《信号分析与处理》自测题 3

参考答案

一.

略

二.

（1）解：

$$x(t)=[u(t)-u(t-2)]\cos(5t)=\Pi(\frac{t-1}{2})\cos(5t)$$

已知门函数 $\Pi(\frac{t}{\tau})\leftrightarrow\tau\cdot Sa(\frac{\omega\tau}{2})$，根据傅立叶变换的**时移性质**，有 $\Pi(\frac{t-1}{2})\leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\cdot 2\cdot Sa(\omega)$。

已知 $\cos(5t)\leftrightarrow\pi\left[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)\right]$，由傅立叶变换的**频域卷积特性**，有

$$\begin{aligned}x(t)=\Pi(\frac{t-1}{2})\cos(5t)&\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\cdot 2\cdot Sa(\omega)*\pi\left[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)\right]\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+5)}\cdot Sa(\omega+5)+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-5)}\cdot Sa(\omega-5)\end{aligned}$$

（2）解：$x(t)=\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]\cdot(-\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau})$，于是有

$$\begin{aligned}x'(t)&=\left[\delta(t+\frac{\tau}{2})-\delta(t-\frac{\tau}{2})\right]\cdot(-\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau})+\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]\cdot(-\frac{1}{\tau})\\&=\left[\delta(t+\frac{\tau}{2})\right]+\left[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})\right]\cdot(-\frac{1}{\tau})\\&=\left[\delta(t+\frac{\tau}{2})\right]+\Pi(\frac{t}{\tau})\cdot(-\frac{1}{\tau})\end{aligned}$$

由于

$$x'(t)=\left[\delta(t+\frac{\tau}{2})\right]+\Pi(\frac{t}{\tau})\cdot(-\frac{1}{\tau})\leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}+(-\frac{1}{\tau})\cdot\tau\cdot Sa(\frac{\omega\tau}{2})=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}-Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

由微分特性

$$X(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}-\frac{Sa(\frac{\omega\tau}{2})}{\mathrm{j}\omega}$$

（3）解：由**尺度变换**特性 $x(-2t)\leftrightarrow\frac{1}{2}X(-\frac{\omega}{2})$，由**移位特性**

$$x[-2(t-\frac{5}{2})]=x(-2t+5)\leftrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{2}\omega}X(-\frac{\omega}{2})$$

三.

（1）　解：对差分方程两边进行单边 Z 变换，得 $Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)+\frac{1}{2}z^{-1}X(z)$，即

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}$$

于是 $\frac{H(z)}{z}=\frac{z+\frac{1}{2}}{z(z-\frac{1}{2})}=\frac{k_1}{z}+\frac{k_2}{z-\frac{1}{2}}$， $k_1=z\frac{H(z)}{z}\Big|_{z=0}=-1$， $k_2=(z-\frac{1}{2})\cdot\frac{H(z)}{z}\Big|_{z=\frac{1}{2}}=2$

所以

$$H(z)=-1+\frac{2z}{z-\frac{1}{2}}$$

于是单位脉冲响应为

$h(n)=-\delta(n)+2(\frac{1}{2})^n=-\delta(n)+(2)^{1-n}\quad(n\geq 0)$

（2）　$X(z)=\frac{z}{z-2}$， 于是 $Y(z)=\frac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{z}{z-2}$， $\frac{Y(z)}{z}=\frac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{k_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{k_2}{z-2}$，

可求得 $k_1=-\frac{2}{3}$， $k_2=\frac{5}{3}$。于是 $Y(z)=(-\frac{2}{3})\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+(\frac{5}{3})\frac{z}{z-2}$ 。于是

$y(n)=(-\frac{2}{3})(\frac{1}{2})^n+(\frac{5}{3})2^n\quad(n\geq 0)$

（3）　系统的频率响应为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}+\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}-\frac{1}{2}}$$

（4）　这里 $\Omega_0=\frac{\pi}{2}$，于是

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}+\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0}-\frac{1}{2}}=\frac{\mathrm{j}+\frac{1}{2}}{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}=\angle\mathrm{arctg}(-\frac{4}{3})$$

于是系统的稳态响应为

$$\cos[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}(\frac{4}{3})]$$

（5）　由于极点 $p=\frac{1}{2}$ 在单位圆内，故系统是稳定的。

四.

