春季学期实验安排	实验	周一班（89人）	周四班（92人）
	信号的采样与恢复	4.2（周五） MA1:10:00-12:00 MA2:12:00-14:00 MA3:14:00-16:00 MA4:16:00-18:00 MA5:18:00-20:00	4.10（周六） TA1:10:00-12:00 TA2:12:00-14:00 TA3:14:00-16:00 TA4:16:00-18:00 TA5:18:00-20:00
	调制与解调	4.11（周日） MB1:10:00-12:00 MB2:12:00-14:00 MB3:14:00-16:00 MB4:16:00-18:00 MB5:18:00-20:00	4.17（周日） TB1:10:00-12:00 TB2:12:00-14:00 TB3:14:00-16:00 TB4:16:00-18:00 TB5:18:00-20:00

- **周一班研究生助教：陈聪**
- **周四班研究生助教：陆文彪**

4月26日（周一）补4月5日（周一）课程。

第三章 离散信号的分析

浙江大学　电气工程学院

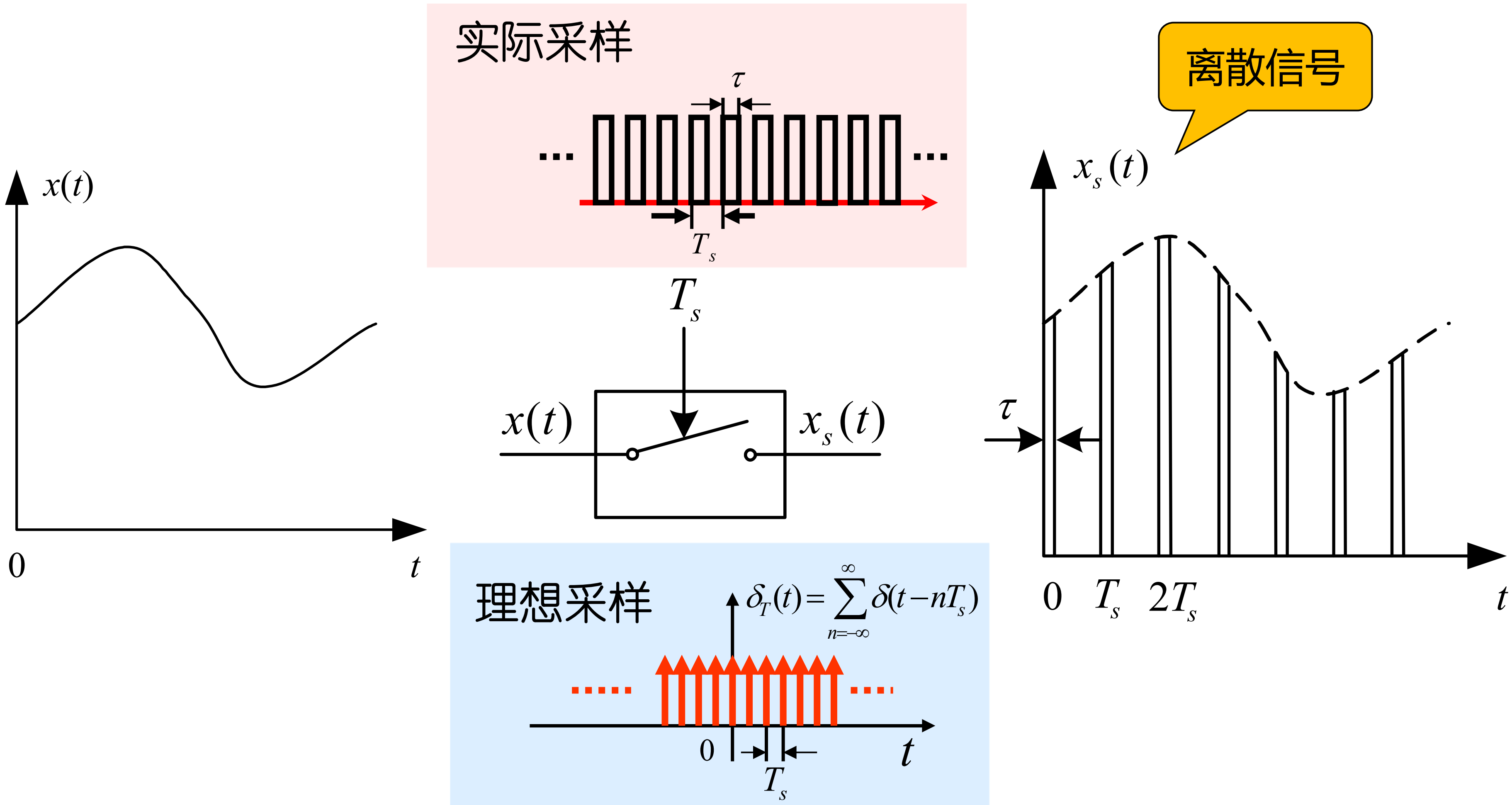
杨欢

yanghuan@zju.edu.cn

第一节 离散信号的时域描述和分析

- 信号的抽样和恢复
- 抽样定理
- 离散信号的描述
- 离散信号的时域运算

连续信号的离散化



$x(t)$
0
t
实际采样
τ
T_s
T_s
$x(t)$
$x_s(t)$
理想采样
$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$
0
t
T_s
离散信号
$x_s(t)$
τ
0
T_s
$2T_s$
t

连续信号的离散化

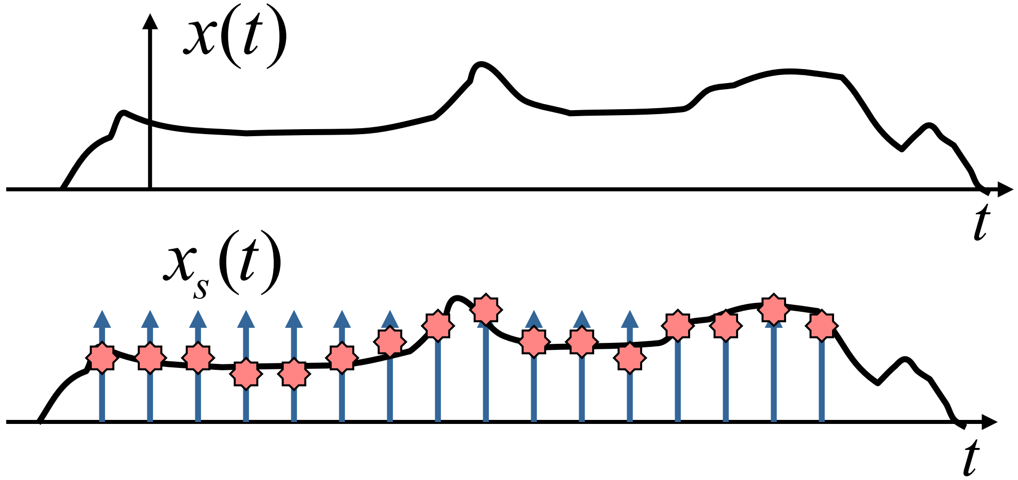
- 连续信号 $x(t)$ 经过一个被称为采样开关的装置，该开关周期性地开闭，其中开闭周期为T_s，每次闭合时间为τ，$\tau << T_s$。这样，在采样开关的输出端得到的是一串时间上离散的脉冲信号 $x_s(t)$

- 考虑 T_s 是一个定值的情况，即均匀抽样，称T_s为采样周期，其倒数 $f_s=1/T_s$ 为采样频率，或$\omega_s=2\pi f_s=2\pi/T_s$为采样角频率。

连续信号的离散化

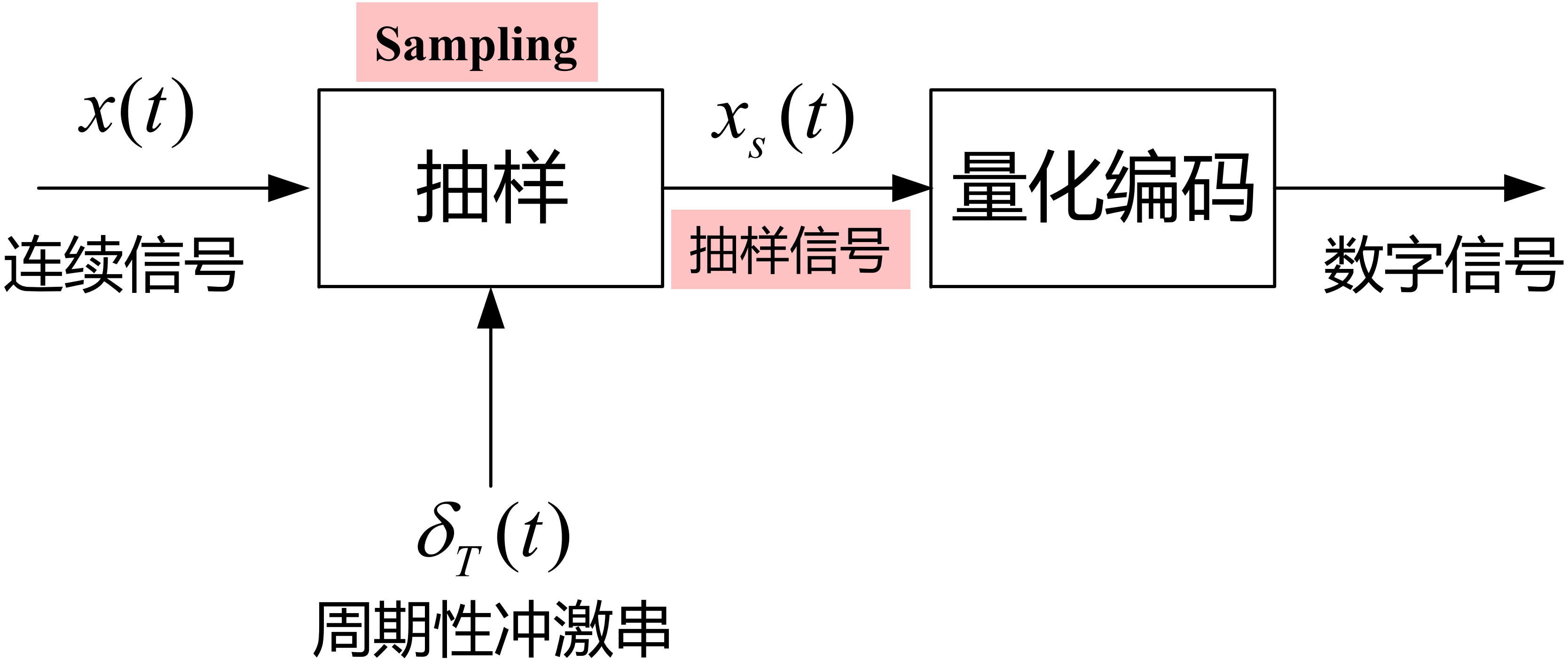
- 理想化情况（$\tau << T_s$，可认为$\tau \to 0$），即冲激抽样

$$x_s(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$$



注意 $x_s(t)$ 依然是一系列的冲激函数

连续信号的抽样模型



两个需要探讨的问题

（1）抽样得到的信号 $x_s(t)$ 在频域上有什么特性，它与原连续信号 $x(t)$ 的频域特性有什么联系？

（2）连续信号被抽样后，它是否保留了原信号的全部信息，或者说，从抽样的信号 $x_s(t)$ 能否无失真的恢复原连续信号？

采样信号的频域分析

- 设连续信号$x(t)$的傅里叶变换为$X(\omega)$，抽样后信号$x_s(t)$的傅里叶变换为$x_s(\omega)$，已知**周期性冲激串**$\delta_T(t)$ 的傅里叶变换 $P(\omega)$ 为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\rightarrow\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

