自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第三章 CHAPTER 3

连续时间控制系统的时域分析

第三章关键词

- 全解（Complete solution）—— 时间响应
- 稳态响应（ Steady-State Response ）
- 暂态响应（ Transient Response ）
- 系统动态特性（Dynamics of System）
  - 一阶系统（First-order System）
  - 二阶系统（Second-order System）
- 时域性能指标（Time-response specifications）
- 状态转移矩阵（State transition matrix, STM）

第三章主要内容

- 概述
- 微分方程求解
- 控制系统时域性能指标与时域分析
- 高阶系统的暂态响应
- 状态方程的求解与分析

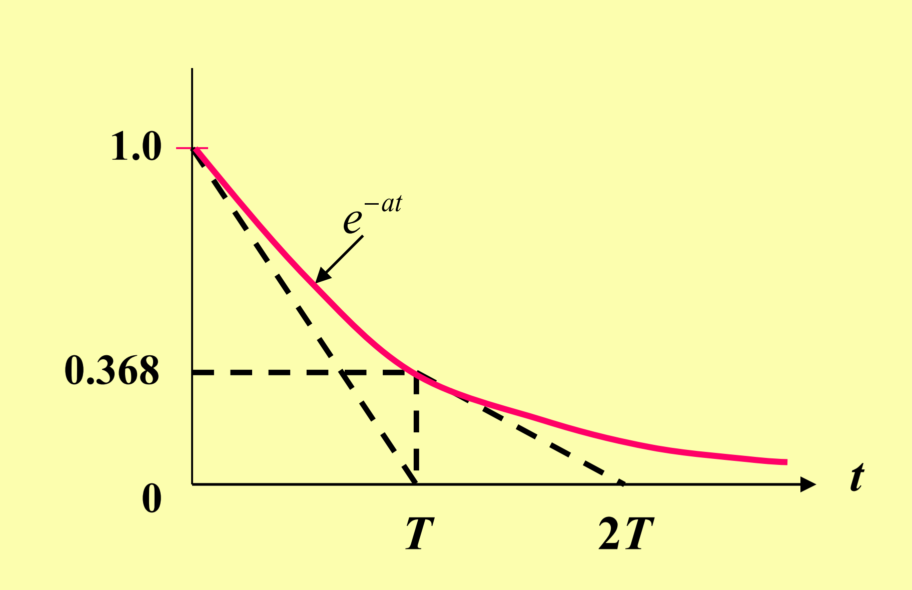
本节主要内容

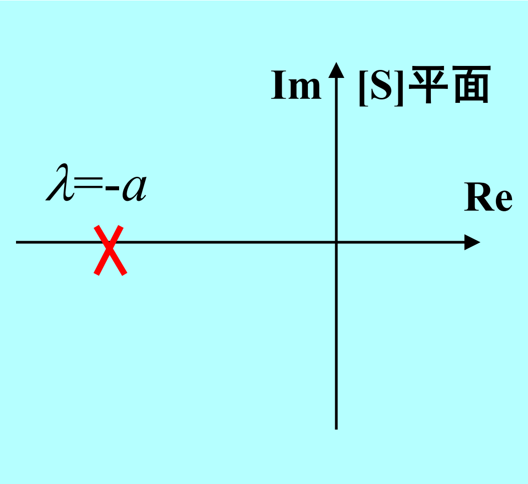
- **控制系统时域性能指标与时域分析**
  - –时间常数
  - –时间响应性能指标
  - –一阶系统动态
  - –二阶系统动态
  - –欠阻尼二阶系统的动态性能指标

时间常数

➢ 暂态项具有指数形式$Ae^{\lambda t}$，当 $\lambda=-a(a>0)$ 为负实数时，Ae^{-at} 的曲线形式（假定$A=1$）

➢ 时间常数 T：使e的指数部分等于–1的时间值。因此有，$-aT=-1$ 及 $T=\dfrac{1}{a}$





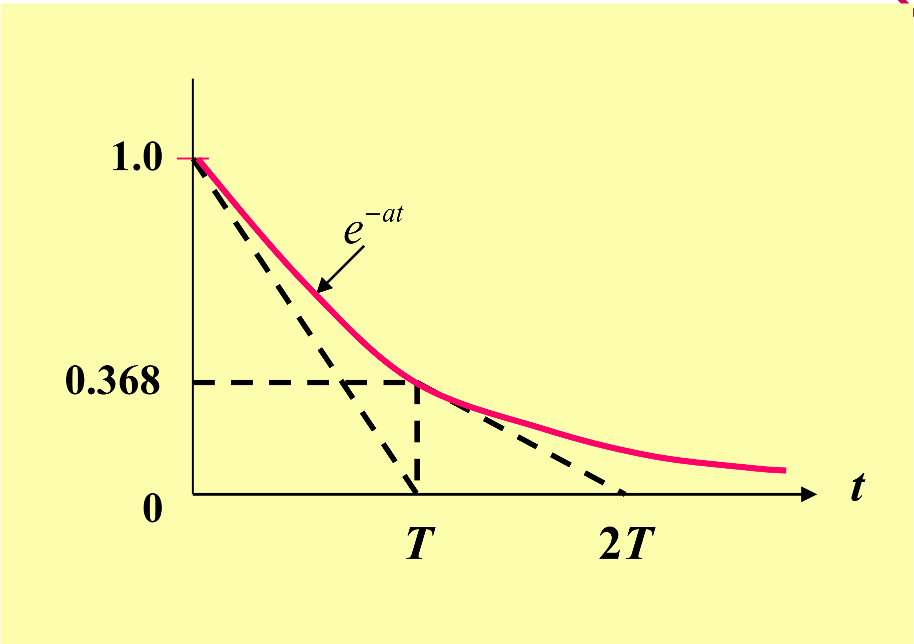
时间常数

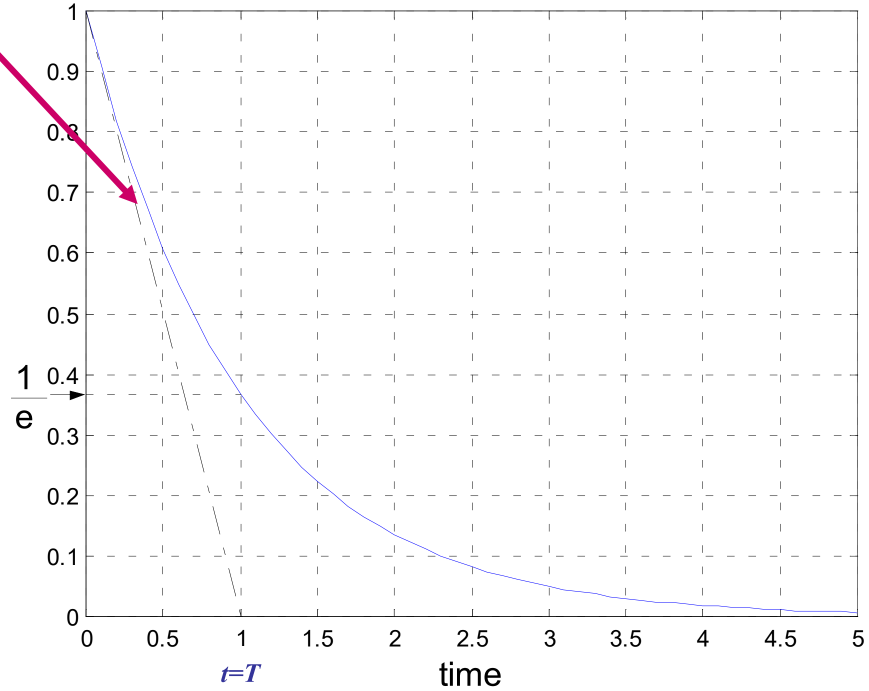
- 从几何上看，Ae^{-at}曲线在 t=0 处的切线与时间轴的相交点的值等于时间常数 T
- 在一个时间常数所对应的时间区间内，指数函数 e^{-at} 的值将从 1 下降至 0.368

◆ 例：

$A=1, a=1$

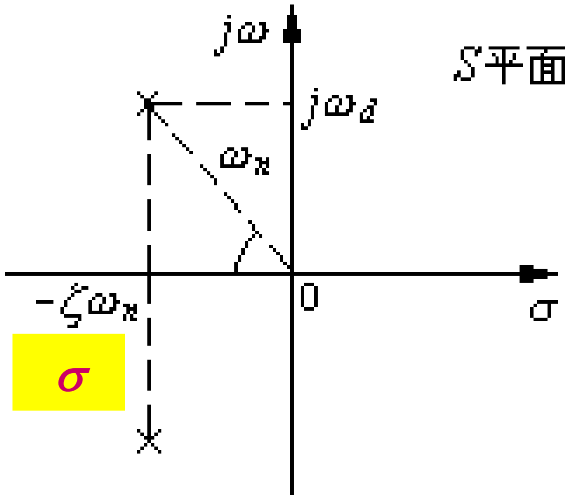
T 的图解测定



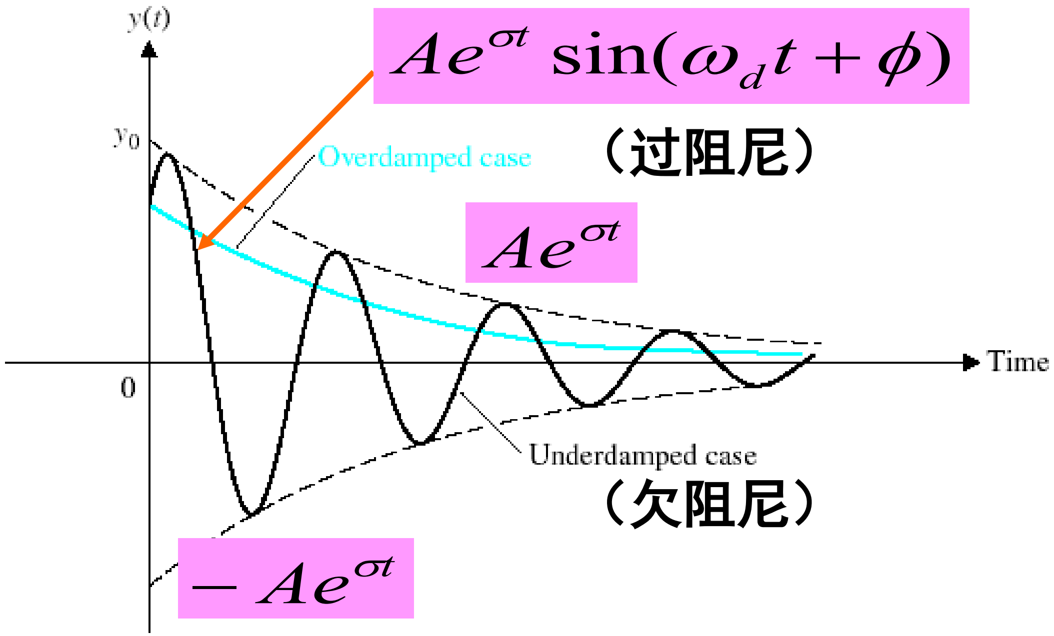


时间常数

- 当 $\lambda=\sigma+j\omega_d$ 时，系统暂态响应函数为 $Ae^{\sigma t}\sin(\omega_d t+\phi)$。对于阻尼正弦情况，时间常数通过表征包络线 $Ae^{\sigma t}$ 的参数 σ 来定义。时间常数 T 等于 $T=\dfrac{1}{|\sigma|}=\dfrac{1}{\zeta\omega_n}$



$$\lambda_{k,k+1}=\sigma\pm j\omega_d$$
$$=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



主要内容

- **控制系统时域性能指标与时域分析**
  - –时间常数
  - –时间响应性能指标
  - –一阶系统动态
  - –二阶系统动态
  - –欠阻尼二阶系统的动态性能指标

时间响应性能指标

➢ 基于系统单位阶跃响应给出的反映系统动态性能的指标

– 超调量 (Overshoot)
– 调节时间 (Settling Time)

