第四章 信号处理基础

浙江大学 电气工程学院

张健

jian_zhang_zju@zju.edu.cn

《信号分析与处理》课程结构

第二章 连续信号的分析

理论基础

第三章 离散信号的分析

计算机应用

信号分析

第四章 信号处理基础

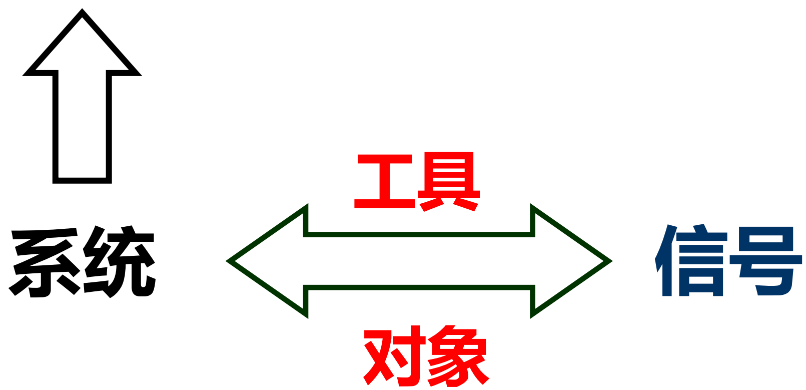
信号处理

最基本的处理方式，信号处理应用的延伸

第五章 滤波器

信号处理

- **定义** 对信号实现有目的的加工，将一个信号变换为另一个信号的过程。本课程的信号处理系统某种意义下等同于滤波器
- **实现方式** 由具有一定功能的**器件、装置、设备及其组合**完成。



系统的定义

- 系统是由若干**相互联系的单元组成的**、具有某种功能有机整体。它既可以是物理系统，如通信系统、计算机系统、自控系统等等，也可以是社会系统，如教育系统、财政金融系统等等。**在信息科学领域，系统可定义为对信号进行处理的物理设备和软件运算方法。**如为从信号中滤除干扰和噪声，可将信号通过一个称为滤波器的系统，该系统可以是硬件处理设备，也可以是计算机的软件实现的一种算法。

- 本课程所讨论的系统局限于按本学科定义的狭义系统。

信号与系统的关系

- **系统和信号相互依存**。要产生信号，并对信号进行传输、处理、存储和转化，需要一定的物理装置（系统）；系统在外加信号作用下将产生某种反应，这种**外加信号称为系统的输入或激励，相应的反应称为系统的输出或响应**。系统和系统之间通过信号来联系，信号则在系统之间以及系统内部流动。因此，研究信号的分析与处理，必须要对系统进行研究。