- 由傅里叶变换的**频域卷积定理**

$$X_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)$$

代入$P(\omega)$

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

信号在时域被抽样后，它的频谱$X_s(\omega)$ 是连续信号频谱$X(\omega)$的形状以抽样频率为间隔周期性地重复得到。

周期性冲激串 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换

- 解：冲激串可表示为傅立叶级数形式

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta_n e^{jn\omega_s t}$$

$$\Delta_{\mathrm{n}}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta_T(t)e^{-jn\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)e^{-jn\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jn\omega t}dt=\frac{1}{T}$$

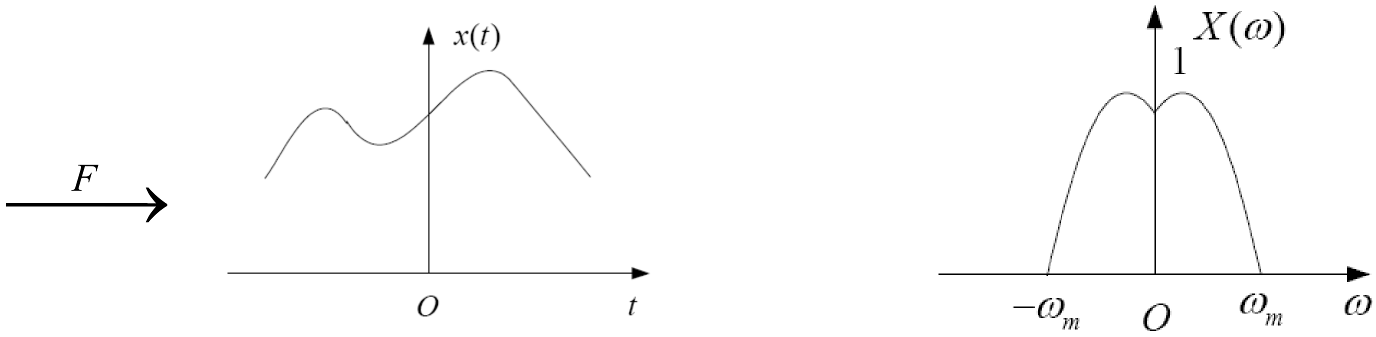
$$e^{jn\omega_0 t}\xrightarrow{F}2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$$

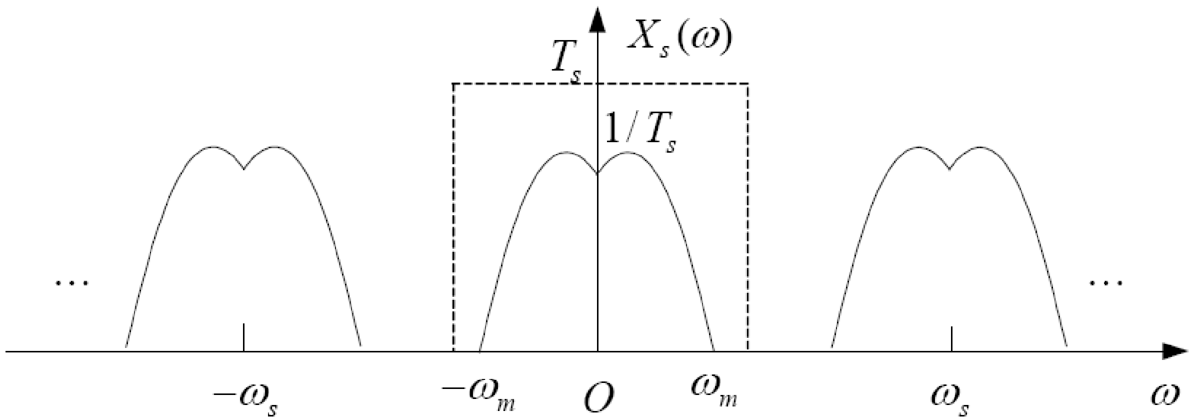
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

因此， $P(\omega)=\omega_s$

采样信号的频域分析

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$





结论

- 连续信号经理想抽样后频谱发生了两个变化：
  - 频谱发生了周期延拓，即将原连续信号的频谱$X(\omega)$分别延拓到以$\pm\omega_s$，$\pm 2\omega_s$ ……为中心的频谱，其中ω_s为采样角频率。
  - 频谱的幅度乘上了因子$1/T_s$，其中T_s为采样周期。

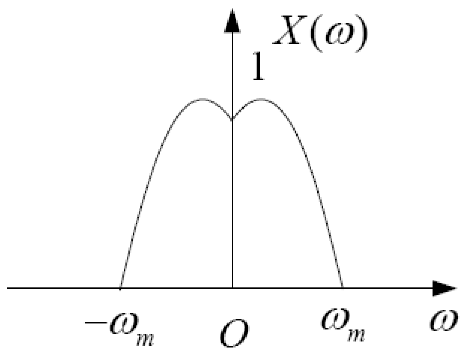
两个需要深入探讨的问题：

（1）抽样得到的信号$x_s(t)$在频域上有什么特性，它与原连续信号$x(t)$的频域特性有什么联系？

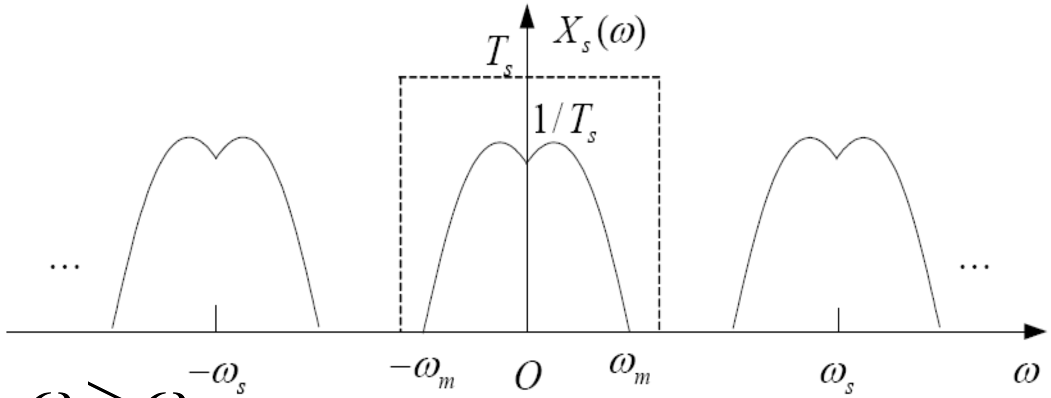
（2）连续信号被抽样后，它是否保留了原信号的全部信息，或者说，从抽样的信号$x_s(t)$能否无失真的恢复原连续信号$x(t)$？

时域采样定理

从抽样信号$x_s(t)$中能否无失真地恢复原连续信号$x(t)$?



(a) 连续信号$x(t)$及其频谱



$\omega \geq \omega_m$

(b) 连续信号$x_s(t)$及其频谱

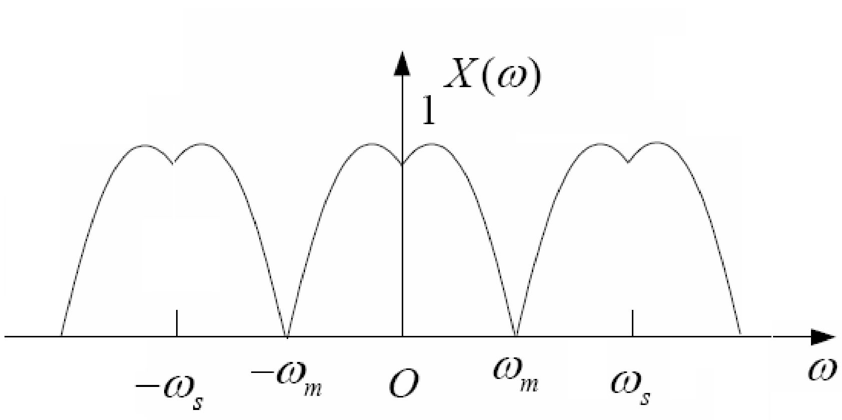
低通滤波

$\boxed{\omega_s \geq 2\omega_m}$

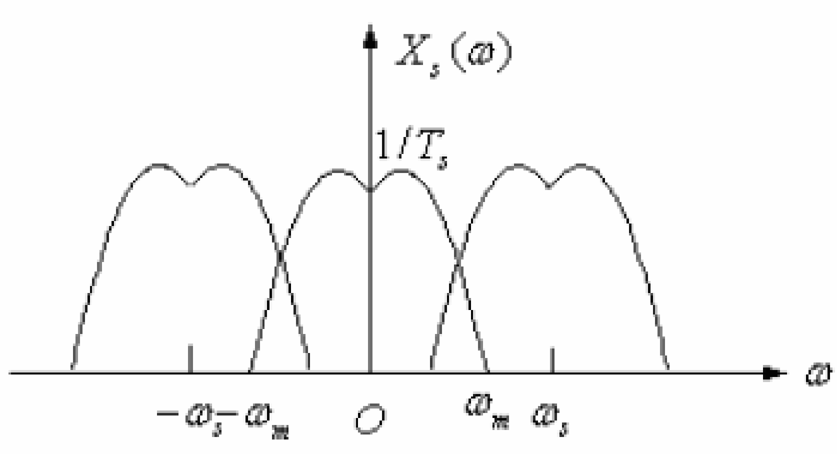
采样频率至少为原连续信号所含最高频率成分的 2 倍时，这时就能够无失真地从抽样信号中恢复原连续信号。

时域采样定理

$\omega_s = 2\omega_m$



$\omega_s < 2\omega_m$



$\omega_s \leq 2\omega_m$时抽样信号及其频谱

频谱混叠现象，施以理想低通滤波后不能得到与 $X(\omega)$ 完全一样的频谱，在时域也就不能无失真地恢复原连续信号 $x(t)$。

时域采样定理

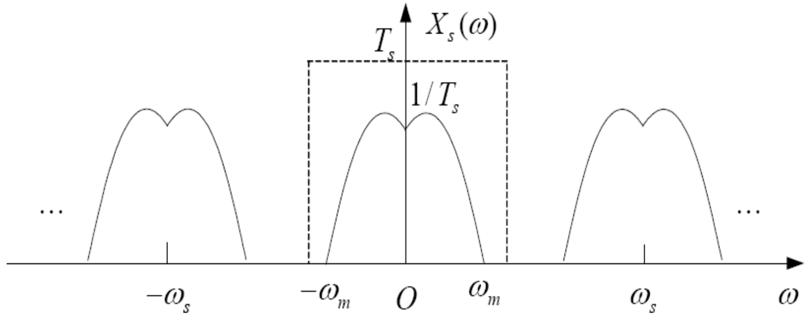
一个频率有限信号 $x(t)$， 如果频谱只占据了 $-\omega_m \to +\omega_m$ 的范围，则信号$x(t)$可以用等间隔的抽样值来唯一地表示。而抽样间隔不大于 $\frac{1}{2f_m}$ （其中 $\omega_m = 2\pi f_m$），或者说最低抽样频率为 $2f_m$。

