机器人建模与控制

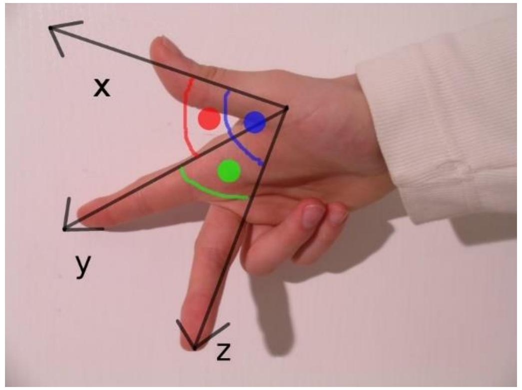
第2章 空间描述和变换

2.1.1 笛卡尔直角坐标系

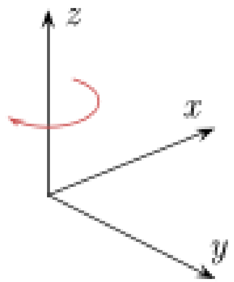
- 交于原点的三条不共面的数轴（常称*x*轴、*y*轴和*z*轴）构成空间的仿射坐标系
- 三条数轴（主轴）上度量单位相等的仿射坐标系称为空间笛卡尔坐标系

空间笛卡尔坐标系
- 空间笛卡尔直角坐标系
  - 空间笛卡尔直角右手坐标系
  - 空间笛卡尔直角左手坐标系
- 空间笛卡尔斜角坐标系

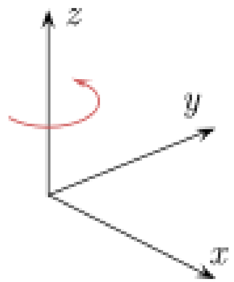
- 本课程采用：
  空间笛卡尔直角右手坐标系
  所有坐标系都采用同样长度的度量单位



右手定则



左手坐标系

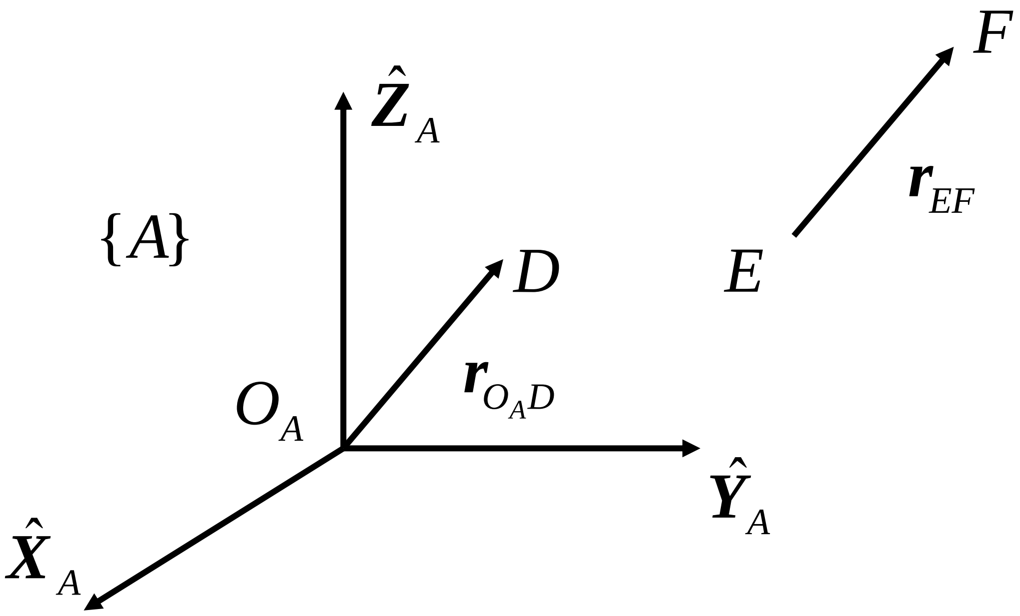


右手坐标系

2.1 坐标系与向量

2.1.2 向量

- 定义：向量是具有大小和方向的量
- 几何上，可以用3维空间的有向线段表示3维向量，如：$\boldsymbol{r}_{EF}$
- 若两个向量长度相等、方向相同，则称这两个向量相等



