自动控制理论

Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第五章 Chapter 5

根轨迹分析法 (Root Locus)

第五章主要内容

- 根轨迹概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

系统性能分析

1. 回顾
2. 高阶系统
3. 综合设计

系统性能分析——回顾

稳（稳定性）

全部闭环极点位于左半开平面

快（暂态性能）

主导极点（某些稳定高阶系统的低阶近似）

主导极点（1个或2个）特征：

附近无其它零极点

距虚轴较近（其实部绝对值小于其它极点实部绝对值的1/5）

主导根轨迹分支：根轨迹中最接近于虚轴的1条或2条根轨迹分支

二阶系统的标准形式

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{K}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

阻尼比：ζ

自然频率：ω_{n}

系统性能分析——回顾

准（稳态性能）

单位负反馈系统的“型”取决于原点处的开环极点

无位于原点的开环极点，0型系统

有1个位于原点的开环极点，1型系统

有2个位于原点的开环极点，2型系统

…

单位负反馈系统的稳态误差系数与根轨迹增益有关

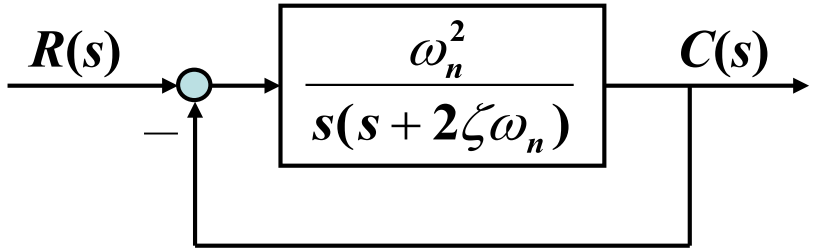
单位负反馈系统开环传递函数$G(s)=\dfrac{K(s+2)}{(s+10)(s+0.5)}$

0型系统

稳态位置误差系数$K_p=\lim\limits_{s\to 0}G(s)=\dfrac{K\times 2}{10\times 0.5}=0.4K$

系统性能分析——回顾

考虑一个二阶系统



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

闭环系统的特征根和单位阶跃响应(ζ<1)

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$= \sigma \pm j\omega_d$$

$$c(t) = 1 - Ae^{\sigma t}\sin(\omega_d t + \varphi)$$

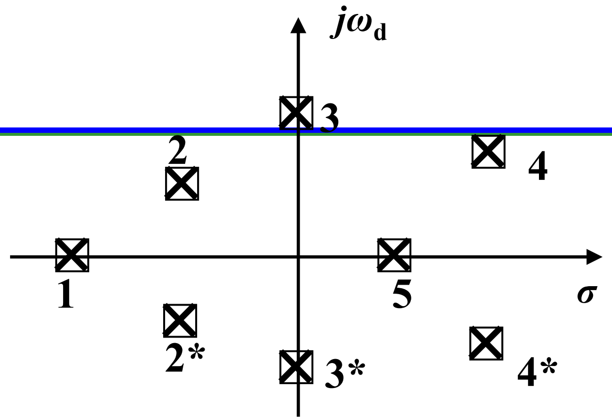
$\sigma >= 0$ 阶跃响应持续振荡或不稳定

$\sigma < 0$ 阶跃响应稳定

系统性能分析——回顾

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$$

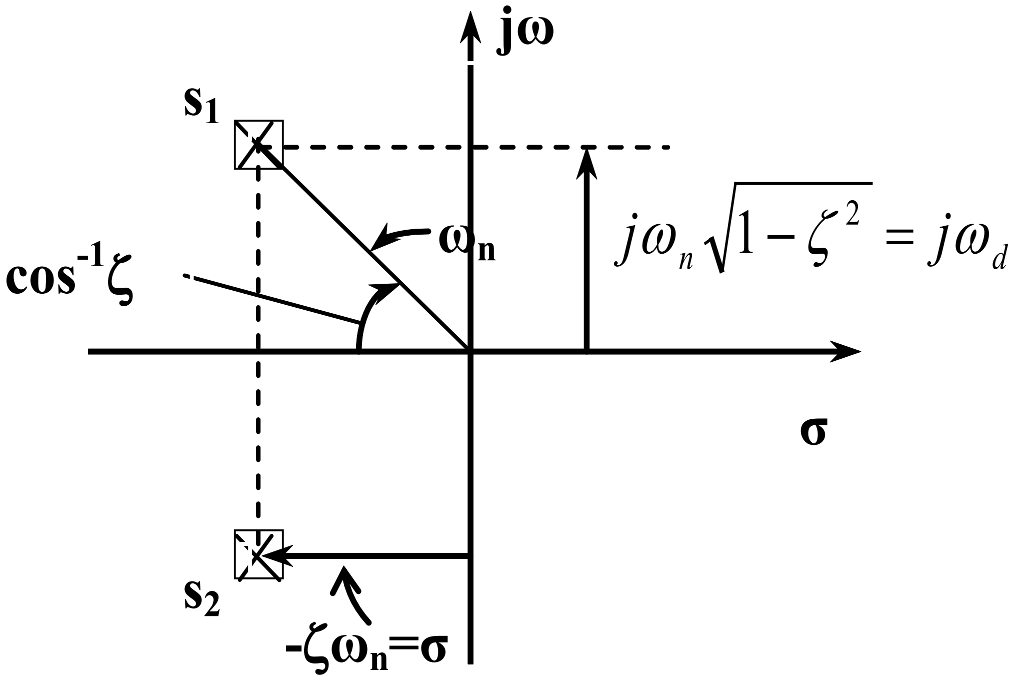


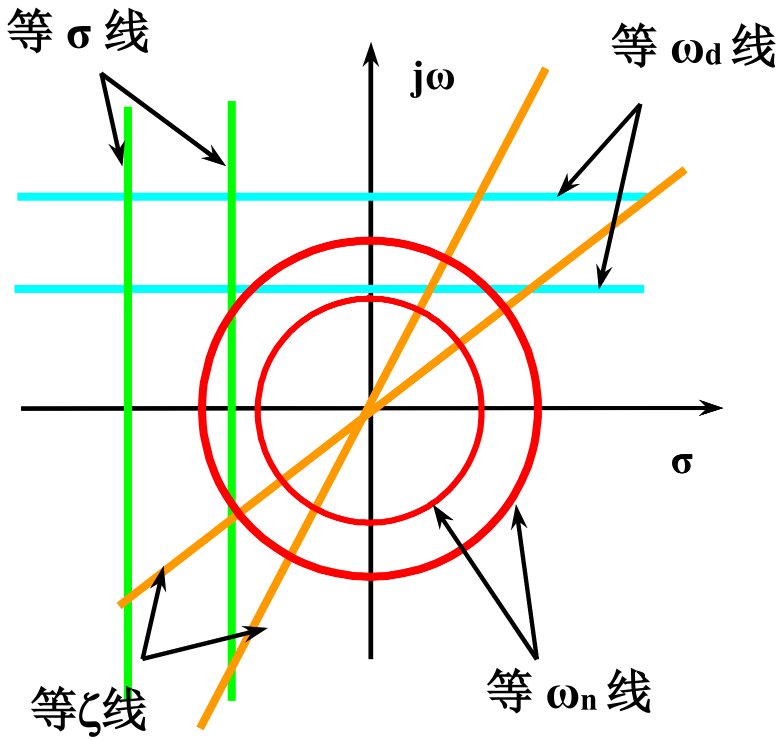
根的位置	ζ	暂态响应的形式	特点
1	$\zeta>1$	$Ae^{\sigma t}$	过阻尼指数衰减
2-2*	$0<\zeta<1$	$Ae^{\sigma t}\sin(\omega_d t+\phi)$	欠阻尼指数衰减振荡
3-3*	$\zeta=0$	$A\sin(\omega_d t+\phi)$	等幅振荡
4-4*	$-1<\zeta<0$	$Ae^{\sigma t}\sin(\omega_d t+\phi)$	指数增大振荡 (不稳定)
5	$\zeta<-1$	$Ae^{\sigma t}$	指数增大(不稳定)