奈奎斯特频率： $\boxed{\omega_s = 2\omega_m}$

时域采样定理

由抽样信号恢复原连续信号

$$G(\omega)=\begin{cases} T_s & |\omega|\le \omega_s/2 \\ 0 & |\omega|>\omega_s/2 \end{cases}$$



(b) 连续信号$x_s(t)$及其频谱

原信号的频谱$X(\omega)$从$X_s(\omega)$中完整地提取出来

$$\boxed{X(\omega)=X_s(\omega)G(\omega)}$$

根据傅里叶时域卷积性质

$$\boxed{x(t)=x_s(t)*g(t)}$$

时域采样定理

$$\boxed{x(t) = x_s(t) * g(t)}$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \qquad g(t) = Sa(\frac{\omega_s}{2}t)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) * Sa(\frac{\omega_s}{2}t)$$

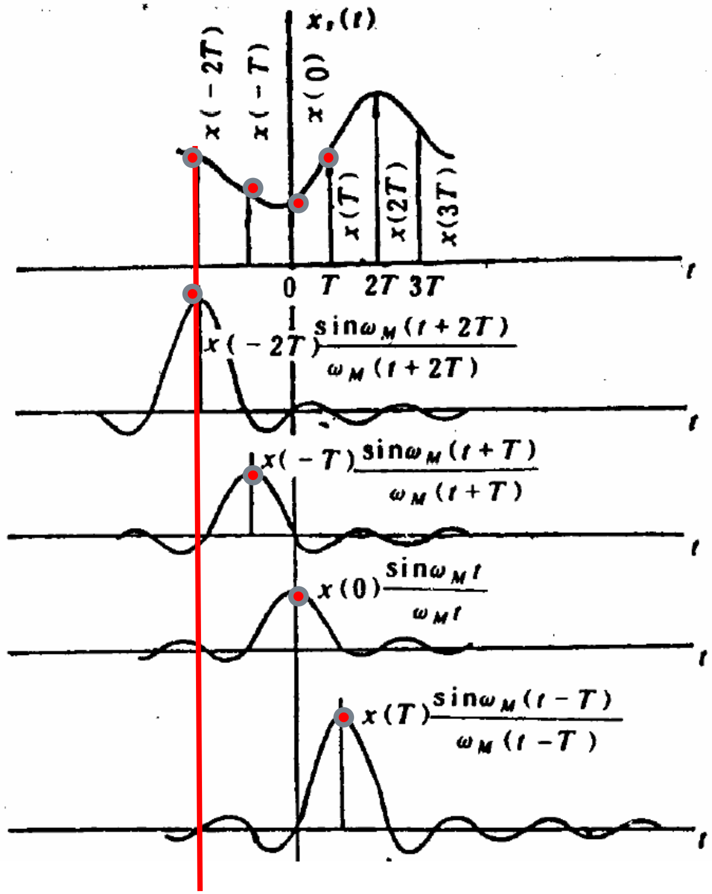
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

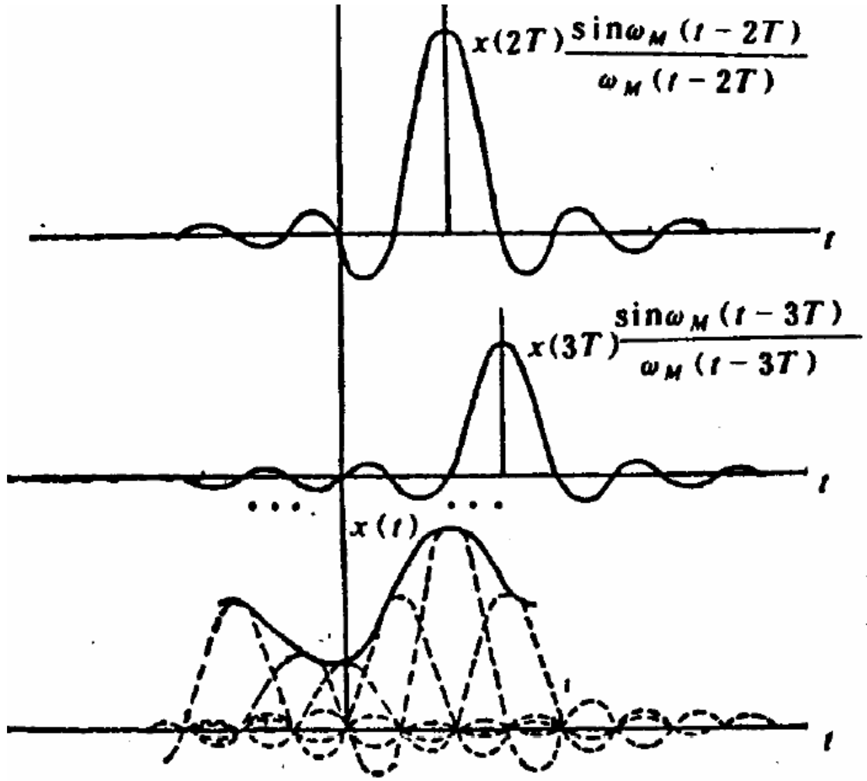
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)Sa[\frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)]$$

$$\omega_s = 2\omega_m$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\frac{\sin[\omega_m(t - nT_s)]}{\omega_m(t - nT_s)}$$

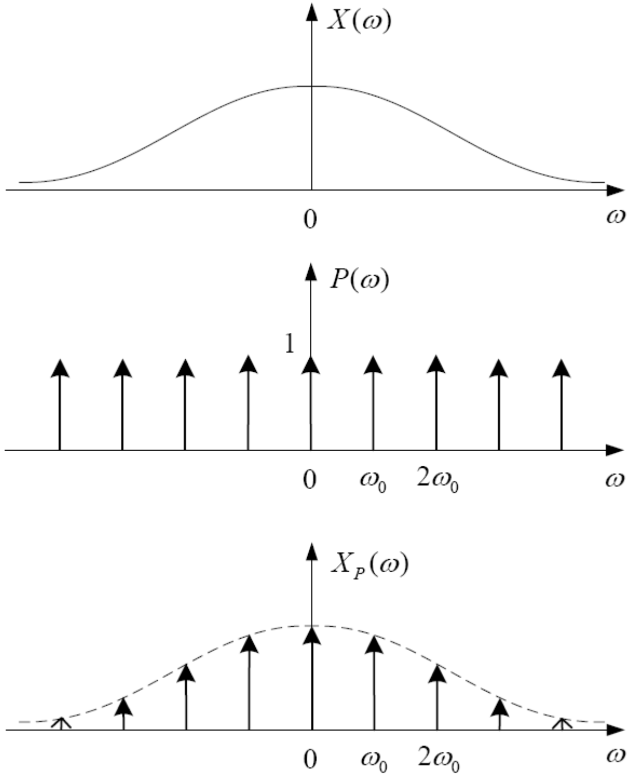
由于是一个以 nT 为中心呈偶对称的衰减正弦函数，除中心点为峰值外，还具有等间隔的过零点，可以求得，该间隔正好是采样间隔T_s。因此在某一采样时刻（例如$t=3T_s$），除了取峰值为 1 的点($n=3$)外，其他各点（如$n\neq3$）均为零，所以有$x(t)=x(nT_s)$（例如 $n=3$），即每个采样时刻能给出准确的$x(t)$值，而非采样时刻，各项均不为零，样本点之间任意时刻的$x(t)$由无限项的和决定，称为**恢复连续时间信号的内插公式。**





频域采样定理

对于一个具有连续频谱的信号，如果在频域进行采样，是否能准确地恢复原信号连续频谱。



$$X_p(\omega) = X(\omega)P(\omega)$$

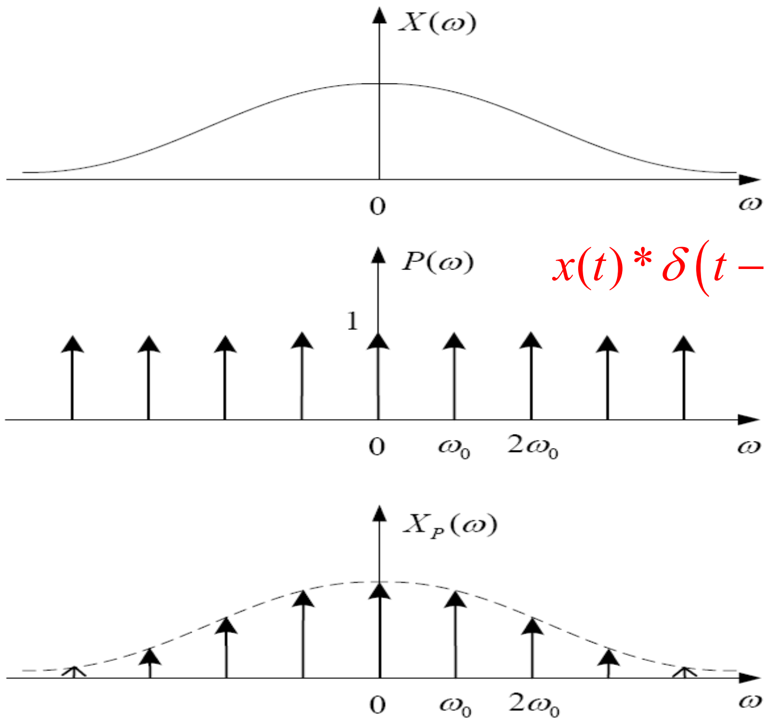
$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

采样间隔为 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ 的频域单位冲激串

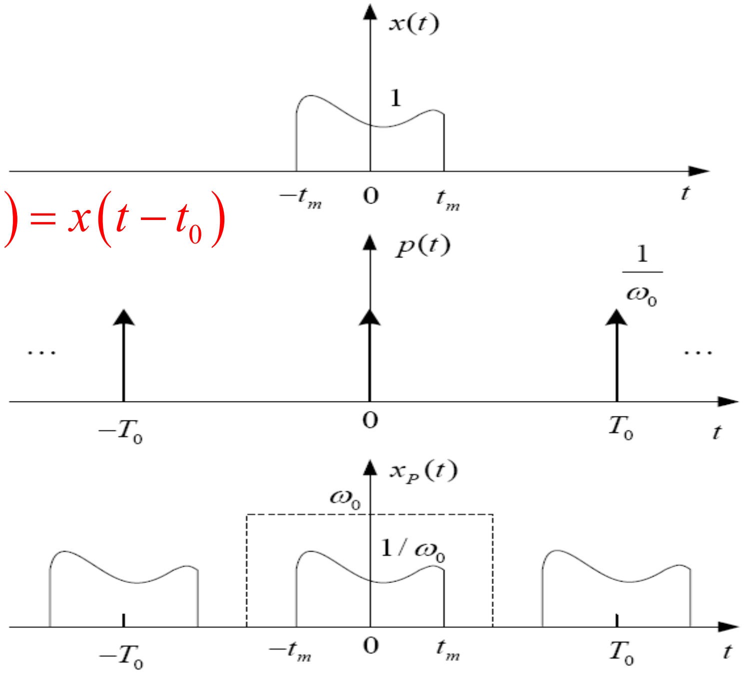
$$p(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

