自动控制理论

Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous-time Control Systems

关键词

- 数学模型， 建模
- 动态系统（单元）
- 微分方程模型，状态空间模型
- 传递函数（Transfer Function）
- 开环传递函数，闭环传递函数
- 方块图（Block Diagram），仿真（模拟）图
- 信号流图（Signal Flow Graph, SFG）
- 梅逊增益公式

主要内容

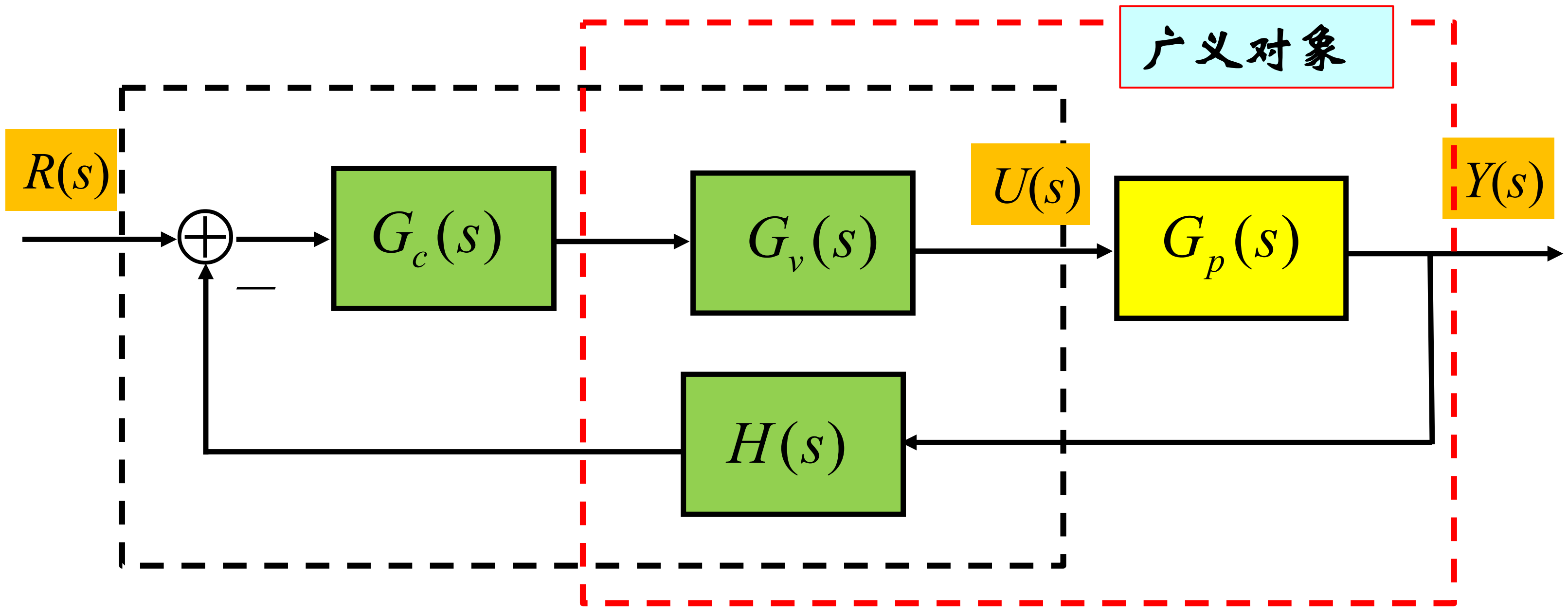
- 数学模型的基本概念
- 电路系统的数学模型
- 系统总传递函数
- 各种模型间的关系
- 其他系统（机械、液位等）的数学模型
- 非线性系统的线性化以及特殊环节建模

主要内容

- **数学模型的基本概念**
  - –数学模型的作用
  - –数学模型的分类
  - –建立数学模型的方法
  - –常用的模型形式

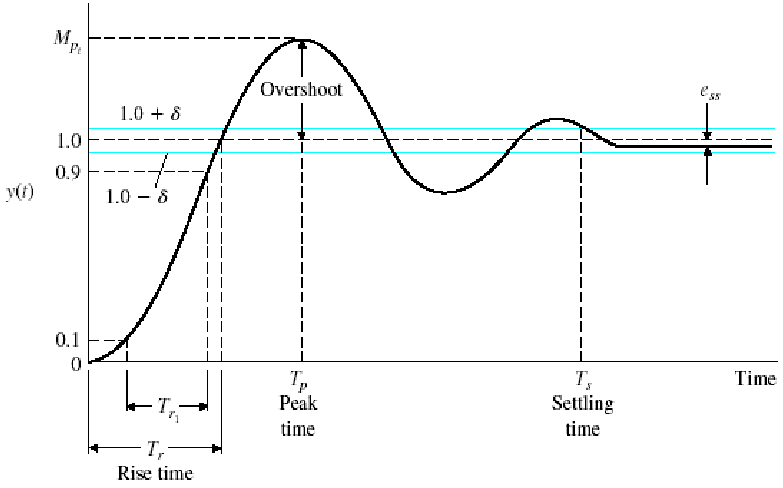
数学模型的作用

- 控制系统作用的本质
  - 被控对象具有其自身的系统特性
  - 加入控制系统（环节）后形成的系统（闭环反馈控制系统）的系统特性发生变化，变化内容取决于加入的控制系统（环节）
  - 根据被控对象（开环系统）原有的系统特性和闭环反馈控制系统所需要达到的系统特性，设计出满足要求的控制系统（环节）

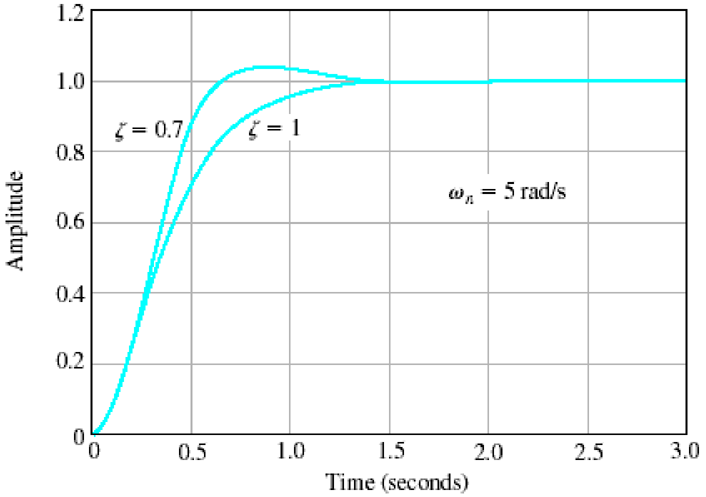


数学模型的作用

- 控制系统的关注点
  - 系统结构和参数已知时，典型输入信号下被控变量变化的全过程
- 控制系统的基本要求
  - 稳定性
  - 快速性
  - 准确性
  - 高级控制系统：
    - ◆ 鲁棒性
    - ◆ 安全性
    - ◆ 智能性
    - ◆ ……



过渡过程的概念



数学模型的作用

- **数学模型**
  - 描述控制系统变量之间关系的数学表达式
- 数学模型是实际物理系统的抽象与近似，是对实际物理系统作简化假设的结果。
- 同一个物理系统可以由若干不同的模型描述，这些模型对应着不同的、待研究的系统特性。
  - 例：晶体管分别具有高频模型和低频模型
- 同一个模型可以对应不同的实际物理系统
  - 例：弹簧-质量-阻尼系统和电阻-电感-电容电路都可以由二阶线性微分方程描述
- 控制系统性能分析与设计的效果取决于系统特性数学模型的优劣

数学模型的分类

- 静态(Static)模型与动态(Dynamic)模型
  - 静态数学模型——描述控制系统变量之间关系的代数方程(Algebraic equation)，可理解为系统处于静止状态时各变量间的关系
  - 动态数学模型——描述控制系统变量各阶导数之间关系的微分方程(Differential equation)， 可反映系统处于动态情况下的特性
  - 静态数学模型是动态数学模型的特例
- 线性(Linear)模型与非线性(Nonlinear)模型
  - 线性数学模型——各变量间关系均为线性关系
  - 非线性数学模型——只要有一对变量间关系为非线性关系
  - 现实世界中变量间多为非线性关系，线性模型是对现实世界的近似

数学模型的分类

- 连续(Continuous)模型与离散(Discrete)模型
  - 连续数学模型——模型在时间和空间上均为连续的
  - 离散数学模型——模型在时间上为离散的，空间上为连续的
  - 满足数字采样控制系统的要求
- 时域模型与频域模型
  - 时域数学模型——微分或差分方程模型
  - 频域数学模型——包括复频域模型，有拉氏变换模型、z变换模型
  - 在不同的理论方法中各有所长
- 定常(时不变)模型与时变模型
  - 定常模型(Time-invariant)
  - 时变模型(Time-variant)

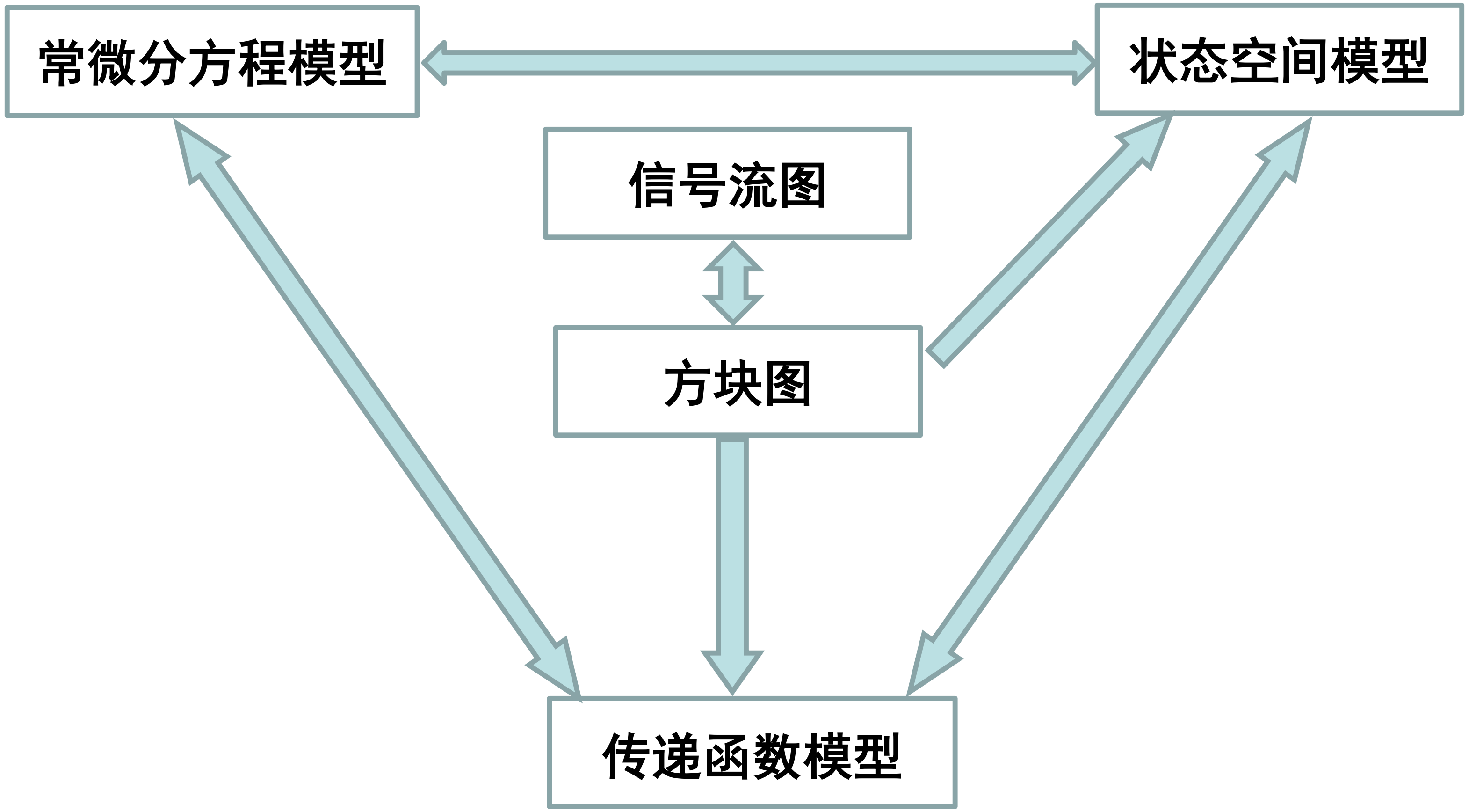
数学模型的分类

- 集中（总）参数模型与分布参数模型（通常以偏微分方程描述）
  - 集中模型(Lumped model)
  - 分布参数模型(Distributed model)
- 输入输出模型与状态空间模型
  - 输入输出模型(Input/Output model)
  - 状态空间模型(State-space model)
- 参数模型与非参数模型
  - 参数模型(Parameter model)
  - 非参数模型(Non-parameter model)
- ……

