5.2 令A为$m \times n$矩阵，且P为$m \times m$正交矩阵。证明PA与A的奇异值相同。矩阵PA与矩阵A的左、右奇异向量有何关系？

解：设A的奇异值分解为$A = U\Sigma V^T$，其中$U \in R^{m\times m}$、$V \in R^{n\times n}$为正交矩阵。

因为$P \in R^{m\times m}$为正交矩阵，故矩阵$PU \in R^{m\times m}$也为正交矩阵（$PU(PU)^T = PUU^TP^T = I$）。

根据矩阵奇异值分解的定义可知，PA的奇异值分解为$PA = PU\Sigma V^T$。

观察知，矩阵PA与A的奇异值相同，右奇异向量（V的列向量v_i）相同。矩阵PA的左奇异向量为PU的列向量，矩阵A的左奇异向量为U的列向量u_i。