第八章 状态空间模型分析与设计

吴俊

junwuapc@zju.edu.cn

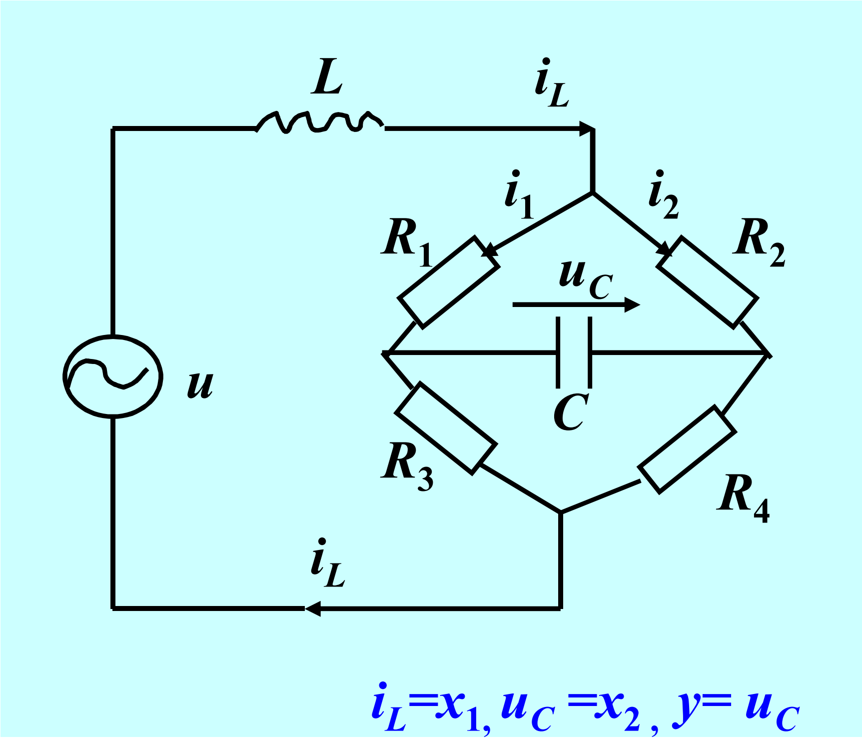
内容

- 回顾与简介
- 状态空间模型及求解
- 能控性和能观性
- 线性变换和标准型
- **SISO** 系统状态反馈
- 状态反馈: 稳态误差分析
- **SISO** 系统状态观测器
- ……………

能控性和能观性

1. 物理概念

Ex.1: 考虑如图所示电路



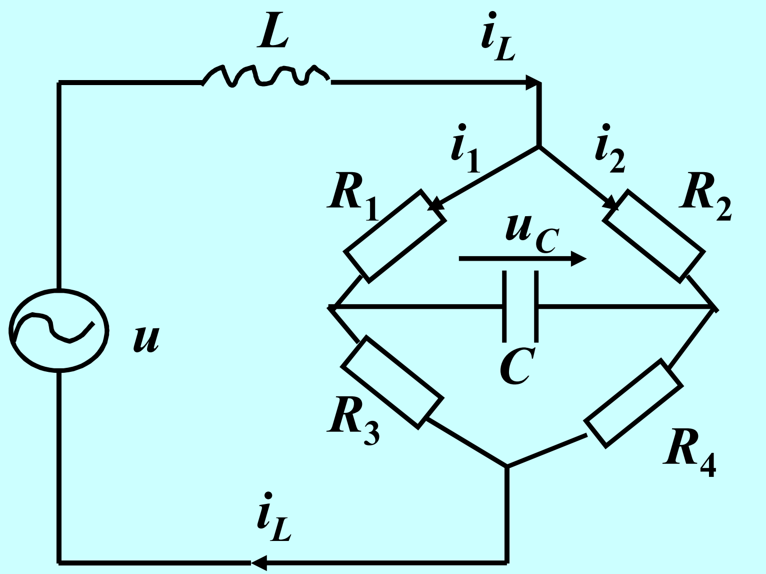
(1) 若 $R_1R_4 \neq R_2R_3$

- 输入 u 控制所有的状态变量，也就是说选择 u 使得对于任意初始时刻 t_0，在有限的时间内，将状态变量由每个初始状态 $x(t_0)$ 转移到任意的终止状态 $x(t_f)$, $t_f > t_0$. 因此完全能控.