建立数学模型的方法

- 机理分析建模 (Mechanism; Rigorous Model)
  - 根据基本的物理规律、化学规律及能量守恒定律等，动态系统可用微分方程描述
- 系统辨识 （黑箱理论、测试方法）(Black box theory; Test method)
  - 根据实验测试数据建立描述系统的数学表达式
    - 经典辨识（脉冲响应、阶跃响应……）
      Classical identification (impulse, step….---response)
    - 系统辨识方法
      Systems identification
- 混合建模

常用的模型形式



常用的模型形式

- 常微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y=c_1\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+c_2\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}+\cdots+c_n u$$

拉氏变换

- 传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{n-j+1}s^{j-1}}{\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}s^{j}}$$

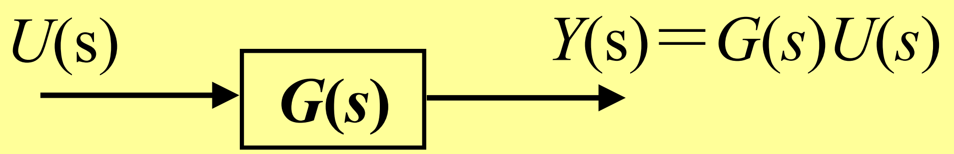
- 状态空间模型

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t)$$
$$Y(t)=CX(t)+DU(t)$$

方块图

- 方块图是控制系统或对象中每个环节（元件）的功能和信号流向的图解表示。每一个方块填写环节（元件）的传递函数（表征相应环节的输入与输出之间的动态数学关系），指向方块的箭头表示该环节的输入信号，离开方块的箭头表示该环节的输出信号，它是输入信号与方块内的传递函数运算后的结果。
- 箭头标明了相应的信号符号（有时“＋”会省略）。
- 用图解的方式描述系统各个环节之间的关系（系统的信息传递）

——也是一种建模方法。

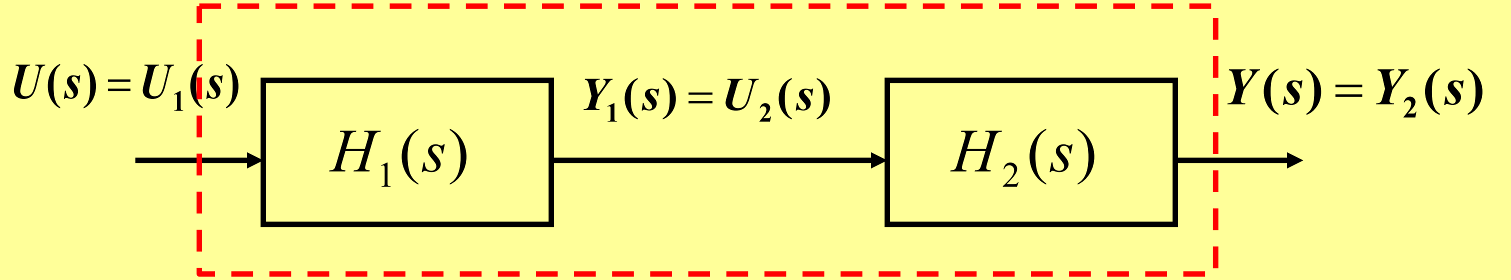


方块图

方块图

- **环节间的基本连接方式**
  - –串联
  - –并联
  - –反馈
- **由多个元件组成的控制系统，将描述各元件的传递函数放到方块中，构成以传递函数及方块表示的方块图。**

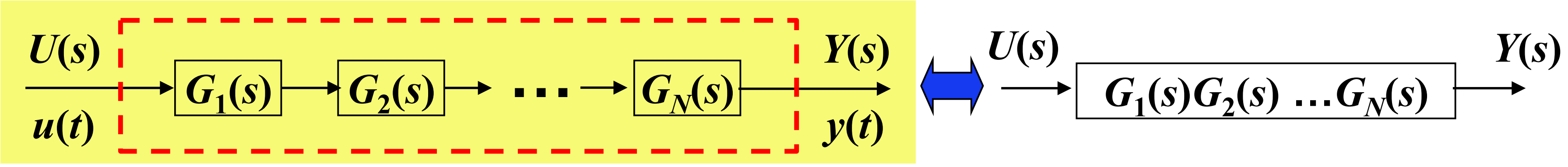
方块图：串联



$$Y(s)=Y_2(s)=H_2(s)U_2(s)=H_2(s)Y_1(s)=H_2(s)H_1(s)U(s)$$

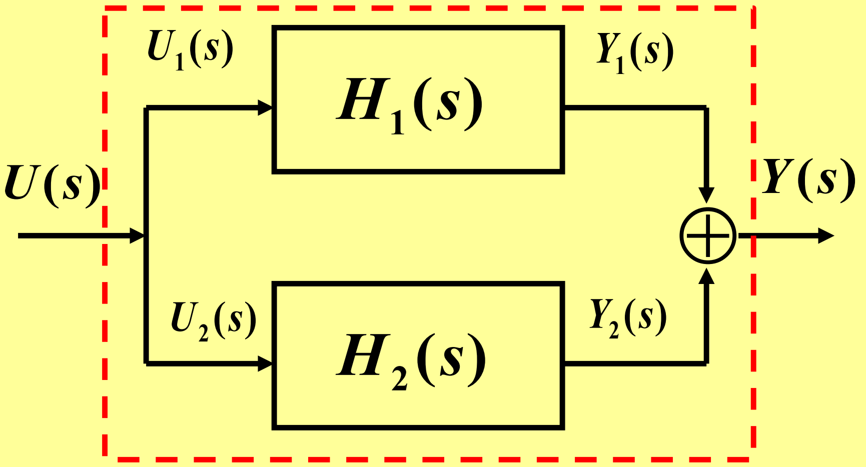
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=H_2(s)H_1(s)$$

推广至N个方块串联



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=G_1(s)G_2(s)\cdots G_N(s)$$

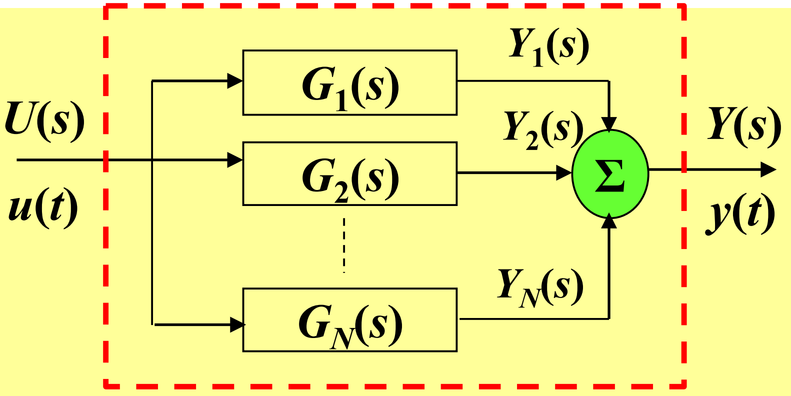
方块图：并联



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=H_1(s)+H_2(s)$$

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=H_1(s)U_1(s)+H_2(s)U_2(s)=\big(H_1(s)+H_2(s)\big)U(s)$$

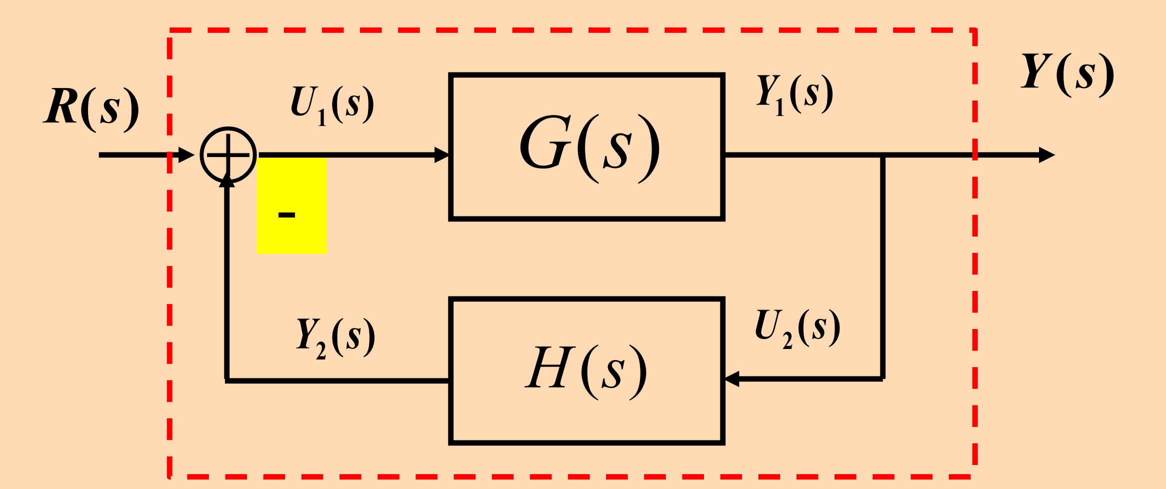
推广至*N*个方块并联



$U(s) \longrightarrow \boxed{G_1(s)+G_2(s)+\ \dots +G_N(s)} \longrightarrow Y(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=G_1(s)+G_2(s)+\cdots+G_N(s)$$

方块图：反馈



$$Y(s)=G(s)U_1(s)=G(s)\left[R(s)+Y_2(s)\right]=G(s)\left[R(s)+H(s)Y(s)\right]$$

$$Y(s)\left[1-G(s)H(s)\right]=G(s)R(s)$$

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

正反馈

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

负反馈

注意！

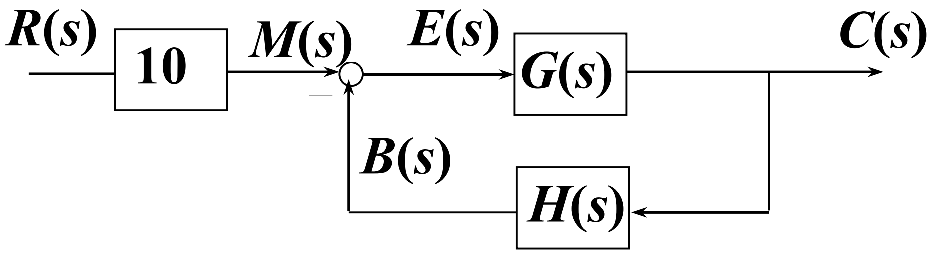
问题：对于复杂的多回路，如何求整个系统的传递函数？

开环传递函数与闭环传递函数

例 已知图中$G(s)$和$H(s)$两方框相对应的微分方程分别是：

$$6\frac{dc(t)}{dt}+10c(t)=20e(t) \qquad 20\frac{db(t)}{dt}+5b(t)=10c(t)$$

且初始条件均为零，
试求如下的传递函数。



$$\frac{C(s)}{E(s)}、\quad \frac{B(s)}{C(s)}、\quad \frac{B(s)}{E(s)}、\quad \frac{C(s)}{R(s)}、\quad \frac{E(s)}{R(s)}。$$