实际响应与期望响应的阻尼程度

– 峰值时间 (Peak Time)
– 上升时间 (Rise time)

响应的快速性

…

➢ 基于误差计算的性能指标

– 平方误差积分指标 (ISE)
– 时间乘平方误差积分指标 (ITSE)
– 绝对误差积分指标 (IAE)
– 时间乘绝对误差积分指标 (ITSE)

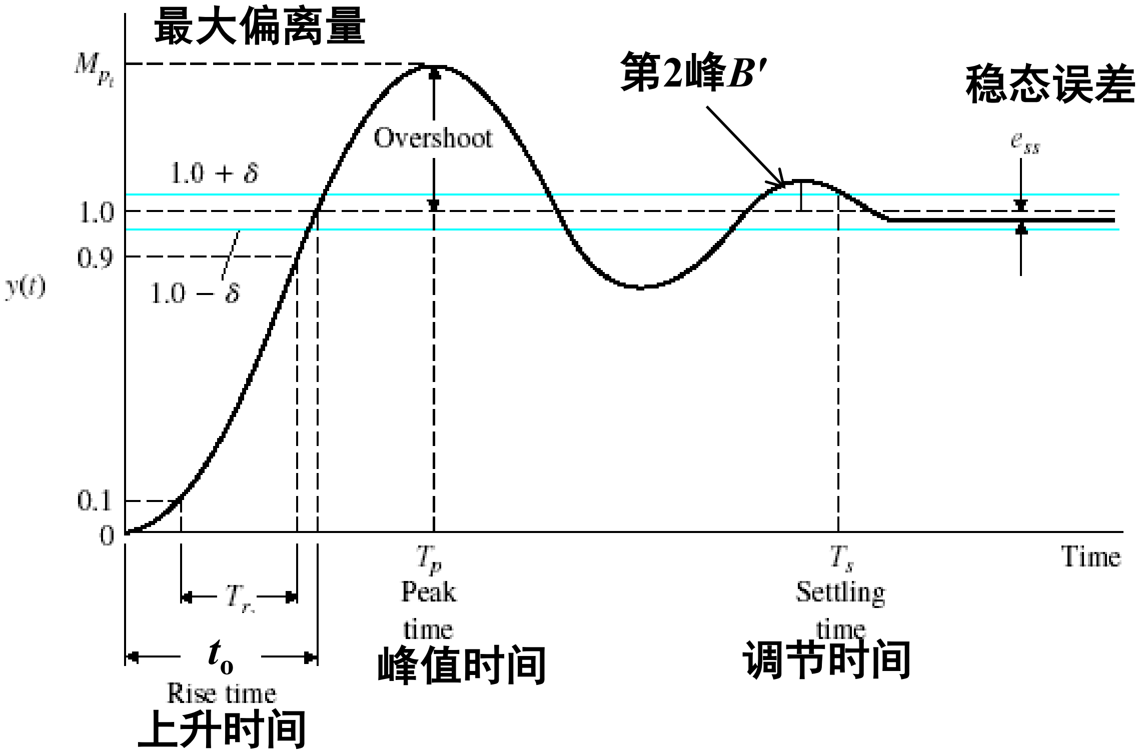
$$J_1=\int_0^{\infty} e^2(t)dt$$

$$J_2=\int_0^{\infty} te^2(t)dt$$

$$J_3=\int_0^{\infty} |e(t)|dt$$

$$J_4=\int_0^{\infty} t|e(t)|dt$$

时间响应性能指标



Step response of a control system
控制系统阶跃响应

- 衰减振荡过渡过程：应用 0-100% （最终平稳状态）上升时间 t_o
- 非振荡过渡过程：应用 10-90% （最终平稳状态）上升时间 T_r

假定系统在单位阶跃输入作用前都处于静止状态，而且系统输出量及其各阶导数都等于零（即零初始条件）

最大偏离量：M_p
峰值时间：T_p
上升时间：T_r，t_o
调节时间：T_s
延迟时间：T_d

时间响应性能指标

- **上升时间T_r**是系统响应速度的一种度量，T_r越短，表明响应速度越快。
- **峰值时间T_p**是过渡过程曲线达到第一峰值所需的时间，T_p愈小，表示系统反应愈灵敏。
- **超调量σ**是指系统响应的**最大偏离量M_p**(即$y(T_p)$)与终值$y(\infty)$之差，通常用百分比的形式表示， σ表示了被控变量偏离给定值的程度，σ越大，表示在峰值时间偏离生产规定的状态越远。

$$\sigma\% = \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

- 对于定值系统，常用**最大偏差B**表示响应偏离给定的最大值

时间响应性能指标

- **调节时间T_s**（又称回复时间或过渡过程时间）指被控变量进入新稳态值的一个区间($y(\infty)\pm\delta$)并不再越出该区间所需要的时间。
- **延迟时间T_d**指阶跃响应从运动开始到第一次到达其稳态值的50%所需要的时间。
- **衰减比$n=\sigma/B'$**
  - 当$n=1$时，过渡过程为等幅振荡
  - 当$n>1$时，n愈小，过渡过程的衰减程度也愈小，反之n愈大，过渡过程越接近非振荡过程
  - 连续工业生产过程一般希望控制系统的过渡过程稍带振荡，约对应于4：1~10：1的衰减比
- **稳态误差e_{ss}**（又称余差）是过渡过程结束后新稳态值与给定值之差，是一个稳态性能指标。

主要内容

- **控制系统时域性能指标与时域分析**
  - –时间常数
  - –时间响应性能指标
  - –一阶系统动态
  - –二阶系统动态
  - –欠阻尼二阶系统的动态性能指标

一阶系统动态

- 系统传递函数的极点决定了系统时间响应函数的特点
- 对于没有零点的一阶系统，系统具有一个极点，且有（输入为单位脉冲信号）

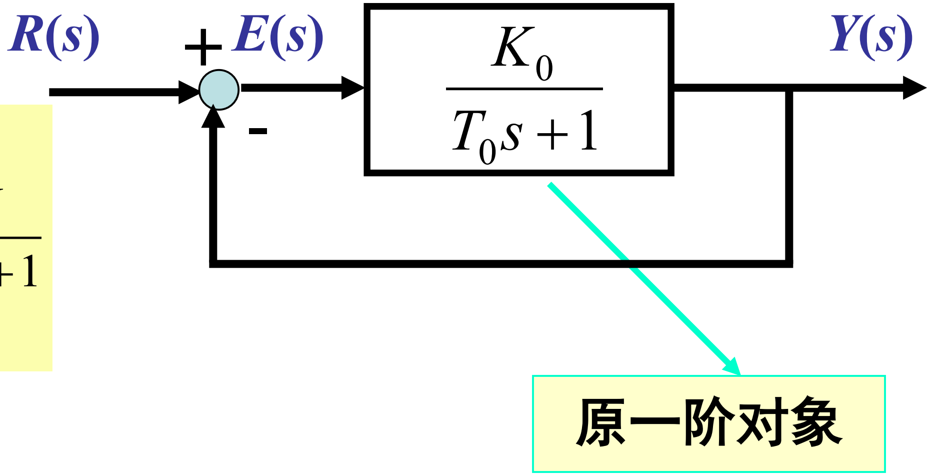
$$G(s)=\frac{A}{s-p} \Leftrightarrow g(t)=Ae^{pt}, \quad p\text{ 为实数}$$

- $p<0$ 表示系统极点位于 S 平面的左半平面，指数项衰减，系统是稳定的
- $p>0$ 表示系统极点位于 S 平面的右半平面，指数项增加，系统是不稳定的
- $p=0$，则系统响应关于时间为常数，系统是临界稳定的

一阶系统动态

➢ 由一阶对象组成的单位反馈闭环系统仍然是一个一阶系统，只是系统增益和时间常数变小，为原值的$1/(1+K_0)$

闭环传递函数 $G(s)$



$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K_0}{T_0 s+1}}{1+\frac{K_0}{T_0 s+1}}=\frac{K_0}{T_0 s+1+K_0}=\frac{K}{Ts+1}$$

其中， $K=\frac{K_0}{1+K_0}$， $T=\frac{T_0}{1+K_0}$

在零初始条件假设下，

$$Y(s)=R(s)\cdot G(s)=R(s)\cdot\frac{K}{Ts+1}$$

如果 $r(t)$ 已知，则可以得到系统的时间响应 $y(t)$。

一阶系统动态

1. 如果 r 为单位阶跃函数：$r(t)=1$

一阶系统的阶跃响应为

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{K}{Ts+1}=\frac{K}{s}-\frac{K}{s+\frac{1}{T}}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=K(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

稳态

暂态

$$y(\infty)=K=\frac{K_0}{1+K_0}$$

$$e(\infty)=1-K=1-\frac{K_0}{1+K_0}=\frac{1}{1+K_0}$$

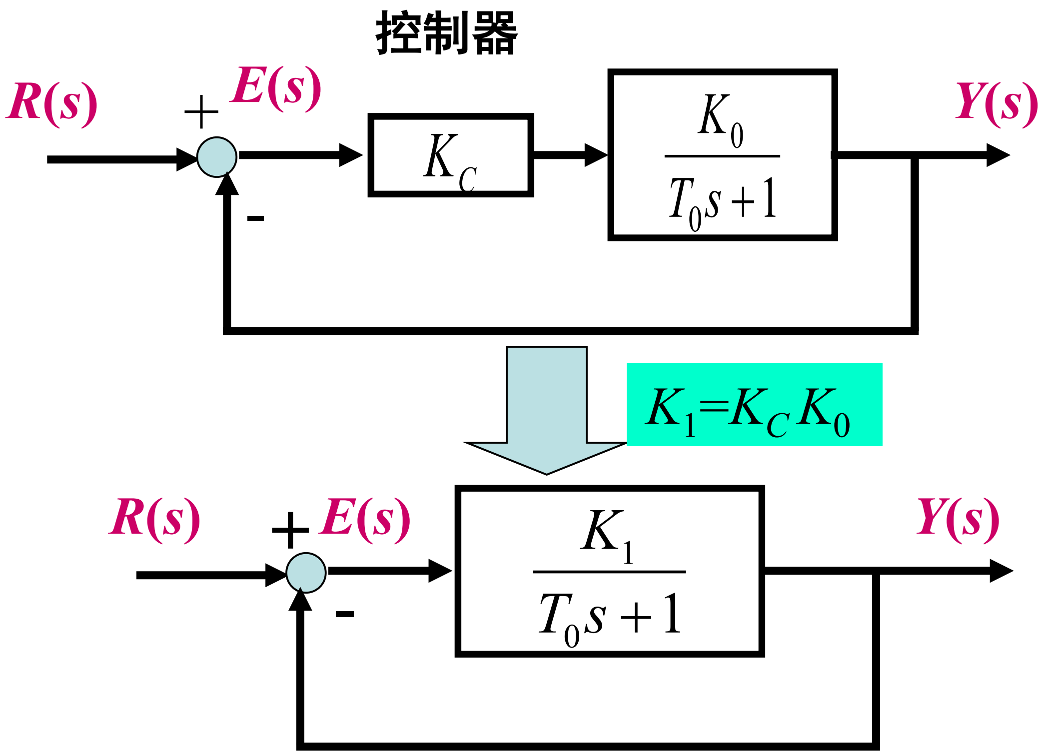
➢ **如何获得期望的性能指标？**

一阶系统动态

考虑比例控制器

闭环传递函数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{\dfrac{K_1}{T_0s+1}}{1+\dfrac{K_1}{T_0s+1}}=\frac{K_1}{T_0s+1+K_1}=\frac{\dfrac{K_1}{T_0}}{s+\dfrac{K_1+1}{T_0}}$$