$$\boldsymbol{r}_{O_A D} = \boldsymbol{r}_{EF}$$

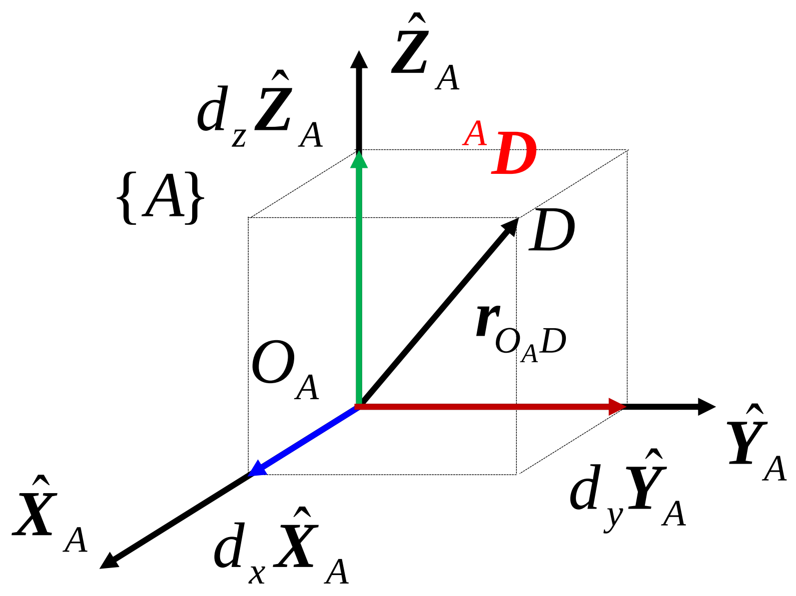
2.1 坐标系与向量

- 向量的定量表达

向量 $\boldsymbol{r}_{O_AD}$，将它分别向 $\hat{\boldsymbol{X}}_A,\hat{\boldsymbol{Y}}_A,\hat{\boldsymbol{Z}}_A$ 作投影，得到3个向量 $d_x\hat{\boldsymbol{X}}_A,d_y\hat{\boldsymbol{Y}}_A,d_z\hat{\boldsymbol{Z}}_A$

$$\boldsymbol{r}_{O_AD}=d_x\hat{\boldsymbol{X}}_A+d_y\hat{\boldsymbol{Y}}_A+d_z\hat{\boldsymbol{Z}}_A=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_x\\ d_y\\ d_z\end{pmatrix}$$

简洁表达 $${}^A\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}d_x\\ d_y\\ d_z\end{pmatrix}$$



向量长度（大小） $$\left|\boldsymbol{r}_{O_AD}\right|=\left|{}^A\boldsymbol{D}\right|=\sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2}$$

在$\{A\}$中，$\hat{\boldsymbol{X}}_A,\hat{\boldsymbol{Y}}_A$和 $\hat{\boldsymbol{Z}}_A$ 可分别表达为 $${}^A\boldsymbol{X}_A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ {}^A\boldsymbol{Y}_A=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ {}^A\boldsymbol{Z}_A=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2.1.3 三维向量的内积和外积

- 两个3维向量 $\boldsymbol{r}_{OP}$ 与 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 的内积（数量积）定义为

$$\boldsymbol{r}_{OP} \cdot \boldsymbol{r}_{OQ} = |\boldsymbol{r}_{OP}||\boldsymbol{r}_{OQ}|\cos\theta \qquad \theta \in [0, \pi]$$

- 两个非零向量间夹角 $\theta = \arccos\dfrac{\boldsymbol{r}_{OP} \cdot \boldsymbol{r}_{OQ}}{|\boldsymbol{r}_{OP}||\boldsymbol{r}_{OQ}|}$

- 内积是一个标量，零向量与任何向量的内积等于零

- $\boldsymbol{r}_{OP}$ 与 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 垂直（正交）的充要条件是它们的内积等于零

- 方向任意的零向量垂直（正交）于任何向量

- 向量长度 $|\boldsymbol{r}_{OP}| = \sqrt{\boldsymbol{r}_{OP} \cdot \boldsymbol{r}_{OP}}$

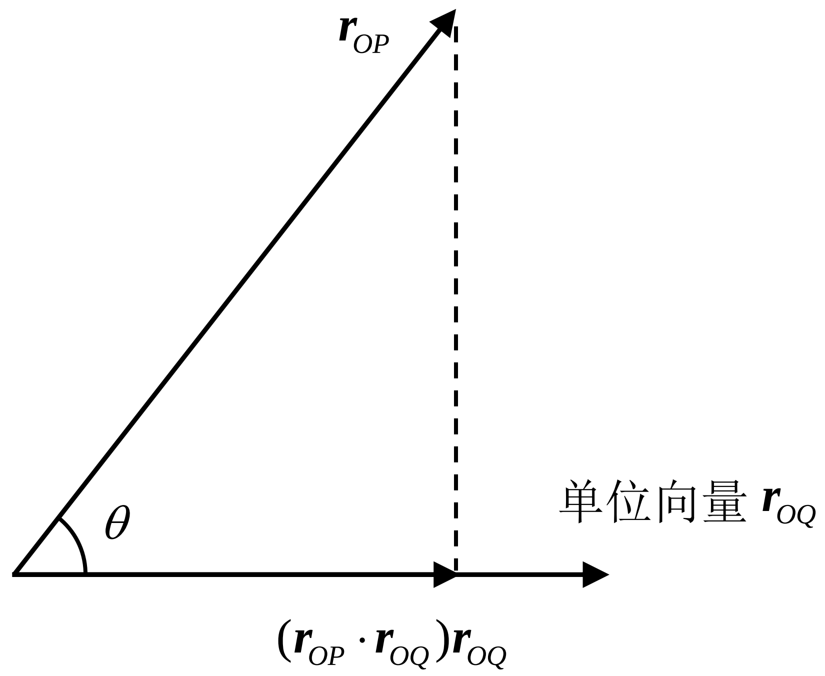
2.1 坐标系与向量

- 若 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 是单位向量

$$\boldsymbol{r}_{OP}\cdot\boldsymbol{r}_{OQ} = |\boldsymbol{r}_{OP}||\boldsymbol{r}_{OQ}|\cos\theta = |\boldsymbol{r}_{OP}|\cos\theta$$

