自动控制理论

Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第六章 Chapter 6

频率特性分析法(Frequency Response)

第六章关键词

- 频率、频率响应、频率特性
- 幅频特性、相频特性
- 对数频率特性（BODE图）
- 极坐标图（奈奎斯特图）
- 奈奎斯特稳定判据
- 稳定裕度（幅值裕度、相位裕度）
- 频域性能

第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性

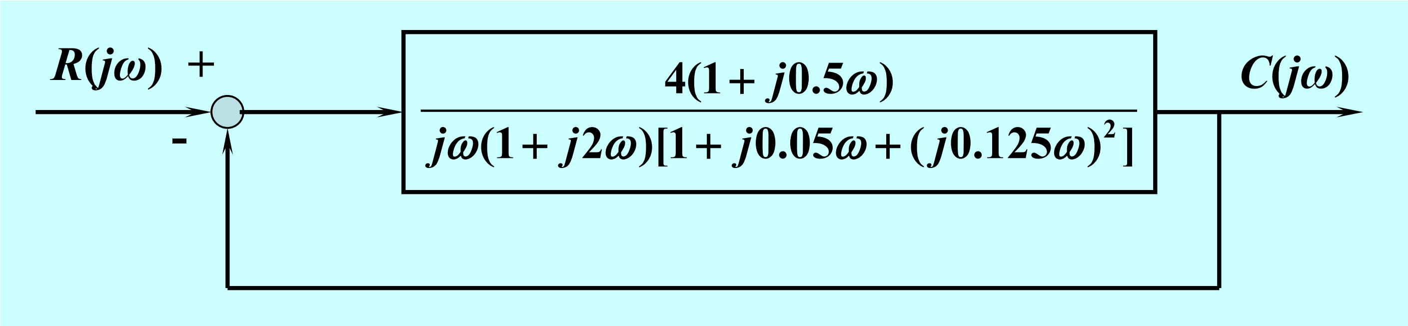
Bode图

- 典型环节
- 对数频率渐近特性曲线
- 系统型别、增益与对数幅频曲线的关系
- 传递函数的实验确定方法

对数频率渐近特性曲线

例6-7

反馈系统的方块图如下，给出开环传递函数Bode图：



开环传递函数：

$$G(j\omega)=\frac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$$

典型环节：

$$4 \quad (1+j0.5\omega) \quad (j\omega)^{-1} \quad (1+j2\omega)^{-1} \quad [1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]^{-1}$$

对数频率渐近特性曲线

例6-7 $\dfrac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$

典型环节	转折频率 ω_{cf}	对数幅值	相角特性
4	无	常数12 dB	常数 0º
$(j\omega)^{-1}$	无	斜率为–20 dB/decade(0dB 当 ω=1)的直线	常数 -90º
$(1+j2\omega)^{-1}$	ω_1=0.5	当$\omega<\omega_1$（低频段），斜率为0的直线；当$\omega>\omega_1$（高频段），斜率为 -20 dB/decade 的直线	0 到 -90º变化
$(1+j0.5\omega)$	ω_2=2.0	当$\omega<\omega_2$（低频段），斜率为0的直线；当$\omega>\omega_2$（高频段），斜率为 20 dB/decade 的直线	0 到 90º变化
$[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]^{-1}$ $\zeta=0.2$ $\omega_n=8$	ω_3=8.0	当$\omega<\omega_3$（低频段），斜率为0的直线；当$\omega>\omega_3$（高频段），斜率为 -40 dB/decade 的直线	0 到 -180º变化

$$\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}$$

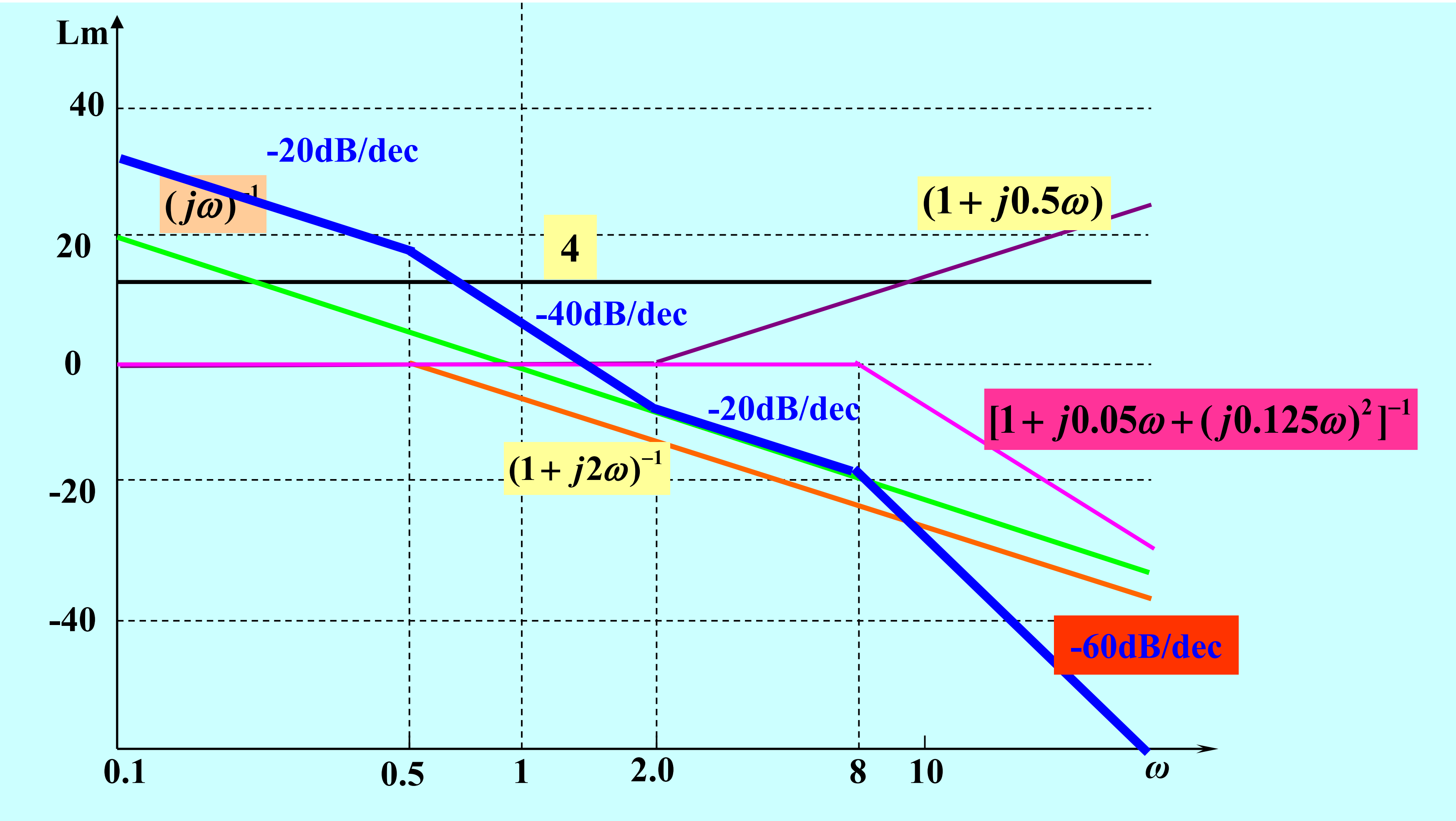
$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=7.838$$

