自动控制理论

Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous -time Control Systems

关键词

- 数学模型， 建模
- 动态系统（单元）
- 微分方程模型，状态空间模型
- 传递函数（Transfer Function）
- 开环传递函数，闭环传递函数
- 方块图（Block Diagram），仿真（模拟）图
- 信号流图（Signal Flow Graph, SFG）
- 梅逊增益公式

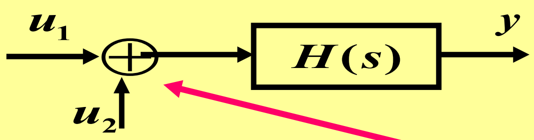
主要内容

- 数学模型的基本概念
- 电路系统的数学模型
- 系统总传递函数
  - 方块图简化
  - 信号流图
- 各种模型间的关系
- 其他系统（机械、液位等）的数学模型
- 非线性系统的线性化以及特殊环节建模

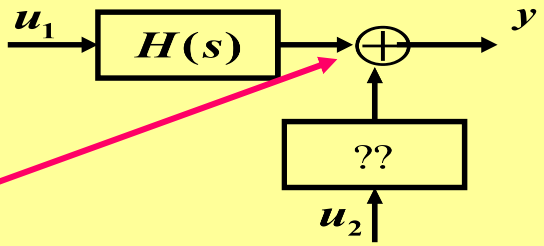
主要内容

- **方块图简化**
  - 简化规则
  - 应用
- **信号流图（Signal flow graph）**
  - 信号流图定义（Flow-Graph definitions）
  - 信号流图代数（Flow-Graph Algebra）
  - 信号流图分析（General Flow-Graph Analysis）
  - 梅逊增益公式（The Mason Gain Rule）

方块图简化规则（1）：综合点后移



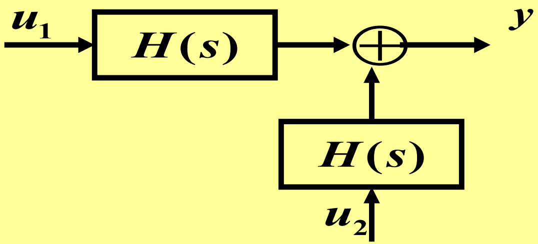
综合点（相加点）



$$
\begin{aligned}
Y(s) &= H(s)(U_1(s)+U_2(s)) \\
&= H(s)U_1(s)+H(s)U_2(s)
\end{aligned}
$$

$$Y(s) = H(s)U_1(s) + ??\cdot U_2(s)$$

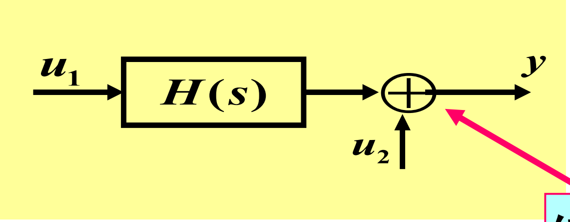
$$?? = H(s)$$

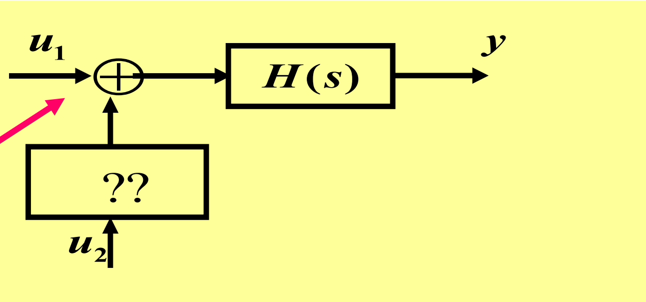


原则：移动前后信息不变！

$$\boldsymbol{Y(s) = H(s)U_1(s) + H(s)U_2(s)}$$

方块图简化规则（2）：综合点前移





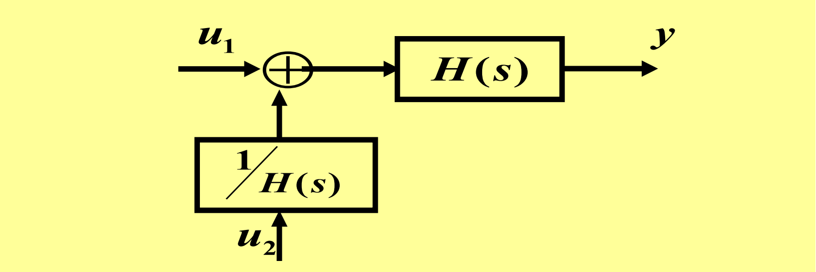
综合点（相加点）

$$Y(s)=H(s)U_1(s)+U_2(s)$$

$$Y(s)=H(s)\{U_1(s)+??\cdot U_2(s)\}$$

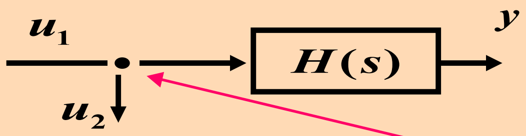
$$??\cdot H(s)U_2(s)=U_2(s)$$

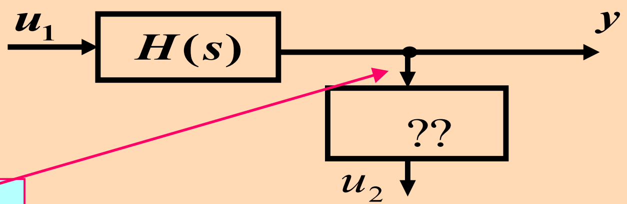
$$??=H(s)^{-1}$$



$$Y(s)=H(s)U_1(s)+H(s)\left\{\frac{1}{H(s)}U_2(s)\right\}$$

方块图简化规则（3）：引出点后移





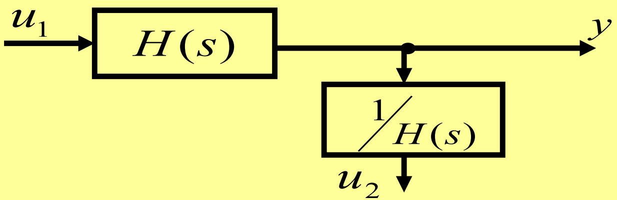
引出点(分支点)

$$Y(s)=H(s)U_1(s);U_2(s)=U_1(s)$$

$$Y(s)=H(s)U_1(s);U_2(s)=??\cdot Y(s)$$

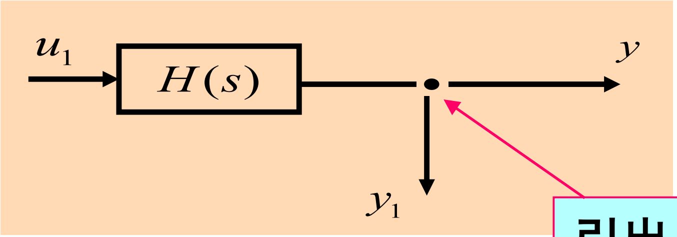
$$U_2(s)=??\cdot H(s)U_1(s)=U_1(s)$$

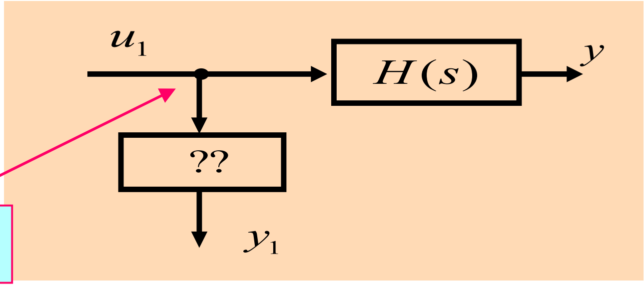
$$??=H(s)^{-1}$$



$$Y(s)=H(s)U_1(s);U_2(s)=U_1(s)$$

方块图简化规则（4）：引出点前移





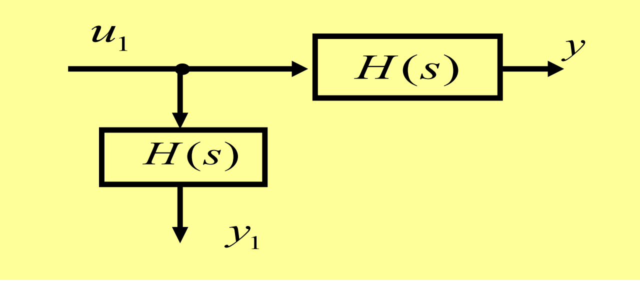
引出点(分支点)