系统性能分析——回顾

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$$

$$c(t) = 1 - Ae^{\sigma t}\sin(\omega_d t + \varphi)$$





系统性能分析——回顾

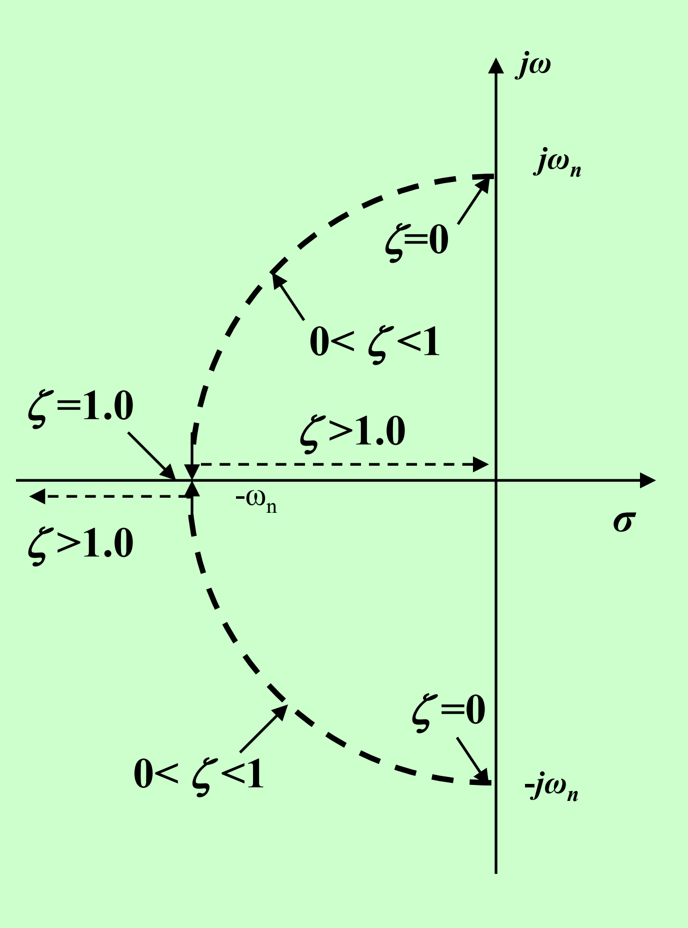
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$$

$$c(t) = 1 - Ae^{\sigma t}\sin(\omega_d t + \varphi)$$

S平面的特点如下：

- **水平线**表示衰减振荡频率ω_d为常数。水平线越接近实轴，ω_d越小。当根位于实轴上时(ω_d=0)，过渡过程无振荡。
- **垂直线**表示瞬态过程衰减速率为常数，垂直线(或特征根)越接近于虚轴，瞬态过程越长。
- **以原点为中心的圆**表示无阻尼振荡频率 ω_n为常数，由于 $\sigma^2+\omega_d^2=\omega_n^2$。常值$\omega_n$的根轨迹在S平面上为一个圆， 圆越小，则 ω_n 越低。
- **过原点的射线 (角度)** 表示阻尼比ζ为常数，对于正的ζ， 由负实轴顺时针旋转的角度为$\cos^{-1}\zeta$。

系统性能分析——回顾



对于 ζ=0，特征根在虚轴

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

对于 0<ζ<1，特征根为共轭复根

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

对于 ζ=1，特征根为相等的实根

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n$$

对于 ζ>1，特征根为相异的实根

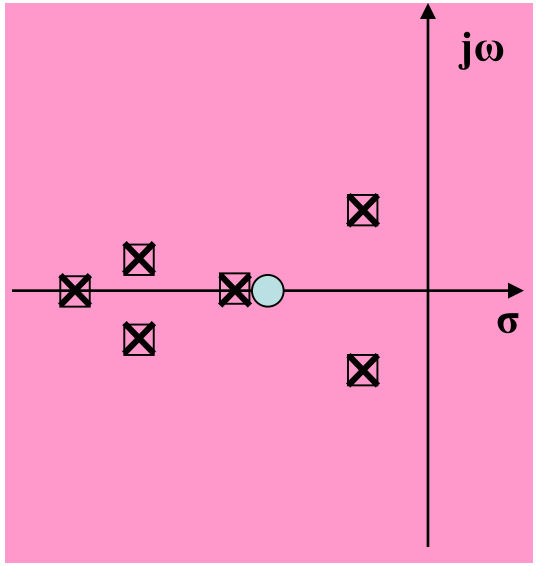
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

系统性能分析——高阶系统

高阶系统——特征方程中含有一对或多对共轭复根。

主导极点——对应于瞬态响应中过渡过程时间最长，幅度最大。

- 接近于虚轴。
- 其它极点(左侧)远离主导极点，从而使得这些极点对应的瞬态响应幅值小，衰减迅速。
- 若有极点与主导极点距离不够远，则应有一零点与该极点较近，从而使得该极点对应的瞬态响应幅值较小。



系统性能分析——高阶系统

例 5-23

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{24040(s+25)}{(s^2+13s+173.5)(s^2+111.8s+3450)}$$

$$=\frac{24040(s+25)}{[(s+6.6)^2+11.4^2][(s+55.9)^2+18^2]}$$

可以忽略。

单位阶跃输入下的响应$c(t)$

$$c(t)=1+1.21e^{-6.6t}\sin(11.4t-111.7°)+0.28e^{-55.9t}\sin(18t+26.1°)$$

$$\approx 1+1.21e^{-6.6t}\sin(11.4t-111.7°)$$

注意：由特征根s=-55.9±j18产生的瞬态响应的衰减速度是由主导极点s= -6.6±j11.4产生的瞬态响应衰减速度的10倍左右。

定义：1）主导极点是指最接近于虚轴对系统影响最大的极点；

2）主导极点的根轨迹分支是最接近于虚轴的根轨迹分支，这些分支对系统的时间响应影响最大。

系统性能分析——高阶系统

根轨迹绘制的法则 10：在根轨迹上确定特征根

通常由系统性能指标来确定主导极点，一般步骤：

系统时域性能指标：峰值M_p，峰值时间t_p，调节时间t_s，增益K

↕

阻尼比ζ，无阻尼自然频率ω_n，阻尼振荡频率ω_d，衰减系数σ，或增益K

↕

选择主导极点，应用幅值条件计算根轨迹增益。

系统性能分析——高阶系统

根轨迹绘制的法则 10：在根轨迹上确定特征根

确定其他根轨迹分支上的点，使其满足具有与主导极点相同的根轨迹增益。其他根轨迹分支上的特征根可以用下列任一方法求取：

如果除了一个实根或者一对共轭复根之外，其余特征根均已知，则可用下列任一方法确定未知的特征根。

方法 1： 除以由已知特征根构成的特征多项式，商为未知特征根构成的多项式

方法 2： 对于$m \le n-2$的系统，采用法则 9 求取系统的特征根

系统性能分析——高阶系统（举例）

例5-24 已知某控制系统前向通道传递函数$G(s)$与反馈通道传递函数$H(s)$，绘制根轨迹，并给出单位阶跃响应$c(t)$(其中主导极点的ζ=0.5)。

$$G(s)=\frac{K_1}{s(s^2/2600+s/26+1)} \qquad H(s)=\frac{1}{0.04s+1}$$

解：将$G(s)$、 $H(s)$重写

$$G(s)=\frac{2600K_1}{s(s^2+100s+2600)} \qquad H(s)=\frac{25}{s+25}$$

则有

$$G(s)H(s)=\frac{65000K_1}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}=\frac{K}{s^4+125s^3+5100s^2+65000s}$$

$$K=65000K_1$$

系统性能分析——高阶系统（举例）

1)开环极点： $n = 4 \quad p_1 = 0, p_2 = -25, p_3 = -50 + j10, p_4 = -50 - j10$

开环零点： $w = 0$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

2) 4条根轨迹分支

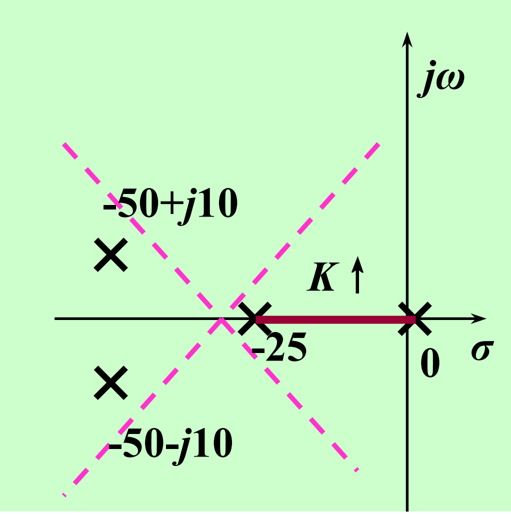
3) 实轴上的根轨迹： [-25，0]