频域采样定理

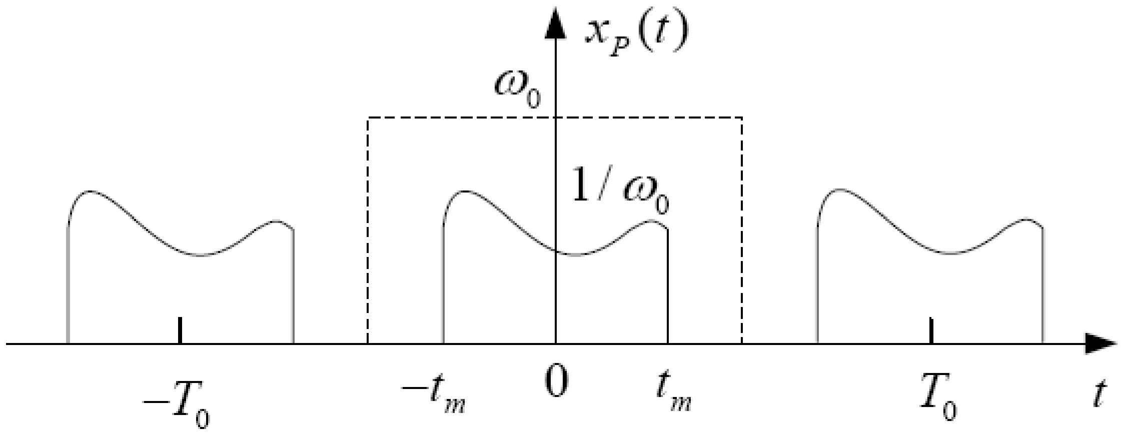
$$x_p(t) = x(t) * \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t-kT_0)$$



$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$



频域采样定理



对于一个时间受限信号 $x(t)$，

$$x(t)=\begin{cases}x(t) & |t|\le t_m\\ 0 & |t|>t_m\end{cases}$$

只有当 $T_0 \geq 2t_m$ 或 $\omega_0 \leq \dfrac{\pi}{t_m}$ 时，$x_p(t)$不会发生时域波形混叠，有可能从 $x_p(t)$中不失真地截取出原信号 $x(t)$，相当于在频域从采样的 $X_p(\omega)$ 中准确地恢复原信号的连续频谱 $X(\omega)$。

频域采样定理

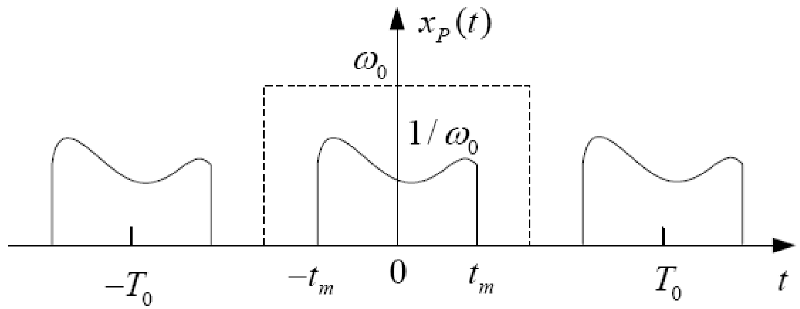
频域采样定理:

对于一个长度为 $2t_m$ 的时 限信号，为了能够从频域样本集合完全恢复原信号的频谱，其频域的采样间隔必须满足 $\omega_0 \le \dfrac{\pi}{t_m}$ 。

频域采样定理

由抽样信号恢复原连续频谱

$$g(t)=\begin{cases}\omega_0 & |t|\le T_0/2\\ 0 & |t|>T_0/2\end{cases}$$



原信号$x(t)$从$x_p(t)$中完整地提取出来 $\boxed{x(t)=x_p(t)g(t)}$

根据傅里叶频域卷积性质

$$\boxed{X(\omega)=\frac{1}{2\pi}X_p(\omega)*G(\omega)}$$

频域采样定理

$$G(\omega)=2\pi Sa(\frac{\omega_0 T_0}{2})$$

$$\boxed{X(\omega)=\frac{1}{2\pi}X_p(\omega)*G(\omega)}$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)*2\pi Sa(\frac{\omega T_0}{2})$$

$$X_p(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)Sa[\frac{T_0}{2}(\omega-n\omega_0)]$$

$$t_m=\frac{T_0}{2}$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\frac{\sin[t_m(\omega-n\omega_0)]}{t_m(\omega-n\omega_0)}$$

三、离散信号的描述

- 单位脉冲序列
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- 斜变序列
- 实指数序列
- 正弦型序列
- 复指数序列
- 任意离散序列

离散数学基础

- 离散数学是致力于研究离散对象的数学分支
- 离散数学基础研究内容包括
  - 逻辑
  - 集合论
  - 数论
  - 线性代数
  - 抽象代数
  - 组合学
  - 图论及概率论

离散数学基础

➲ 表示离散对象的离散结构

- **集合**

  表示： $V=\{a,e,i,o,u\}$ / 文氏图，集合基数（大小）

- **函数 / 映射 / 变换**

  表示：$f: A\rightarrow B$; 例：下取整函数floor，上取整函数ceiling

- **序列**

  定义：元素的有序列表，表示有序列表的离散结构。

  表示：$\{a_n\}$，$\{a(n)\}$

  递推（斐波那契数列，闭公式），求和（级数）

- **矩阵**

离散信号的描述

$x(n)$在整个定义域内的一组有序数列的集合$\{x(n)\}$来表示

$$\{x(n)\}=\{\ldots\ldots, 0, 1, 2, 3, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{4}, 3, 2, 1, 0, \ldots\ldots\}$$

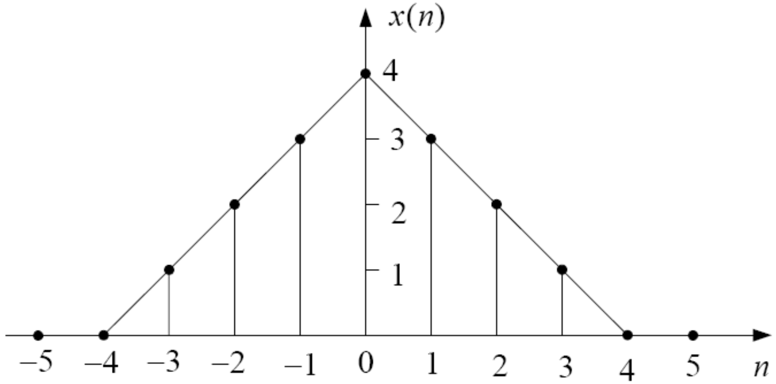
如果$x(n)$有闭式表达式，离散信号也可以用闭式表达式表示。

也可以将它们的端点连接起来，以表示信号的变化规律，但是一定要注意到，$x(n)$只有在n的整数值处才有定义。

$$x(n)=\begin{cases} 0, & 4\le n<\infty \\ 4-n, & 0\le n<3 \\ 4+n, & -3\le n<0 \\ 0 & -\infty<n\le -4 \end{cases}$$

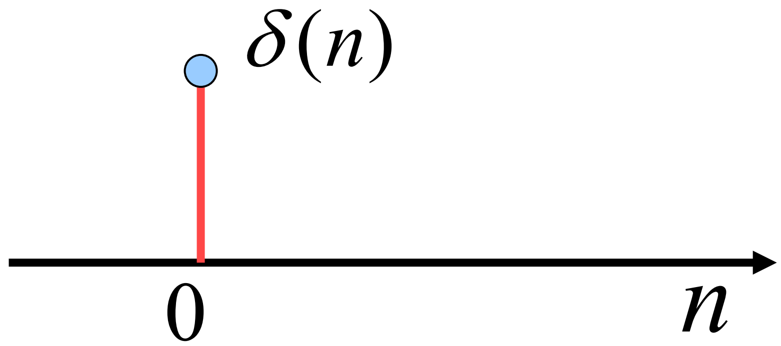
或者表示为

$$x(n)=4-|n|, \quad |n|\le 3$$

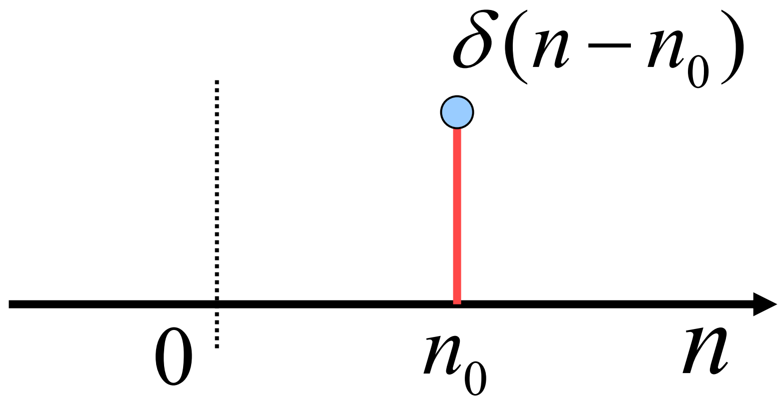


单位脉冲序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\0 & (n\neq 0)\end{cases}$$



$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & (n=n_0)\\0 & (n\neq n_0)\end{cases}$$



单位脉冲序列

➲ **类似于连续信号中的单位冲激函数，单位脉冲序列也具有取样特性**

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n)$$

$$x(n)\delta(n-m) = x(m)\delta(n-m)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-n_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n_0)\delta(n-n_0) = x(n_0)$$

单位脉冲序列

$\delta(t)$是广义函数，在$t=0$时幅度趋向于无穷大。

$\delta(n)$在$n=0$处取值为有限值1

任意一个序列，一般都可以用单位脉冲序列表示为：

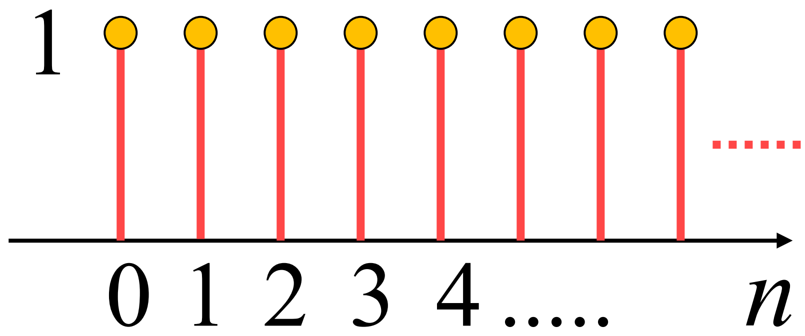
$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(k-n)$$

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(k-n)$$

$$=\cdots+x(-1)\delta(-1-n)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(1-n)+\cdots$$

单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$



单位阶跃序列 $u(n)$ 与单位抽样序列 $\delta(n)$ 之间有如下关系

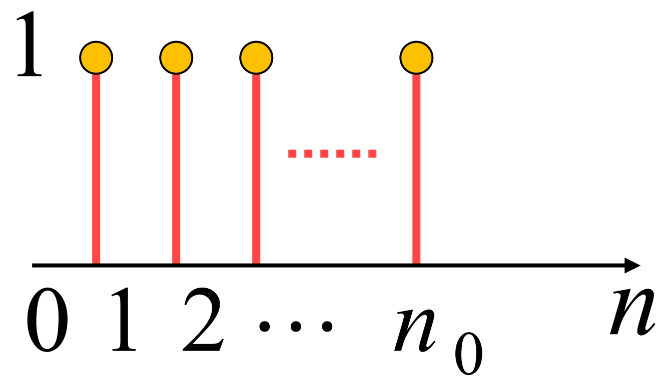
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