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=2.55$$

对数频率渐近特性曲线

例6-7

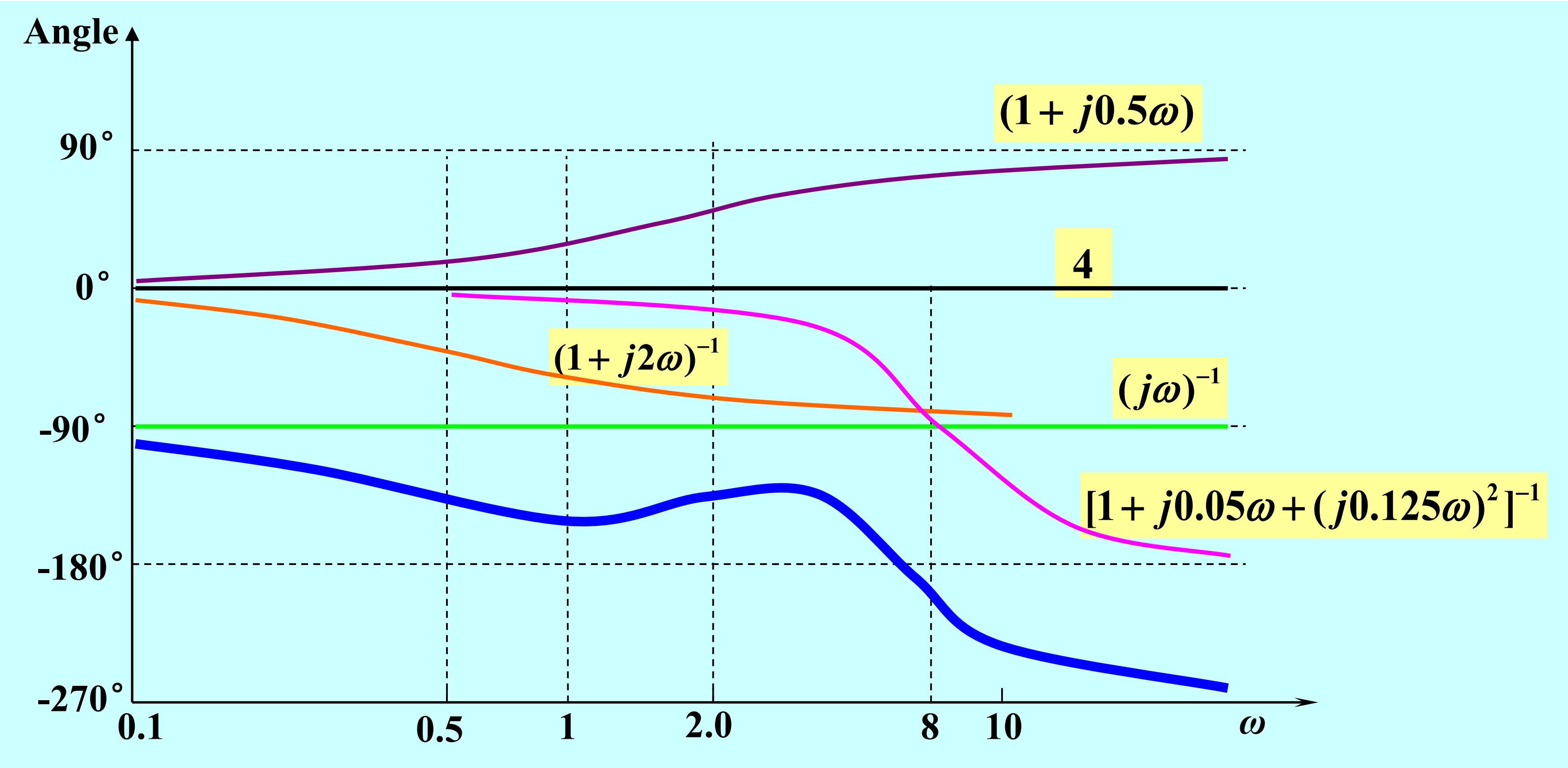
$$\frac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$$



