第三章 离散信号的分析

浙江大学　电气工程学院

杨欢

yanghuan@zju.edu.cn

复习 连续信号的频域分析

时域（信号）	频域（频谱形式）	对应的傅里叶级数 / 变换
连续，周期 周期为 T_0	非周期，离散 离散间隔 $\omega_0=2\pi/T_0$ 连续傅里叶级数CFS	$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$ $X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$
抽样（离散化） 抽样间隔 T_s	重复（延拓）的频谱 重复周期 $\omega_s=2\pi/T_s$ 幅度乘以 $1/T_s$	时域无时限，频域有带限
连续，非周期 （**推广至一般周期信号的傅里叶变换**）	非周期，连续 连续傅里叶变换CTFT	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
重复（延拓）的信号 重复周期 $T_0=2\pi/\omega_0$ 幅度乘以 $1/\omega_0$	抽样（离散化） 抽样间隔 ω_0	时域有时限，频域无带限

第二节 离散信号的频域分析

- 离散周期信号的频谱分析 (DFS)
- 离散非周期信号的频谱分析 (DTFT)
- 离散傅立叶变换 (DFT) ----有限长序列的离散频谱表示
- 快速傅立叶变换 (FFT)

离散傅里叶级数变换

- 连续周期信号的傅立叶级数
- 从连续周期信号的傅立叶级数 (CFS) 到离散周期信号的傅立叶级数 (DFS)

连续周期信号的傅立叶级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$\omega:-\infty\rightarrow\infty$$

T_0：信号的周期　ω_0：信号的基波角频率

从 CFS 到 DFS

T：采样周期

$T_0=NT$（连续信号周期 T_0 对应 N 个采样点）

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}}$$

连续周期信号 $x(t)$ 离散化

$t=nT$

$$\Omega_0=\omega_0 T=\frac{2\pi}{T_0}\cdot T=\frac{2\pi}{NT}\cdot T=\frac{2\pi}{N}$$

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\boxed{e^{jk\Omega_0 n}} \xrightarrow{\text{DFS}} x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$x(n)$为周期信号

$$e^{j\Omega_0 n}=e^{j\Omega_0(n+N)}$$

$$=e^{j(\Omega_0\pm 2k\pi)n}$$

Ω_0：离散域的基本频率

$k\Omega_0$：k 次谐波的数字频率

离散域谐波分量数：$k=2\pi/\Omega_0=N$

$$\Omega:0\to 2\pi$$

离散傅立叶级数系数

$$X(k\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$\Omega_0 = \omega_0 T = \frac{2\pi}{N}$$

$dt \to T$ **T_0=NT** $\int_0^{T_0} \to \sum_{n=0}^{N-1}$

$$X(k\frac{\Omega_0}{T}) = \frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{NT}nT} \cdot T$$

DFS 系数

$$X((k+N)\Omega_0) = X(k\Omega_0)$$

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

周期性

离散傅立叶级数系数

比较

- **周期连续信号的傅立叶级数展开**

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}}$$

基频：$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$

- **周期离散序列的傅立叶级数展开**

$$\boxed{\tilde{x}_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_N(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 kn}}$$

基频：$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}$

只能取$\tilde{X}_N(k)$的$k=0$到$N-1$的N个独立谐波分量.

$$\tilde{X}_N(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_N(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega_0 n}$$

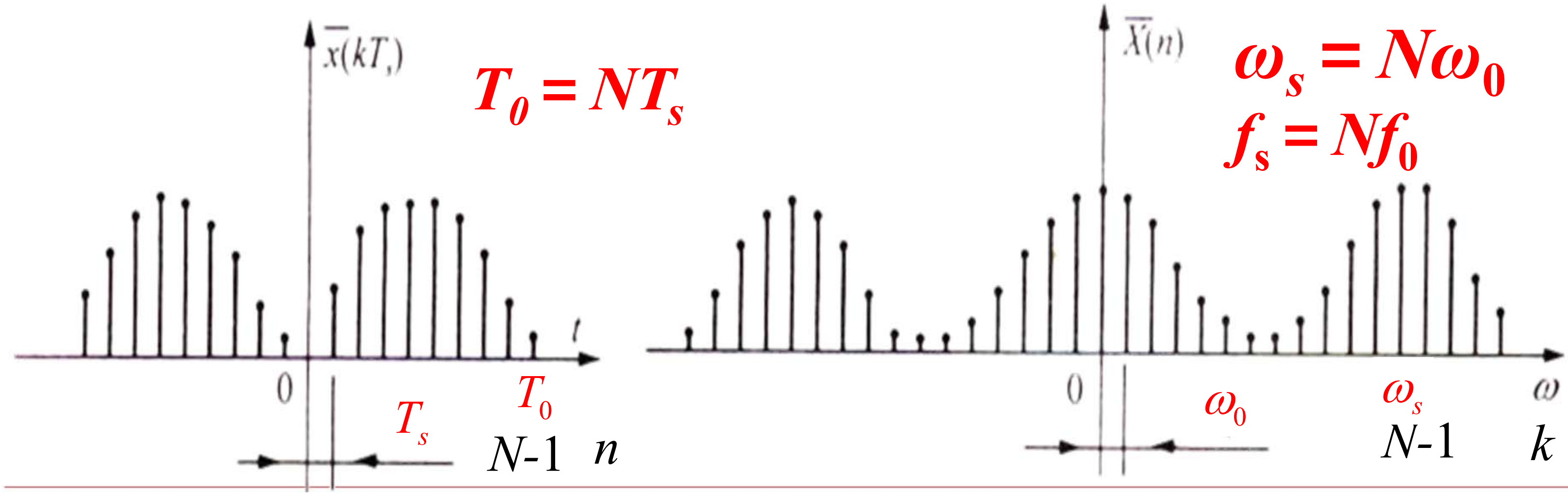
$$\tilde{x}_N(n) \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_N(k)$$