- 因为 $y=u_C$, 并且 u_C 与 i_L 有关，因此系统完全能观.

1. 物理概念

Ex.1: 考虑如图所示电路



$i_L=x_1, u_C=x_2, y=u_C$

(2) 若 $R_1R_4 = R_2R_3$

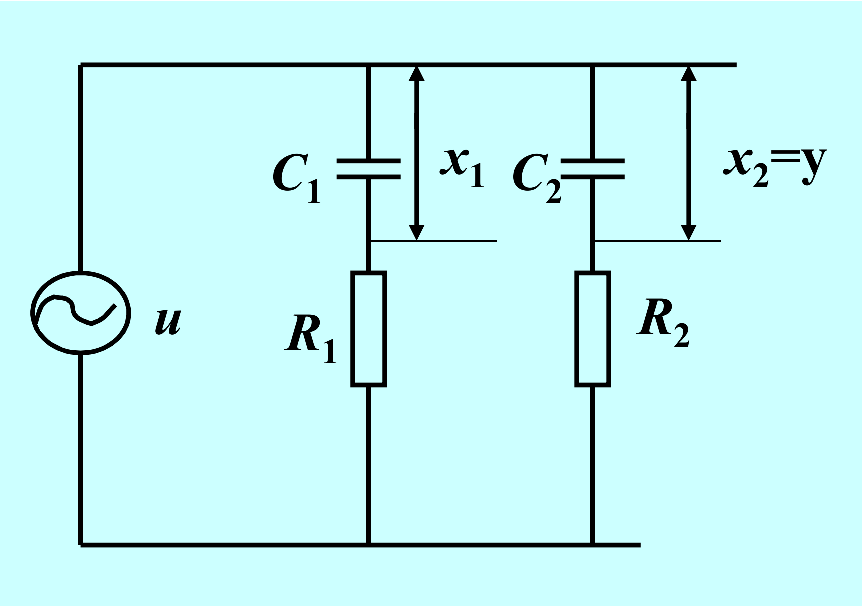
输入 u 仅控制状态变量 i_L, 这就意味着 u 不能来控制 u_C (在任意时刻u_C=0). 因此系统不完全能控.

i_L 也不能由输出 y 来推算出来, 系统不完全能观.

能控性和能观性

1. 物理概念

Ex. 2 考虑如图所示电路系统



假设 $R_1 = R_2 \quad C_1 = C_2$

输入 u 能在有限时间内将$\mathbf{x_1}$控制到任意值

输入 u 能在有限时间内将$\mathbf{x_2}$控制到任意值

但若 $x_1(t_0) = x_2(t_0)$

输入 u仅仅能够使

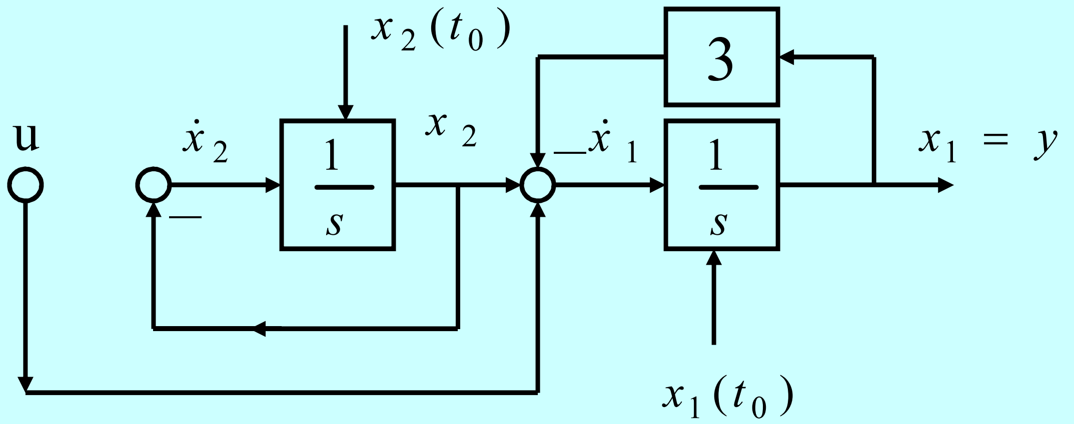
$$x_1(t) = x_2(t)$$

因此输入不能控制状态变量 x_1(t) 和 x_2(t) 到不同的值. 因此，系统是不完全能控.