对数频率渐近特性曲线

例6-7

$$\frac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$$

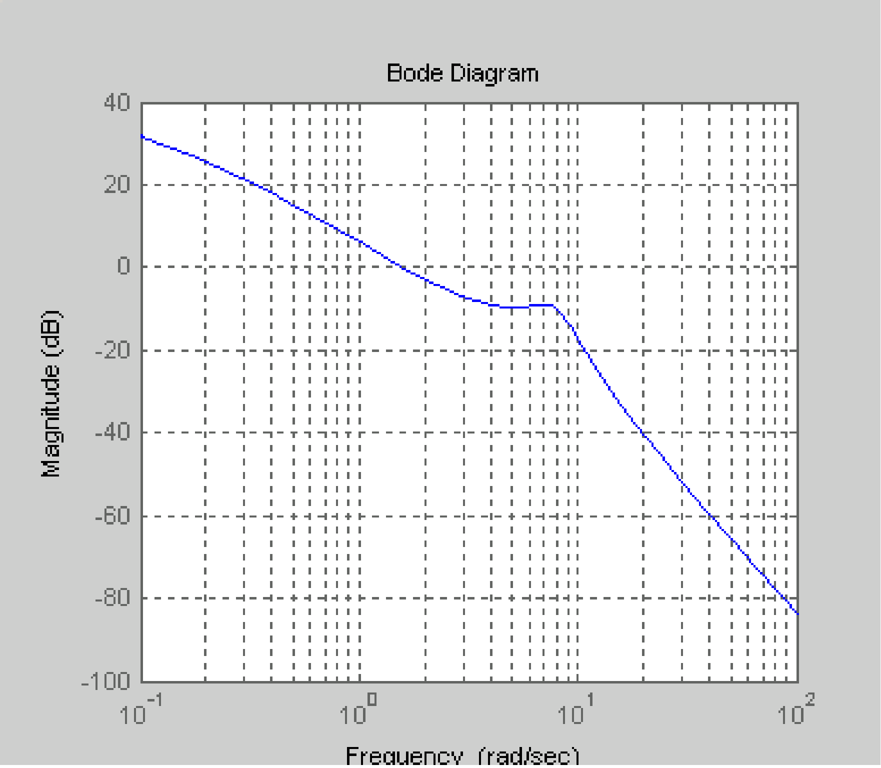


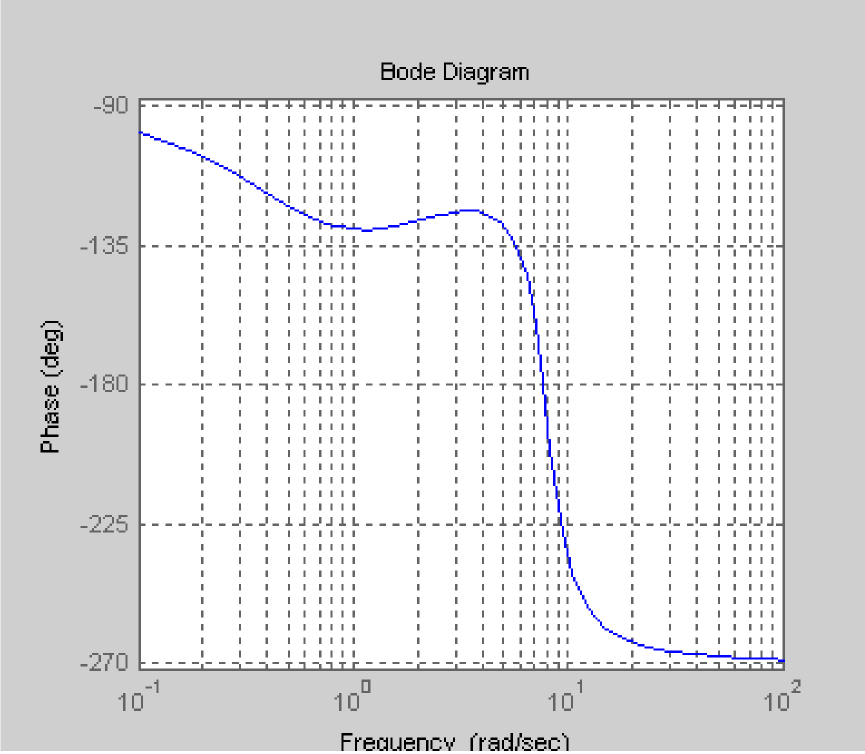
对数频率渐近特性曲线

例6-7

$$\frac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$$

Matlab作图





对数频率渐近特性曲线

开环对数频率渐近特性曲线的绘制步骤：

1) 进行开环传递函数典型环节分解；

2) 确定一阶环节、二阶环节的转折频率，将各转折频率标注在半对数坐标图的ω轴上；

3) 绘制低频段渐近特性线：由于一阶环节和二阶环节的对数幅频渐近特性曲线在转折频率前斜率为0dB/dec，在转折频率处斜率发生变化，故在 $\omega<\omega_{min}$（最小转折频率）频段内，渐近特性曲线的斜率取决于$K/(j\omega)^m$，因而直线斜率为-20×mdB/dec。

为获得低频渐近线，还需确定该直线上的一点，可以采用以下三种方法：

方法一：在$\omega<\omega_{min}$范围内，任选一点ω_0，计算 $\mathrm{Lm}(\omega_0)=20\lg K-20m\lg\omega_0$

方法二：取频率为特定值ω_0=1，则 $\mathrm{Lm}(1)=20\lg K$

方法三：取Lm(ω_0)=0，则有 $\omega_0=K^{\frac{1}{m}}$， 过(ω_0，Lm(ω_0))在$\omega<\omega_{min}$的范围内做斜率为-20×mdB/dec的直线

方法二、三常用

对数频率渐近特性曲线

4) 作 $\omega \ge \omega_{min}$ 频段渐近特性线：在 $\omega \ge \omega_{min}$ 频段，系统开环对数幅频渐近特性曲线表现为分段折线。每两个相邻转折频率之间为直线，在每个转折频率点处，斜率发生变化，变化规律取决于该转折频率对应的典型环节的种类。

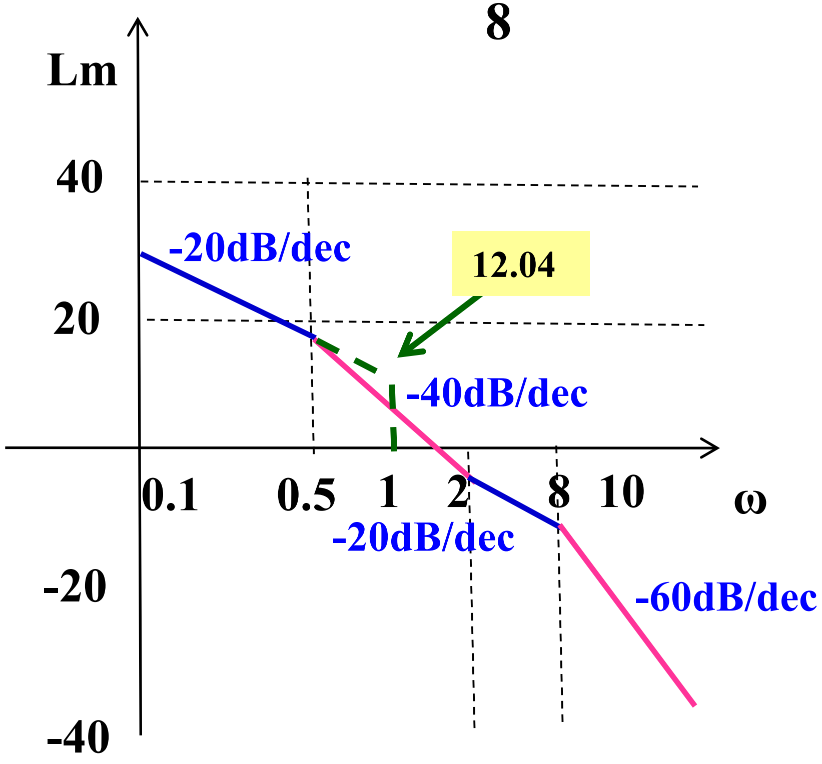
典型环节类别	典型环节传递函数	转折频率	斜率变化
一阶环节（T>0）	$1/(1+Ts)$	$1/T$	-20dB/dec
	$1/(1-Ts)$		
	$1+Ts$		20dB/dec
	$1-Ts$		
二阶环节（ω_n>0, 1>ζ≥0）	$[1+j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$	ω_n	-40dB/dec
	$[1-j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$		
	$[1+j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]$		40dB/dec
	$[1-j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]$		

对数频率渐近特性曲线

例6-7’ 开环传递函数：$G(j\omega)=\dfrac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j2\omega)[1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]}$

典型环节：$4 \quad (1+j0.5\omega) \quad (j\omega)^{-1} \quad (1+j2\omega)^{-1} \quad [1+j0.05\omega+(j0.125\omega)^2]^{-1}$

转折频率：$2 \quad 0.5 \quad 8$



起始段直线：

斜率为-20dB/dec，

当ω_0=1 时，

Lm(1)=20lg$K$=20lg4=12.04

对数相频曲线

绘制$G(j\omega)$的相频曲线可以采用以下方法来简化：

1) 对于 $(j\omega)^{-m}$ 环节，绘制相角为$(-m)90°$ 的一条直线。

2) 对于 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 环节，确定转折频率处的相角 ±45°，以及转折频率前后1倍频和10倍频处相角，然后过这些点绘制 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 环节的相频曲线。

3) 对于$[1+j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$环节：

(a) 转折频率$\omega=\omega_n$处的相角±90°

$$Angle\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}$$

(b) 对于不同的 ζ，确定几个频率点的相角。 $\omega=0.707\omega_n$ 点处的相角等于$-\tan^{-1}2.828\zeta$。

对数相频曲线

4) 一旦绘制出 $G(j\omega)$的每个环节的相频曲线，通过叠加这些环节的相频曲线，就可以得到$G(j\omega)$ 的相频曲线。

(a) 以 $\angle \lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = (-m)90^\circ$ 作为基准线，其中m 表示系统的型别，加/减每一个环节的相角。

(b) 在相频曲线的特殊频率点处，测量每个一阶、二阶环节的相角，叠加到基准线上，采用的频率点的个数取决于对相频曲线精度的要求。

(c) 在 $\omega=\infty$ 时，相角为 90° 乘以分子分母的阶次差 $[-(n-w)90^\circ]$。

Bode图

- 典型环节
- 对数频率渐近特性曲线
- 系统型别、增益与对数幅频曲线的关系
- 传递函数的实验确定方法

系统型别、增益与对数幅频曲线的关系

闭环系统稳态误差与型别和增益的关系如下：

系统型别(v)	稳态误差系数			阶跃输入 $R_0u_{-1}(t)$	斜坡输入 $R_1tu_{-1}(t)$	加速度输入 $1/2R_2t^2u_{-1}(t)$
	K_0	K_1	K_2	位置误差 $e_{ss}=\dfrac{R_0}{1+K_0}$	速度误差 $e_{ss}=\dfrac{R_1}{K_1}$	加速度误差 $e_{ss}=\dfrac{R_2}{K_2}$
0	K_0	0	0	$R_0/(1+K_0)$	∞	∞
I	∞	K_1	0	0	R_1/K_1	∞
II	∞	∞	K_2	0	0	R_2/K_2
III	∞	∞	∞	0	0	0

