自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous-time Control Systems

关键词

- 数学模型， 建模
- 动态系统（单元）
- 微分方程模型，状态空间模型
- 传递函数（Transfer Function）
- 开环传递函数，闭环传递函数
- 方块图（Block Diagram），仿真（模拟）图
- 信号流图（Signal Flow Graph, SFG）
- 梅逊增益公式

主要内容

- 数学模型的基本概念
- 电路系统的数学模型
- 系统总传递函数
  - –方块图简化
  - –信号流图
- 各种模型间的关系
- 其他系统（机械、液位等）的数学模型
- 非线性系统的线性化以及特殊环节建模

主要内容

- 方块图简化
  - –简化规则
  - –应用
- **信号流图（Signal flow graph）**
  - –信号流图定义（Flow-Graph definitions）
  - –信号流图代数（Flow-Graph Algebra）
  - –信号流图分析（General Flow-Graph Analysis）
  - –梅逊增益公式（The Mason Gain Rule）

Samuel Jefferson Mason

1921–1974

- S.M., EE, MIT, 1947
- PhD, EE, MIT, 1952

  inventing SFG
- Faculty member, MIT, 1949-1974
- Mason’s Rule, 1956
- introduced major innovations in the teaching of electric circuit theory
- an authority on optical scanning systems for printed materials

Mason, Samuel J. (July 1956). "Feedback Theory - Further Properties of Signal Flow Graphs". *Proceedings of the IRE*: 920–926.

主要内容

- **信号流图（Signal flow graph）**
  - 信号流图定义（Flow-Graph definitions）
  - 信号流图代数（Flow-Graph Algebra）
  - 信号流图分析（General Flow-Graph Analysis）
  - 梅逊增益公式（The Mason Gain Rule）

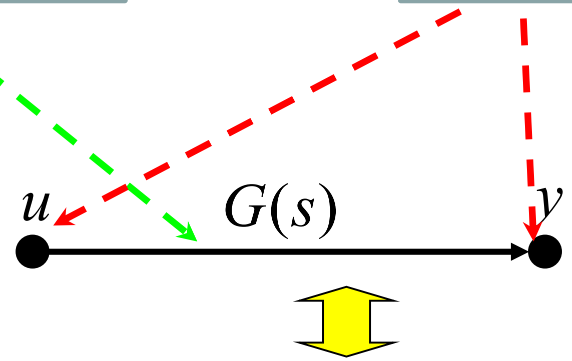
信号流图（SFG）

- 基于信号流图模型，就不再必须使用方块图简化方法来计算系统变量之间的关系
- 利用信号流图分析方法可以处理复杂系统的方块图模型
- 什么是信号流图？

An SFG is a diagram that represents a set of simultaneous equations.

