第二章 连续信号的分析

浙江大学 电气工程学院

杨欢

yanghuan@zju.edu.cn

连续信号的时域描述和分析

- 时域描述
  - 普通信号的时域描述
  - 奇异信号的时域描述
- 时域运算
  - 基本运算
  - 叠加和相乘
  - 微分和积分
  - 卷积运算
- 信号分解
  - 分解成冲激函数之和
  - 正交分解

（一）时域描述

- **普通信号的时域描述**
  - 正弦信号
  - 指数信号
- **奇异信号的描述**
  - 单位斜坡信号
  - 单位阶跃信号
  - 单位冲激信号

基本信号

Building block

普通信号：正弦信号

- 欧拉公式

$$e^{j(\omega_0 t+\varphi)} = \cos(\omega_0 t+\varphi) + j\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

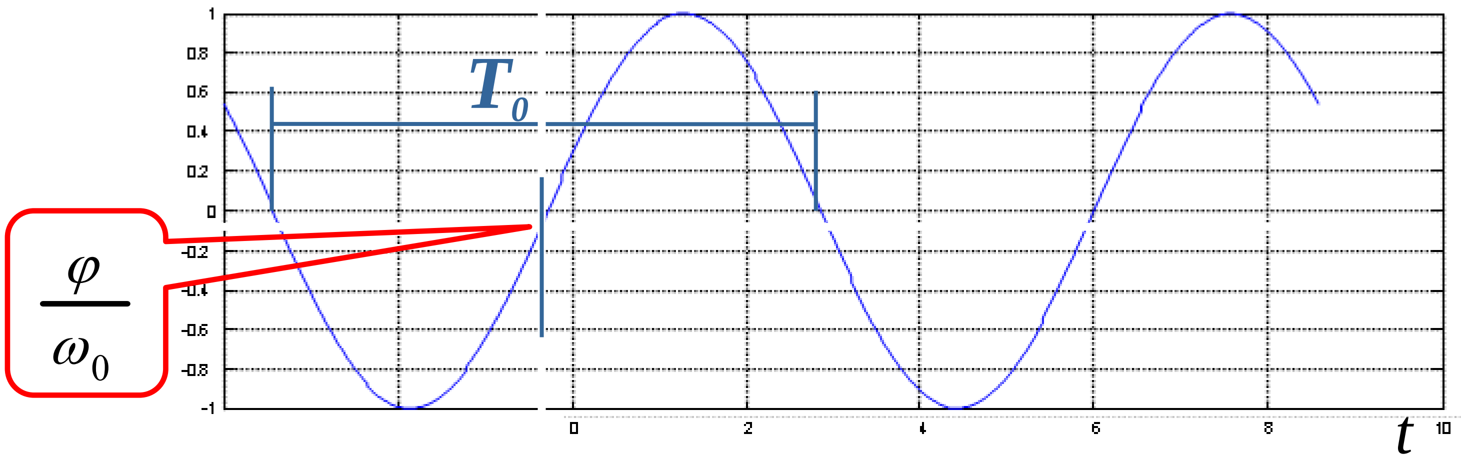
- 取虚部则为正弦信号

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

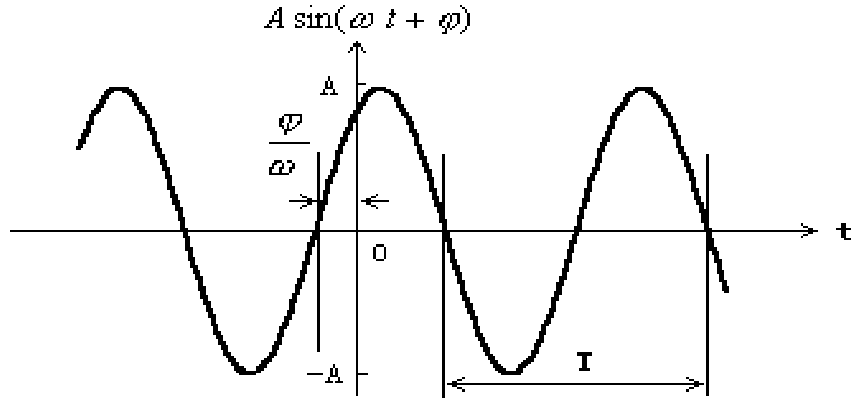
普通信号：正弦信号

- 波形：ω_0 为基波频率，φ 为初相位角

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$$

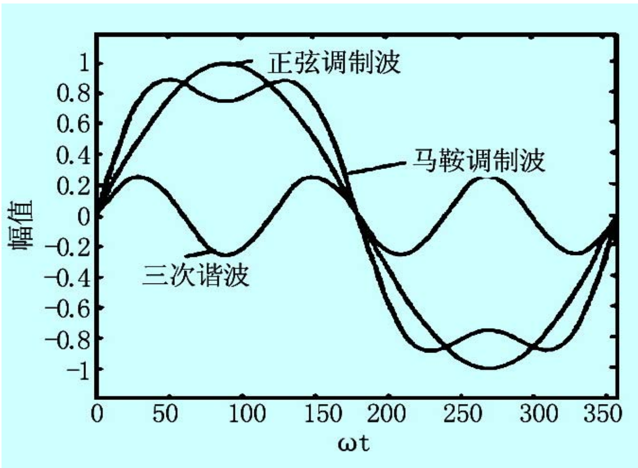


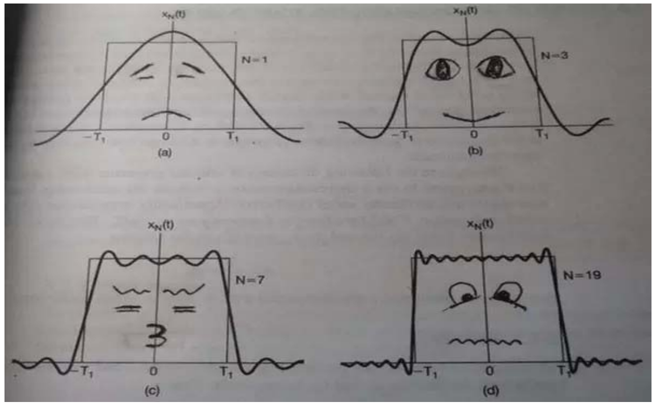
普通信号：正弦信号

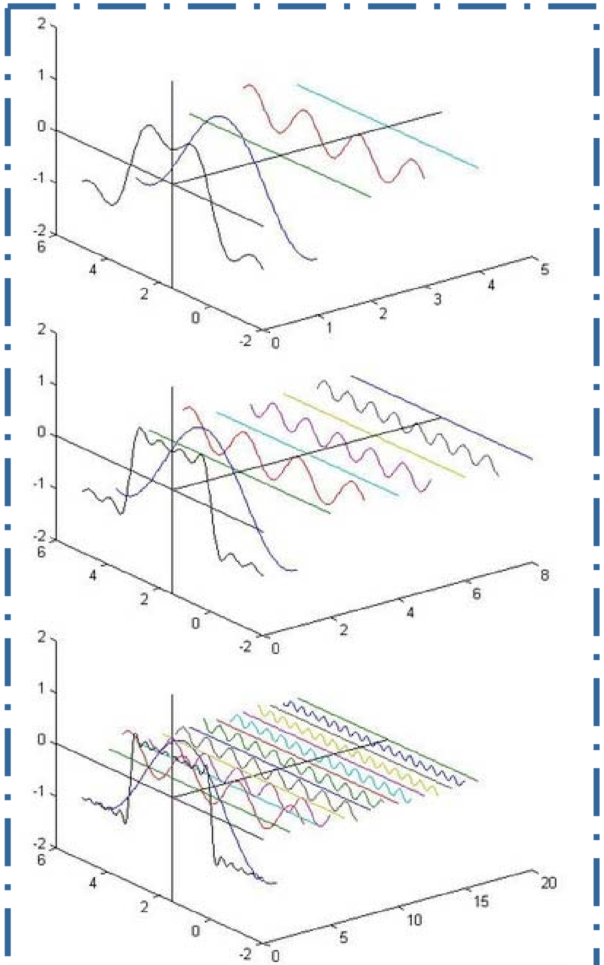


- 两个同频率正弦信号相加的结果仍然是原频率的正弦信号，与各自的振幅和初相位无关。
- 如果一个正弦信号的频率 f_1 是另一个正弦信号频率 f_0 的整数倍，即$f_1=nf_0$ （n为整数），则其合成信号是频率为 f_0 的非正弦周期信号。
- 正弦信号的微分和积分仍然是同频率的正弦信号。

普通信号：正弦信号


正弦调制波
马鞍调制波
三次谐波
幅值
ωt
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
50
100
150
200
250
300
350





普通信号：复指数信号

- 数学描述：

$$x(t) = Ae^{st}$$

- s 为复数

$$s = \sigma + j\omega$$

普通信号：复指数信号

- 若 $\sigma = 0, \omega = 0$

则 $x(t) = A$ 为直流信号。

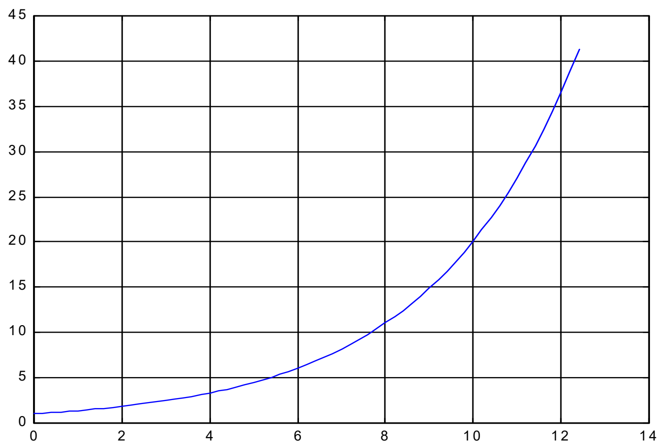
- 若 $\sigma \neq 0, \omega = 0$

则 $x(t) = Ae^{\sigma t}$ 为实指数信号。

普通信号：实指数信号

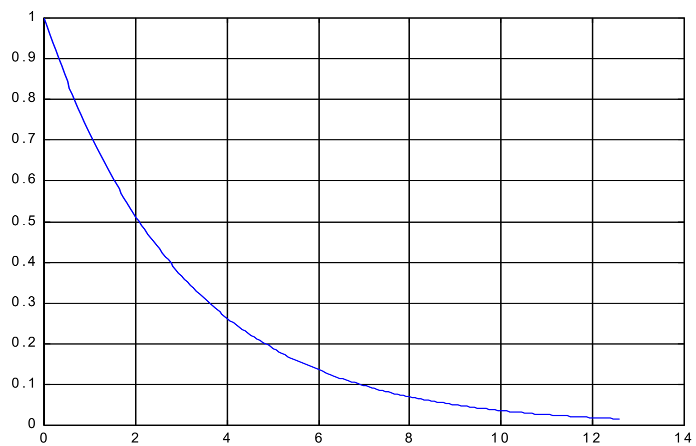
原子弹爆炸或化学链锁反应

- $\sigma > 0$
- $x(t)$随 t 的增加而指数增长



放射性物质的衰变，RC 电路或有阻尼的机械系统响应

- $\sigma < 0$
- $x(t)$随 t 的增加而指数衰减



普通信号：复指数信号

欧拉公式

$$x(t) = Ae^{st} = Ae^{\sigma t}e^{j\omega t}$$

$$= Ae^{\sigma t}\cos\omega t + jAe^{\sigma t}\sin\omega t$$

$$= \mathrm{Re}[x(t)] + j\,\mathrm{Im}[x(t)]$$

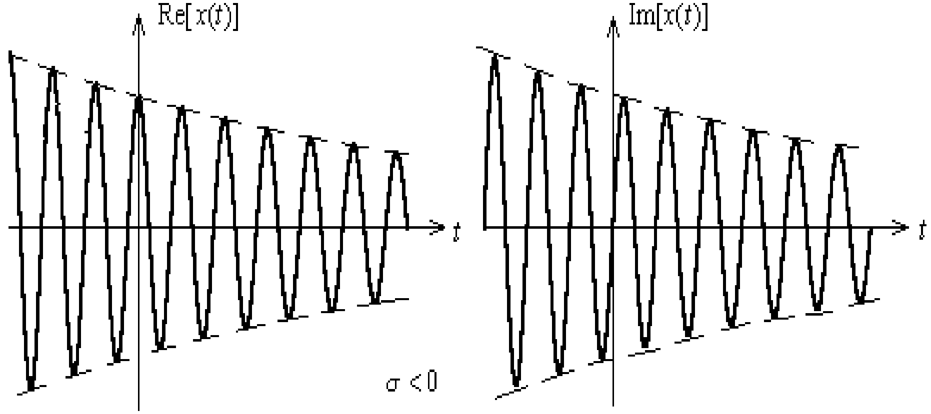
$$\mathrm{Re}[x(t)] = Ae^{\sigma t}\cos\omega t$$