能控性和能观性

1. 物理概念

Ex. 3 考虑如图所示方框图



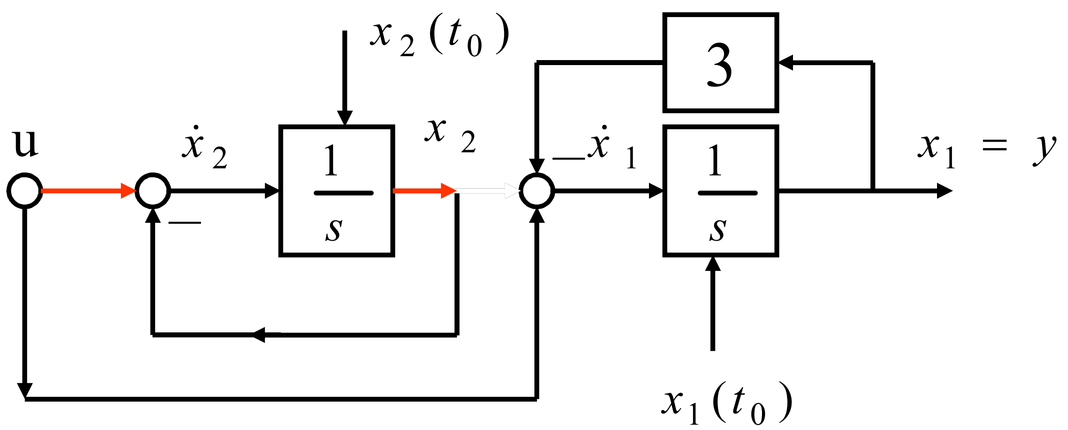
从图可以看出, 输入 u 只对状态变量 x_1 有影响, 这就意味着 x_2 与 u 没有关系. 因此, 系统不完全能控.

尽管 $y=x_1$, 与 x_2 没有直接关系, 但是注意到 x_2 影响 x_1, 因此系统是完全能观.

能控性和能观性

1. 物理概念

Ex. 3 考虑如图所示方框图



当系统改为红线所示系统时.

输入 u 不仅影响状态 x_1, 而且影响状态 x_2, 这就是说系统完全能控.

很显然 $y=x_1$， 与状态 x_2 没有关系, 因此系统不完全能观.

能控性和能观性

2. 定义

对于线性时不变连续系统(A,B,C,D)，如果对任意初始状态向量$x(0)\in R^n$ 和任意终端状态向量$x_f\in R^n$,存在$t_f\in(0,\infty)$和控制作用$u(t)$,使得$x(t_f)=x_f$,则称系统(A,B,C,D)完全能控。

在能控性中，重要的是存在$u(t)$可使初始状态向量转移到目标状态向量，对状态向量转移的状态轨迹并不加以关注和规定。

完全能控的系统能在状态空间中任意两点间转移的性质，对于达到控制的目的非常重要。

系统的能控性仅取决于状态方程中的系统矩阵A 和控制矩阵B，因此，在讨论能控性问题时，可用(A,B)表示系统。

能控性和能观性

2. 定义

对于线性时不变连续系统(A,B,C,D)，如果存在$t_f \in (0,\infty)$，根据$[0,t_f]$间的输出$y(t)$和控制作用$u(t)$能确定出初始状态向量$x(0)$，则称系统(A,B,C,D)完全能观。

确定出x(0)，就可由

$$x(t_f)=e^{At_f}x(0)+\int_0^{t_f}e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

确定出$x(t_f)$。完全能观的系统能即时得到状态向量在状态空间中的位置，这一性质对于达到控制的目的也非常重要。

能观性定义中对$u(t)$无特别限制，$u(t)$所引起的输出是可计算的，不妨设$u(t)=0$，因此，在讨论能观性问题时，可用(A,C)表示系统。

能控性和能观性

3. 能控性

如何来判定一个系统是 完全能控的?

对于 $$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

设 $t_0=0$, 以及 终态向量 $x(t_f)=0$

$$0=e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}(0)+\int_0^{t_f}e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

或

$$\boldsymbol{x}(0)_{n\times 1}=-\int_0^{t_f}[e^{-A\tau}]_{n\times n}B_{n\times r}\boldsymbol{u}(\tau)_{r\times 1}d\tau$$

??—关键!?