解：

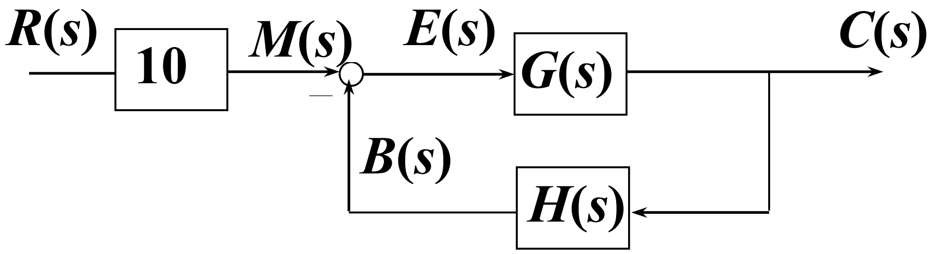
$$6sC(s)+10C(s)=20E(s)\Rightarrow \frac{C(s)}{E(s)}=G(s)=\frac{20}{6s+10}$$

$$20sB(s)+5B(s)=10C(s)\Rightarrow \frac{B(s)}{C(s)}=H(s)=\frac{10}{20s+5}$$

开环传递函数与闭环传递函数

例　已求得前向与反馈通道的传递函数分别为：

$$G(s)=\frac{20}{6s+10}\qquad H(s)=\frac{10}{20s+5}$$



待求 $\frac{B(s)}{E(s)}$、$\frac{C(s)}{R(s)}$、$\frac{E(s)}{R(s)}$。

开环传递函数：$G_{open}=\frac{B(s)}{E(s)}=G(s)\cdot H(s)=\frac{20}{6s+10}\cdot\frac{10}{20s+5}=\frac{200}{(6s+10)(20s+5)}$

闭环传递函数：

$$G_{closed}=\Phi_B=\frac{C(s)}{R(s)}=?$$

$$\Phi_B=10\cdot\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{10\cdot\frac{20}{6s+10}}{1+\frac{20}{(6s+10)}\frac{10}{(20s+5)}}$$

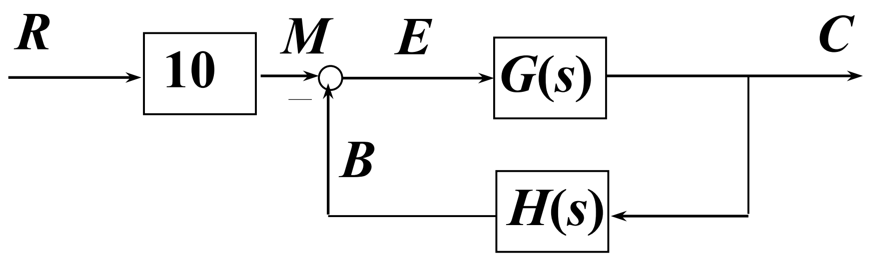
$$=\frac{200(20s+5)}{(6s+10)(20s+5)+200}=\frac{400s+100}{12s^2+23s+25}$$

开环传递函数与闭环传递函数

例 已求得开环传递函数为：

$$G_{open}=\frac{B(s)}{E(s)}=\frac{200}{(6s+10)(20s+5)}$$

待求



误差传递函数 $G_e=\Phi_e=\frac{E(s)}{R(s)}=?$

$$\Phi_e=\frac{E(s)}{R(s)}=10\cdot\frac{1}{\boxed{1+G(s)H(s)}}=\frac{10(12s^2+23s+5)}{12s^2+23s+25}$$

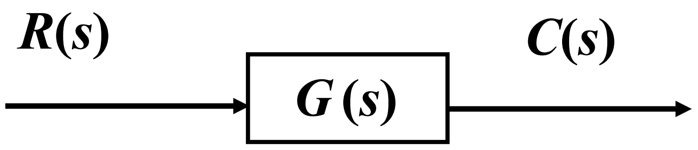
特征多项式

问题：误差传递函数是开环还是闭环？

闭环传递函数 $\Phi_B=10\cdot\frac{G(s)}{\boxed{1+G(s)H(s)}}=\frac{400s+100}{12s^2+23s+25}$

开环传递函数与闭环传递函数

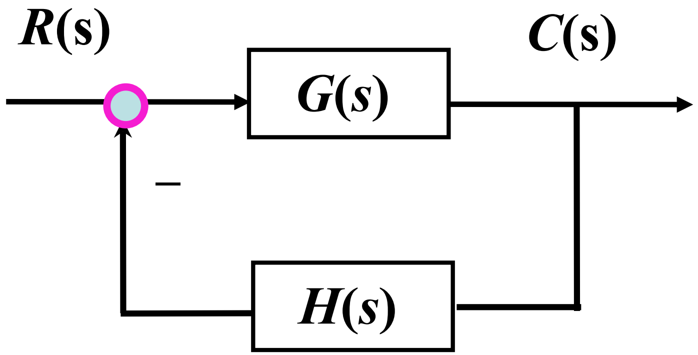
- 开环系统的传递函数



开环

$$G_1(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=G(s)$$

- 闭环系统的传递函数

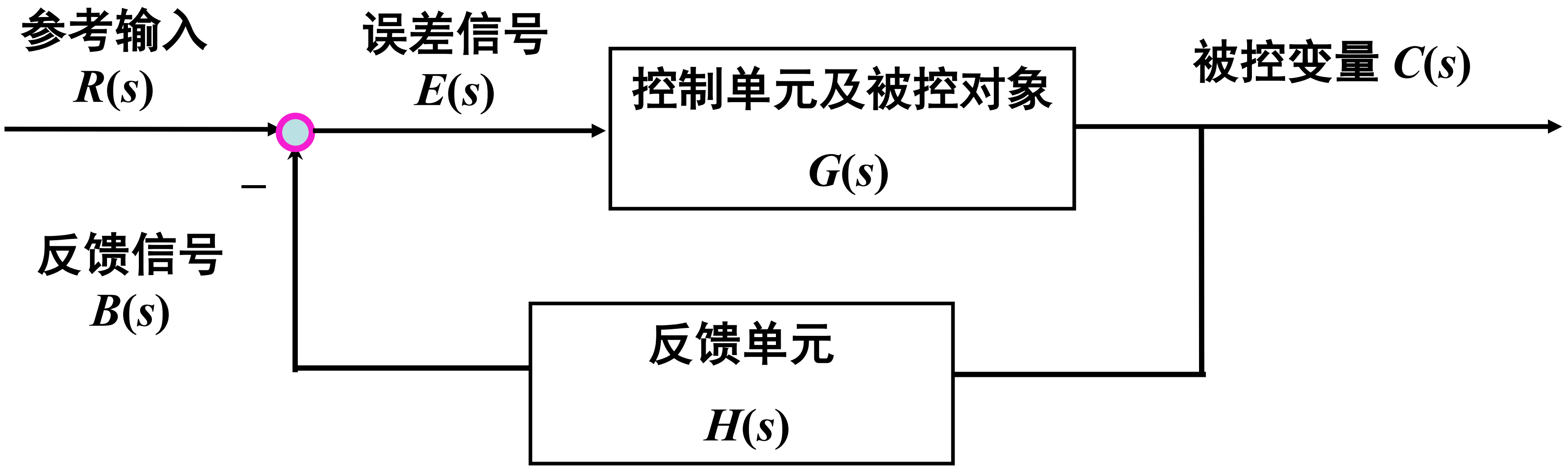


闭环

$$G_2(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

开环传递函数与闭环传递函数

- 典型闭环控制系统中几种不同传递函数定义

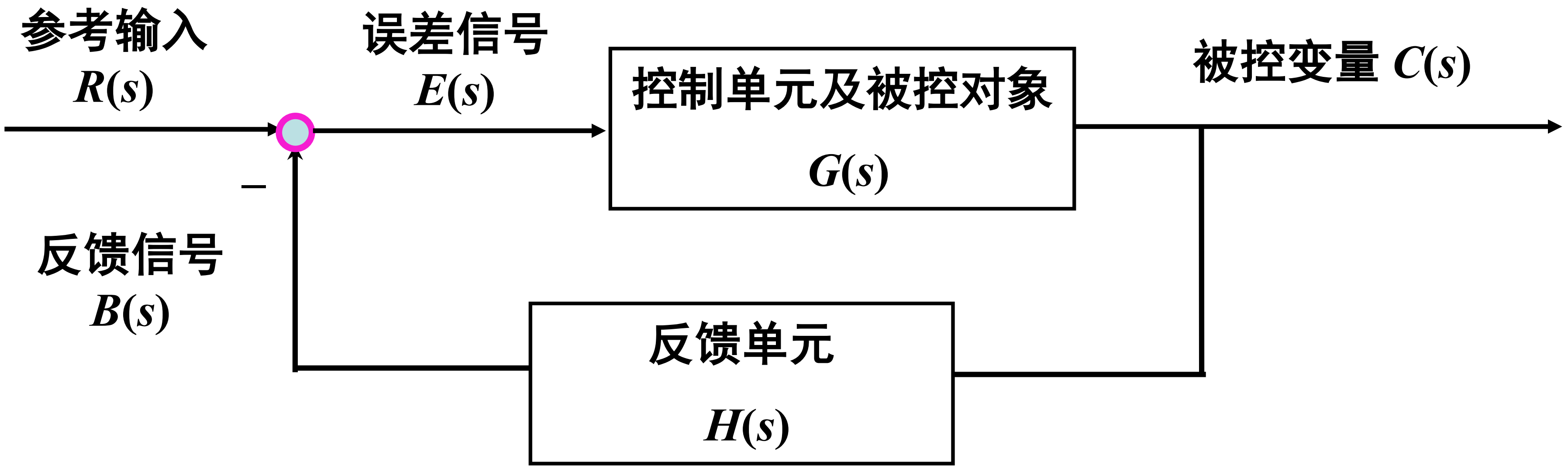


- 整个系统的传递函数（闭环系统传递函数）– 被控变量 $C(s)$ 与参考输入 $R(s)$ 的比值。

$$G_c(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

开环传递函数与闭环传递函数

- 典型闭环控制系统中几种不同传递函数定义

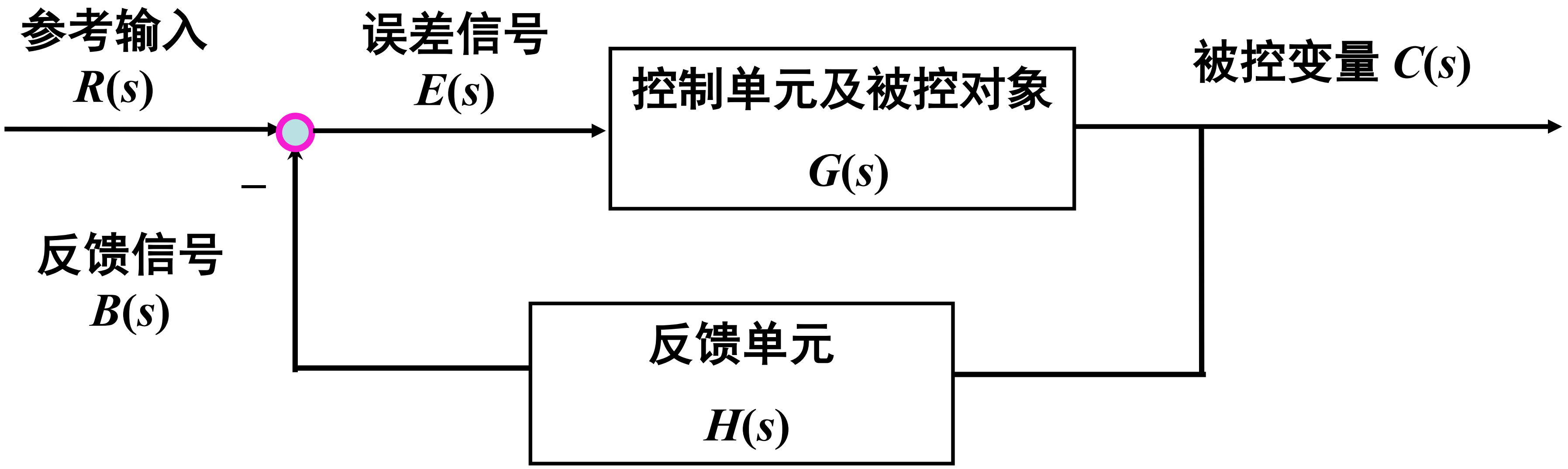


- 开环传递函数 – 对于任意给定的反馈环，反馈通路输出变量 $B(s)$ 与误差信号 $E(s)$ 的比值。 （注意：系统仍然是闭环控制系统）

$$G_o(s)=\frac{B(s)}{E(s)}=G(s)H(s)$$

开环传递函数与闭环传递函数

- 典型闭环控制系统中几种不同传递函数定义



- 前向通路传递函数 – 被控变量 $C(s)$ 与输入信号$E(s)$ 的比值。

$$G_f(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=G(s)$$

主要内容

- 数学模型的基本概念
- 电路系统的数学模型
- 系统总传递函数
- 各种模型间的关系
- 其他系统（机械、液位等）的数学模型
- 非线性系统的线性化以及特殊环节建模