$$\mathrm{Im}[x(t)] = Ae^{\sigma t}\sin\omega t$$

普通信号：复指数信号

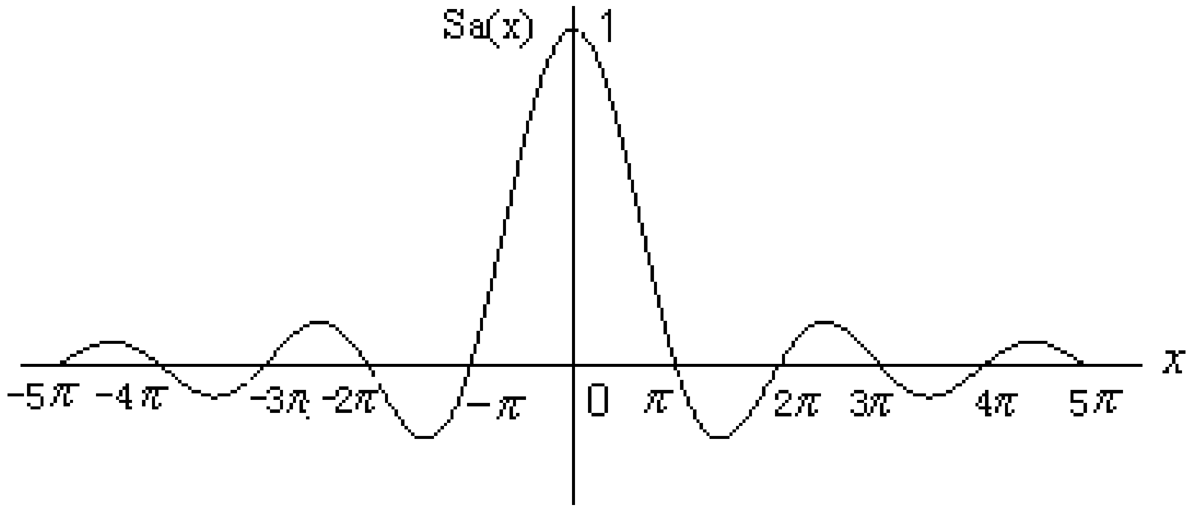
研究复指数信号的意义：

- 实部和虚部表示了**指数包络的正弦型振荡**，这本身具有一定的实际意义。
- 把直流信号、指数信号、正弦型信号以及具有包络线的正弦型信号表示为统一的形式，使信号的数学运算简练和方便。



普通信号：取样信号（辛格函数）

$$\boxed{Sa(x)=\frac{\sin x}{x}}$$



- 偶函数
- $x=0$时有最大值$Sa(x)=1$，随着$|x|$的增大总趋势逐渐减小。
- 当$x=\pm\pi, \pm 2\pi\ \pm 3\pi,\ldots$为过零点。

奇异信号

- **单位斜坡信号Ramp** $r(t)$
- **单位阶跃信号Unit step** $u(t)$
- **单位冲激信号** $\delta(t)$
- **单位冲激偶信号** $\delta'(t)$

本身、其导数
或其高阶导数
有不连续点的
函数

奇异信号：单位斜坡信号

- **（1）定义：**

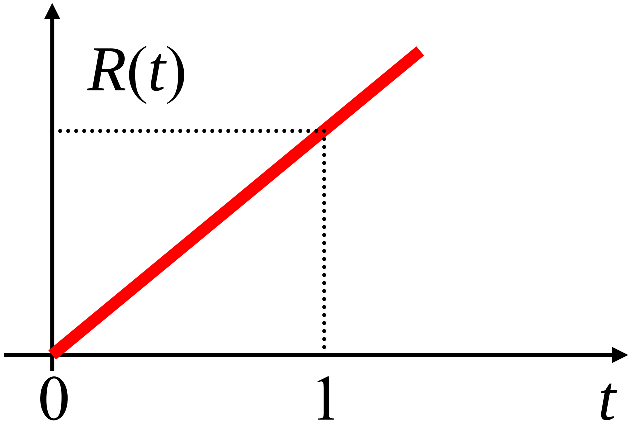
从某一时刻开始随时间正比例增长的信号，其增长变化率为1。

- **（2）数学描述：**

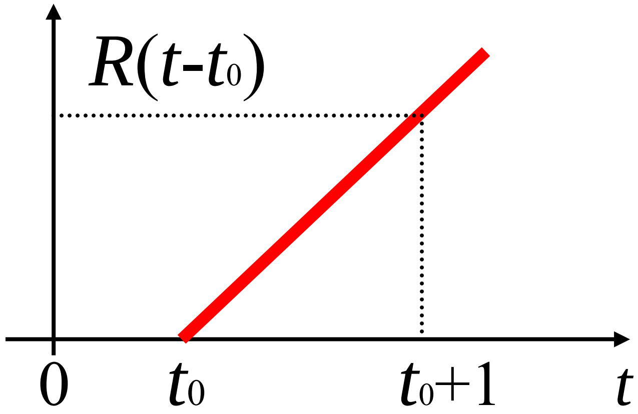
$$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

奇异信号：单位斜坡信号

➲ （3）波形图：



单位斜坡信号



延迟的单位斜坡信号

奇异信号：单位阶跃信号

- （1）**数学描述：**

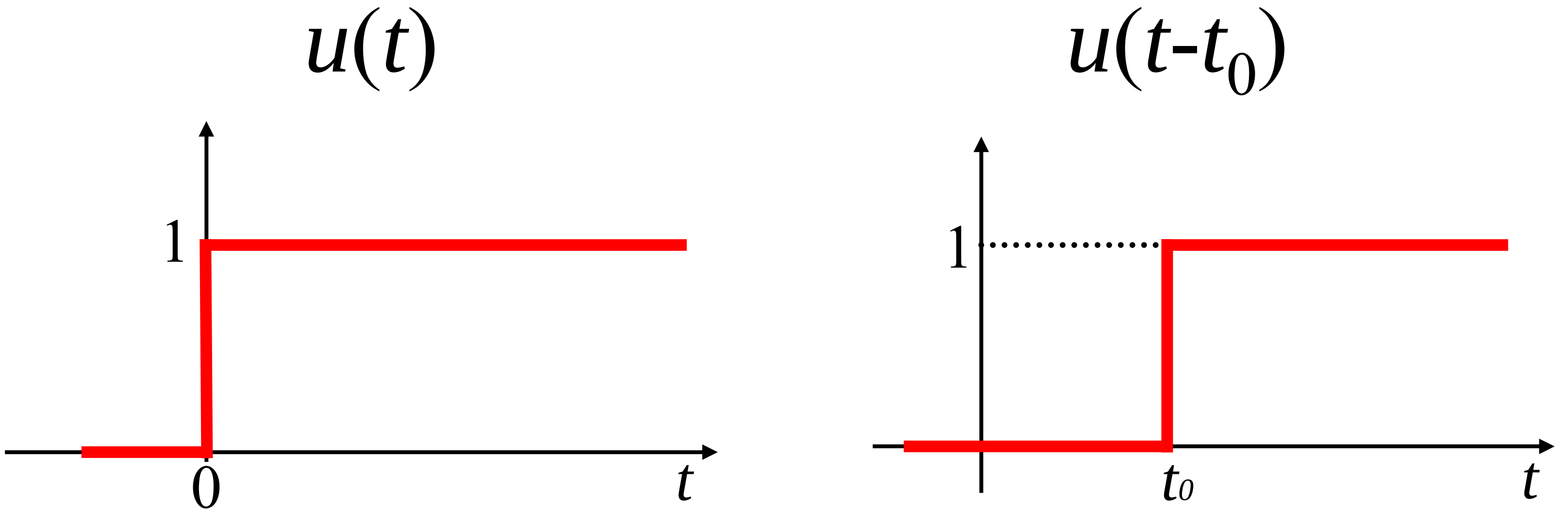
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- （2）**物理意义：**

在 $t = 0$ 时刻对某一电路接入单位电源（可以是直流电压源，也可以是直流电流源），并且无限持续下去。

奇异信号：单位阶跃信号

➲ （3）波形图

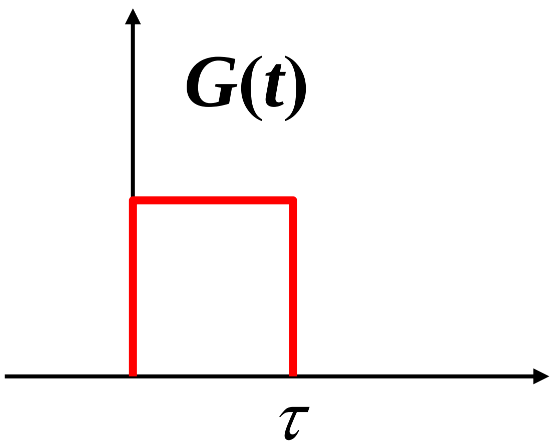


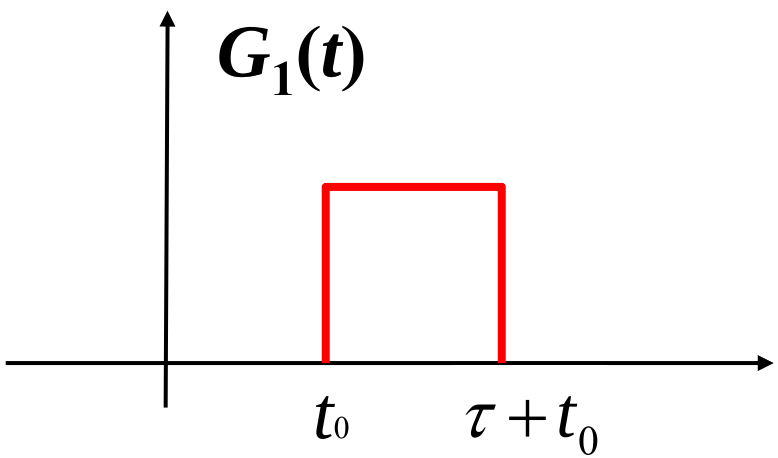
奇异信号：单位阶跃信号

用阶跃信号表示**矩形脉冲**信号（**门函数**）

➲ **$u(t)$ 与延迟阶跃信号 $u(t\text{-}t_0)$**

$$G(t)=u(t)-u(t-\tau) \qquad G_1(t)=u(t-t_0)-u(t-t_0-\tau)$$





奇异信号：单位阶跃信号

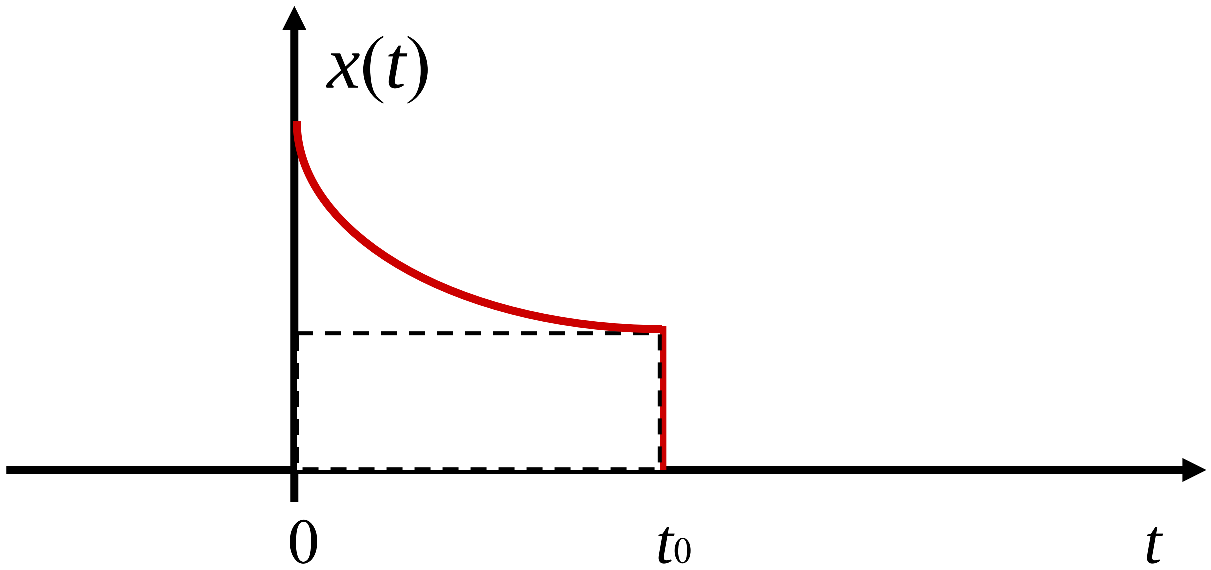
- （4）**单边特性：**

信号在某接入时刻以前的幅度为0。可以利用单边特性，用数学表达式描述各种信号的**接入特性**。

奇异信号：单位阶跃信号

信号加窗或取单边

$$x(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-t_0)]$$



奇异信号：单位冲激信号

- **（1）定义：**

　　持续时间无穷小，瞬间幅度无穷大，涵盖面积（强度）恒为1的一种理想信号。

- **（2）数学描述：**狄拉克定义

$$
\left.\begin{array}{l}
\delta(t)=0 \quad t\neq 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1
\end{array}\right\}
$$