$$Y(s)=H(s)U_1(s);Y_1(s)=Y(s)$$

$$Y(s)=H(s)U_1(s);U_1(s)=H(s)^{-1}Y(s)$$

$$Y_1(s)=U_1(s)\cdot ??=Y(s)$$

$$??=H(s)$$

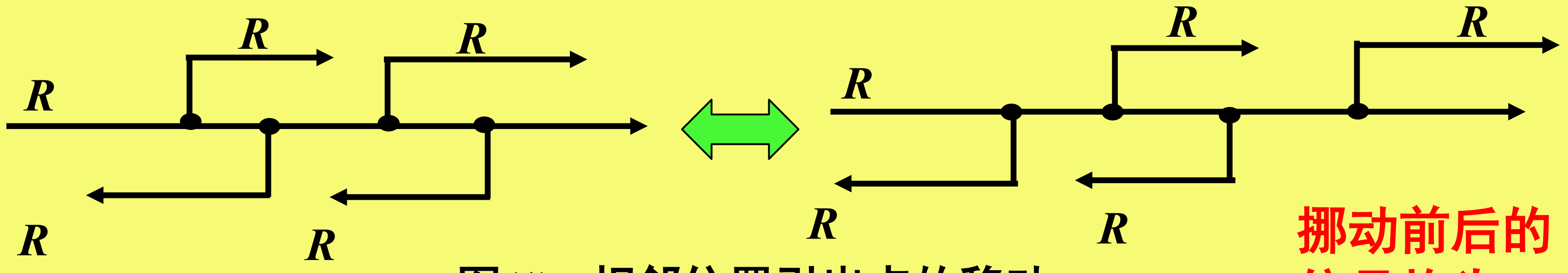


$$Y(s)=H(s)U_1(s);Y_1(s)=Y(s)$$

注意：引出点与综合点之间的区别！

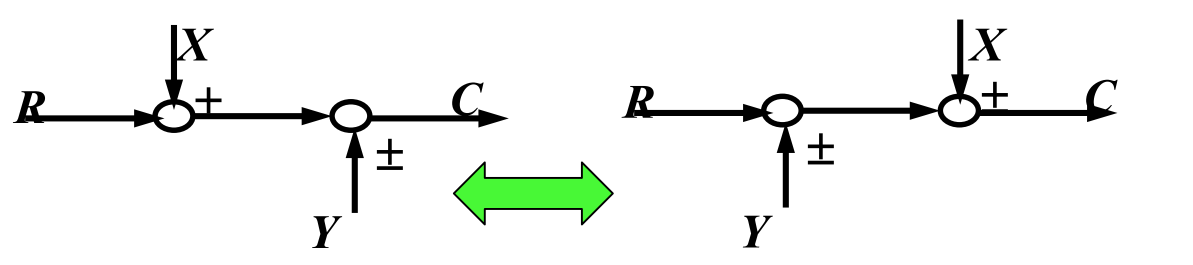
方块图简化规则（5）：相邻引出点与相邻综合点

- 若干个相邻引出点或综合点之间相互交换位置，不会改变信号性质。



图(1)　相邻位置引出点的移动

挪动前后的信号均为*R*



(a)原始结构图　　(b) 等效结构图

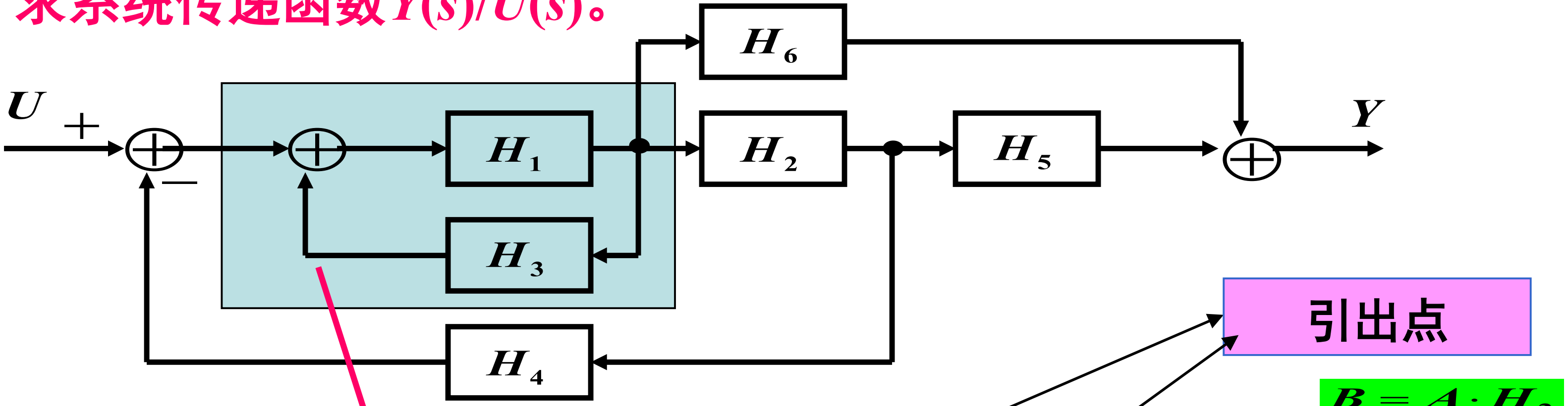
挪动前后的总输出信号

$C = R \pm X \pm Y$

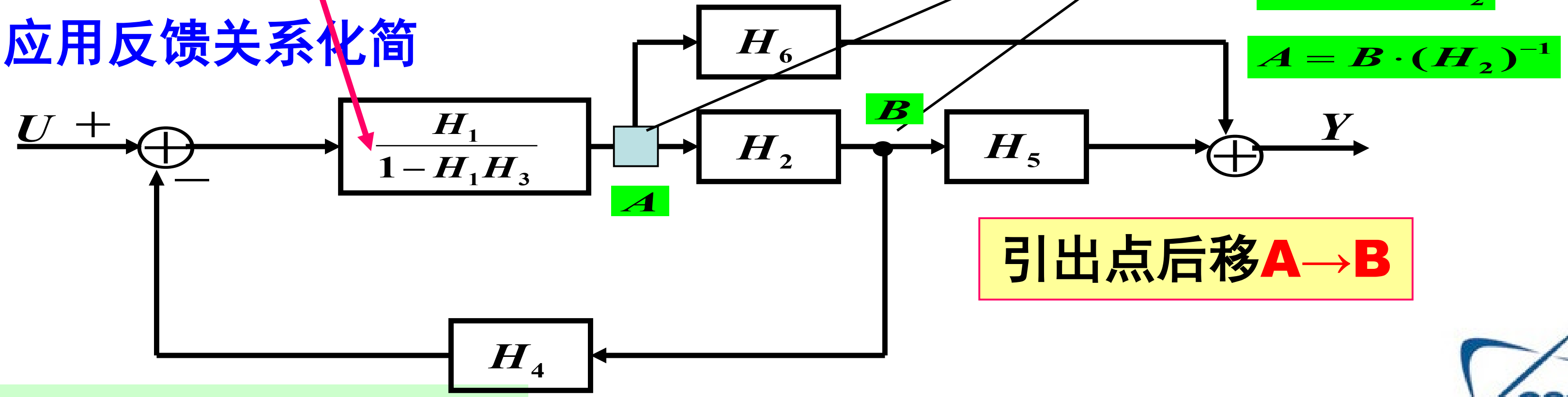
图(2)　相邻位置综合点的移动

由方块图求系统传递函数（例1）