电路系统的数学模型

提要：以电路系统为例，讲述建立动态系统微分方程模型、状态空间模型和传递函数以及方块图建模的方法。

- **微分方程模型**
- **状态空间模型**
- **传递函数**
- **方块图建模**

基尔霍夫(Kirchhoff)定律及电路元件

- **电路方程满足基尔霍夫定律：**

节点电流: $\sum_i I_i = 0$　　回路电压: $\sum_i V_i = 0$

其中， $\sum_i I_i$ **是流入节点的电流的代数和（对于流出节点的电流，其值为负）；**

$\sum_i V_i$ **是闭合回路中各电气元件的端电压的代数和。**

- **电路元件的基本特性：**

电阻电压　　$v_R = Ri$　　电阻Resistance

电感电压　　$v_L = L\dfrac{di}{dt} = LDi$　　电感Inductance

电容电压　　$v_C = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C}\int_0^t i d\tau + \dfrac{Q_0}{C} = \dfrac{i}{CD}$

电容Capacitance

例1-1：电阻电感串联电路（1）

在图1中，R和L为已知常数，如果$e(t)$是已知输入，$i(t)$是输出，电路方程可列写如下：

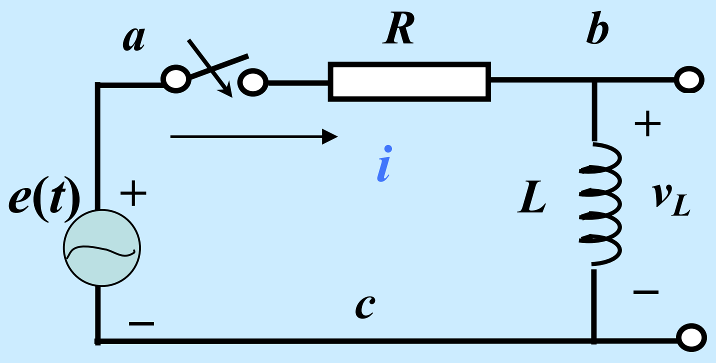


图1

根据基尔霍夫电压定律可知

$$v_R + v_L = e$$

$$iR + L\frac{di}{dt} = Ri + LDi = e$$

$$\boxed{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t)}$$

为一阶微分方程

如果$v_L(t)$是输出，请列写电路方程。

由于 $v_L = LDi$ 即 $i = \frac{1}{LD}v_L$

于是 $$\boxed{\frac{R}{LD}v_L + v_L = e}$$

$$e \longrightarrow \boxed{\frac{LD}{R+LD}} \longrightarrow v_L$$

例1-2：电阻电容串联电路（1）

图2中，R，C为已知常数，$e_i(t)$ 是输入；$e_o(t)$ 是输出，请列写关于电路输出$e_o(t)$和输入$e_i(t)$的方程，并用方块图形式表示。

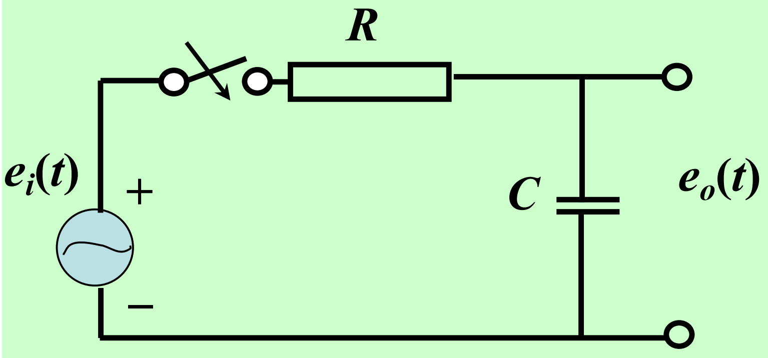


图2

第一步： 根据基尔霍夫定律和元件特性

$$Ri + \frac{1}{C}\int i dt = e_i, \qquad i = C\frac{de_o}{dt}$$

第二步： 列写电路方程

$$RC\frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$

或

$$T\frac{de_o}{dt} + e_o = e_i \qquad (*)$$

或 $TDe_o + e_o = e_i$

$$e_i \longrightarrow \boxed{\frac{1}{RCD+1}} \longrightarrow e_o$$

其中，$T=RC$称为电路的时间常数，（*）方程为一阶方程。

由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统。

一阶系统的阶跃响应（1）

➢ 考察标号为*的一阶微分方程

$$T\frac{de_o}{dt}+e_o=e_i \qquad (*)$$

Laplace变换

$$E_o(s)(Ts+1)=E_i(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

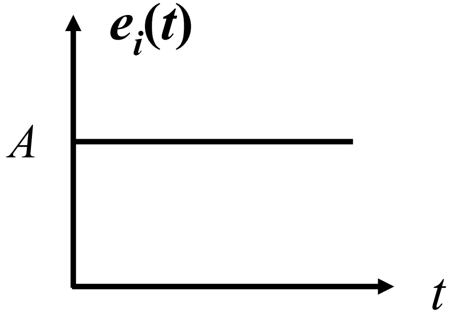
输入 { 控制通道 / 扰动通道 } → 一阶系统 → 输出

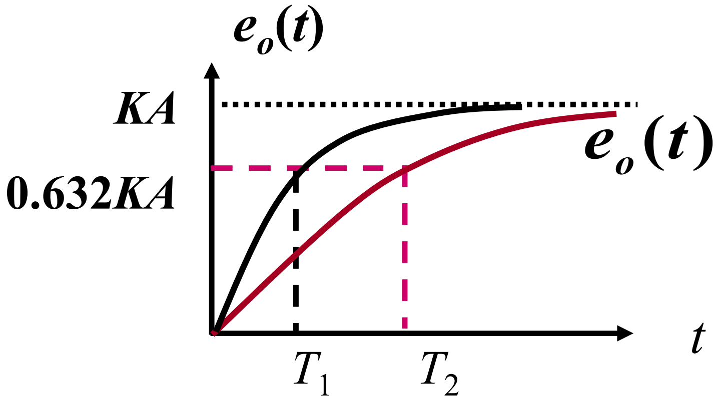
➢当阶跃信号输入到一阶系统中时，输出 $e_o(t)$ 将如何运动？

$$e_i(t)=\begin{cases}0, t\le 0\\ A, t>0\end{cases} \xrightarrow{\text{输入}e_i(t)} \boxed{\frac{K}{Ts+1}} \xrightarrow{\text{输出 }e_o(t)} e_o(t)=?$$

一阶系统的阶跃响应（2）

$$T\frac{de_o}{dt}+e_o=Ke_i$$





$$e_o(t)=KA(1-e^{-t/T})$$

时域响应分析：

当 $t=0$, $e_o(0)=0$, $$\left.\frac{de_o}{dt}\right|_{t=0}=\frac{KA}{T}$$

当 $t=T$, $$e_o(T)=KA(1-e^{-1})=0.632KA$$

当 $t\to\infty$ $$e_o(\infty)=KA \qquad \left.\frac{de_o}{dt}\right|_{t\to\infty}=0$$

经过一个时间常数T的时间之后，一阶系统的输出值将达到其稳态值的63%，经过$2T$、$3T$及$4T$之后，输出值将分别达到稳态值的86%、95% 及 98% 。

例2：电阻电感电容（RLC）串联电路（1）

在图3中，R，L，C 为已知常数，$e(t)$ 是输入；$v_c(t)$（可以是其他变量）是输出。请列写关于电路输出 $v_c(t)$ 和输入$e(t)$ 的方程。

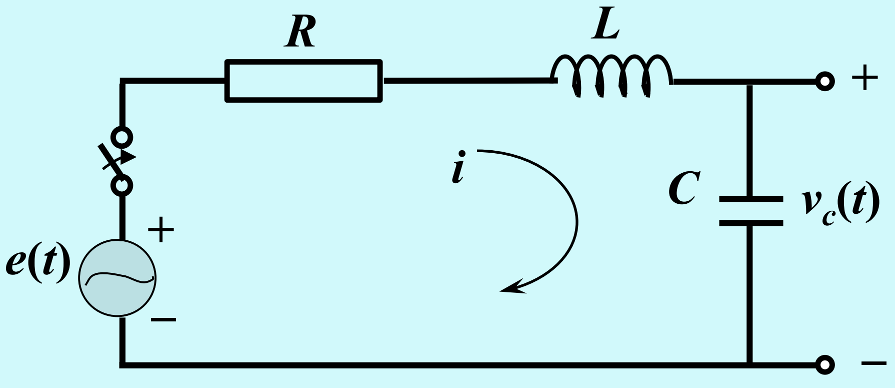


图3

第一步：根据基尔霍夫定律

$$v_L + v_R + v_C = e$$

$$\boxed{LDi + Ri + \frac{1}{CD}i = e}$$

也可以将方程转换为以某个元件的端电压(如v_R)为变量的方程。

$$v_R + \frac{L}{R}Dv_R + \frac{1}{RCD}v_R = e$$

例2：电阻电感电容（RLC）串联电路（2）

第二步：在已列写出的方程中（如右式所示），电流 i 是间接变量，其与输出 v_C 满足如下关系式

$$v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau = \frac{i}{CD}$$

$$LDi + Ri + \frac{1}{CD}i = e$$

第三步：消去间接变量 i， 得到微分方程：

$$LC\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e$$

或

$$T_1T_2\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + T_2\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e \qquad **$$

1）式中，$T_1=L/R$ 和 $T_2=RC$ 称为电路的时间常数。如果时间单位是“秒”，T_1 和 T_2的单位也是“秒”。

2）RLC电路（**）是二阶微分方程。由二阶微分方程描述的系统称为二阶系统。

例2：电阻电感电容（RLC）串联电路（3）

$$LDi + Ri + \frac{1}{CD}i = e \qquad \boxed{v_R + \frac{L}{R}Dv_R + \frac{1}{RCD}v_R = e} \Rightarrow \text{P21.(2-9)}$$

$$\boxed{T_1T_2\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + T_2\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e} \qquad **$$

- 上述方程均是线性定常微分方程。由这种方程描述的系统又称为线性时不变（ linear time-invariant, LTI ）系统。由二阶微分方程描述的系统称为二阶系统。