当 $r(t)$ 为单位阶跃函数时，

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\dfrac{K_1}{T_0}}{s+\dfrac{K_1+1}{T_0}}=\frac{\dfrac{K_1}{K_1+1}}{s}-\frac{\dfrac{K_1}{K_1+1}}{s+\dfrac{K_1+1}{T_0}}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{K_1}{K_1+1}(1-e^{-\frac{(K_1+1)t}{T_0}})$$

$$y(\infty)=\frac{K_1}{K_1+1}$$

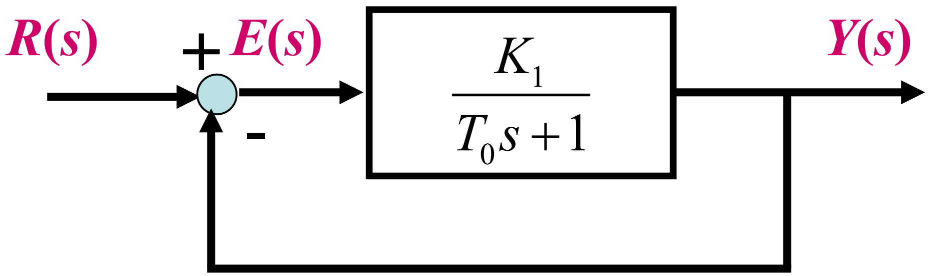
$$e(\infty)=1-\frac{K_1}{K_1+1}=\frac{1}{K_1+1}$$

$K_c\uparrow,\ K_1\uparrow,\ e(\infty)\downarrow$

一阶系统动态

求取系统稳态误差

➢ 闭环误差传递函数 $G_E(s)$ 为



$$G_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{K_1}{T_0 s+1}}=\frac{T_0 s+1}{T_0 s+1+K_1}$$

当 $r(t)$ 为单位阶跃函数时，

$$E(s)=G_E(s)\cdot R(s)=\frac{T_0 s+1}{T_0 s+1+K_1}\cdot\frac{1}{s}$$

如果$E(s)$在右半平面和虚轴（原点除外）无极点，可以利用终值定理求解稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{T_0 s+1}{T_0 s+1+K_1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{K_1+1}$$

问题：有什么方法可以消除稳态误差？

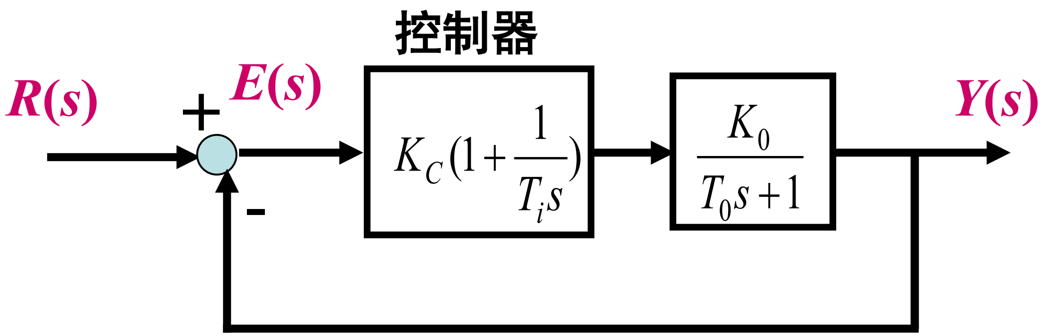
一阶系统动态

利用 PI 控制器

闭环传递函数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_1(T_i s+1)}{T_i s(T_0 s+1)+K_1(T_i s+1)}$$

其中，$K_1=K_C K_0$



当 $r(t)$ 为单位阶跃函数时，系统输出的拉普拉斯变换为

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{K_1(T_i s+1)}{T_i s(T_0 s+1)+K_1(T_i s+1)}$$

增加积分环节的效果是在 S 平面上增加一个零点和一个极点

如果 $Y(s)$在右半平面和虚轴（原点除外）无极点，可以利用终值定理求解稳态

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}[s\cdot Y(s)]=1$$

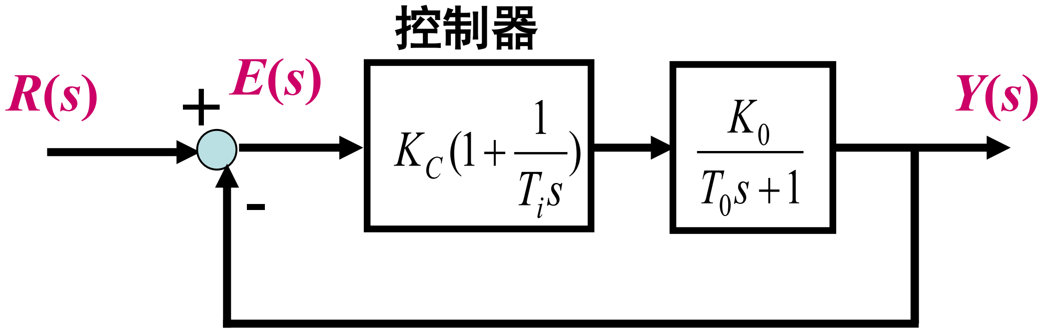
$$e(\infty)=1-1=0$$

一阶系统动态

利用 PI 控制器

- 系统误差传递函数 $G_E(s)$ 为

$$G_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{T_i s(T_0 s+1)}{T_i s(T_0 s+1)+K_1(T_i s+1)}$$



当 $r(t)$ 为单位阶跃函数时，系统误差信号的拉普拉斯变换为

$$E(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{T_i s(T_0 s+1)}{T_i s(T_0 s+1)+K_1(T_i s+1)}$$

如果$E(s)$在右半平面和虚轴（原点除外）无极点， 可以利用终值定理求解稳态误差

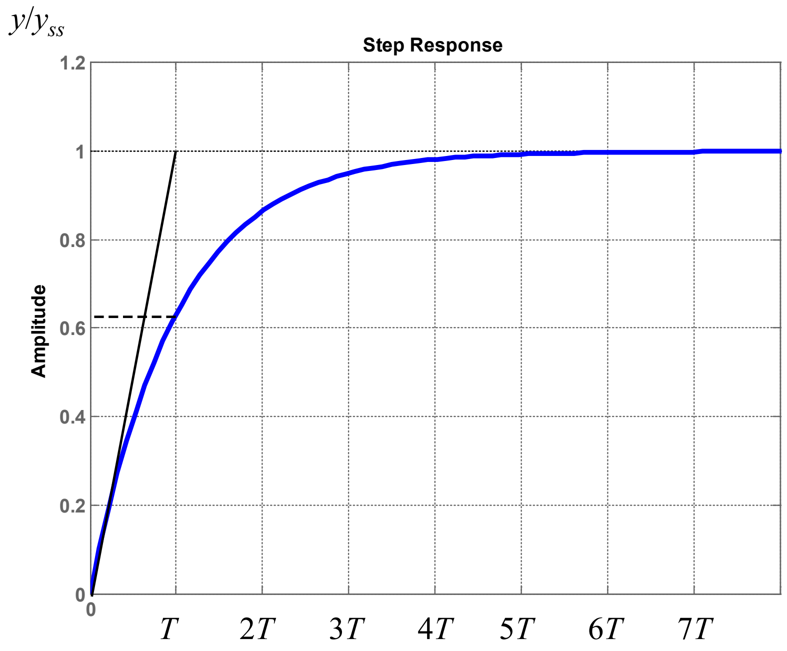
$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{T_i s(T_0 s+1)}{T_i s(T_0 s+1)K_1(T_i s+1)}=0$$

当控制器包含积分环节时，稳态误差为零

一阶系统动态

1. 如果 r 为单位阶跃函数：$r(t)=1$

一阶系统的阶跃响应为 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=K(1-e^{-\frac{t}{T}})$



➢ **对系统进行时域响应分析：**

当 $t=0$, $y(0)=0$, $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\dfrac{K}{T}$

当 $t=T$, $y(T)=K(1-e^{-1})=0.632K$

当 $t\to\infty,\quad y(\infty)=K\quad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t\to\infty}=0$

当
$t=3T,\quad y(t)=0.95K$
$t=4T,\quad y(t)=0.982K$
$t=5T,\quad y(t)=0.993K$

不存在峰值时间T_{p}、超调量σ与衰减比n；

$T_d=0.69T$

$T_r=2.20T$

$$T_s=\begin{cases}3T; & \delta=5\%y(\infty)\\ 4T; & \delta=2\%y(\infty)\end{cases}$$

一阶系统动态

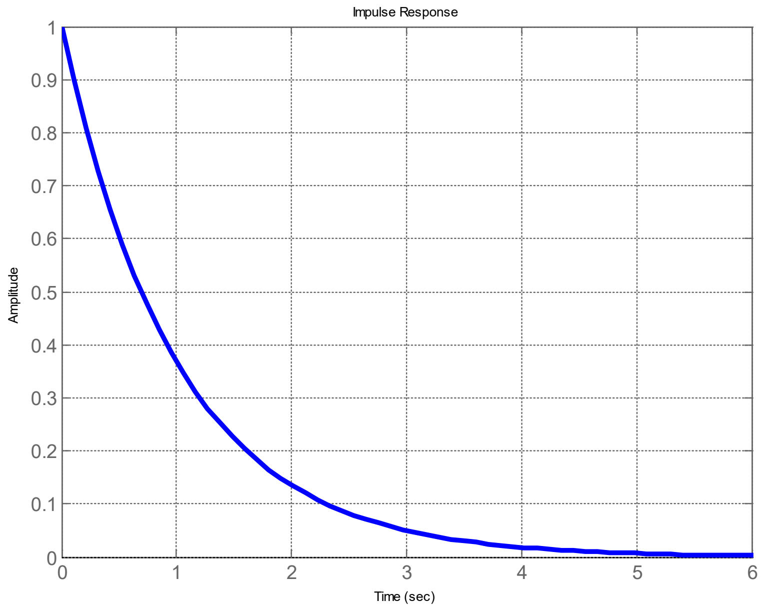
$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

2. 如果 r 为单位脉冲函数：$r(t)=\delta(t)$

$$Y(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

系统单位脉冲响应为

$$y(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}},t\geq 0$$



非周期的单调衰减函数：

当t=0时，$y(t)\big|_{\max}=y(0)=\frac{1}{T}$

当$t\to\infty$时，$y(\infty)=0$

$$\because r(t)=\delta(t)$$

系统无稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}(r(t)-y(t))=0$$

一阶系统动态

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

3. 如果 r 为单位斜坡函数：$r(t)=t$

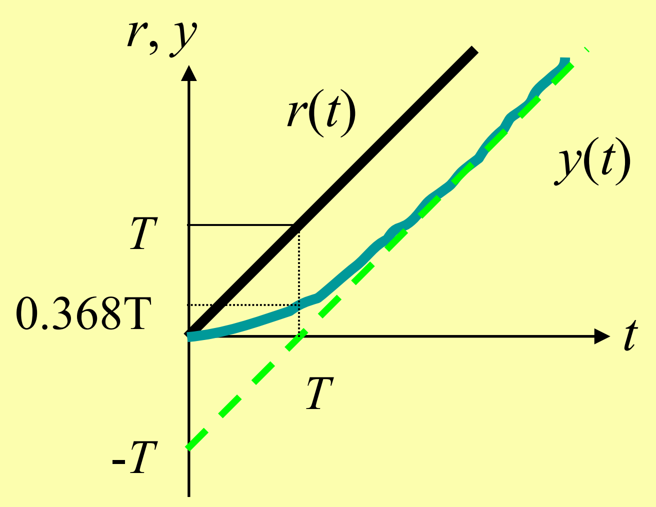
$$Y(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$

系统斜坡响应为

$$y(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$$

系统稳态响应为

$$y_{ss}(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=t-T\to\infty$$



$$\because r(t)=t$$

系统具有稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}(r(t)-y(t))=T$$

一阶系统动态

系统输入 $t\geq 0$	系统响应 $t\geq 0$
单位脉冲 $r(t)=\delta(t)$	$y_\delta(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}=g(t)$
D	D
单位阶跃 $r(t)=u(t)=1$	$y_u(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$
D	D
单位斜坡 $r(t)=t$	$y_{r=t}(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$
D	D
单位抛物线 $r(t)=t^2/2$	$y_{x=\frac{t^2}{2}}(t)=\frac{t^2}{2}-Tt+T^2(1-e^{-\frac{t}{T}})$