信号流图（SFG）定义

- **信号流图是由节点和支路组成的信号传递网络。**
  - 系统元件的传递函数可以由连接两个节点的有向支路表示。

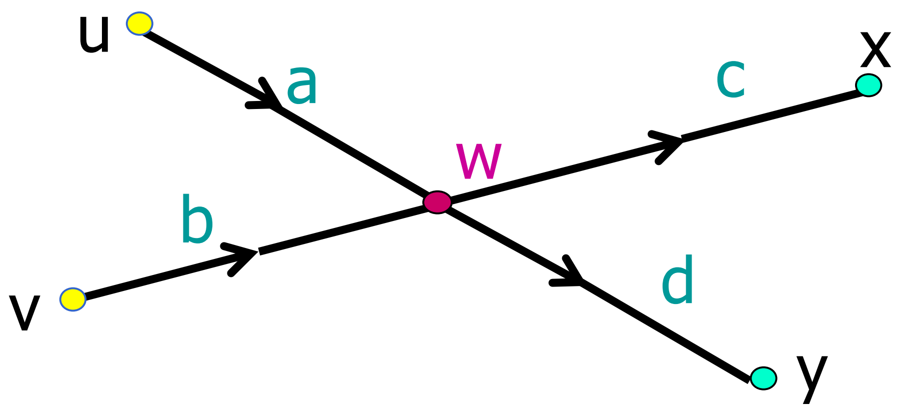


$$y = G(s)u$$

  - 节点表示系统中的变量。
  - 连接两个节点的支路相当于单向乘法器：方向由箭头表示；乘法运算因子（传递函数或增益）置于相应的支路上。

信号流图（SFG）定义

- 节点具有两种作用：
  (1) 对所有来自于流入支路的信号作加法运算；
  (2) 将流入信号之和传输给所有的流出支路。



$$w = au + bv$$

$$x = cw = c(au + bv)$$

$$y = dw = d(au + bv)$$

- 因此，可以利用 SFG 表示输入输出关系

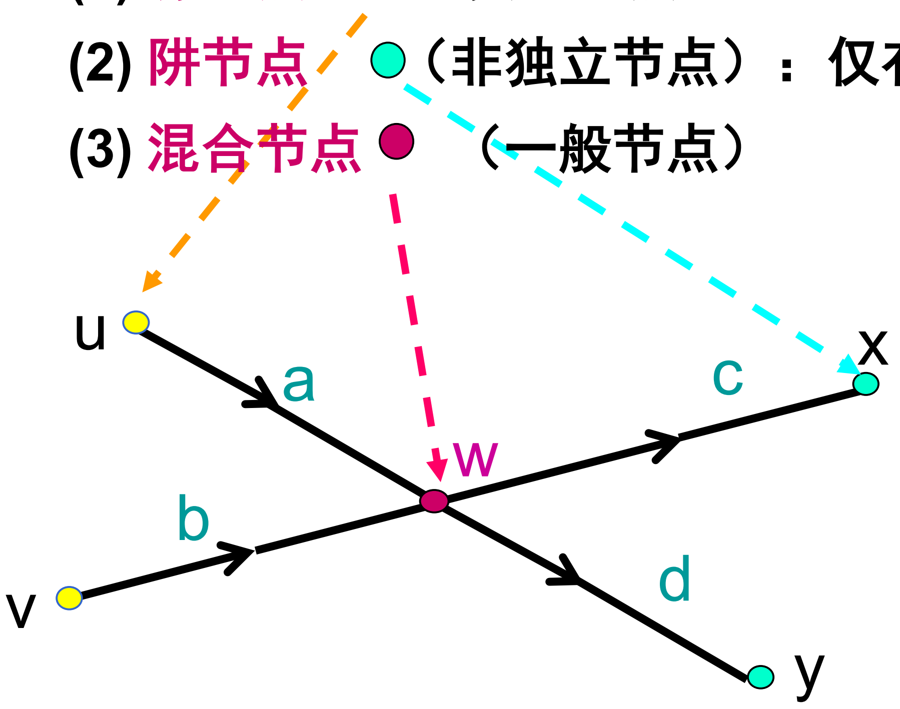
信号流图（SFG）定义

◆ 节点有三种类型

(1) 源节点 （独立节点）：仅有流出支路

(2) 阱节点 （非独立节点）：仅有流入支路

(3) 混合节点 （一般节点）



通路：由任意具有相同方向的支路顺序连接构成的支路序列。通路中各支路增益的乘积叫做**通路增益**。

前向通路：从输入节点（源节点）开始并终止于输出节点（阱节点）且与其它节点相交不多于一次的通路。该通路的各增益乘积称为**前向通路增益**。

➢ 上图中，通路 u-w-x 是节点 u 和 x 之间的前向通路。

信号流图（SFG）定义

- **输入节点（源点）** 只有输出支路的节点称为输入节点。

  它一般表示系统的输入变量。

- **输出节点（阱点）** 只有输入支路的节点称为输出节点。

  它一般表示系统的输出变量。

- **混合节点** 既有输入支路又有输出支路的节点称为混合节点。

  它一般表示相加点、分支点。

- **通路** 从某一节点开始沿支路箭头方向经过各相连支路到另一节点所构成的路径称为通路。通路中各支路增益的乘积叫做通路增益。

- **前向通路** 是指从输入节点开始并终止于输出节点且与其它节点相交不多于一次的通路。该通路的各增益乘积称为前向通路增益。

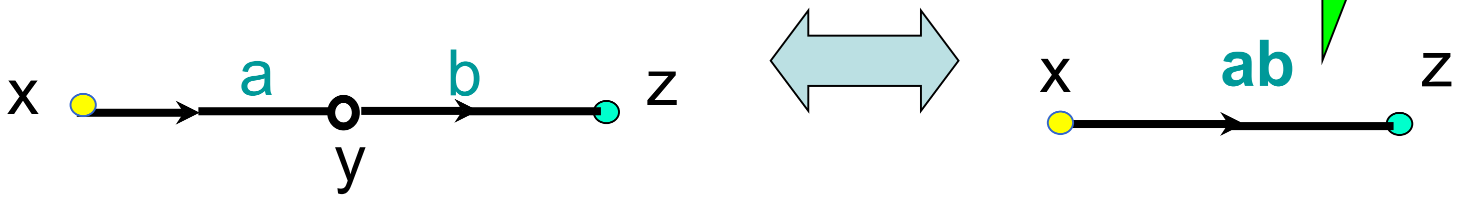
信号流图（SFG）代数

◆ 串联通路

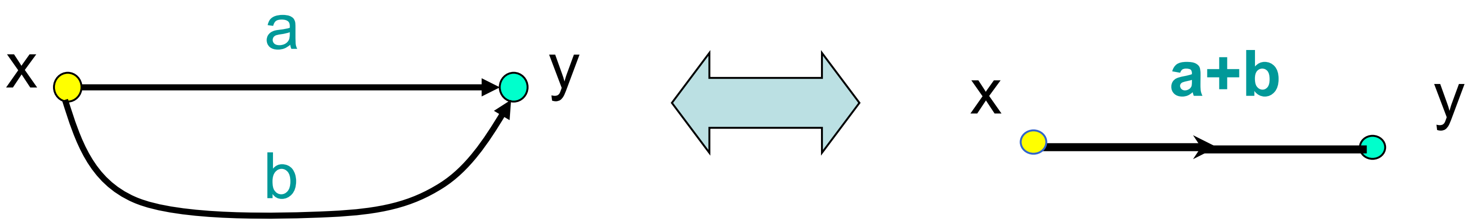
通路增益

原始图

等效图



◆ 并联通路

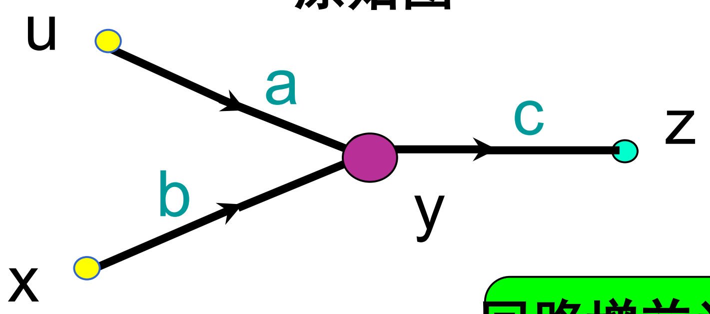


注意：通路增益可正可负。

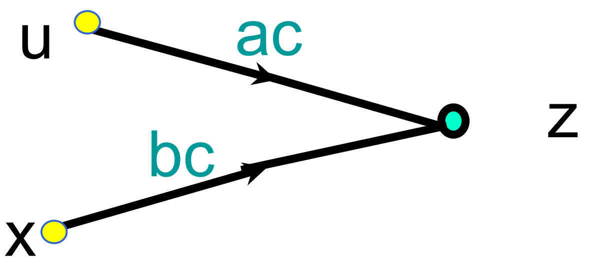
信号流图（SFG）代数

- 节点消除

原始图

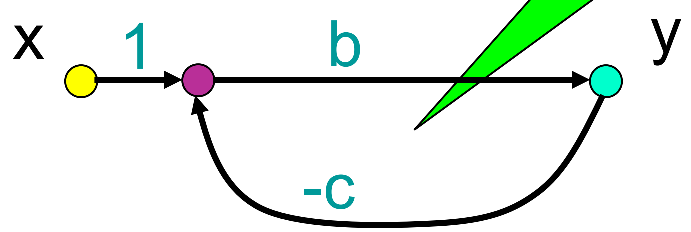


等效图

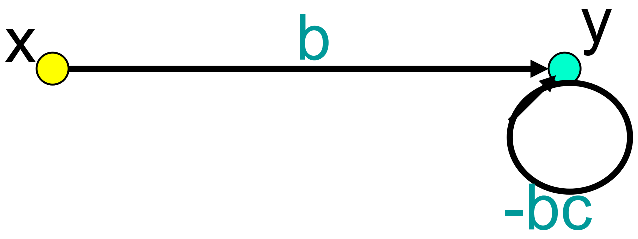


- 反馈环

回路增益为：
−bc



$$\frac{b}{1+bc}$$



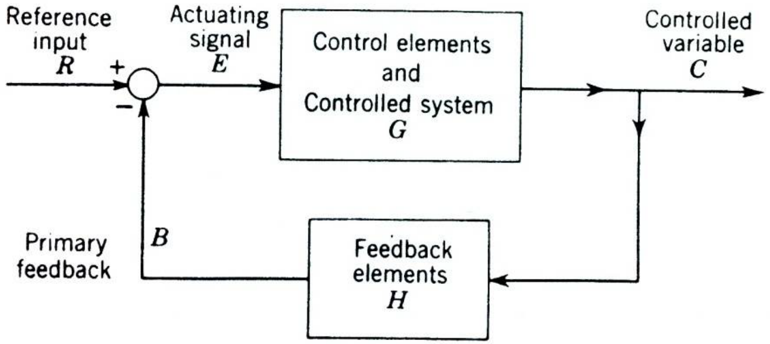
注意：

通路增益为 $T=\frac{y}{x}=\frac{b}{1+bc}$

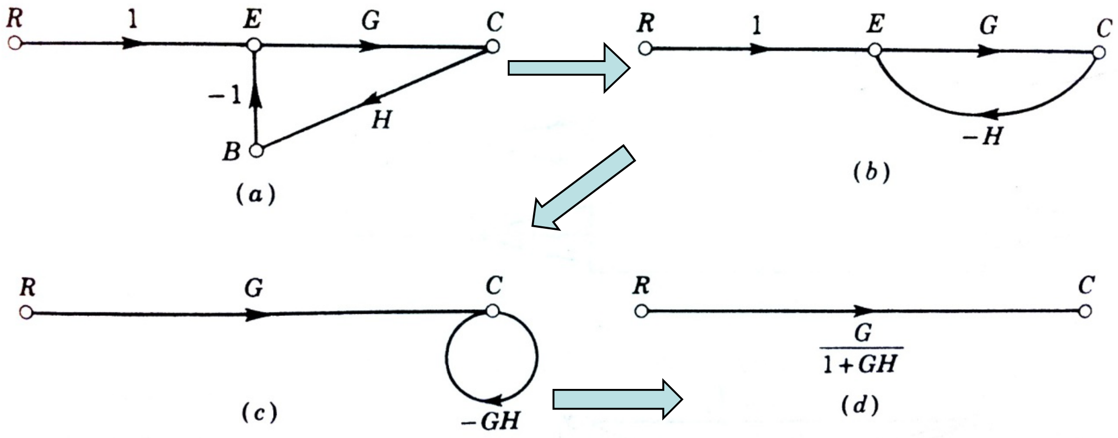
信号流图（SFG）代数

◆ 反馈环

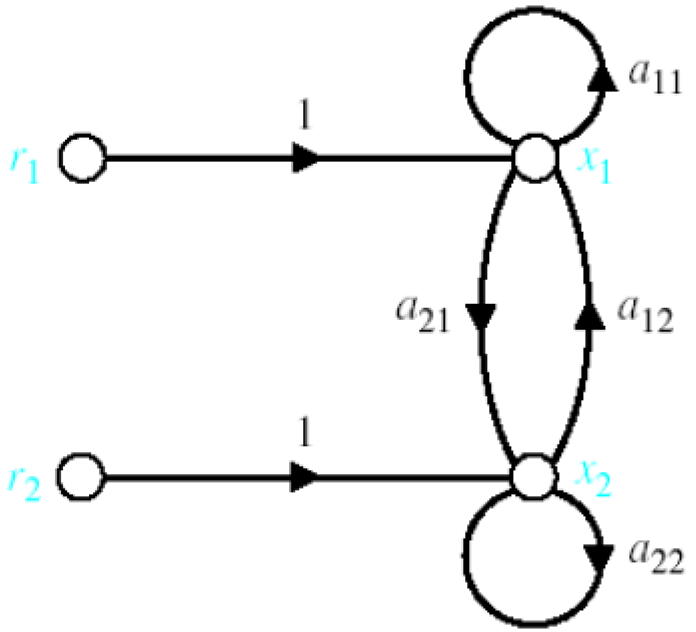
$$C = GE$$
$$B = HC$$
$$E = R - B$$



$$C = GR - GHC$$
$$C = \frac{G}{1+GH}R$$



信号流图（SFG）分析



Signal-flow graph of two algebraic equations.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2$$

$$(a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 = -r_1$$
$$a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 = -r_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -r_1 \\ -r_2 \end{bmatrix}$$