将 $\boldsymbol{r}_{OP}$ 向单位向量 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 作投影，得到的投影向量为

$$(\boldsymbol{r}_{OP}\cdot\boldsymbol{r}_{OQ})\boldsymbol{r}_{OQ}$$



2.1 坐标系与向量

- 在参考系$\{A\}$中，$\boldsymbol{r}_{OP}$ 和 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 分别被表达为

$$^{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad ^{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{r}_{OP}$ 和 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 的内积可按下式计算

$$\boldsymbol{r}_{OP} \cdot \boldsymbol{r}_{OQ} = {}^{A}\boldsymbol{P} \cdot {}^{A}\boldsymbol{Q} = {}^{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\, {}^{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

$$= p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z$$

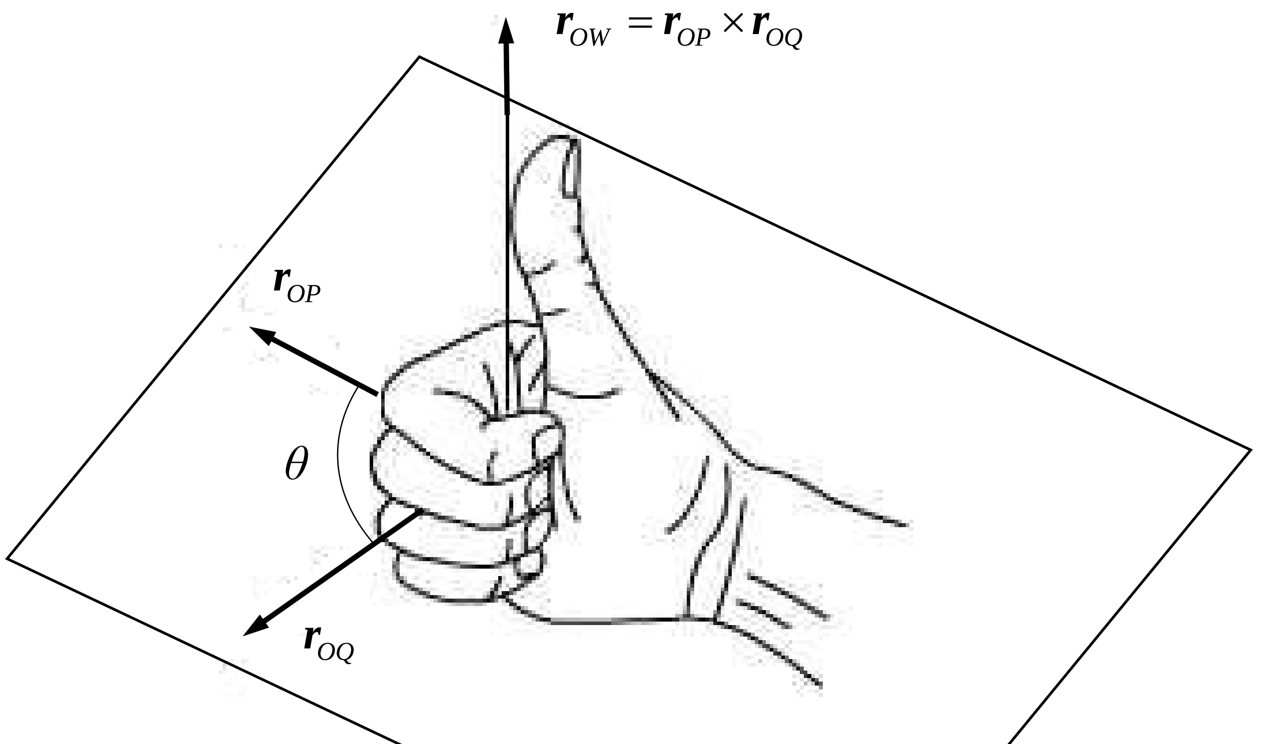
2.1 坐标系与向量

- 两个3维向量 $\boldsymbol{r}_{OP}$ 与 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 的外积（向量积）是一个3维向量，记这个向量为 $\boldsymbol{r}_{OW}=\boldsymbol{r}_{OP}\times\boldsymbol{r}_{OQ}$

  长度定义为 $|\boldsymbol{r}_{OW}|=|\boldsymbol{r}_{OP}||\boldsymbol{r}_{OQ}|\sin\theta$

  零向量与任何向量的外积是零向量，夹角θ为0或π的两个非零向量的外积也是零向量。

$\boldsymbol{r}_{OW}$ 与 $\boldsymbol{r}_{OP}$ 和 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 均正交，方向按右手螺旋法则确定：右手大拇指伸直，弯曲其他四指，指向由 $\boldsymbol{r}_{OP}$ 沿小于180°的方向转向 $\boldsymbol{r}_{OQ}$，大拇指的朝向即是 $\boldsymbol{r}_{OW}$ 的方向



2.1 坐标系与向量

- 对于右手参考系{A}，有 $\hat{\boldsymbol{Z}}_A = \hat{\boldsymbol{X}}_A \times \hat{\boldsymbol{Y}}_A, \hat{\boldsymbol{X}}_A = \hat{\boldsymbol{Y}}_A \times \hat{\boldsymbol{Z}}_A, \hat{\boldsymbol{Y}}_A = \hat{\boldsymbol{Z}}_A \times \hat{\boldsymbol{X}}_A$
- $\boldsymbol{r}_{OP}$ 和 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 以及它们的外积 $\boldsymbol{r}_{OW}$ 分别表达为

$$^A\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, {}^A\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}, {}^A\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = {}^A\boldsymbol{P} \times {}^A\boldsymbol{Q}$$

- 三种方法计算$^A\boldsymbol{W}$

法一
$$\begin{cases} w_x = p_y q_z - p_z q_y \\ w_y = p_z q_x - p_x q_z \\ w_z = p_x q_y - p_y q_x \end{cases}$$