- 线性系统对输入信号导数（积分）的响应，可通过系统对输入信号的响应进行微分（积分--积分常数则由零初始条件决定）求得。

主要内容

- **控制系统时域性能指标与时域分析**
  - 时间常数
  - 时间响应性能指标
  - 一阶系统动态
  - 二阶系统动态
  - 欠阻尼二阶系统的动态性能指标

二阶系统动态

➢ 回顾第2章的例子

- 例1. R-L-C 串联电路 $$LC\frac{dv_c{}^2(t)}{dt^2}+RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=e$$
- 例2. 质量-弹簧-阻尼系统 $$M\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+Ky(t)=Kx_a(t)$$
- 例3. 液位系统

$$T_1T_2\frac{d^2h_2}{dt^2}+(T_1+T_2+A_1R_2)\frac{dh_2}{dt}+h_2=R_2q_{in}-R_2q_f-T_1R_2\frac{dq_f}{dt}$$

所有这些例子均为二阶系统，它们的动态（暂态响应）仅仅取决于系统特征方程的根

二阶系统动态

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- 线性时不变二阶系统的一般形式为

$$a\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + b\frac{dy_1(t)}{dt} + cy_1(t) = kx$$

- 令输入变量 $x(t)$ 为阶跃函数 $x(t)=A$，于是系统稳态为

$$y_1(\infty) = \frac{kA}{c}$$

- 为了得到二阶系统的标准形式，引入新的变量，令

$$\frac{y_1(t)}{\frac{k}{c}} = y(t)$$

无量纲的输出变量

$$\frac{b}{a} = 2\zeta\omega_n \qquad \frac{c}{a} = \omega_n^2$$

$$\boxed{\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)}$$

二阶系统动态

$$a\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}+b\frac{dy_1(t)}{dt}+cy_1(t)=kx$$

- 引入新变量之后，可以得到二阶系统的标准形式：

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=\omega_n^2x(t)}$$

- 其中，ζ是无量纲的**阻尼比**，ω_n 是系统的**自然频率**
- 系统的传递函数为：

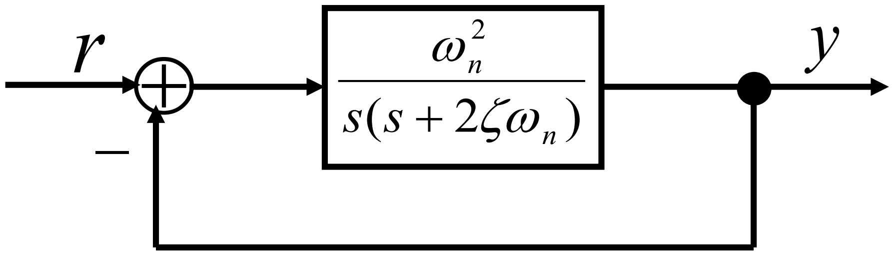
$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}}$$

- 系统特征方程的根为：

$$s_1,s_2=\sigma\pm j\omega_d=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

二阶系统动态

- 具有标准形式的二阶系统还可以表示为如下图所示的单位反馈系统结构



- 系统的闭环传递函数为：

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- 系统特征方程的根为：

$$s_1, s_2=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

对于 $\zeta>0$ ，系统是稳定的

对于 $\zeta<0$ ，系统是不稳定的？？

- 如果系统是稳定的，则系统暂态响应取决于阻尼比 ζ 的值，分三种情况：

(1) $\zeta>1$ ；(2) $\zeta=1$ ；(3) $0<\zeta<1$ ；(4) $\zeta=0$ ，系统是临界稳定的

二阶系统动态：ζ>1

- ζ>1时，系统具有两个不同的实根

$$s_{1,2}=-(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n$$

- 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应为

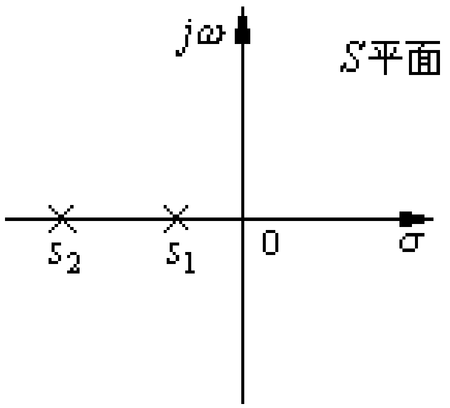
$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{[2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})]^{-1}}{s+(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}+\frac{[2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})]^{-1}}{s+(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}$$

LT^{-1}

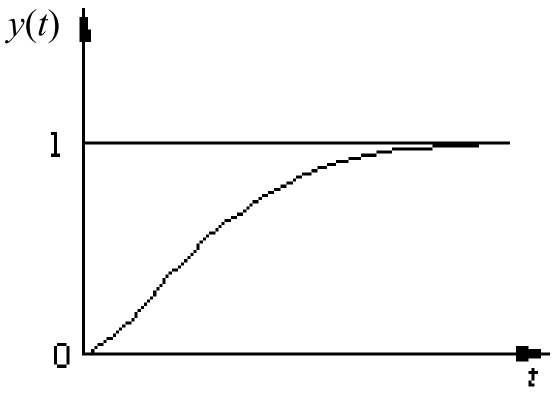
$$y(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}-\frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right)$$

二阶系统动态：ζ>1

- ζ>1时，系统特征方程的根在 S 平面的分布及响应曲线



(a) 根分布



(b) 单位阶跃响应

此时的系统响应称为过阻尼响应

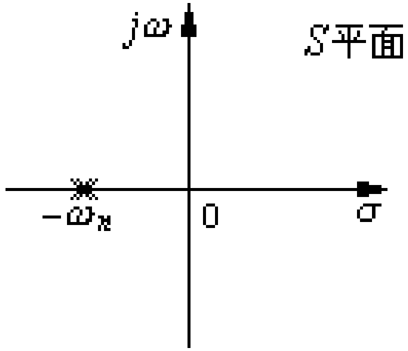
二阶系统动态：ζ=1

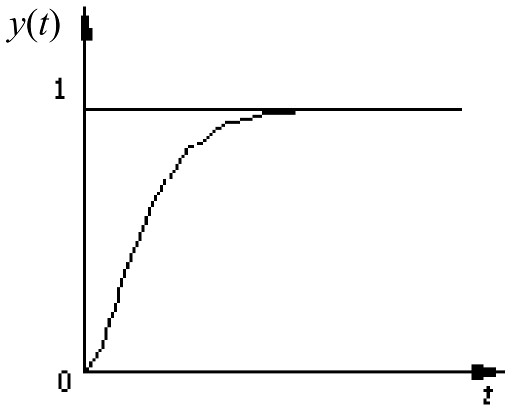
- ζ=1时，系统特征方程具有两个相等的实根 $s_{1,2}=-\omega_n$
- 如果系统输入为**单位阶跃函数**，则零初始条件下系统响应为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}-\frac{1}{s+\omega_n}$$

LT^{-1}

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$





- 此时，系统响应称为**临界阻尼**响应

二阶系统动态：0≤ζ<1

➢ 在这种情况下，系统传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)}$$

➢ 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应的传递函数为

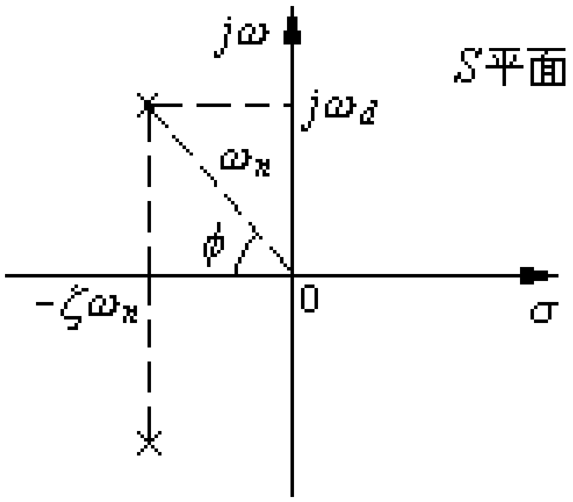
$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

LT^{-1}

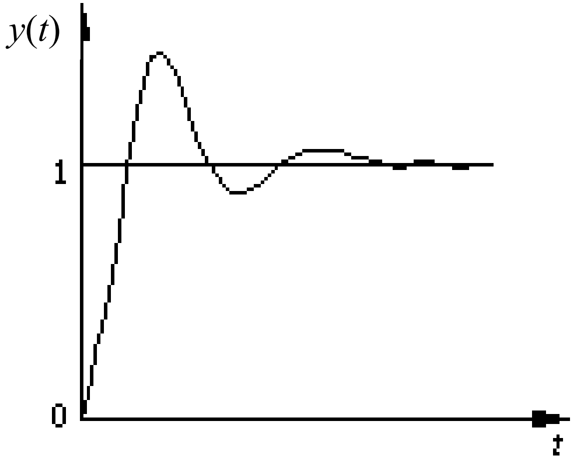
$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=1-e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

二阶系统动态：$0 \le \zeta < 1$



(a) 根分布



(b) 单位阶跃响应

- 衰减振荡过程，其振荡频率为有阻尼振荡频率ω_d，而其幅值则按指数曲线（响应曲线的包络线）衰减，两者均由参数阻尼比ζ和自然频率ω_n决定。

二阶系统动态：0≤ζ<1

- 系统误差信号为：

$$e(t) = r(t) - y(t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \qquad (t \ge 0)$$

- 当 0<ζ<1， $t\to\infty$时，系统误差（即稳态误差）为 $e(\infty)=0$

- 当 ζ=0 时，系统阶跃响应无阻尼，因此响应曲线将以自然频率 ω_n作等幅振荡

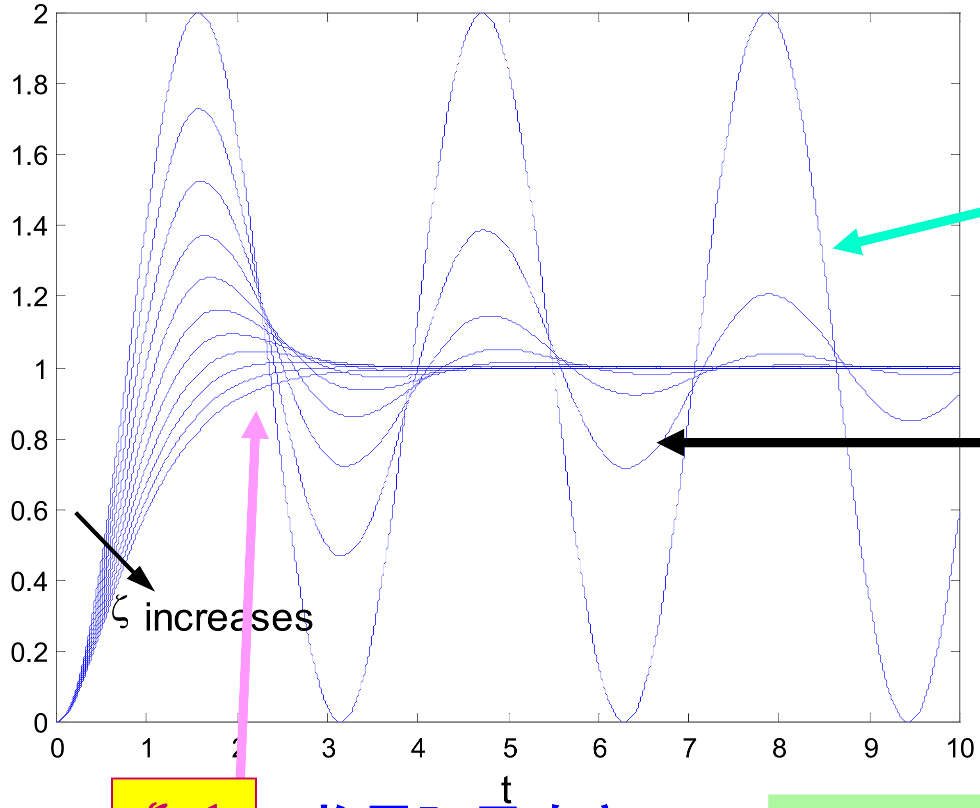
$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$y(t) = 1 - \cos\omega_n t$$