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_N(k\Omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega_0 n}$$

$$\tilde{x}_N(n) \xleftarrow[\text{IDFS}]{} \tilde{X}_N(k)$$

$\tilde{x}_N(n)$:周期为 N 的离散序列，由连续时间信号抽样得到。

$\tilde{X}_N(k\Omega_0)$:周期为 N 的离散序列。



离散傅立叶级数系数

例1： 已知正弦序列 $x(n)=\cos\Omega_0 n$，分别求出当 $\Omega_0=\sqrt{2}\pi$ 和 $\Omega_0=\pi/3$ 时，傅立叶级数表示式及相应的频谱。

解：连续正弦信号离散化后所形成的正弦序列只有在满足 $\Omega_0/2\pi=m/N=$ 有理数时，为周期正弦序列

$\Omega_0=\sqrt{2}\pi$ 时， $\Omega_0/2\pi=$ 无理数，该序列为非周期序列，不能展开为DFS，其频谱仅有 $\Omega=\Omega_0=\sqrt{2}\pi$，不含其他谐波分量。

$\Omega_0=\pi/3$ 时， $\Omega_0/2\pi=1/6=$ 有理数，为周期序列

N=6, 因此

$$x(n)=\cos\frac{\pi}{3}n=\cos\frac{2\pi}{6}n=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{6}n}+e^{-j\frac{2\pi}{6}n}\right)$$

$$X(k\Omega_0)=1/2 \qquad k=\pm1,\pm5$$

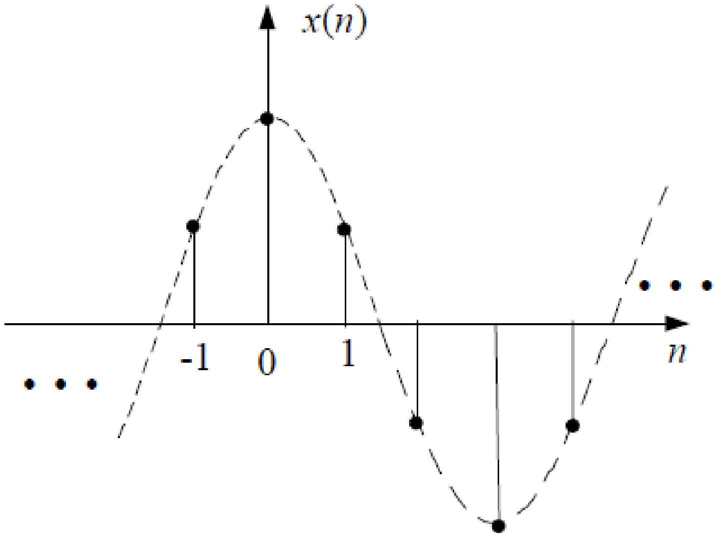
$$X(k\Omega_0)=0 \qquad k=0,\pm2,\pm3,\pm4$$

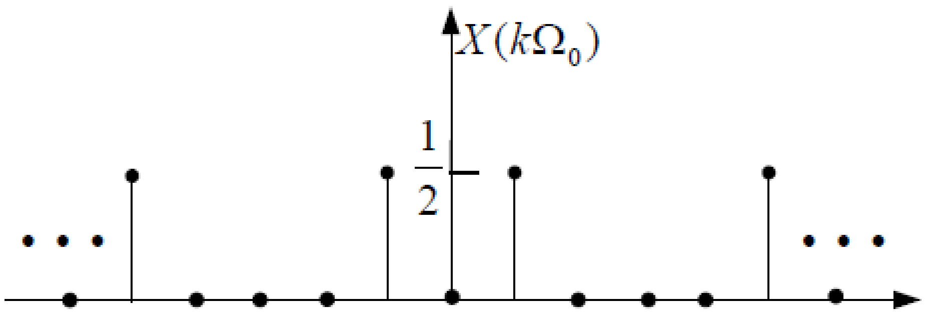
离散傅立叶级数系数

$$x(n)=\cos\frac{\pi}{3}n=\cos\frac{2\pi}{6}n=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{6}n}+e^{-j\frac{2\pi}{6}n}\right)$$