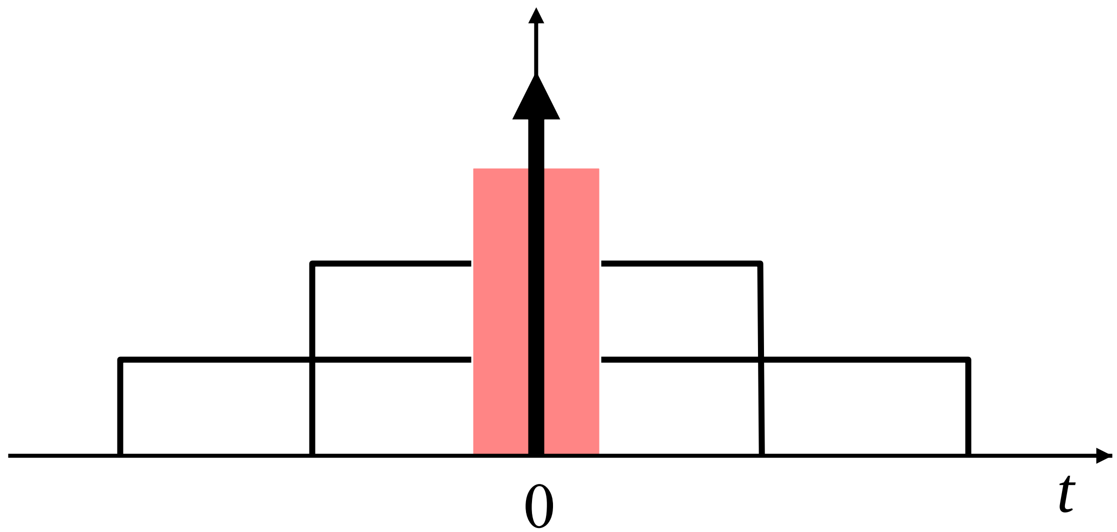
- **（3）物理背景：**

　　某些物理现象需要用一个时间极短，但取值极大的函数模型来描述，如：力学中瞬间作用的冲激力，电学中的雷击电闪，通信中的抽样脉冲等。

奇异信号：单位冲激信号

- **矩形脉冲演变成冲激信号：**矩形面积不变，宽趋于0时的（广义）极限

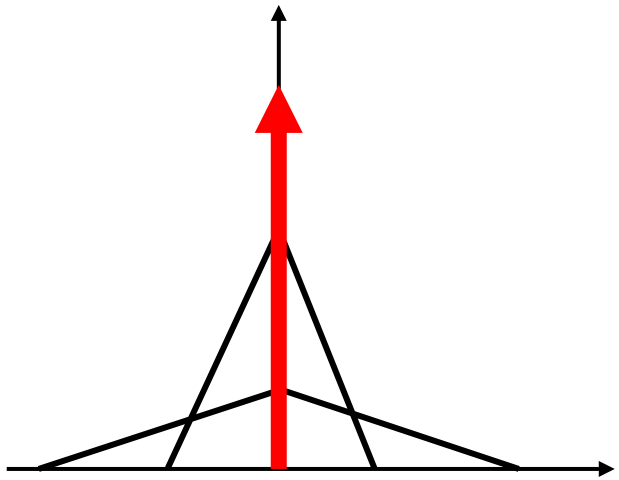
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$



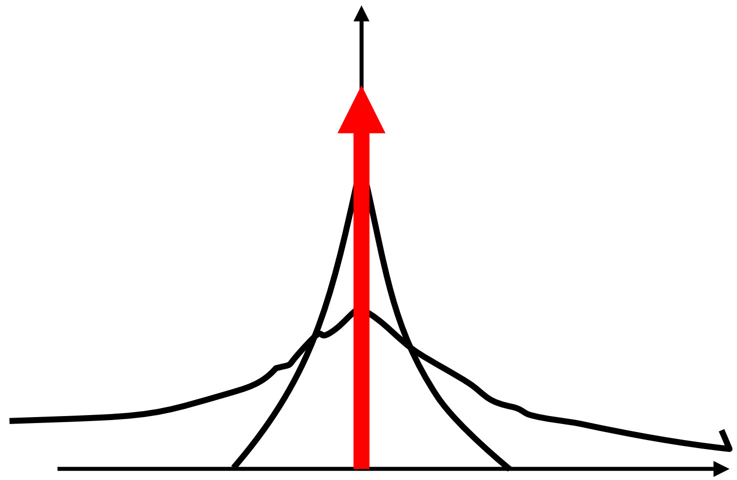
奇异信号：单位冲激信号

其它函数演变的冲激脉冲

- **三角脉冲的极限**



- **双边指数脉冲的极限**

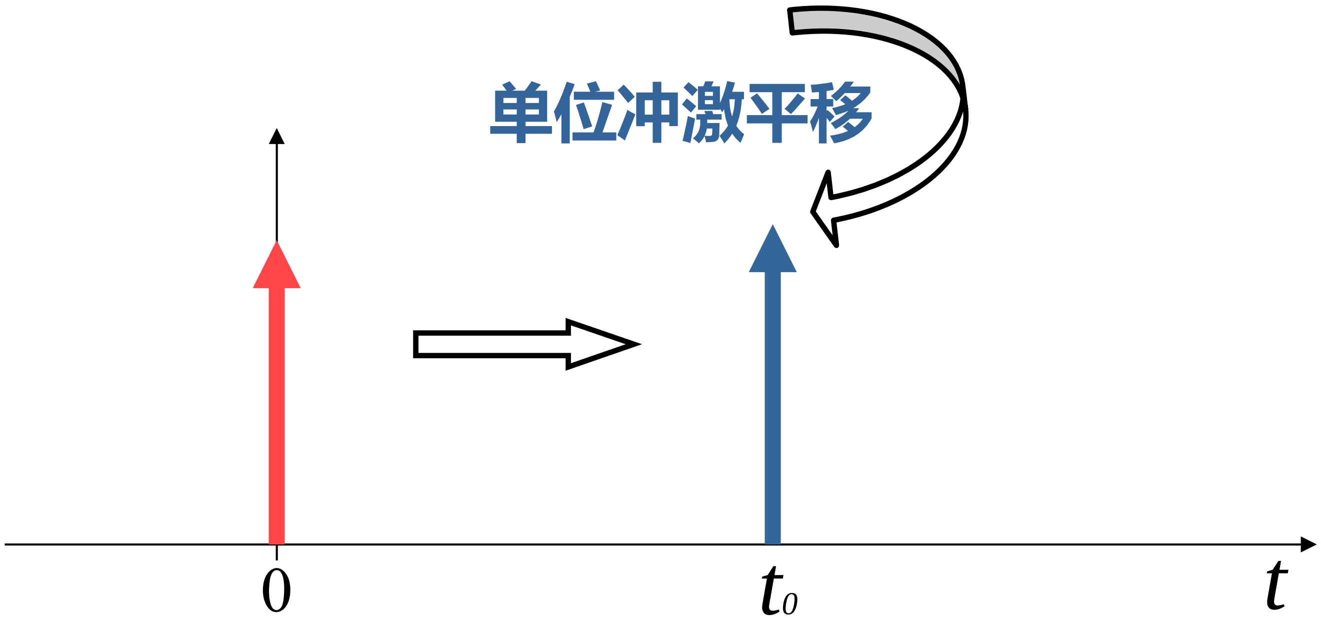


$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}(1-\frac{|t|}{\tau})\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right]\right\}$$

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}\right]$$

奇异信号：单位冲激信号

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \\ \delta(t-t_0) = 0 \qquad t \neq t_0 \end{cases}$$



奇异信号：单位冲激信号

冲激信号的性质

- **偶函数** $$\delta(t)=\delta(-t)$$

- **积分** $$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)\qquad \frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$

- **筛选** $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)x(t)dt=$$
$$=\int x(t_0)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

奇异信号：单位冲激信号

冲激信号的性质

➲ **偶函数** $\delta(t)=\delta(-t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} x(t)\delta(t)dt = x(0)\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = x(0)$$

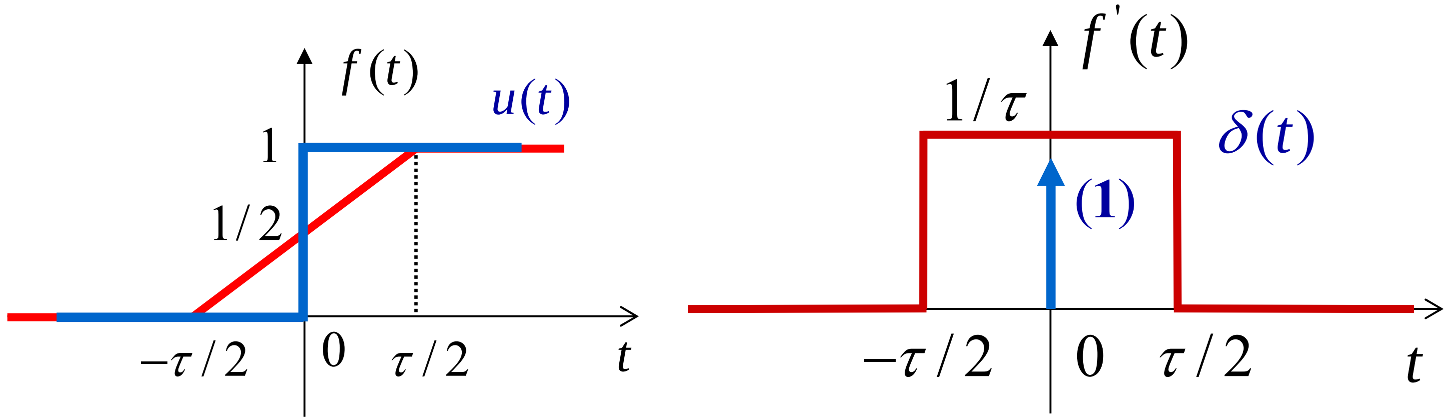
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(-t)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} x(-\tau)\delta(\tau)d(-\tau)$$

t 与-τ变量互换

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{0-}^{0+} x(-\tau)\delta(\tau)d\tau = x(0)\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = x(0)$$

奇异信号：单位冲激信号

➲ 冲激信号和阶跃信号的关系



$$\boxed{\delta(t)=u'(t)}$$

$$\boxed{u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0-}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

