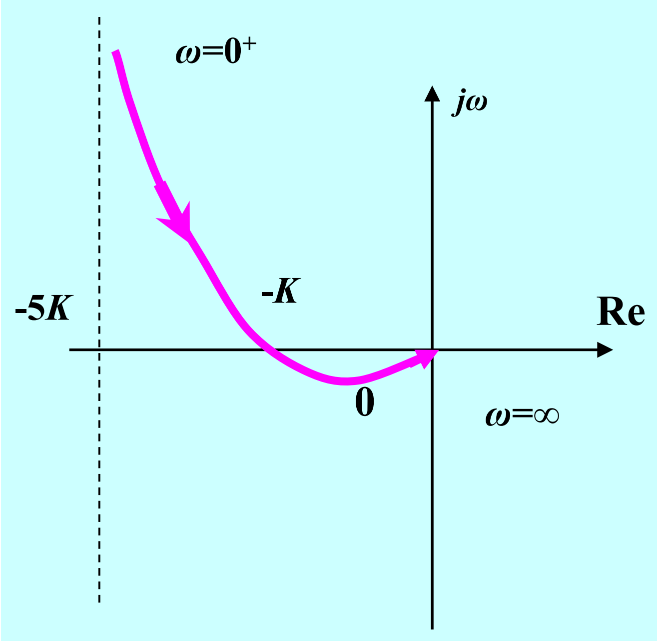
令虚部为零，可求出频率特性与实部的交点时的频率值为

$$\mathrm{Im}\,G(j\omega)H(j\omega)=0\Rightarrow\frac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}=0\Rightarrow\omega=2rad/s$$

此时，实部的坐标：

$$\mathrm{Re}\,G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-5K}{\omega^2+1}=-K$$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(j\omega+4)}{j\omega(j\omega-1)}=\frac{-5K}{\omega^2+1}+j\frac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$$



Nyquist稳定性判据——示例

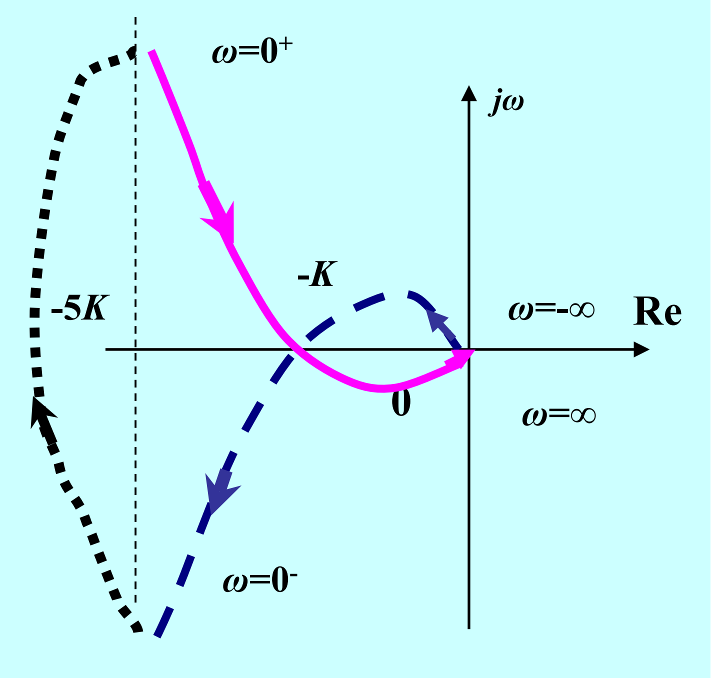
例6-16-2 设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)}$，$K>0$

用奈魁斯特稳定判据确定使系统稳定的K的取值范围。

解： 系统开环频率特性为 $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K(j\omega+4)}{j\omega(j\omega-1)}=\dfrac{-5K}{\omega^2+1}+j\dfrac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$

I型系统，m=1，如图顺时针连接0^-与0^+。

由于系统在右半平面有一个开环极点。所以有：

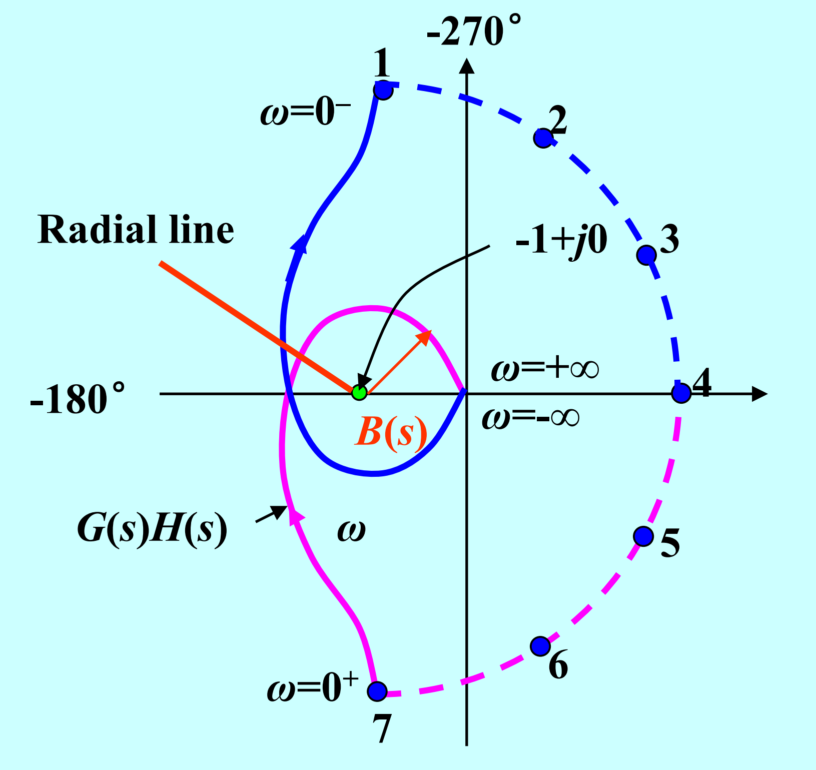


K=1，GH过(-1，j0)点，系统临界稳定；

K>1，N=1，$Z_R=P_R-N=0$，系统稳定；

K<1，N= -1，$Z_R=P_R-N=2$，系统不稳定。

Nyquist稳定性判据——示例



旋转的圈数N可以通过从$-1+j0$点绘制一射线的方法来确定。在射线与$G(s)H(s)$曲线交点处标注频率增加的方向

若幅相曲线逆时针/顺时针穿越该射线，表示正穿越/负穿越

穿越之和为N。

$P_R = 0$ $N = -2$ ⇒ $Z_R = P_R - N = 2$

闭环系统不稳定。

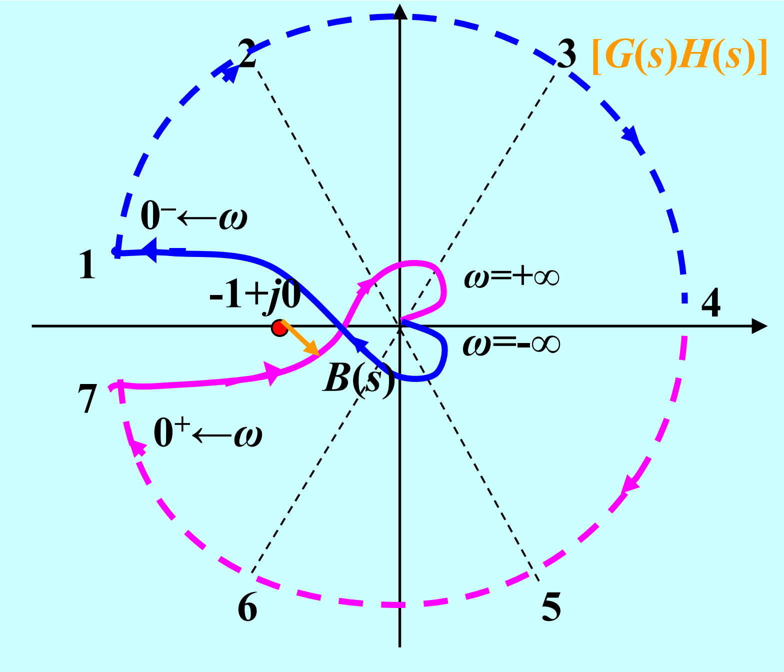
Nyquist稳定性判据——示例

例 6-17　2型系统

考虑开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K_2(1+T_4 s)}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$$

其中 $T_4>T_1+T_2+T_3$。 下图表明沿S平面闭合曲线运动时$G(s)H(s)$图



$G(s)H(s)$分母上的s^2 项在$\omega=0$附近产生了 360° 的旋转。

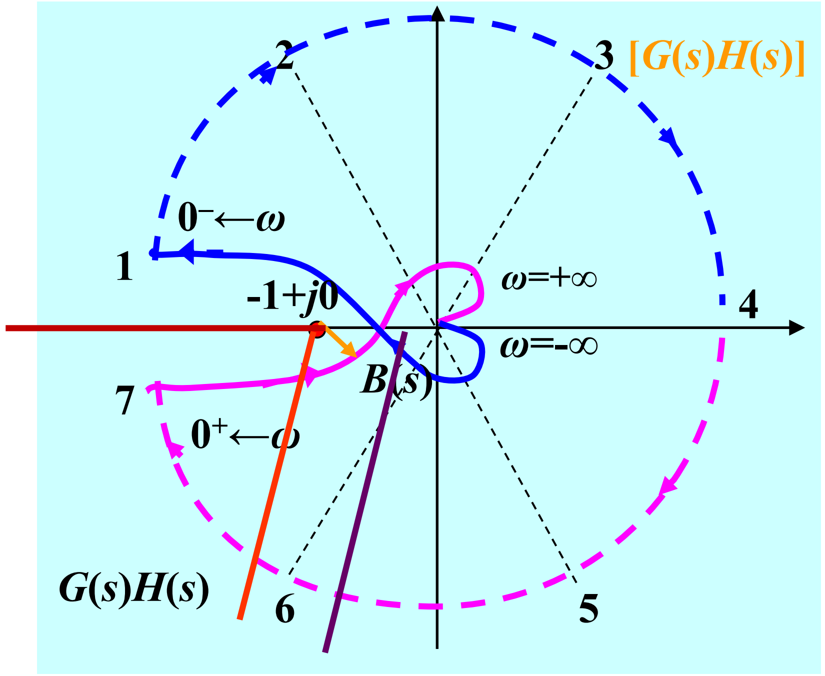
对于完整幅相曲线，旋转圈数为0，系统稳定。

Nyquist稳定性判据——示例

圈数N可以通过从$-1+j0$ 点绘制一条任一方向射线的方法来确定

(也可以选取负实轴作为射线)

$$G(s)H(s)=\frac{K_2(1+T_4 s)}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$$