信号流图（SFG）分析

- 一般地，任意复杂系统的 SFG 如图 a 所示。

  （注意，所有的源节点在系统框图左边，而所有的阱节点在系统框图右边）

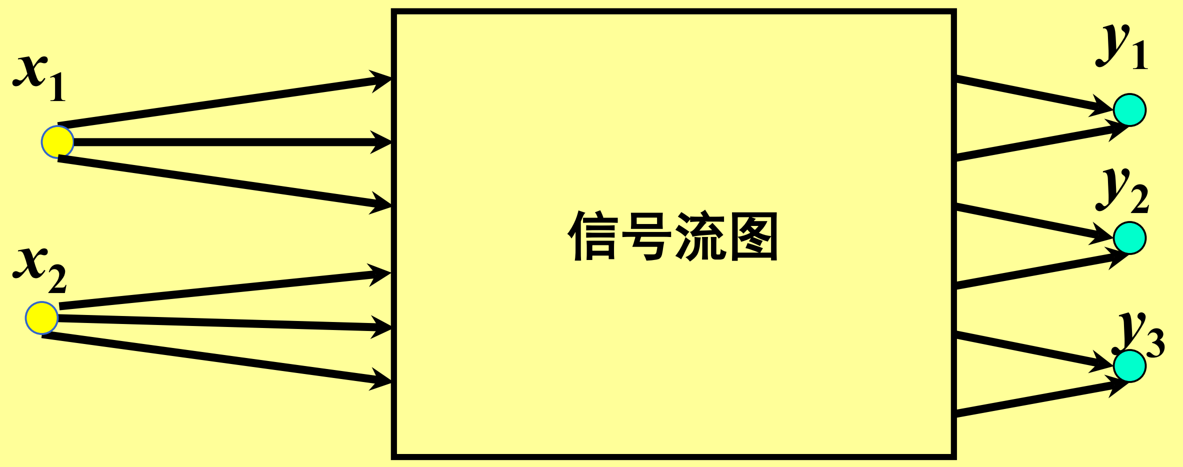
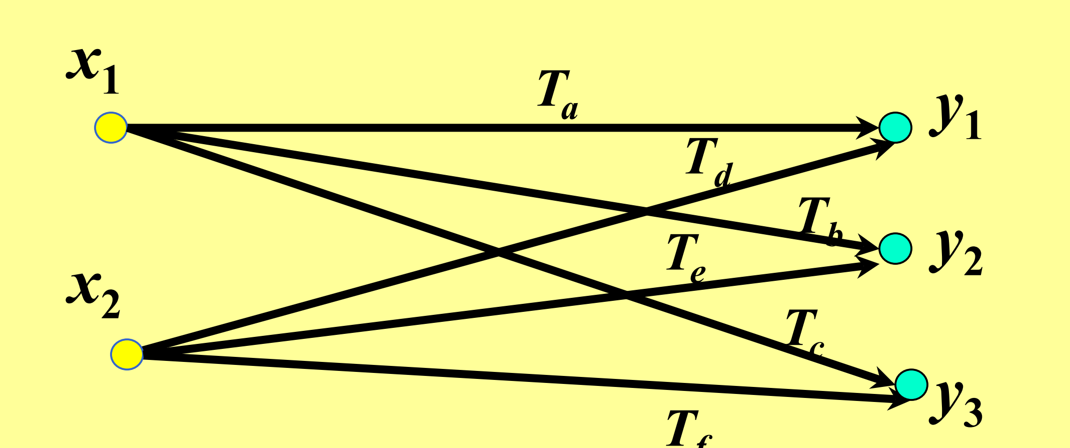


图 a

信号流图（SFG）分析

- 内部节点的作用效果可以通过普通的代数处理过程用因子相乘的形式表示出来，从而得到如图 b 所示的等效图。



图b

$$
\begin{aligned}
y_1 &= T_a x_1 + T_d x_2 \\
y_2 &= T_b x_1 + T_e x_2 \\
y_3 &= T_c x_1 + T_f x_2
\end{aligned}
$$

其中，T 为相应源节点和阱节点之间的总传输增益。

信号流图（SFG）分析

- 对于线性系统，可以利用叠加原理求解由信号流图表示的系统输出。即每次考虑一个源节点的作用，然后求出相应的输出信号，最后系统总的输出信号是各输入作用下系统输出信号之和。
- 传输增益可以通过线性代数处理方法获得。
- 也可以直接根据 SFG 进行分析获得相同的结果。
- 对于由大量线性方程描述的系统，可以通过“观察”SFG 求得系统输出信号，在这种情况下，信号流图分析方法将有很大的优势。
- 信号流图可以根据系统微分方程绘制，也可以由系统结构图按照对应关系得出。

由结构图绘制信号流图

结构图： 输入 → 相加点 / 引出点 / 信号线 → 方框 → 输出

⇕

信号流图： 源节点 → 混合节点 → 支路 → 阱节点

信号流图（SFG）分析

➢ 在前面图中，注意到总传输增益就是系统传递函数

可以成为获得系统传递函数的一般方法？？

梅逊公式，系统总传输增益为：

$$M = \frac{1}{\Delta}\sum_{i}^{n} P_i \Delta_i$$

n: 前向通道总数

其中，

P_i 源节点和阱节点之间的第 i 条前向通道增益

Δ 信号流图特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots\cdots$$

Δ_i 信号流图余因子式（特征式中除去与第 i 条前向通路相接触的回路增益项）

因此：当前向通道接触所有的回路时，Δ_i 等于 1；

当前向通道不接触所有的回路时，Δ_i 等于 Δ 。

梅逊增益公式

$$M=\frac{1}{\Delta}\sum_{i}^{n}P_i\Delta_i$$

n: 前向通道总数

$$\Delta=1-\sum L_1+\sum L_2-\sum L_3+\cdots\cdots$$

❖ 其中,

L_1 是单独回路的回路增益

$\sum L_1$ 是所有单独回路的回路增益之和

L_2 是两个互不接触回路的回路增益的乘积

$\sum L_2$ 是每两个互不接触回路的回路增益乘积之和

L_3 是三个互不接触回路的回路增益的乘积

………

回路 通路的终点就是通路的起点，并且与任何其它节点相交不多于一次的通路称为回路。回路中各支路增益的乘积称为回路增益。

在回路增益中应包含代表反馈极性的正、负符号

不接触回路 一个信号流图可能有多个回路，各回路之间没有任何公共节点，则称为不接触回路，反之称为接触回路。

梅逊增益公式

$$M=\frac{1}{\Delta}\sum_{i}^{n}P_i\Delta_i$$

n: 前向通道总数

$$\Delta=1-\sum L_1+\sum L_2-\sum L_3+\cdots\cdots$$

❖ 其中，

L_1 是单独回路的回路增益

$\sum L_1$ 是所有单独回路的回路增益之和

L_2 是两个互不接触回路的回路增益的乘积

$\sum L_2$ 是每两个互不接触回路的回路增益乘积之和

L_3 是三个互不接触回路的回路增益的乘积

………

$$\begin{aligned}\Delta_i(s)=1&-\sum \text{与通道}\,i\,\text{不接触的回路增益}+\\&+\sum \text{所有2个互不接触且与通道}\,i\,\text{不接触的回路增益之积}\\&-\sum \text{所有3个互不接触且与通道}\,i\,\text{不接触的回路增益之积}\\&+\ldots\end{aligned}$$

梅逊增益公式小结

- 利用信号流图获得系统整体传递函数，可以不需要化简图，并且可以依据相应的规则进行计算。
- 这种规则是求解代数方程的克莱姆法则，梅逊公式就来源于利用克莱姆法则求解线性方程组时，将解的分子多项式及分母多项式与信号流图进行巧妙联系。
- 借助于梅逊公式，不经任何结构变换，便可以直接求得系统的传递函数。

$$M=\frac{1}{\Delta}\sum_{i}^{n}P_i\Delta_i$$

n: 前向通道数

$$\Delta=1-\sum L_1+\sum L_2-\sum L_3+\cdots\cdots$$

梅逊增益公式小结

- n 从输入节点到输出节点所有前向通路的条数；
- P_i 从输入节点到输出节点第i条前向通路的增益；
- Δ_i 在Δ中，将与第i条前向通路相接触的回路的增益除去后所余下的部分，称为余子式；（或抽去第i条前向通路后剩下的信号流图的特征式Δ）
- $\sum L_1$ 所有各回路的回路增益之和；
- $\sum L_2$ 所有两两互不接触回路的回路增益乘积之和；
- $\sum L_3$ 所有三个互不接触回路的回路增益乘积之和；
- ....
- 在回路增益中应包含代表反馈极性的正、负符号。

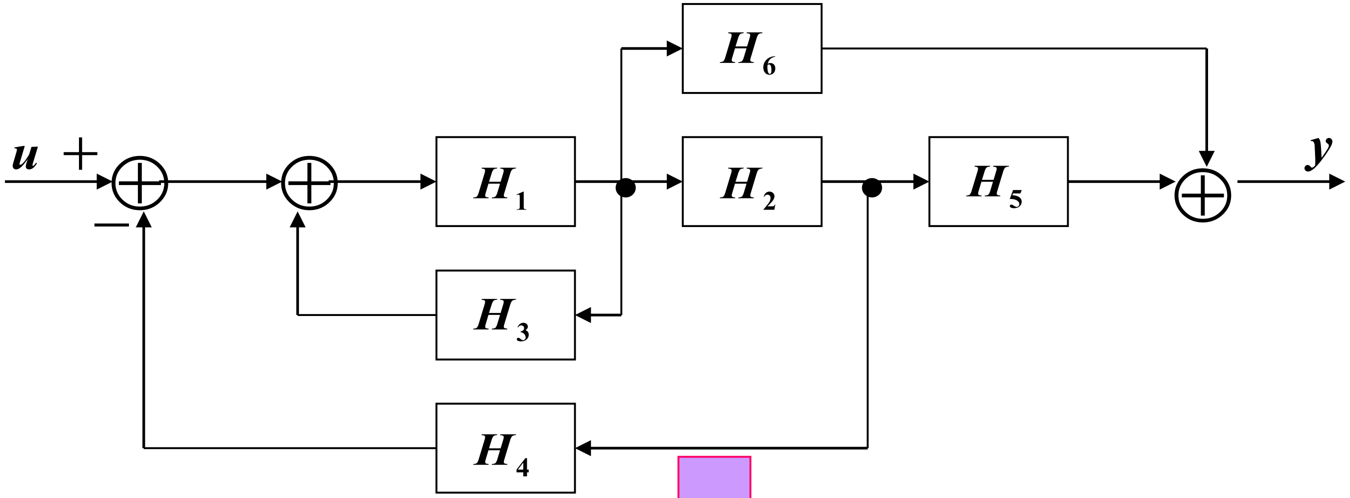
$$M = \frac{1}{\Delta}\sum_{i}^{n} P_i \Delta_i$$