奇异信号：单位冲激信号

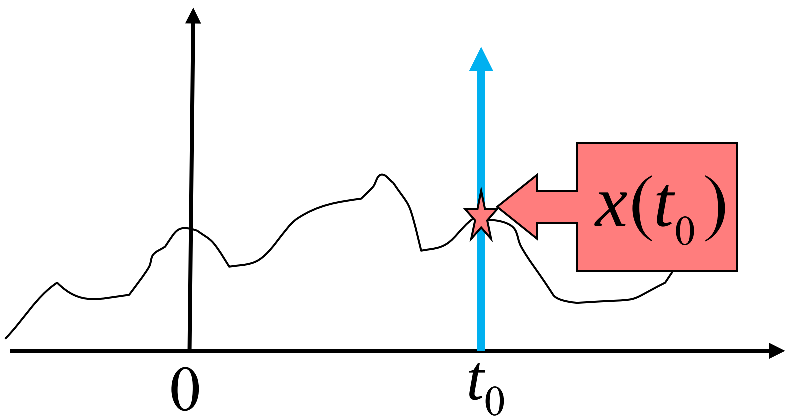
冲激信号的性质 – 筛选特性

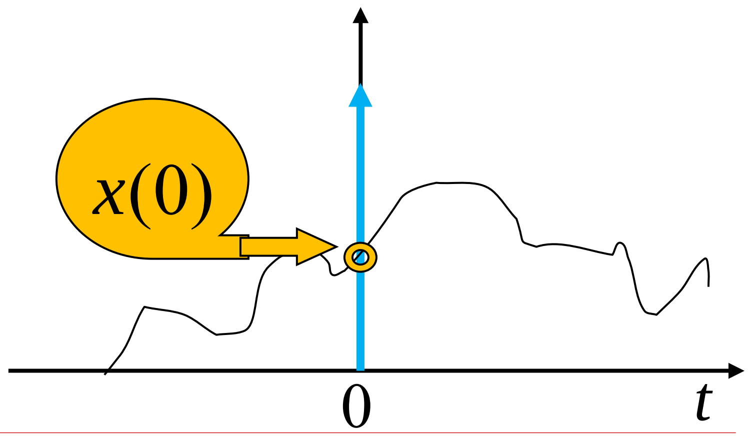
如果单位冲激信号与一个在 t=0 处连续、且处处有界的信号 $x(t)$ 相乘并在区间内积分，结果为 $x(0)$，其余各点均为零。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)x(t)dt =$$

$$= \int x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)x(t)dt = x(0)$$

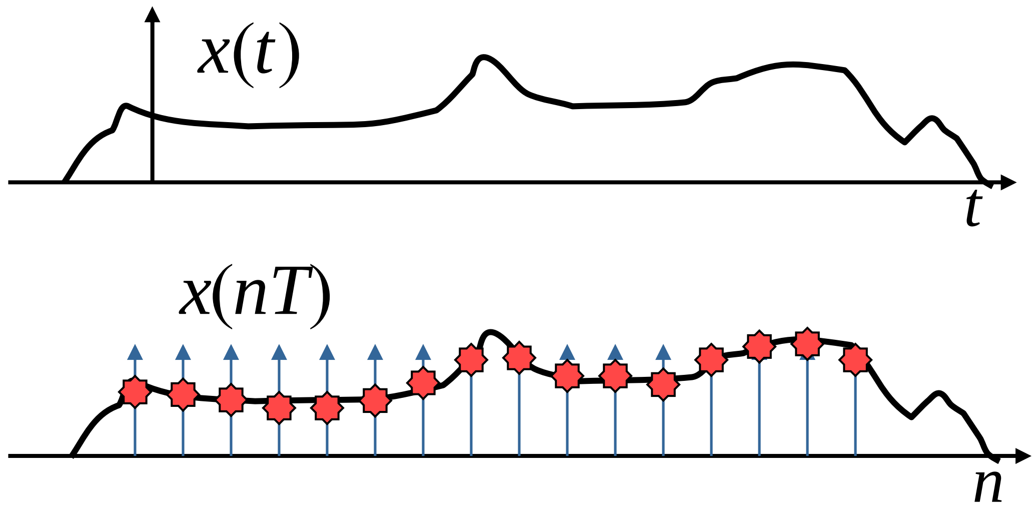




奇异信号：单位冲激信号

冲激序列对连续信号采样

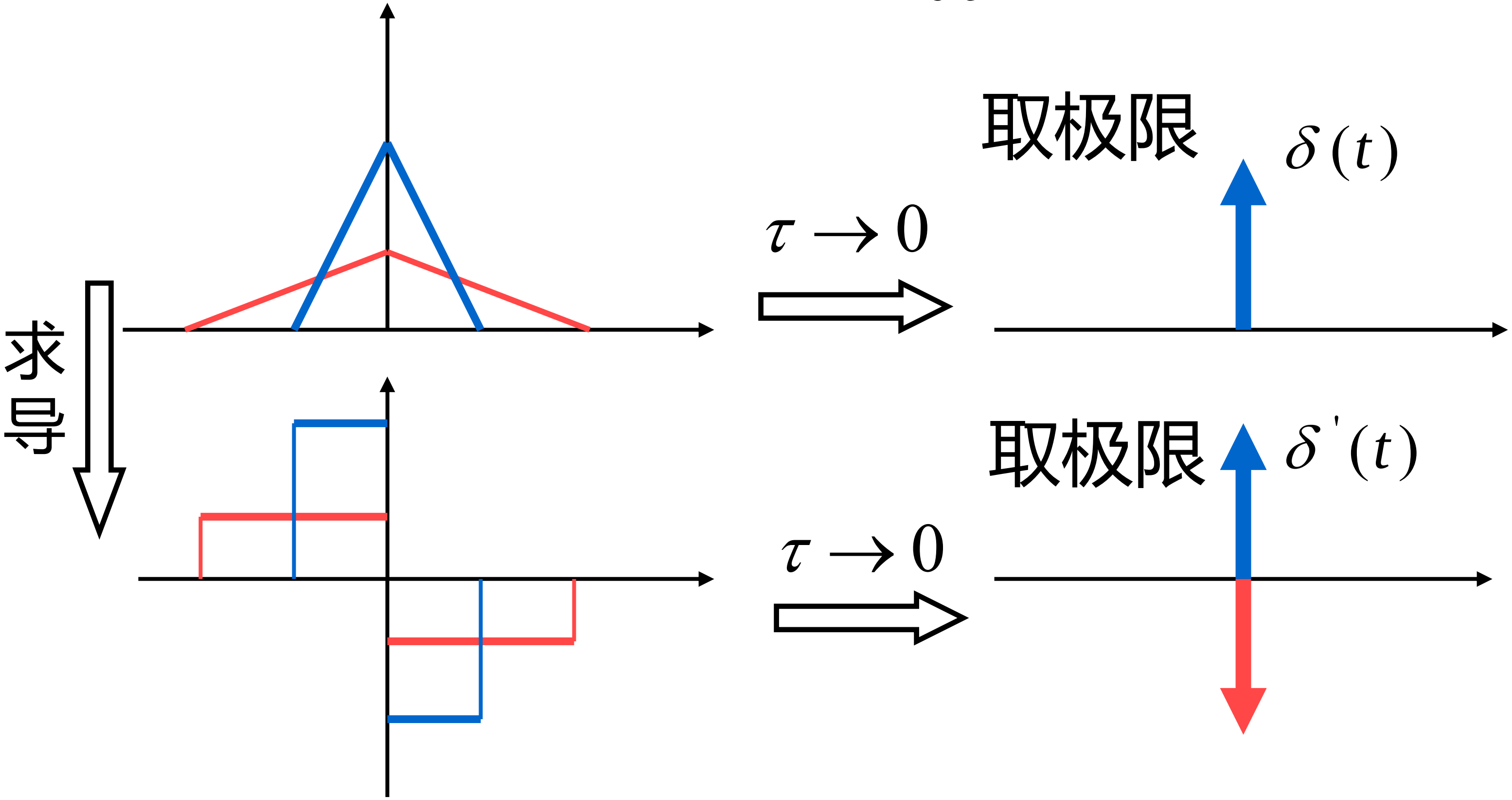
$$x(nT) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



奇异信号：冲激偶信号

冲激偶信号

$$\delta'(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$$



奇异信号：单位冲激信号

冲激偶的性质

- 面积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\,dt = 0$$

- "筛选"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)x(t)\,dt = -x'(0)$$

- 奇函数

（二）时域计算

- **基本运算**
- 叠加和相乘
- 微分和积分
- 卷积运算

基本运算 - 尺度变换

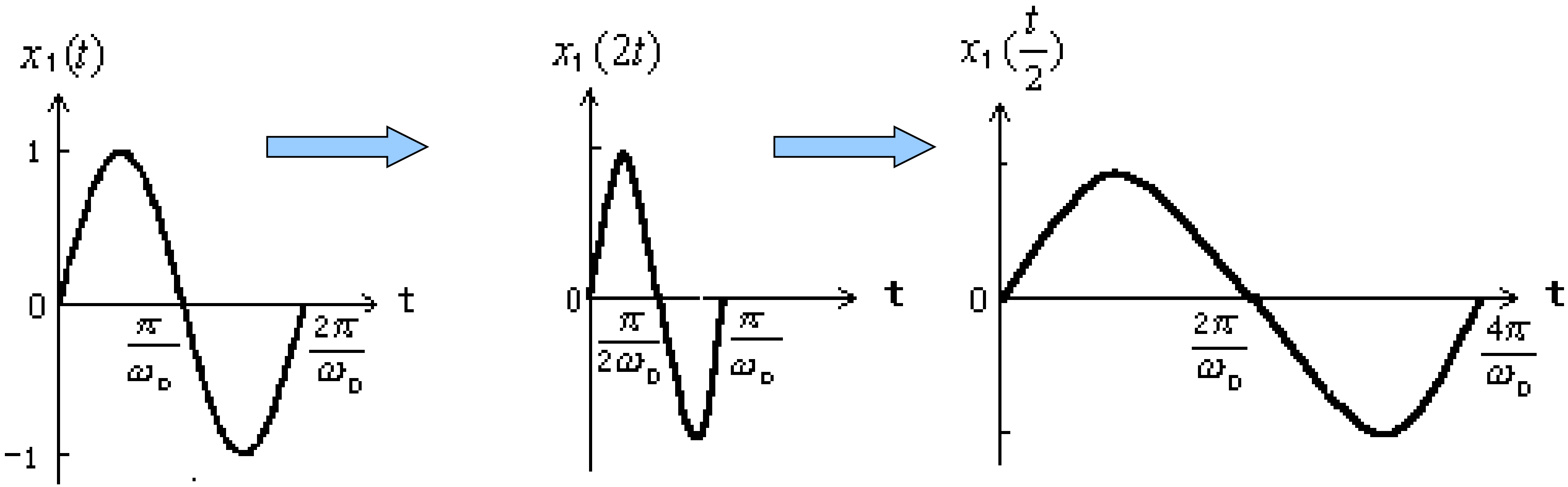
- **幅度尺度变换**

  表示对原信号的放大或缩小，如语音信号的大小。一般来说，不改变信号的特征。

- **时间尺度变换**

  表现为信号横坐标尺寸的展宽或压缩，通常横坐标的展缩可以用变量 at（a为大于零的常数）替代原信号的自变量 t 来实现。一般来说，改变了信号的基本特征——信号的频谱发生改变。

时间尺度变换

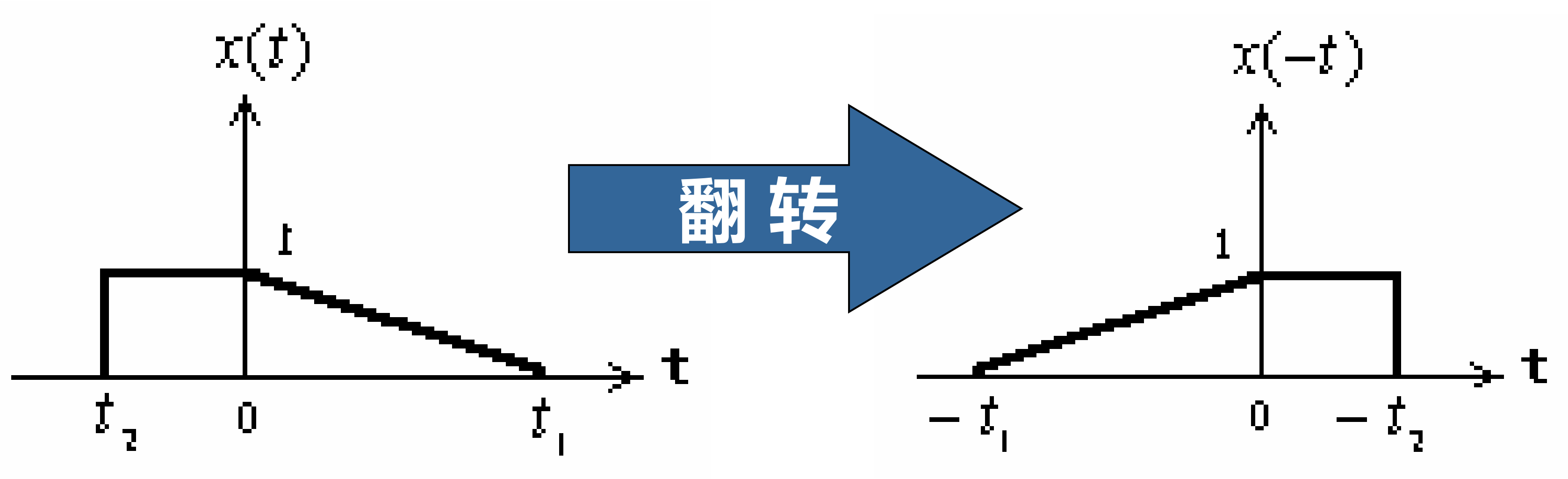


$$x_1(\frac{\pi}{\omega_0}) = x_1(2\cdot\frac{\pi}{2\omega_0}) = x_1(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0})$$