$$X(k\Omega_0)=1/2 \qquad k=1,5$$

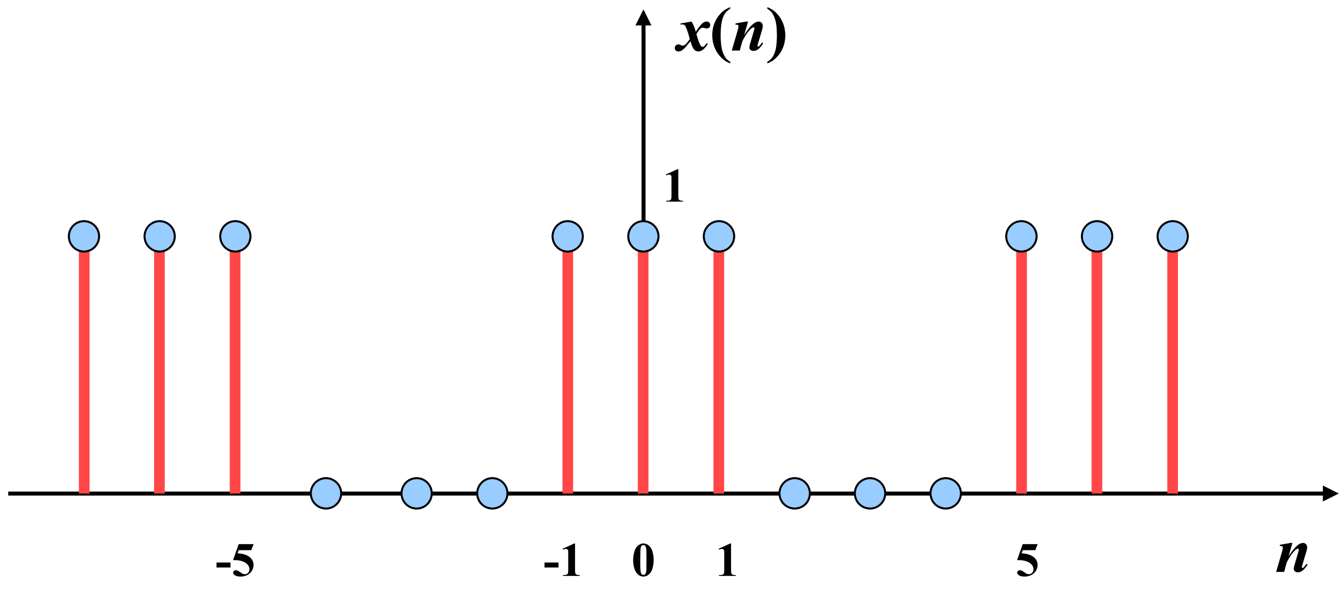
$$X(k\Omega_0)=0 \qquad k=0,2,3,4$$





离散傅立叶级数系数

例2：已知一周期序列 $x(n)$，周期 $N=6$,如下图所示，求该序列的频谱及时域表示式。



离散傅立叶级数系数

解：根据DFS的定义式求周期序列的频谱：

$$X(0)=1/2, X(\Omega_0)=1/3, X(2\Omega_0)=0$$
$$X(3\Omega_0)=-1/6, X(4\Omega_0)=0, X(5\Omega_0)=1/3$$

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{6}\left[x(0)+x(1)e^{-jk\frac{2\pi}{6}}+x(5)e^{-jk5\bullet\frac{2\pi}{6}}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[1+2\cos k(\frac{2\pi}{6})\right]$$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{5}X(k\Omega_0)e^{jk\frac{2\pi}{6}n}$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{6}n}+\frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{6}5n}-\frac{1}{6}e^{j\frac{2\pi}{6}3n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{3}n-\frac{1}{6}\cos n\pi$$

在时域以 N 为周期的序列；在频域也是以 N 为周期的序列

2、DFS的性质

- 线性性质
- 周期卷积定理
- 复共轭
- 位移性质
- 帕斯瓦尔定理

线性性质

- 设

$$\tilde{x}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N(k),\quad \tilde{y}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{Y}_N(k)$$

- 则

$$a\tilde{x}_N(n) + b\tilde{y}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} a\tilde{X}_N(k) + b\tilde{Y}_N(k)$$

周期卷积定理

设 $\tilde{x}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N(k)$，$\tilde{h}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{H}_N(k)$

则 $\tilde{x}_N(n) \circledast \tilde{h}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N(k)\tilde{H}_N(k)$

$$\tilde{x}_N(n)\tilde{h}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N}\tilde{X}_N(k) \circledast \tilde{H}_N(k)$$

- “$\circledast$”为周期卷积的符号，两序列的周期卷积定义为：

$$\tilde{x}_N(n) \circledast \tilde{h}_N(n) = \tilde{h}_N(n) \circledast \tilde{x}_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_N(k)\tilde{h}_N(n-k)$$

复共轭

- 设

$$\tilde{x}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N(k)$$

- 则

$$\tilde{x}_N^{\,*}(-n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N^{\,*}(k)$$

位移性质

- 若

$$\tilde{x}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N(k)$$

- 则

$$\tilde{x}_N(n-m) \xleftrightarrow{DFS} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega_0 m}\tilde{X}_N(k)$$

帕斯瓦尔定理

- 设

$$\tilde{x}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N(k),\quad \tilde{h}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{H}_N(k)$$

- 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N(n)\tilde{h}_N^{\,*}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_N(k)\tilde{H}_N^{\,*}(k)$$

离散周期信号的频谱

采样 $x(t) \rightarrow x(n)$

$$\downarrow \text{CFS} \qquad \downarrow \text{DFS}$$

$$X(k\omega_0) \Leftrightarrow X(k\Omega_0)$$

等效?