解：（1）$\{0.125+\mathrm{j}0.06,\ 0,\ 0.125+\mathrm{j}0.3\}$

（2）$X_1(k)=X(k)W_8^{-2k}$，它的 8 点 DFT 为

$$\begin{bmatrix} X_1(0)\\ X_1(1)\\ X_1(2)\\ X_1(3)\\ X_1(4)\\ X_1(5)\\ X_1(6)\\ X_1(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X(0)W_4^0\\ X(1)W_4^{-1}\\ X(2)W_4^{-2}\\ X(3)W_4^{-3}\\ X(4)W_4^0\\ X(5)W_4^{-1}\\ X(6)W_4^{-2}\\ X(7)W_4^{-3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X(0)\cdot 1\\ X(1)\cdot \mathrm{j}\\ X(2)\cdot(-1)\\ X(3)\cdot(-\mathrm{j})\\ X(4)\cdot 1\\ X(5)\cdot \mathrm{j}\\ X(6)\cdot(-1)\\ X(7)\cdot(-\mathrm{j})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.25\\ 0.3+0.125\mathrm{j}\\ 0\\ -0.06-0.125\mathrm{j}\\ 0.5\\ -0.06+0.125\mathrm{j}\\ 0\\ 0.3-0.125\mathrm{j}\end{bmatrix}$$

五.

解：在图中，有

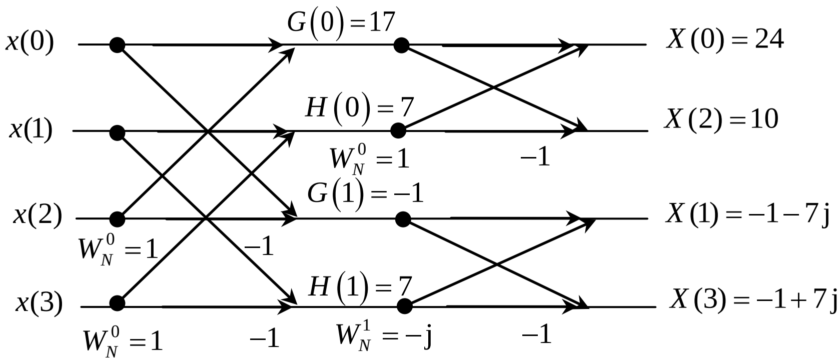
$G(0)=x(0)+W_N^0\cdot x(2)=8+9=17;\qquad G(1)=x(0)-W_N^0\cdot x(2)=8-9=-1$

$H(0)=x(1)+W_N^0\cdot x(3)=7+0=7;\qquad H(1)=x(1)-W_N^0\cdot x(3)=7-0=7$

于是

$X(0)=G(0)+W_N^0\cdot H(0)=17+7=24;\qquad X(2)=G(0)-W_N^0\cdot H(0)=17-7=10$

$X(1)=G(1)+W_N^1\cdot H(1)=-1-7\mathrm{j};\qquad X(3)=G(1)-W_N^1\cdot H(1)=-1+7\mathrm{j}$



六.

解：模拟角频率为 $\omega_c=2\pi f_c=2\pi\cdot 1000=2000\pi\ (\mathrm{rad/s})$，于是得到实际的模拟低通滤波器的系统函数

$$H_a(s)=\frac{2}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+3\left(\frac{s}{\omega_c}\right)+2}=\frac{2\omega_c^2}{s^2+3\omega_c s+2\omega_c^2}=\frac{A_1}{s+2\omega_c}+\frac{A_2}{s+\omega_c}=\frac{-2\omega_c}{s+2\omega_c}+\frac{2\omega_c}{s+\omega_c}$$ 极点为 $p_1=-2\omega_c$、$p_2=-\omega_c$，于是

$$H(z)=\frac{T_s\cdot A_1}{1-e^{p_1T_s}z^{-1}}+\frac{T_s\cdot A_2}{1-e^{p_2T_s}z^{-1}}=\frac{-\pi}{1-e^{-\pi}z^{-1}}+\frac{\pi}{1-e^{-\frac{\pi}{2}}z^{-1}}=\frac{\pi\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-\pi}z^{-1}\right)\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}z^{-1}\right)}$$

保持 $H(z)$ 不变，即保持 $\Omega_c=2\pi f_c/f_s$ 不变，若抽样频率提高 4 倍时，则该低通滤波器的截止频率亦要提高 4 倍，即 $f_c=4\,\mathrm{kHz}$ 。

七.

解：

$$H(\Omega)=\frac{-\frac{1}{16}+e^{j-4\Omega}}{1-\frac{1}{16}e^{j-4\Omega}}=\frac{-\frac{1}{16}+\cos(4\Omega)-j\sin(4\Omega)}{1-\frac{1}{16}\cos(4\Omega)+j\frac{1}{16}\sin(4\Omega)}$$

于是

$$\left|H(\Omega)\right|=\frac{\sqrt{\left[-\frac{1}{16}+\cos(4\Omega)\right]^2+\left[\sin(4\Omega)\right]^2}}{\sqrt{\left[1-\frac{1}{16}\cos(4\Omega)\right]^2+\left[\frac{1}{16}\sin(4\Omega)\right]^2}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{256}+\cos^2(4\Omega)-\frac{1}{8}\cos(4\Omega)+\left[\sin(4\Omega)\right]^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{8}\cos(4\Omega)+\frac{1}{256}}}=1$$

故：该系统是一个全通滤波器。