第 1 章 矩阵代数基础

1.1 习题 1

已知线性方程组

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = x_1 \\ y_1 + 2y_2 = x_2 \\ -2y_1 + 3y_2 = x_3 \end{cases}$$

与线性方程组

$$\begin{cases} 3z_1 - z_2 = y_1 \\ 5z_1 + z_2 = y_2 \end{cases}$$

用 z_1, z_2 表示 x_1, x_2, x_3。

1.2 习题 2

假定

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{4} a_i n^i$$

试求常数 a_1，a_2，a_3，a_4。(提示：分别令 $n = 1, 2, 3, 4$ 得到线性方程组。)

1.3 习题 3

若 $\mathbf{A}$ 为常数矩阵常数向量，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为常数向量，证明自协方差矩阵和互协方差的下列性质：

(1) $\mathrm{Var}(\mathbf{Ax} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathrm{Var}(\mathbf{x})\mathbf{A}^H$.

(2) $\mathrm{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathrm{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{x})]^H$。

(3) $\mathrm{Cov}(\mathbf{Ax}, \mathbf{By}) = \mathbf{A}\mathrm{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{B}^H$。

1.4 习题 4

当 α 和 β 分别取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = \alpha \\ 3x_1 - x_2 - \beta x_3 + 15x_4 = 3 \end{cases}$$

有唯一解、无解和无穷多解。当方程组有无穷多组解时，求出它的通解。

1.5 习题 5

试证明：

(1) 若向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 正交，则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 线性无关。

(2) 若矩阵 $\mathbf{A}$ 与矩阵 $\mathbf{B}$ 分别满足 $\mathbf{A^2} = \mathbf{A}$，$\mathbf{B^2} = \mathbf{B}$，且 $\mathbf{A}$ 的列是 $\mathbf{B}$ 的列的线性组合，则 $\mathbf{BA} = \mathbf{A}$。

1.6 习题 6

判断下列二次型的正定性：

(1)

$$-2x_1^2 - 8x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

(2)

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 15x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4$$

1.7 习题 7

试证明如下性质：

(1) 若 $\lambda_i, i \in \{1, \cdots, n\}$ 为矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值，则

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

且

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

(2) 向量 $\mathbf{x}_1 = [x_{11}, \cdots, x_{1K}]^T \in \mathbb{R}^{K\times 1}$，$\mathbf{x}_2 = [x_{21}, \cdots, x_{2K}]^T \in \mathbb{R}^{K\times 1}$，$\mathbf{y}_1 = [y_{11}, \cdots, y_{1L}]^T \in \mathbb{R}^{L\times 1}$，$\mathbf{y}_2 = [y_{21}, \cdots, y_{2L}]^T \in \mathbb{R}^{L\times 1}$，证明向量的内积与外积之间的下列关系：

$$< \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_2 >= (\mathbf{x_1^T x_2})(\mathbf{y_1^T y_2})$$

其中 $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 与向量 $\mathbf{y}$ 的外积。

1.8 习题 8

设

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T = \mathbf{K}^3,\ \ \mathbf{K1} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{K}\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$$

其中，$\mathbf{1}$ 表示元素全是 1 的向量。试求以下值：

(1) $\mathbf{K}$ 的阶数；

(2) $\mathbf{K}$ 的迹和行列式；（提示：利用习题 7 的结论）

(3) $\mathbf{K}^{26}$ 的迹和行列式；

(4) 矩阵 $6\mathbf{K}^{60} - 7\mathbf{K} + 3\mathbf{I}$ 的迹和行列式。

发布与提交时间

- 作业发布时间：2024 年 9 月 14 日
- 作业提交 DDL：2024 年 9 月 28 日