思考题：

1）二阶系统的阶跃响应将会是什么样的呢？（将在第三章中介绍）

2）系统的输出变量可以任意选取。如果系统的某个I/O关系是二阶微分方程的，是否任意选取其他输出变量都是二阶微分方程的？

例3：多回路RLC电路（1）

如图4所示多回路电路可以通过回路方程或节点方程进行求解。

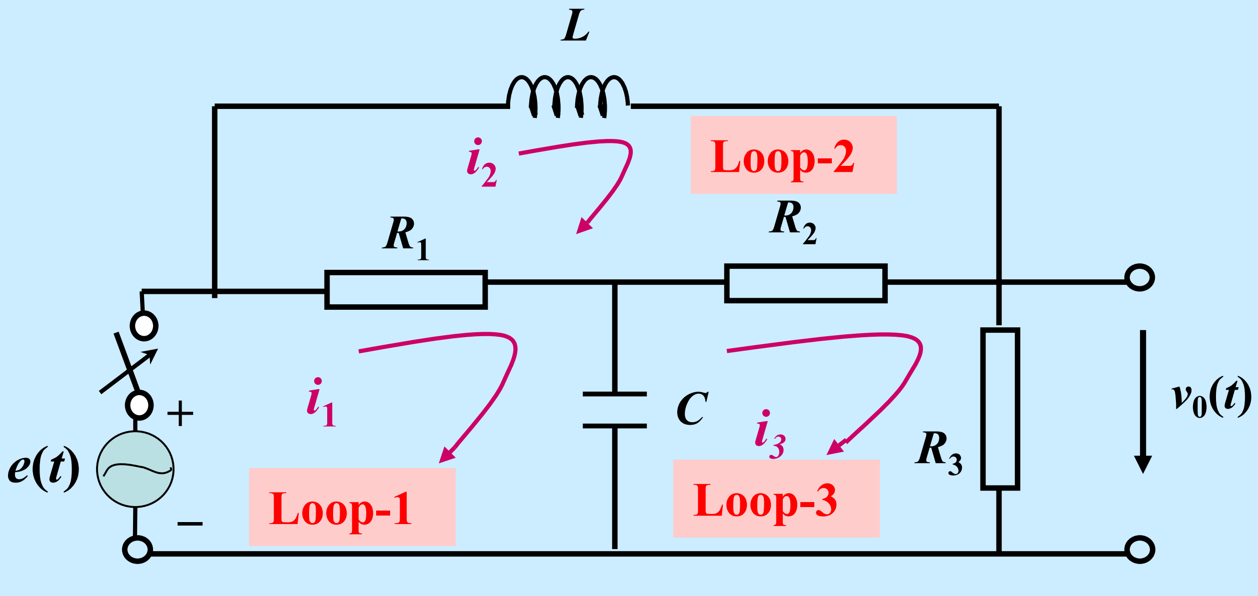


图4

回路方法：对于每个回路，根据基尔霍夫电压定律列写回路电压方程。

共有三个小回路：Loop1、Loop2、Loop3。

例3：多回路RLC电路（2）

回路方法： 对于每个回路，根据基尔霍夫电压定律列写回路电压方程。

Loop1: $$\left(R_1+\frac{1}{CD}\right)i_1-R_1i_2-\frac{1}{CD}i_3=e$$

Loop2: $$-R_1i_1+\left(R_1+R_2+LD\right)i_2-R_2i_3=0$$

Loop3: $$-\frac{1}{CD}i_1-R_2i_2+\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right)i_3=0$$

输出电压

$$v_0=R_3i_3$$

必须将上述方程联立求解，消去中间变量，才能得到输出$v_0(t)$ 关于输入$e(t)$ 及电路参数的关系。

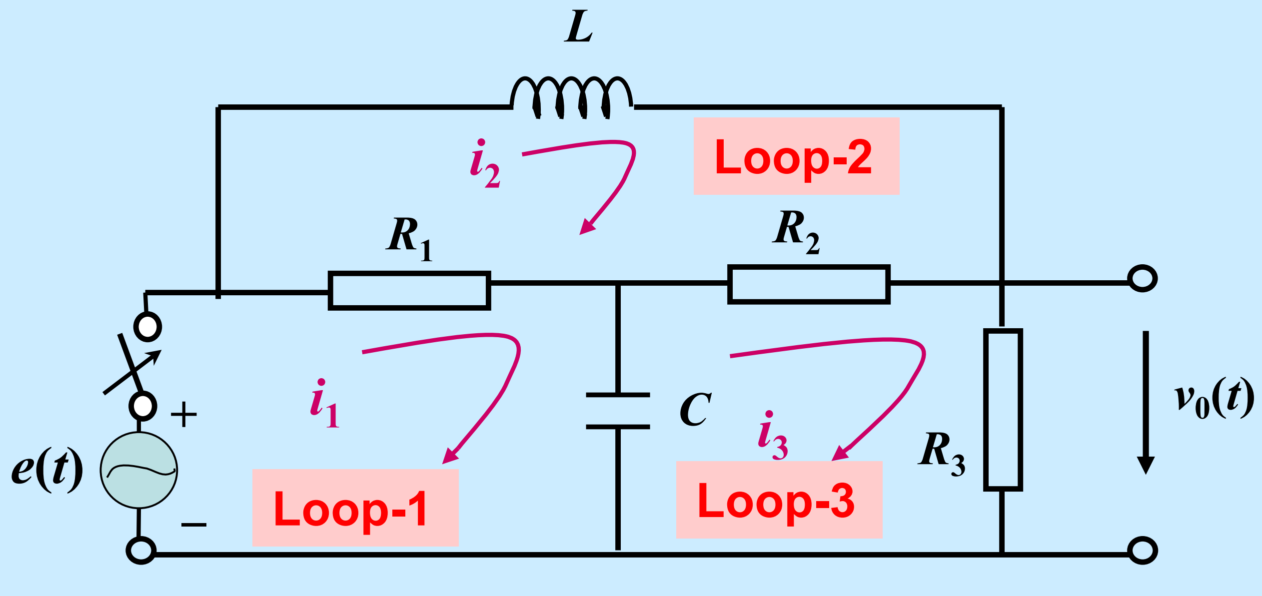


图4

例3：多回路RLC电路（3）

节点方法：电路节点标号如下图所示。对于每个节点列写基尔霍夫电流方程，其中，d 是参考点。

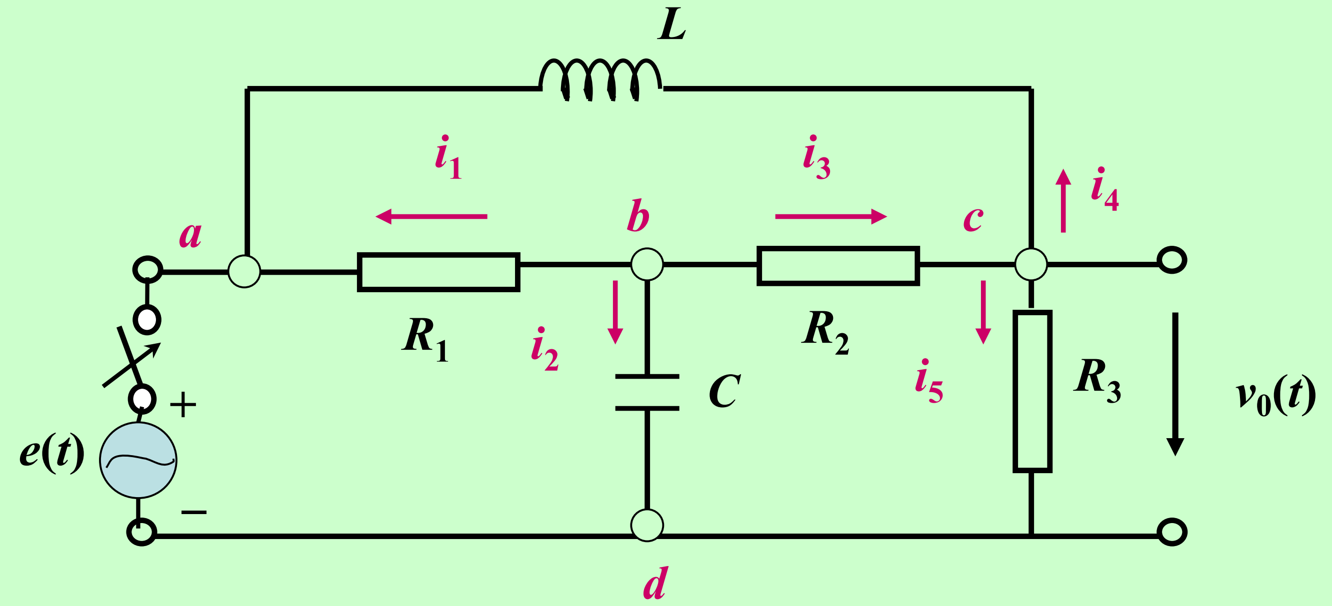


图4

如图所示，共有2个节点：b、c。

例3：多回路RLC电路（4）

对于节点b $i_1+i_2+i_3=0$ (2-14)

对于节点c $-i_3+i_4+i_5=0$ (2-15)

用节点电压表示

$$\frac{v_b-v_a}{R_1}+CDv_b+\frac{v_b-v_0}{R_2}=0 \qquad (2\text{-}16)$$

$$\frac{v_0-v_b}{R_2}+\frac{v_0}{R_3}+\frac{1}{LD}(v_0-e)=0 \qquad (2\text{-}17)$$

重新组织

$$(\frac{1}{R_1}+CD+\frac{1}{R_2})v_b-\frac{1}{R_2}v_0=\frac{1}{R_1}e \qquad (2\text{-}18)$$

$$-\frac{1}{R_2}v_b+(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{LD})v_0=\frac{1}{LD}e \qquad (2\text{-}19)$$

需要同时求解这两个方程

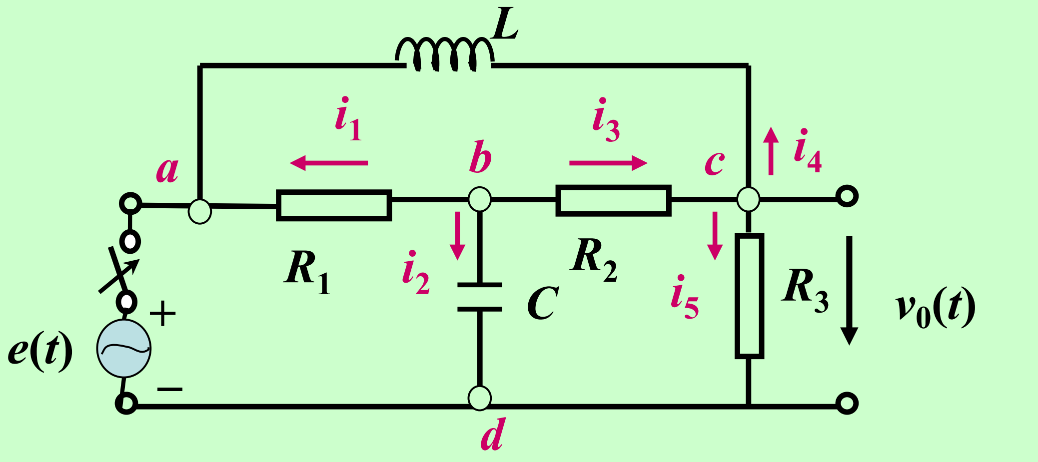


图4

例3：多回路RLC电路（5）

整理可得二阶微分方程：

$$R_1(R_2+R_3)LC\frac{d^2v_0}{dt^2}+[L(R_2+R_3)+R_1R_2R_3C+R_1L]\frac{dv_0}{dt}+R_3(R_1+R_2)v_0$$
$$=R_3(L+R_1R_2C)\frac{de}{dt}+R_3(R_1+R_2)e(t)$$

