

浙江大学 2023-2024 学年秋学期

《矩阵论》 期末考试

by Tannin Rachel

一、分别证明下列 2 题：

(1) 已知矩阵 \mathbf{B} 满足 $|\mathbf{B}| \neq 0$ ，证明矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^H$ 是正定矩阵；

(2) 已知 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ，证明 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 是非奇异矩阵。

二、已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(1) 求 \mathbf{A} 的奇异值分解；

(2) 求 \mathbf{A} 的广义逆矩阵 \mathbf{A}^\dagger

(3) 求矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的普通最小二乘解。

三、已知矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}, p < n$ 的投影定义为

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

记 $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$.

(1) 证明 $\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{O}$;

(2) 若矩阵 \mathbf{A} 的秩为 p ，求矩阵 \mathbf{Q} 的迹和秩。

四、已知线性方程组

$$\alpha x_1 + \alpha x_3 = 3 - 2\alpha$$

$$2x_1 + x_2 + (\alpha + 3)x_3 = \alpha$$

$$3x_1 + \alpha x_2 + (2\alpha + 3)x_3 = 2\alpha$$

- (1) 是否存在方程组只有唯一解的情况, 若存在, 求出 α 的值;
- (2) 是否存在方程组无解的情况, 若存在, 求出 α 的值;
- (3) 是否存在方程组有无穷多解的情况, 若存在, 求出 α 的值。

五、(1) 已知 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 是一个 $\mathbb{R}^{n \times 1}$ 上的向量变量, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ 为一 $\mathbb{R}^{n \times 1}$ 上的常数向量, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 为一 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上的常数矩阵, c 为一 \mathbb{R} 上的常数, 求实函数 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ 的梯度向量和 Hessian 矩阵;

(2) 已知 \mathbf{X} 为 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的矩阵变量, \mathbf{B} 为 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 的常数矩阵, 求实函数 $f(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{X})$ 的 Jacobian 矩阵。

六、(1) 已知 \mathbb{R}^2 平面上有三个点 $(2, 4), (5, 1), (2, 1)$, 求出总体最小二乘的拟合直线以及它的距离平方和;

(2) 请至少给出一种除了总体最小二乘拟合外的其他拟合方式 (说明原理即可, 不用求出具体数值), 并说明它与总体最小二乘拟合的区别。

七、令代价函数为 $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_e \mathbf{w}$, 并且给滤波器加约束条件 $\text{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{x}\} = b$, 其中 b 为一常数, \mathbf{R}_e 为一噪声向量 \mathbf{e} 的协方差矩阵。

- (1) 证明代价函数 $f(\mathbf{w})$ 为实值函数;
- (2) 假定 \mathbf{R}_e 可逆, 求最优滤波器 \mathbf{w} 。

八、简答题。

- (1) 考虑约束优化问题 $\min f_0(\mathbf{x})$ subject to $f_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, \dots, m, h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, q$, 分别给出混合外罚函数和混合内罚函数 (对数障碍) 的目标函数表达式;
- (2) 判断超定矩阵 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的普通最小二乘目标函数是否为凸函数, 并给出说明;
- (3) Tikhonov 正则化最小二乘法的代价函数为

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2$$

- (a) 请举例说明 Tikhonov 正则化最小二乘法在物理问题中的应用, 要求给出模型中 $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, \lambda$ 的物理意义;
- (b) 请说明 Tikhonov 正则化中正则项 $\lambda \|\mathbf{x}\|_2^2$ 的作用;
- (c) 设计一个迭代算法求解 Tikhonov 正则化最小二乘问题, 要求写出起始条件、迭代过程和终止条件。