例1 求系统传递函数$Y(s)/U(s)$。



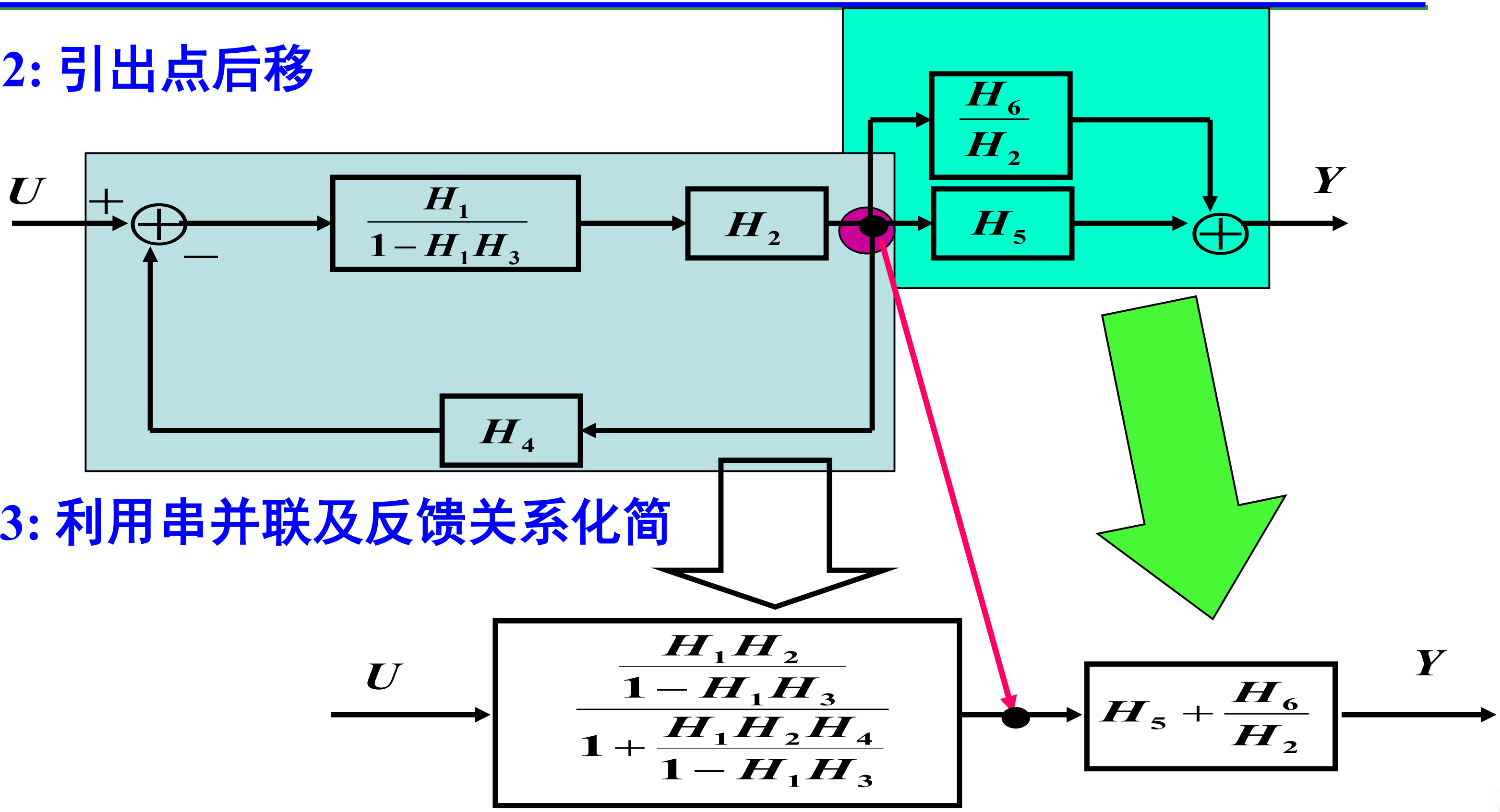
步骤1: 应用反馈关系化简



由方块图求系统传递函数（例1）

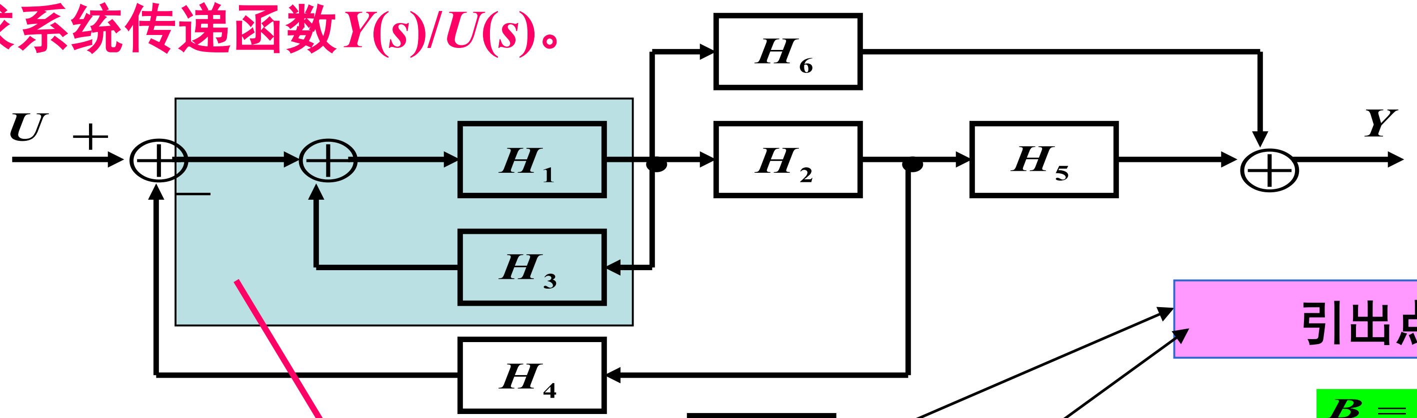
步骤2: 引出点后移

步骤3: 利用串并联及反馈关系化简

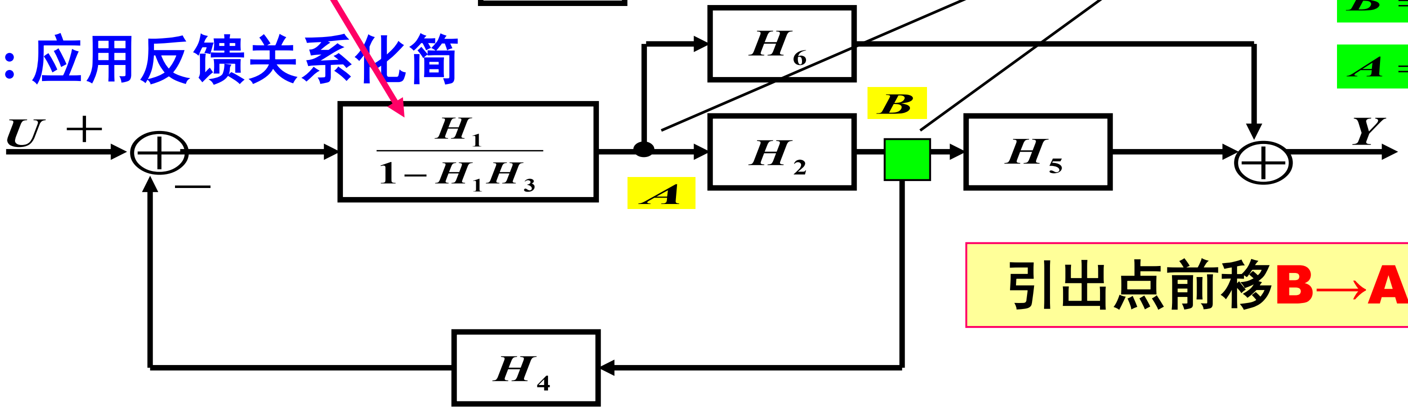


由方块图求系统传递函数（例1）

例1’ 求系统传递函数$Y(s)/U(s)$。



步骤1: 应用反馈关系化简



引出点

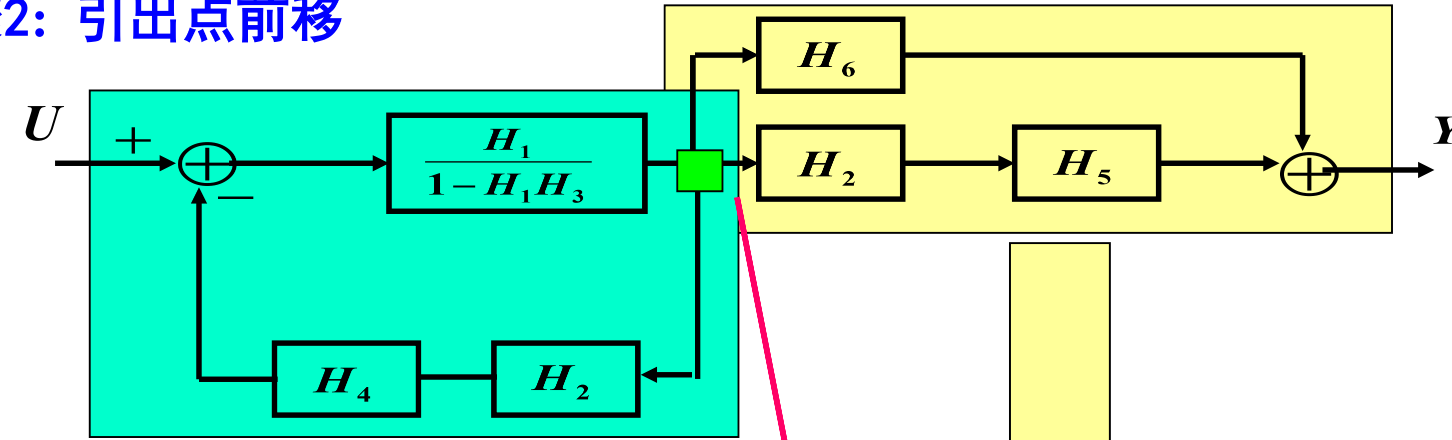
$B = A \cdot H_2$

$A = B \cdot (H_2)^{-1}$

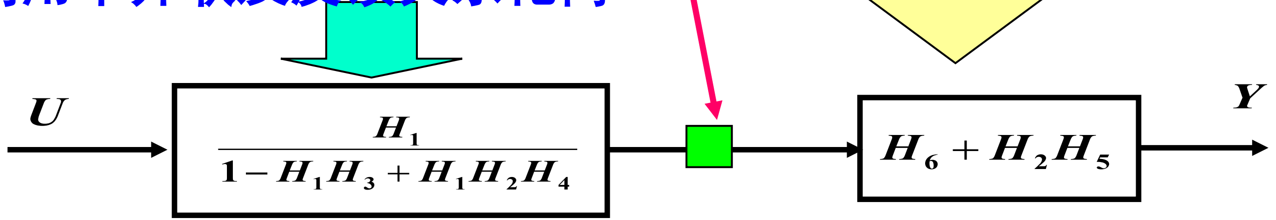
引出点前移B→A

由方块图求系统传递函数（例1）

步骤2：引出点前移



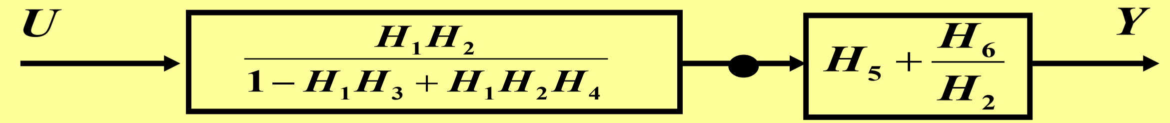
步骤3：利用串并联及反馈关系化简



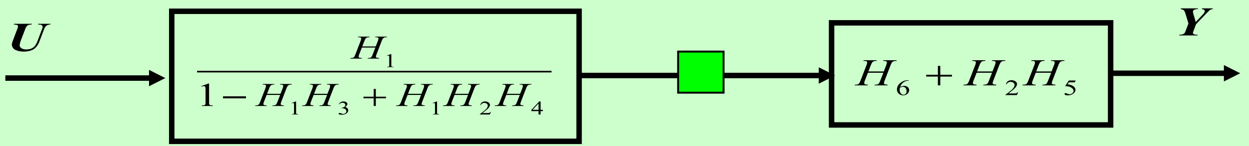