- 时间尺度变换表现为信号横坐标尺寸的压缩（a>1）以及扩展（a<1）

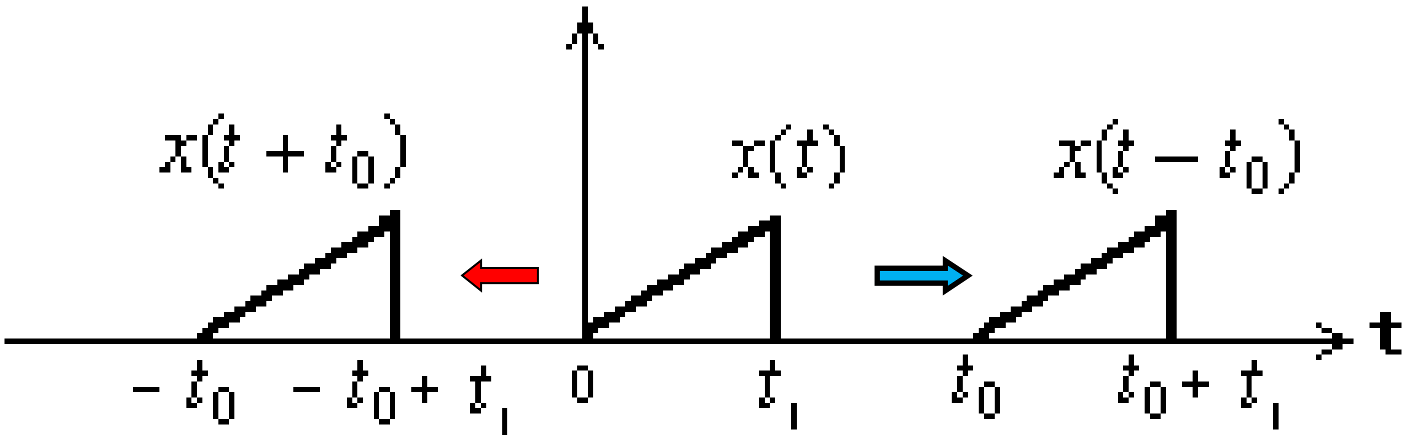
基本运算 - 翻转

➲ 将信号以纵坐标轴为中心进行对称映射，即用变量 **-*t*** 代替原自变量 ***t*** 而得到的信号***x*(-*t*)**。



基本运算 - 平移

- 将原信号沿时间轴平移，信号的幅值不发生改变。若t_0为大于零的常数，则
  - 沿坐标轴正方向平移（**右移**）t_0表示信号的**延时**
  - 沿坐标轴反方向平移（**左移**）t_0表示信号的**超前**



举个例子

时域混合计算

- **例** 已知信号

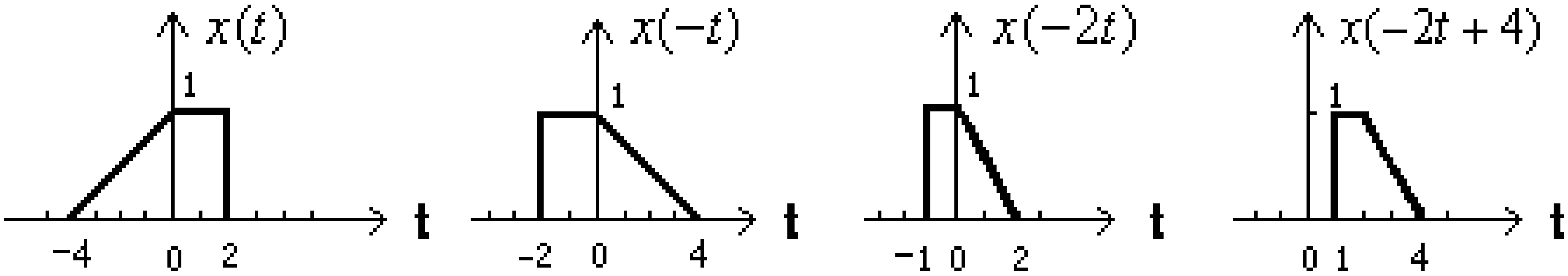
$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}(t+4) & -4<t<0\\ 1 & 0<t<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

- 求出 $\boldsymbol{x(-2t+4)}$

时域混合计算

- 方法一. 翻转+时间轴压缩+平移，即

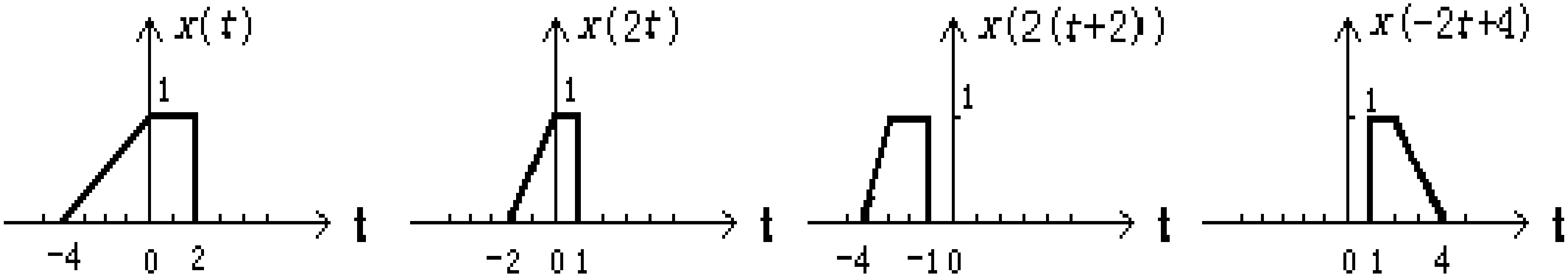
$$x(t) \to x(-t) \to x(-2t) \to x[-2(t-2)] = x(-2t+4)$$



时域混合计算

- 方法二. 时间轴压缩+平移+翻转，即

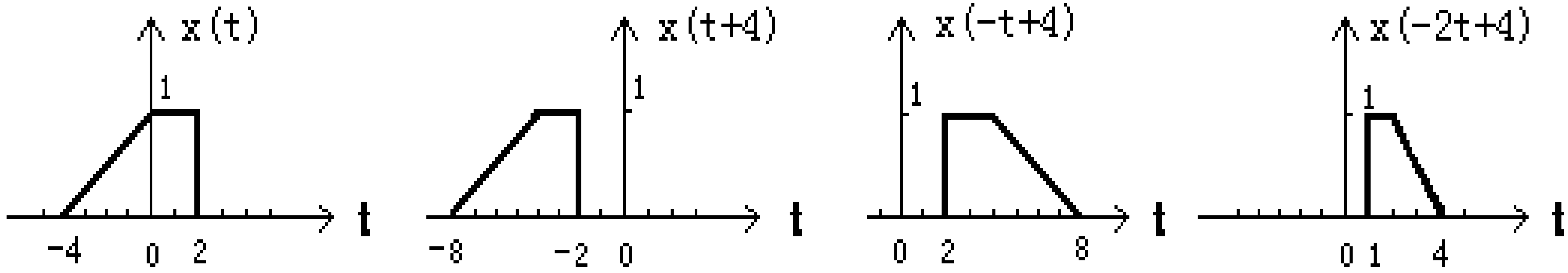
$$x(t) \rightarrow x(2t) \rightarrow x[2(t+2)] = x(2t+4) \rightarrow x(-2t+4)$$



时域混合计算

- **方法三. 平移+翻转+时间轴压缩，即**

$$\boxed{x(t) \to x(t+4) \to x(-t+4) \to x(-2t+4)}$$



时域混合计算

其他三种办法

- 翻转+平移+尺度变换

$$x(t)\to x(-t)\to x\left[-(t-4)\right]\to x\left[-(2t-4)\right]$$

- 尺度变换+翻转+平移

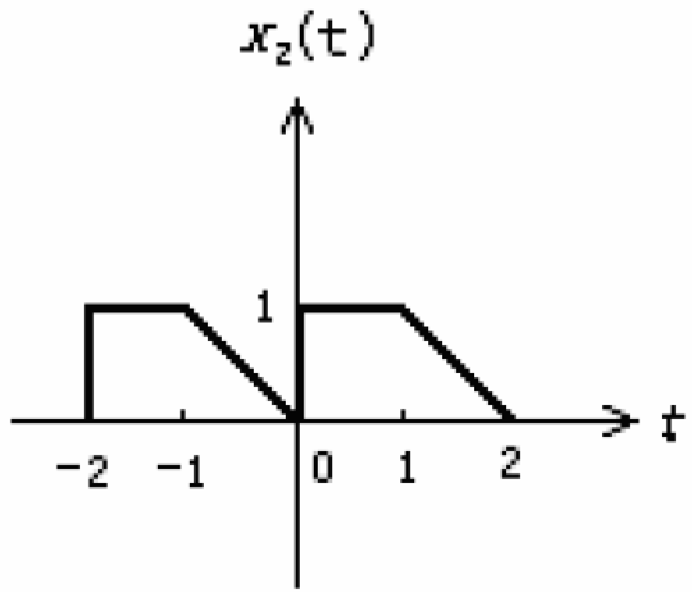
$$x(t)\to x(2t)\to x(-2t)\to x\left[-2(t-2)\right]$$