n: 前向通道总数

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots\cdots$$

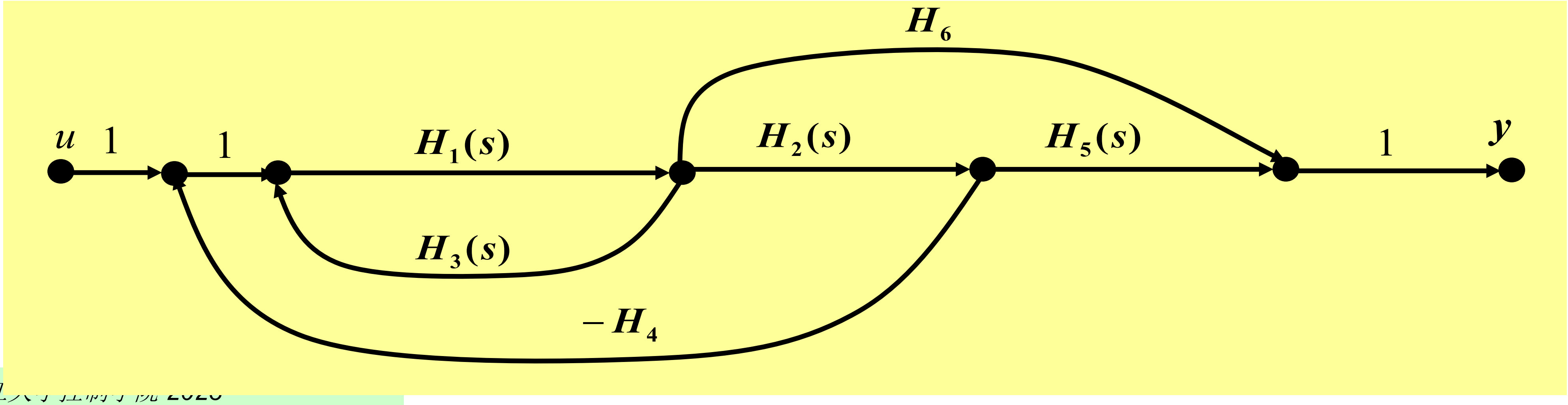
梅逊增益公式：例1

例 1：求取如下图所示系统的整体传递函数。



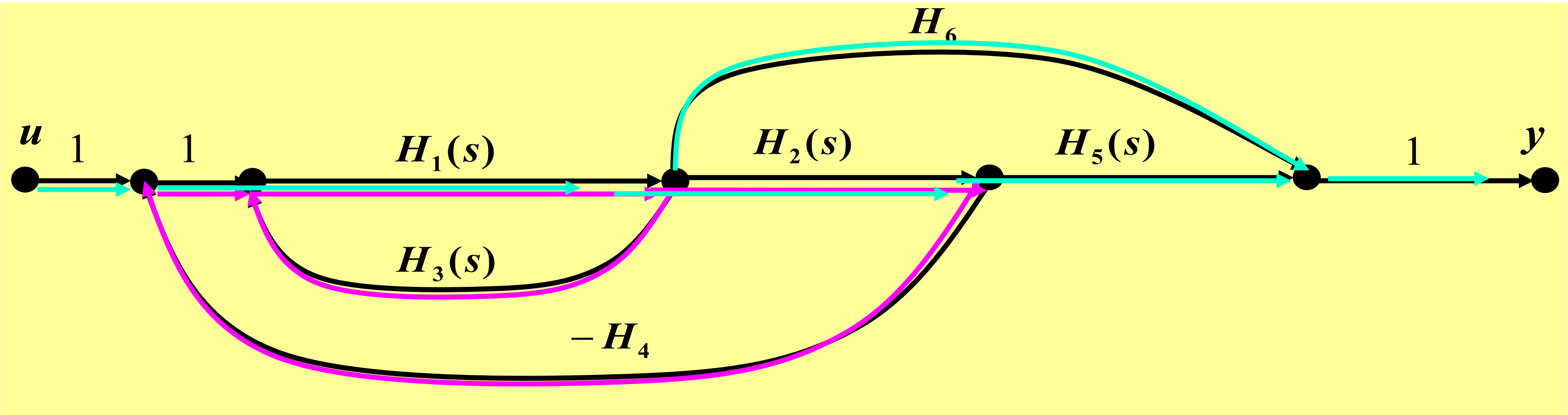
解：

系统的信号流图如下图所示



梅逊增益公式：例1

例 1



步骤 1： 确定回路增益（图中紫色所示）

回路 1：$H_1(s)H_3(s)$

回路 2：$-H_1(s)H_2(s)H_4(s)$

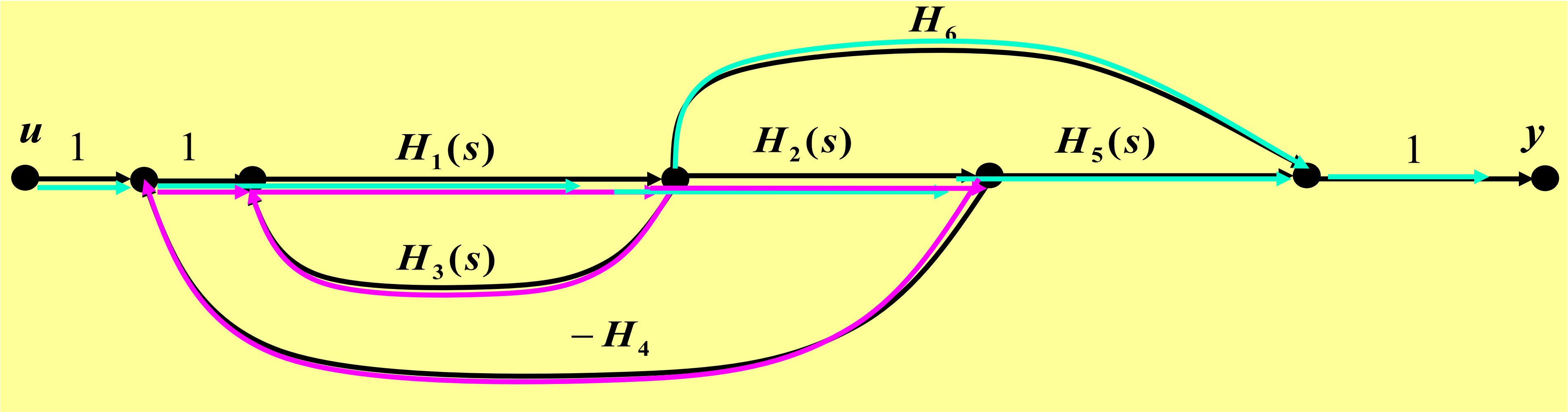
步骤 2： 确定从节点 u 到节点 y 的前向通道增益（图中绿色所示）

通道 1：$H_1(s)H_2(s)H_5(s)$

通道 2：$H_1(s)H_6(s)$

梅逊增益公式：例1

例 1



步骤 3：确定与通道 1 不接触的回路——无

步骤 4：确定与通道 2 不接触的回路——无

步骤 5：分别计算通道 1 和 2 的余子式

$$\Delta_i(s) = 1 - \sum \text{与通道}\, i\, \text{不接触的回路增益} +$$

$$+ \sum \text{所有2个互不接触且与通道}\, i\, \text{不接触的回路增益之积}$$

$$- \sum \text{所有3个互不接触且与通道}\, i\, \text{不接触的回路增益之积}$$

$$+ \ldots$$

梅逊增益公式：例1

- 在此例中，所有回路均与前向通道接触，因此有 $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$

- **步骤 6：计算系统的流图特征式**

$$\begin{aligned}\Delta(s) = 1 - &\sum \text{所有单回路增益} + \\ &+ \sum \text{所有两两互不接触回路增益之积} \\ &- \sum \text{所有三个互不接触回路增益之积} + \ldots\end{aligned}$$

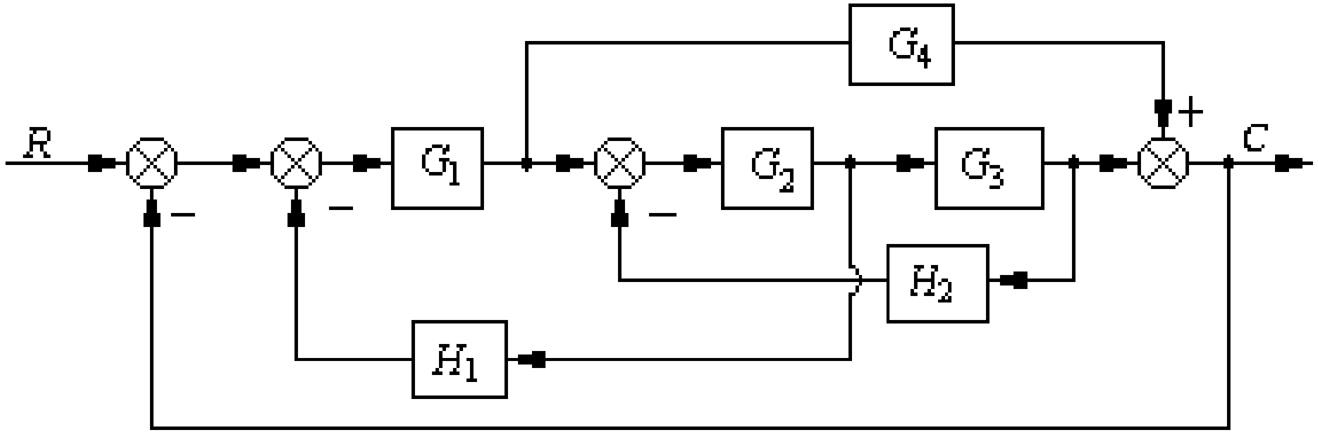
$$\Delta(s) = 1 - H_1 H_3 + H_1 H_2 H_4$$

- **步骤 7：利用梅逊公式得到系统整体传递函数**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1 H_2 H_5 + H_1 H_6}{1 - H_1 H_3 + H_1 H_2 H_4}$$