举三个例子

例1 连续周期信号 $x(t)$=6cosπt，现以采样间隔 T=0.25 秒对它进行采样，求采样后周期序列的频谱并与原始信号 $x(t)$ 的频谱进行比较。

解 已知 $\omega_0=\pi$，则 $f_0=\dfrac{1}{2}$，$T_0=2$，$\Omega_0=\dfrac{\pi}{4}$，在一周期内样点数 $N=T_0/T=8$

$$x(n)=x(t)\big|_{t=0.25n}=6\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right),$$

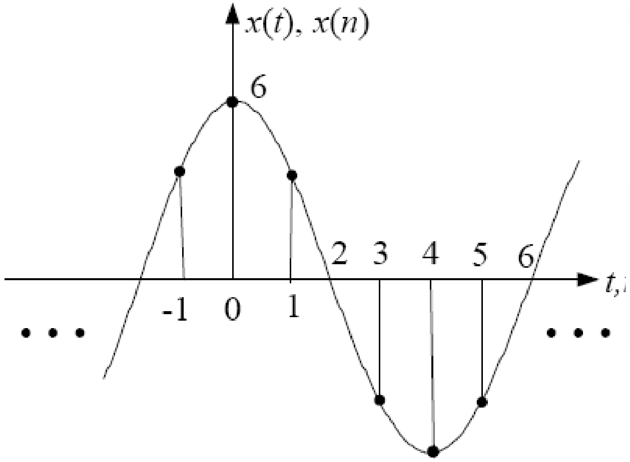
$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{4}n}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

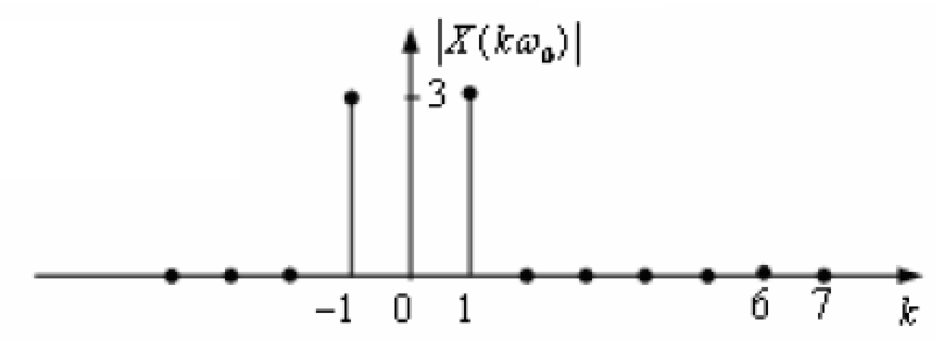
$$\left|X(k\Omega_0)\right|=\begin{cases}3 & k=\pm1,\pm7\\ 0 & k=0,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\end{cases}$$

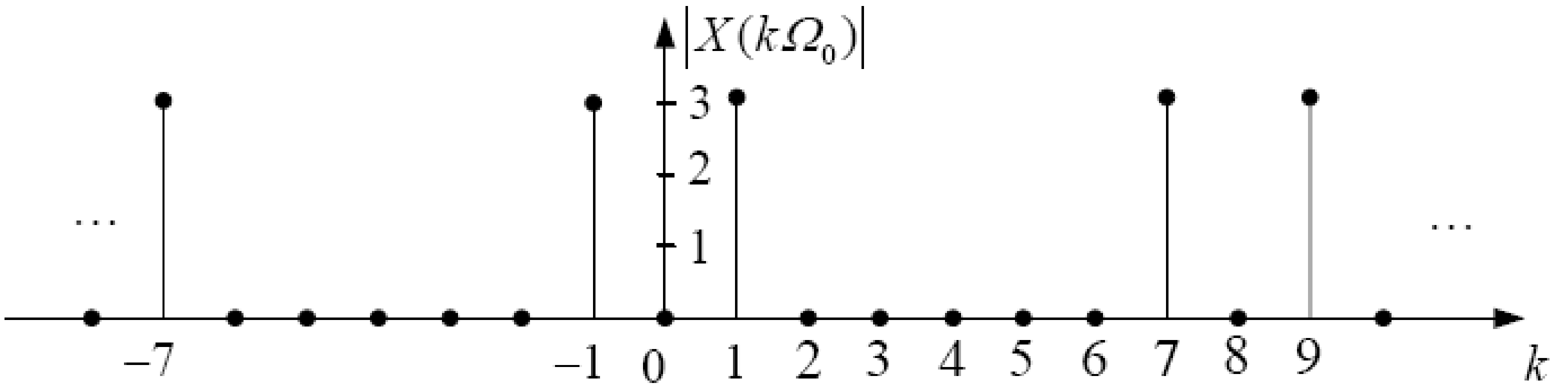
由于 $x(t)=6\cos\pi t=3\left(e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}\right)$，故得离散频谱为

$$X(k\omega_0)=\begin{cases}3 & k=1,-1\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

例1 连续周期信号 $x(t)=6\cos\pi t$，现以采样间隔 $T=0.25$ 秒对它进行采样，求采样后周期序列的频谱并与原始信号 $x(t)$ 的频谱进行比较。







例2-3 已知连续时间周期信号 $x(t)=2\cos 6\pi t+4\sin 10\pi t$，周期为 **1**，现以不同的采样频率 $(a)\ f_{s1}=16$ 样点/周期 $(b)\ f_{s2}=8$ 样点/周期，对它进行采样。试分别求出采样后周期序列的频谱并与原始信号的频谱作一比较。