红色射线一次顺时针穿越和一次逆时针穿越

$N=1-1=0$

$P_R=0$

$Z_R=P_R-N=0$

系统稳定

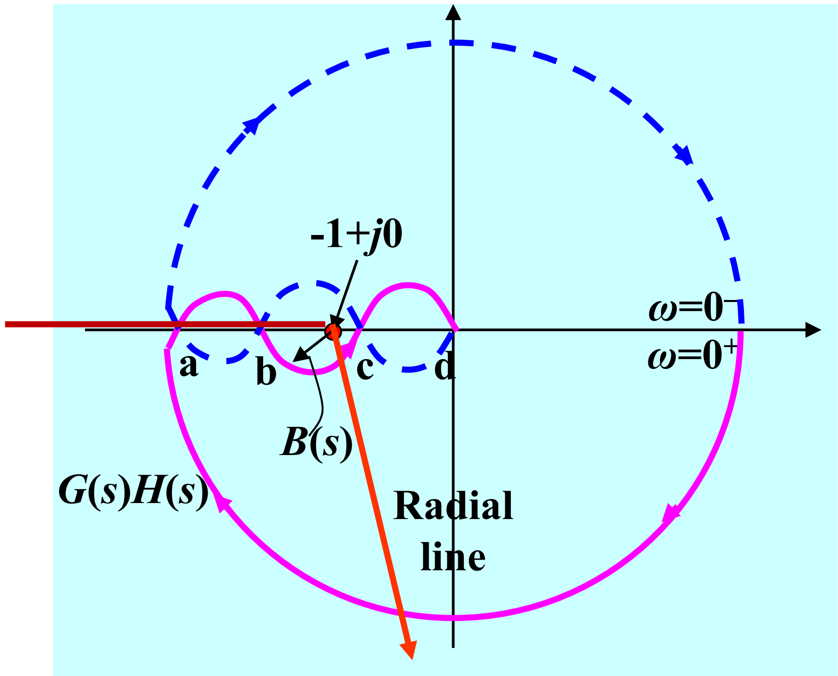
若增大$G(s)H(s)$的增益使得$G(s)H(s)$图穿越$-1+j0$点左侧负实轴，则系统会出现不稳定

$P_R=0$ $N=-2$ → $Z_R=P_R-N=2$

Nyquist稳定性判据——示例

例 6-18 条件稳定系统

$$G(s)H(s)=\frac{K_0(1+T_1s)^2}{(1+T_2s)(1+T_3s)(1+T_4s)(1+T_5s)^2}$$



其中 $T_5<T_1<T_2$，T_3 和T_4。

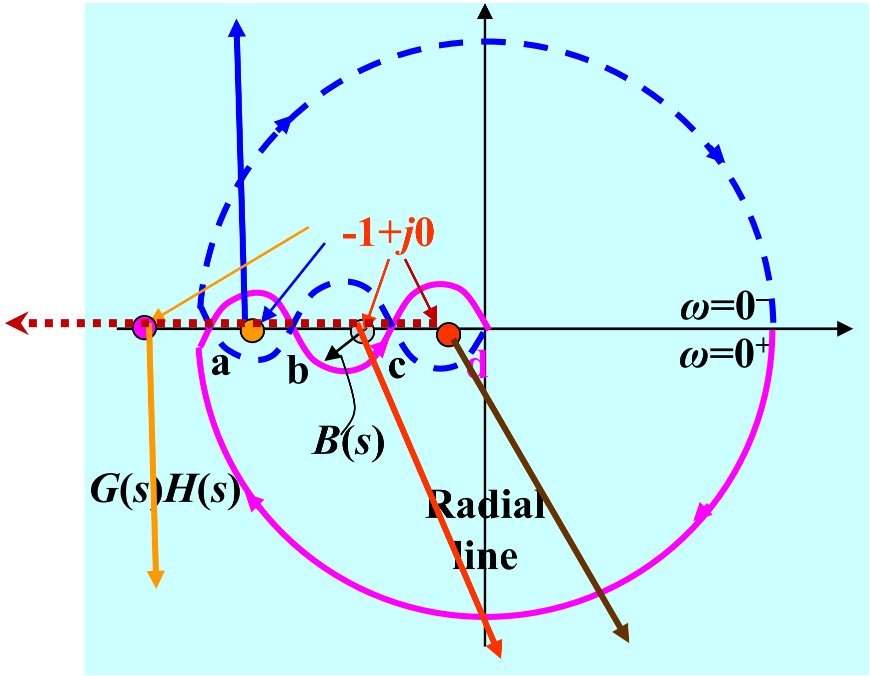
从–1+*j*0点引出射线，旋转的圈数N=0。由$G(s)H(s)$，P_R=0。

$$Z_R=P_R-N=0$$

系统稳定

Nyquist稳定性判据——示例

通过增大或减少增益，系统将会出现不稳定。



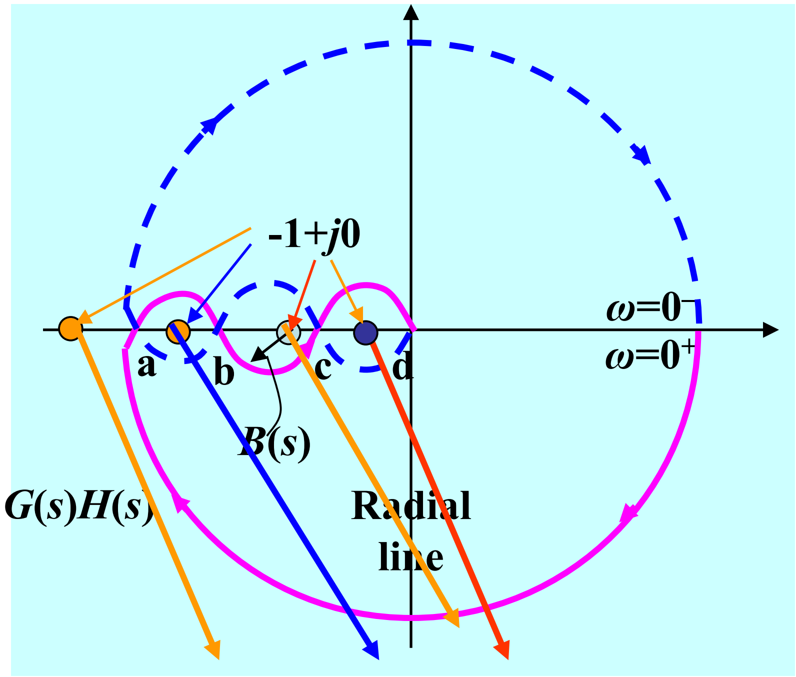
1) 若增大增益，使得–1+j0点在极坐标图的c和d之间，则顺时针旋转圈数为2。因此Z_R=2，系统不稳定