法二
$$^A\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

法三
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$$

其中，计算结果中i项、j项和k项的系数就分别是w_x、w_y和 w_z

2.2 点和刚体的描述

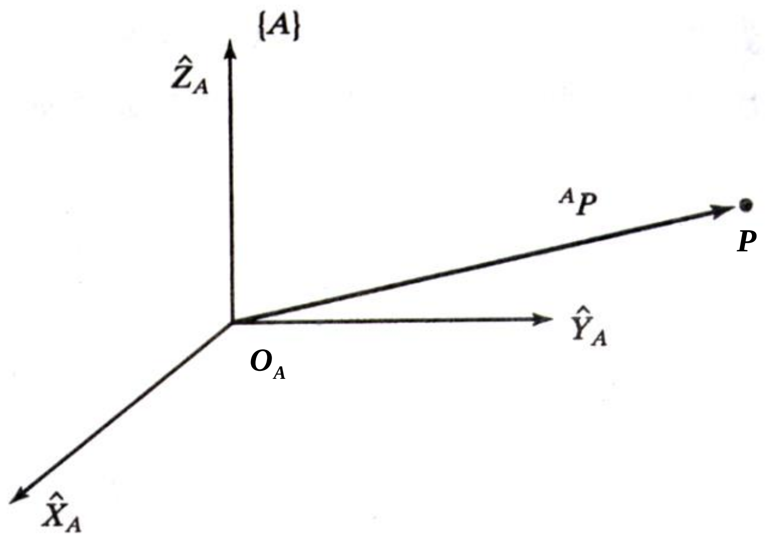
2.2.1 点的位置描述

O_A 表示$\{A\}$ 的原点

$\hat{X}_A$、$\hat{Y}_A$ 和$\hat{Z}_A$ 分别表示$\{A\}$ 的x 轴向、y 轴向和z 轴向的单位向量

在坐标系$\{A\}$ 中，空间任意一点P 的位置可表示为由其坐标构成的3×1 向量表示

$$^{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$



即：$\boldsymbol{r}_{O_A P}=\left(\hat{\boldsymbol{X}}_A \quad \hat{\boldsymbol{Y}}_A \quad \hat{\boldsymbol{Z}}_A\right){}^{A}\boldsymbol{P}$

2.2.2 刚体的位置和姿态描述

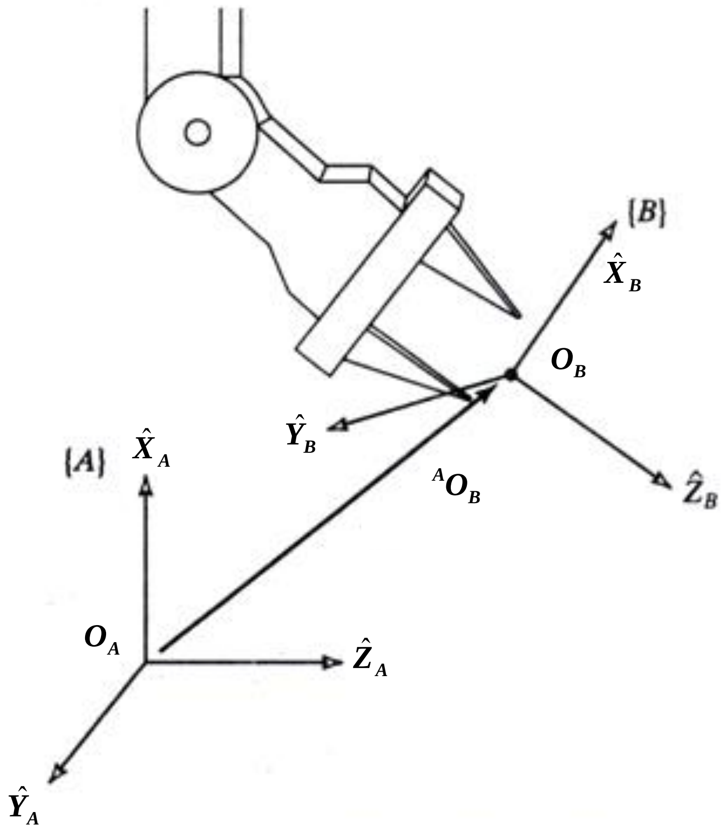
设$\{B\}$是某物体的一个联体坐标系，即该物体上的任何一个点在$\{B\}$中的位置已知且始终不变

$\{B\}$的原点为O_B，3个轴分别用$\hat{\mathbf{X}}_B$、$\hat{\mathbf{Y}}_B$和$\hat{\mathbf{Z}}_B$表示