矩形序列

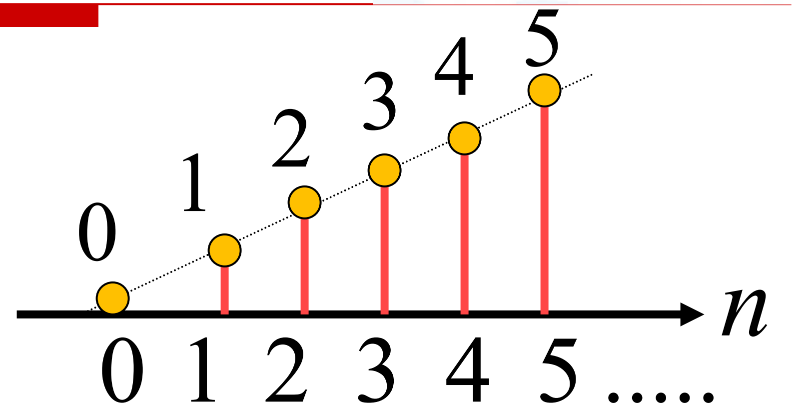
$$R_N(n)=\begin{cases}1 & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (n<0\ \ or\ \ n\ge N)\end{cases}$$

$$=u(n)-u(n-n_0)$$

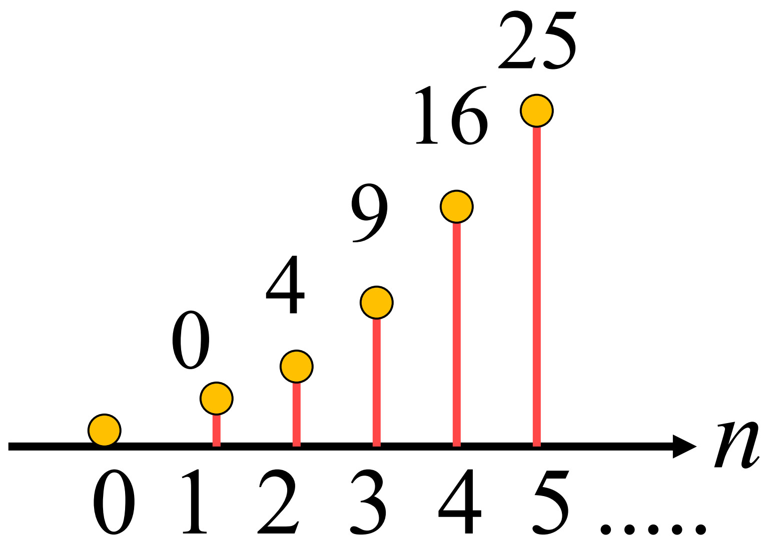


斜变序列

$$R(n) = nu(n)$$

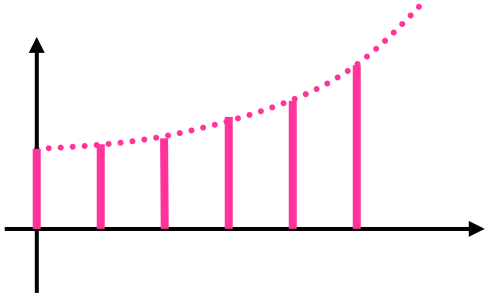


$$r(n) = n^2u(n)$$

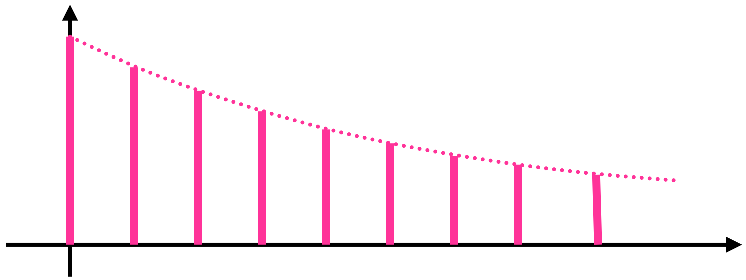


实指数序列 $x(n)=a^n u(n)$

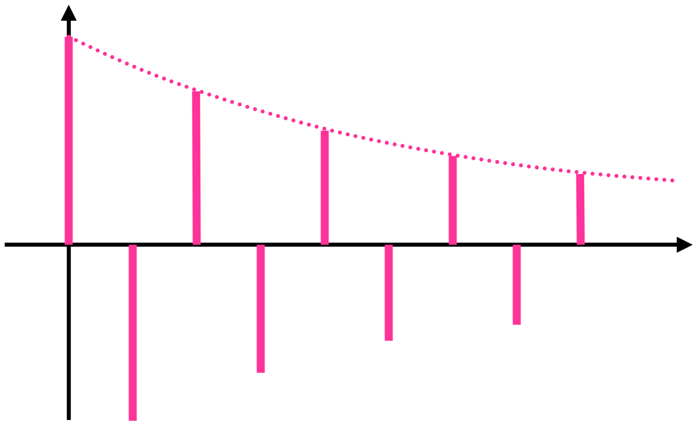
$a>1$



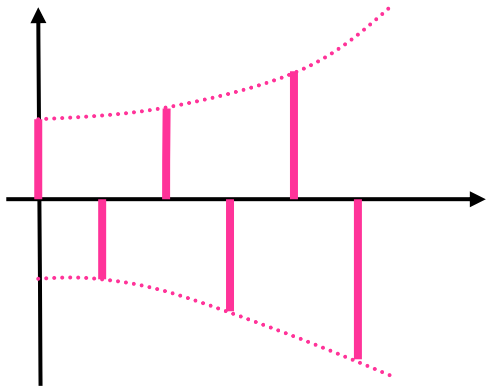
$0<a<1$



$-1<a<0$



$a<-1$



正弦型序列

$$x(t) = A\sin\omega_0 t$$

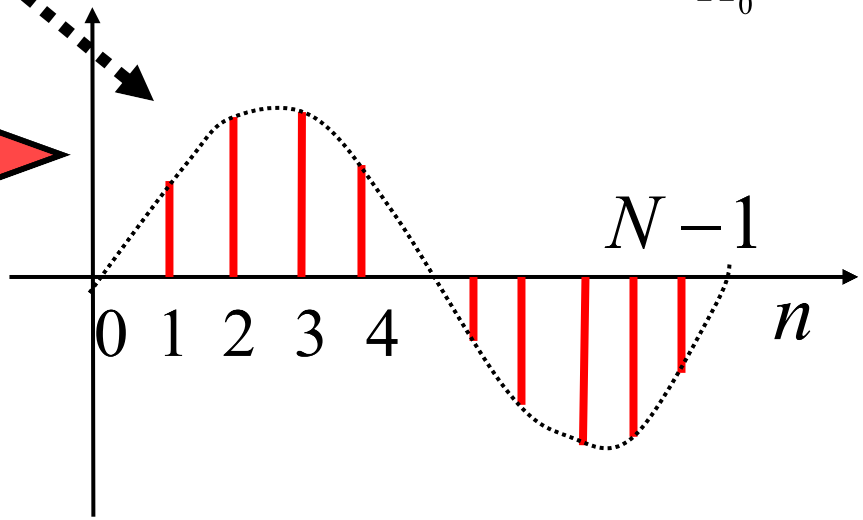
$t = nT_s$

$$x(n) = A\sin(\omega_0 nT_s)$$
$$= A\sin(n\Omega_0)$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \omega_0 T_s = \frac{\omega_0}{f_s}$$

$$\boxed{x(n) = A\cos n\Omega_0}$$

$\frac{2\pi}{\Omega_0}$为整数时，正弦序列才有周期$\frac{2\pi}{\Omega_0}$



正弦型序列

$$\boxed{\begin{aligned}x(n) &= A\sin(\omega nT_s+\varphi_0)\\ &= A\sin(n\Omega+\varphi_0)\end{aligned}}$$

$$x(n+N)=A\sin[(n+N)\Omega+\varphi_0]=A\sin(n\Omega+N\Omega+\varphi_0)$$

若

$$N\Omega=2\pi k\text{，}k\text{ 为整数}$$

则上式成为

$$A\sin(n\Omega+2\pi k+\varphi_0)=A\sin(n\Omega+\varphi_0)=x(n)$$

此时正弦序列是周期序列，其周期为

$$N=\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)k$$

k 的取值使得 $N=2k\pi/\Omega$ 为最小正整数，此时正弦序列是以 N 为周期的正弦型序列。

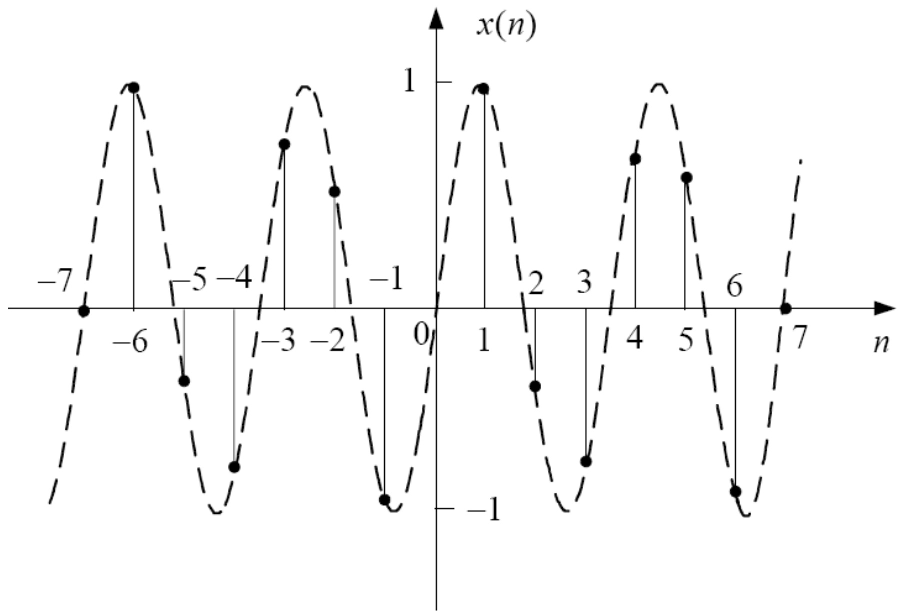
正弦型序列

$$x(n) = A\cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8})$$

$$\frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi / \frac{3\pi}{7} = \frac{14}{3}$$

$\therefore$ 是周期的, 周期为14。

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{7}{2}$$ 周期 N=7



周期正弦序列 (N=7)

复指数序列

$$x(n) = A\cos n\Omega_0 + jB\sin n\Omega_0$$

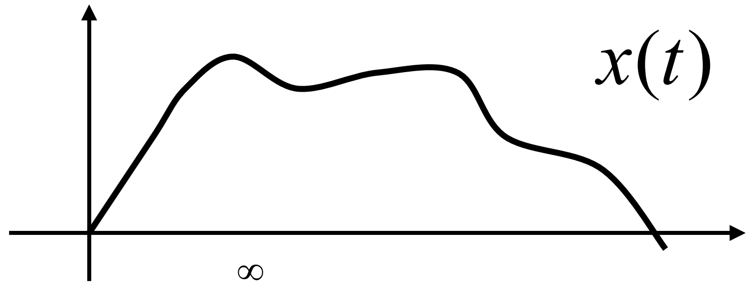
$$= |x(n)|e^{j\arg[x(n)]} = |x(n)|e^{j(n\Omega_0+\varphi)}$$