$$Z_R = 0-(-2) = 2$$

2) 若减小增益，使得–1+j0位于极坐标图的a和b之间，则顺时针旋转圈数为2。因此Z_R=2，系统不稳定

3) 进一步减少增益，使得 –1+j0 点位于极坐标图于负实轴最左侧交点的左侧，则系统稳定

Nyquist稳定性判据——示例



该系统成为条件稳定。

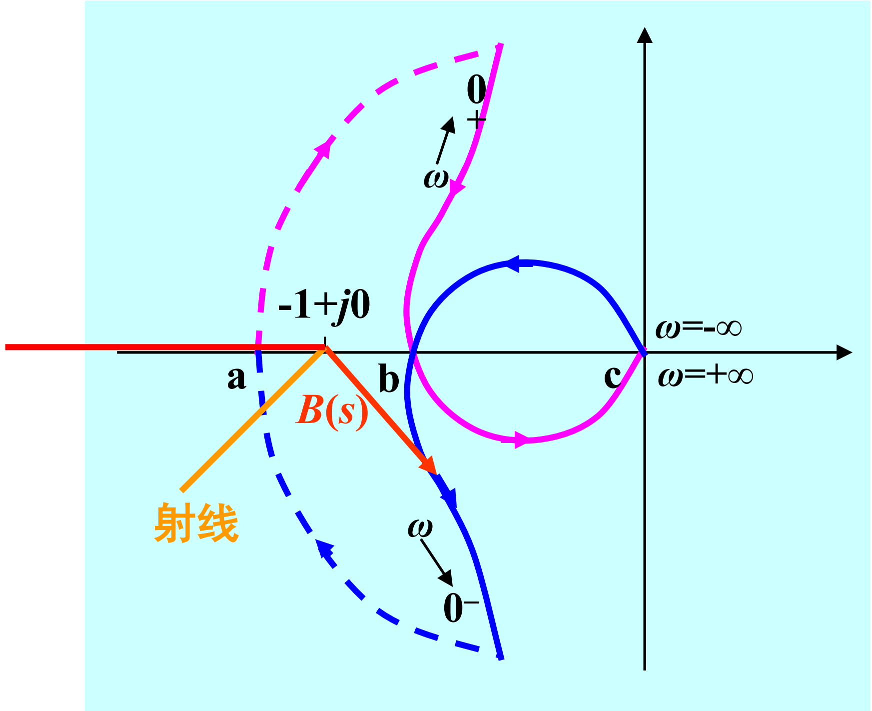
定义：条件稳定系统

系统在给定增益范围内是稳定的，但当增益增加或减少时，系统出现不稳定。

Nyquist稳定性判据——示例

例 6-19 开环不稳定系统 $G(s)H(s)=\dfrac{K_1(T_2s+1)}{s(T_1s-1)}$

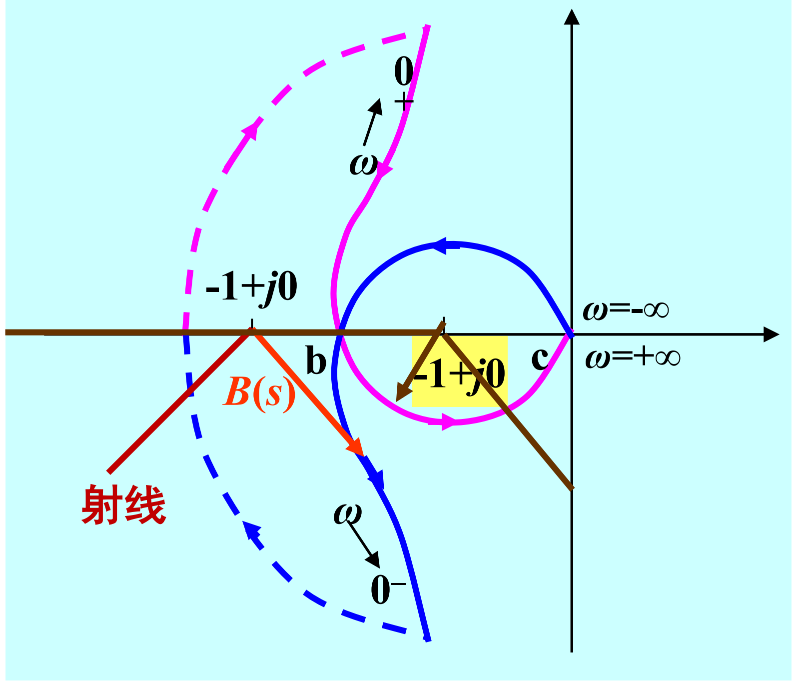
完整的极坐标图如图所示。



从 $-1+j0$点做射线，有一个顺时针的交点，则 $N=-1$。

因为 $P_R=1$，$Z_R=P_R-N=2$，系统不稳定。

Nyquist稳定性判据——示例



$$G(s)H(s)=\frac{K_1(T_2s+1)}{s(T_1s-1)}$$

对于小增益($0<K_1<K_{1x}$)，实轴上的穿越点b在$-1+j0$点的右侧，系统不稳定。

当$K_{1x}<K_1<+\infty$，$-1+j0$点位于 b 和 c 之间，使得N=+1，Z_R=0，闭环系统稳定。

Nyquist稳定性判据——示例

很多情况仅给出正频部分的开环极坐标图（开环幅相曲线），而应用Nyquist稳定性判据是基于完整的开环极坐标图(complete polar plot)。这种情况下，应该首先将图补充完整，然后再判别闭环系统的稳定性。

注意：

1）负频部分与正频部分关于实轴对称；

2）正频的方向是已知的，箭头是ω从0^+增加到∞的方向，而负频部的方向是从$-\infty$ 增加到0^- 方向；

3）当m不等于零时，根据m的值，决定ω从0^-到0^+的连线（顺时针方向$m\times180$度）；

小结

1. 开环零极点与闭环零极点关系

$$B(s)=1+G(s)H(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} G(s)=N_1/D_1 \\ H(s)=N_2/D_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B(s)=1+\frac{N_1N_2}{D_1D_2}=\frac{D_1D_2+N_1N_2}{D_1D_2}$$

闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{N_1D_2}{D_1D_2+N_1N_2}$$

$B(s)$的零点

$\Updownarrow$

$\Phi(s)$的极点

2. 数学基础：复变函数（幅角定理）

$$s=\sigma+j\omega \Rightarrow B(s)=\frac{(s-Z_1)(s-Z_2)\cdots(s-Z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=u(\omega)+jv(\omega)=re^{j\psi}$$

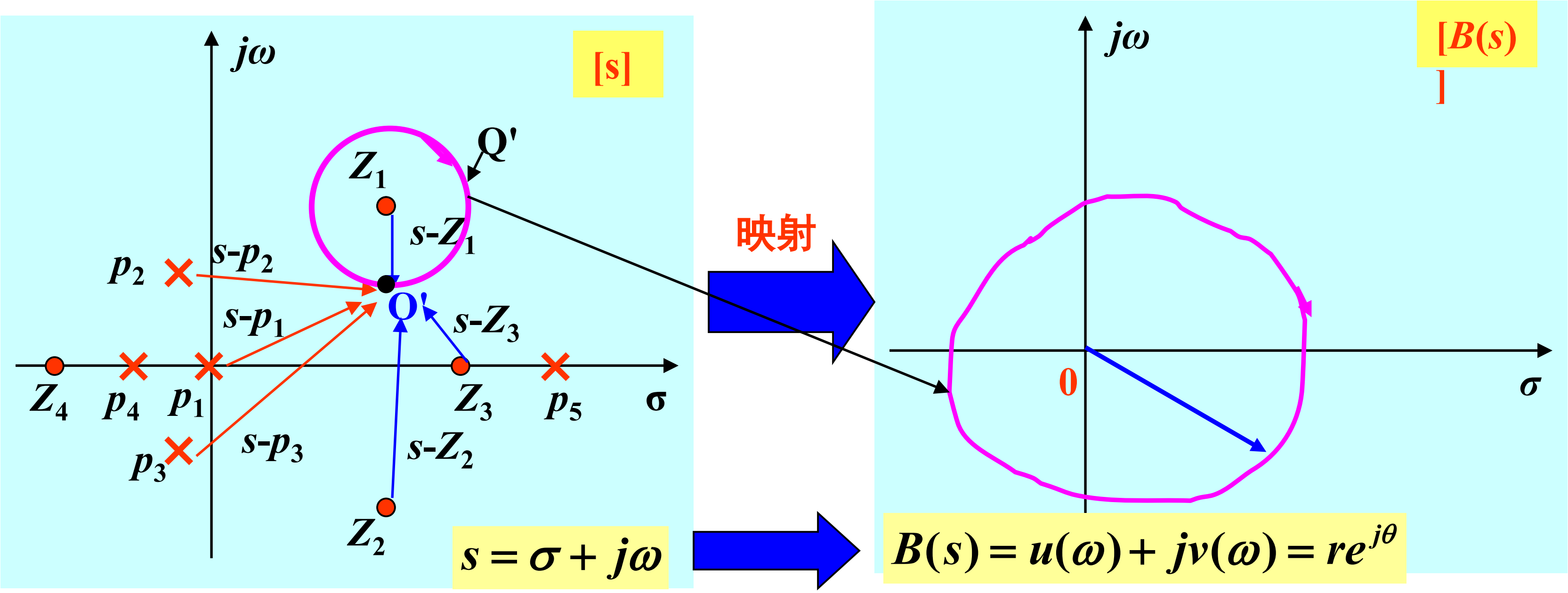
$$|B(s)|=r=\frac{\prod|(s-Z_i)|}{\prod|(s-p_j)|}$$

$$\angle B(s)=\psi=\sum(s-Z_i)-\sum(s-p_j)$$

小结

$B(s)=1+G(s)H(s)$

数学基础：从S平面 $\rightarrow B(s)$ 平面的映射



$\angle B(s)=\sum(s-Z_i)-\sum(s-p_j)$

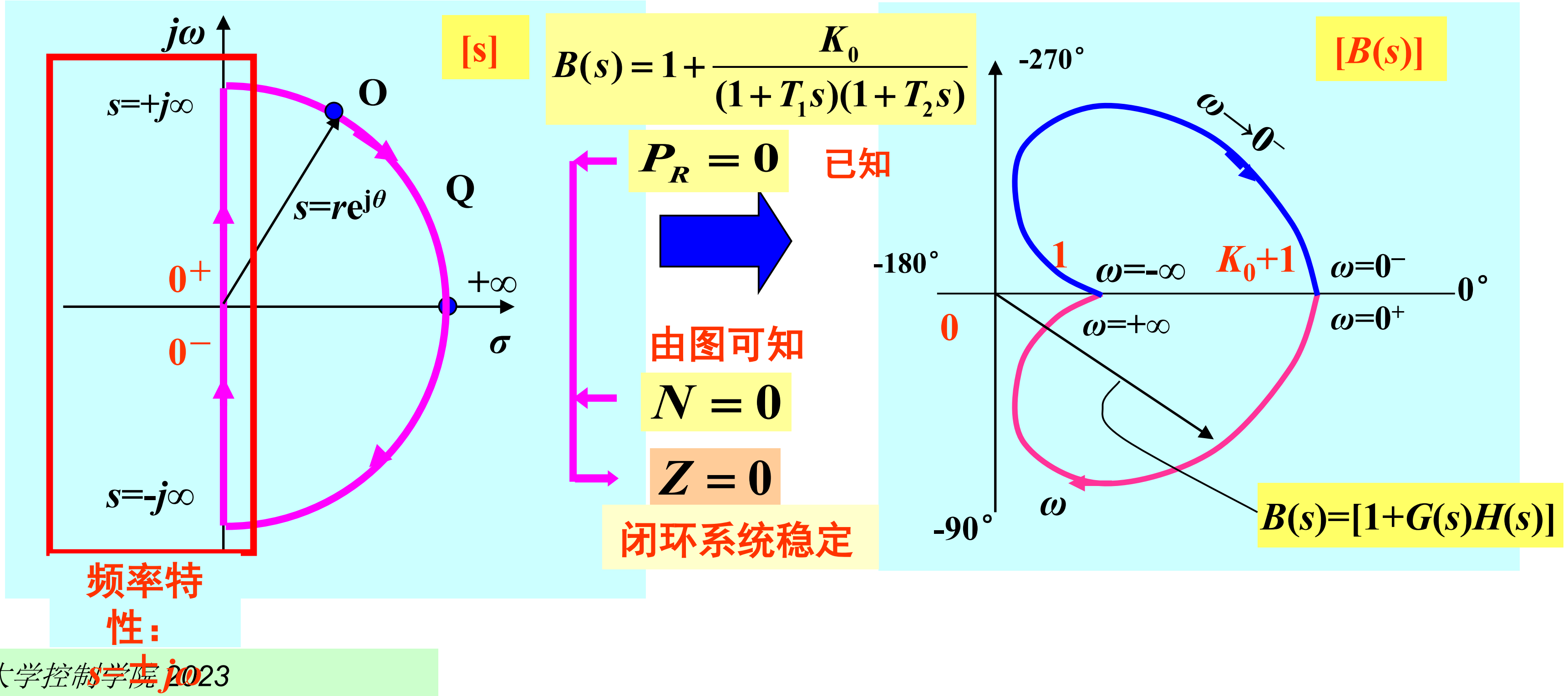
若S平面的Q'包围$B(s)$的一个零（极）点，则在$B(s)$平面cw—顺时针（ccw—逆时针）包围原点一圈（即角度变化-360^{o}（$+360^{o}$））。