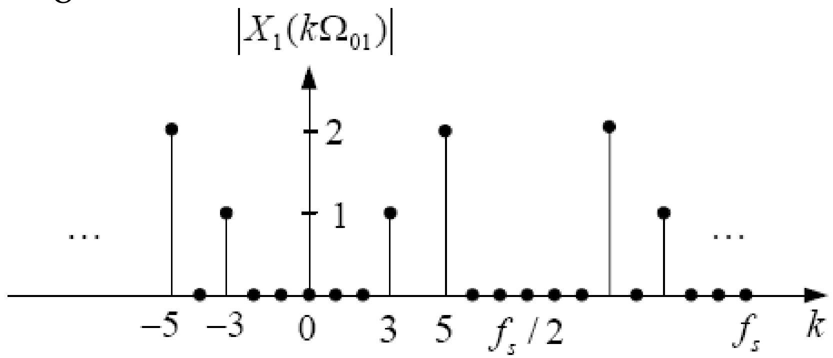
解 (a) 按 $f_{s1}=16$，$T_{s1}=1/16$，所以

$$x_1(n)=x(t)\big|_{t=nT_{s1}}=2\cos 6\pi\times\frac{1}{16}n+4\sin 10\pi\times\frac{1}{16}n$$

$$=2\cos\frac{3\pi}{8}n+4\sin\frac{5\pi}{8}n$$

$x_1(n)$ 的周期 $N_1=16$，基本频率 $\Omega_{01}=\dfrac{\pi}{8}$，则

$$X_1(k\Omega_{01})=\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{15}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{8}n}$$



例2-3 已知连续时间周期信号 $x(t)=2\cos 6\pi t+4\sin 10\pi t$ ，周期为1，现以不同的采样频率 $(a)\ f_{s1}=16$ 样点 / 周期 $(b)\ f_{s2}=8$ 样点 / 周期，对它进行采样。试分别求出采样后周期序列的频谱并与原始信号的频谱作一比较。

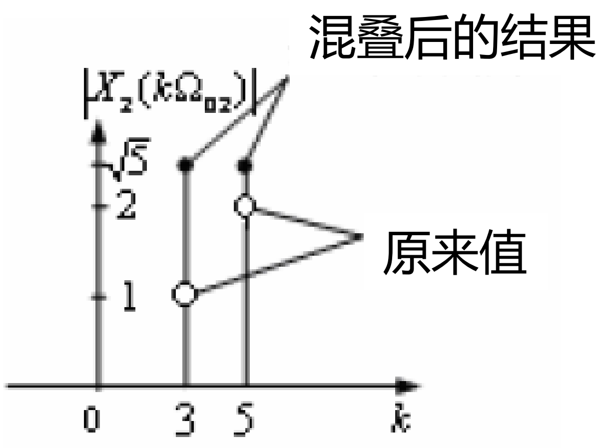
解 (b) 按 $f_{s2}=8,\ T_{s2}=1/8$, 所以

$$x_2(n)=x(t)\big|_{t=nT_{s2}}=2\cos 6\pi\times\frac{1}{8}n+4\sin 10\pi\times\frac{1}{8}n$$

$$=2\cos\frac{3\pi}{4}n+4\sin\frac{5\pi}{4}n=2\cos\frac{3\pi}{4}n-4\sin\frac{3\pi}{4}n$$

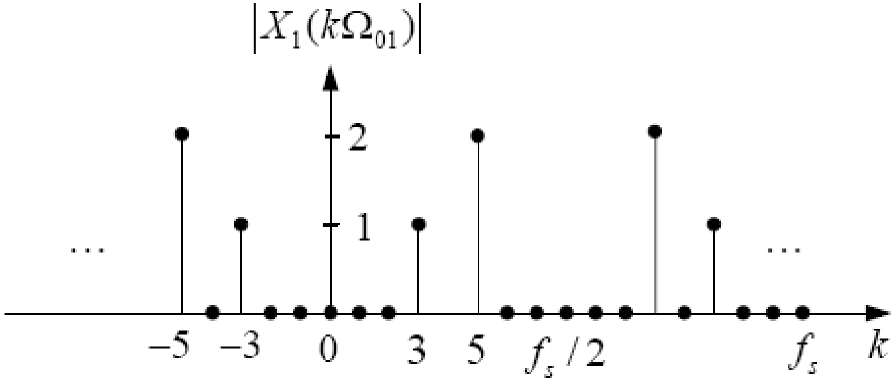
$x_2(n)$ 的周期 N_2=8，基本频率 $\Omega_{02}=\frac{\pi}{4}$，则

$$X_2(k\Omega_{02})=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

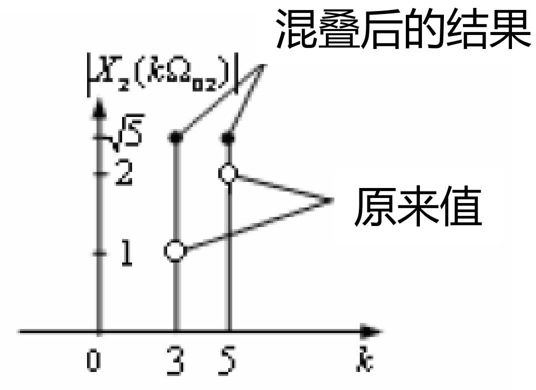


(b) f_{s2}=8 幅度频谱

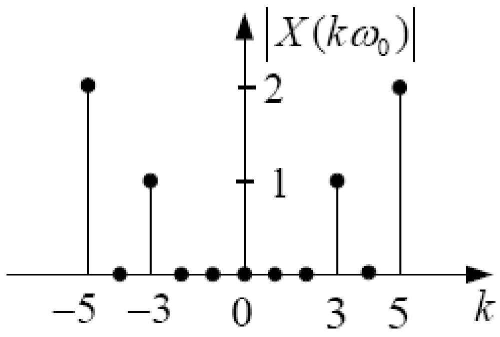
例2-3 已知连续时间周期信号 $x(t)=2\cos 6\pi t+4\sin 10\pi t$，周期为 **1**，现以不同的采样频率 $(a)\ f_{s1}=16$ 样点 / 周期 $(b)\ f_{s2}=8$ 样点 / 周期，对它进行采样。试分别求出采样后周期序列的频谱并与原始信号的频谱作一比较。