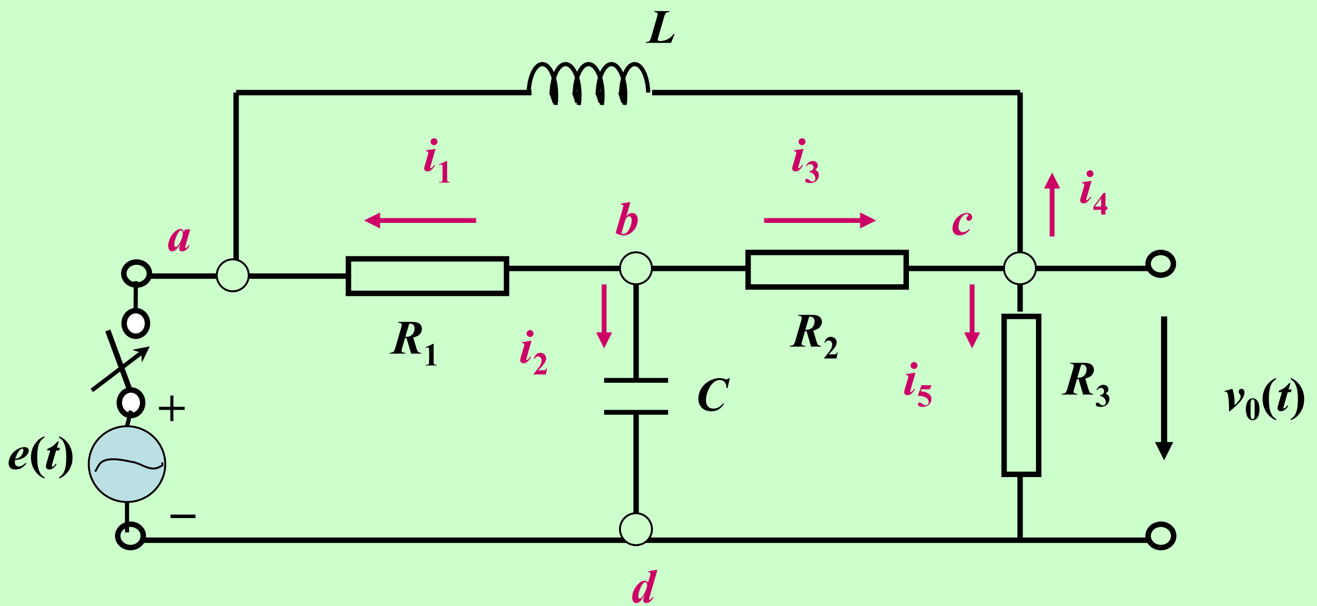


图4

建立微分方程模型的一般步骤

1）找出系统的因果关系，确定系统的输入量、输出量及中间变量，分析中间变量与输入量、输出量之间的关系。

2）为简化计算，作一些合理化的假设。

3）找出支配系统动态特性的基本定律。

4）列写各中间变量与输入、输出变量间的因果关系式。至此，方程数目与所设变量数（除输入变量）应相当。

5）联立上述方程，消去中间变量，最终得到只包含系统输入与输出变量的微分方程。

6）将得到的微分方程化为标准型。

7）若得到的方程是非线性的，通常还需要进行线性化处理。

电路系统的数学模型

提要：以电路系统为例，讲述建立动态系统微分方程模型、状态空间模型和传递函数以及方块图建模的方法。

- 微分方程模型
- 状态空间模型
- 传递函数
- 方块图建模

状态的基本概念

- 系统微分方程是输入输出模型，它仅仅描述了系统输入变量与输出变量之间的关系。

  ——经典控制理论模型

- 系统状态空间模型能够刻画系统内部变量的运动过程，能够描述多变量系统。状态空间模型也便于计算机实现。

  ——现代控制理论模型

状态的基本概念

- State (状态)：所谓状态，是指系统过去、现在和将来的状况。
- State variable (状态变量)： 状态变量是指能确定系统运动状态的最少数目的一组变量。一个用n阶微分方程描述的系统就有n个独立的变量，当这n个独立变量的时间响应都求得时，系统的行为也就完全被确定。因此由n阶微分方程描述的系统就有n个状态变量。状态变量具有非唯一性，因为不同的状态变量也能表达同一个系统的行为。要注意的是，状态变量不一定是物理上可观测的量，可以是一个纯数学量。
- State vector (状态向量)：若n个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是向量$x(t)$的分量，则$x(t)$称为状态向量。其阶数(order)为n，也即微分方程（特征方程）的阶数。

$$x(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv x$$

状态的基本概念

- **State space (状态空间)**：以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 构成的n维空间，称为状态空间。系统在任意时刻的状态向量$x(t)$在状态空间中是一个点。系统随时间的变化过程，使$x(t)$在状态空间中描绘出一条轨迹称为状态轨迹(state trajectory)。

- **State variables representation (状态空间表达式)**：将反映系统动态过程的n阶微分方程，转换成一阶微分方程组的形式，并利用矩阵和向量的数学工具，将一阶微分方程组用一个方程来表示，这就是状态方程。将状态方程与描述系统状态变量与系统输出变量之间的关系的输出方程一起就构成了状态空间表达式。下面就是状态空间表达式的标准描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad \text{状态方程}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \qquad \text{输出方程}$$

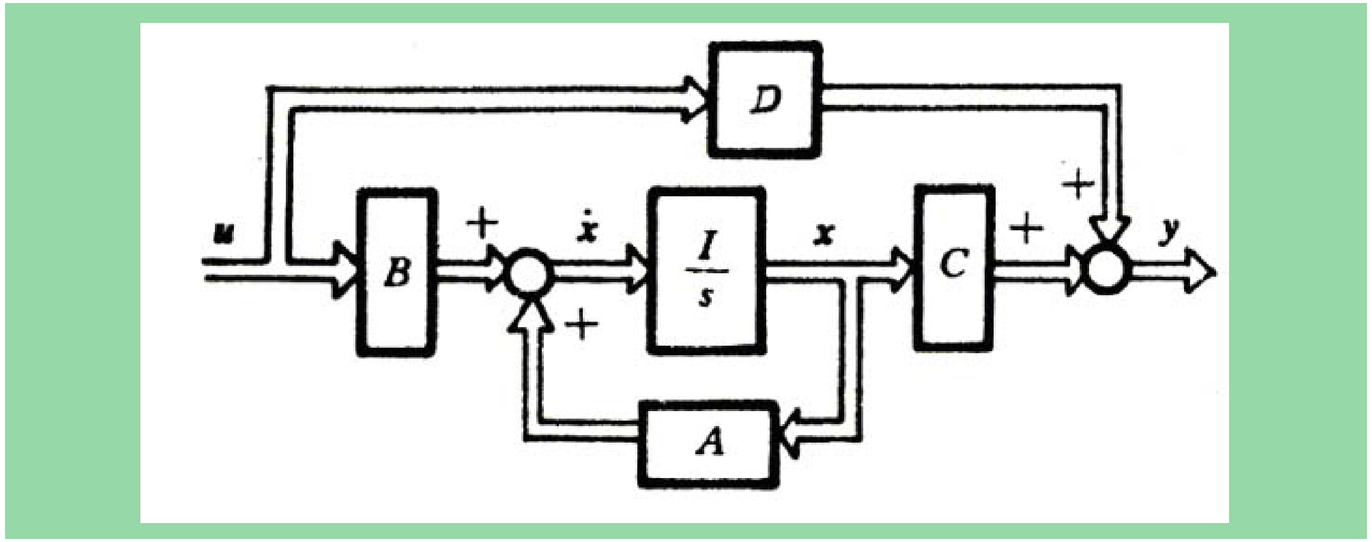
状态的基本概念

- 状态空间模型（State-space model)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{状态方程}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad \text{输出方程}$$

式中，$x(t), \dot{x}(t)$ 分别为状态向量及其一阶导数，$u(t)$，$y(t)$分别为系统的输入变量和输出变量，A，B，C，D分别为具有一定维数的系统矩阵。

- 状态空间模型图



状态的基本概念

- 三种常用的系统状态变量：物理（*physical* ）状态变量、相（*phase*）变量 、正则 （*canonical*） 变量。
- 物理状态变量同系统中的储能元件(energy-storage elements)相关。如：电容、电感等。
- 储能元件的能量函数中的运动物理量可被选作系统的状态变量， 如电容电压、电感电流等。
- 一般而言，只有独立物理量才被选作状态变量。独立物理量意味着，该物理量不能够由其他状态变量所构成的函数来表示（注：一个状态变量可以由其他状态变量的各阶导数所构成的函数表示）。

常用储能元件及其物理量(中文课本P33)

储能元件	能量	物理变量
电容C	$\frac{Cv^2}{2}$	电压 v
电感L	$\frac{Li^2}{2}$	电流 i
质量M	$\frac{Mv^2}{2}$	传递速度 v
弹簧K	$\frac{Kx^2}{2}$	位移 x
流体容量$C=\rho A$	$\frac{\rho Ah^2}{2}$	高度 h
热容C	$\frac{C\theta^2}{2}$	温度 θ
流体可压缩性V/K_B	$\frac{VP_L{}^2}{2K_B}$	压力 P_L

例1-1-S：电阻电感串联电路

在图1中，只有一个储能元件——电感 L，因此只有一个状态变量。 选择状态变量 $x_1=i$，令 $u=e$，列写回路电压方程

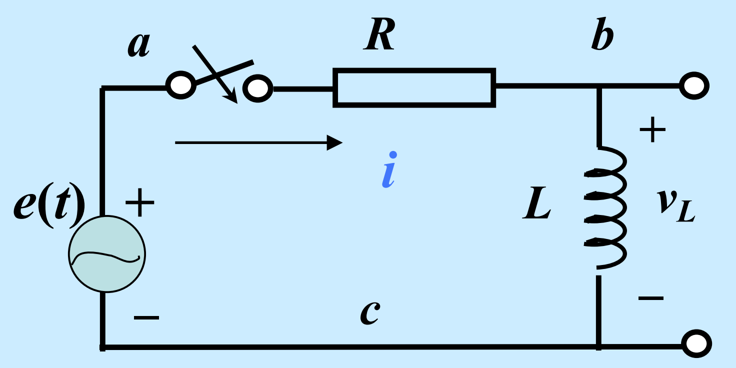


图1

$$iR+L\frac{di}{dt}=Ri+LDi=e$$

$$Rx_1+L\dot{x}_1=u$$

整理得：$$\boxed{\dot{x}_1=-\frac{R}{L}x_1+\frac{1}{L}u}$$

其中，u 是系统输入函数的标准符号，称为控制变量。如果给定输出 y，就可以根据状态变量和控制变量列写输出方程。如：

$$\boxed{y=v_L=e-Ri=-Rx_1+u}$$

例2-S：电阻电感电容（RLC）串联电路（1）

在图 3中，系统包含两个储能元件：电感 L 和电容 C。设状态变量为$x_1=v_c$ 和 $x_2=i$ ，因此需要两个状态方程。 令 e为控制变量：

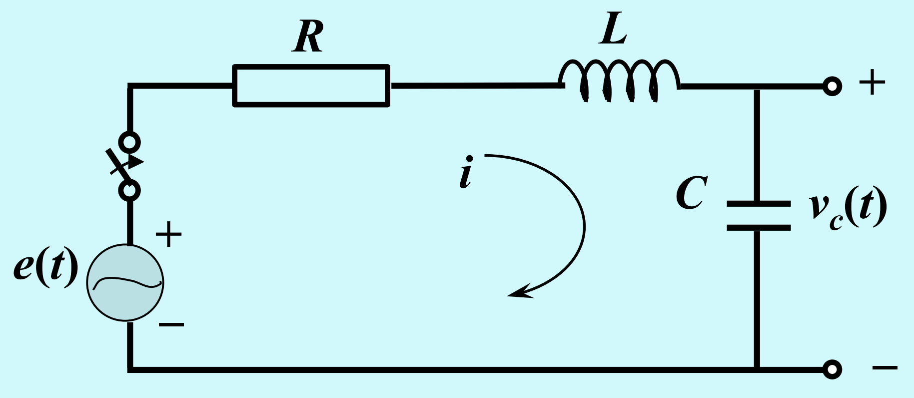


图3

$$\because v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau$$

$$\therefore \dot{x}_1 = \frac{1}{C}x_2$$

$$\because v_L + v_R + v_C = e$$

及 $$v_L = L\frac{di}{dt}$$

$$\therefore \dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

例2-S：电阻电感电容（RLC）串联电路（2）

R-L-C 电路的状态方程写成标准形式（2 个一阶微分方程，系统独立状态数为2）。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [u]$$