离散信号和数字系统的频域分析时，数字角频率的取值范围 $0<\Omega\le 2\pi$ 或 $-\pi<\Omega\le\pi$

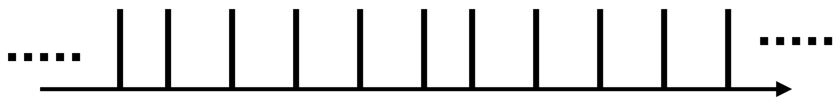
任意离散序列

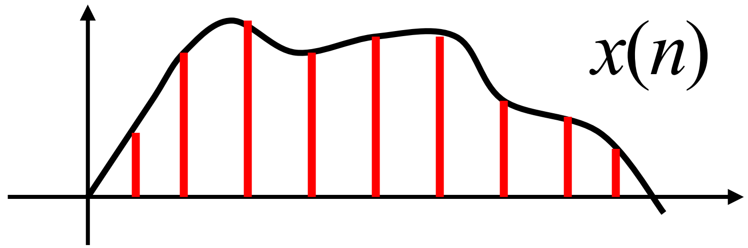
$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

加权表示



$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-m)$$





$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=x(t)$$

四、离散信号的时域运算

- 平移、翻转
- 和、积
- 累加
- 差分运算
- 序列的时间尺度（比例）变换
- 卷积和
- 两序列相关运算

平移和翻转

- 设某一序列为 $x(n)$，当m为正时，则 $x(n-m)$ 是指序列 $x(n)$ 逐项依次延时（右移）m位而给出的一个新序列，而 $x(n+m)$ 则指依次超前（左移）m位。m为负时，则相反。

- 如果序列为 $x(-n)$，则是以 $n=0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻转。

平移和翻转

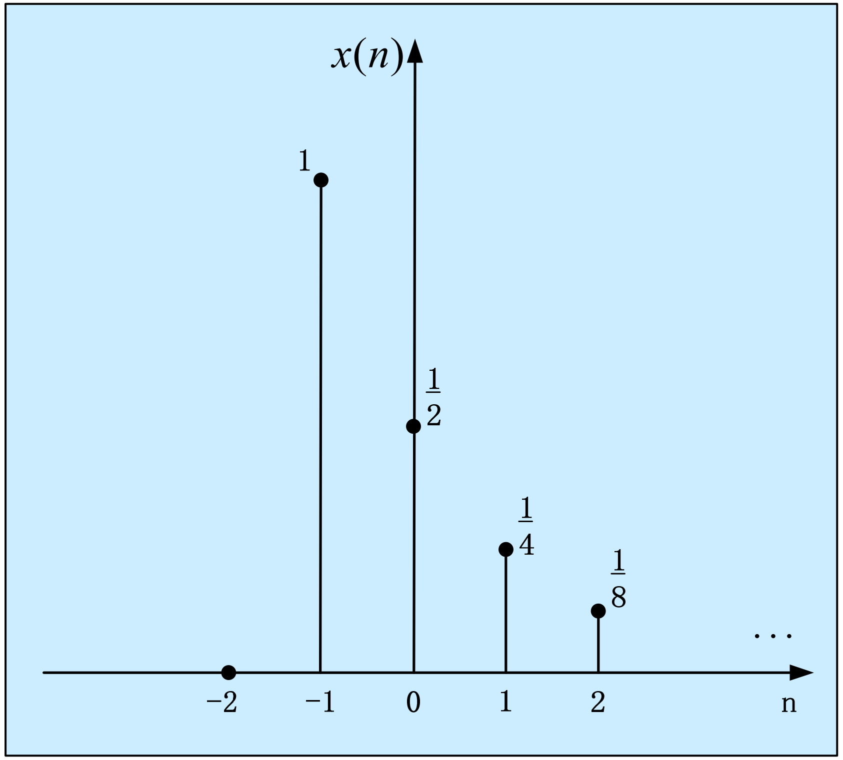
例1：已知 $x(n)$，求 $x(n+1)$.

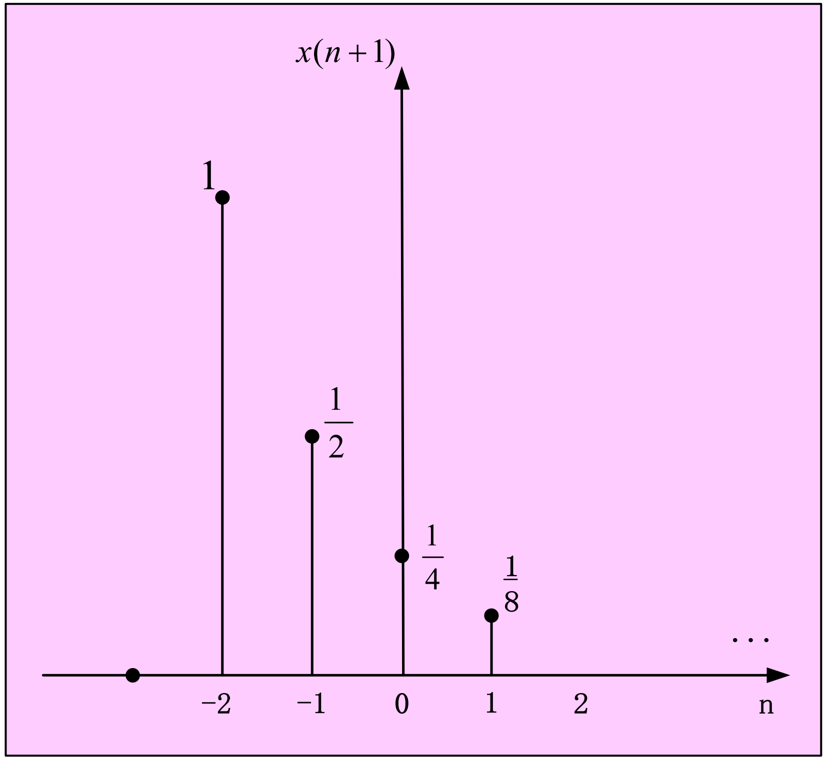
- **解:**

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n}, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

$$x(n+1)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n+1}, & n+1\geq -1\\ 0, & n+1<-1\end{cases}$$

平移和翻转


$x(n)$
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$
...
−2
−1
0
1
2
n


$x(n+1)$
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$
...
−2
−1
0
1
2
n

平移和翻转

例1：已知 $x(n)$，求 $x(-n)$.

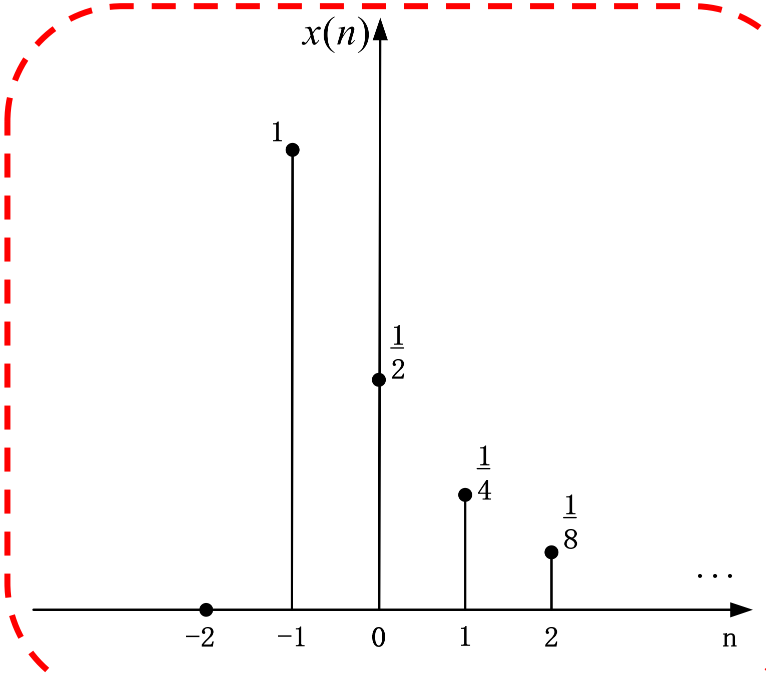
➲ **解:**

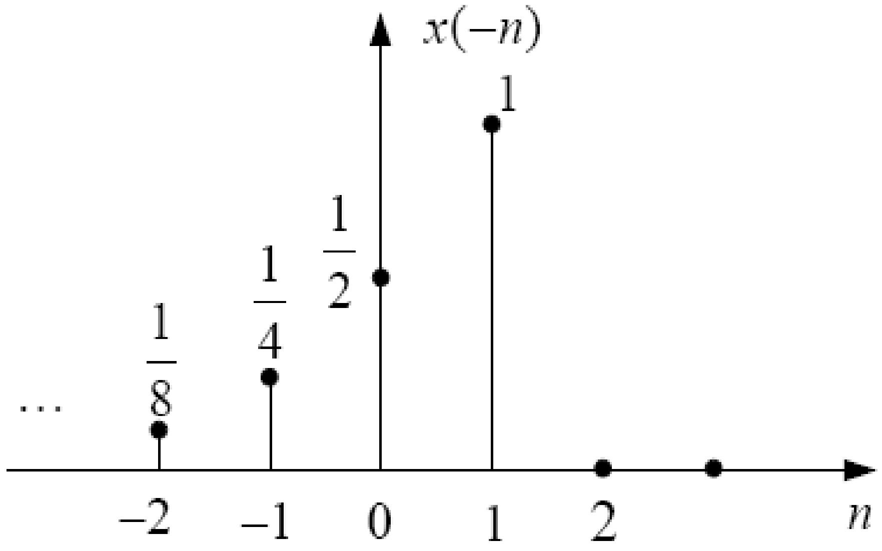
$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n}, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

$$x(-n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{-n}, & -n\geq -1\\ 0, & -n<-1\end{cases}$$

平移和翻转

$$x(-n)=\begin{cases}2^{(n-1)} & n\le 1\\ 0 & n>1\end{cases}$$





和、积

- 两序列的和（积）是指同序号（n）的序列值逐项对应相加（相乘）而构成一个新的序列，表示为

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

$$z(n) = x(n) \bullet y(n)$$

和、积

$$x(n)=\begin{cases}2^{-(n+1)}, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}\qquad y(n)=\begin{cases}2^{n}, & n<0\\ n+1, & n\geq 0\end{cases}$$

$$z(n)=x(n)+y(n)=\begin{cases}2^{n}, & n<-1\\ \dfrac{3}{2}, & n=-1\\ 2^{-(n+1)}+n+1, & n\geq 0\end{cases}$$

和、积

$$x(n)=\begin{cases}2^{-(n+1)}, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}\qquad y(n)=\begin{cases}2^{n}, & n<0\\ n+1, & n\geq 0\end{cases}$$

$$z(n)=x(n)\cdot y(n)=\begin{cases}0, & n<-1\\ \dfrac{1}{2}, & n=-1\\ (n+1)2^{-(n+1)}, & n\geq 0\end{cases}$$