由方块图求系统传递函数（例1）

步骤4：根据串联关系得到整体系统的传递函数

引出点后移



引出点前移



$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{H_1H_2}{1-H_1H_3}}{1+\dfrac{H_1H_2H_4}{1-H_1H_3}}\left(H_5+\frac{H_6}{H_2}\right)=\frac{H_1H_2H_5+H_1H_6}{1-H_1H_3+H_1H_2H_4}$$

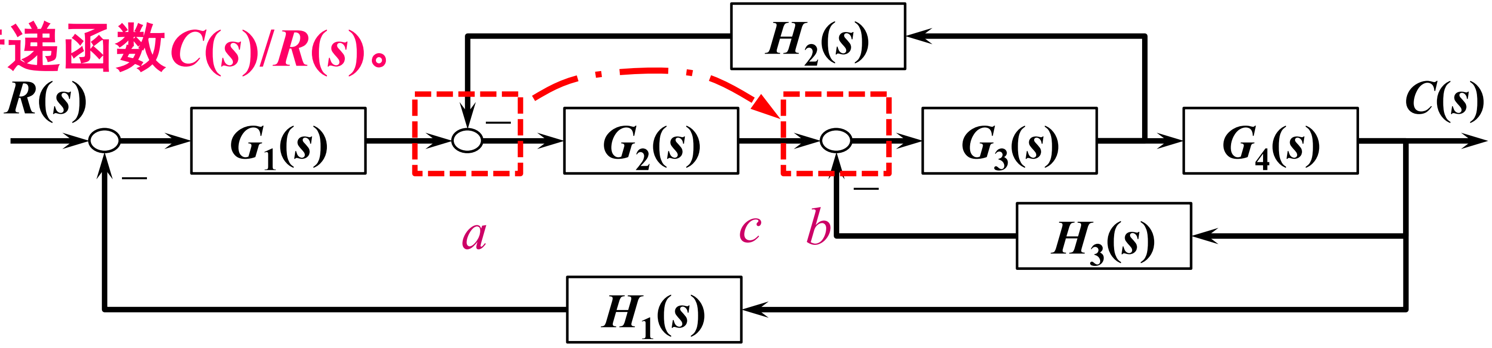
简化结构图求系统总传递函数的一般步骤

1. **确定输入量与输出量**，如果作用在系统上的输入量有多个（分别作用在系统的不同部位），则必须分别对每个输入量逐个进行结构变换，求得各自的传递函数。对于有多个输出量的情况，也应分别变换。
2. 若结构图中有交叉关系，应运用**等效变换法则**，首先将交叉消除，化为无交叉的多回路结构。
3. 对多回路结构，可**由里向外进行变换**（或按照要求进行方块图的简化），直至变换为一个等效的方框，即得到所求的传递函数。