Lm 曲线 ⟺ 系统的型别和增益

系统型别、增益与对数幅频曲线的关系

0 型系统：

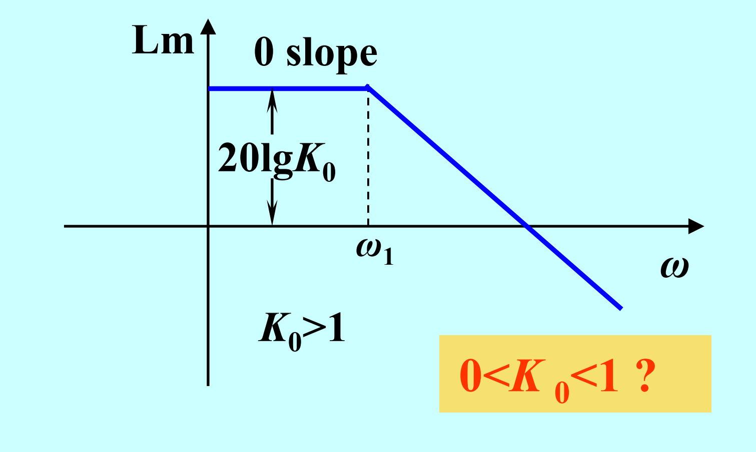
0型系统的开环传递函数为（ $K_0>0$ ）

$$G(j\omega)=K_0\frac{\prod_a(1+\mathrm{j}\omega T_a)\prod_b\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_b}\mathrm{j}\omega+\frac{1}{\omega_b^2}(\mathrm{j}\omega)^2\right)}{\prod_c(1+\mathrm{j}\omega T_c)\prod_d\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_d}\mathrm{j}\omega+\frac{1}{\omega_d^2}(\mathrm{j}\omega)^2\right)}$$

无积分环节

Lm线的低频部分：水平线

低频水平线的幅值$20\lg K_0$



系统型别、增益与对数幅频曲线的关系

例 6-8：

$$G_2(s)=\frac{2}{1+0.2s}$$

$K_0>1$

$$G_2(j\omega)=\frac{K_0}{1+j\omega T_a}=\frac{2}{1+j0.2\omega}$$

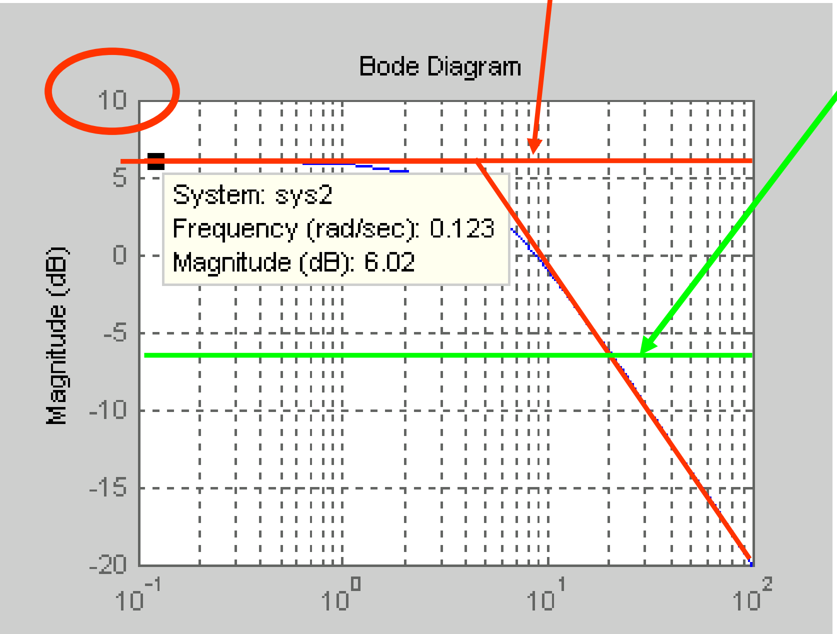
$$20\lg K_0=20\lg 2=6.02$$

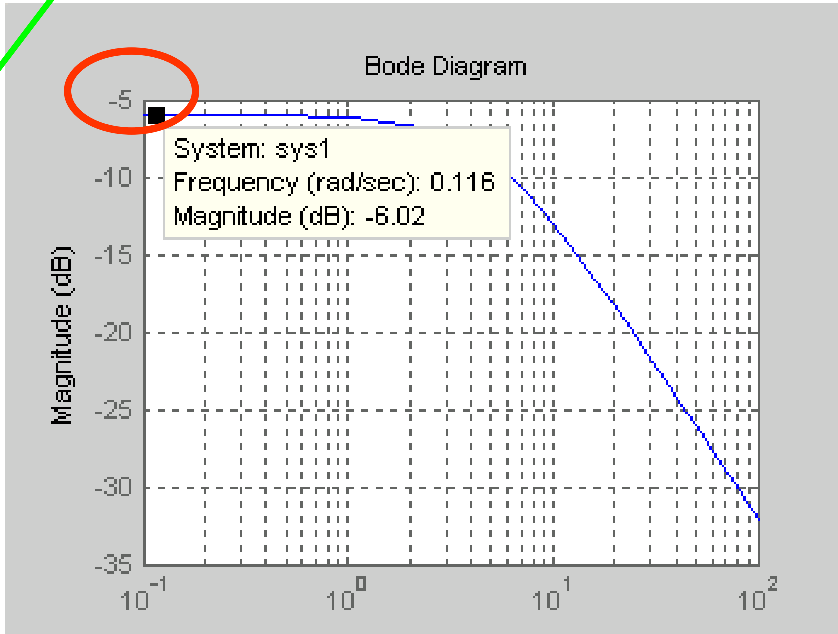
$$G_1(s)=\frac{0.5}{1+0.2s}$$

$K_0<1$

$$G_1(j\omega)=\frac{K_0}{1+j\omega T_a}=\frac{0.5}{1+j0.2\omega}$$

$$20\lg K_0=20\lg 0.5=-6.02$$





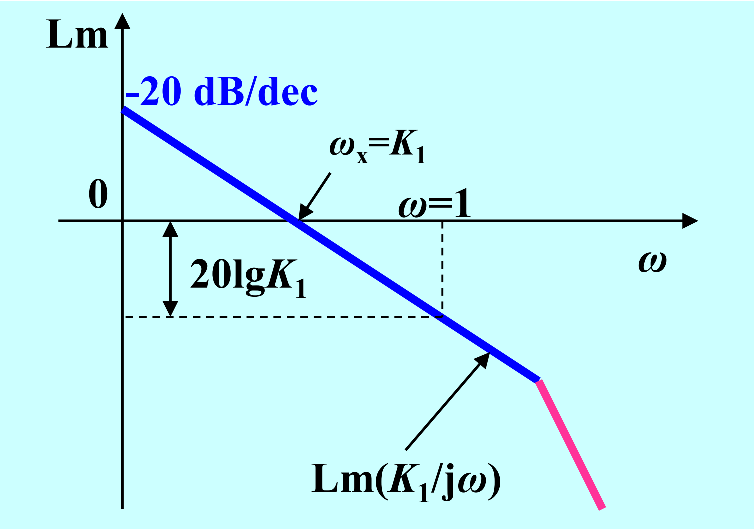
系统型别、增益与对数幅频曲线的关系

1型系统：

开环频率特性（K_1>0）

$$G(j\omega)=K_1\frac{\prod_a(1+j\omega T_a)\prod_b\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_b}j\omega+\frac{1}{\omega_b^2}(j\omega)^2\right)}{j\omega\prod_c(1+j\omega T_c)\prod_d\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_d}j\omega+\frac{1}{\omega_d^2}(j\omega)^2\right)}$$