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180°}{n-w} = \frac{(1+2h)180°}{4} = \pm 45°, \pm 135°$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1+p_2+p_3+p_4}{n-w} = \frac{0-25-50-50}{4} = -31.25$$



系统性能分析——高阶系统（举例）

5) 实轴上的分离点d

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

方法 1

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+25}+\frac{1}{d+25-j10}+\frac{1}{d+25+j10}=0$$

方法 2

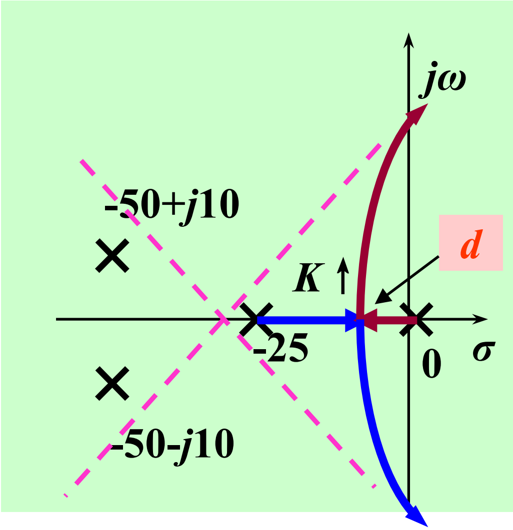
$$-K=s^4+125s^3+5100s^2+65000s$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=4d^3+375d^2+10200d+65000=0$$

$$d=-9.15$$

分离角：

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l}=\frac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

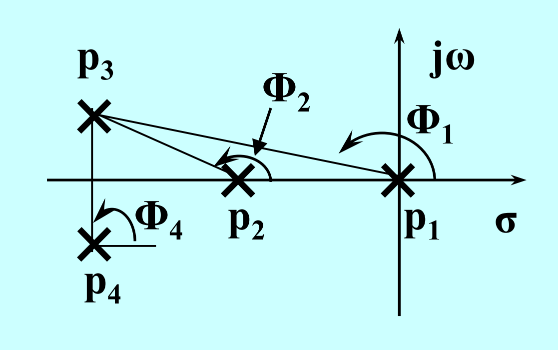


系统性能分析——高阶系统（举例）

6) 极点 –50+j10 处的出射角 Φ_{3_D}

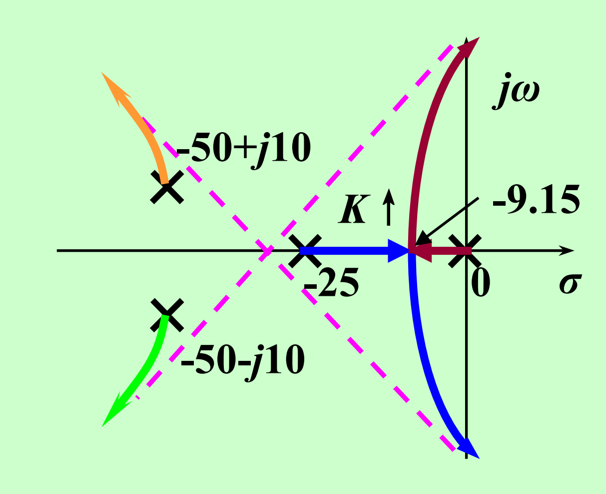
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\begin{aligned}\phi_{3_D}&=(1+2h)180^\circ-(\phi_1+\phi_2+\phi_4)\\&=(1+2h)180^\circ-(168.7^\circ+158.2^\circ+90^\circ)\\&=123.1^\circ\end{aligned}$$



同样地，

极点–50-j10处的出射角为 –123.1°



系统性能分析——高阶系统（举例）

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

7) 根轨迹与虚轴的交点：

$$\Delta(s)=s^4+125s^3+5100s^2+65000s+65000K_1$$

根据Routh表：

s^4	1	5100	$65000K_1$
s^3	1	520(同除以125)	
s^2	1	$14.2K_1$(同除以4580)	
s^1	$520-14.2K_1$		
s^0	$14.2K_1$		

$$520-14.2K_1=0 \quad\Rightarrow\quad K_1=36.6$$

由s^2行构造辅助方程：

$$s^2+14.2K_1=0 \quad\Rightarrow\quad s=\pm j\sqrt{14.2K_1}=\pm j22.8$$

系统性能分析——高阶系统（举例）

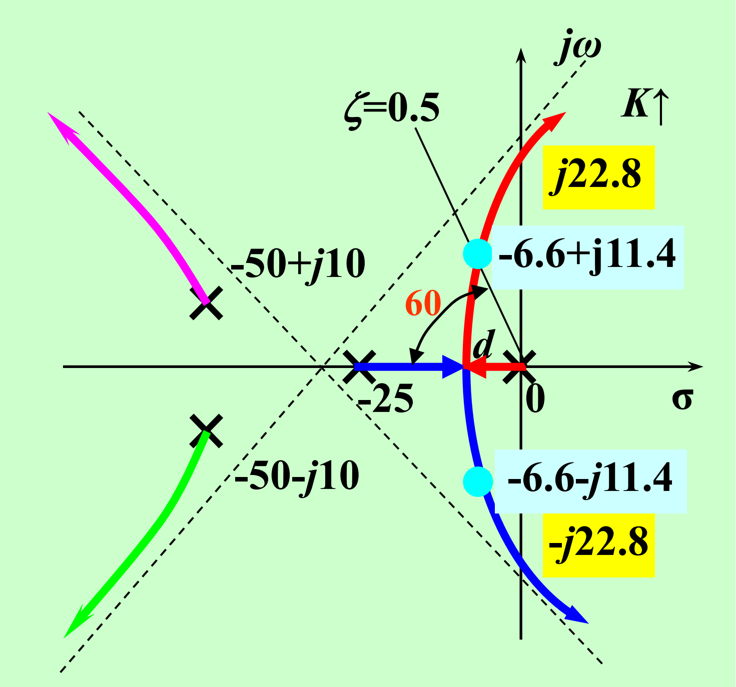
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

8) 绘制ζ=0.5的射线，其中η

$$\eta=\cos^{-1}0.5=60°$$

由图可以得到主导极点

$$s_{1,2}=-6.6\pm j11.4$$



9) 增益

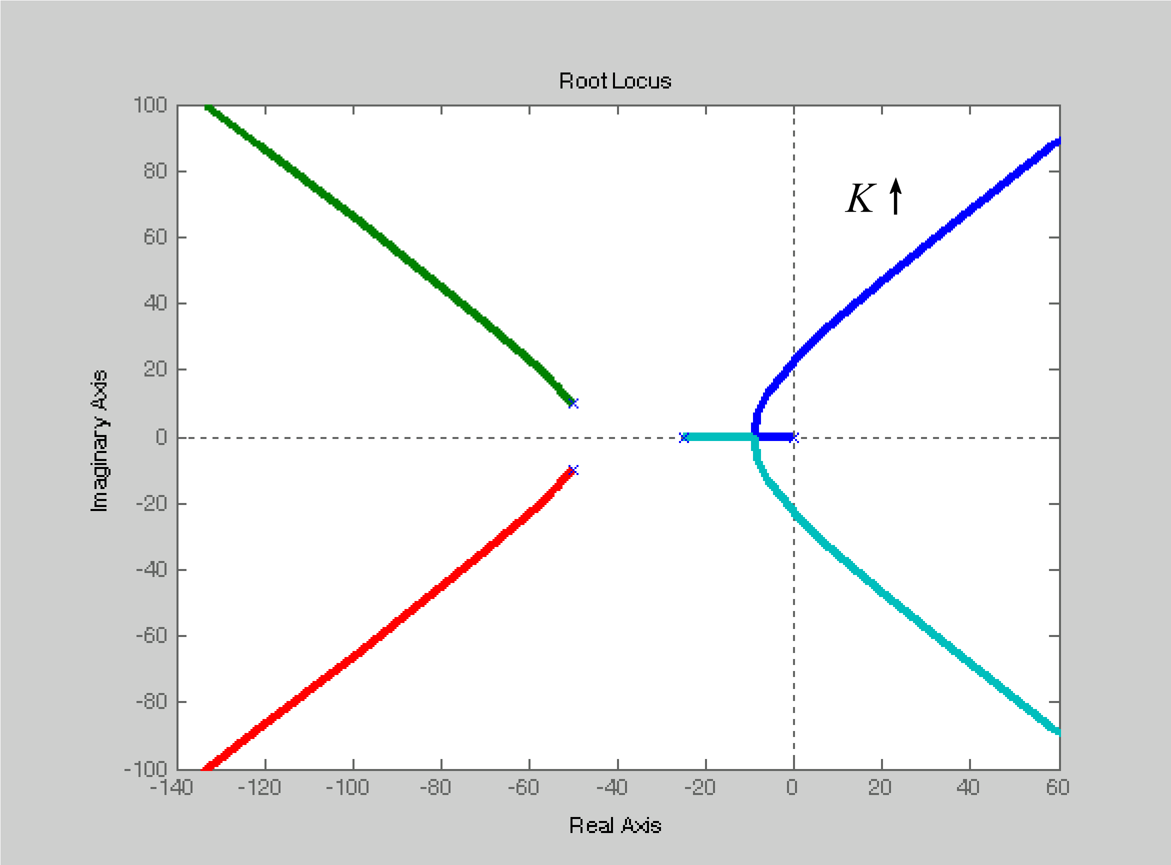
$$K=65000K_1=\left(|s|\cdot|s+25|\cdot|s+50-j10|\cdot|s+50+j10|\right)\Big|_{s=-6.6+j11.4}$$