(a) f_{s1}=16 幅度频谱



(b) f_{s2}=8 幅度频谱



(c) 原始信号频谱

离散周期信号的频谱

通过以上分析，可以得出以下结论：

① 离散时间周期信号的频谱 $X(k\Omega_0)$ 是具有谐波性的周期序列，而连续时间周期信号的频谱 $X(k\omega_0)$ 是具有谐波性的非周期序列。$X(k\Omega_0)$ 可以看作是$X(k\omega_0)$的近似式，近似程度与采样周期 T 的选取有关。

② 在满足采样定理条件下，从一个连续时间、频带有限的周期信号得到的周期序列，其频谱在 $|\Omega|<\pi$ 或 $|f|<(f_s/2)$ 范围内等于原始信号的离散频谱。因此可以利用数值计算的方法，方便地截取一个周期的样点 $x(n)$，并按式 (3-25) 准确地求出连续周期信号的各谐波分量$X(k\omega_0)$。

③ 在不满足采样定理条件下，由于$X(k\Omega_0)$出现频谱混叠，这时就不能用$X(k\Omega_0)$准确地表示$X(k\omega_0)$。但在误差允许的前提下，可以用一个周期的$X(k\Omega_0)$近似地表示$X(k\omega_0)$，为了减小近似误差，应尽可能地提高采样频率。

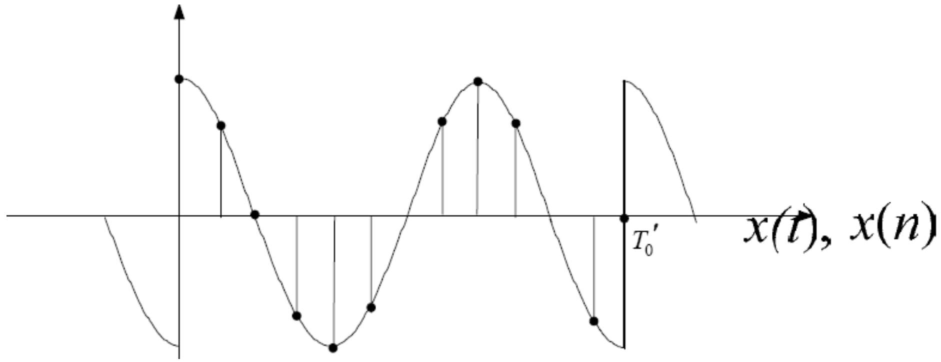
混叠

从时域采样定理知道，当采样频率 $\omega_s < 2\omega_m$ 情况下，由于出现频谱混叠现象而无法恢复原信号频谱，因而人们不能从时域样点准确地重建原连续信号。同理，在频域的采样间隔 $\omega_0 > \dfrac{\pi}{t_m}$ 情况下，由于出现信号波形混叠而无法恢复原频谱所对应的信号，因而人们不能从频域样点重建原连续频谱。

对那些具有无限频谱分量的连续时间周期信号（如矩形、三角形等脉冲串），必然无法准确地从有限样点求得原始周期信号的频谱，而只能通过恰当地提高采样率，增加样点数，来减少混叠对频谱分析所造成的影响。

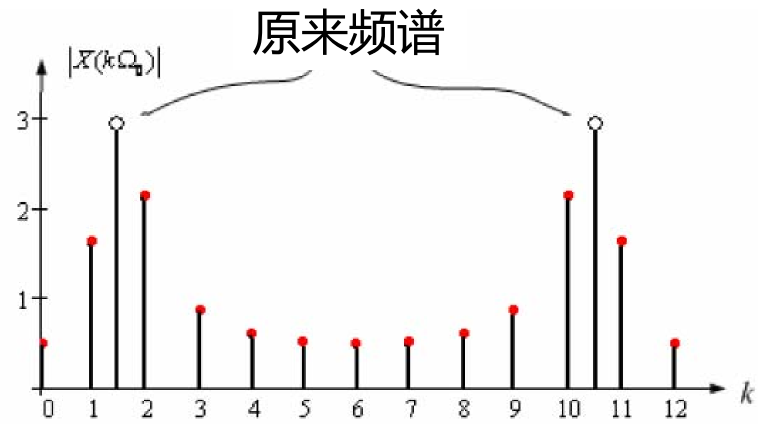
泄漏

离散时间周期信号除了因采样频率低于采样定理要求，使频谱分析出现混叠误差以外，还会由于截取波形的时间长度不恰当造成泄露误差。



连续时间信号 $x(t)=6\cos\pi t$

截取长度 $T_0=3$



谱线却分散在原连续信号谱线的附近

泄漏

- ➢ **这种从原来比较集中的谱线由于截取信号长度不当，出现了分散的扩展谱线的现象，称之为频谱泄漏或功率泄漏。**

- ✓ **为了减小泄漏误差，必须取自一个基本周期或基本周期的整倍数为宜。若待分析的周期信号事先不知道其确切的周期，则可截取较长时间长度的样点进行分析。当然，必须在采样频率满足采样定理的条件下进行，否则混叠与泄漏同时存在，给频谱分析造成更大的困难。**

二、非周期离散信号的频谱分析 (DTFT)

- DFS
- 离散时间傅立叶变换 DTFT
- DFS、DTFT 与 CFT 之间的关系
- DTFT的性质
- 信号的频谱特点

DFS

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

如果周期序列 $x(n)$ 的周期 N 趋于 ∞，则其频谱 $X(k\Omega_0)$ 将如何变化?