在$\{A\}$中表示出$\{B\}$的位置和姿态，即描述了该物体在$\{A\}$中的位置和姿态

在$\{A\}$中表示出$\{B\}$的位置：${}^{A}\mathbf{O}_B \in \mathbb{R}^3$

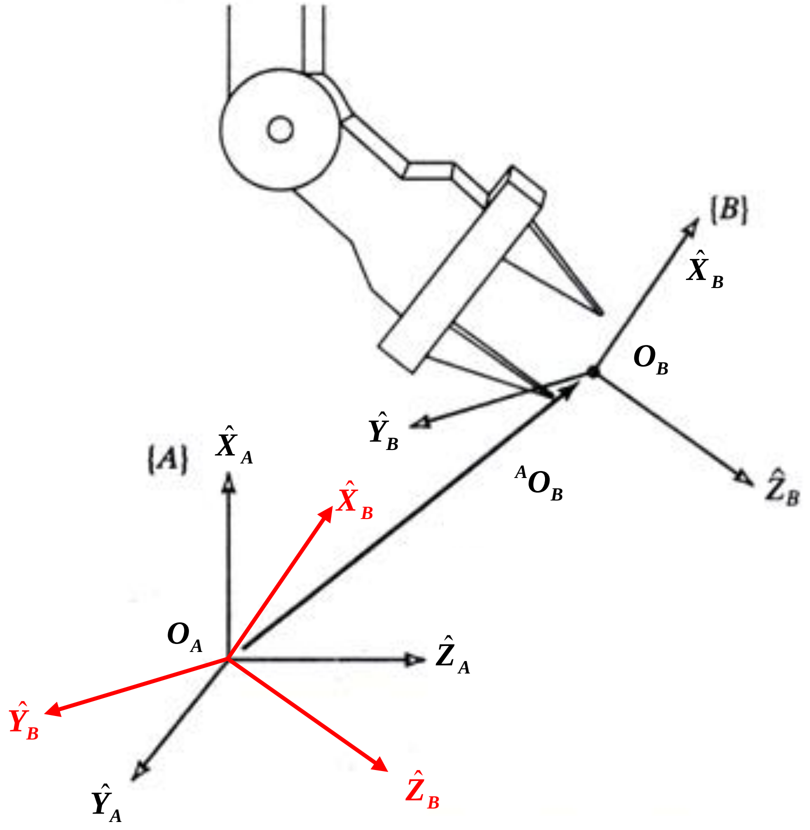
即$\mathbf{r}_{O_A O_B} = (\hat{\mathbf{X}}_A \quad \hat{\mathbf{Y}}_A \quad \hat{\mathbf{Z}}_A)\,{}^{A}\mathbf{O}_B$



2.2 点和刚体的描述

在{A} 中表示出{B} 的姿态：

$$\begin{pmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{pmatrix} {}^{A}_{B}R$$



$$\hat{X}_B = \begin{pmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31}\end{pmatrix}$$

$$\hat{Y}_B = \begin{pmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32}\end{pmatrix}$$

$$\hat{Z}_B = \begin{pmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33}\end{pmatrix}$$

旋转矩阵 $${}^{A}_{B}R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix}$$

2.2 点和刚体的描述

定义集合

$$\mathrm{SO}(3)=\left\{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\,\middle|\,\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix}=1,\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix}=1,\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix}=0,\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix}\right\}$$

任何一个旋转矩阵（对应于刚体的一个姿态）都属于SO(3)

SO(3)的任何一个元素都是旋转矩阵

SO(3)是全体旋转矩阵的集合

刚体的不同姿态与SO(3)中的不同旋转矩阵是一一对应的

命题：对于任何$\mathbf{R}\in\mathrm{SO}(3),\mathbf{P}\in\mathbb{R}^3,\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^3$，有$\mathbf{R}(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\mathbf{RP}\times\mathbf{RQ}$

2.2.3 齐次变换矩阵

在$\{A\}$ 中表示$\{B\}$ 的位姿（描述物体在$\{A\}$ 中的位姿）：

齐次变换矩阵 $_B^AT=\left[\begin{array}{ccc|c} & {}_B^AR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\in\mathbb{R}^{4\times4}$

定义集合

$$SE(3)=\left\{\left[\begin{array}{ccc|c} & {}_B^AR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\middle|\ {}_B^AR\in SO(3),\ {}^AO_B\in\mathbb{R}^3\right\}$$

刚体的不同位姿与$SE(3)$中的不同齐次变换矩阵是一一对应的

2.3 两个坐标系的几何关系

2.3.1 两个坐标系的相对姿态

- 对于$SO(3)$中的任何一个矩阵 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_x & \boldsymbol{R}_y & \boldsymbol{R}_z\end{pmatrix}$，有

$$\boldsymbol{R}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_x=1, \boldsymbol{R}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_y=1, \boldsymbol{R}_z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_z=1$$

$$\boldsymbol{R}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_y=0, \boldsymbol{R}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_z=0, \boldsymbol{R}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_z=0$$

于是， $$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_x^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_y^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_z^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_x & \boldsymbol{R}_y & \boldsymbol{R}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_x & \boldsymbol{R}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_y & \boldsymbol{R}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_z\\ \boldsymbol{R}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_x & \boldsymbol{R}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_y & \boldsymbol{R}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_z\\ \boldsymbol{R}_z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_x & \boldsymbol{R}_z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_y & \boldsymbol{R}_z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

命题：对于任何$\boldsymbol{R}\in \mathrm{SO}(3)$， $\boldsymbol{R}$可逆且 $\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$

- ${}_B^A\boldsymbol{R}$ 与 ${}_A^B\boldsymbol{R}$ 的关系

$$\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}{}_B^A\boldsymbol{R} \qquad \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix}{}_A^B\boldsymbol{R}$$

$${}_A^B\boldsymbol{R}={}_B^A\boldsymbol{R}^{-1}={}_B^A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