$$K=598800=65000K_1,\qquad K_1=9.25$$

系统性能分析——高阶系统（举例）

根轨迹图

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$



系统性能分析——高阶系统（举例）

10)满足幅值K=598800的其余特征根

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

方法 1

$$1+G(s)H(s)=s^4+125s^3+5100s^2+65000s+598800=0$$

$$\frac{s^4+125s^3+5100s^2+65000s+598800}{(s+6.6+j11.4)(s+6.6-j11.4)}$$

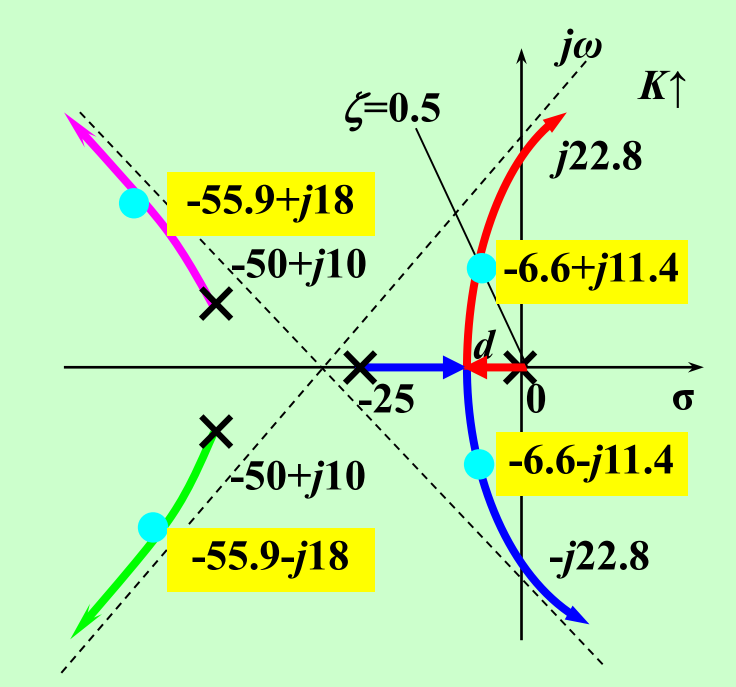
$$=\frac{s^4+125s^3+5100s^2+65000s+598800}{s^2+13.2s+173.52}$$

$$=s^2+111.8s+3450$$

$$\therefore s_{3,4}=-55.9\pm j18$$

方法 2

因为满足分母阶次n>=分子阶次w+2，故可用法则9（根之和）法则来确定根的实部



系统性能分析——高阶系统（举例）

方法 2

由法则9（根之和）

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$0-25+(-50+j10)+(-50-j10)$$
$$=(-6.6+j11.4)+(-6.6-j11.4)+(\sigma+j\omega_d)+(\sigma-j\omega_d)$$

$$\sigma=-55.9$$

利用根轨迹以及已知的σ，可以确定具体的根

$$\Phi(s)=\frac{G}{1+GH}=\frac{\frac{N_1}{D_1}}{1+\frac{N_1}{D_1}\frac{N_2}{D_2}}=\frac{N_1D_2}{\text{closed-loop roots}}$$

$$s_{3,4}=-55.9\pm j18$$

$$G(s)=\frac{2600K_1}{s(s^2+100s+2600)}\qquad H(s)=\frac{25}{s+25}$$

11) 闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{24040(s+25)}{s^4+125s^3+5100s^2+65000s+65000K_1}$$

系统性能分析——高阶系统（举例）

12) 阶跃响应$c(t)$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{24040(s+25)}{(s+6.6+j11.4)(s+6.6-j11.4)(s+55.9+j18)(s+55.9-j18)}$$

$$C(s)=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+6.6-j11.4}+\frac{A_2}{s+6.6+j11.4}+\frac{A_3}{s+55.9-j18}+\frac{A_4}{s+55.9-j18}$$