- 问题：若是多变量系统，能否仍然用传递函数表示？

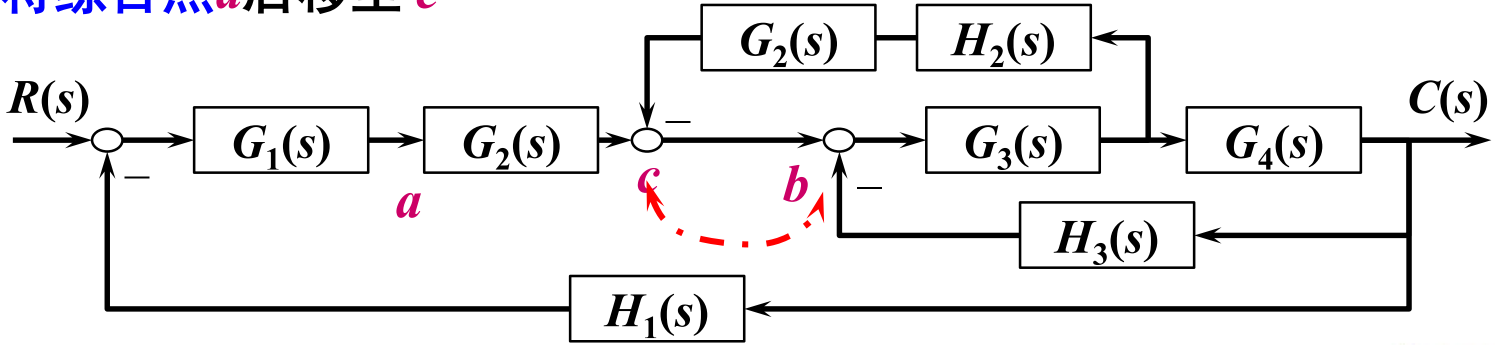
由方块图求系统传递函数（例2）

例2 求系统传递函数$C(s)/R(s)$。



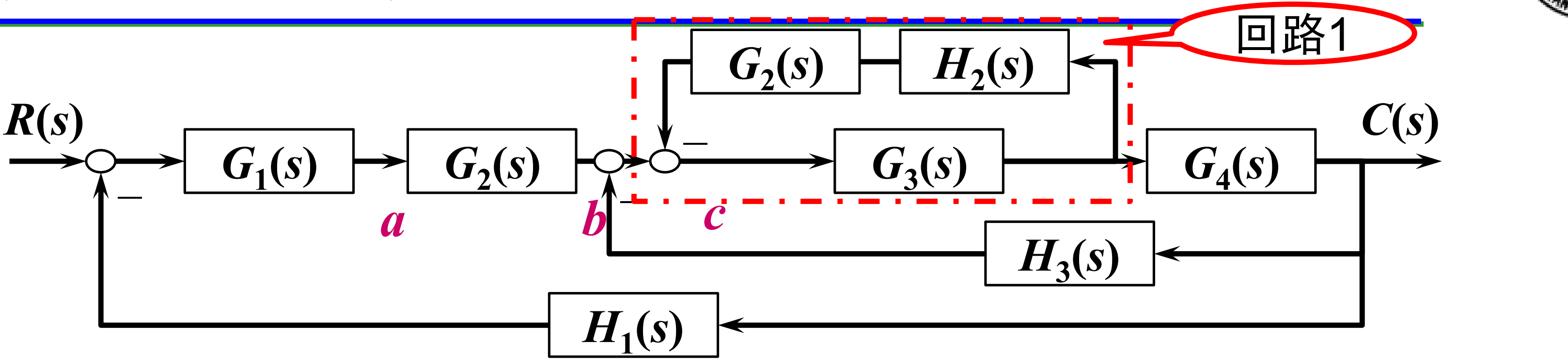
前向通路有2个综合点：a 和 b

步骤1: (1) 将综合点a后移至 c



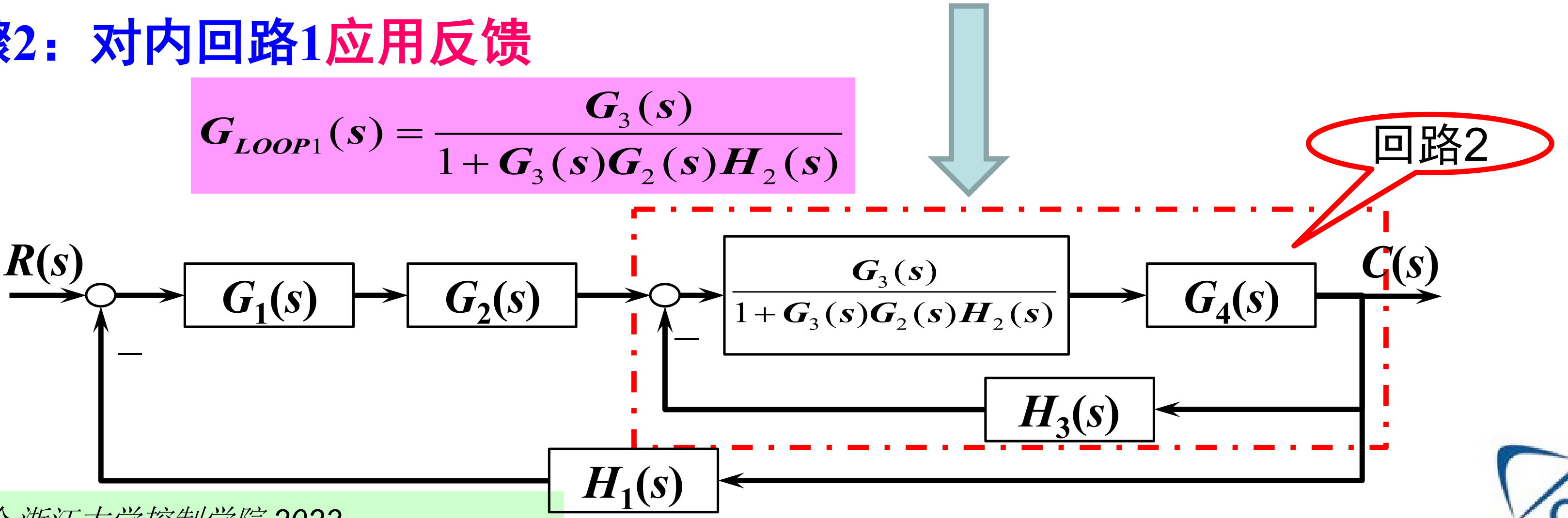
(2) 交换综合点c 和综合点b的位置

由方块图求系统传递函数（例2）

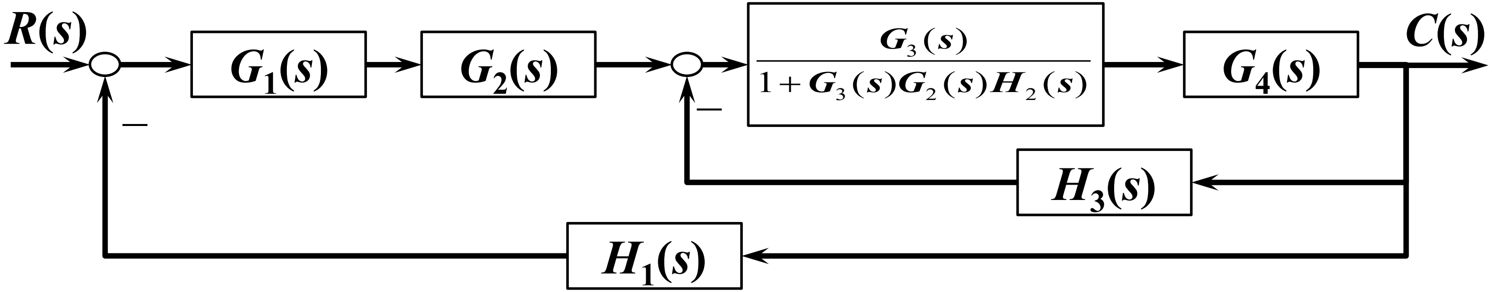


步骤2：对内回路1应用反馈

$$G_{LOOP1}(s)=\frac{G_3(s)}{1+G_3(s)G_2(s)H_2(s)}$$

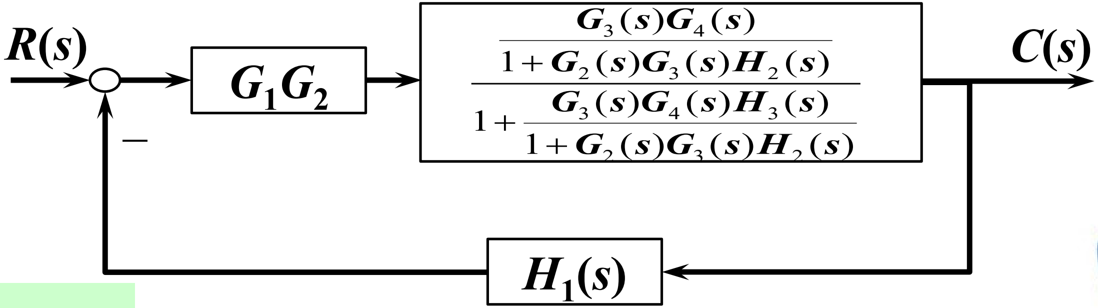


由方块图求系统传递函数（例2）

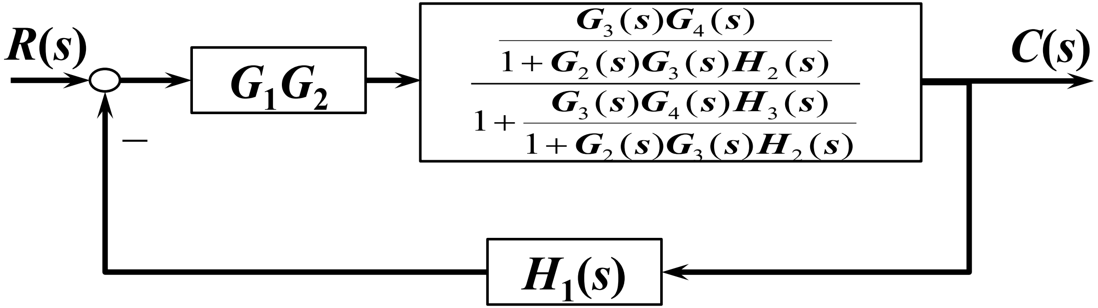


步骤3：对于回路2再次应用反馈

$$G_{LOOP2}(s)=\frac{\dfrac{G_3(s)G_4(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_2(s)}}{1+\dfrac{G_3(s)G_4(s)H_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_2(s)}}$$