二阶系统动态：0≤ζ<1

- 不同的 ζ 取值下的单位阶跃暂态响应

$0 \leq \zeta \leq 1$



ζ=0

振荡响应

0<ζ<1

欠阻尼响应

ζ=1

临界阻尼响应

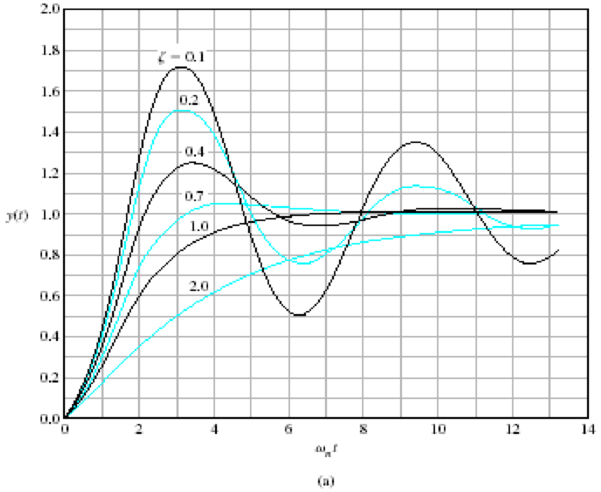
二阶系统暂态

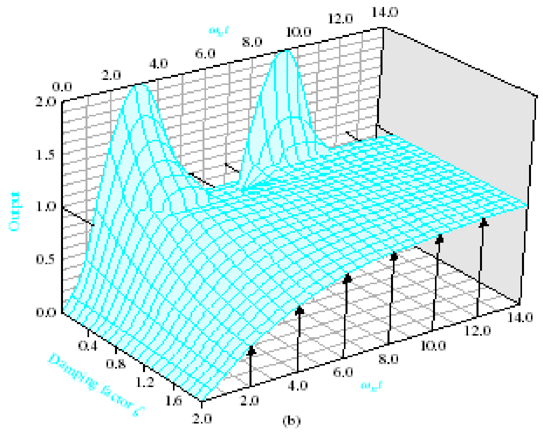
➢ 由二阶对象组成的单位反馈闭环系统仍然是二阶系统

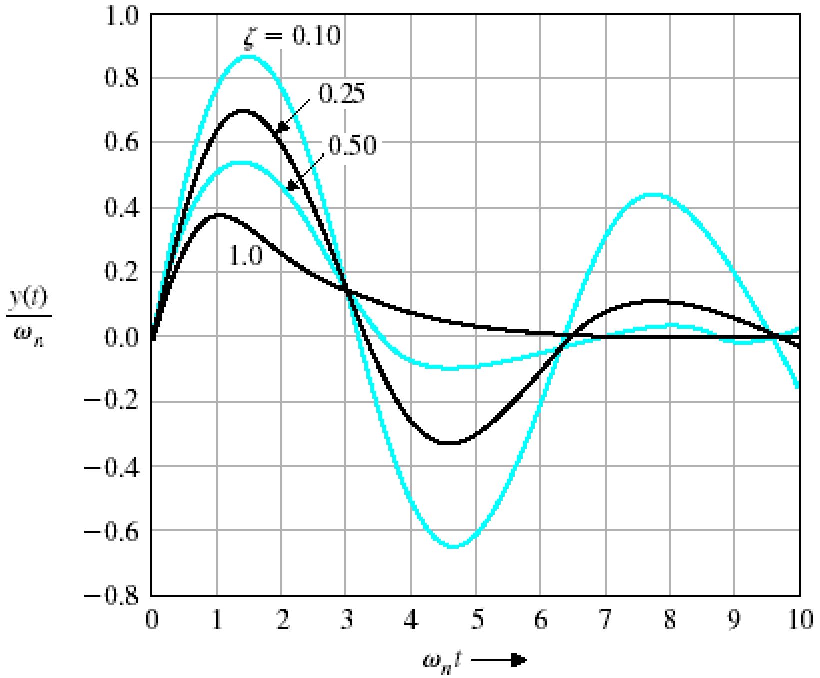
二阶系统动态：小结

- 阻尼比 ζ 与系统特征方程根在 S 平面 中位置的关系
  - $\zeta=0$，特征方程有纯虚根，系统响应为等幅振荡响应
  - $0<\zeta<1$，特征方程有共轭复根，系统响应为欠阻尼响应
  - $\zeta=1$，特征方程有相等实根，系统响应为临界阻尼响应
  - $\zeta>1$，特征方程有不等实根，系统响应为过阻尼响应

二阶系统动态：小结







$$y_\delta(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)$$

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

主要内容

- **控制系统时域性能指标与时域分析**
  - –时间常数
  - –时间响应性能指标
  - –一阶系统动态
  - –二阶系统动态
  - –欠阻尼二阶系统的动态性能指标

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **上升时间**：响应从终值的10%上升到终值的90%所需的时间（过阻尼系统）；或响应从零第一次上升到终值所需的时间（欠阻尼系统）。

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\beta)$$

$$y(T_r)=1$$

$$\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,T_r+\beta)=0$$

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,T_r+\beta=\pi$$

$$\boxed{T_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

其中，

$$\beta=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

➢ 上升时间的确切解析表达式难以计算，通常使用线性近似表达式进行计算

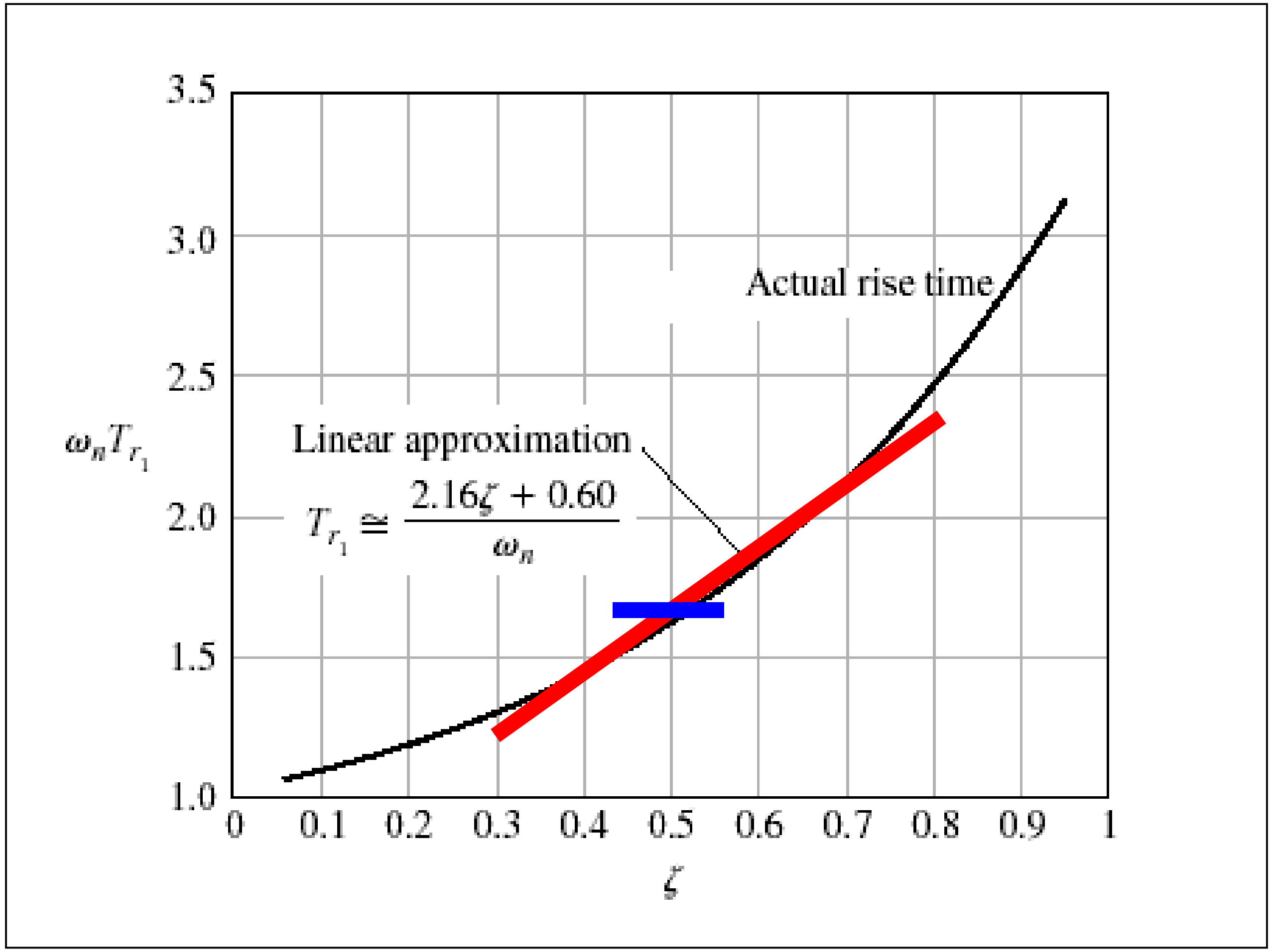
$$T_{r1} \cong \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$$

➢ **注意：**对于 $\zeta = 0.5$，可以利用下面的表达式来计算上升时间

$$T_r \cong \frac{1.7}{\omega_n}$$

要使系统反应快，必须减小 T_r。因此当 ζ 一定， ω_n 必须加大；若 ω_n 为固定值，则 ζ 越小， T_r 也越小。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



$$T_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n T_r = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n T_r \cong 2.16\zeta + 0.60$$

$$\omega_n T_r \cong 1.7$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **峰值时间**：系统响应超过其终值到达第一个峰值所需的时间。

$$y_u(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$\frac{dy_u(t)}{dt} = y_\delta(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t)$$

$$\frac{dy_u(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t) = 0 \Leftrightarrow \omega_d t = n\pi \Leftrightarrow t = \frac{n\pi}{\omega_d} \Leftrightarrow T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

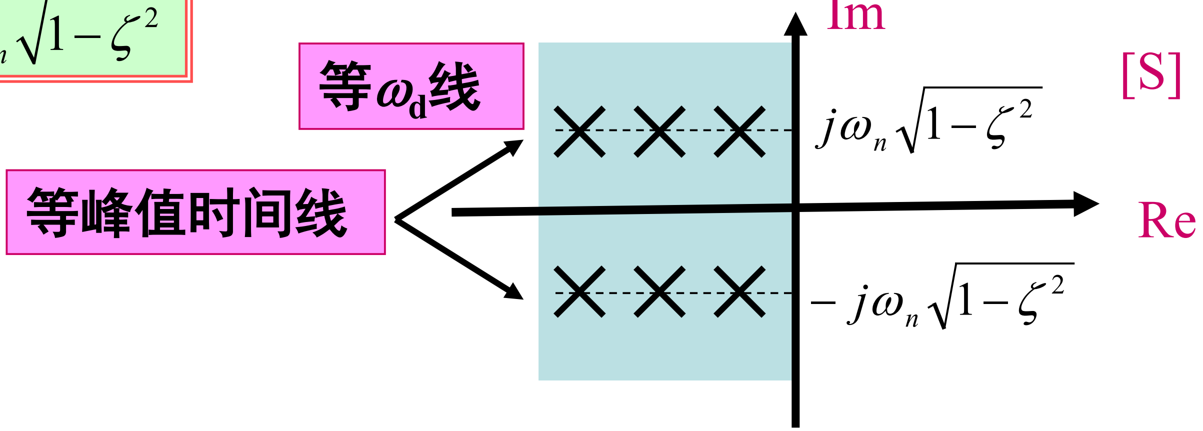
- **峰值时间是阻尼振荡频率ω_d（$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$）的函数**

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

➢ **峰值时间**：系统响应超过其终值到达**第一个峰值**所需的时间。

$$y_u(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



峰值时间 T_p与阻尼振荡频率 ω_d 成反比。当 ω_n一定，ζ越小，T_p也越小（响应就越快）。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