$$A_0=1.0\quad A_1=0.604\angle(-201.7°)\quad A_3=0.14\angle(-63.9°)$$

可以忽略

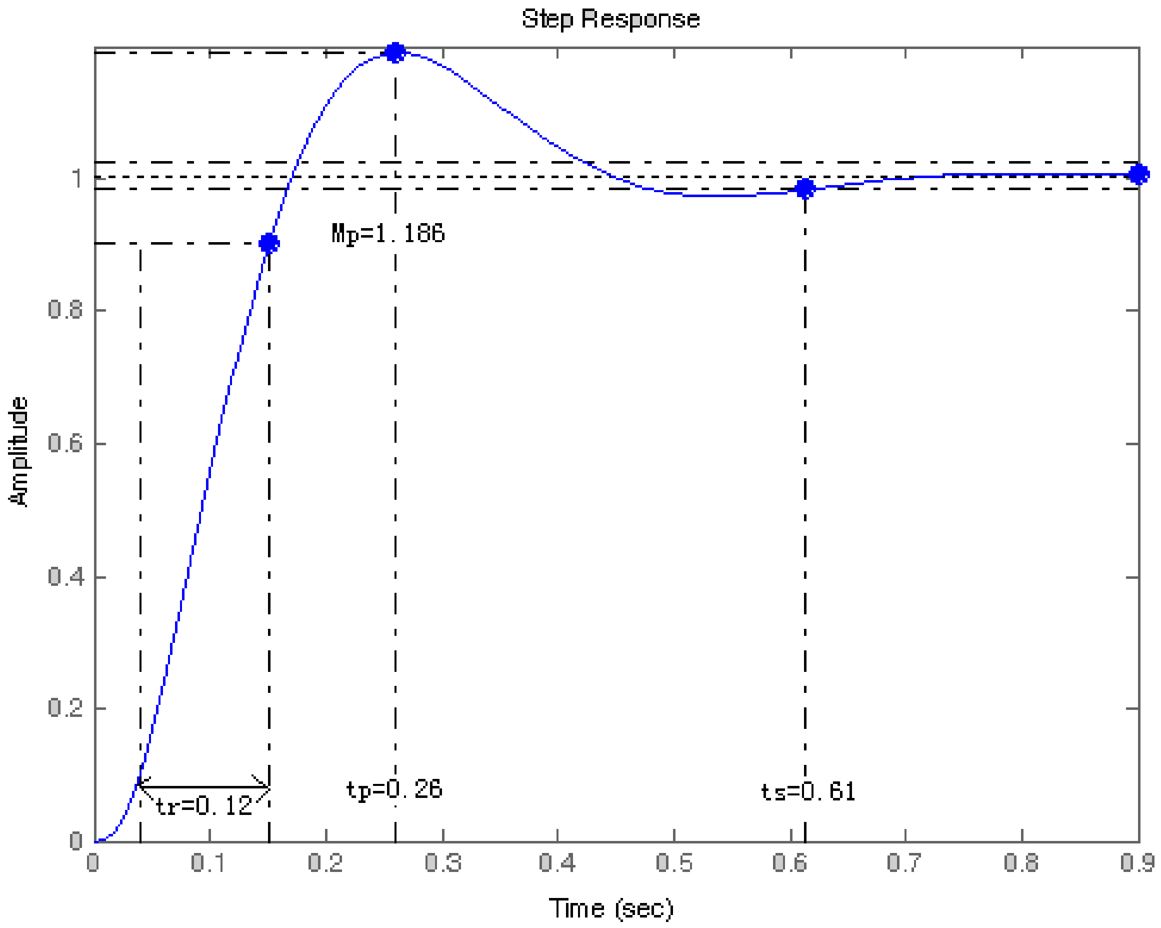
响应$c(t)$

$$c(t)=1+1.21e^{-6.6t}\sin(11.4t-111.7°)+0.28e^{-55.9t}\sin(18t+26.1°)$$

系统性能分析——高阶系统（举例）

仿真$c(t)$

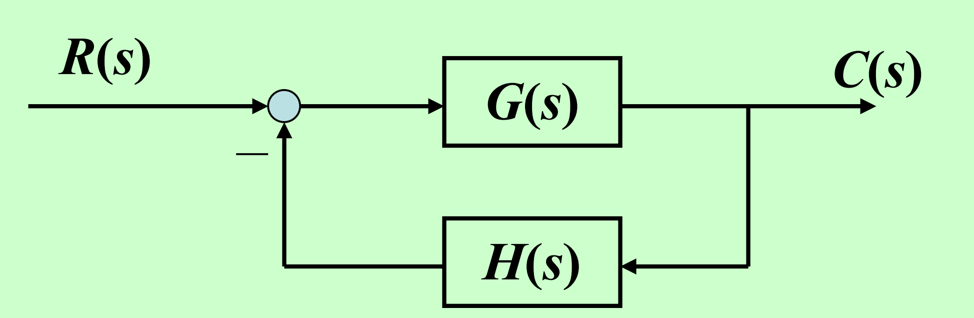
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$



系统性能分析——高阶系统（举例）

例5-25已知某反馈控制系统如图所示，请绘制根轨迹，判别系统的稳定性，并给出单位阶跃响应$c(t)$。

（其中主导极点的ζ=0.707 ）



$$G(s)=\frac{-2(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

$$H(s)=K_h$$

$$K_h<0$$

解：开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

$$K=-2K_h>0$$

系统性能分析——高阶系统（举例）

1)开环极点： $n=4, p_1=0, p_2=-3, p_3=-4+j4, p_4=-4-j4$

开环零点： $w=2, z_1=-6, z_2=6$

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

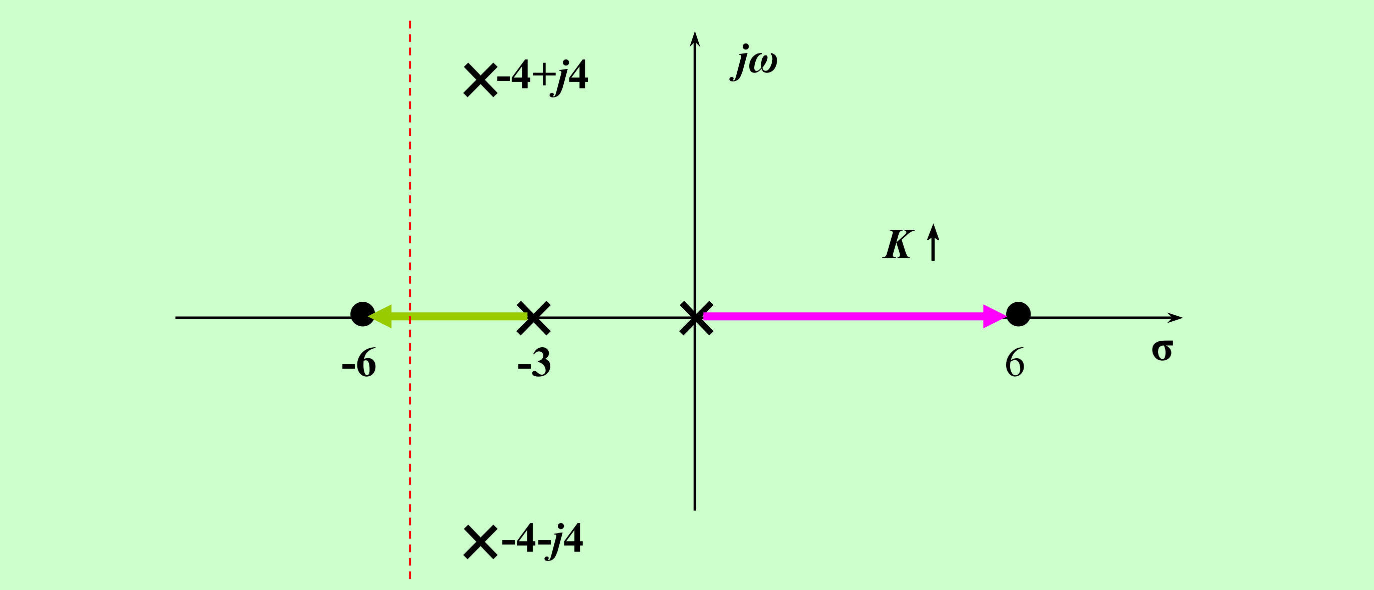
2) 4条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹： [0, 6], [-6，-3]

4) 渐近线与实轴的夹角与交点

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\pm 90^\circ$$

$$\sigma_0=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-w}=-5$$



系统性能分析——高阶系统（举例）

5) 极点$-4+j4$处的出射角Φ_{3_D}

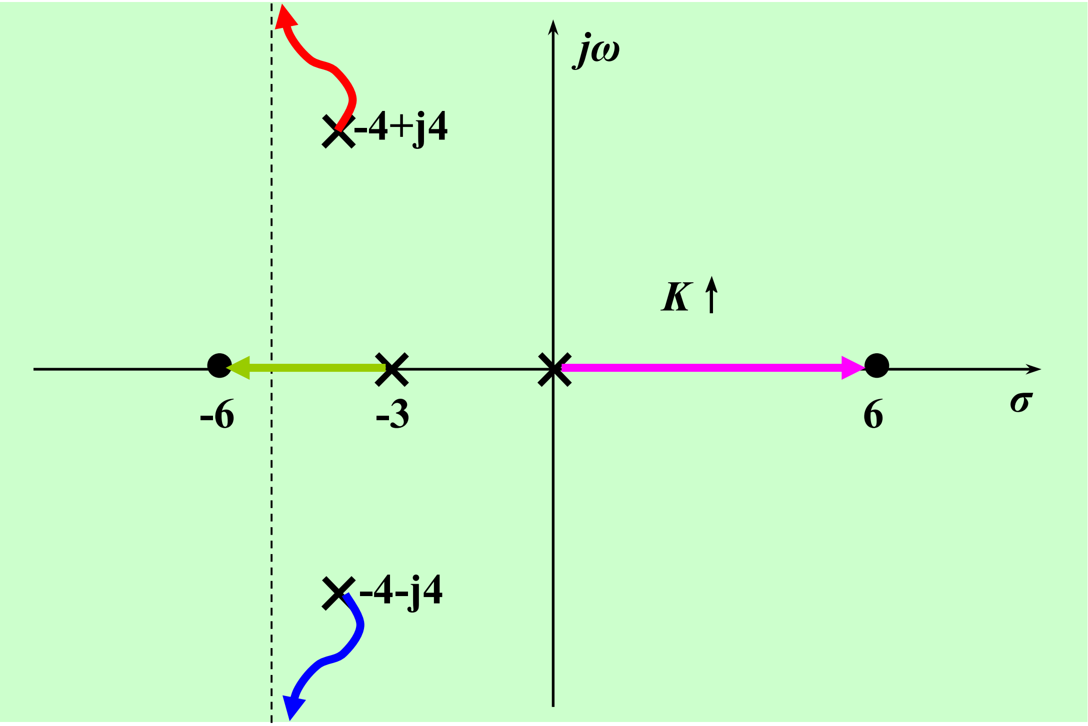
$$G(s)H(s)=\frac{K(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{3_D}&=(1+2h)180^\circ+(\psi_1+\psi_2)-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_4)\\&=(1+2h)180^\circ+(158.2^\circ+63.4^\circ)-(135^\circ+104^\circ+90^\circ)\\&=72.6^\circ\end{aligned}$$