2.3 两个坐标系的几何关系

2.3.2 两个坐标系的相对位置

- ${}^{A}\boldsymbol{O}_B$ 与 ${}^{B}\boldsymbol{O}_A$ 的关系

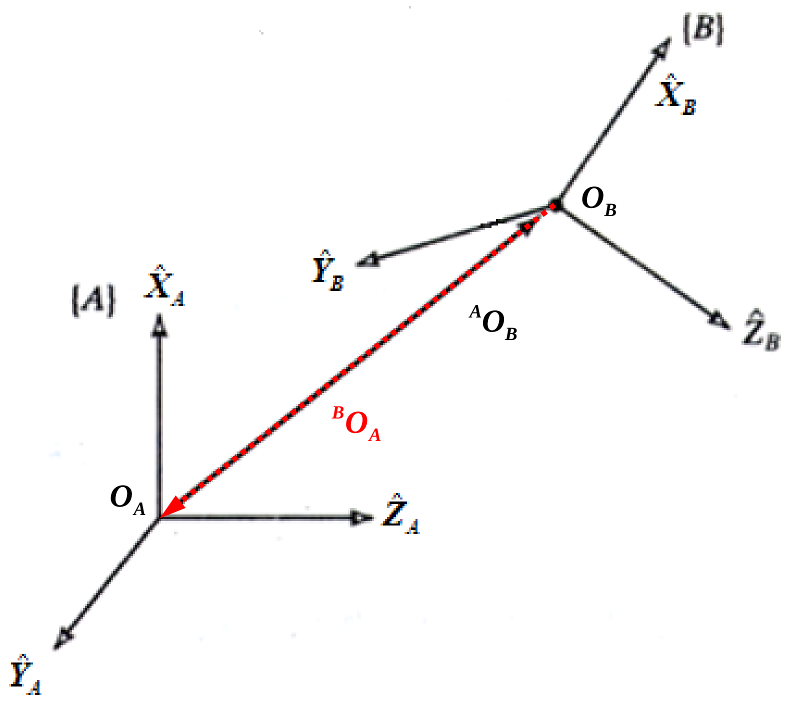
$$\boldsymbol{r}_{O_AO_B} = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix} {}^{A}\boldsymbol{O}_B$$

$$\boldsymbol{r}_{O_BO_A} = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix} {}^{B}\boldsymbol{O}_A$$

$$-\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix} {}^{A}\boldsymbol{O}_B = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix} {}^{B}\boldsymbol{O}_A$$

$$-\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix} {}^{B}_{A}\boldsymbol{R}\, {}^{A}\boldsymbol{O}_B = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix} {}^{B}\boldsymbol{O}_A$$

$${}^{B}\boldsymbol{O}_A = -{}^{B}_{A}\boldsymbol{R}\, {}^{A}\boldsymbol{O}_B$$



2.3 两个坐标系的几何关系

2.3.3 两个坐标系的相对位姿

$$ {}^{B}\boldsymbol{O}_{A} = -{}^{B}_{A}\boldsymbol{R}\,{}^{A}\boldsymbol{O}_{B} \qquad {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{-1} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} $$

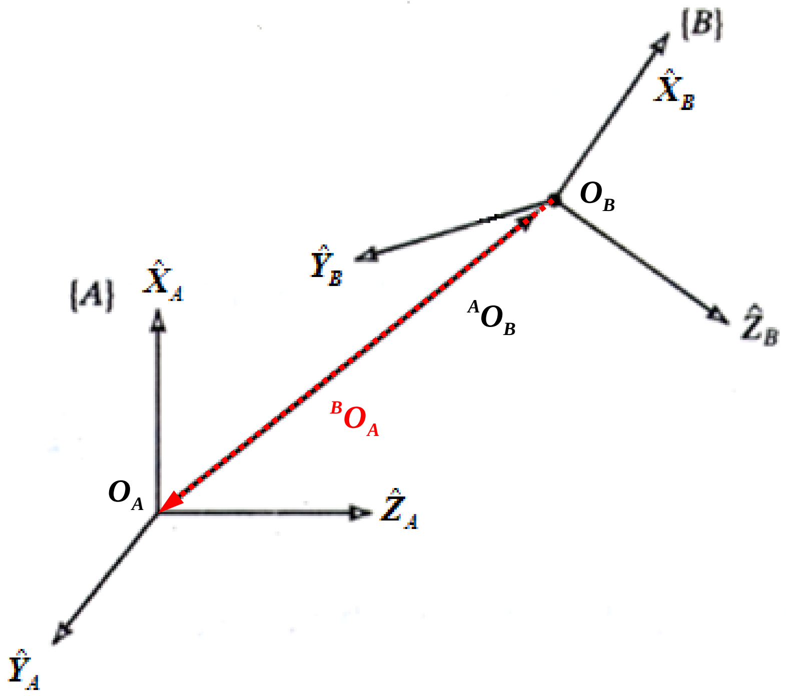
- ${}^{A}_{B}\boldsymbol{T}$ 与 ${}^{B}_{A}\boldsymbol{T}$ 的关系

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{T} = \left(\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & & {}^{A}\boldsymbol{O}_{B} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{B}_{A}\boldsymbol{T} = \left(\begin{array}{ccc:c} & {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} & & {}^{B}\boldsymbol{O}_{A} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc:c} & {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} & & -{}^{B}_{A}\boldsymbol{R}\,{}^{A}\boldsymbol{O}_{B} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\,{}^{B}_{A}\boldsymbol{T} = \left(\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & & {}^{A}\boldsymbol{O}_{B} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc:c} & {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} & & -{}^{B}_{A}\boldsymbol{R}\,{}^{A}\boldsymbol{O}_{B} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ = \left(\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}_{A}\boldsymbol{R} & & -{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}_{A}\boldsymbol{R}\,{}^{A}\boldsymbol{O}_{B} + {}^{A}\boldsymbol{O}_{B} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \boldsymbol{I} $$



$$ {}^{B}_{A}\boldsymbol{T} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T}^{-1} $$