- 平移+尺度变换+翻转

$$x(t)\to x(t+4)\to x\left[2t+4\right]\to x\left[-2t+4\right]$$

时域混合计算

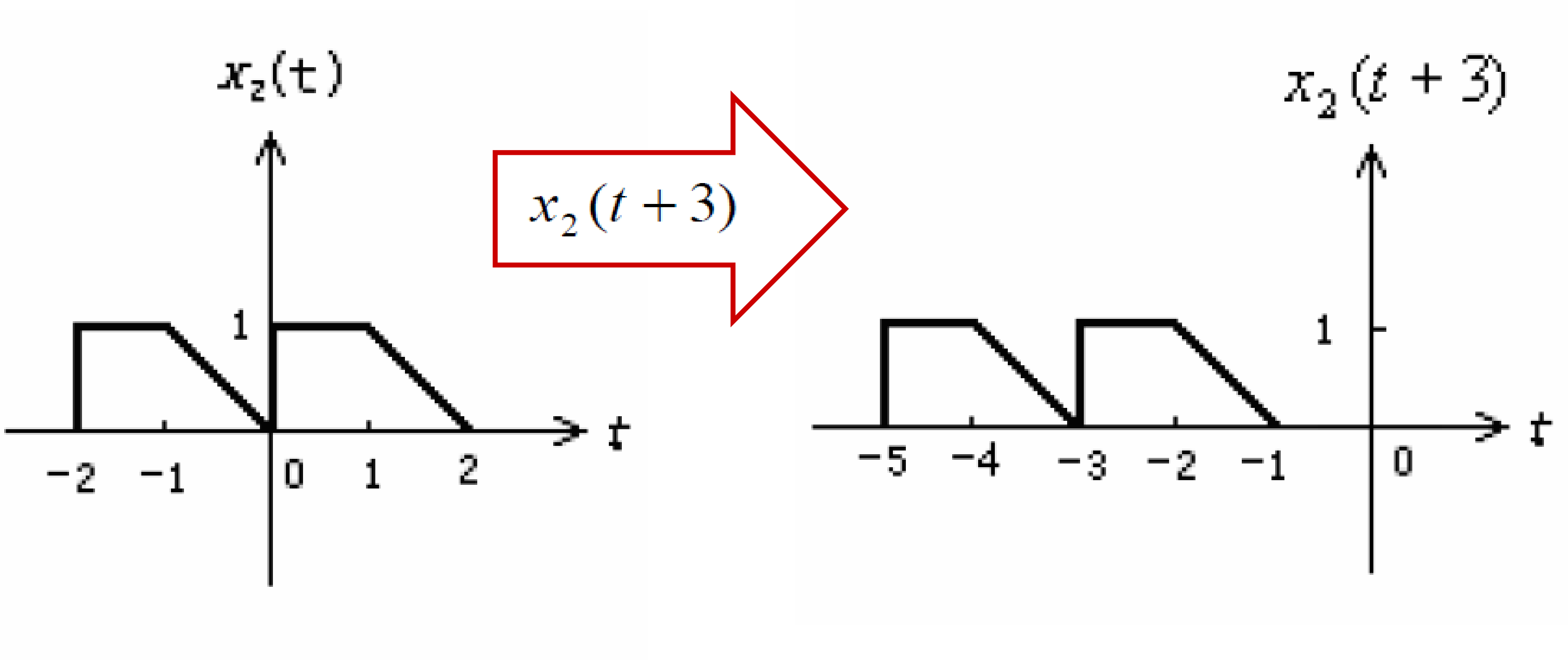
➲ **练习：** 已知信号



(1) $x_2(t+3)$ (2) $x_2(\frac{t}{2}-2)$ (3) $x_2(1-2t)$

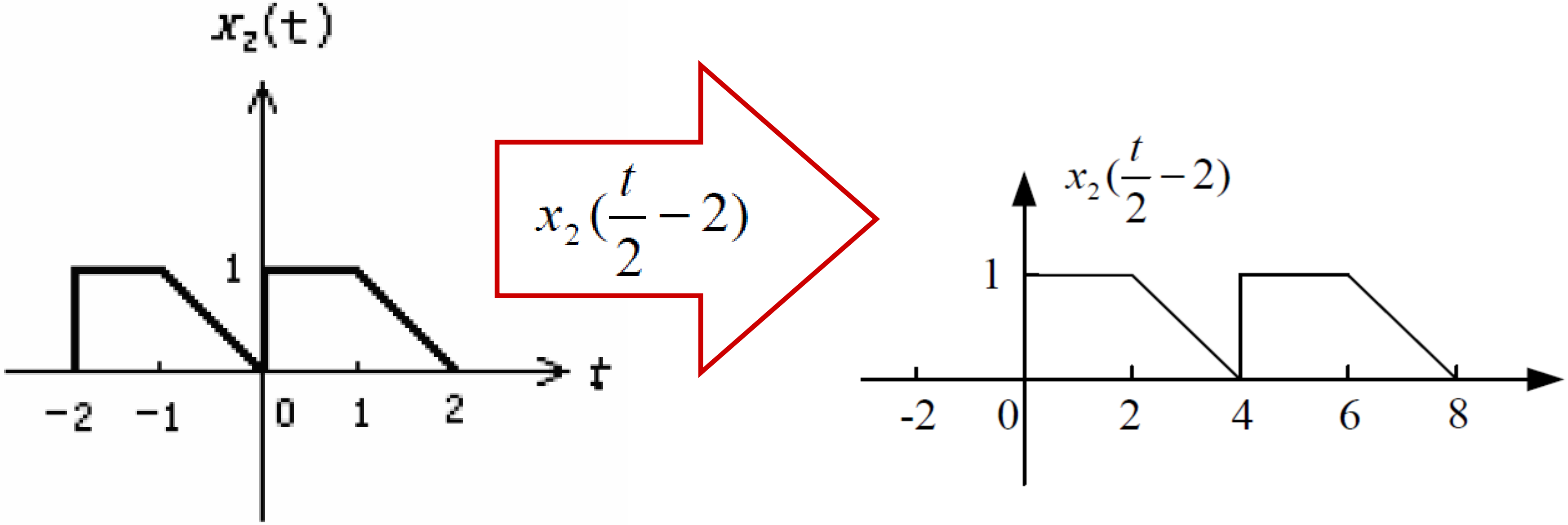
时域混合计算

练习（续）



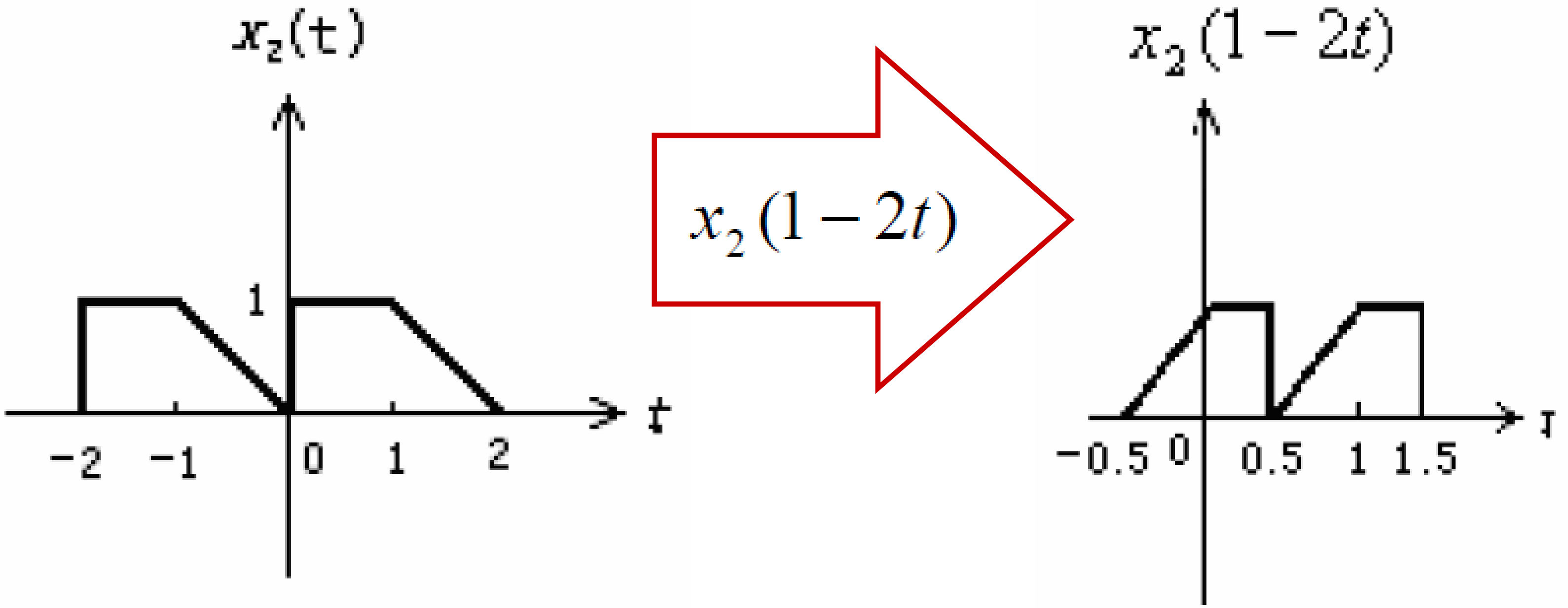
时域混合计算

练习（续）



时域混合计算

练习（续）



叠加和相乘

- 两个信号$x_1(t)$和$x_2(t)$相叠加，其瞬时值为两个信号在该瞬时的值的代数和，即 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

- 两个信号$x_1(t)$和$x_2(t)$相乘，其瞬时值为两个信号在该瞬时的值的乘积，即 $x(t)=x_1(t)\,x_2(t)$

微分和积分

- 信号的微分是指取信号对时间的一阶导数，表示为

$$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$

- 信号的积分是指信号$x(t)$在区间 $(-\infty,t)$ 内积分得到的信号，即

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

表示信号的变化率，要求该信号满足可微条件

微分和积分

- 单位阶跃信号是单位斜坡信号的微分
- 单位冲激信号是单位阶跃信号的微分
- 单位冲激偶是单位冲激信号的微分

卷积运算

- 对于两个连续时间信号$x_1(t)$和$x_2(t)$，可以定义它们的卷积积分运算，简称卷积运算

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

- 满足交换律

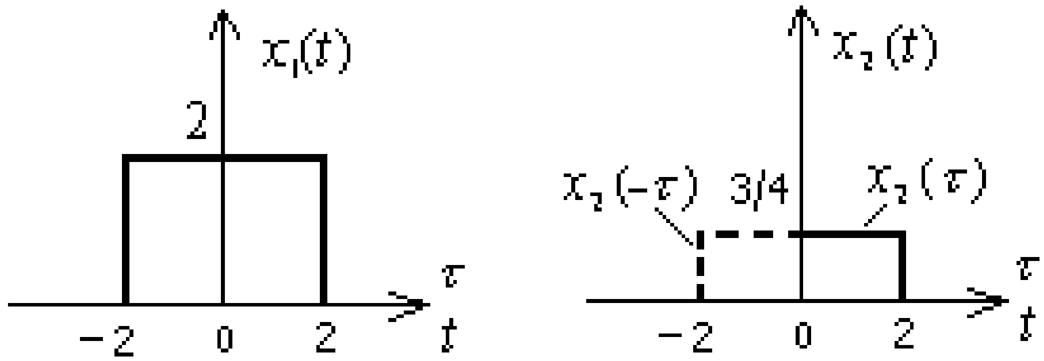
$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

卷积运算

➲ **例2：** 设进行卷积运算的两个信号为

$$x_1(t)=\begin{cases}0 & t<-2\\ 2 & -2<t<2\\ 0 & t>2\end{cases}\qquad x_2(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{3}{4} & 0<t<2\\ 0 & t>2\end{cases}$$

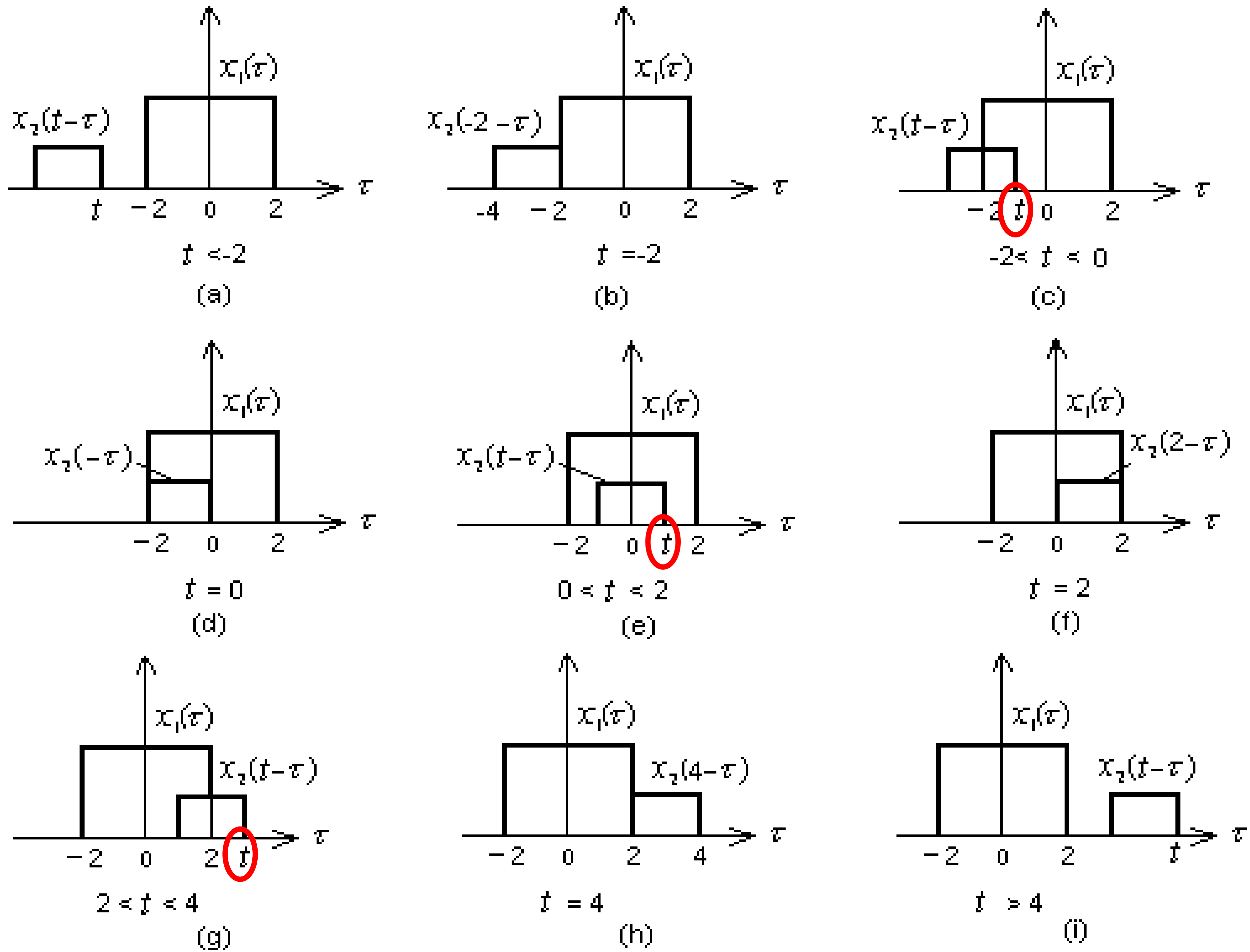
分别如图所示，求其卷积。



卷积求解步骤

- 将$x_1(t)$和$x_2(t)$进行变量替换，成为$x_1(\tau)$和 $x_2(\tau)$；并对 $x_2(\tau)$进行翻转运算，成为 $x_2(-\tau)$
- 将$x_2(-\tau)$平移 t，得到 $x_2(t-\tau)$；
- 将 $x_1(\tau)$和 $x_2(t-\tau)$ 相乘，得到被积函数；
- 将被积函数进行积分，即为所求的卷积积分，它是 t 的函数。
- t 是参变量，τ 是变量