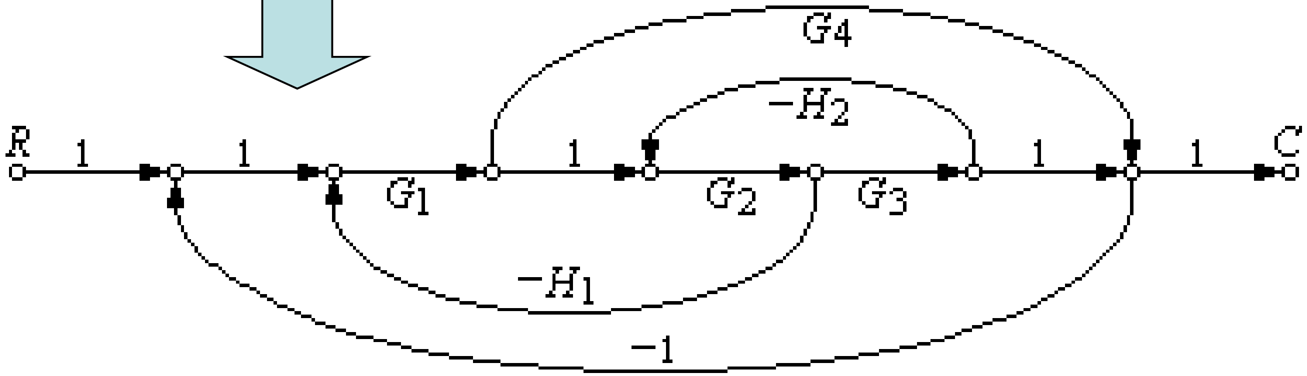
梅逊增益公式：例2

例 2：求取如图(a)所示系统的整体传递函数。



(a) 结构图

解：



(b) 信号流图

梅逊增益公式：例2

例 2

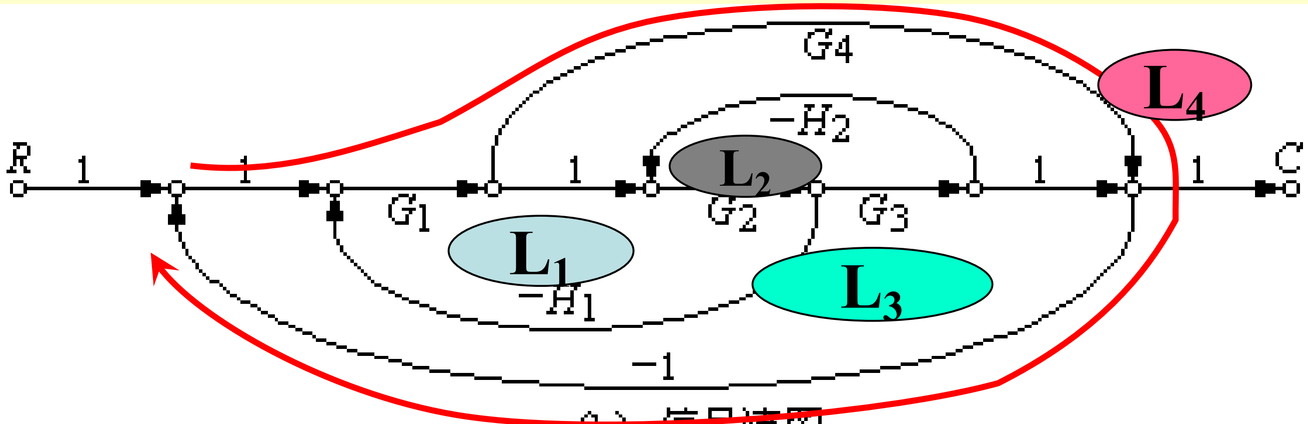
步骤 1：确定回路增益

有4个回路：$L_1 = -G_1G_2H_1$，$L_2 = -G_2G_3H_2$
$L_3 = -G_1G_2G_3$，$L_4 = -G_1G_4$

其中只有 L_2 和 L_4 不接触，$L_2L_4 = (-G_2G_3H_2)*(-G_1G_4)$

步骤 2：计算系统流图特征式

$$D = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_2L_4$$
$$= 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 + G_1G_2G_3G_4H_2$$



(b) 信号流图

梅逊增益公式：例2

例 2

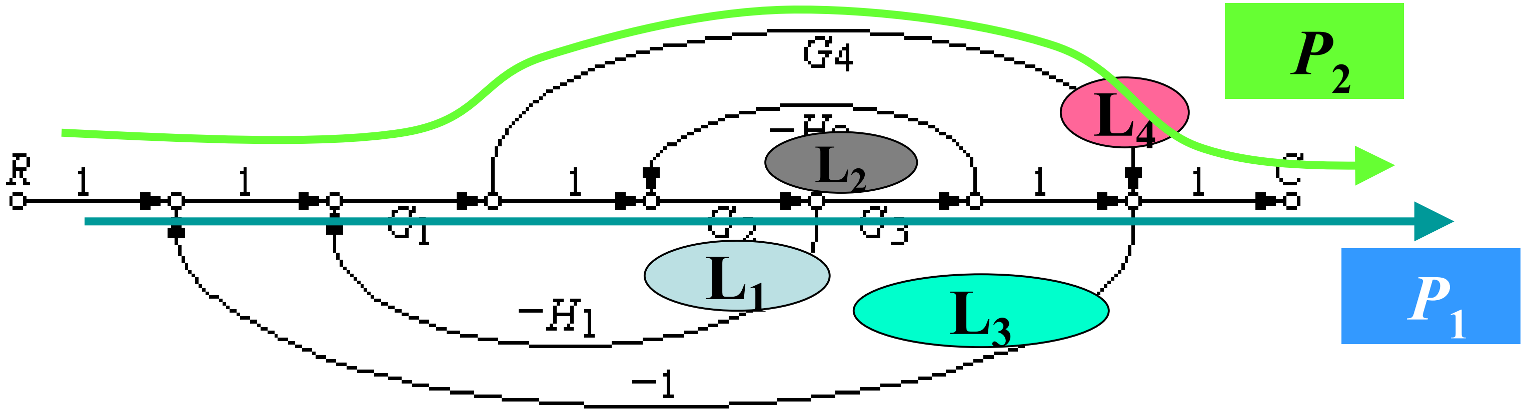
步骤 3：确定从节点 r 到节点 c 的前向通道增益

有 2 条前向通道，n=2

$P_1=G_1G_2G_3$，它接触所有回路，于是$\Delta_1=1$

$P_2=G_1G_4$，它与回路 2 不接触，$L_2= -G_2G_3H_2$，于是

$\Delta_2=（1+ G_2G_3H_2）$



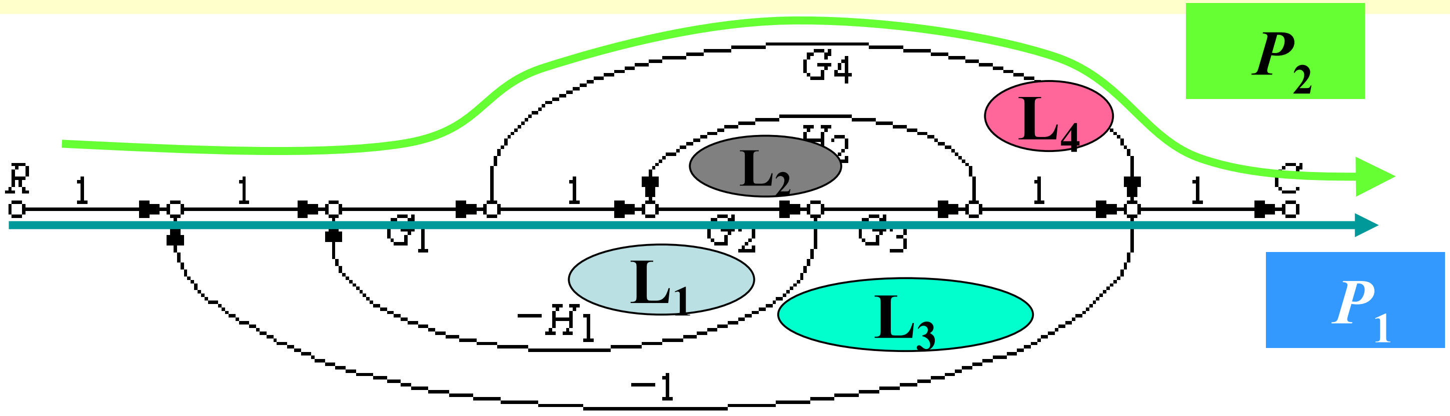
(b) 信号流图

梅逊增益公式：例2

步骤 4：利用梅逊公式得到系统整体传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1+P_2\Delta_2)$$

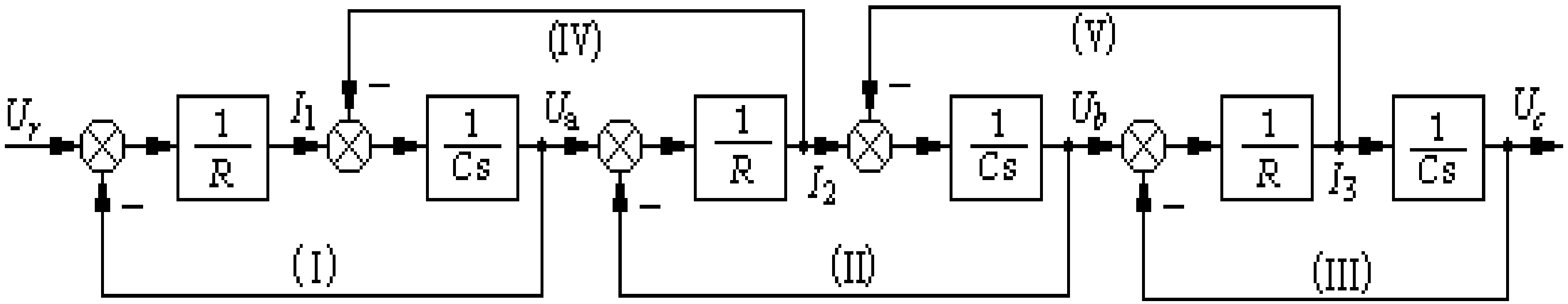
$$=\frac{G_1G_2G_3+G_1G_4(1+G_2G_3H_2)}{1+G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3+G_1G_4+G_1G_2G_3G_4H_2}$$