2.3 两个坐标系的几何关系

- 对于任何 $T=\left(\begin{array}{ccc|c} & R & & O \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\in SE(3)$，$T$可逆且

$$T^{-1}=\left(\begin{array}{ccc|c} & R^{\mathrm{T}} & & -R^{\mathrm{T}}O \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

例：已知 ${}_B^A T=\left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$，试求 ${}_A^B T$

解：

$${}_A^B T=\left(\begin{array}{ccc|c} & {}_B^A R^{\mathrm{T}} & & -{}_B^A R^{\mathrm{T}}\,{}^A O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

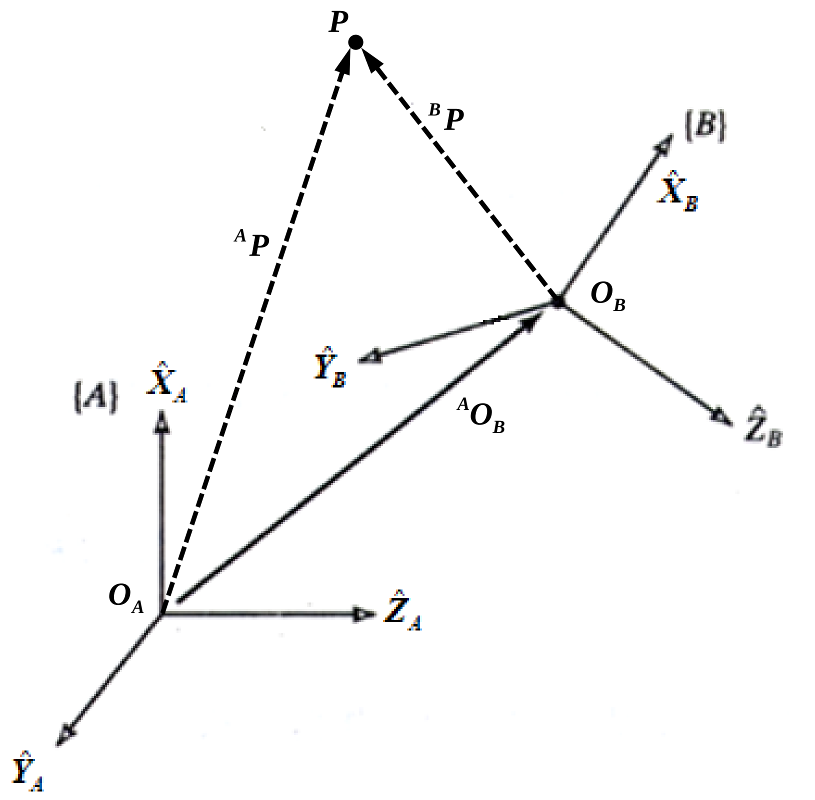
2.3.4 同一个点在两个参考系中的描述

- 齐次变换矩阵 ${}^A_BT = \left(\begin{array}{ccc:c} & {}^A_BR & & {}^AO_B \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ 以及 ${}^B\boldsymbol{P}$ 均已知，求 ${}^A\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{r}_{O_AP} = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}{}^A\boldsymbol{P} \Leftarrow {}^A\boldsymbol{P} \neq {}^A\boldsymbol{O}_B + {}^B\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{r}_{O_AO_B} = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}{}^A\boldsymbol{O}_B$$

$$\boldsymbol{r}_{O_BP} = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix}{}^B\boldsymbol{P}$$



$$\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}{}^A_B\boldsymbol{R}$$

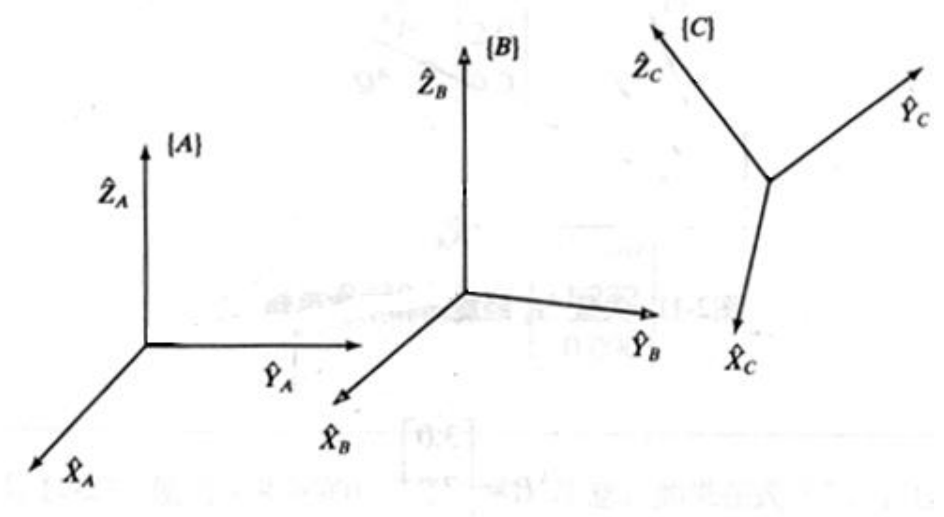
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}{}^A\boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}{}^A\boldsymbol{O}_B + \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_B & \hat{\boldsymbol{Y}}_B & \hat{\boldsymbol{Z}}_B\end{pmatrix}{}^B\boldsymbol{P} \\ &= \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}{}^A\boldsymbol{O}_B + \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A\end{pmatrix}{}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{P}\end{aligned}$$

$${}^A\boldsymbol{P} = {}^A\boldsymbol{O}_B + {}^A_B\boldsymbol{R}\,{}^B\boldsymbol{P}$$

$$\begin{pmatrix}{}^A\boldsymbol{P} \\ 1\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:c} & {}^A_B\boldsymbol{R} & & {}^A\boldsymbol{O}_B \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}{}^B\boldsymbol{P} \\ 1\end{pmatrix} = {}^A_B\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}{}^B\boldsymbol{P} \\ 1\end{pmatrix}$$