➢ **超调量：** 响应的最大偏离量与终值的差同终值的比。

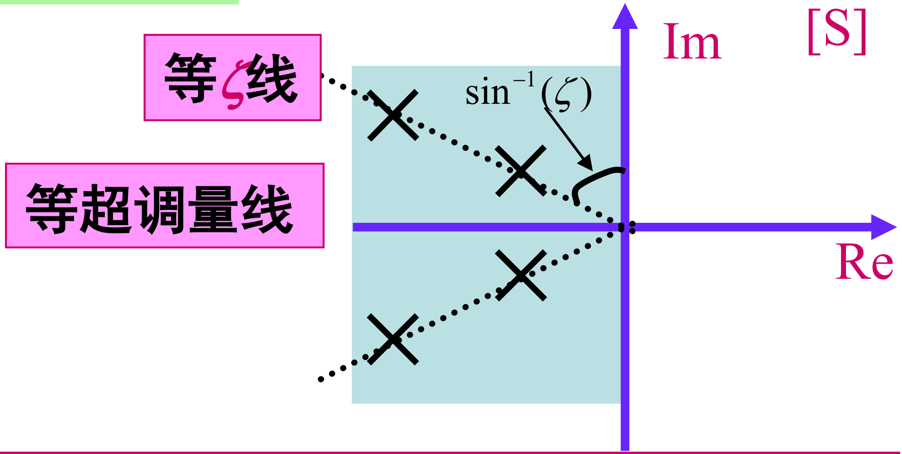
➢ **最大偏离量**

$$M_p = y(T_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \beta\right)$$

$$= 1 + e^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

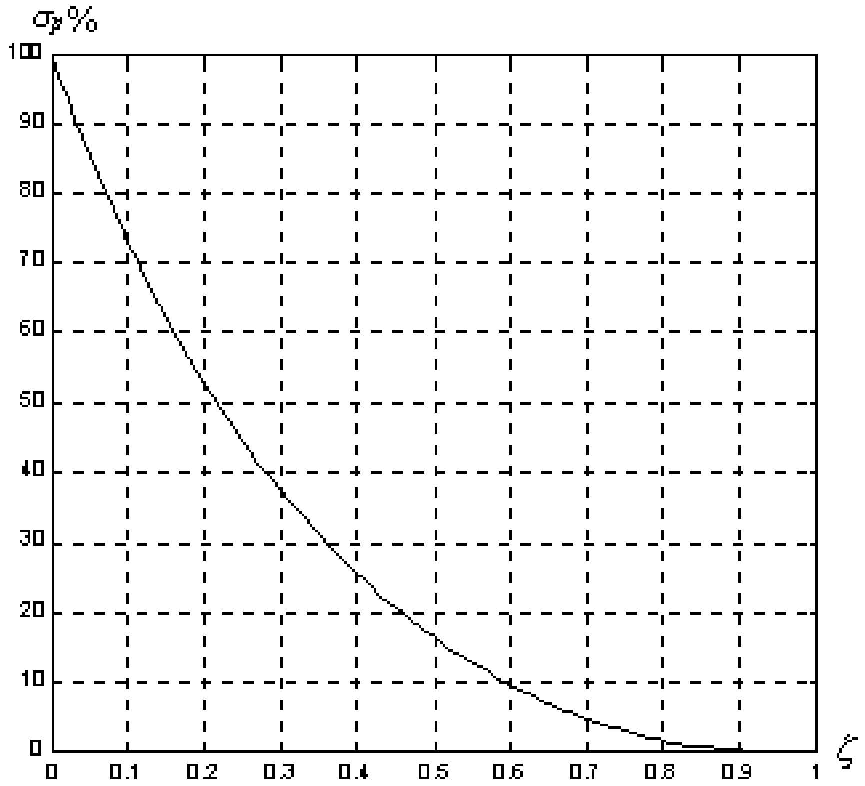
➢ **超调量**

$$\sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



超调量完全由ζ决定，ζ越小，超调量越大。当ζ=0时，σ%= 100%，当ζ=1时，σ% =0。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

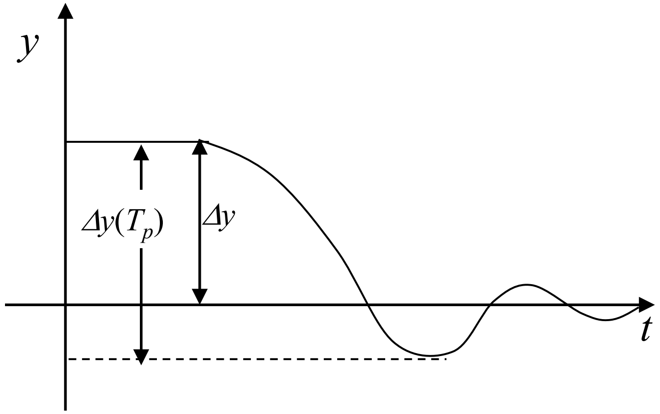


σ和 ζ 的关系

$$\sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- **更一般地，σ可表示如下，通常还为百分比形式**

$$\sigma = \frac{\left|\Delta y(T_p)\right| - \left|\Delta y\right|}{\left|\Delta y\right|}$$



欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **调节时间：** 响应到达并保持在终值±5%（±2%）内所需的最短时间。

- 误差表达式

$$e(t) = r(t) - y(t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \quad (t \ge 0)$$

- 考虑到系统时间响应曲线总是在包络线的两条分支之间变化

$$\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right| \le \left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right| \le 0.05, \text{或} 0.02$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- 通常利用两个近似公式计算调节时间

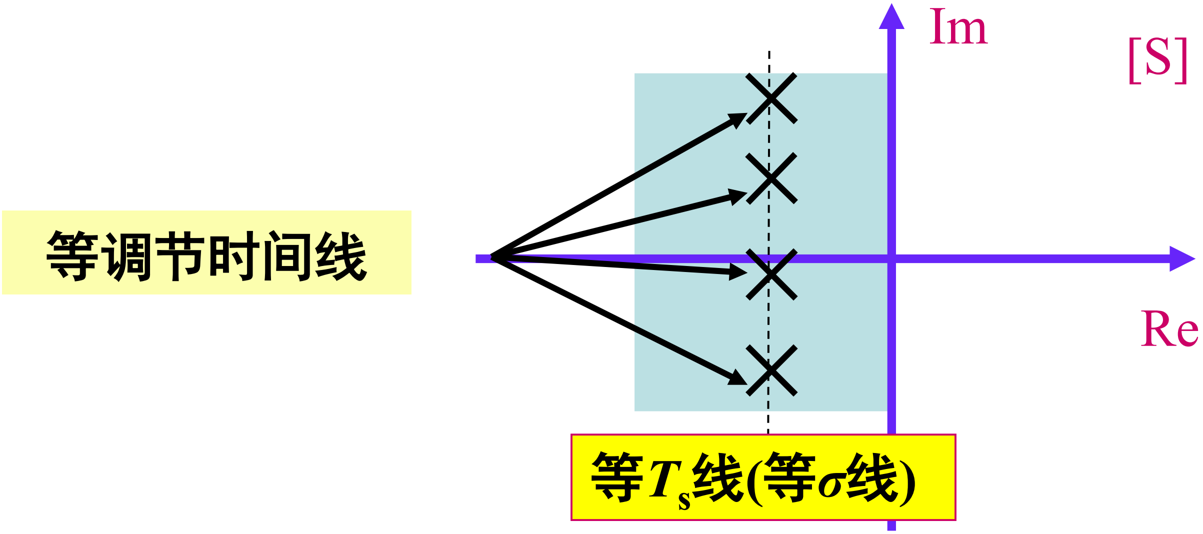
$$\left|e^{-\zeta\omega_n T_s}\right| = 0.05 \Leftrightarrow \zeta\omega_n T_s \approx 3 \Leftrightarrow T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

➢对于 5% 误差

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

➢对于 2% 误差

- 调节时间仅仅取决于复数共轭极点的实部 $\zeta\omega_n$



欠阻尼二阶系统的动态性能指标

➤ **衰减比：**同方向过渡过程曲线上的相邻两个波峰之比

$$T_3 = \frac{3\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$y(T_3) = 1 + e^{-\frac{3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$n = \frac{\sigma}{B'} = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

与超调量σ类似，与阻尼比ζ之间有一一对应的关系，一般希望n为(4-10)：1

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **稳态误差**是衡量控制系统稳态性能的重要度量。

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}[r(t)-y(t)]$$

其中，$r(t)$ 是输入，$y(t)$ 是输出

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot G_E(s)\cdot R(s)$$

- $G_E(s)$ 是误差传递函数
- 只有**稳定系统**才有稳态误差

欠阻尼二阶系统的动态性能指标：小结

- 对于不包含零点的二阶系统，动态性能指标的**精确公式**

$$M_p = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$n = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\beta = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