(b) 信号流图

梅逊增益公式：例3

例 3：针对如下图所示系统，求取U_c/U_r。



解：步骤 1：确定回路增益

共有 5 个反馈回路，且所有回路的增益均相等

$$L_1 = L_2 = \cdots = L_5 = -\frac{1}{RCs}$$ 于是 $$\sum L_i = -\frac{5}{RCs}$$

共有 6 组两两互不接触回路，分别是：I-II、I-III、I-V、II-III、III-IV 及 IV-V， 因此有

$$\sum L_i L_j = \frac{6}{R^2C^2s^2}$$

梅逊增益公式：例3

例 3　　有一组三个互不接触的回路，即I-II-III，于是有

$$\sum L_i L_j L_k = -\frac{1}{R^3C^3s^3}$$

步骤 2： 确定系统流图特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k$$
$$= 1 + \frac{5}{RCs} + \frac{6}{R^2C^2s^2} + \frac{1}{R^3C^3s^3}$$

步骤 3： 确定从 U_r 到 U_c 的前向通道增益

只有 1 条前向通道，n=1

$$P_1 = \frac{1}{R^3C^3s^3}$$

该前向通道接触所有回路，于是有 $\Delta_1=1$

梅逊增益公式：例3

例 3：针对如下图所示系统，求取U_c/U_r。

步骤 4：利用梅逊公式得到系统整体传递函数

$$\frac{U_c}{U_r}=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{\dfrac{1}{R^3C^3s^3}}{1+\dfrac{5}{RCs}+\dfrac{6}{R^2C^2s^2}+\dfrac{1}{R^3C^3s^3}}$$

$$=\frac{1}{R^3C^3s^3+5R^2C^2s^2+6RCs+1}$$

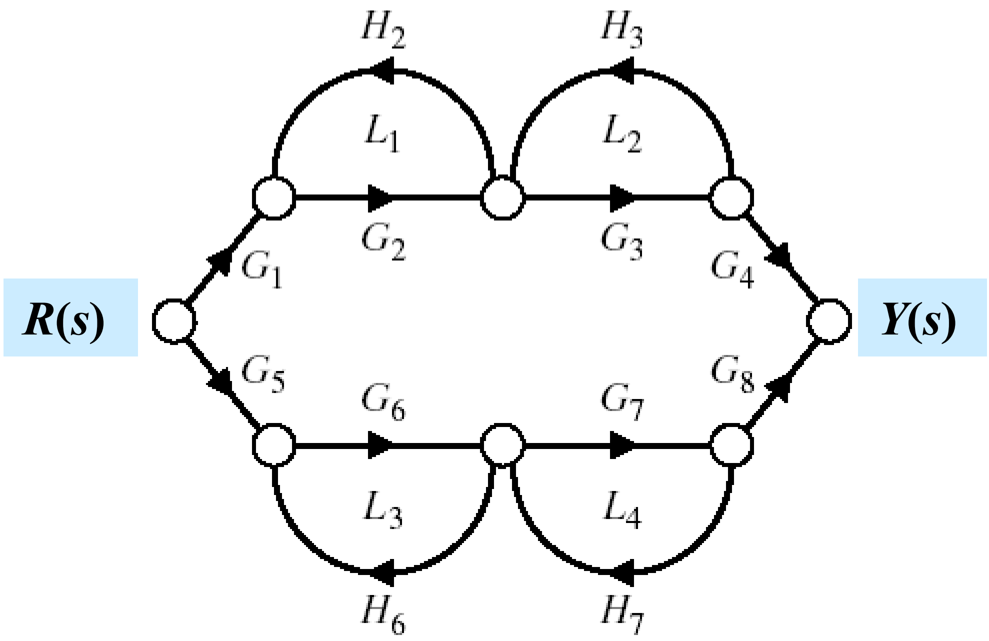
并非用MASON公式就一定简单，需要根据具体情况而定。

梅逊增益公式：例4

例 4：针对如下图所示系统，求解 $Y(s)/R(s)$。

解：步骤 1：确定回路增益

共有 4 条反馈回路：L_1, L_2, L_3 和 L_4；以及 4 组两两互不接触的回路：L_1L_3, L_1L_4, L_2L_3 和 L_2L_4；没有互不接触的 3 个回路。



步骤 2：确定系统信号流图特征式

$$\Delta(s) = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4$$

梅逊增益公式：例4

例 4：针对如下图所示系统，求解 $Y(s)/R(s)$。

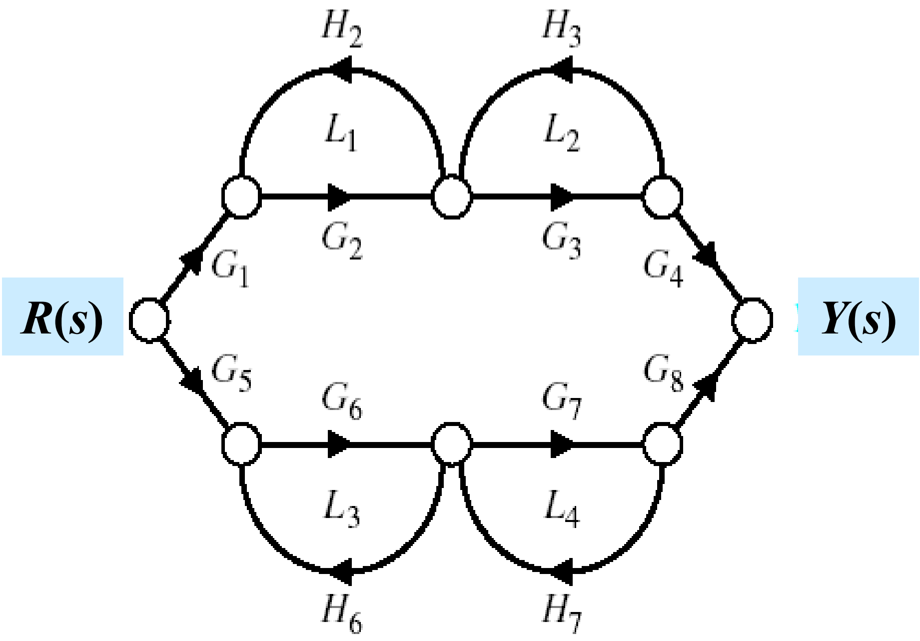
步骤 3：确定前向通道增益

n=2：$P_1=G_1G_2G_3G_4$，

该前向通道与 L_3 和 L_4 不接触，因此有$\Delta_1=1-L_3-L_4$

$P_2=G_5G_6G_7G_8$，

该前向通道与 L_1 和 L_2 不接触，因此有$\Delta_2=1-L_1-L_2$



Two-path interacting system.

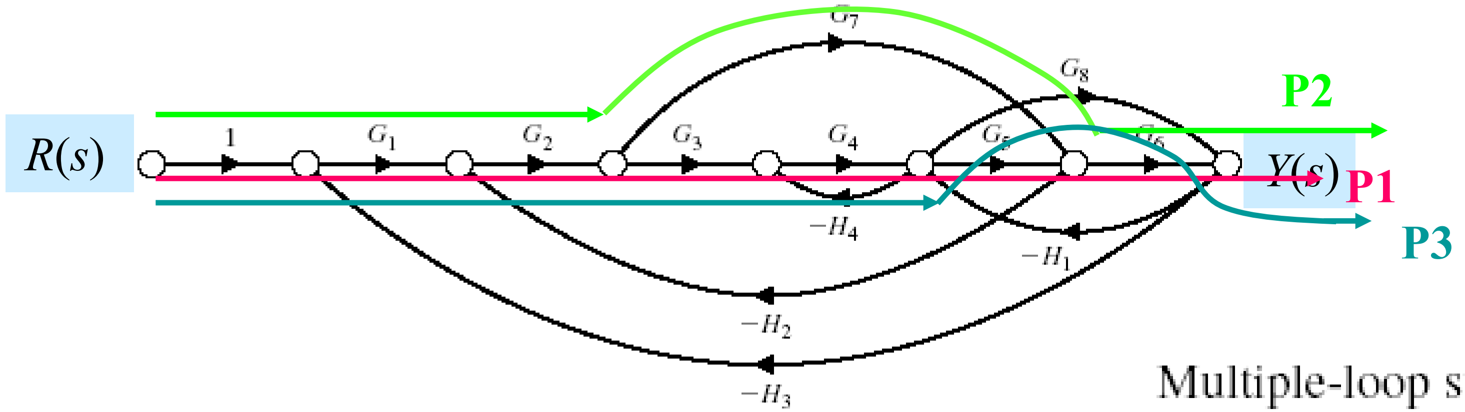
步骤 4：得到系统整体传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\left[G_1\cdot G_2\cdot G_3\cdot G_4\cdot(1-L_3-L_4)\right]+\left[G_5\cdot G_6\cdot G_7\cdot G_8\cdot(1-L_1-L_2)\right]}{1-L_1-L_2-L_3-L_4+L_1\cdot L_3+L_1\cdot L_4+L_2\cdot L_3+L_2\cdot L_4}$$

梅逊增益公式：例5

例 5：针对如下图所示系统，求解 $Y(s)/R(s)$。

解：



Multiple-loop system.