小结

3. Nyquist 轨线（contour Q ）

为了判别闭环系统的稳定性，在S平面上取特殊包围线：将整个右半平面包围起来——Nyquist 轨线，映射至$B(s)$平面后，由其绕原点圈数N（cw一负，ccw一正）与已知的在右半平面的开环极点数P_R就可求出右半平面零点——系统的闭环极点——的个数Z_R 。

$$Z_R = P_R - N$$

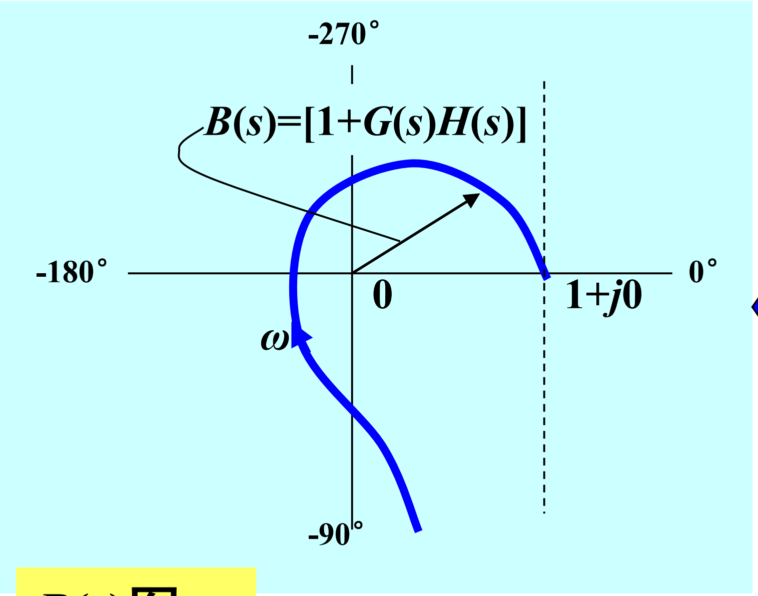


小结

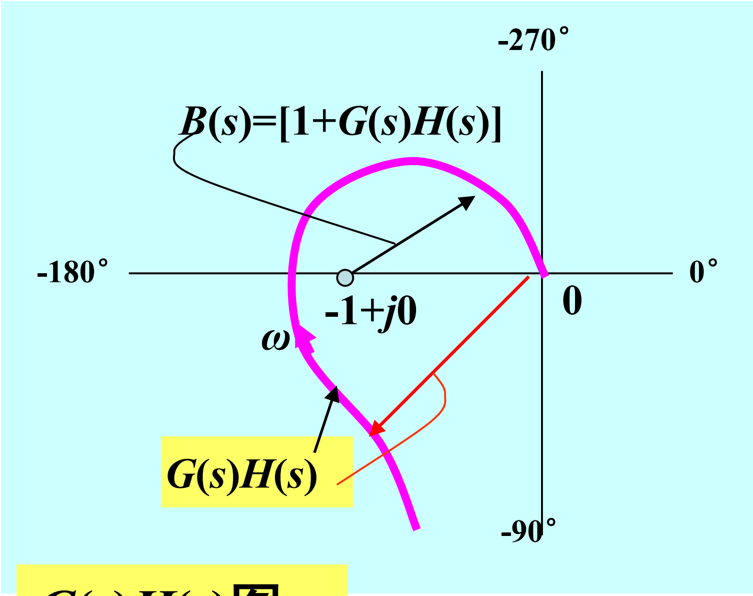
$$B(s) = 1 + G(s)H(s)$$

4. 从开环频率特性确定闭环稳定性

一般开环特性容易获取。易知：$G(s)H(s)$与$B(s)$只相差一个常数项1。于是前面映射推导均成立，只需要将原来$B(s)$ 包围原点 0 N圈改为$G(s)H(s)$包围$(-1+j0)$点N圈即可。原来的$Z_R = P_R - N$ 仍然成立。



$B(s)$图

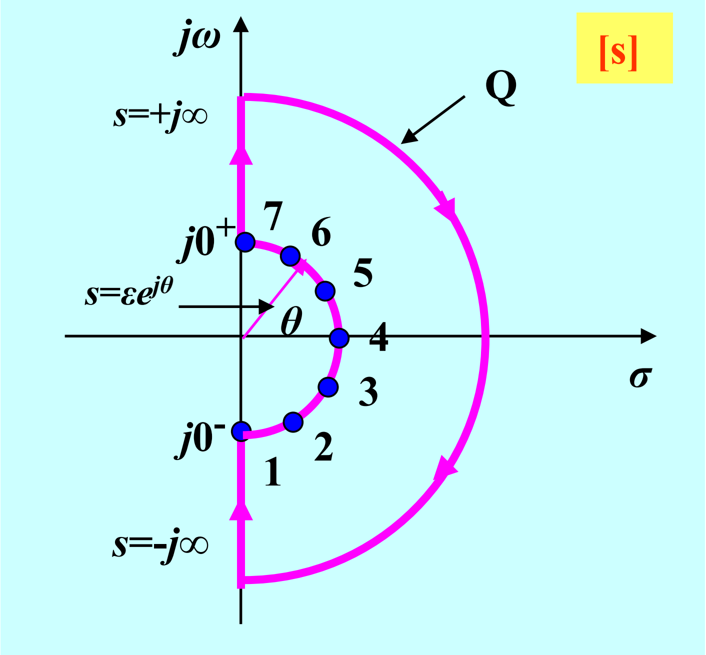


$G(s)H(s)$图

小结

5. 修正Nyquist 轨线

问题： contour Q 上不允许存在极点，若系统是非 0 型($m\neq0$)， 则contour Q 上将存在s=0的极点。？？？

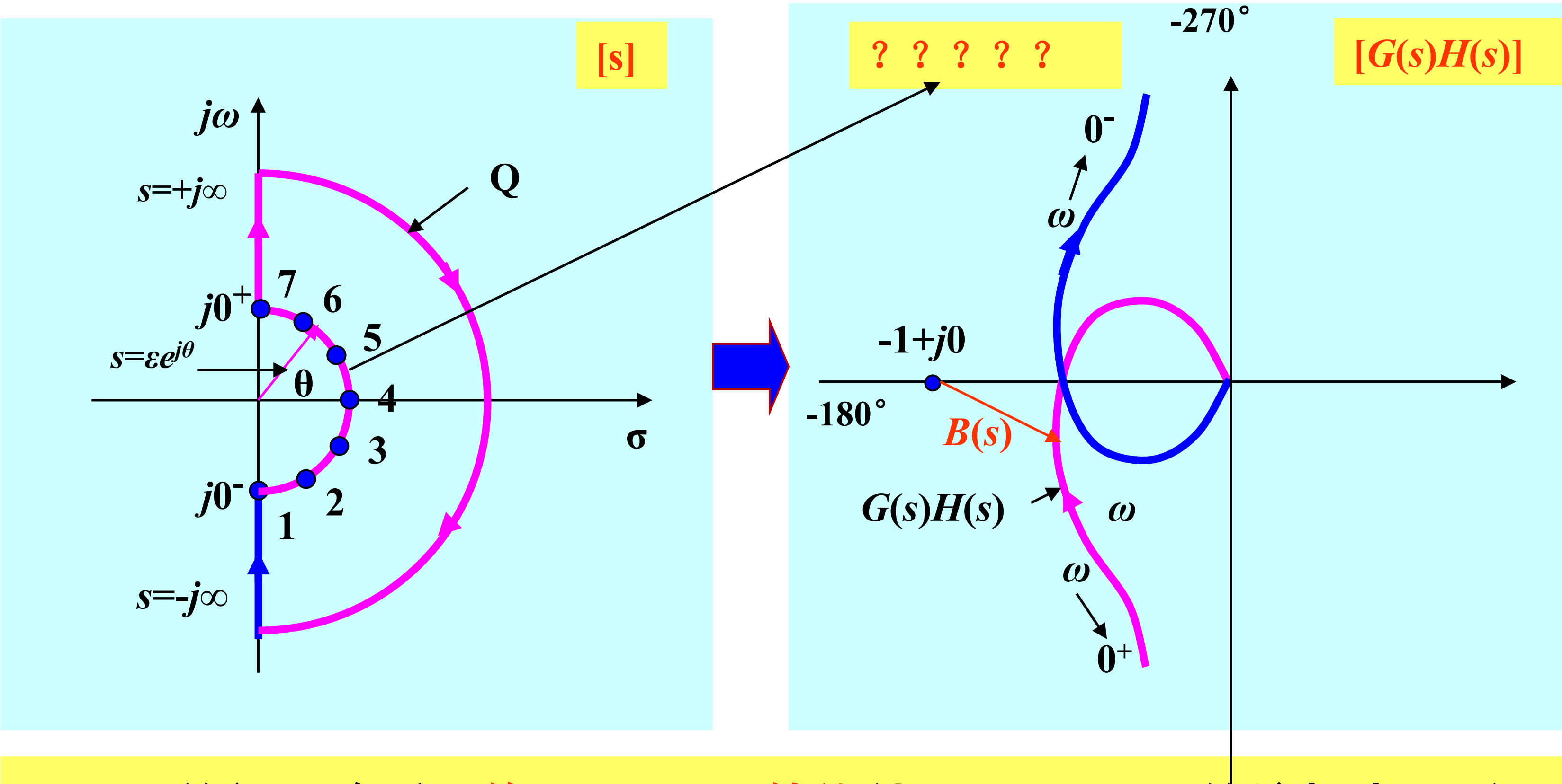


解决办法：在 Q 上极点附近取一极小圆弧，绕开s = 0的极点，使Q仍为一连续轨线－－修正Nyquist 轨线。

但需要特殊处理从 $0^- \rightarrow 0^+$!!!