由方块图求系统传递函数（例2）

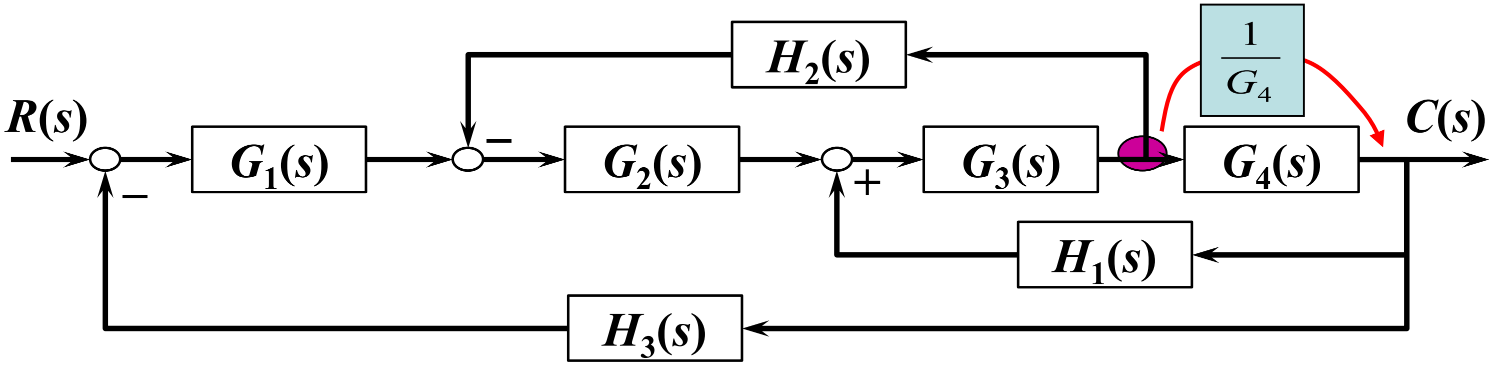


$$G_B(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3+G_1G_2G_3G_4H_1}$$

➢ 有没有其他简化方法？结果会一致吗？

由方块图求系统传递函数（例3）

例3 求系统传递函数$C(s)/R(s)$。

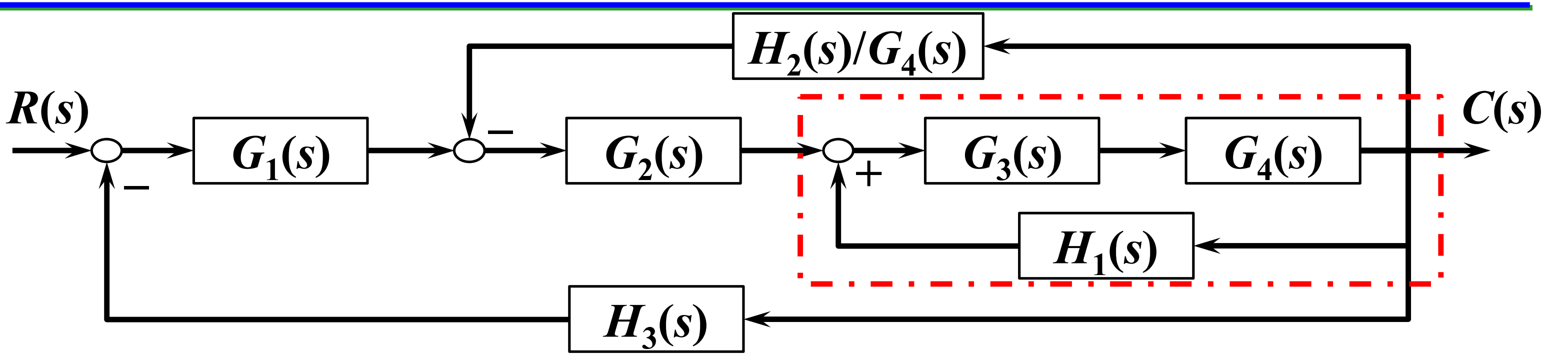


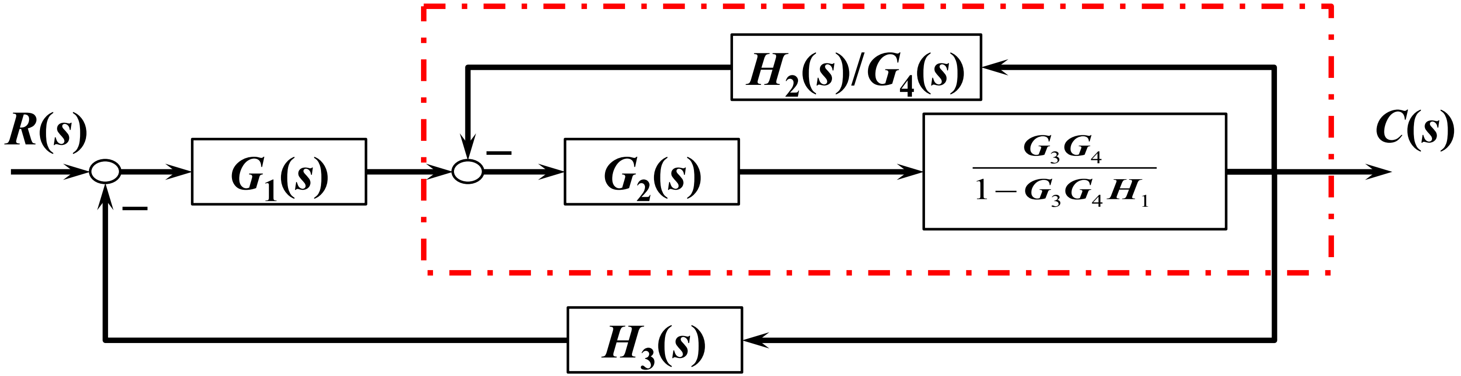
步骤1：令点 ● 后移

步骤2：由内回路至外回路逐一计算

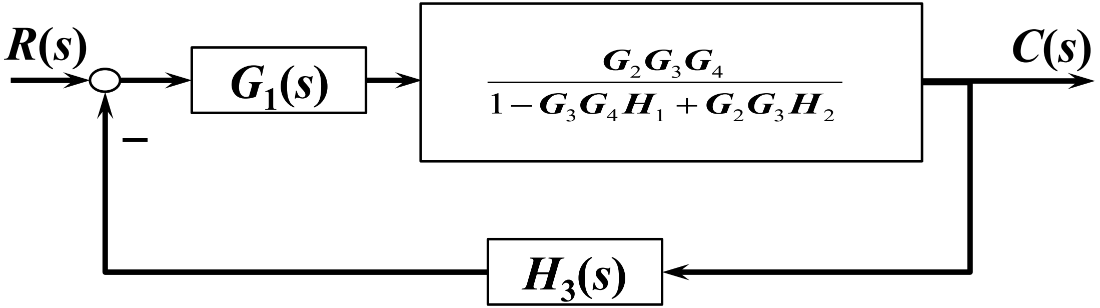