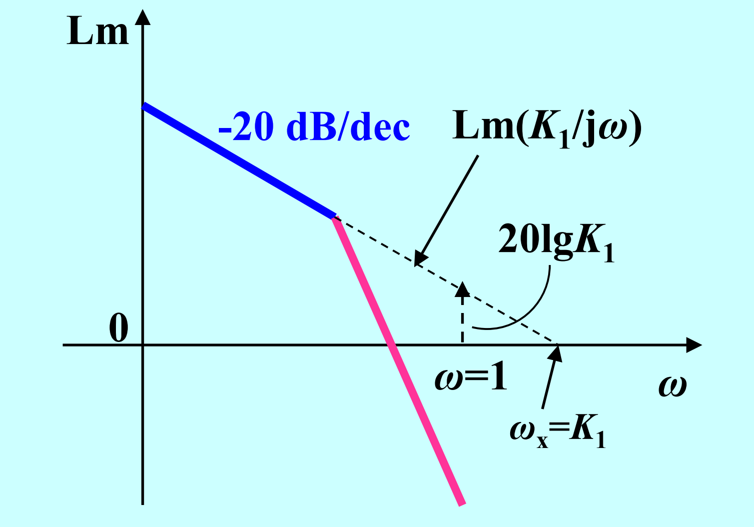
1个积分环节



Lm线的低频部分：斜率-20dB/dec的斜线

低频斜线（或其延长线）与0dB线交点：$\omega_x=K_1$

低频斜线（或其延长线）在ω=1处的读数为20lgK_1



系统型别、增益与对数幅频曲线的关系

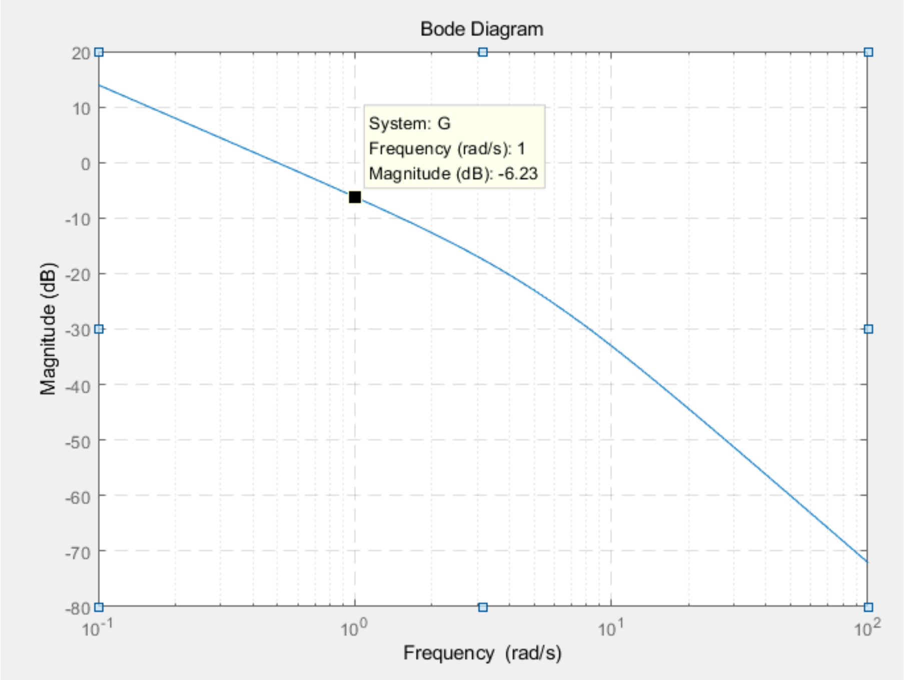
例 6-9：

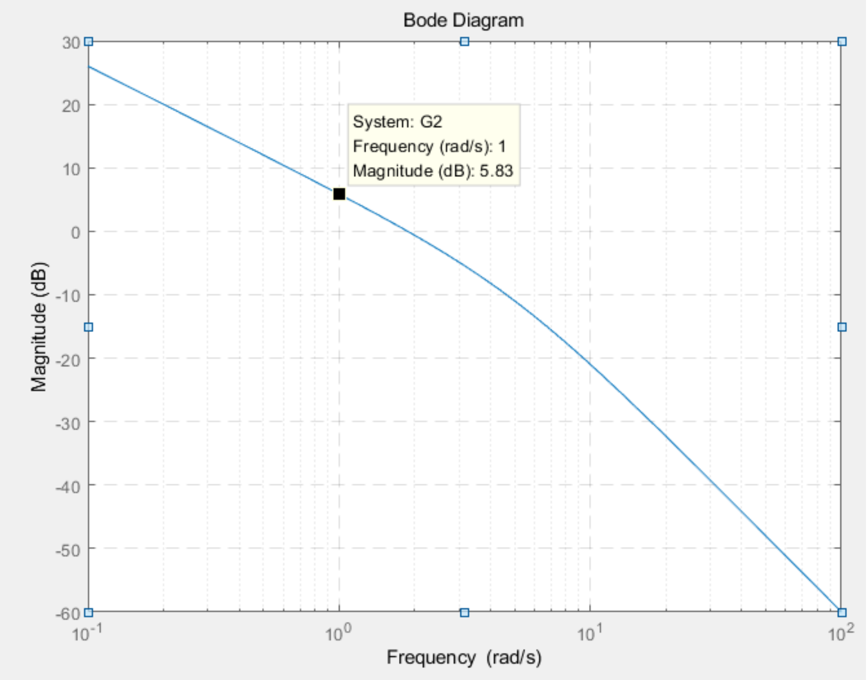
$$G_1(j\omega)=\frac{K_1}{j\omega(1+j\omega T_a)}=\frac{0.5}{j\omega(1+j0.2\omega)}$$

$$20\lg K_1=20\lg 0.5=-6.02$$

$$G_2(j\omega)=\frac{K_1}{j\omega(1+j\omega T_a)}=\frac{2}{j\omega(1+j0.2\omega)}$$