小结

5. 修正Nyquist 轨线



m≠0的问题将采用修正Nyquist 轨线处理：即S平面的该极小圆弧如何映射到*G*(*s*)*H*(*s*)平面上。它与系统的型别*m*密切有关。

小结

1）设m=1，即系统有一个开环极点：s=0，采用修正Nyquist 轨线

令：$s=\varepsilon e^{j\theta}$ $\xrightarrow{\text{映射}}$ $G(s)H(s)=\dfrac{K_1}{s}=\dfrac{K_1}{\varepsilon e^{j\theta}}=\dfrac{K_1}{\varepsilon}e^{-j\theta}=\dfrac{K_1}{\varepsilon}e^{j\psi}$

2）[s]平面的小圆弧映射到[$G(s)H(s)$]平面, 将$0^-\to 0^+$连成封闭曲线形成 Nyquist 图

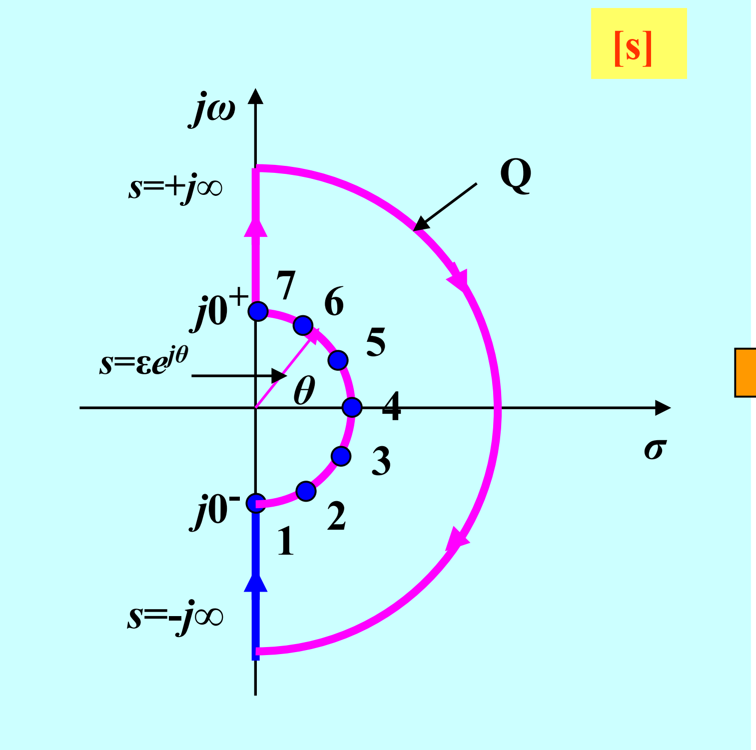
其中：[s]平面：s从$0^-\to 0^+$ 变化（即$\varepsilon\angle -\pi/2$ to $\varepsilon\angle\pi/2$），也即 $\varepsilon\to 0$， θ从$-\pi/2$ 变化到$+\pi/2$

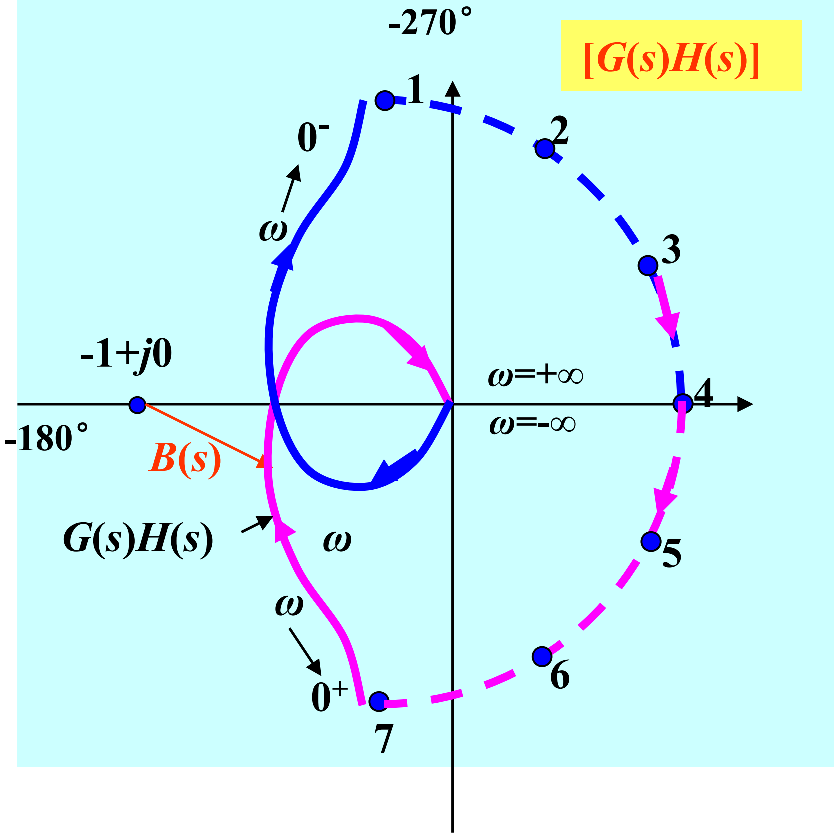
[$G(s)H(s)$]平面：$K_1/\varepsilon\to\infty$ as $\varepsilon\to 0$；

$\psi=-\theta$ 则从$\pi/2$变化到 $-\pi/2$（见后一页）

3）由完成的 Nyquist 图判别闭环系统的稳定性

小结





问题： $m>1$？？**例如**$m=2$，$m=3$？——方案同前。但特别小心角度不同！！

小结

设分母上含有s^m 项，即当 $\varepsilon\to 0$，映射到[G(s)H(s)]平面上$0^-\to 0^+$就有

$$G(s)H(s)=\frac{K_m}{s^m}=\frac{K_m}{\varepsilon^m e^{jm\theta}}=\frac{K_m}{\varepsilon^m}e^{-jm\theta}=\frac{K_m}{\varepsilon^m}e^{jm\psi} \qquad m=1,2,3,4,\ldots$$

半径仍然是无穷大，但当 S平面的 θ 从$-\pi/2$ 到 $\pi/2$时，$G(s)H(s)$ 的相位则顺时针从$0^-\to 0^+$变化 m 个半圆。

例 $m=2$ (2型系统)， $G(s)H(s)$ 将变化 2×180° =360° 。

$m=3$ (3型系统)， $G(s)H(s)$ 将变化 3×180° =540° 。

6. 由于极坐标图关于实轴对称，知道正频部分即可画出负频部分，注意ω增加方向，以及特别注意$0^-\to 0^+$的连接线

小结

7. Nyquist稳定性判据的应用

从$G(s)H(s)$的极坐标图上判别其包围点（$-1+j0$）的圈数N，再由已知的开环不稳定极点数（在右半平面）P_R，可求出闭环特征方程$B(s)$在右半平面的零点——即闭环系统的极点——的个数Z_R。

判别方法：

判别法1：从点($-1+j0$)画一射线（方向不限），记下穿越的总次数N，其穿越时：顺时针穿越为－，逆时针为＋。

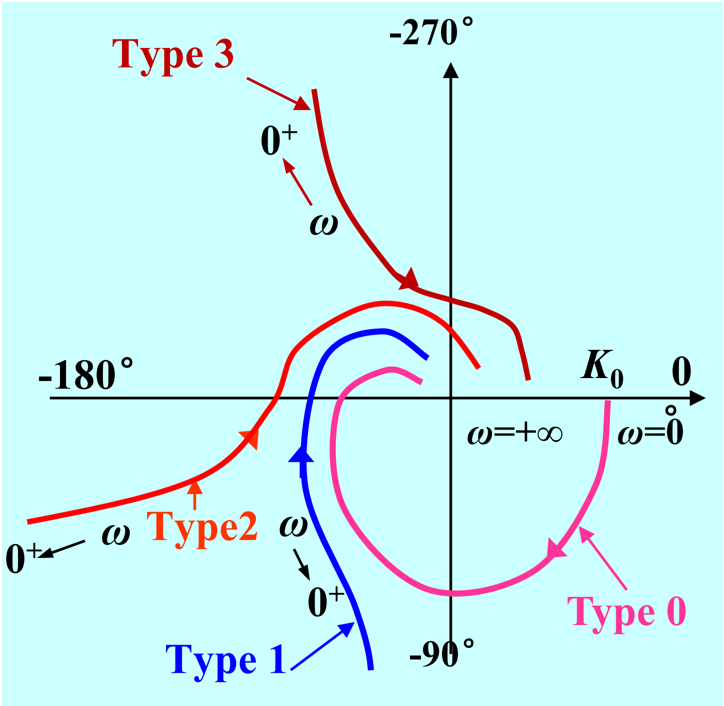
判别法2：假设你站在ω增加方向箭头上，$-1+j0$点在右手方为顺时针（－），$-1+j0$点在左手方为逆时针（＋）。

若GH正好通过点（$-1+j0$），则意味着$B(s)$在虚轴上有零点，这是等幅振荡的情况，或称其为临界稳定，或称其为不稳定。

关键：(1) GH的极坐标图必须是完整与正确的；(2) ω增加方向至关重要；(3) 系统的型m很重要，确定极坐标图的走向及$0^- \rightarrow 0^+$的连接线。