$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3G_4H_3}$$

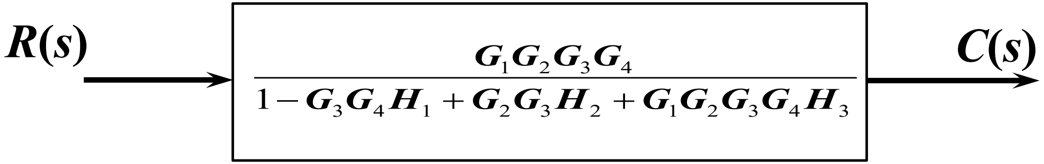
由方块图求系统传递函数（例3）





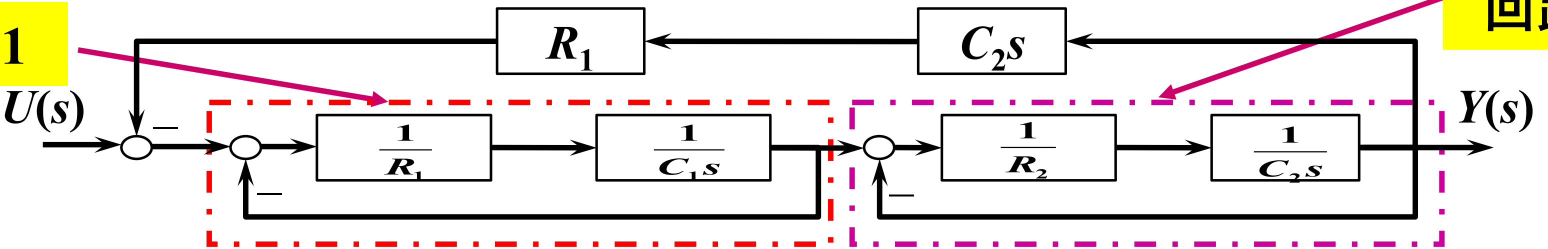
由方块图求系统传递函数（例3）





由方块图求系统传递函数（例4）

例4 求系统闭环传递函数$Y(s)/U(s)$。



分别对2个子回路应用反馈，可以分别得到它们的传递函数

回路1

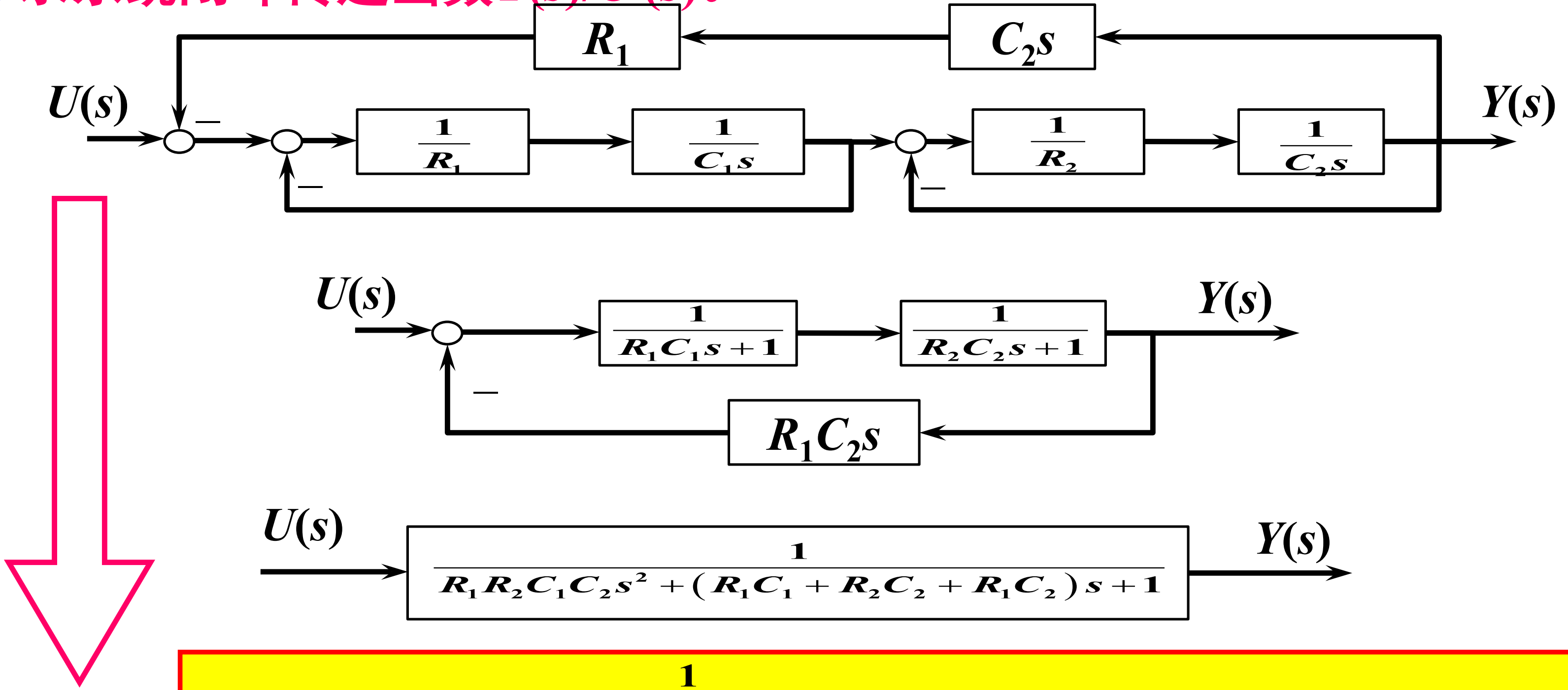
$$G_{LOOP1}(s)=\frac{\frac{1}{R_1C_1s}}{1+\frac{1}{R_1C_1s}}=\frac{1}{1+R_1C_1s}$$