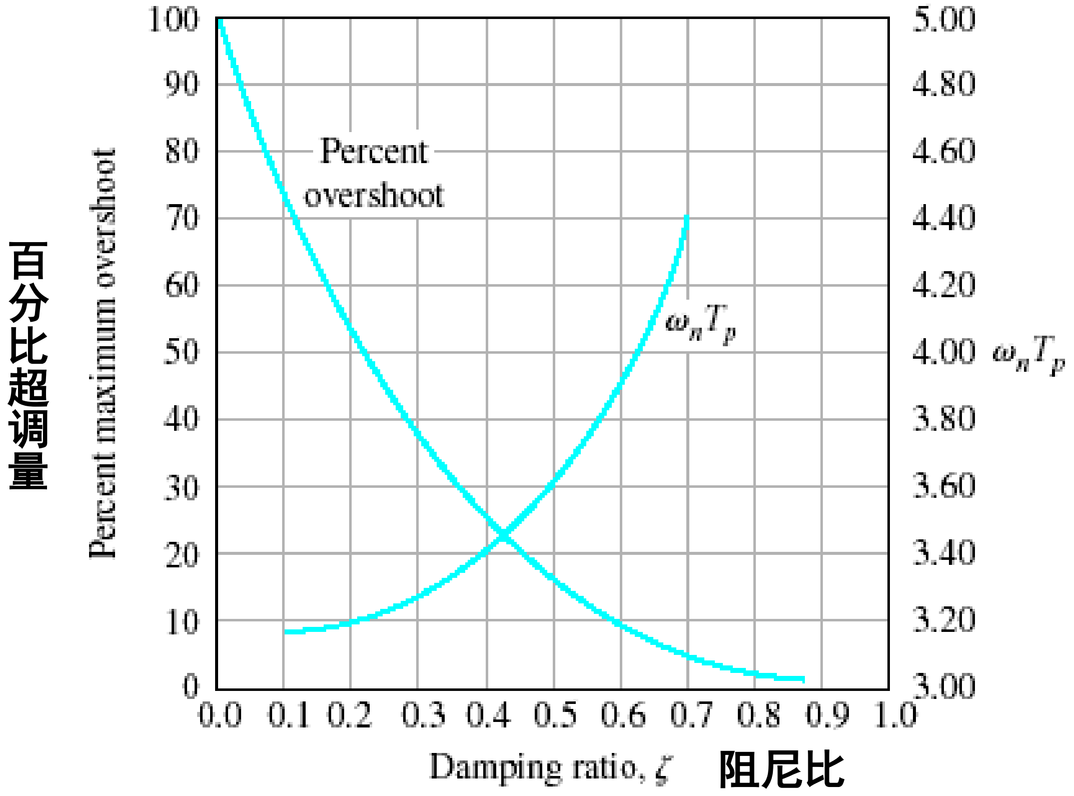
- 调节时间的**近似公式**

$$T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$ 对于 5% 误差

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$ 对于 2% 误差

通常还用：$T_s \approx \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

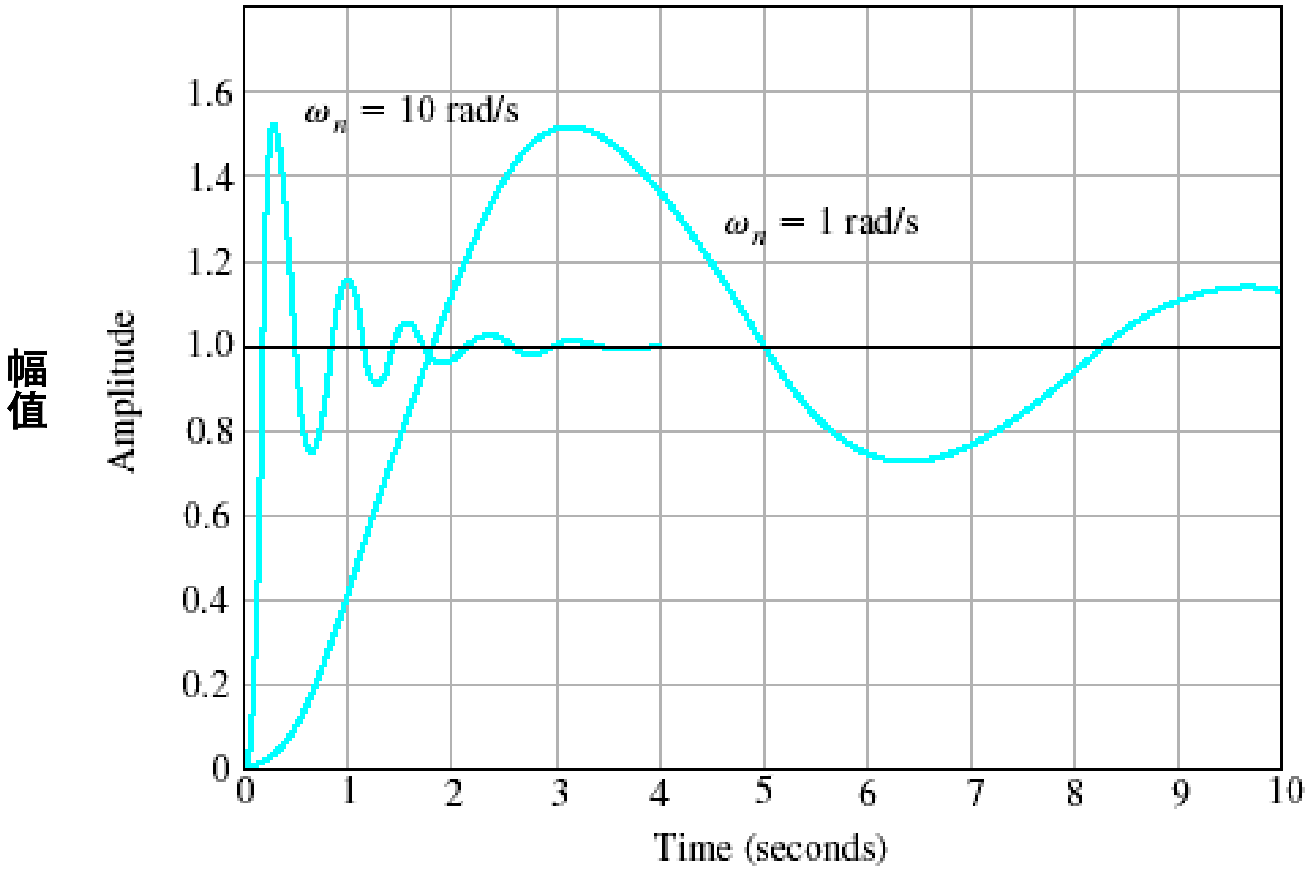


Percent overshoot and normalized peak time versus damping ratio ζ for a second-order system

二阶系统的百分比超调量、归一化峰值时间与阻尼比的关系

从控制系统设计目标来说，峰值时间与超调量之间具有相互矛盾的关系，因此在参数选择时要考虑到两者之间的**折中**。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

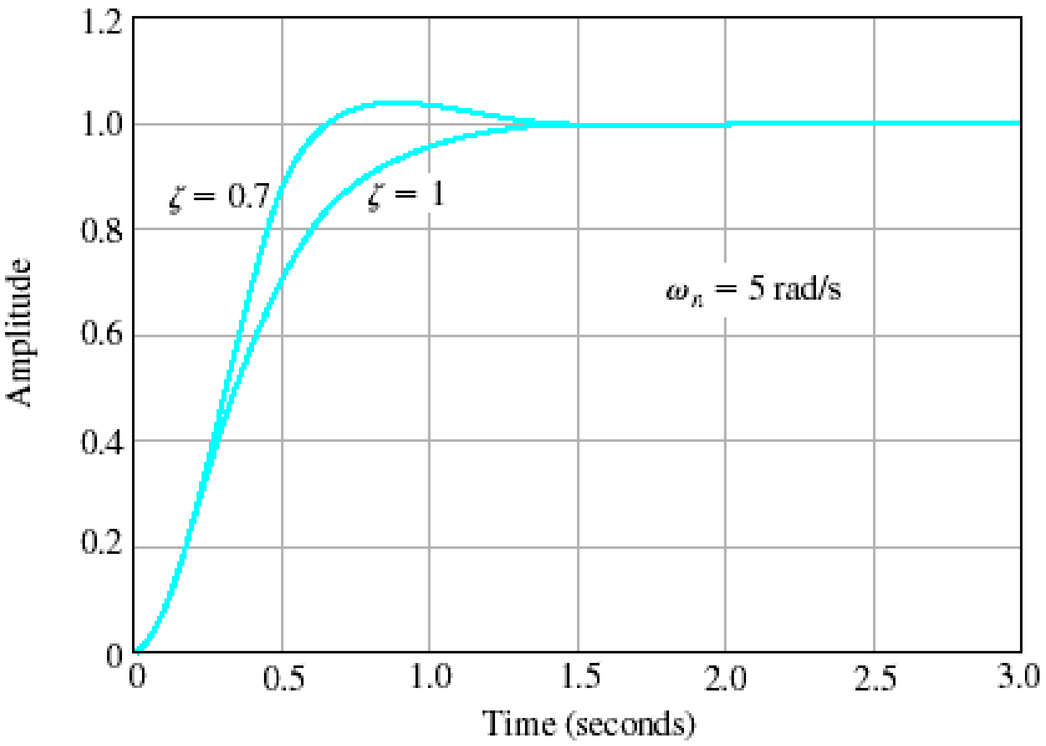


The step response for $\zeta = 0.2$ for $\omega_n = 1$ and $\omega_n = 10$.

阶跃响应

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

幅值



The step response for $\omega_n = 5$ with $\zeta = 0.7$ and $\zeta = 1$.

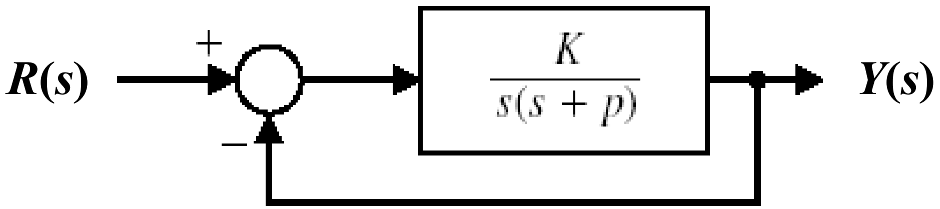
阶跃响应

参数选择

$$\sigma = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$ $$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$ $$T_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$ $$T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$ $$T_S \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

- 如何选取ζ和ω_n来满足系统设计要求？性能指标与ζ和ω_n的关系如下：
  - 当ω_n一定，要减小T_r和T_p，必须减少ζ值，要减少 T_s 则应增大$\zeta\omega_n$值，而且ζ值有一定范围，不能过大。
  - 增大ω_n，能使T_r，T_p和T_s都减小。
  - 最大超调量σ只由ζ决定，ζ越小，σ越大。所以，一般先根据σ的要求选择ζ值，在实际系统中，ζ值一般在0.5～0.8之间。

例1：参数选择



$$G_o(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

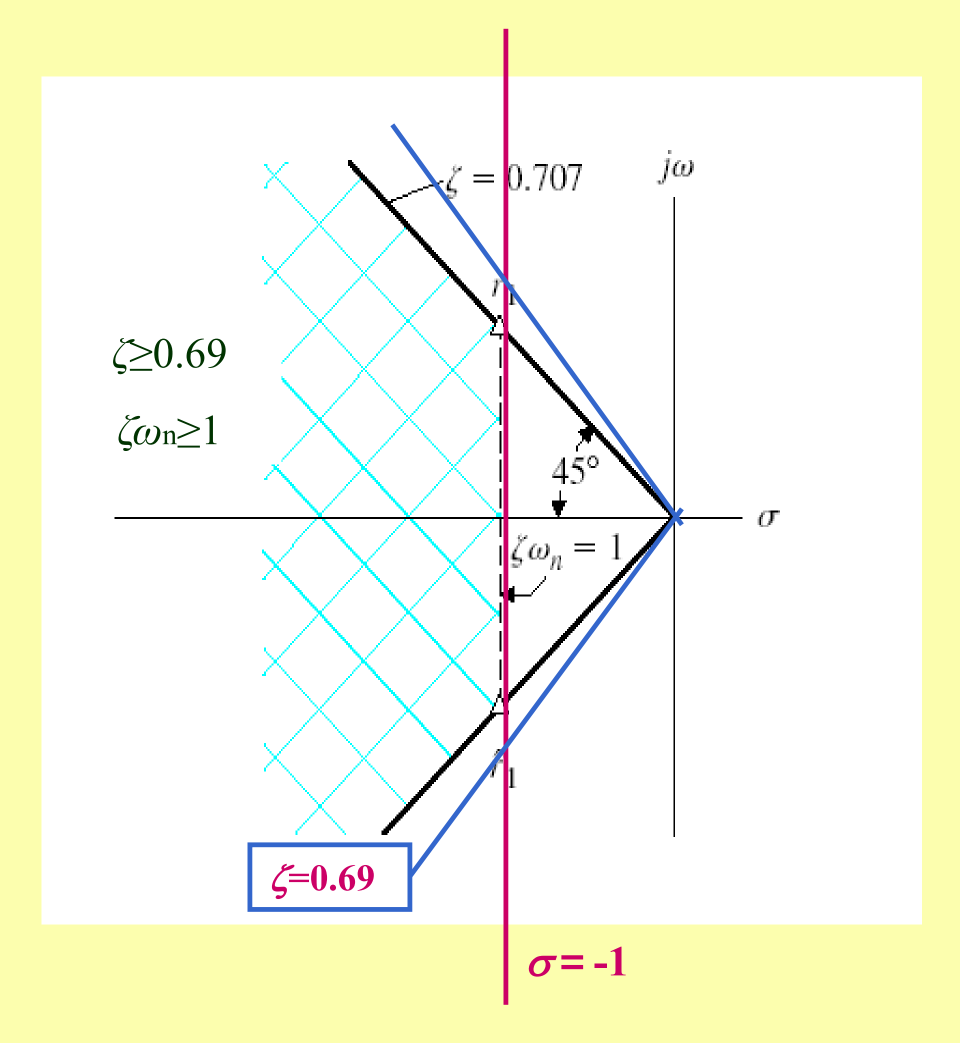
选择增益 *K* 和参数 *p*，使得百分比超调量小于 5%，调节时间（考虑 2% 误差）小于 4 秒。

解：

$$\because \quad \sigma=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\le 0.05$$

$$\ln 0.05\ge-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\Rightarrow\zeta^2\ge 0.477\Rightarrow\zeta\ge 0.69$$

例1：参数选择



$$\zeta \geq 0.69$$

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 4 \Rightarrow \zeta\omega_n \geq 1$$