小结

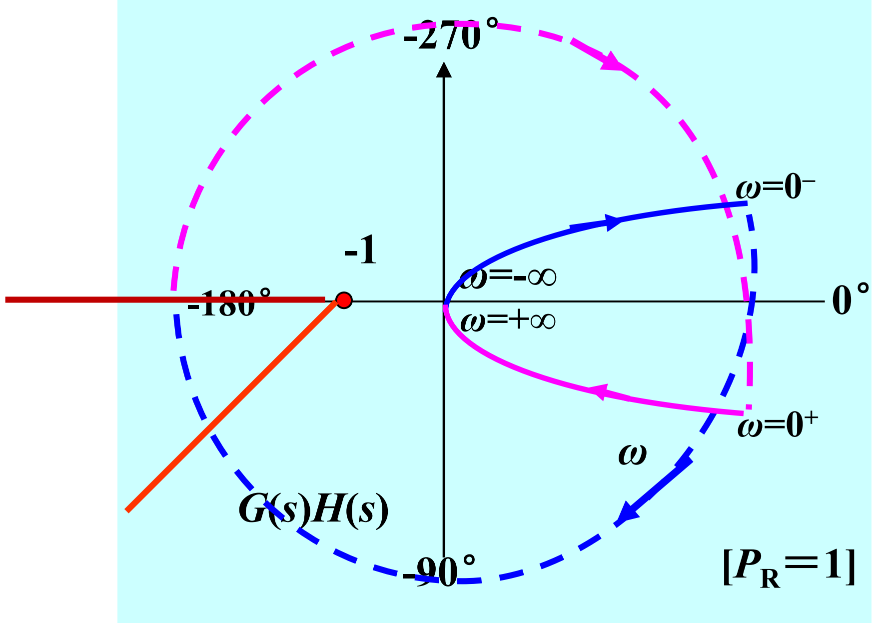
记住常见几种类型系统的概略图



Nyquist稳定性判据——示例

Fig (a) 判断开环频率特性如图所示系统的闭环稳定性。

首先补上负频部分如蓝线所示



由图显然可知不是0型系统、1型系统、3型系统

故知：$m=2$

ω从0^-到0^+的连线：顺时针转2×180度，如图所示

画射线，得$N=-1$，则$Z_R=P_R-N=1-(-1)=2$

所以系统闭环不稳定。

Nyquist稳定性判据——示例

Fig (b) 判断开环频率特性如图所示系统的闭环稳定性。

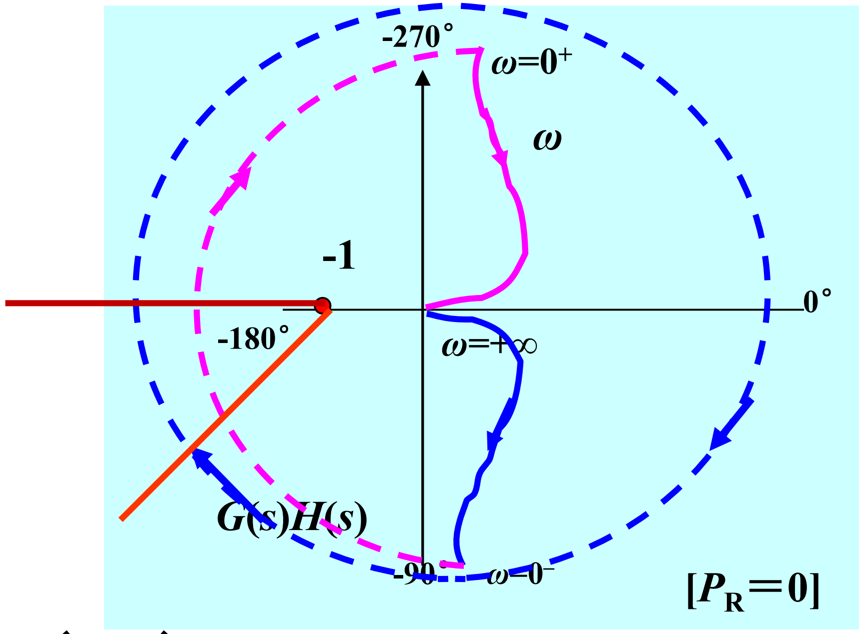
首先补上负频部分（与正频关于实幅对称）如蓝线所示

由图显然可知是3型系统（因为起始点$\omega=0^+$处的相位为－270度）

已知：$P_R=0$，

因$m=3$

ω从0^-到0^+的连线：顺时针转3×180度



画射线，得$N=-2$，则$Z_R=P_R-N=0-(-2)=2$

所以系统闭环不稳定。

Nyquist稳定性判据——示例

Fig (c) Try it !!

首先补上负频部分（与正频关于实幅对称）如蓝线所示

由图显然可知是2型系统

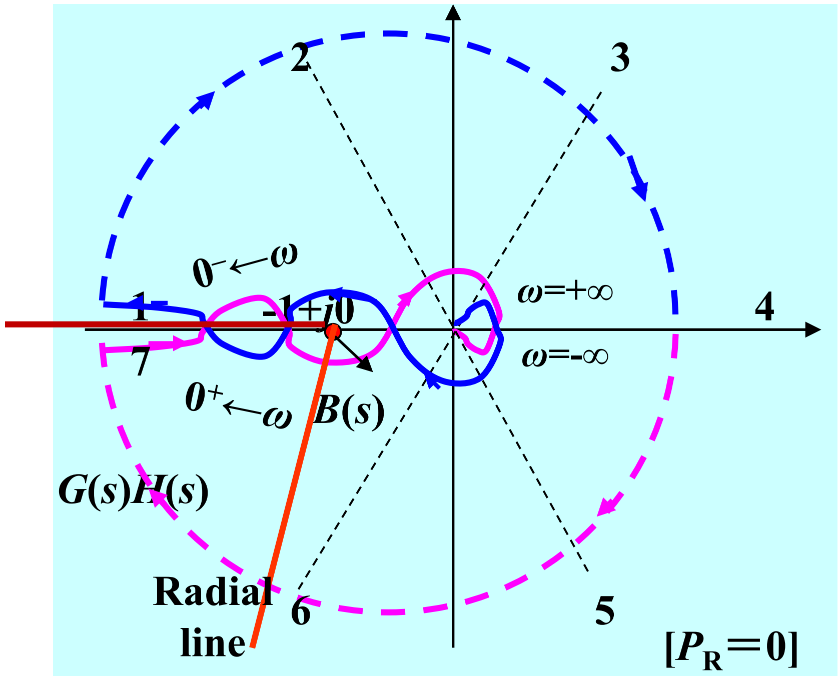
已知：$P_R=0$，

因$m=2$

ω从0^-到0^+的连线：顺时针转 2×180度

画射线，得$N=0$，则$Z_R=P_R-N=0$

所以系统闭环稳定。



Nyquist稳定性判据——示例

Fig (d) Try it !!

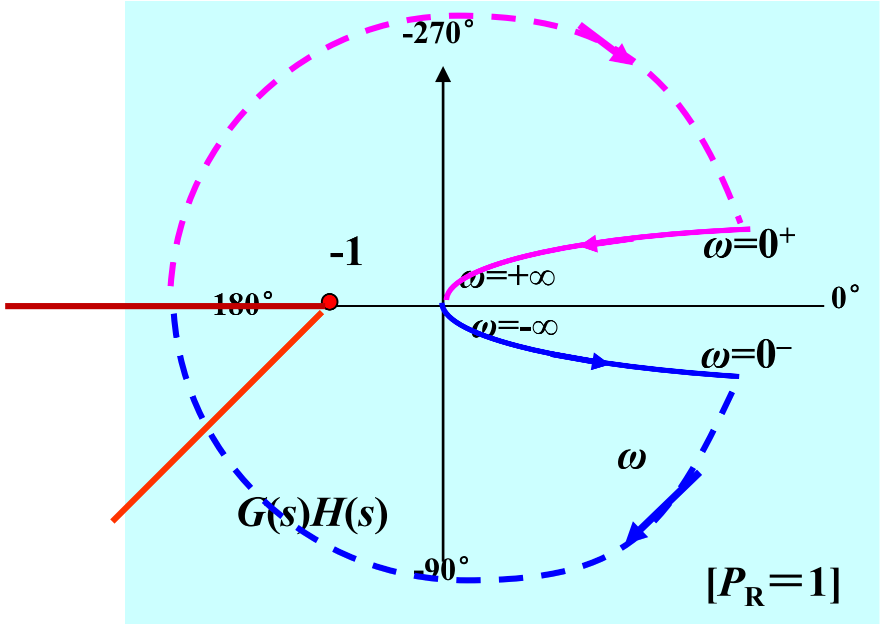
由图显然可知是2型系统

已知：$P_R=1$，

因$m=2$

ω从0^-到0^+的连线：顺时针转

2×180度

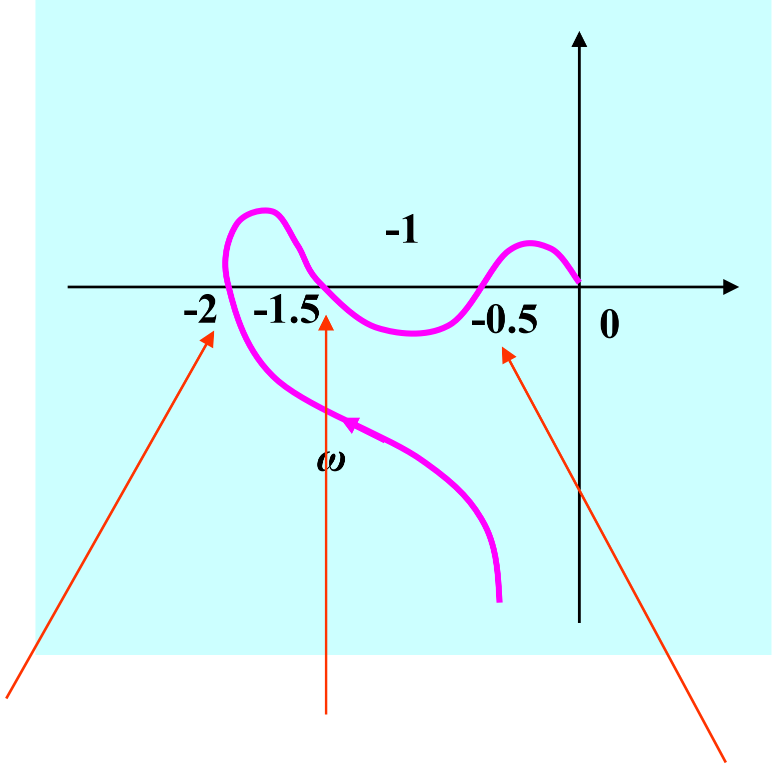


画射线，得$N=-1$，则$Z_R=P_R-N=2$

所以系统闭环不稳定。

Nyquist稳定性判据——示例

例6-20 已知单位反馈系统开环幅相曲线（K=10，P_R=0，m=1) 如图所示，试确定系统闭环稳定时K值的范围。



解： 如图所示，开环幅相曲线与负实轴有三个交点，设交接点处穿越负实轴频率分别为$\omega_1<\omega_2<\omega_3$，系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s^m}G_1(s)$$

$G_1(s)$的分子分母常数项为1

由题设条件知：

$$m=1 \qquad \lim_{s\to 0}G_1(s)=1$$

$$G(j\omega_i)=\frac{K}{j\omega_i}G_1(j\omega_i)$$

i=1,2,3

当 $K=10$

$$G(j\omega_1)=-2,G(j\omega_2)=-1.5,G(j\omega_3)=-0.5$$

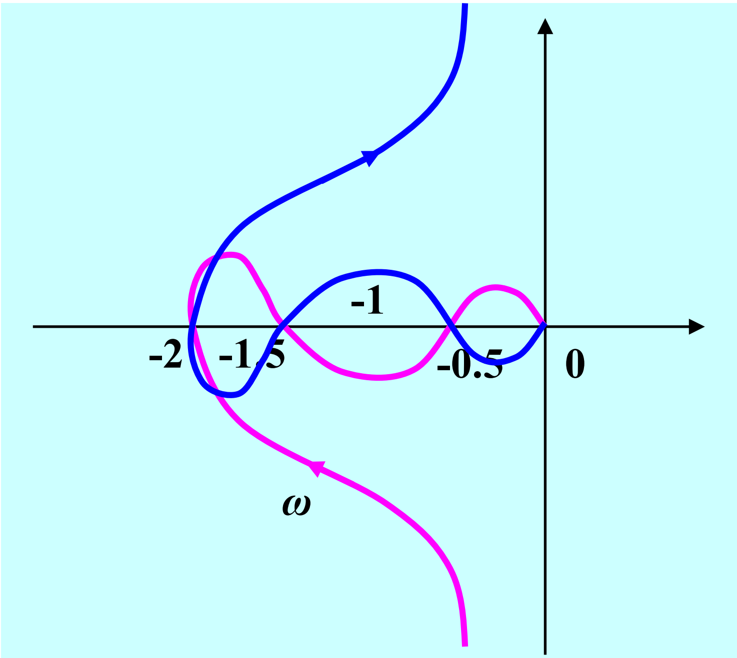
Nyquist稳定性判据——示例

$$G(j\omega_i)=\frac{K}{j\omega_i}G_1(j\omega_i)$$

对于K>0，穿越负实轴的频率ω_i必须满足

$$\angle G(j\omega_i)=\angle\left(\frac{K}{j\omega_i}G_1(j\omega_i)\right)$$
$$=-90°+\angle G_1(j\omega_i)=-(2l+1)180°$$