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

离散时间傅立叶变换 DTFT

- 非周期序列可看作为周期序列的周期 $N \to \infty$ 的极限情况
  - 极限情况下各谐波分量的复振幅 $X(k\Omega_0) \to 0$

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot X(k\Omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$N \to \infty, \Omega_0 = (2\pi / N) \to d\Omega, k\Omega_0 \to \Omega = \omega T$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = X(e^{j\Omega})$$

频谱（密度函数）

$x(n)$ 为有限长序列，若为无限长序列，须满足条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = S < \infty$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

DTFT 反变换

DFS：

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\Big\Downarrow \; \mathbf{N\to\infty}$$

$$x(n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(\Omega)e^{j\Omega n}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\Omega_0}{2\pi}\to\frac{d\Omega}{2\pi},\ \sum_{k=0}^{N-1}\to\int_0^{2\pi}$$

IDTFT

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$X(\Omega)$为数字频率的周期函数，周期为 2π

DTFT

DFS:

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \qquad X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega n}$$

DTFT

$$x(n)\underset{\text{IDTFT}}{\overset{\text{DTFT}}{\rightleftarrows}}X(\Omega)$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\mathrm{d}\Omega$$

例 $x(n)=a^n u(n) \quad |a|<1$

$$X(\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^n=\frac{1}{1-a\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$

连续的，周期的

问：$X(\Omega)$周期为2π吗？幅频特性$|X(\Omega)|$是偶函数吗？相频特性$\angle X(\Omega)$是奇函数吗？

DTFT

由于 $\boxed{X(\Omega+2\pi)=X(\Omega)}$，故 $X(\Omega)$ 是以 2π 为周期的周期函数。

当 $x(n)$ 为实数序列时

$$X(-\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}]^{*}=X^{*}(\Omega)$$

于是 $\boxed{|X(-\Omega)|=|X(\Omega)|}$ $\boxed{\varphi(\Omega)=-\varphi(-\Omega)}$ 即

实数序列的离散时间傅里叶变换的幅频特性是 Ω 的偶函数，相频特性是 Ω 的奇函数。

例3：求有限长序列 $x(n)$ 的频谱

$$x(n)=\begin{cases}0 & others\\ 1 & -2\le n\le 2\end{cases}$$

解：

$$X(\Omega)=\sum_{n=-2}^{2}e^{-j\Omega n}=\frac{\sin(2+1/2)\Omega}{\sin(\Omega/2)}$$

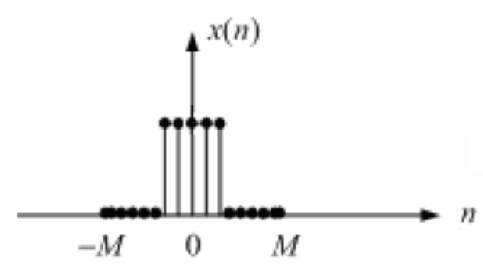
$$|X(\Omega)|=\left|\frac{\sin(2+1/2)\Omega}{\sin(\Omega/2)}\right|$$

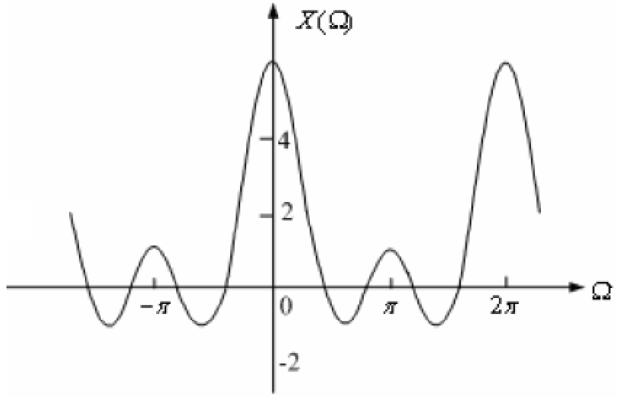
频谱为连续的

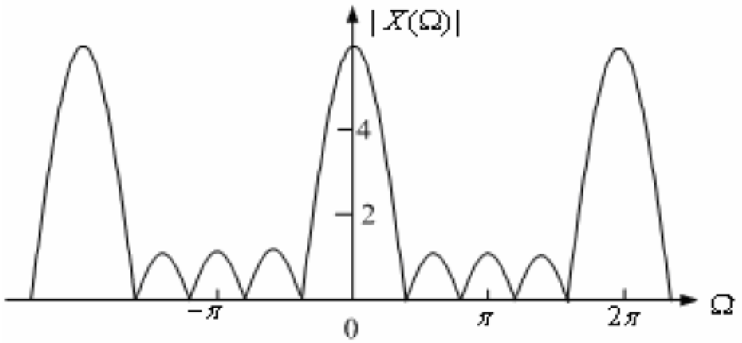
$$\varphi(\Omega)=\begin{cases}0 & X(\Omega)>0\\ \pm\pi & X(\Omega)<0\end{cases}$$