累加

- 设某序列为 $x(n)$，则 $x(n)$ 的累加序列$y(n)$ 定义为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

- 它表示在某一个n_0上的值等于这一个n_0上的$x(n_0)$ 值以及n_0以前的所有n上的值之和。

差分运算

- **前向差分**

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

- **后向差分**

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

- **由此得出**

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

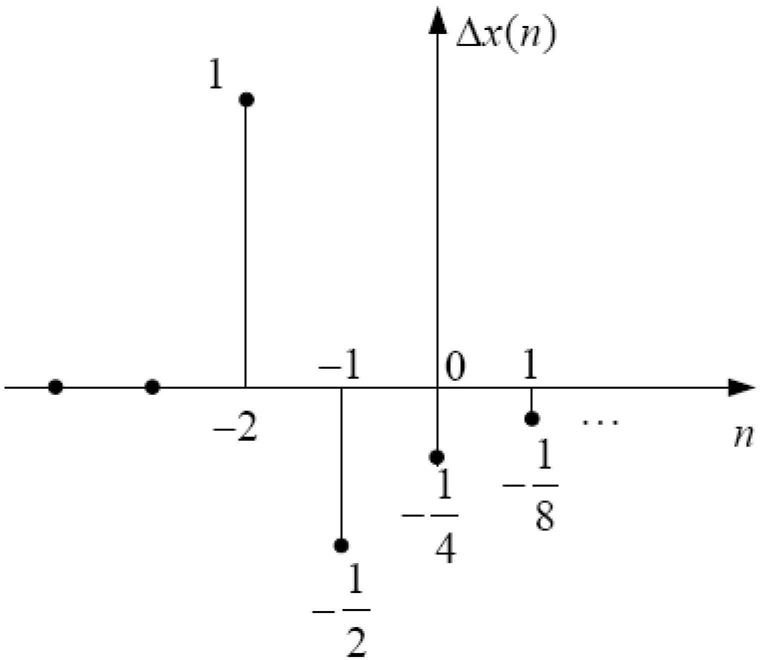
差分运算

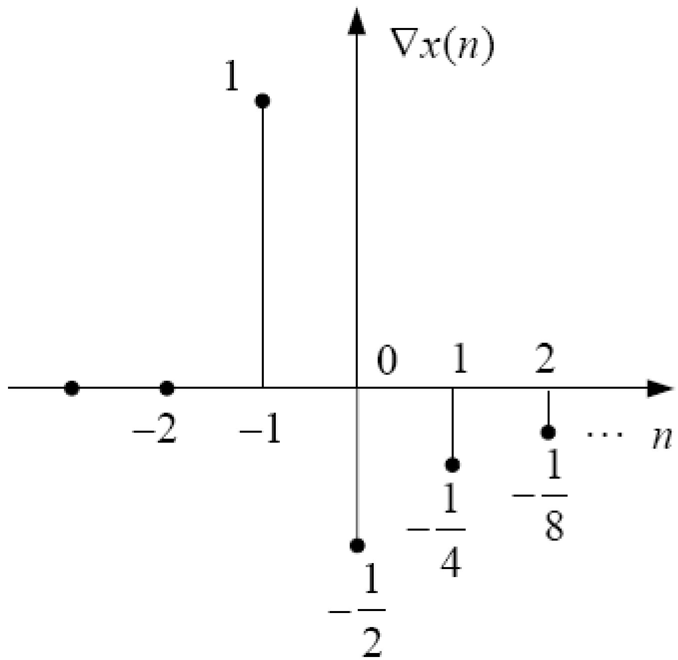
$$x(n)=\begin{cases}2^{-(n+1)}, & n\ge -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

前向差分 $$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)=\begin{cases}0, & n<-2\\ 1, & n=-2\\ 2^{-(n+2)}-2^{-(n+1)}=-2^{-(n+2)}, & n>-2\end{cases}$$

后向差分 $$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)=\begin{cases}0, & n<-1\\ 1, & n=-1\\ 2^{-(n+1)}-2^{-n}=-2^{-(n+1)}, & n>-1\end{cases}$$

差分运算





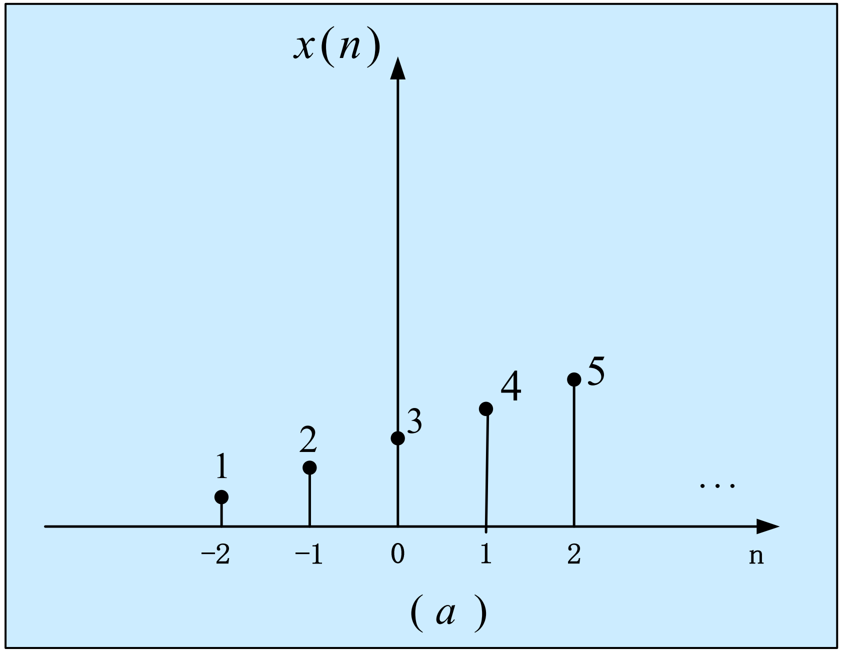
前向差分$\Delta x(n)$及后向差分$\nabla x(n)$

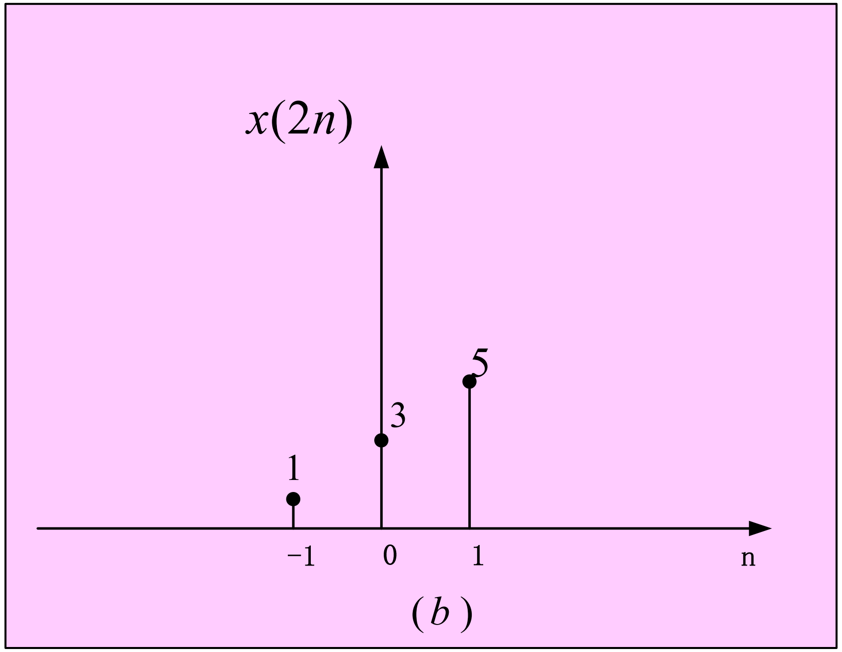
时间尺度（比例）变换

- 对某序列 $x(n)$，其时间尺度变换序列为 $x(mn)$ 或 $x(n/m)$，其中m为正整数。

- 以$m=2$为例来说明。 $x(2n)$不是$x(n)$序列简单地在时间轴上按比例增一倍，而是以低一倍的抽样频率从$x(n)$中每隔2点取1点，如果$x(n)$是连续时间信号$x(t)$的抽样，则相当于将$x(n)$的抽样间隔从T 增加到 $2T$，即，若 $x(n)=x(t)\big|_{t=nT}$
- 则 $x(2n)=x(t)\big|_{t=n2T}$
- 把这种运算称为抽取，即$x(2n)$是$x(n)$的抽取序列。

时间尺度（比例）变换





卷积和

➲ 设两序列为 $x(n)$ 和 $h(n)$，则 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和定义为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

卷积和

$$\boxed{y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)}$$

求解步骤

$$x(n)\rightarrow x(m)$$

$$h(n)\rightarrow h(m)\rightarrow h(-m)\rightarrow h(n-m)$$

换坐标　翻转　平移

$$x(m)\cdot h(n-m)\rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

相乘　累加

卷积和

例：已知序列 $h(n)=a^n u(n)$，$x(n)=b^n u(n), a\neq b$，求两序列的卷积和 $y(n)$。

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=0}^{\infty}b^m a^{n-m}u(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{n}b^m a^{n-m}=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^m a^n=a^n\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\qquad(n=0,1\cdots)$$

卷积和

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}n, & 1\le n\le 3\\ 0, & \text{其他}n\end{cases}$$

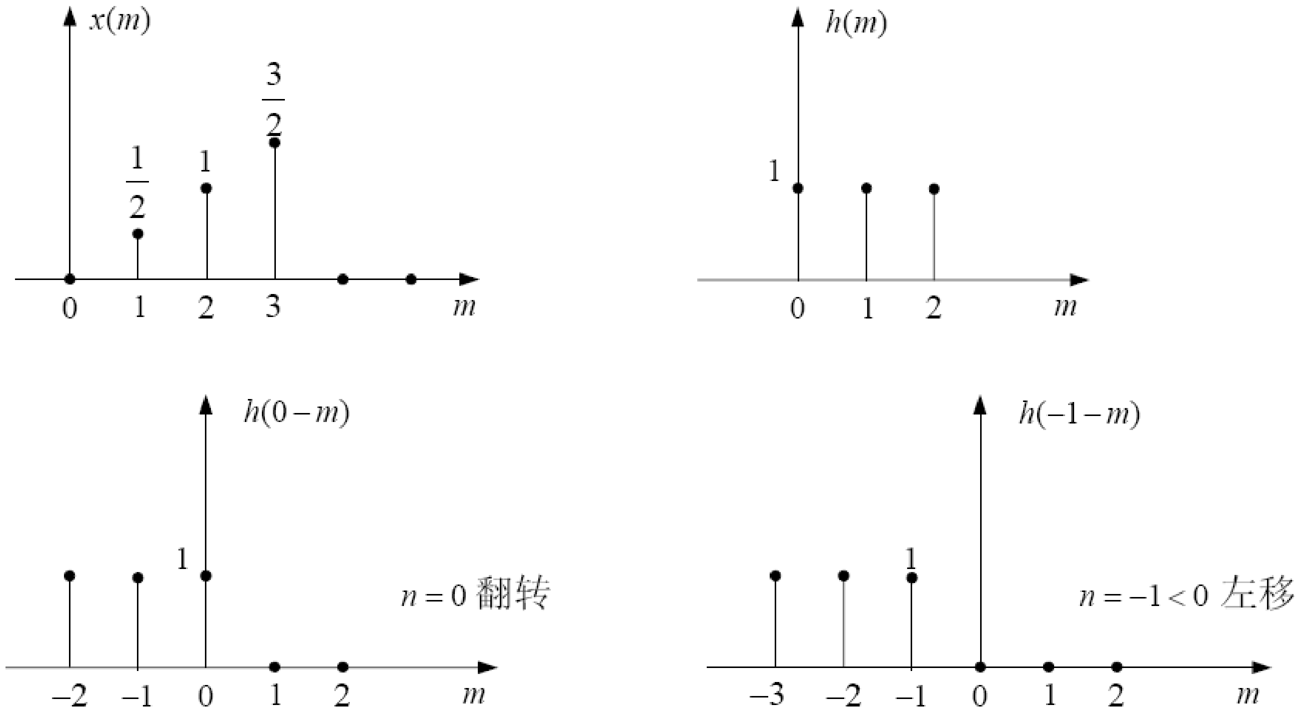
$$h(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le 2\\ 0, & \text{其他}n\end{cases}$$