同样地

极点$-4-j4$处的出射角为-72.6°

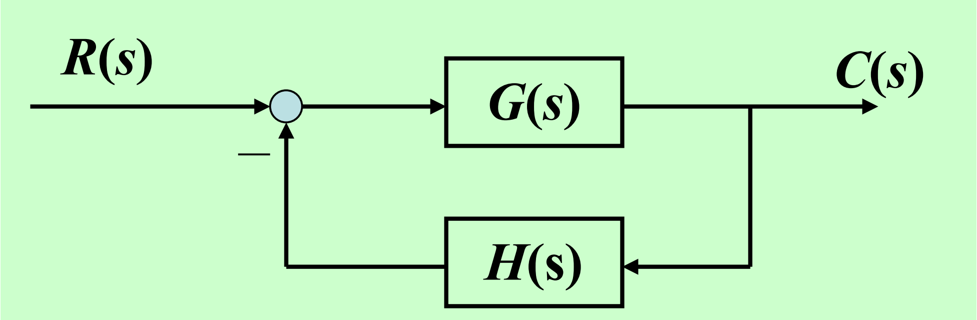
当$K>0$时，系统不稳定，故不再求单位阶跃响应$c(t)$ 。



系统性能分析——高阶系统（举例）

例5-25-1 已知某反馈控制系统如图所示，请绘制根轨迹，判别系统的稳定性，并给出单位阶跃响应$c(t)$。

（其中主导极点的ζ=0.707 ）



$$G(s)=\frac{-2(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

$H(s)=K_h$

$K_h>0$

解：1)开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

$K=-2K_h<0$

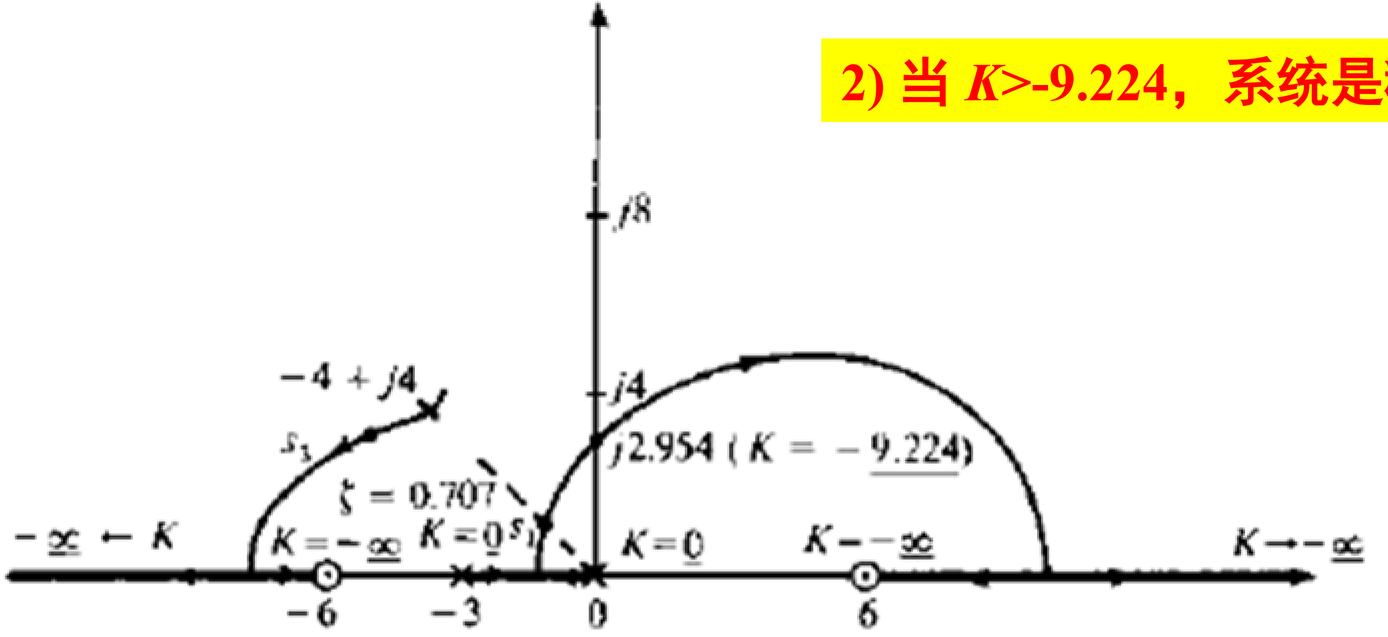
由于K<0， 绘制法则？

系统性能分析——高阶系统（举例）

开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

$$K=-2K_h<0$$



2) 当 K>-9.224，系统是稳定的。

系统性能分析——高阶系统（举例）

3) 由ζ=0.707 选择主导极点，得

$$s_{1,2}=-1.1806\pm j1.1810;\qquad s_{3,4}=-4.3194\pm j3.4347$$

$$K_h=1.18,K=-2.36$$

$$\Phi(s)=\frac{G}{1+GH}=\frac{\dfrac{N_1}{D_1}}{1+\dfrac{N_1}{D_1}\dfrac{N_2}{D_2}}=\frac{N_1D_2}{\text{closed-loop roots}}$$

闭环系统传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{-2(s+6)(s-6)}{(s+1.1806\pm j1.1810)(s+4.3194\pm j3.4347)}$$

单位阶跃响应

$$c(t)=0.84782-1.6978e^{-1.1806t}\sin(1.181t+29.33°)$$
$$-0.20346e^{-4.3194t}\sin(3.4347t+175.47°)$$

M_p=0.8873, t_p=2.89, t_s=3.85s, $c(\infty)$=0.8478.

注：$c(\infty)$=0.8478<1　??　(I型系统)

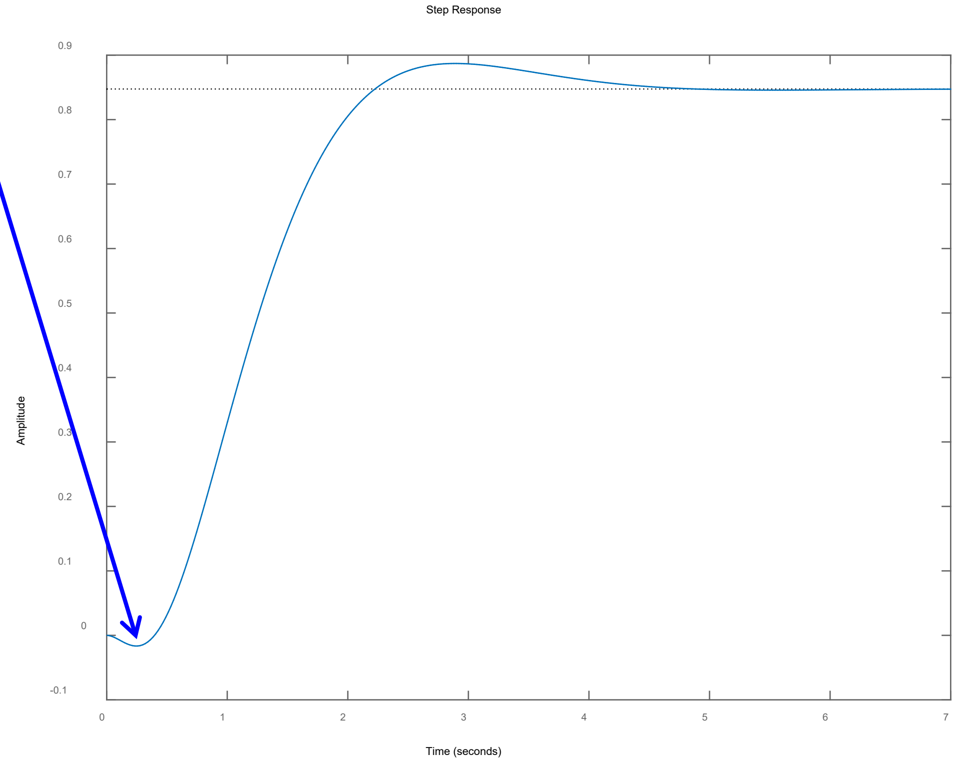
$$K=-2K_h<0$$

非单位反馈系统！

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

系统性能分析——高阶系统（举例）

非最小相位系统响应的特点之一



$$G(s)H(s)=\frac{K(s+6)(s-6)}{s(s+3)(s+4-j4)(s+4+j4)}$$

系统性能分析——综合设计

用根轨迹进行系统的综合设计，可以通过下面步骤得到期望的时间响应：

（1）首先绘制根轨迹，然后由期望的瞬态响应确定闭环的极点。

（2）确定闭环根的要点：

- 由性能指标确定主导极点——（通常人们希望过渡过程有一点衰减振荡（欠阻尼振荡，这就要求系统有一对共轭复根）。
- 时域指标中的阻尼比ζ、稳态时间T_s（对于2%是$T_s=4/\zeta\omega_n$）、自然频率ω_n，或者阻尼振荡频率ω_d等均可用于确定主导极点——因为它们可以直观地在S平面上表示出来。
- 反映性能指标的信息在S平面上与根轨迹的交点便是欲求的主导极点，进而通过幅值条件确定系统增益。