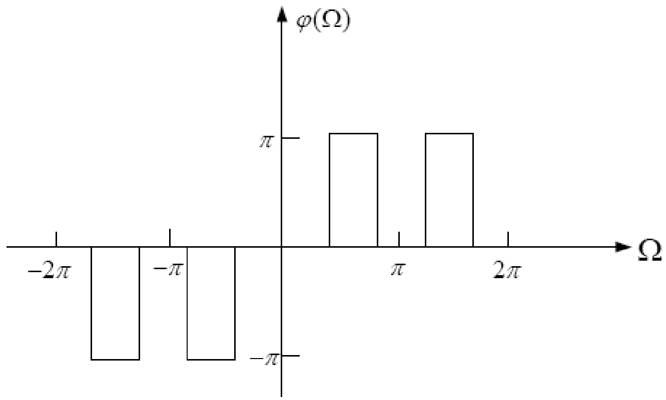
例3：求有限长序列 $x(n)$ 的频谱

$$x(n)=\begin{cases}0 & others\\ 1 & -2\le n\le 2\end{cases}$$

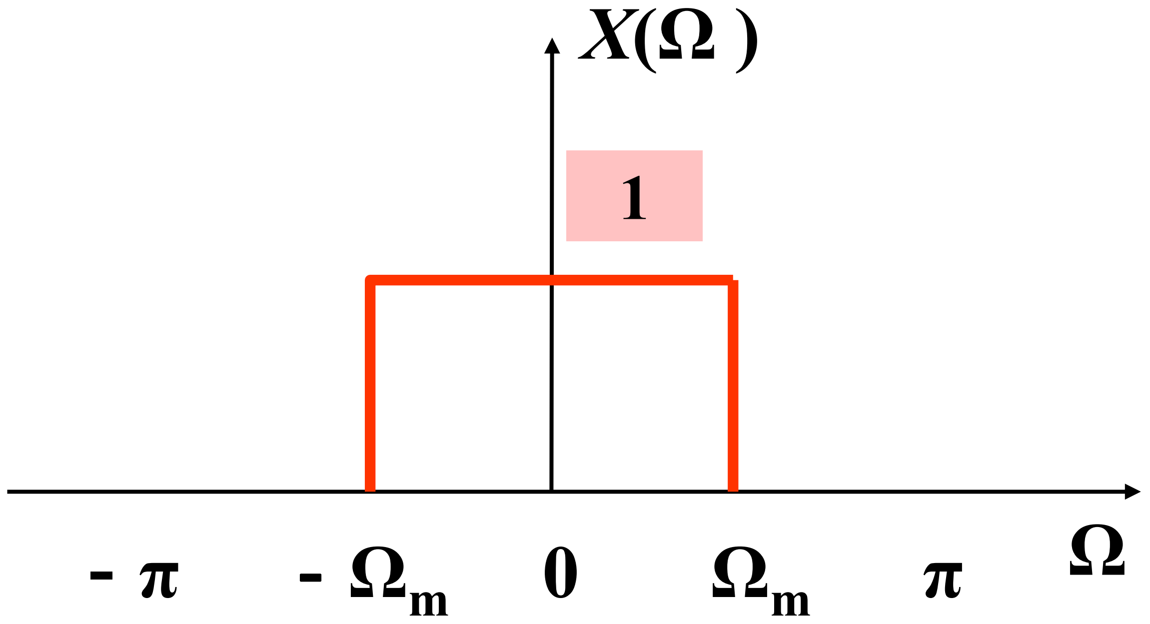








例4：已知一周期连续频谱如图所示，求其相应的序列



例4：已知一周期连续频谱如图所示，求其相应的序列

解：由 **DTFT** 定义式可知

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m}e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$=\frac{\Omega_m}{\pi}\frac{\sin n\Omega_m}{n\Omega_m}\qquad n\neq 0$$

当 $\boldsymbol{n=0}$，则有

$$x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m}d\Omega=\frac{\Omega_m}{\pi}$$

DTFT 的性质

线性	$ax(n)+by(n)$	$aX(\Omega)+bY(\Omega)$
位移	$x(n-n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
时间反向	$x(-n)$	$X(-\Omega)$
调制	$e^{j\Omega_0 n}x(n)$	$X(\Omega-\Omega_0)$
卷积	$x(n)*y(n)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(-\Omega)$
微分	$nx(n)$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
乘积	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\theta)Y(\Omega-\theta)d\theta$

例：假设 $y(n)$ 满足零初始条件且 $x(n)=\delta(n)$，求解下式线性常差分方程。

$$y(n)-0.25y(n-1)=x(n)-x(n-2)$$

解： 首先取差分方程中每项的 **DTFT**：

$$Y(\Omega)-0.25e^{-j\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega)-e^{-2j\Omega}X(\Omega)$$

因为 $\boldsymbol{x(n)}$ 的 **DTFT** 是 $\boldsymbol{X(\Omega)=1}$

$$Y(\Omega)=\frac{1-e^{-2j\Omega}}{1-0.25e^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-0.25e^{-j\Omega}}-\frac{e^{-2j\Omega}}{1-0.25e^{-j\Omega}}$$

- 利用**DTFT**对 $(0.25)^n u(n)\xleftrightarrow{DTFT}\dfrac{1}{1-0.25e^{-j\Omega}}$
- 利用线性和移位性质求得

$$y(n)=(0.25)^n u(n)-(0.25)^{n-2}u(n-2)$$

5、信号的频谱特征

- 连续时间信号的频谱是非周期的
- 离散时间信号的频谱是周期的
- 周期信号具有离散频谱
- 非周期信号具有连续频谱

傅立叶变换的离散性和周期性

- 时域周期性——频域离散性
- 时域离散性——频域周期性
- 时域非周期——频域连续性
- 时域连续性——频域非周期

第3次书面作业

- 第二版
- P155
  - 习题 2
  - 习题 4
- P156
  - 习题 10(2)
  - 习题 12

- 第三版
- P186
  - 习题 2
  - 习题 4
- P187
  - 习题 10(2)
  - 习题 11