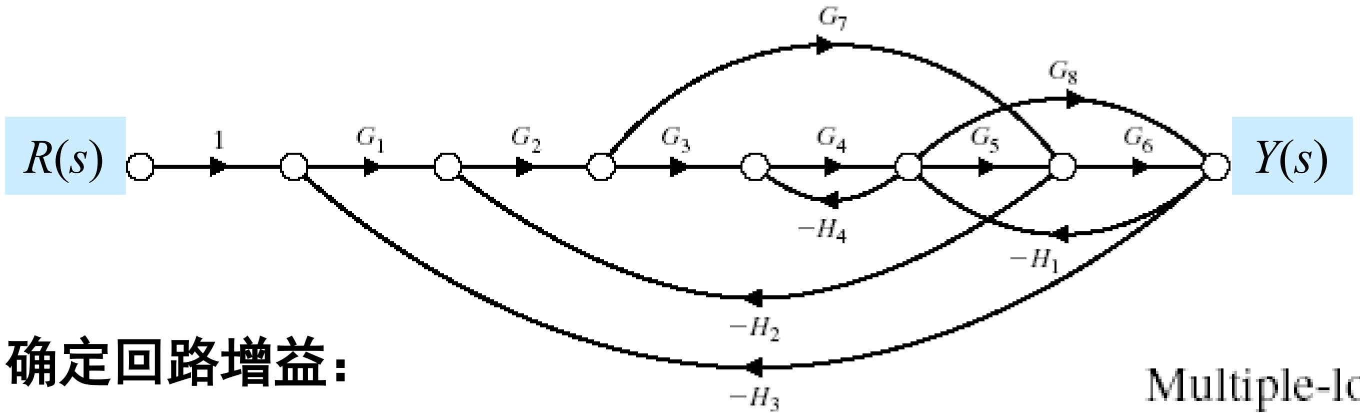
步骤 1：确定从 r 到 y 的前向通道增益

共有 3 条前向通道：

$P_1 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 \cdot G_6$　　　$P_2 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_7 \cdot G_6$　　　$P_3 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_8$

梅逊增益公式：例5

例 5：针对如下图所示系统，求解 Y(s)/R(s)。



Multiple-loop system.

步骤 2：确定回路增益：

共有 8 个回路，回路增益分别是：

$L_1=-G_{123456}H_3$

$L_2=-G_{2345}H_2$

$L_3=-G_8H_1$

$L_4=-G_{27}H_2$

$L_5=-G_4H_4$

$L_6=-G_{12348}H_3$

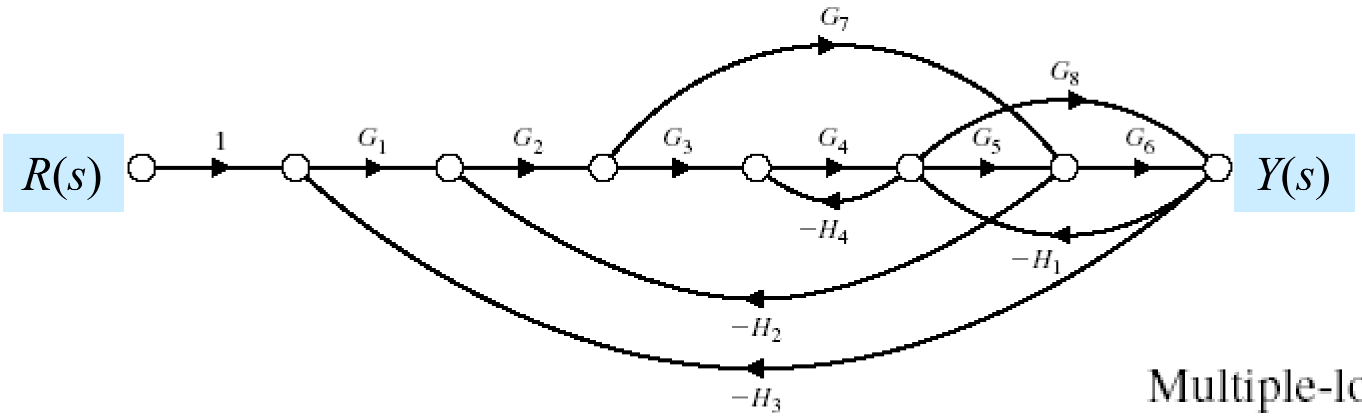
$L_7=-G_{1276}H_3$

$L_8=-G_{56}H_1$

还有 3 组两两互不接触的回路：L_4L_5, L_5L_7, L_4L_3

梅逊增益公式：例5

例 5： 针对如下图所示系统，求解 Y(s)/R(s)。



Multiple-loop system.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2 \cdot \Delta_2 + P_3}{\Delta}$$

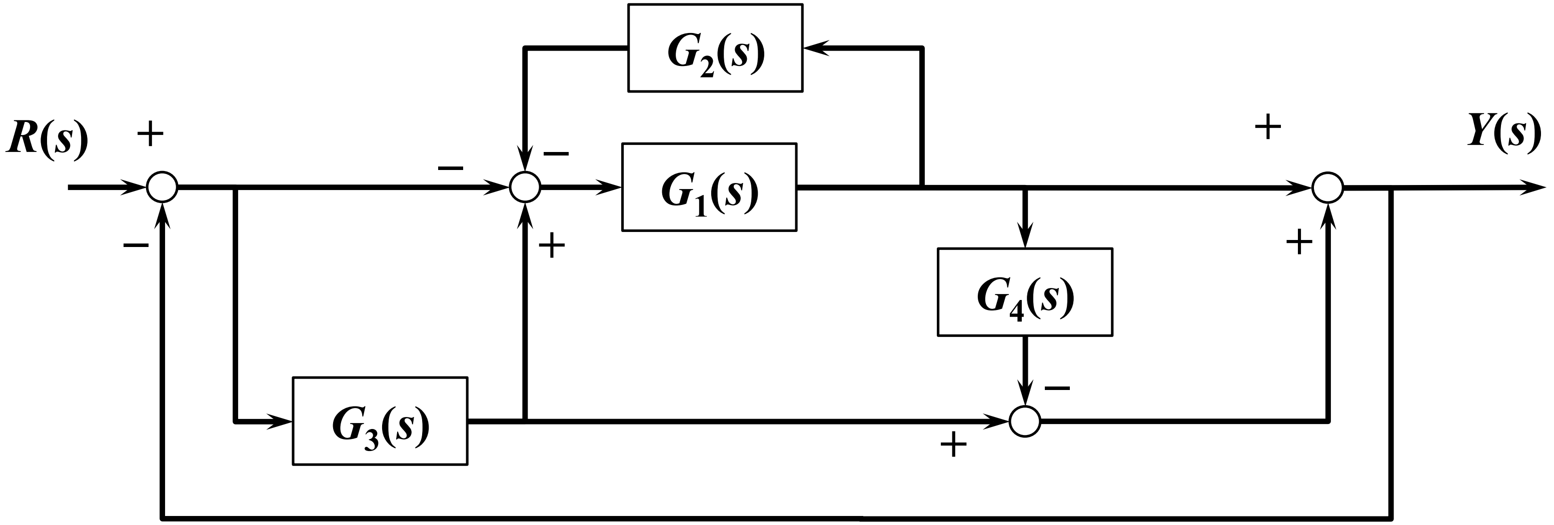
$P_1 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 \cdot G_6$ $\quad$ $P_2 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_7 \cdot G_6$ $\quad$ $P_3 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_8$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + (L_5 \cdot L_7 + L_5 \cdot L_4 + L_3 \cdot L_4)$$