（3）一旦主导极点确定下来，系统增益也就可以求出，继而该增益条件下的其他极点也可以求到。

（4）如果根轨迹无法满足动态响应，则必须通过补偿环节来改变根轨迹的形状，从而获得期望的响应。

系统性能分析——综合设计

例5-26 已知某单位负反馈控制系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s-1)}$

(1) 绘制根轨迹。

(2) 对任意K，系统是否稳定？若否，则确定使系统稳定的K值范围，确定使闭环系统持续振荡的参数 K 和频率 ω。

(3) 若调节时间4s，确定K值和对应的特征根。

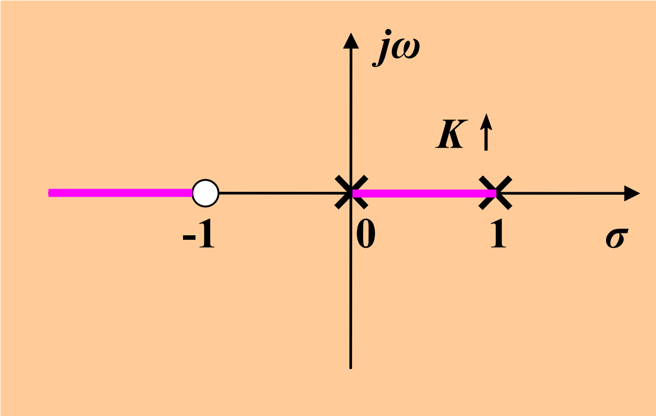
解：(1) 绘制根轨迹

1) 开环极点： $n=2,\quad p_1=0,\quad p_2=1$

开环零点： $w=1, z_1=-1$

2) 2条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹： $(-\infty,-1]$, $[0,\ 1]$



系统性能分析——综合设计

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{1}=180^\circ$$

5) 实轴上的分离点(汇合点)d

$$\because -K=\frac{s(s-1)}{s+1}$$

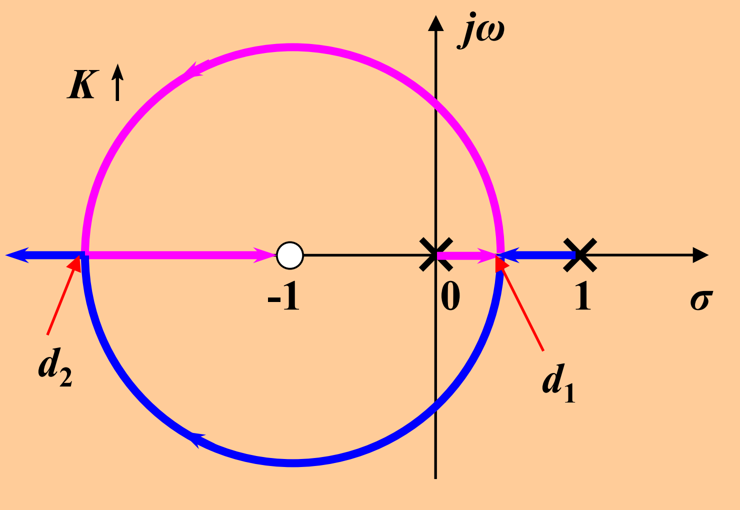
$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=s^2+2s-1=0$$

$$d_1=-1+\sqrt{2}=0.414$$

$$d_2=-1-\sqrt{2}=-2.414$$

分离角：

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l}=\frac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$



根轨迹是以(-1,j0)为圆心，以 1.414为半径的圆

系统性能分析——综合设计

(2) 确定闭环系统稳定的K值范围，以及使系统等幅振荡(持续振荡)的K和频率ω。

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

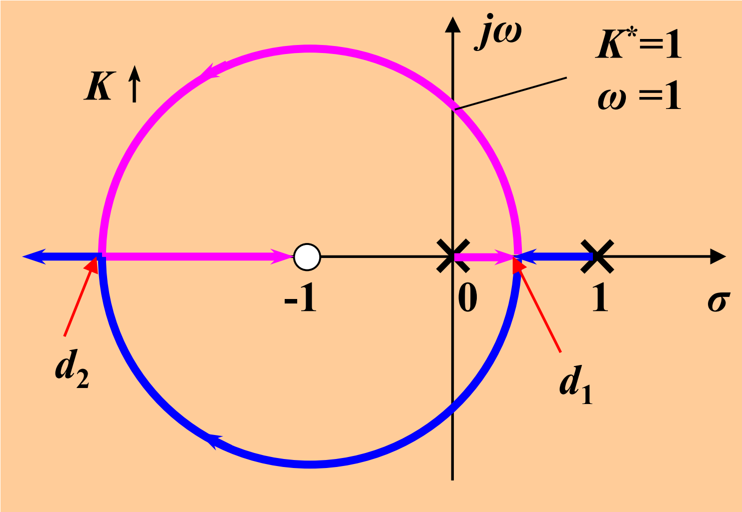
$$K^*=\frac{|s-p_1|\cdot|s-p_2|}{|s-z|}=\frac{\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{2}}=1$$

或者从特征方程：

$$\Delta(s)=s^2+(K-1)s+K=0$$

很容易获得临界稳定的K为1，当$K>1$，系统稳定。

当$K=1$，等幅振荡的频率为$\omega=1$。



系统性能分析——综合设计

(3) 调节时间4s，确定K值和相应的特征根

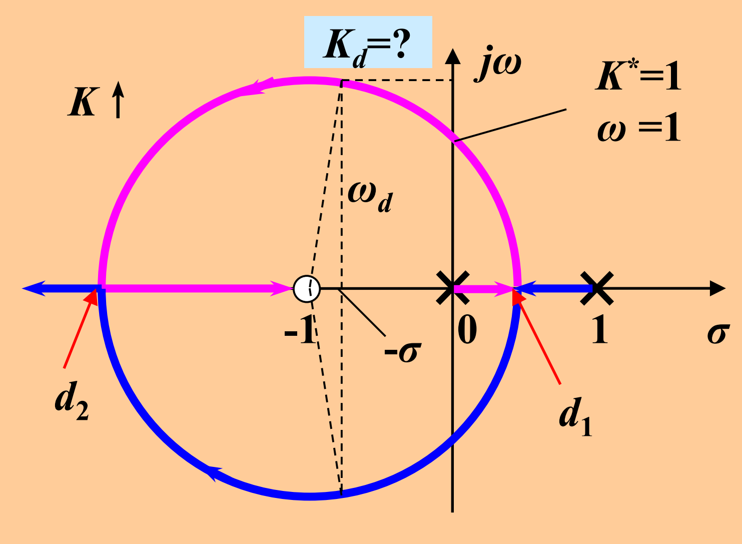
$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

$$t_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}=4 \quad \Rightarrow \quad \sigma=\zeta\omega_n=0.875$$

由图，根据三角形以及半径1.414

$$\omega_d^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-(1-\sigma)^2=1.984$$

$$\omega_d=1.41$$



相应的特征根

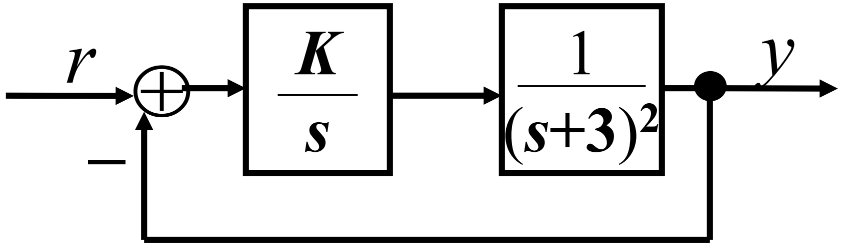
$$s_{1,2}=-0.875\pm j1.41$$

运用幅值条件

$$K_d=\frac{\sqrt{0.875^2+1.41^2}\cdot\sqrt{1.875^2+1.41^2}}{\sqrt{2}}=2.753$$

系统性能分析——综合设计

例5-27 已知某单位负反馈闭环系统如图所示



请用根轨迹确定使系统工作在欠阻尼状态下的K值范围，且系统在斜坡输入下的稳态误差小于0.2。

解：开环传递函数$G(s)$ $$G(s)=\frac{K}{s(s+3)^2}$$

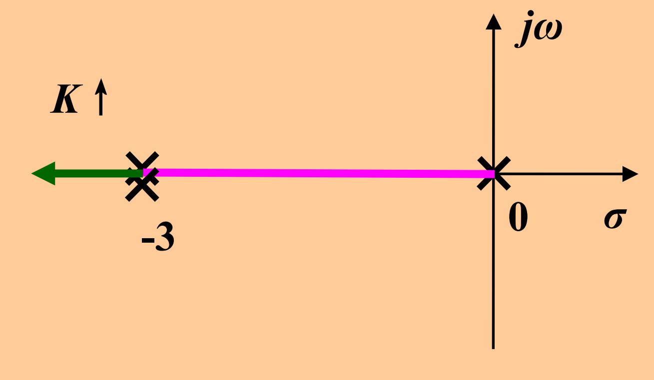
(1) 绘制根轨迹

1) 开环极点： $n=3,\quad p_1=0,\quad p_{2,3}=-3$

开环零点： $w=0$

2) 3条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹(-∞, -3) , [-3, 0]