$$20\lg K_1=20\lg 2=6.02$$





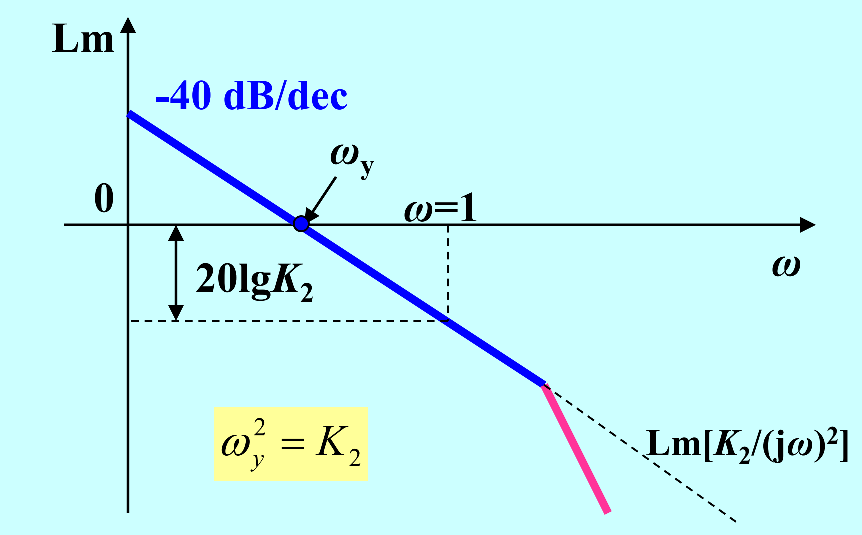
系统型别、增益与对数幅频曲线的关系

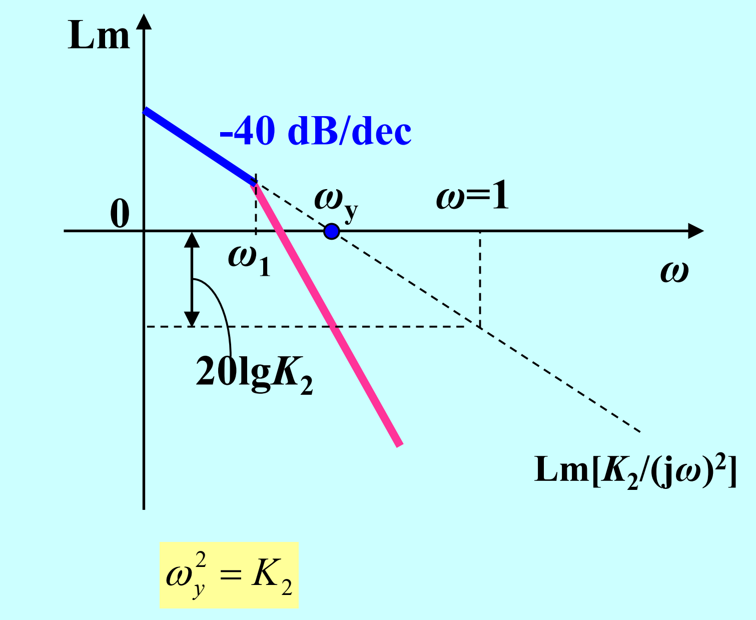
2型系统：

开环频率特性（K_2>0）

$$G(j\omega)=K_2\frac{\prod_a(1+j\omega T_a)\prod_b\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_b}j\omega+\frac{1}{\omega_b^2}(j\omega)^2\right)}{(j\omega)^2\prod_c(1+j\omega T_c)\prod_d\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_d}j\omega+\frac{1}{\omega_d^2}(j\omega)^2\right)}$$

2个积分环节





Lm线的低频部分：斜率-40dB/dec的斜线

低频斜线（或其延长线）与0dB线交点：$\omega_y^2=K_2$

低频斜线（或其延长线）在ω=1处的读数为20lgK_2

系统型别、增益与对数幅频曲线的关系

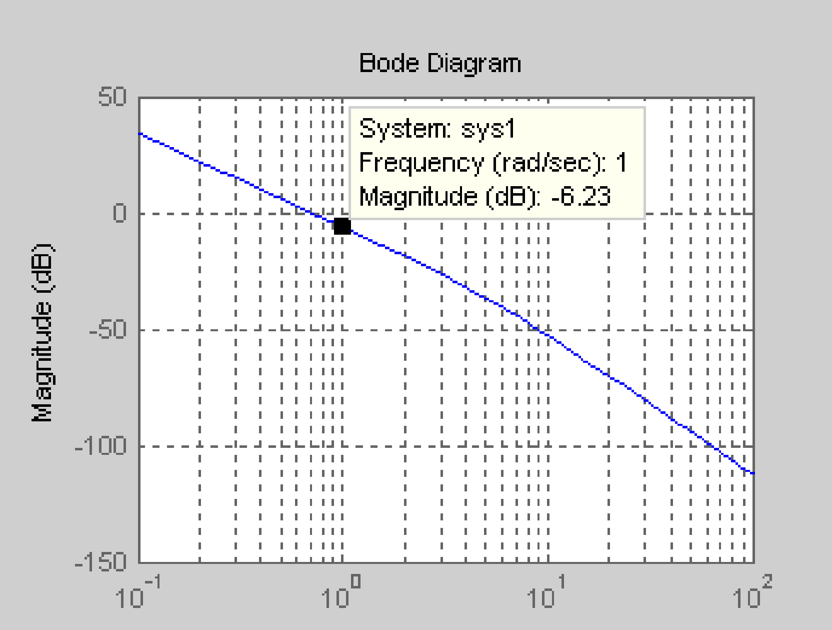
例 6-10：

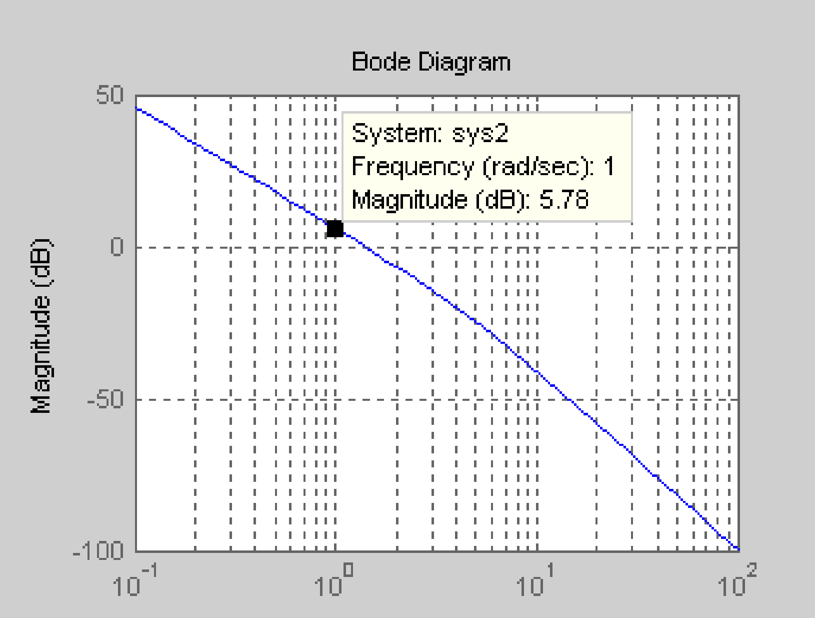
$$G_1(j\omega)=\frac{K_2}{(j\omega)^2(1+j\omega T_a)}=\frac{0.5}{(j\omega)^2(1+j0.2\omega)}$$

$$20\lg K_2 = 20\lg 0.5 = -6.02$$

$$G_2(j\omega)=\frac{K_2}{(j\omega)^2(1+j\omega T_a)}=\frac{2}{(j\omega)^2(1+j0.2\omega)}$$