比较：同一系统的微分方程描述

$$LC\frac{dv_c^{\,2}(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e$$

➢ 还可以用更紧凑的矩阵形式表示： $\dot{x} = Ax + bu$

其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{n\times 1}$ 及 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}_{n\times n}$

x 是一个 $n\times 1$ 的状态向量（本例中 $n=2$）；A是$n\times n$矩阵， 称为对象系数矩阵或系统矩阵。

例2-S：电阻电感电容（RLC）串联电路（3）

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

b 称为**控制向量** ($n\times1$) （因为 u 是一个标量）；如果 u 是一个 m 维的**输入向量**，比如系统具有多个输入，那么 B 将会成为一个 $n\times m$ 的**控制矩阵**。

➢ 如果系统输出 $y(t)$ 是 电容电压，那么有 $y(t)=v_c=x_1$

于是系统输出方程就是

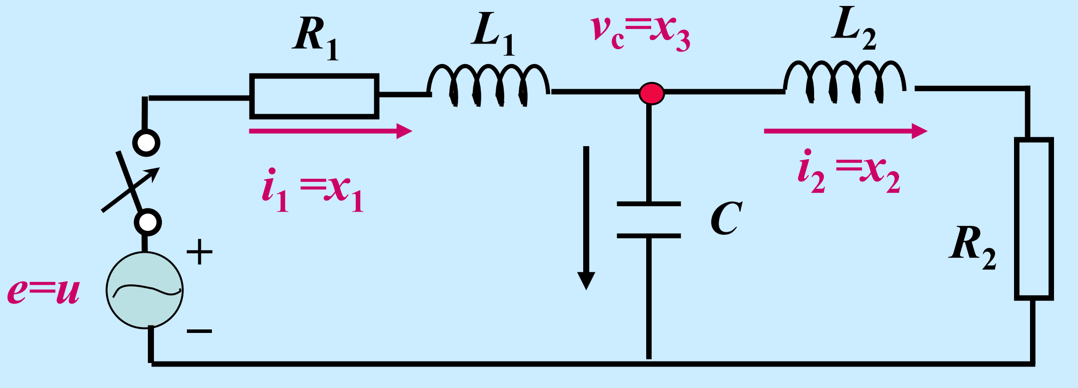
$$y(t)=Cx+Du=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+[0][u]=x_1$$

C为$l\times n$矩阵，称为**输出矩阵**；D为$l\times m$矩阵，称为**前馈矩阵**。本例中，$l=1$； $D=0$。

如果 y 是 $l\times1$ 的向量，那么称为**输出向量**；这里，y是一个一维输出变量。

例3：RLC电路（1）

➢ 推导P35图2-12电路的状态空间模型。其中，i_2 是系统输出 y。系统状态变量设定为：$x_1 = i_1$，$x_2 = i_2$ 和 $x_3 = v_c$。可列写2个回路方程和1个节点方程。



P35图2-12

Loop 1

$$R_1 x_1 + L_1 \dot{x}_1 + x_3 = u$$

Loop 2

$$-x_3 + L_2 \dot{x}_2 + R_2 x_2 = 0$$

Node ●

$$-x_1 + x_2 + C\dot{x}_3 = 0$$

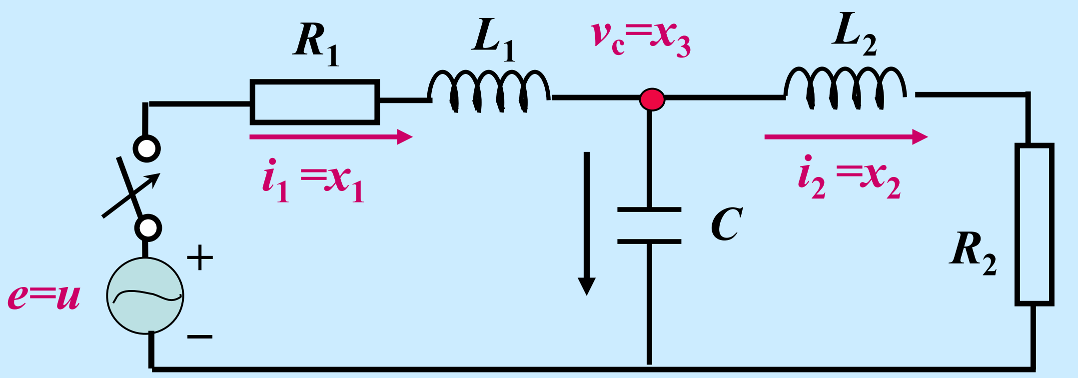
其中 x_1、x_2 和 x_3 是独立的。

$$y = [0 \quad 1 \quad 0]x$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1}x_3 + \frac{1}{L_1}u$$

$\vdots$ $\vdots$

例3：RLC电路（2）



P35图2-12

Loop 1

$$R_1 x_1 + L_1 \dot{x}_1 + x_3 = u$$

Loop 2

$$-x_3 + L_2 \dot{x}_2 + R_2 x_2 = 0$$

Node ●

$$-x_1 + x_2 + C\dot{x}_3 = 0$$

其中，i_2 是系统输出 y。

写成状态空间模型标准形式：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

关于系统中的变量

- 对于一个被控过程，其中的变量可以分成三类

（1）**输入变量：**

$$\begin{cases}\text{控制变量}\\\text{扰动变量}\end{cases}$$

输入变量从外部作用于被控过程（或被控对象）。

（2）**输出变量：**过程的被控变量，通常可以被测量、观测，输出变量会对输入变量的作用做出响应。

（3）**状态变量：**一组能够**完全描述**系统时域行为的、**数量最少**的变量。

建立状态方程模型的一般步骤

- 确定输入变量、输出变量及状态变量（非唯一性！）
- 用微分方程表示各环节模型
- 选择独立的状态变量，用一阶微分方程组的形式表达模型
- 整理成状态方程的标准形式
- 将输出变量表示为状态变量的线性组合，即输出方程

电路系统的数学模型

提要：以电路系统为例，讲述建立动态系统微分方程模型、状态空间模型和传递函数以及方块图建模的方法。

- 微分方程模型
- 状态空间模型
- **传递函数模型**
- 方块图建模

传递函数

- 传递函数是控制理论中的一个基本概念，在控制理论中具有重要的地位。
- 传递函数的定义：系统零状态响应的拉普拉斯变换与输入拉普拉斯变换的比值。也就是说，传递函数是在零初始条件下，系统输出拉普拉斯变换除以输入拉普拉斯变换的商。
- 对于一个已知的微分方程，在零初始条件下对其进行拉普拉斯变换，即可得到相应的传递函数。

传递函数

- 考虑如下由时域微分方程描述的 n 阶系统

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_0 x(t)$$

- 其传递函数是

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

其中，通常有 $n \geq m$

- 令分母等于 0，则可以得到系统的**极点**，在 S 平面用 “×” 表示
- 令分子等于 0，则可以得到系统的**零点**，在 S 平面用 “○” 表示

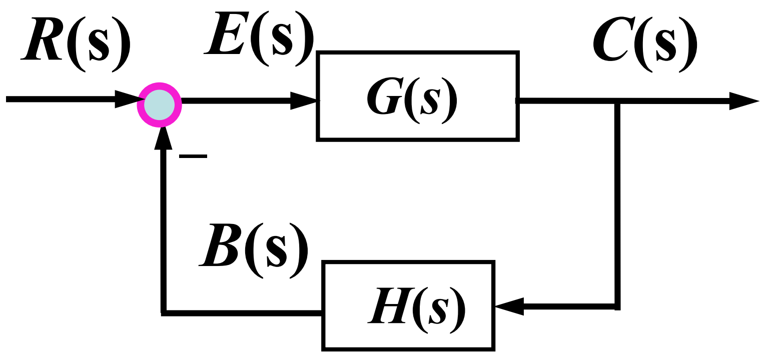
传递函数

- 控制系统的微分方程是在时域描述系统动态性能的数学模型，在给定输入及初始条件下，求解微分方程可以得到系统的输出响应。但系统中某个参数变化或者结构形式改变，便需要重新列写并求解微分方程。
- 传递函数是在复频域描述系统动态性能的数学模型，不仅可以表征系统的动态特性，而且可以研究系统的结构或参数变化对系统性能的影响。

传递函数

- 传递函数只取决于系统的结构与参数，与输入变量形式无关；它不反映系统内部的信息，也不反映系统的初始条件；
- 它是输入输出模型的表现形式（复域形式）。传递函数可与时域微分方程、状态方程相互转换；
- 开环传递函数

$$G(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$



- 闭环传递函数

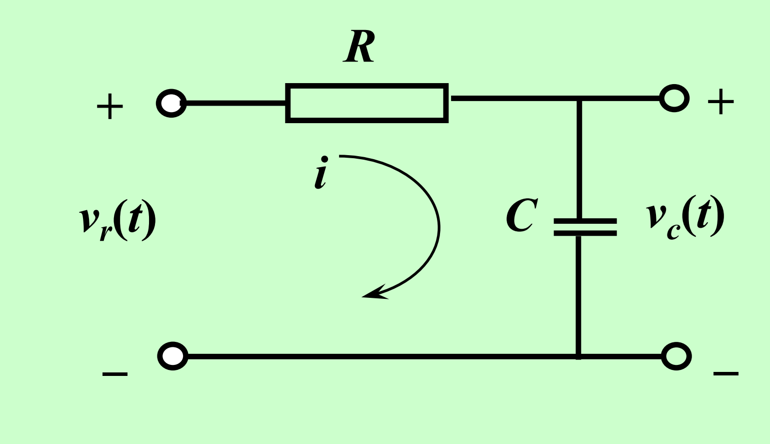
$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

传递函数

➢ 右图所示的*RC*电路中电容的端电压$v_c(t)$根据基尔霍夫定律，可列写如下微分方程：

$$i(t)R + v_c(t) = v_r(t) \qquad (1)$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad (2)$$



➢ 消去中间变量$i(t)$，得到输入$v_r(t)$与输出$v_c(t)$ 之间的线性定常微分方程:

$$\boxed{RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_r(t)} \qquad (3)$$

传递函数

- 考虑零初始条件，对上述微分方程两端进行拉氏变换，得：

$$RCsV_c(s)+V_c(s)=V_r(s)$$

式中：$V_c(s)$—— 输出电压$v_c(t)$的拉氏变换；

$V_r(s)$—— 输入电压$v_r(t)$的拉氏变换。

由上式求出$V_c(s)$的表达式：

$$V_c(s)=\frac{1}{RCs+1}V_r(s)$$

$$\frac{V_c(s)}{V_r(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$

当初始电压为零时，电路输出响应的象函数与输入电压的象函数之比，是一个只与电路结构及参数有关的函数。

用上式来表征电路本身特性，称做传递函数，记为：

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

传递函数

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_r(t)$$

➢ 现在对上述微分方程两端进行拉氏变换，并考虑电容上的初始电压$v_c(0)$，得：

$$RCsV_c(s)-RCv_c(0)+V_c(s)=V_r(s) \qquad (4)$$

式中：$V_c(s)$—— 输出电压$v_c(t)$的拉氏变换；

$V_r(s)$—— 输入电压$v_r(t)$的拉氏变换。

由上式求出$V_c(s)$的表达式：

$$V_c(s)=\frac{1}{RCs+1}V_r(s)+\frac{RC}{RCs+1}v_c(0) \qquad (5)$$

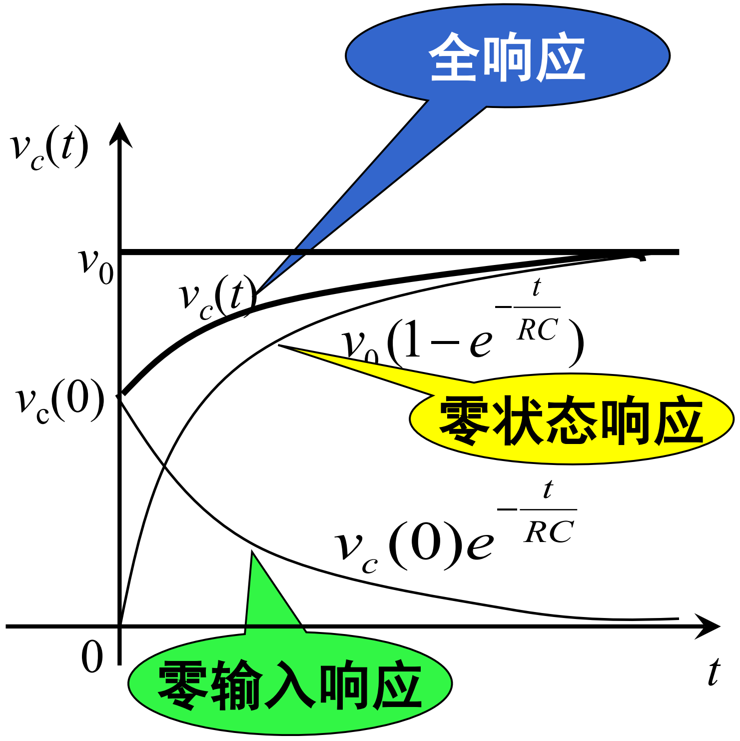
当输入为阶跃电压$v_r(t)= v_0\cdot 1(t)$时，对$V_c(s)$求拉氏反变换，即得 $v_c(t)$的变化规律：