回路2

$$G_{LOOP2}(s)=\frac{\frac{1}{R_2C_2s}}{1+\frac{1}{R_2C_2s}}=\frac{1}{1+R_2C_2s}$$

由方块图求系统传递函数（例4）

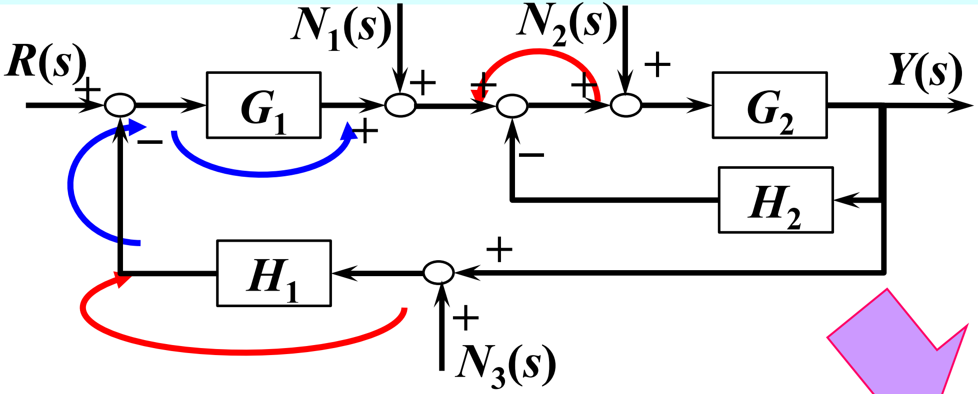
例4 求系统闭环传递函数$Y(s)/U(s)$。



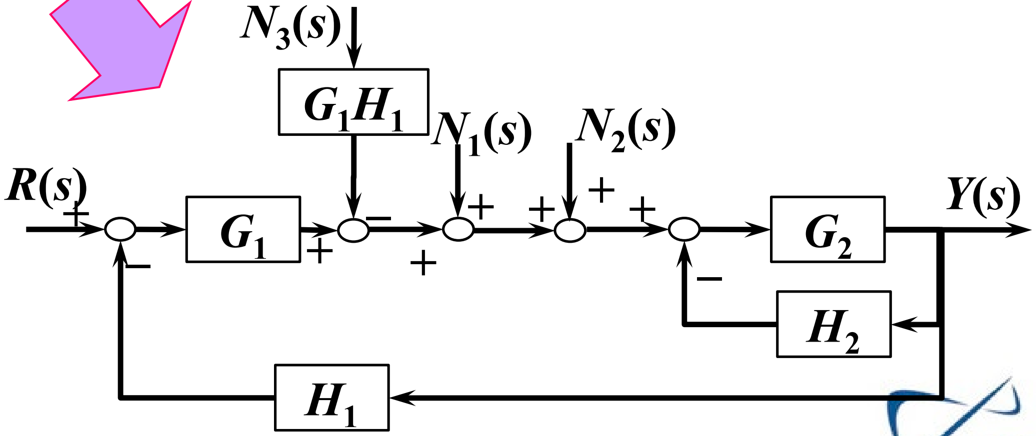
$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}}{1+\dfrac{R_1C_2s}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}}=\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

由方块图求系统传递函数（例5）

例5 求如图所示系统输出的表达式。



解：移动相加点：N_2前移，N_3越过H_1后与第一个相加点交换位置，继续越过G_1后移



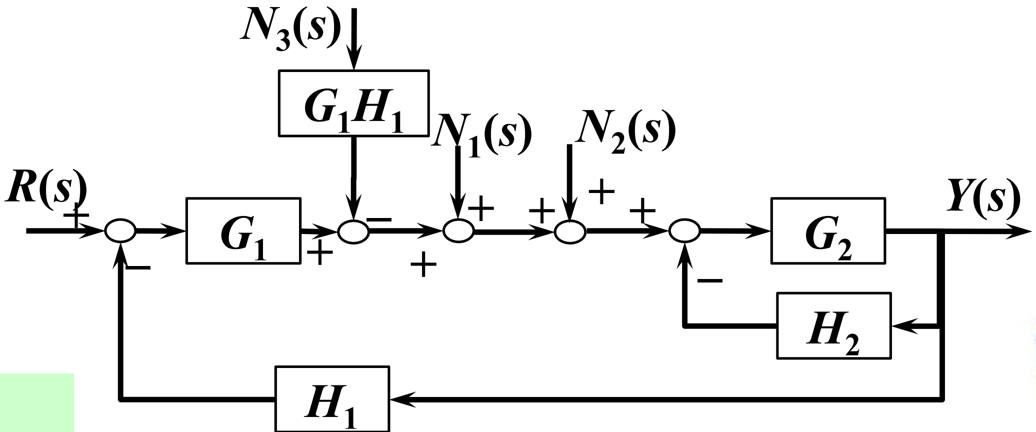
由方块图求系统传递函数（例5）

例5 求如图所示系统输出的表达式。

解：利用线性系统的叠加原理，逐一计算各个输入对输出Y的的影响

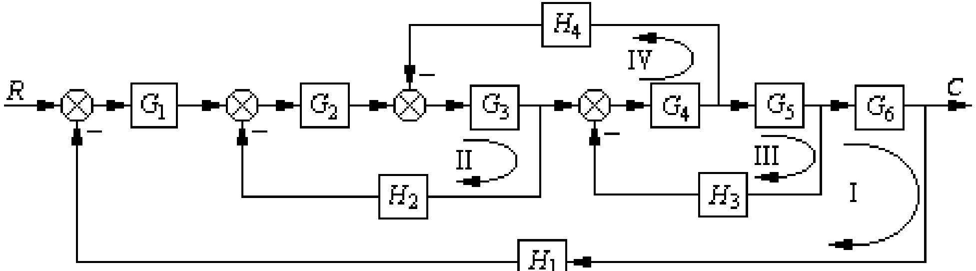
$$Y(s)=\frac{\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}[N_1(s)+N_2(s)]-G_1H_1\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}\cdot N_3(s)+G_1\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}R(s)}{1+G_1H_1\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}}$$

$$=\frac{G_2N_1(s)+G_2N_2(s)-G_1H_1G_2N_3(s)+G_1G_2R(s)}{1+G_2H_2+G_1H_1G_2}$$

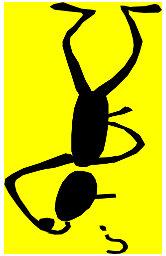


问题

❖ 对于复杂系统，利用方块图简化方法求取系统整体传递函数会变得非常困难（如下图所示系统）



(a) 结构图



??????

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4G_5G_6}{1+G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1+G_2G_3H_2+G_4G_5H_3+G_3G_4H_4+G_2G_3H_2G_4G_5H_3}$$

The End