$$20\lg K_2 = 20\lg 2 = 6.02$$





$$\omega_y^2 = K_2 = 0.5 \Rightarrow \omega_y = 0.707$$

$$\omega_y^2 = K_2 = 2 \Rightarrow \omega_y = 1.414$$

Bode图

- 典型环节
- 对数频率渐近特性曲线
- 系统型别、增益与对数幅频曲线的关系
- 传递函数的实验确定方法

传递函数的实验确定方法

输入各种频率的稳态正弦信号，则可以得到输入输出信号的幅值比和相位差

↓

用这些数据绘制精确的对数幅频曲线Lm 和相频曲线

↓

在精确Lm曲线的基础上，绘制渐近特性曲线。近似其斜率为 ±20dB/decade的倍数

↓

确定系统的型别和近似时间常数

注意： 传递函数的零点是否在右半开平面 最小相位 vs 非最小相位

通过对相频曲线的分析来确定传递函数中是否有右半开平面的零点出现

许多实际系统的开环传递函数都是最小相位的，这时无需使用相频曲线

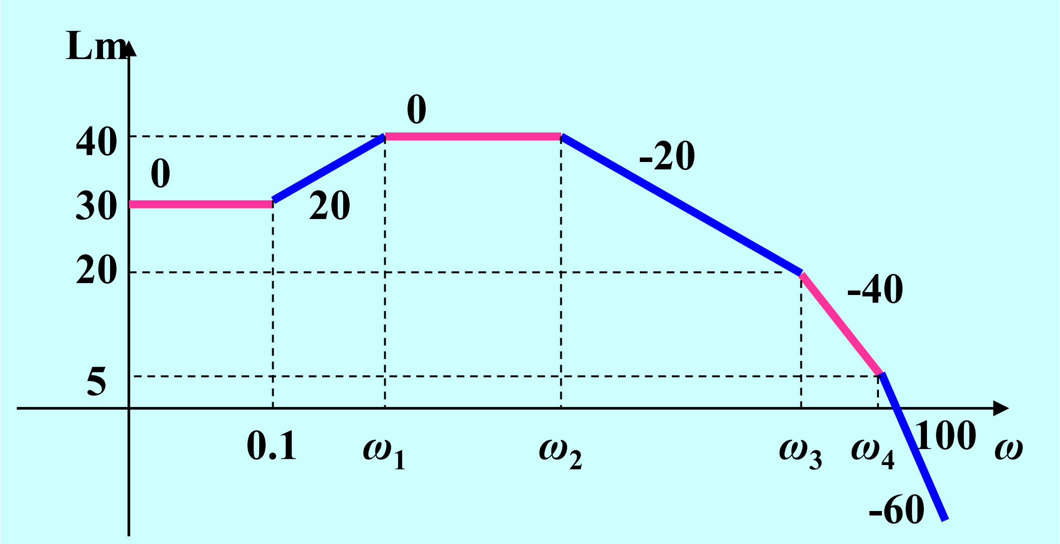
传递函数的实验确定方法

例 6-11：最小相位系统的对数幅频特性曲线（Lm曲线）如图所示，确定系统传递函数。

低频段斜率近似为0。

$$L_a(\omega) = -m \times 20\lg\omega$$

$$m = 0$$



ω=0.1，斜率变化20，环节 $1+j\omega T$，$1/T$=0.1，T=10

$\omega=\omega_1$，斜率变化 -20，环节 $(1+j\omega T_1)^{-1}$

$\omega=\omega_2$，斜率变化 -20，环节 $(1+j\omega T_2)^{-1}$

$\omega=\omega_3$，斜率变化 -20，环节 $(1+j\omega T_3)^{-1}$

$\omega=\omega_4$，斜率变化 -20，环节 $(1+j\omega T_4)^{-1}$

传递函数的实验确定方法

传递函数形式：

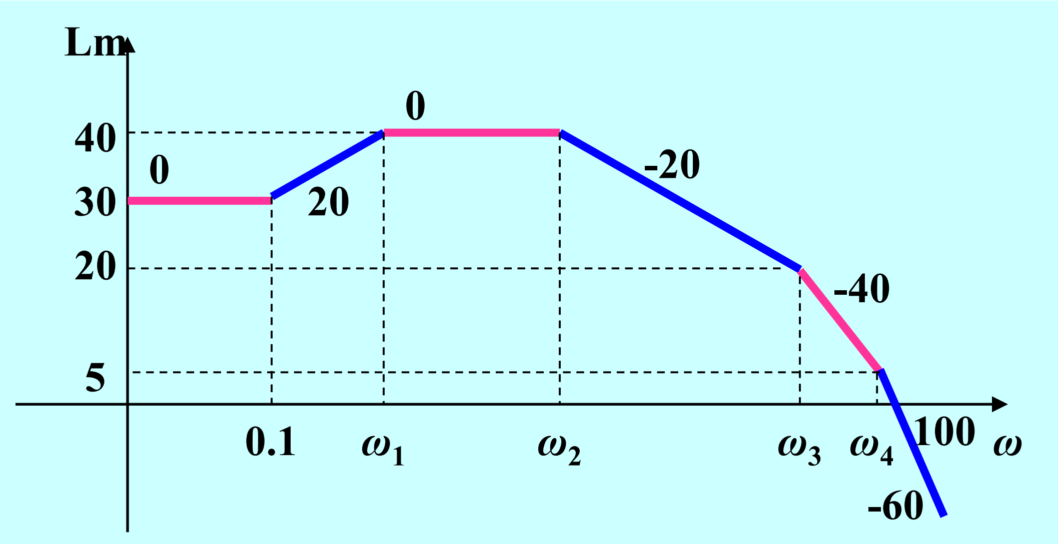
$$G(s)=\frac{K(1+10s)}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$$

$$20\lg K_0=30 \Rightarrow K=31.62$$

直线方程

$$\mathrm{Lm}(\omega_a)-\mathrm{Lm}(\omega_b)=k\left[\lg\omega_a-\lg\omega_b\right]$$

$$\omega_a=\omega_b\times 10^{\frac{\mathrm{Lm}(\omega_a)-\mathrm{Lm}(\omega_b)}{k}}$$



若 $\omega_a=\omega_1$，$\omega_b=0.1$，$k=20$，$\mathrm{Lm}(\omega_1)=40$ 和 $\mathrm{Lm}(0.1)=30$

$$\omega_1=0.1\times 10^{\frac{40-30}{20}}=0.316 \Rightarrow T_1={1}/{\omega_1}=3.16$$

若 $\omega_a=\omega_4$，$\omega_b=100$，则 $k=-60$，$\mathrm{Lm}(\omega_4)=5$ 和 $\mathrm{Lm}(100)=0$

$$\omega_4=100\times 10^{\frac{5-0}{-60}}=82.54 \Rightarrow T_4={1}/{\omega_4}=0.012$$

传递函数的实验确定方法

若 $\omega_a=\omega_3$， $\omega_b=\omega_4$， k=-40， $Lm(\omega_3)$=20 和 $Lm(\omega_4)$=5

$$\omega_3 = 82.54\times 10^{\frac{20-5}{-40}} = 34.81 \quad \Rightarrow \quad T_3 = 1/\omega_3 = 0.0287$$

若 $\omega_a=\omega_2$， $\omega_b=\omega_3$， 则 k=-20， $Lm(\omega_2)$=40 和 $Lm(\omega_3)$=20