系统性能分析——综合设计

$$G(s)=\frac{K}{s(s+3)^2}$$

4) 渐近线与实轴的夹角与交点

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{3}=\pm 60,180^\circ \qquad \sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3}{n}=-2$$

5) 实轴上区间[-3， 0]的分离点*d*

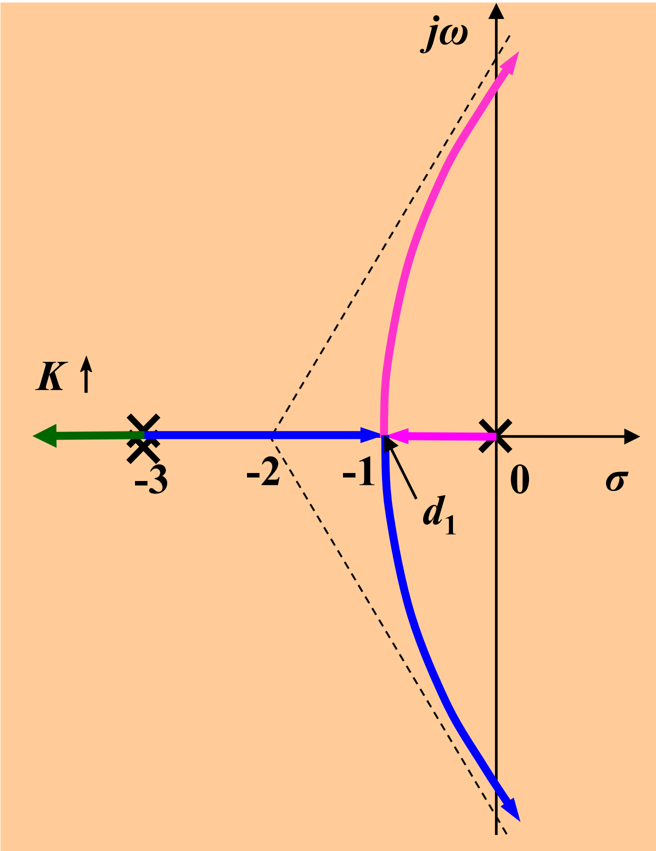
$$-K=s^3+6s^2+9s$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=3s^2+12s+9=0$$

$$d_1=-1 \qquad d_2=-3$$

分离角：

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l}=\frac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$



系统性能分析——综合设计

6) 根轨迹与虚轴的交点

$$G(s)=\frac{K}{s(s+3)^2}$$

特征方程：

$$\Delta(s)=s^3+6s^2+9s+K$$

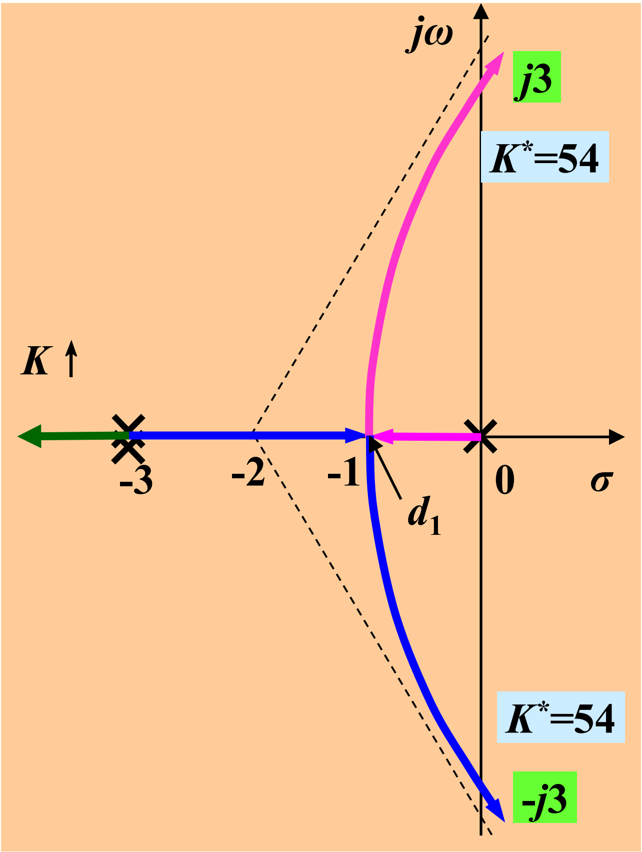
Routh表：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 9 \\ s^2 & 6 & K \\ s^1 & \dfrac{54-K}{6} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

$K=54$

由s^2 行构造辅助方程：

$$6s^2+K=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j\sqrt{\frac{K}{6}}=\pm j3$$



系统性能分析——综合设计

(2) 由根轨迹，系统在欠阻尼状态下的K值范围

d_1处的K值 $$K_d = \left|s(s+3)^2\right|_{s=d_1=-1} = 4$$

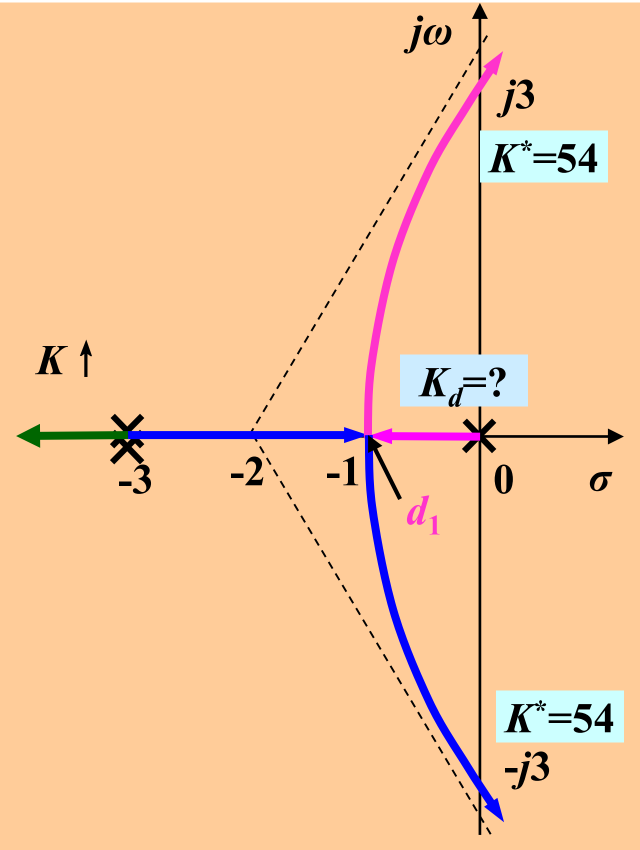
$$\therefore 4 < K < 54$$ 系统欠阻尼

(3) 如果输入是斜坡函数，稳态误差 e_{ss} 为 (系统是 1型)

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = \frac{9}{K} \le 0.2 \quad \Rightarrow \quad K \ge 45$$

因此，满足要求的K值范围 $45 \le K < 54$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$



系统性能分析——综合设计

问题：

（1）如果由根轨迹不能得到满意的响应？

（2）如何提高控制系统的性能？

- 为了提高系统性能而进行的系统校正(modifying)或改造根轨迹(reshape)称为“补偿(compensation)”。
- 补偿的目的是使系统稳定，具有满意的动态响应，以及有足够大的增益保证稳态误差不超过某个给定的最大值。

The End