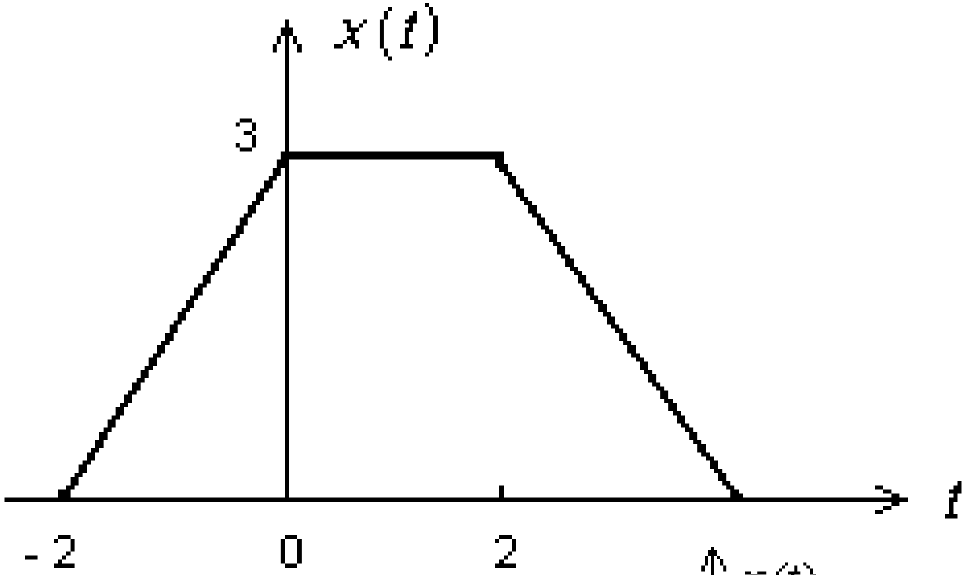
改变自变量→翻转→ 平移→ 相乘→ 积分（注意积分限）



x1(τ)
x2(t−τ)
t −2 0 2 τ
t <-2
(a)
x1(τ)
x2(-2 −τ)
-4 −2 0 2 τ
t =-2
(b)
x1(τ)
x2(t−τ)
−2 t 0 2 τ
-2< t < 0
(c)
x1(τ)
x2(−τ)
−2 0 2 τ
t = 0
(d)
x1(τ)
x2(t−τ)
−2 0 t 2 τ
0 < t < 2
(e)
x1(τ)
x2(2−τ)
−2 0 2 τ
t = 2
(f)
x1(τ)
x2(t−τ)
−2 0 2 t τ
2 < t < 4
(g)
x1(τ)
x2(4−τ)
−2 0 2 4 τ
t = 4
(h)
x1(τ)
x2(t−τ)
−2 0 2 t τ
t > 4
(i)

卷积运算

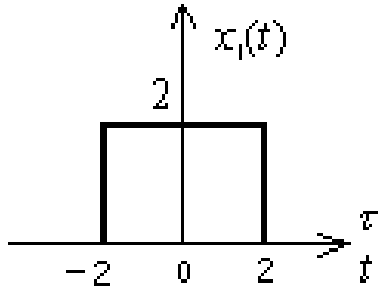
- 卷积结果：

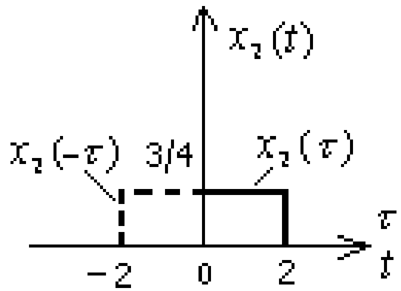


(j)

卷积结果所占有的时宽等于两个函数各有时宽的总和。

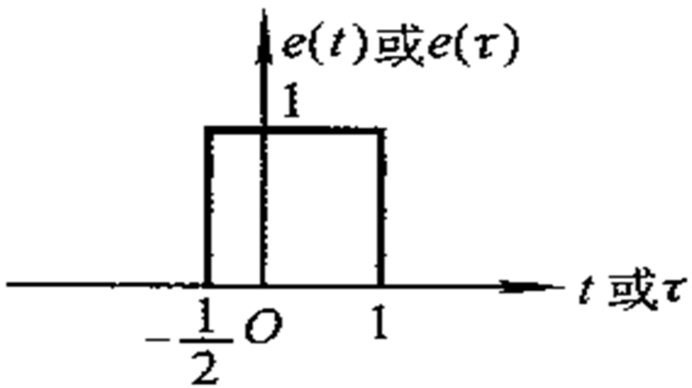
卷积中积分限的确定取决于两个图形交叠的范围。

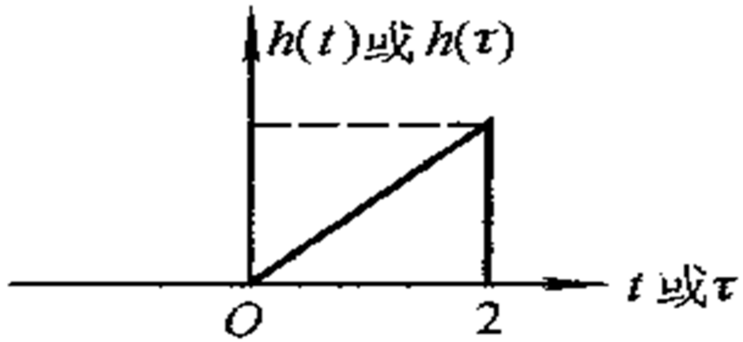


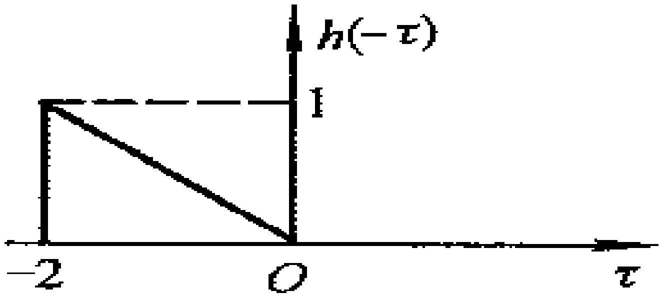


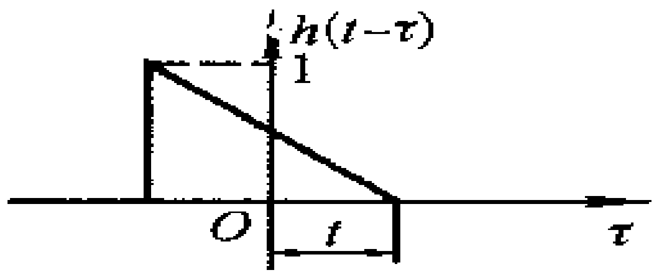
卷积运算

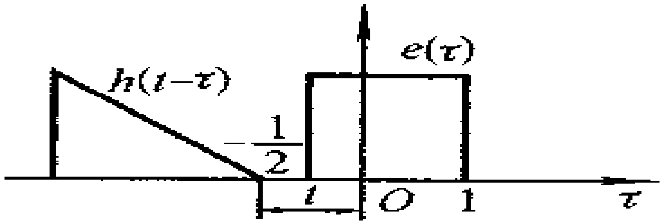
➲ **例：**如图所示 ***e*(*t*)** 和 ***h*(*t*)**，求 ***e*(*t*)*h(*t*)**。





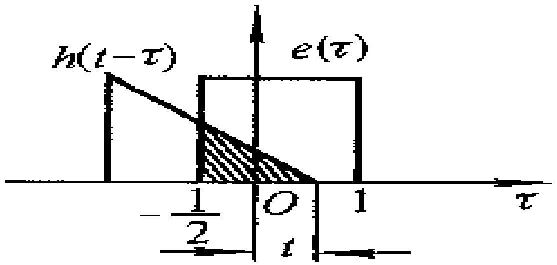






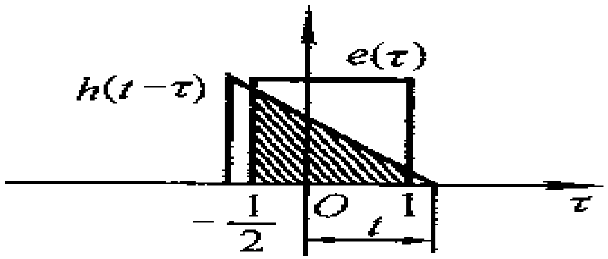
(a) $-\infty < t \leqslant -\frac{1}{2}$

$\boxed{e(t)*h(t)=0}$



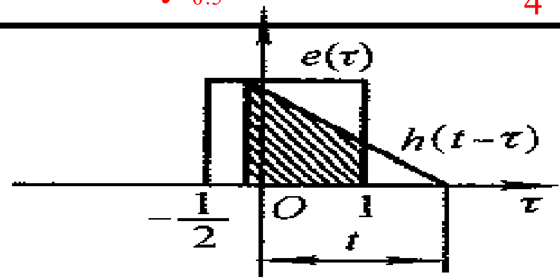
(b) $\boxed{-\frac{1}{2}} \leqslant t \leqslant 1$

$$\boxed{e(t)*h(t)=\int_{-0.5}^{t}1\cdot 0.5(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{t^2}{4}+\frac{t}{4}+\frac{1}{16}}$$



(c) $1 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}$

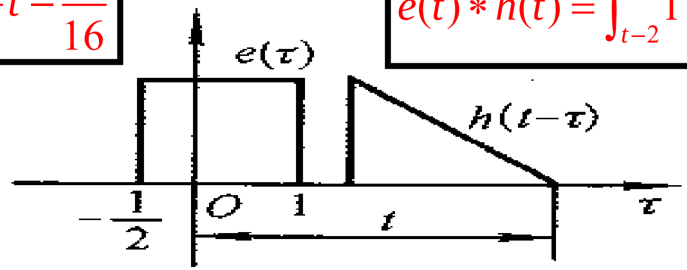
$$\boxed{e(t)*h(t)=\int_{-0.5}^{1}1\cdot 0.5(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{3}{4}t-\frac{3}{16}}$$



(d) $\frac{3}{2} \leqslant t \leqslant \boxed{3}$

$$\boxed{e(t)*h(t)=\int_{t-2}^{1}1\cdot 0.5(t-\tau)\mathrm{d}\tau=-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{3}{4}}$$