闭环系统特征根

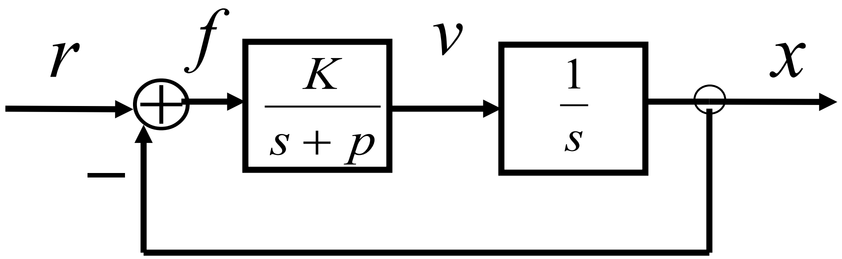
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j \Rightarrow T_s = 4, \quad \sigma = 4.3\%$$

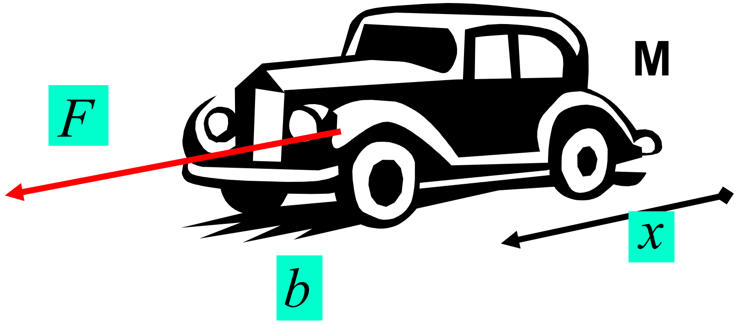
$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \omega_n = \sqrt{2}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\boxed{K=2，p=2}$

例2：玩具遥控汽车反馈系统





$$F = M\dot{v} + bv,\ \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{K}{s+p},\ K = \frac{1}{M},\ p = \frac{b}{M}$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- **在 S 平面上，确定传递函数极点的允许域，并确定参数 K, p 的值，使得系统时间响应性能指标满足如下要求**

$$T_r \le 0.6s,\quad \sigma \le 10\%,\quad T_s \le 3s.$$

例2：玩具遥控汽车反馈系统

$T_r \le 0.6s, \quad \sigma \le 10\%, \quad T_s \le 3s.$

$$\sigma = e^{-\zeta \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \le 0.1$$

$$T_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \le 0.6 \qquad \beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

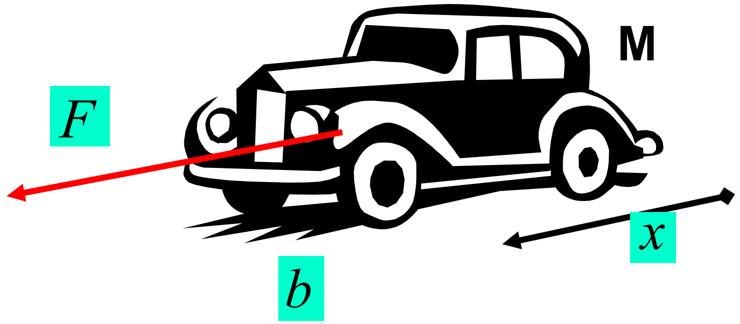
$$T_s = \frac{\left| \ln(0.05\sqrt{1-\zeta^2}) \right|}{\zeta \omega_n} \le 3$$ 对于 5% 误差

联立求解

例2：玩具遥控汽车反馈系统

- 超调量

$$\sigma = e^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \le 0.1 \Leftrightarrow \zeta \ge 0.6$$



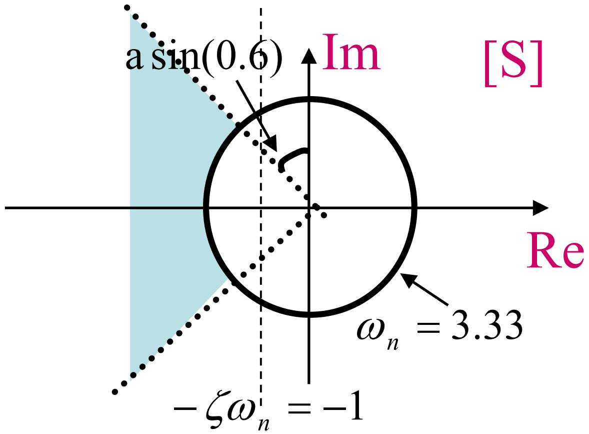
- 然后，利用近似计算公式 $T_s = \dfrac{3}{\zeta\omega_n}, \quad T_r = \dfrac{2}{\omega_n}$（后者利用 $\zeta = 0.65$ 得到）

$$\zeta\omega_n \ge \frac{3}{T_s} \ge 1, \quad \omega_n \ge \frac{2}{T_r} \ge 3.33$$

$$T_{r1} \cong \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$$

- 选择 $\zeta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \omega_n = 4 \Rightarrow s_{1,2} = -2\sqrt{2} \pm j2\sqrt{2}$

得到 $K = \omega_n^2 = 16, \quad p = 2\zeta\omega_n = 4\sqrt{2}$

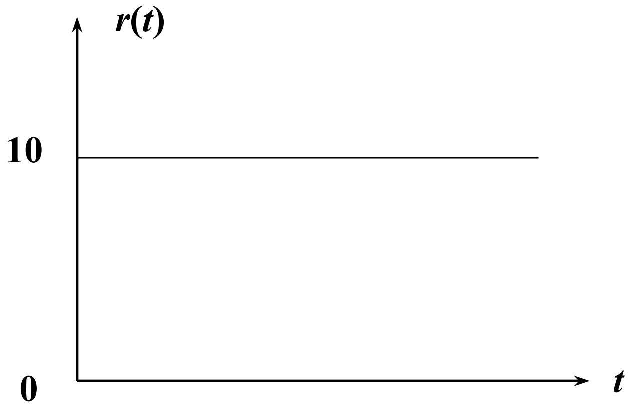


满足要求吗？

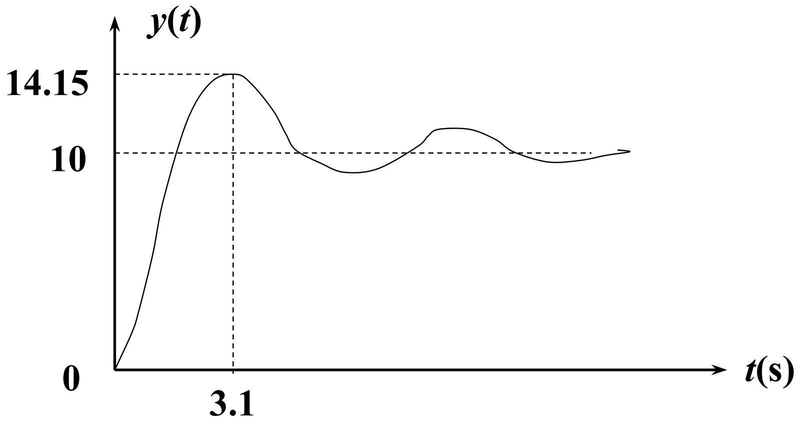
例3：问题

❖ 设某一单位负反馈的二阶系统的阶跃响应曲线如图示，试确定此该系统的开环传递函数。提示：

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



系统输入曲线



系统响应曲线

例3：解

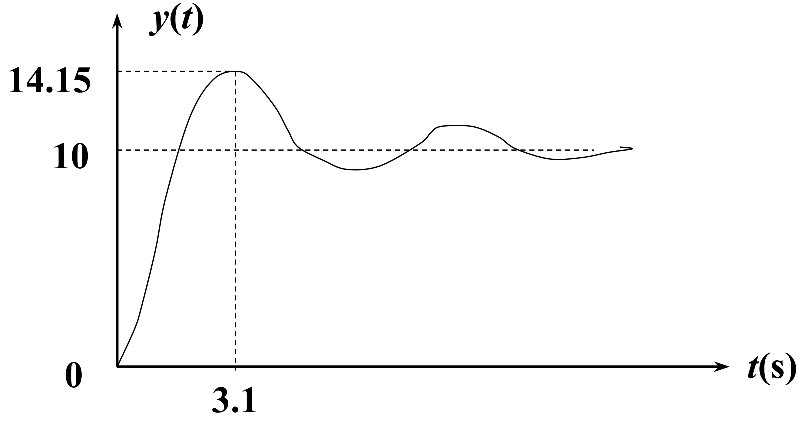
由图直接可得： $\sigma = \dfrac{14.15-10}{10} = 0.415; T_p = 3.1$

由 $\sigma = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.415 \qquad T_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.1$

解得： $\zeta = 0.27 \qquad \omega_n = 1.05$

故：系统开环传递函数：

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} = \frac{1.1025}{s(s+0.567)}$$



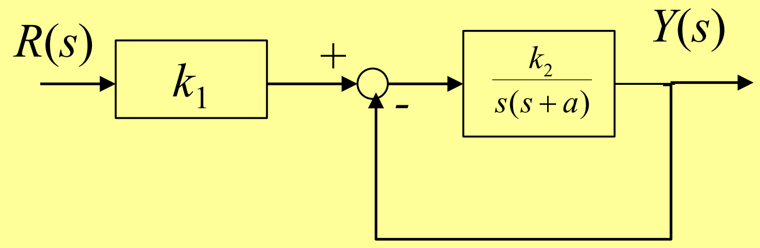
系统响应曲线

思考：阶跃幅值为5的情况？

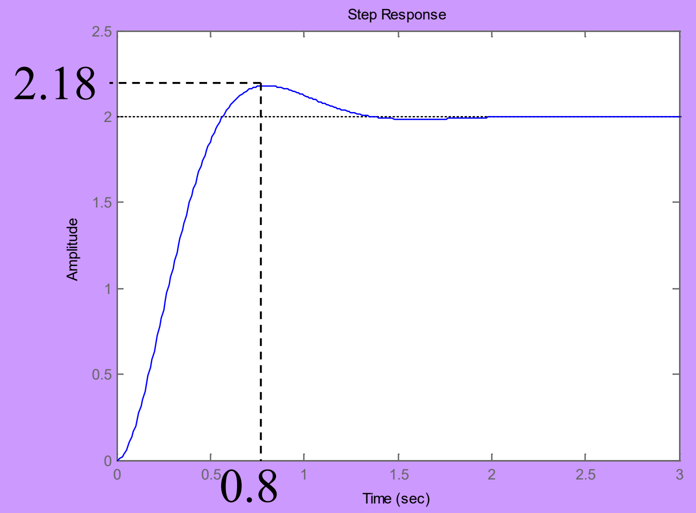
例4：问题

❖ 系统结构及其单位阶跃响应如图。试求k_1、k_2和a值。[提示：0<ζ<1时，标准二阶系统的单位响应]

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

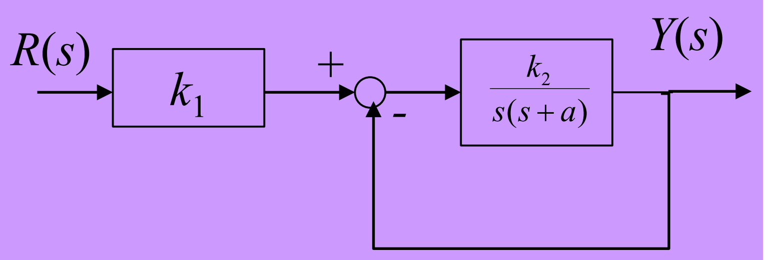


系统结构



单位阶跃响应

例4：解



系统结构

解：

$$G(s)=\frac{k_1\times\frac{k_2}{s(s+a)}}{1+\frac{k_2}{s(s+a)}}=\frac{k_1k_2}{s^2+as+k_2}$$

$$\boldsymbol{Y(s)=G(s)\times R(s)}$$

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{S\to 0}s\frac{k_1k_2}{s^2+as+k_2}\frac{1}{s}=k_1=2$$

$$\therefore\begin{cases}\omega_n^2=k_2\\ 2\zeta\omega_n=a\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{2.18-2}{2}=9\%=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \boldsymbol{\zeta=0.608}$$

$$T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_n=4.946}$$

$$\therefore k_2=\omega_n^2=24.463$$
$$a=2\zeta\omega_n=6.014$$

The End