传递函数

$$v_c(t)=v_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})+v_c(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6)$$

式中第一项称为零状态响应，
是由$v_r(t)$决定的分量；
第二项称为零输入响应，
是由初始电压$v_c(0)$决定的分量。

右图表示各分量的变化曲线，
电容电压$v_c(t)$即为两者的合成。



RC网络的阶跃响应曲线

传递函数

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

式中$T=RC$。显然，传递函数$G(s)$确立了电路输入电压与输出电压之间的关系。

传递函数

传递函数可用上图表示。该图表明了电路中电压的传递关系，即输入电压$V_r(s)$，经过$G(s)$的传递，得到输出电压： $V_c(s)=G(s)V_r(s)$

电路元件的传递函数

电阻 $\dfrac{V(s)}{I(s)}=R$ 电感 $\dfrac{V(s)}{I(s)}=sL$ 电容 $\dfrac{V(s)}{I(s)}=\dfrac{1}{sC}$

例2'：电阻电感电容（RLC）串联电路

在图3中，R，L，C 为已知常数，$e(t)$ 是输入；$v_c(t)$（可以是其他变量）是输出。**请列写关于电路的传递函数$V_c(s)/E(s)$ 。**

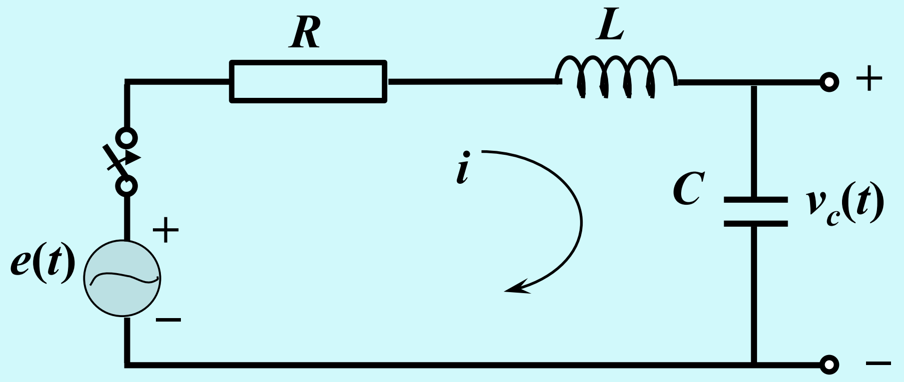


图3

如前根据基尔霍夫定律，已经建立微分方程模型

$$LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=e$$

将此方程转换为传递函数

$$G(s)=\frac{V_c(s)}{E(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{1/LC}{s^2+Rs/L+1/LC}$$

后面会专门介绍不同模型间的转换

电路系统的数学模型

提要：以电路系统为例，讲述建立动态系统微分方程模型、状态空间模型和传递函数以及方块图建模的方法。

- 微分方程模型
- 状态空间模型
- 传递函数
- **方块图建模**

例1-2：电阻电容串联电路

图2中，R，C为已知常数，$e_i(t)$ 是输入；$e_o(t)$ 是输出，请列写关于电路输出$e_o(t)$和输入$e_i(t)$的方程，并用方块图形式表示。

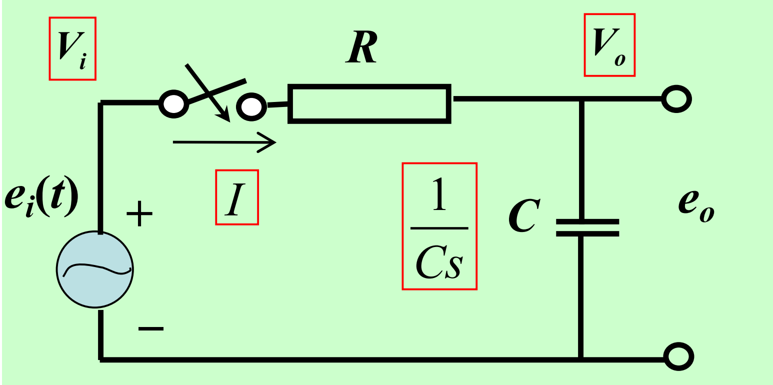
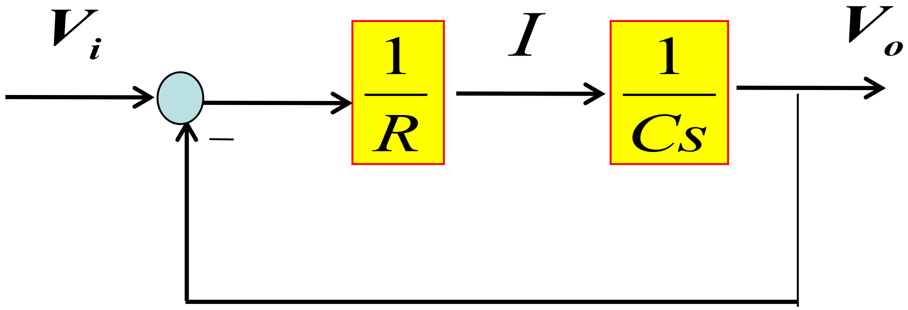


图2

$$V_o = I \cdot \frac{1}{Cs}, \qquad I = \frac{V_i - V_o}{R}$$



传递函数

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_r(t)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

例2：电阻电感电容（RLC）串联电路

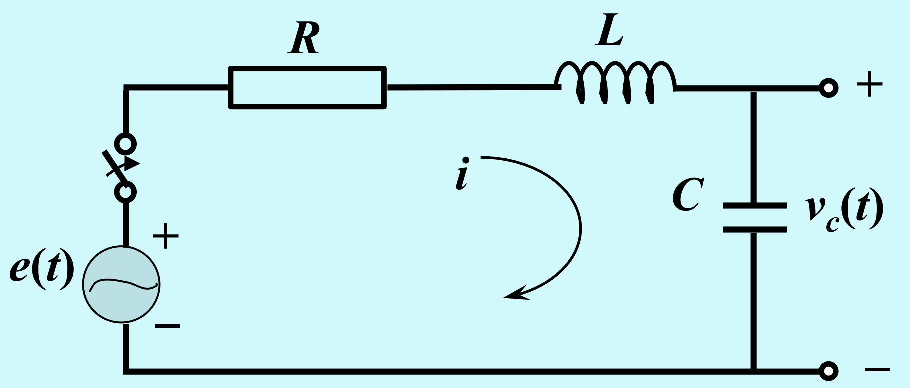
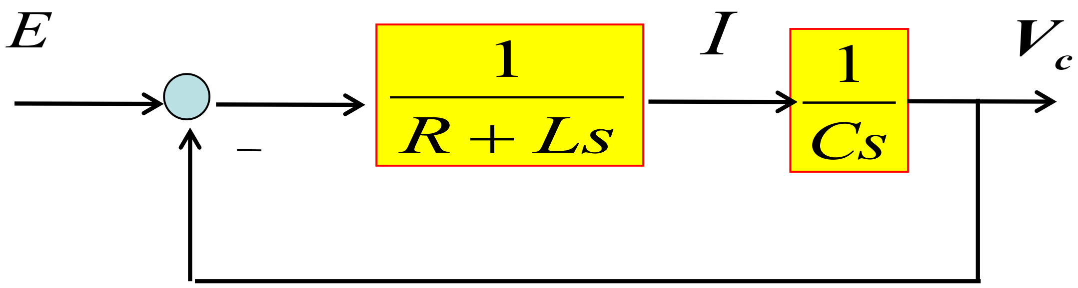


图3

若用方块图表示该电路

$$V_c = I \cdot \frac{1}{Cs}$$

$$I = \frac{E - V_c}{R + Ls}$$

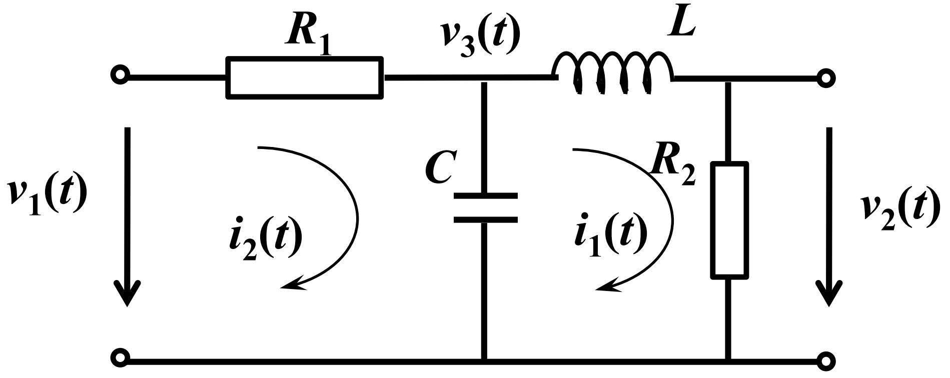


传递函数

$$LC\frac{dv_c^{\,2}(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e$$

$$\frac{V_c(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

方块图建模

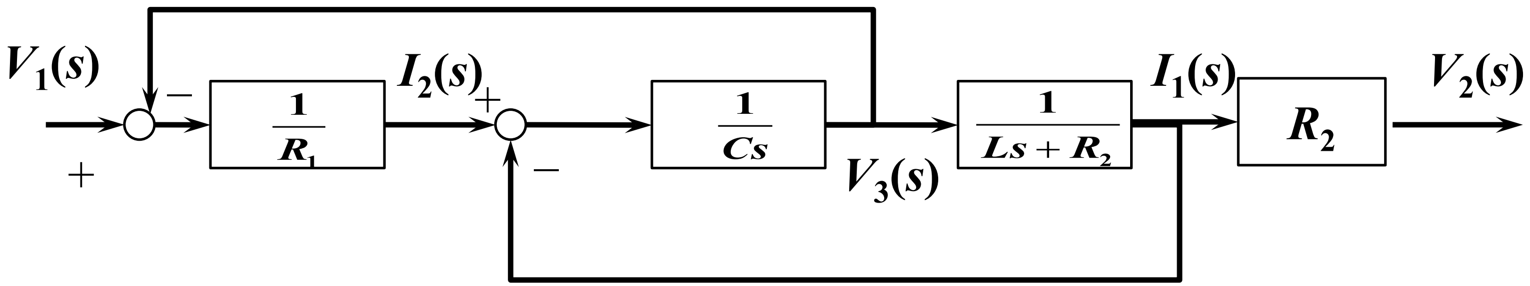


$$V_2 = R_2 I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{Ls + R_2} V_3$$

$$V_3 = (I_2 - I_1)\frac{1}{Cs}$$

$$I_2 = \frac{1}{R_1}(V_1 - V_3)$$



$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R_1 LCs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 + R_2}$$

？？

The End