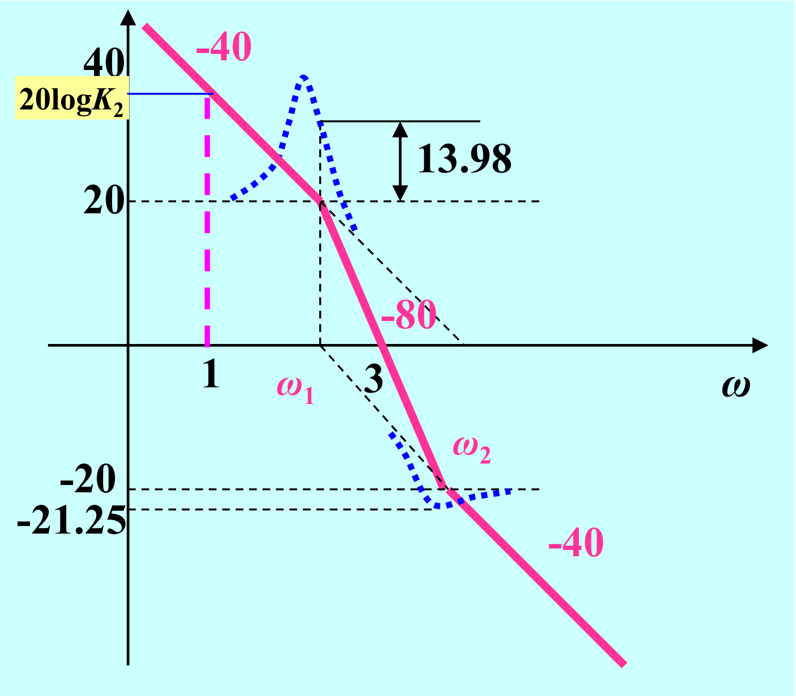
$$\omega_2 = 34.81\times 10^{\frac{40-20}{-20}} = 3.481 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 1/\omega_2 = 0.287$$

系统传递函数：

$$G(s) = \frac{K(10s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$$
$$= \frac{31.62(10s+1)}{(3.16s+1)(0.287s+1)(0.0287s+1)(0.012s+1)}$$

传递函数的实验确定方法

例 6-12：最小相位系统Lm曲线如图所示确定系统的传递函数。



由于低频段斜率为 –40dB/decade，所以系统为 2型系统。

按照转折频率处斜率的变化，确定典型环节。

当 $\omega=\omega_1$， 斜率变化–40 且Lm出现峰值，因此典型环节为

$$[1+j2\zeta\omega/\omega_1+(j\omega/\omega_1)^2]^{-1}$$

当 $\omega=\omega_2$， 斜率变化40且 Lm出现峰值，因此典型环节为

$$1+j2\zeta\omega/\omega_2+(j\omega/\omega_2)^2$$

传递函数的实验确定方法

系统传递函数形式

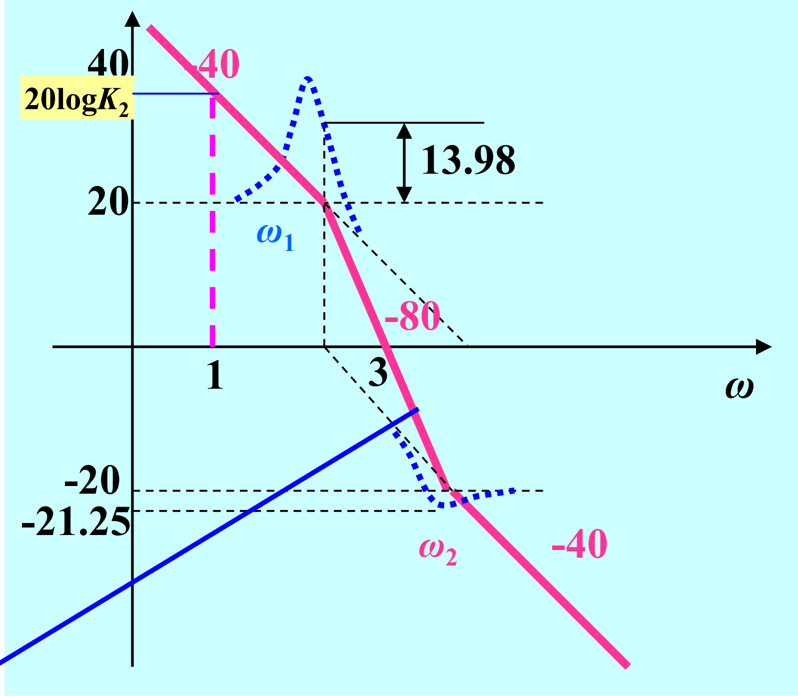
$$G(j\omega)=\frac{K\left[1+j2\zeta_2\frac{\omega}{\omega_2}+\left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)^2\right]}{(j\omega)^2\left[1+j2\zeta_1\frac{\omega}{\omega_1}+\left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)^2\right]}$$

$\omega_y = ???$

$K_2=\omega_y^2$

$K=K_2=???^2$

$\omega_1=?\quad \omega_2=?\quad \zeta_1=?\quad \zeta_2=?$



$$0-20=-80(\lg 3-\lg\omega_1)\qquad \omega_1=1.6870$$

$$-20-0=-80(\lg\omega_2-\lg 3)\qquad \omega_2=5.3348$$

$$20-20\lg K=-40(\lg 1.6870-\lg 1)\qquad K=28.4597$$

传递函数的实验确定方法

对于环节 $\dfrac{1}{1+j2\zeta_1\dfrac{\omega}{\omega_1}+\left(\dfrac{j\omega}{\omega_1}\right)^2}$

由 $\mathrm{Lm}\left[1+\dfrac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\dfrac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}=-20\lg\left[\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$

转折频率ω_1处，对数幅值

$20\lg\dfrac{1}{2\zeta_1}=13.98,$ ➡ $\zeta_1=0.1$

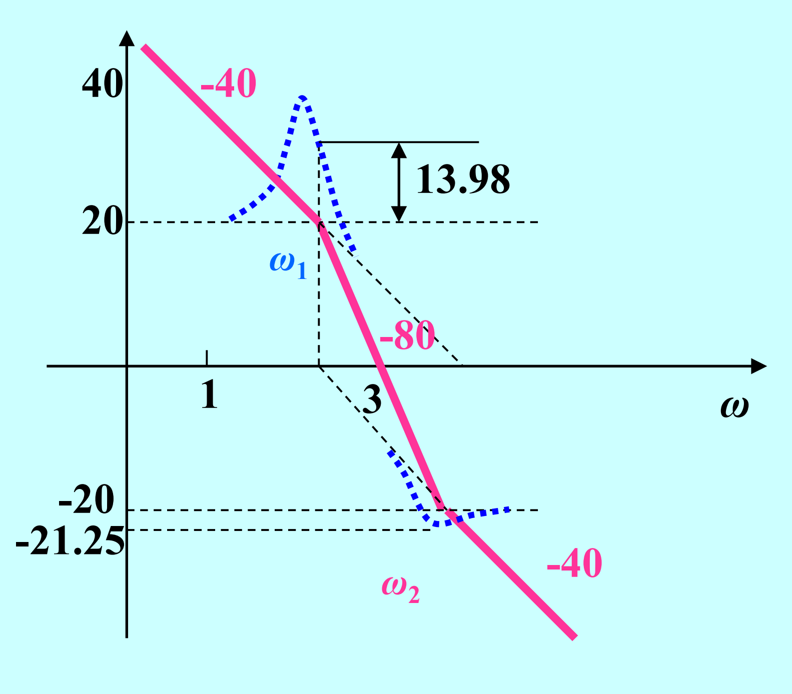
对于环节 $1+j2\zeta_2\dfrac{\omega}{\omega_2}+\left(\dfrac{j\omega}{\omega_2}\right)^2$

峰值为

$M_r=2\zeta_2\sqrt{1-\zeta_2^2}$ ➡ $20\lg 2\zeta_2\sqrt{1-\zeta_2^2}=-1.25$

➡ $\zeta_{2,1}=0.5;\zeta_{2,2}=0.866$(舍去)

注意这两个二次项情况的不同！



传递函数：$G(s)=\dfrac{28.4567\left[1+\dfrac{s}{5.3348}+\left(\dfrac{s}{5.3348}\right)^2\right]}{s^2\left[1+0.2\dfrac{s}{1.6870}+\left(\dfrac{s}{1.6870}\right)^2\right]}$

The End