由上式可以看出，穿越负实轴的点的频率ω_i（即在$\omega_1,\omega_2,\omega_3$穿越）与$K$值的大小没有关系；但交点位置随$K$变化而变化。



若令$G(j\omega_i)=-1$(即交点)，对应的K_i值由

$$K_1=\frac{-1}{\frac{1}{j\omega_1}G_1(j\omega_1)}$$

$$\because G_{K_1=10}(j\omega_1)=\frac{10}{j\omega_1}G_1(j\omega_1)=-2$$

$$\Rightarrow K_1=\frac{-1}{\frac{-2}{10}}=5$$

同理：

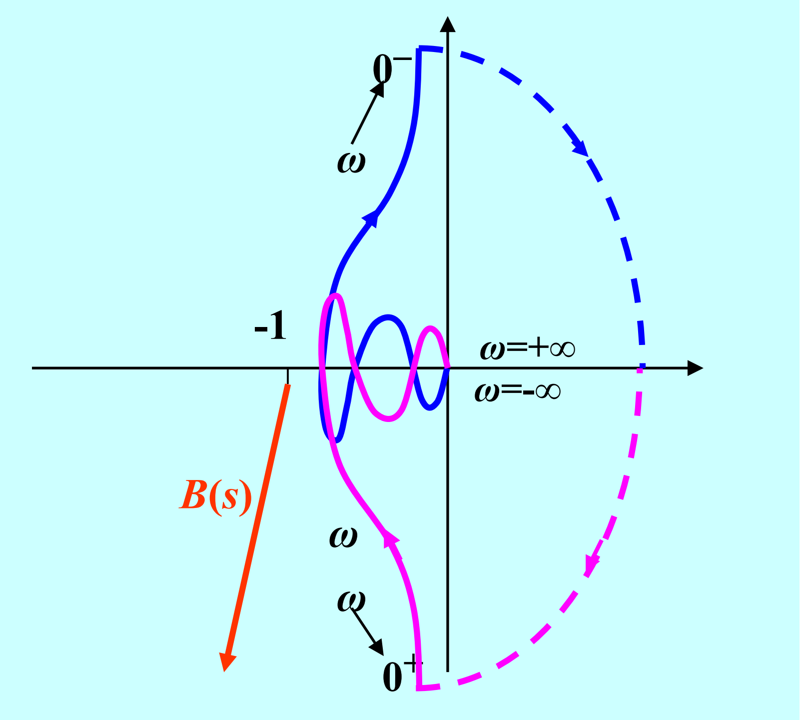
$$K_2=\frac{20}{3}\qquad K_3=20$$

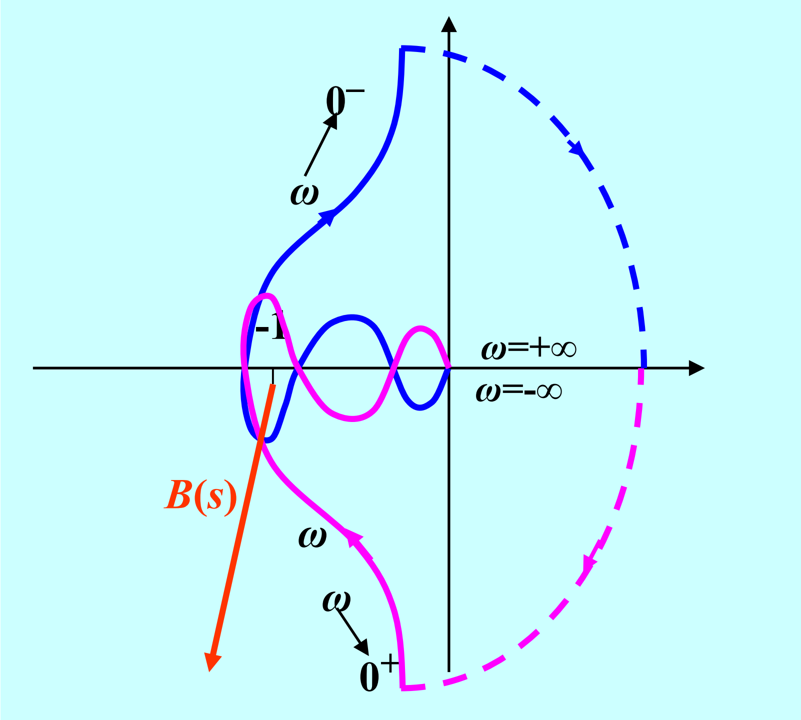
Nyquist稳定性判据——示例

$$G(j\omega_i)=\frac{K}{j\omega_i}G_1(j\omega_i)$$

令$:0<K<K_1=5$

$$5=K_1<K<K_2=\frac{20}{3}$$





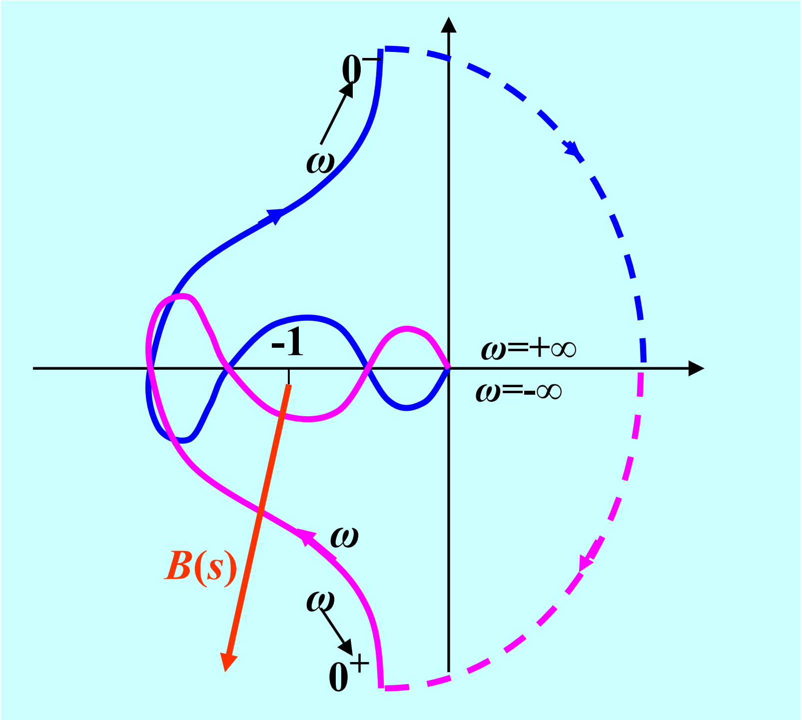
P_R=0, N=0, 所以Z_R=0，系统稳定

P_R=0, N=-2, 所以Z_R=2，系统不稳定

Nyquist稳定性判据——示例

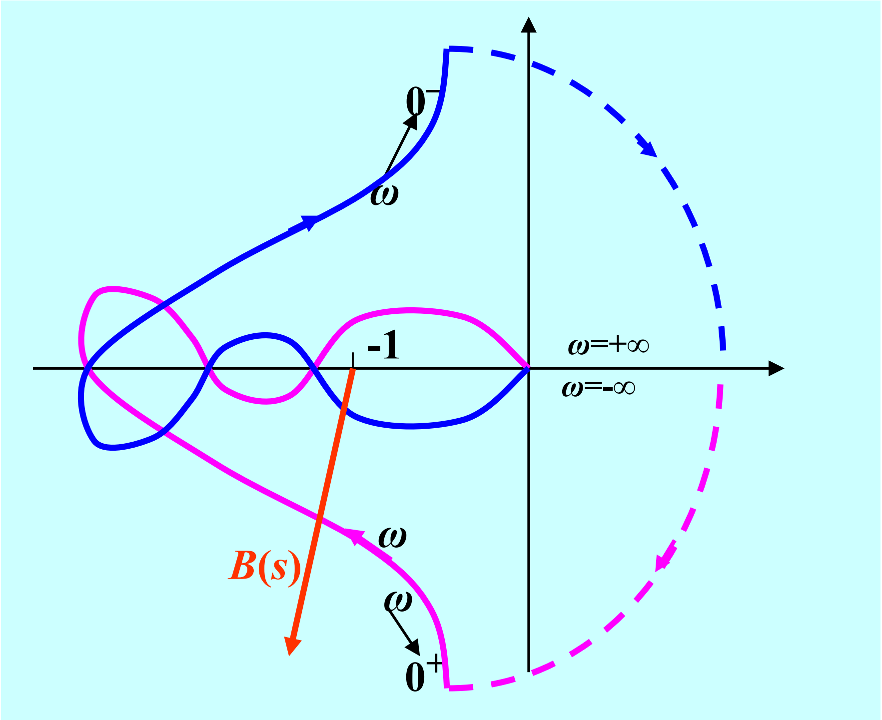
$$G(j\omega_i)=\frac{K}{j\omega_i}G_1(j\omega_i)$$