积分限为阴影区域

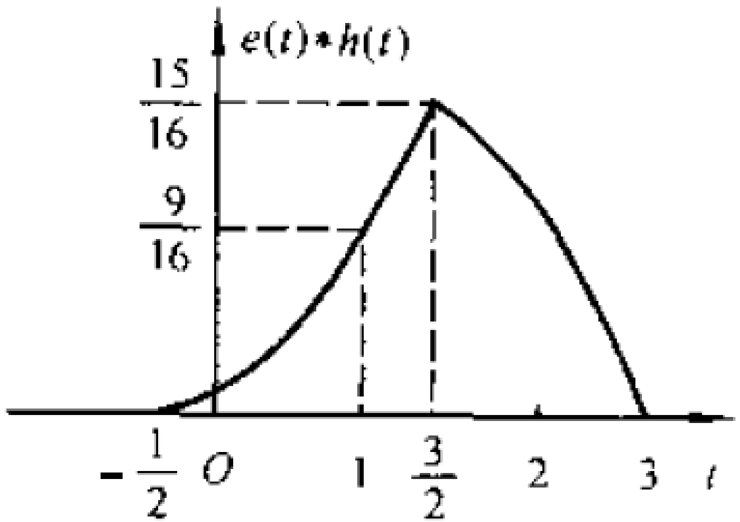


$\boxed{e(t)*h(t)=0}$

(e) $3 \leqslant t < \infty$

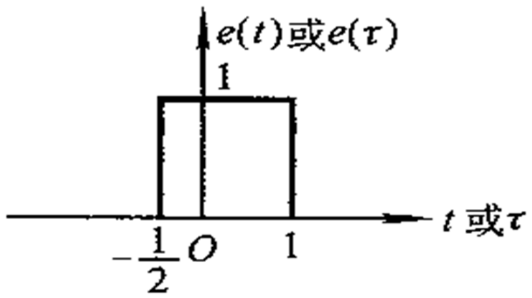
卷积运算

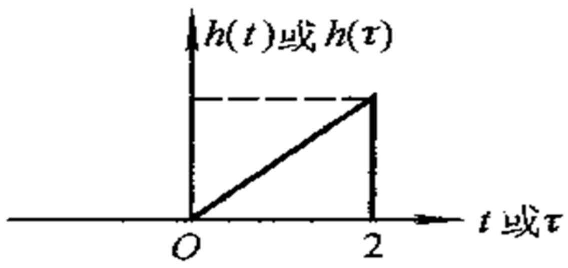
➲ **卷积结果：**



卷积结果所占有的时宽等于两个函数各有时宽的总和。

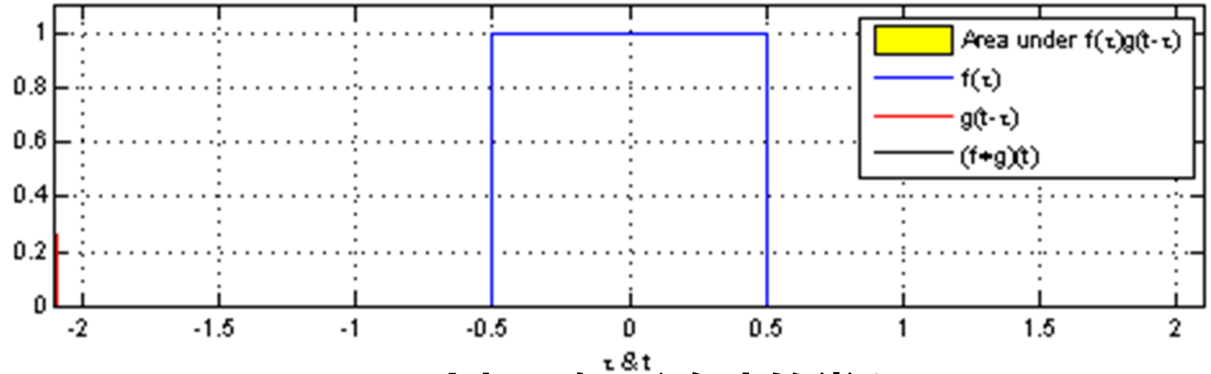
卷积中积分限的确定取决于两个图形交叠的范围。



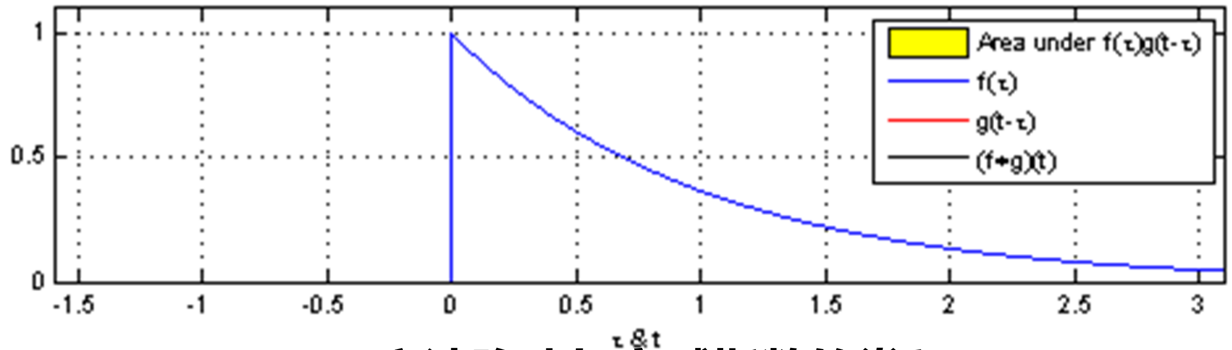


卷积物理意义

两个时宽不同的矩形脉冲卷积结果波形?

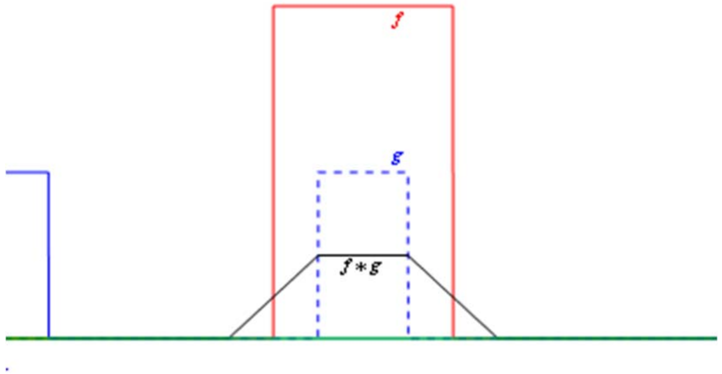


两个相同矩形脉冲的卷积



方波脉冲与衰减指数的卷积

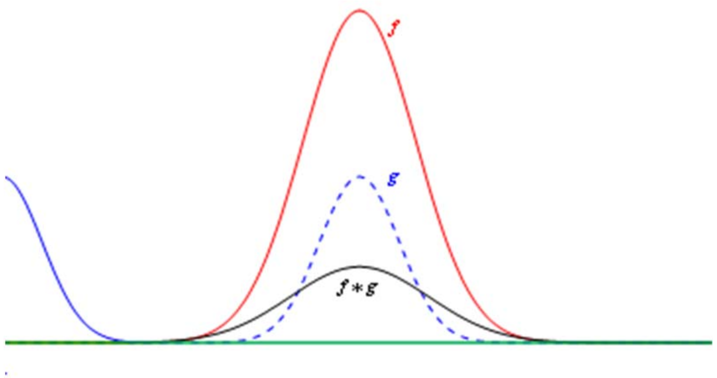
卷积物理意义



两个时宽不同的矩形脉冲卷积

$$f(t) = H\left(x+\frac{1}{2}\right) - H\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$g(t) = \frac{1}{2}\left[H\left(x+\frac{1}{4}\right) - H\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]$$



其他卷积

$$f(t) = e^{-5t^2}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{-10t^2}$$

任意信号与单位冲激信号的卷积

偶函数

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=x(t)}$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(\tau-(t-t_0))d\tau=x(t-t_0)$$

$$x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$$

（三）信号的分解

- 分解成冲激函数之和
- 正交分解

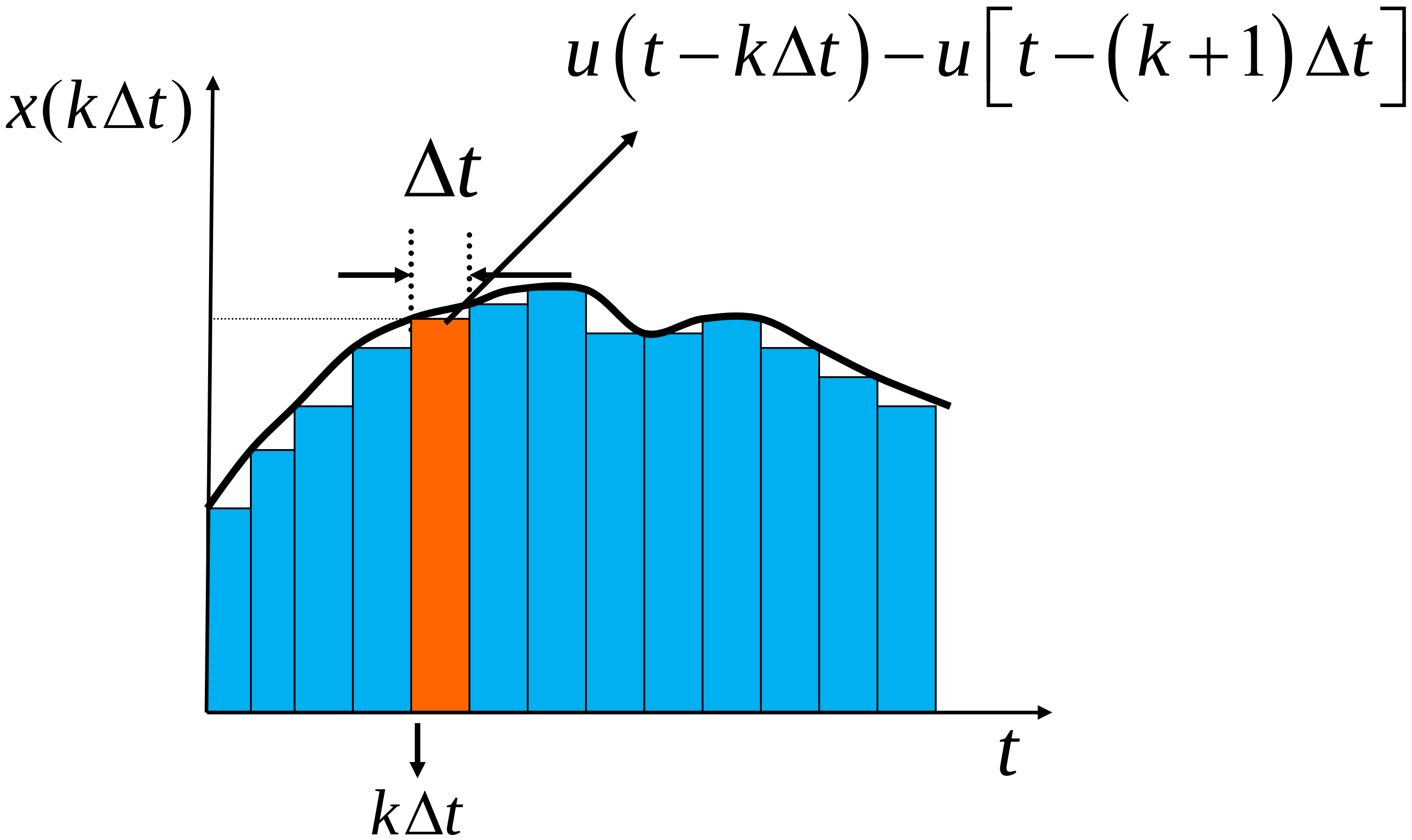
分解成冲激函数之和

- 任意信号x(t)可近似用一系列等宽度的矩形脉冲之和表示

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\frac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t}\Delta t$$

分解成冲激函数之和



分解成冲激函数之和

- 当 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下

$$\Delta t \to d\tau \qquad k\Delta t \to \tau$$

- 而

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t} = \delta(t-\tau)$$

- 有

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

分解成冲激函数之和

- 任意信号 $x(t)$ 可以用经平移的无穷多个单位冲激函数加权后的连续和（积分）表示，换言之，任意信号 $x(t)$ 可以分解为一系列具有不同强度的冲激函数

第1次书面作业

- 作业（第二版）：
  - P7　2:(3)(7)(8); 4:(1)(2)(3)
  - P23　1:(1)(3)(5); 8
- 作业（第三版）：
  - P7　2:(3)(7)(8); 4:(1)(2)(3)
  - P99　1:(1)(3)(5); 8