$\Delta_1 = \Delta_3 = 1$ $\quad$ $\Delta_2 = 1 - L_5 = 1 + G_4 \cdot H_4$

梅逊增益公式：例6

例 6：针对如下图所示系统，求解 Y(s)/R(s)。 （用方块图化简法，还是梅逊增益公式?）



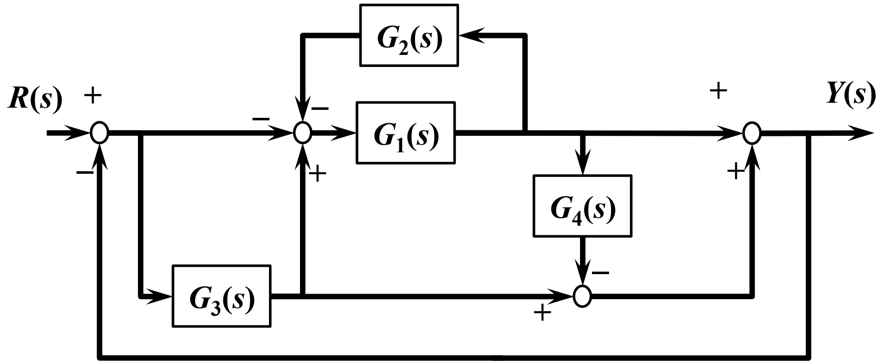
解：

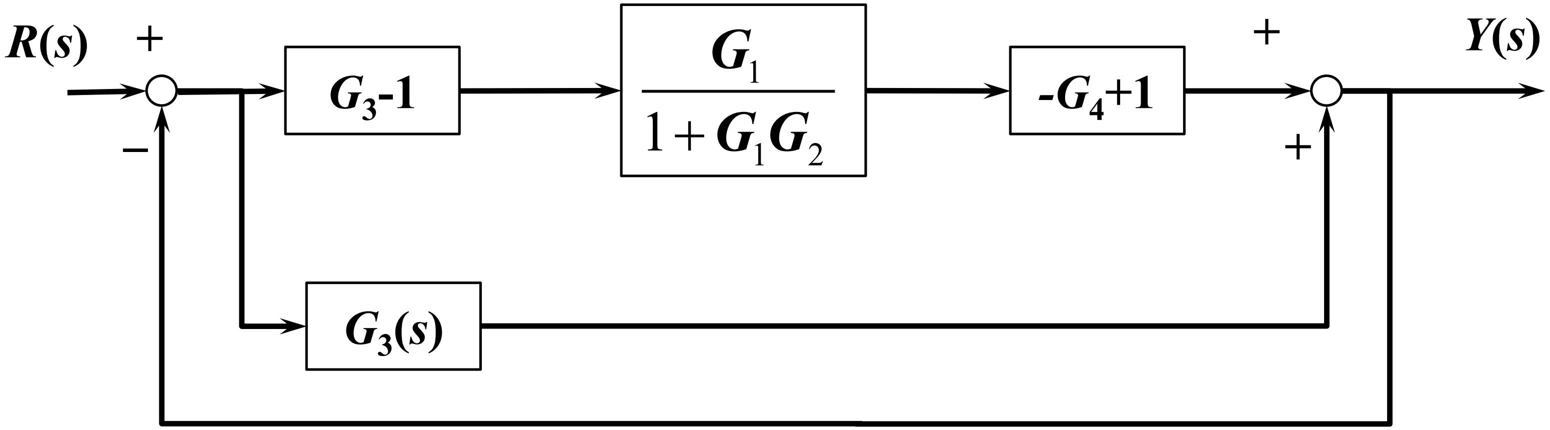
$$\frac{Y(S)}{R(S)}=\frac{G_1G_3-G_1-G_1G_3G_4+G_1G_4+G_3+G_1G_2G_3}{1+G_1G_2+G_1G_3-G_1-G_1G_3G_4+G_1G_4+G_3+G_1G_2G_3}$$

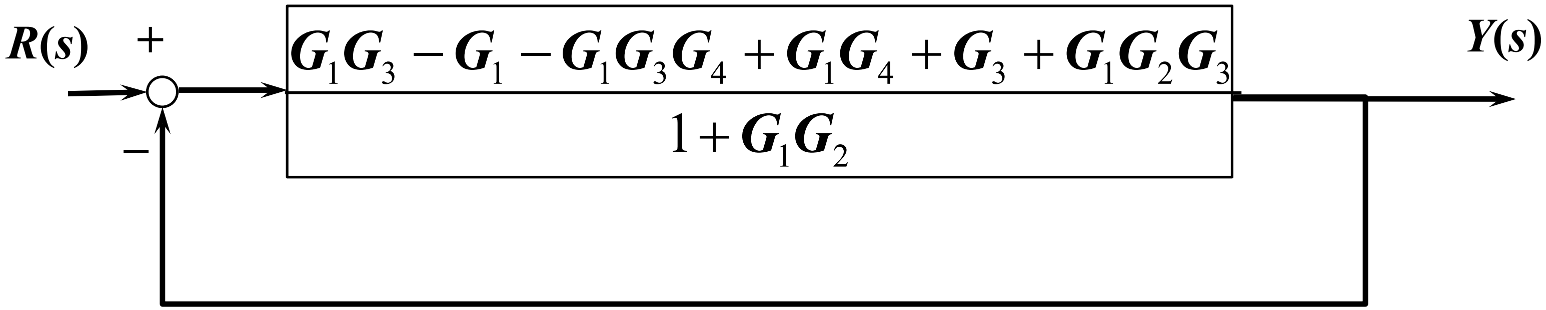
梅逊增益公式：例6

例 6：针对图示系统，求解 Y(s)/R(s)。

（用方块图化简法，还是梅逊增益公式?）





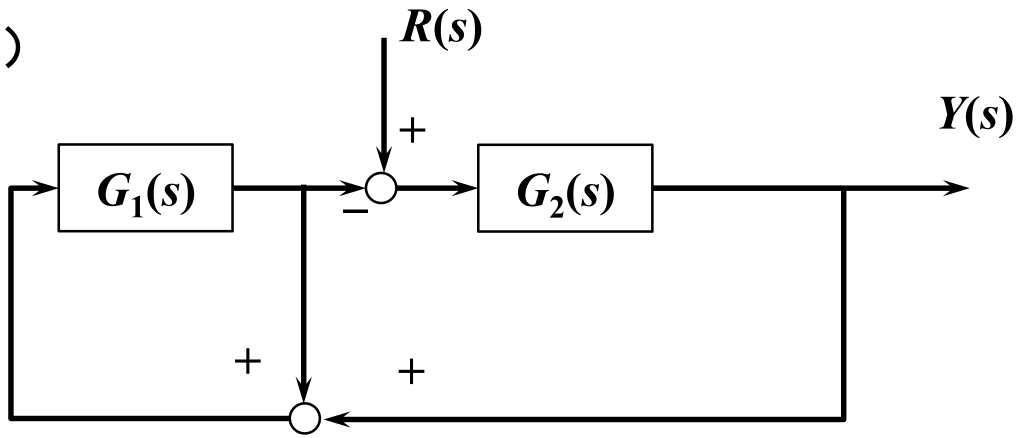


$$\therefore \frac{Y(S)}{R(S)}=\frac{G_1G_3-G_1-G_1G_3G_4+G_1G_4+G_3+G_1G_2G_3}{1+G_1G_2+G_1G_3-G_1-G_1G_3G_4+G_1G_4+G_3+G_1G_2G_3}$$

梅逊增益公式：例7

例 7：针对如下图所示系统，求解 $Y(s)/R(s)$。

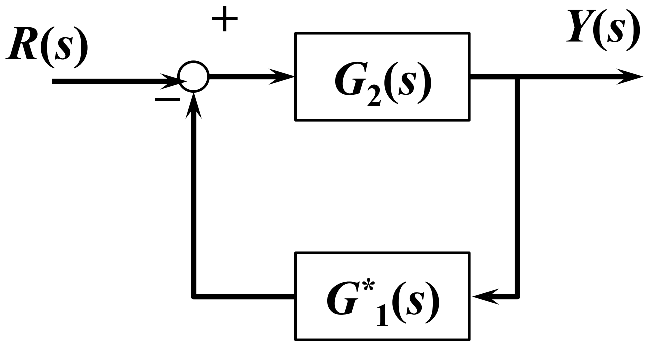
（用方块图化简法，还是梅逊增益公式?）



解：

处理左侧正反馈回路：

$$G_1^*(s)=\frac{G_1(s)}{1-G_1(s)}$$



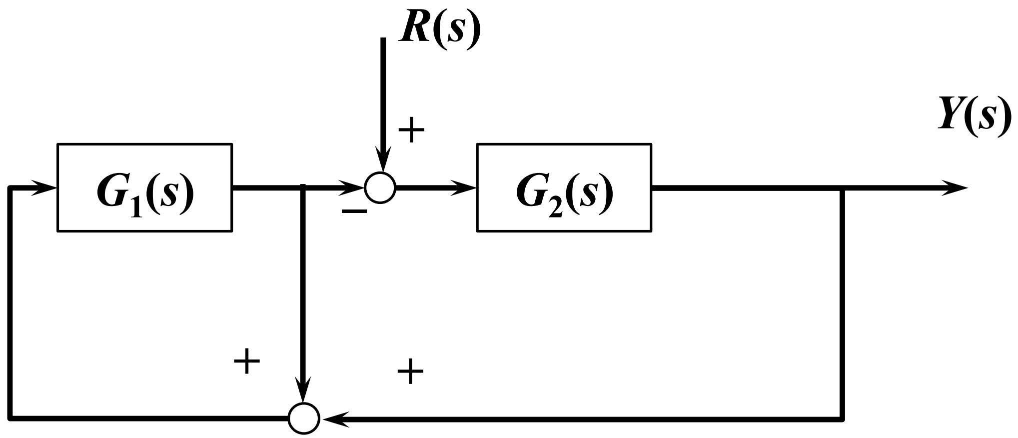
$$G_{闭环}(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)G_1^*(s)}$$

$$\therefore G(s)=\frac{G_2(s)}{1+\dfrac{G_1(s)}{1-G_1(s)}G_2(s)}=\frac{G_2(s)-G_1(s)G_2(s)}{1-G_1(s)+G_1(s)G_2(s)}$$

梅逊增益公式：例7

例 7：针对如下图所示系统，求解 $Y(s)/R(s)$。

（用方块图化简法，还是梅逊增益公式?）



解：利用梅逊公式

$L_1=G_1$

$L_2=-G_1G_2$

$P_1=G_2$

$\Delta=1-L_1-L_2=1-G_1+G_1G_2$

$\Delta_1=1-G_1$

$$\therefore M(s)=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{G_2(s)\{1-G_1(s)\}}{1-G_1(s)+G_1(s)G_2(s)}$$

信号流图小结

- 信号流图定义
- 信号流图代数
- 信号流图分析
- 梅逊增益公式
- 信号流图是获取系统整体传递函数的有力工具，应用梅逊增益公式时，要特别小心，回路和前向通道及其相应的增益不能弄错。

The End