若系统完全能控，则此方程对任意的x(0)有解，即可找到 u 使得任意的x(0)在有限的时间内到达原点

3. 能控性

凯莱—哈密顿定理：若n阶矩阵A的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots a_1\lambda+a_0$

则：$f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots a_1A+a_0I=0$

推论1：矩阵A的m次幂(m>=n)可表示为A的n-1阶多项式 $A^m=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k A^k \qquad m\ge n$

当$m=n$时，成立$A^n=-a_{n-1}A^{n-1}-\cdots-a_1A-a_0I$

假设$m=i\ge n$时成立，即$A^i=\sum_{k=0}^{n-1}b_k A^k$

$$m=i+1\text{时, 有}\quad A^{i+1}=A(b_{n-1}A^{n-1}+\cdots+b_1A+b_0I)$$

$$=b_{n-1}A^n+\cdots+b_1A^2+b_0A$$

$$=b_{n-1}(-a_{n-1}A^{n-1}-\cdots-a_1A-a_0I)+\cdots+b_1A^2+b_0A=\sum_{k=0}^{n-1}c_kA^k$$

推论2：矩阵指数$e^{-A\tau}$可表示为A的$n-1$阶多项式

$$e^{-A\tau}=I-A\tau+\frac{A^2\tau^2}{2!}-\frac{A^3\tau^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k(\tau)A^k$$

能控

3. 能

对于矩阵Y,下列说法等价

1) $\operatorname{rank} Y = r$

2) 在Y的所有列向量中，最多可找出r个线性无关（独立）的向量

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau} B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

线性方程组$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = -x(0)$有解的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B & -x(0) \end{bmatrix}$$

$$= -\sum_{k=0} A^k B \int_0^{t_f} \gamma_k(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

记$\beta_k = \int_0^{t_f} \gamma_k(\tau)u(\tau)d\tau$，则$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B\beta_k = -\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$

$\forall x(0) \in R^n$都有$\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$满足上面方程组的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

能控性和可观性

3. 能控性

能控性条件

秩判据：(A,B)完全能控的充要条件是能控性矩阵$M_C=\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$满足$\mathrm{rank} M_C = n$

PBH秩判据I：(A,B)完全能控的充要条件是对于A的任一特征值λ，均有$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} = n$

PBH秩判据II：(A,B)完全能控的充要条件是：$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n, \forall s \in C$

PBH秩向量判据：(A,B)完全能控的充要条件是A不存在与B的所有列相正交的非零左特征向量，即对A的任一特征值λ，

$$\begin{cases} p^T A = \lambda p^T \\ p^T B = 0 \end{cases} \qquad p \in R^n$$

只有零解

3. 能控性：举例

Example 系统 $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

是否完全能控

Solution:

$$\mathrm{Rank\ M_C}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}2&1&3&2&5&4\\1&1&2&2&4&4\\-1&-1&-2&-2&-4&-4\end{bmatrix}=2<3$$

系统不完全能控.

能控性和能观性

3. 能控性:举例

能控标准型是否完全能控？

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

用PBH秩判据II

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A & b \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s+a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}=n$$

完全能控

能控性和能观性

4. 能观性

能观性条件

秩判据：(A,C)完全能观的充要条件是能观性矩阵

$$M_O=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}^T \text{满足} \operatorname{rank} M_O = n$$

PBH秩判据I：(A,C)完全能观的充要条件是对于A的任一特征值λ，均有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

PBH秩判据II：(A,C)完全能观的充要条件是对任意复数s,有$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n$

PBH秩向量判据：(A,C)完全能观的充要条件是A不存在与C的所有行相正交的特征向量，即对A的任一特征值λ,$\begin{cases} Ap=\lambda p \\ Cp=0 \end{cases}$ $\quad p\in R^n$只有零解

4. 能观性：举例

Example 8-3-6 系统表示为

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\quad B\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}4&5&1\end{bmatrix}$$

判断: 系统是否完全能控和完全能观.

Solution:

$$\text{Rank } \mathrm{M_C}=\text{Rank}\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-6\\1&-6&25\end{bmatrix}=3$$

$$\text{Rank } \mathrm{M_O}=\text{Rank}\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}4&5&1\\-6&-7&-1\\6&5&-1\end{bmatrix}=2$$

因此系统完全能控、不完全能观.

能控性和能观性

4. 能观性:举例

能观标准型是否完全能观?

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

用PBH秩判据II

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sI-A\\ c\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}s & 0 & \cdots & 0 & a_0\\ -1 & s & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & s+a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}=n$$

完全能观

Thanks!