2.3.5 坐标系变换的链乘法则

- ${}^{B}_{C}\boldsymbol{R}$、${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$ 和 ${}^{A}_{C}\boldsymbol{R}$ 的关系



$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}\hat{X}_C & \hat{Y}_C & \hat{Z}_C\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{pmatrix}{}^{B}_{C}\boldsymbol{R} \\ \begin{pmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{pmatrix}{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\hat{X}_C & \hat{Y}_C & \hat{Z}_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{pmatrix}{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}_{C}\boldsymbol{R}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{X}_C & \hat{Y}_C & \hat{Z}_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{pmatrix}{}^{A}_{C}\boldsymbol{R} \Longrightarrow {}^{A}_{C}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}_{C}\boldsymbol{R}$$

对于n个坐标系$\{1\},\{2\},\cdots,\{n\}$，它们的相对姿态有链乘法则

$${}^{1}_{n}\boldsymbol{R} = {}^{1}_{2}\boldsymbol{R}\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{R}\cdots{}^{n-1}_{\ \ n}\boldsymbol{R}$$

- ${}^{B}_{C}\boldsymbol{T}$ 、${}^{A}_{B}\boldsymbol{T}$ 和 ${}^{A}_{C}\boldsymbol{T}$ 的关系

$$
{}^{B}_{C}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} {}^{B}_{C}\boldsymbol{R} & {}^{B}\boldsymbol{O}_C \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{pmatrix}\qquad
{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{O}_B \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{pmatrix}\qquad
{}^{A}_{C}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} {}^{A}_{C}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{O}_C \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\,{}^{B}_{C}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{O}_B \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^{B}_{C}\boldsymbol{R} & {}^{B}\boldsymbol{O}_C \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}_{C}\boldsymbol{R}={}^{A}_{C}\boldsymbol{R}
$$

$$
=\begin{pmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}_{C}\boldsymbol{R} & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{O}_C+{}^{A}\boldsymbol{O}_B \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{A}\boldsymbol{P}={}^{A}\boldsymbol{O}_B+{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{P}
$$

$$
=\begin{pmatrix} {}^{A}_{C}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{O}_C \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{A}_{C}\boldsymbol{T}
$$

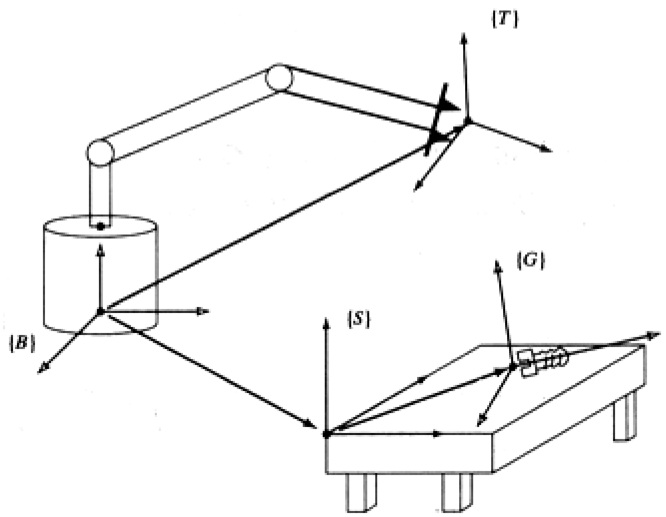
$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{T}\,{}^{B}_{C}\boldsymbol{T}={}^{A}_{C}\boldsymbol{T}
$$

对于n个坐标系{1},{2},⋯,{n}，它们的相对位姿有链乘法则

$$
{}^{1}_{n}\boldsymbol{T}={}^{1}_{2}\boldsymbol{T}\,{}^{2}_{3}\boldsymbol{T}\cdots{}^{n-1}_{\ n}\boldsymbol{T}
$$

2.3 两个坐标系的几何关系

- 例：已知操作臂指端的坐标系$\{T\}$相对于操作臂基座$\{B\}$的位姿${}^B_T\boldsymbol{T}$，又已知工作台坐标系$\{S\}$相对操作臂基座$\{B\}$的位置姿态${}^B_S\boldsymbol{T}$，并且已知工作台上螺栓的坐标系$\{G\}$相对工作台坐标系的位姿${}^S_G\boldsymbol{T}$，求螺栓相对操作手的位姿即${}^T_G\boldsymbol{T}$



$${}^B_T\boldsymbol{T} = {}^B_S\boldsymbol{T}\,{}^S_G\boldsymbol{T}\,{}^G_T\boldsymbol{T} \quad \Rightarrow \quad {}^T_G\boldsymbol{T} = {}^B_T\boldsymbol{T}^{-1}\,{}^B_S\boldsymbol{T}\,{}^S_G\boldsymbol{T}$$

- 或者，从图上可以直接运用链乘法则得到${}^T_GT = {}^T_BT\,{}^B_ST\,{}^S_GT$
- ${}^B_ST$和${}^S_GT$已知，${}^T_BT = {}^B_TT^{-1}$

Thanks !