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=1}^{3}x(m)h(n-m)$$

卷积和

①当 n<1 时，$x(m)$和$h(n-m)$相乘，处处为零，故

$$y(n)=0,\quad n<1$$



卷积和

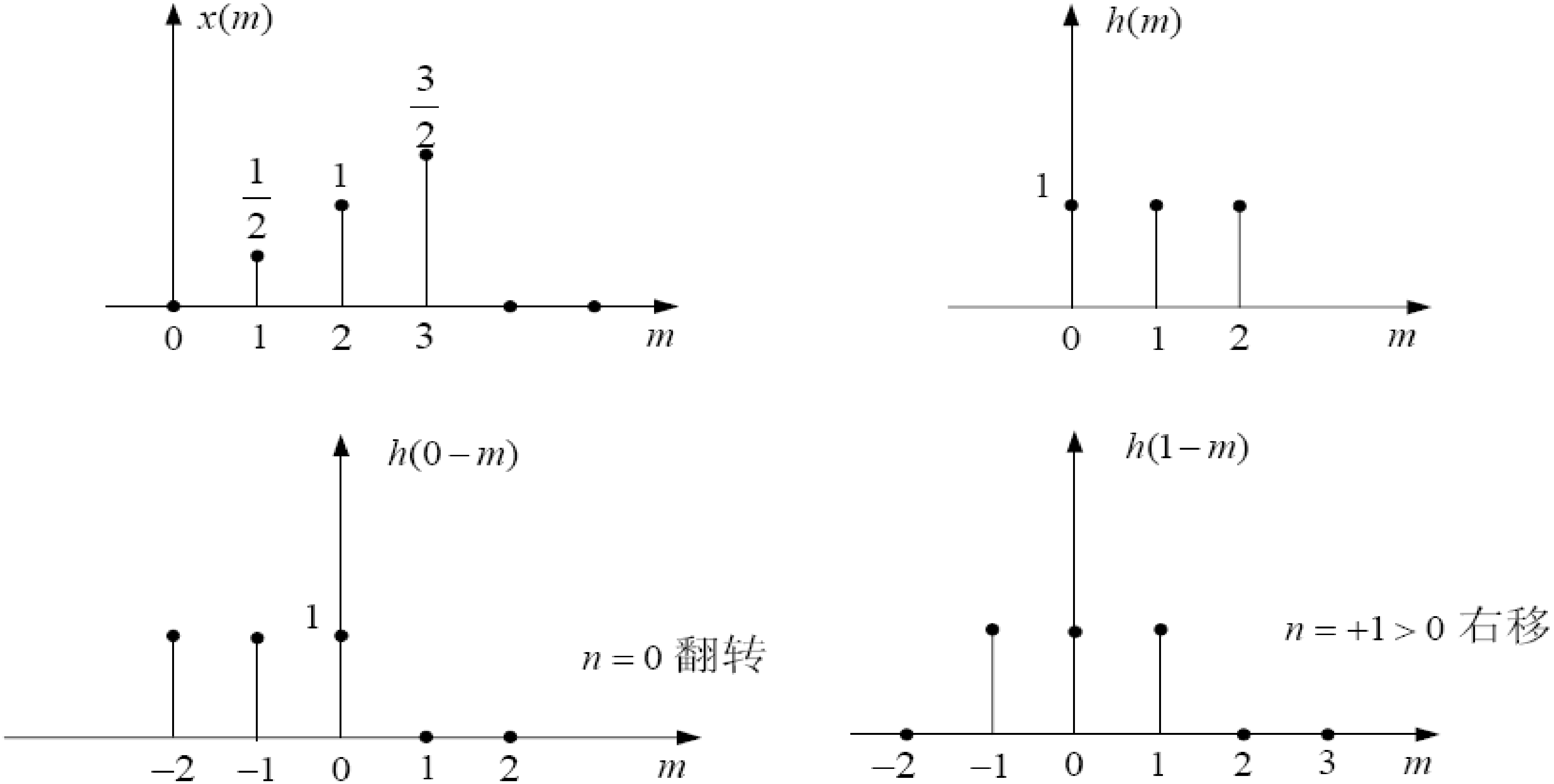
②当$1 \le n \le 2$时，$x(m)$和$h(n-m)$ 有交叠的非零项是从 m=1 到 m=n，故

$$y(n)=\sum_{m=1}^{n} x(m)h(n-m)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}n(1+n)=\frac{1}{4}n(1+n)$$

也就是

$$y(1)=\frac{1}{2}, \qquad y(2)=\frac{3}{2}$$

卷积和



卷积和

③当 $3 \le n \le 5$ 时，$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 交叠，但非零项对应的 m 下限是变化的（n＝3，4，5 分别对应 m 的下限为 m＝1，2，3），而 m 的上限是 3，有

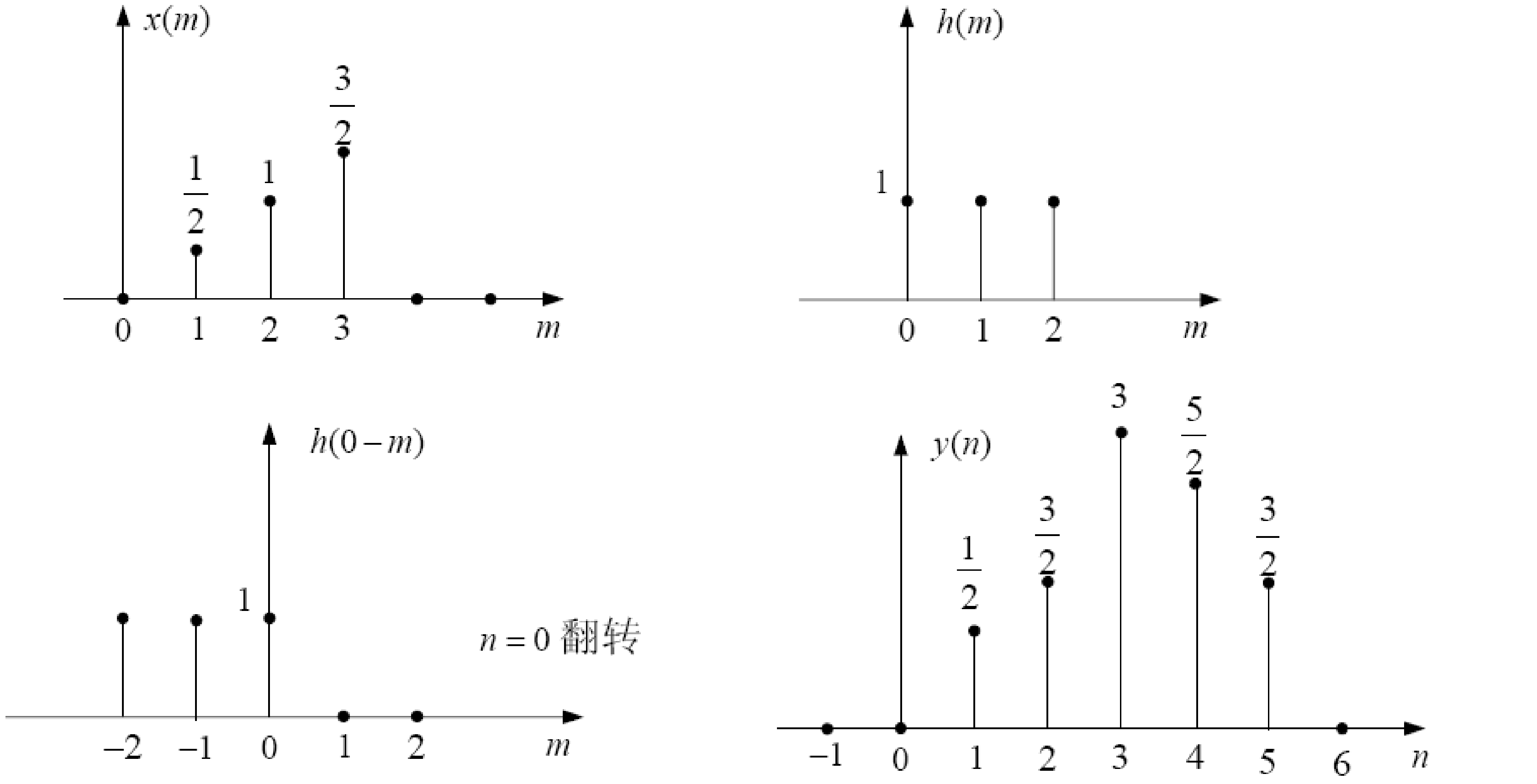
$$y(3)=\sum_{m=1}^{3}x(m)h(3-m)=\sum_{m=1}^{3}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}\cdot(1+2+3)=3$$

$$y(4)=\sum_{m=2}^{3}x(m)h(4-m)=\sum_{m=2}^{3}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}\cdot(2+3)=\frac{5}{2}$$

$$y(5)=x(3)h(5-3)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

④当 $n \ge 6$ 时，$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 没有非零项的交叠部分，故 $y(n)=0$。

卷积和



$x(m)$
$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$
0 1 2 3 m
$h(m)$
1
0 1 2 m
$h(0-m)$
1
$n=0$ 翻转
−2 −1 0 1 2 m
$y(n)$
3
$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$
−1 0 1 2 3 4 5 6 n

卷积和　对位相乘求和

[例] $h(n)=\{-1,2,4,0,5\},x(n)=\{1,3,6,1,-1,4\}$

解：这一方法的算式如下：

对位相乘求和

	1	3	6	1	-1	4				
×	-1	2	4	0	5					
	-1	-3	-6	-1	1	-4				
		2	6	12	2	-2	8			
			4	12	24	4	-4	16		
				0	0	0	0	0	0	
+					5	15	30	5	-5	20
	-1	-1	4	23	32	13	34	21	-5	20

即 $y(n)=\{-1,-1,4,23,32,13,34,21,-5,20\}$

两序列相关运算

序列的相关运算被定义为

$$R_{xy}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n+m)$$

可以用卷积符号“*”来表示相关运算

$$R_{xy}(n)=x(n)*y(-n)$$