$20/3=K_2<K<K_3=20$



$P_R=0$, $N=0$, 所以$Z_R=0$，系统稳定

$20=K_3<K$



$P_R=0$, $N=-2$, 所以$Z_R=2$，系统不稳定

应用于时滞系统

时滞系统的传递函数为$G_\tau(s)=e^{-\tau s}$。 则频率响应传递函数为

$$G_\tau(j\omega)=e^{-j\tau\omega}=1\angle(-\tau\omega)$$

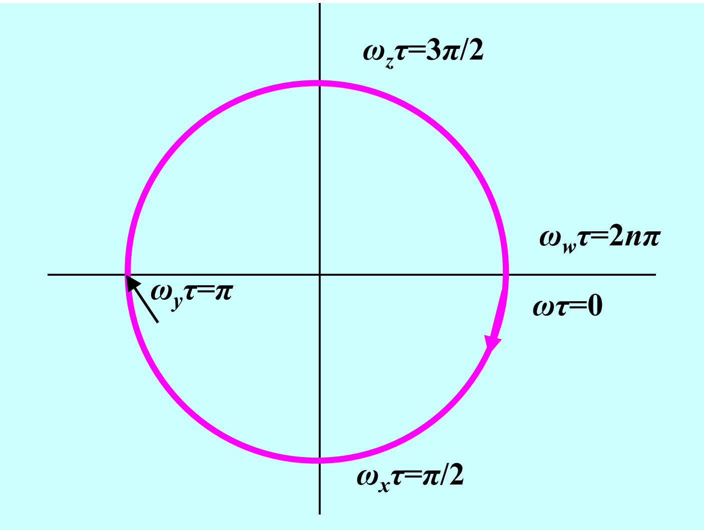
幅值

相位

极坐标图为重复的单位圆

对数幅频曲线Lm是0dB线，相频曲线

的相角随频率减小



应用于时滞系统

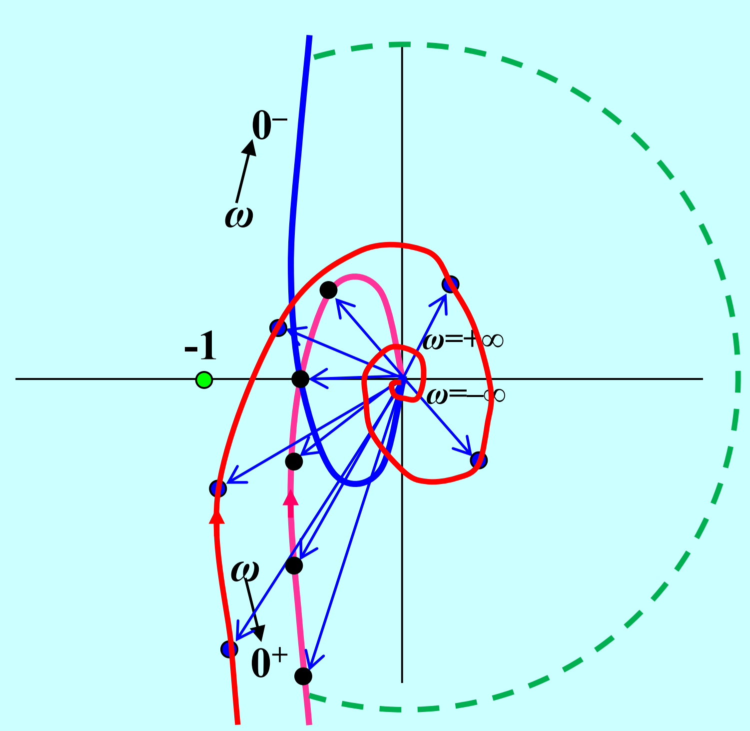
最小相位的开环传递函数

$$G_x(s)H(s)=\frac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

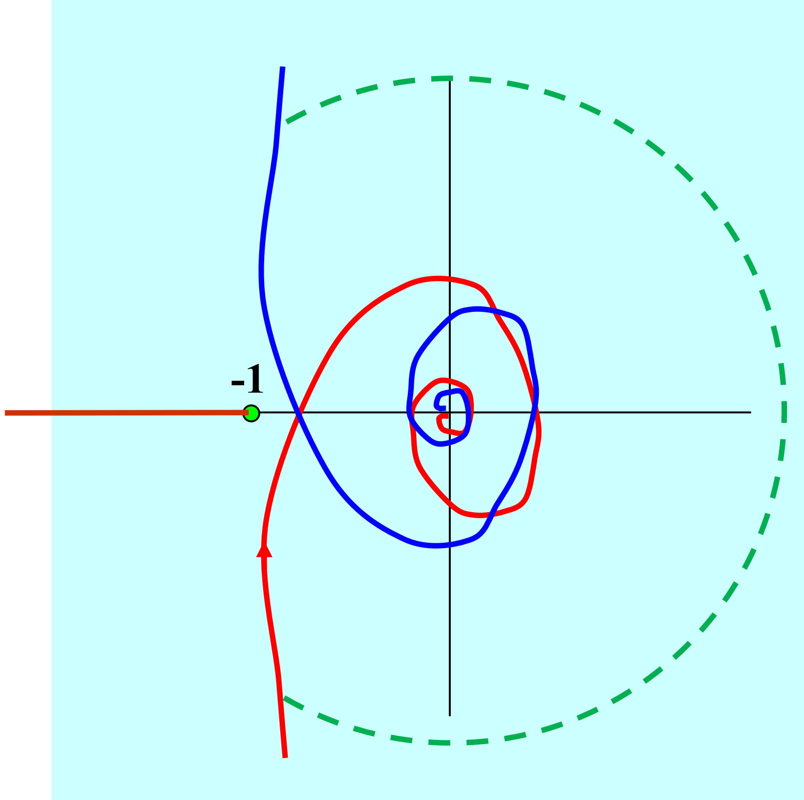
$P_R=0$

加纯滞后

$$G(s)H(s)=\frac{K_1 e^{-\tau s}}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)},\quad P_R=0$$



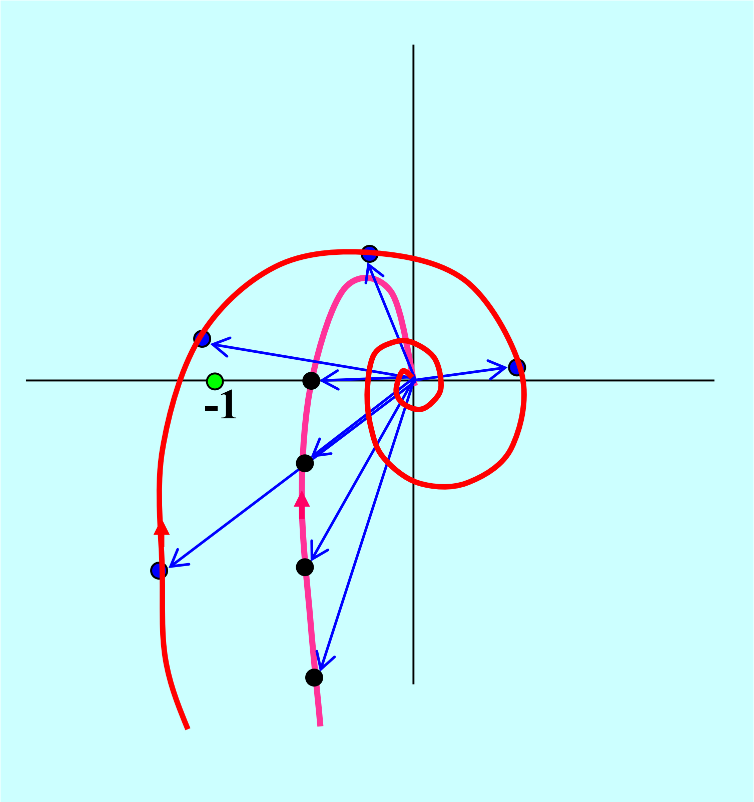
稳定

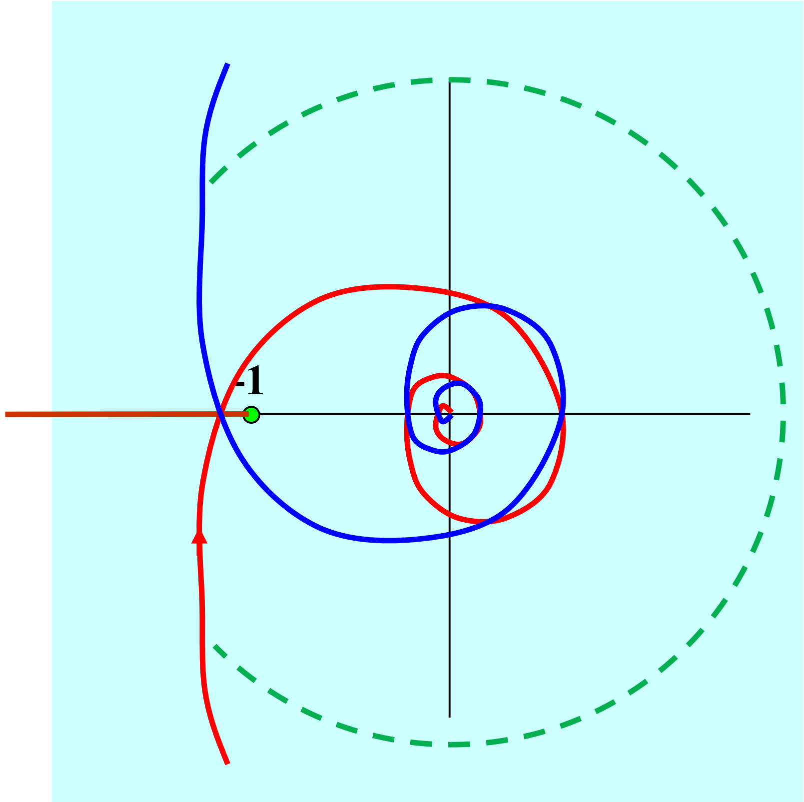


Q_{GH}出现螺旋线，顺时针包围原点无穷多次，但不包围（-1,0）点，闭环系统稳定

应用于时滞系统

增大纯滞后环节时间常数τ





N= -2，闭环系统不稳定

应用于时滞系统

当沿闭合曲线运动时，纯滞后对极坐标图的影响可以归纳为：

1) 当沿着闭合曲线Q的虚轴部分运动时（$0^+<\omega<+\infty$），$G(j\omega)H(j\omega)$在第三象限的极坐标图将顺时针旋转，接近于$-1+j0$点，因此，若滞后时间足够大，极坐标图将包围$-1+j0$点，系统将不稳定。

2) 当 $\omega\to+\infty$，由纯滞后带来的相角将无限增大，当 $|G(j\omega)H(j\omega)|\to 0$，出现螺旋线。

纯滞后降低系统的稳定性

对闭环稳定性，需要重点关注（-1,0）点附近的幅相曲线的情况，在远离（-1,0）点的高频幅相曲线与稳定性关系不大

The End