系统研究的内容和方法

建立系统的**数学模型**（用数学表示式来表征系统的特性）或**物理模型**（用具有理想特性的符号组合成图形来表征系统的特性）

→ 数学方法求出数学模型或物理模型的解答。

→ 对所得的结果做出物理解释，赋予物理意义。

连续系统的**系统分析**：列写微分方程→ 求解微分方程

离散系统的**系统分析**：列写差分方程→ 求解差分方程

系统的数学模型

➲ 定义

系统的抽象化描述，能表达信号加工或变换关系的数学式子。

➲ 分类

输入输出模型

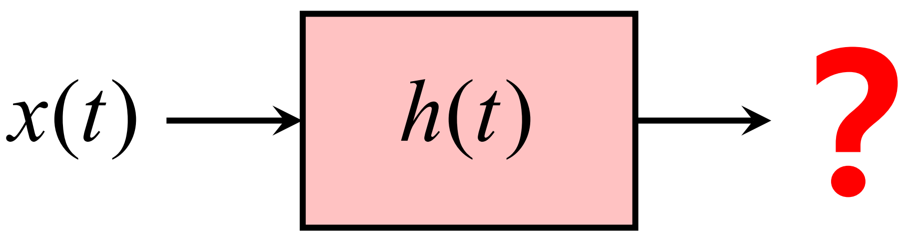
只反映输入量和输出量的方程描述

状态空间模型

描述系统的内部状态，由状态方程和输出方程描述

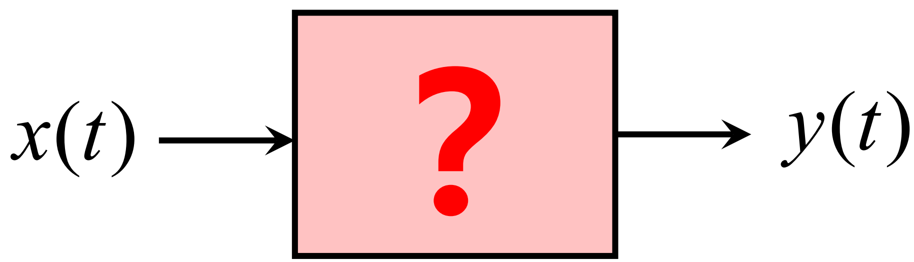
系统分析

- **系统分析**是在系统给定情况下，研究系统对输入信号所产生的响应，并获得关于系统功能和特性的认识。



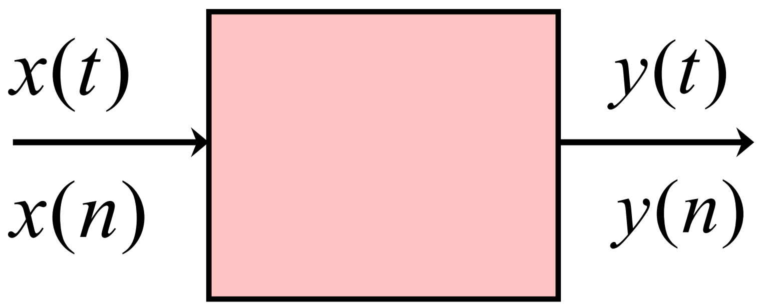
系统综合

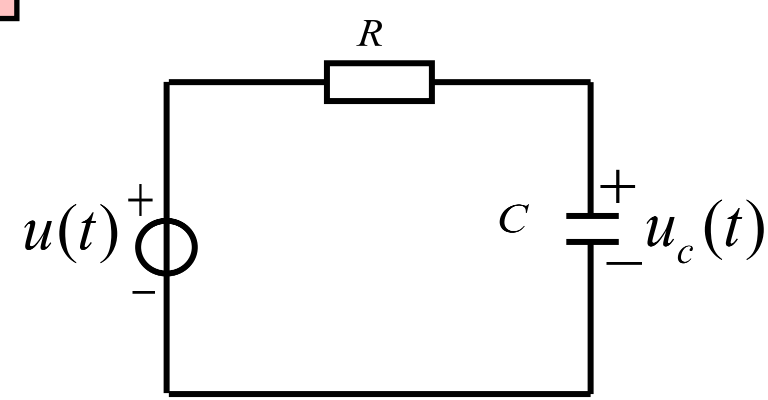
- **系统综合**是已知系统的输入和输出信号，求系统特性（系统结构）以满足规定的可实现的技术要求，其结论往往不唯一。一般讲，学习分析是学习综合的基础。



系统的分类

➲ **连续系统**和**离散系统**

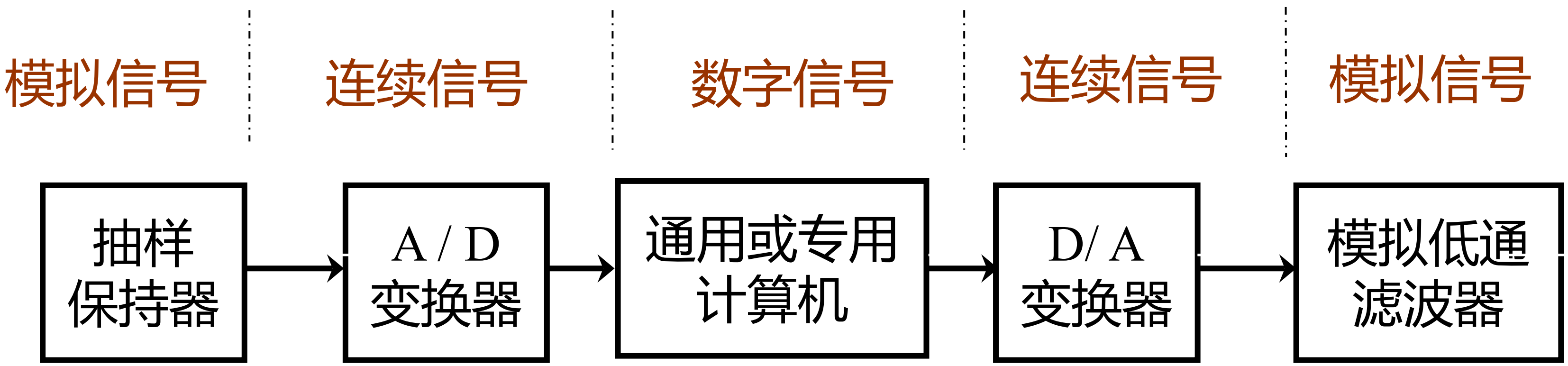




R、C 组成的连续系统

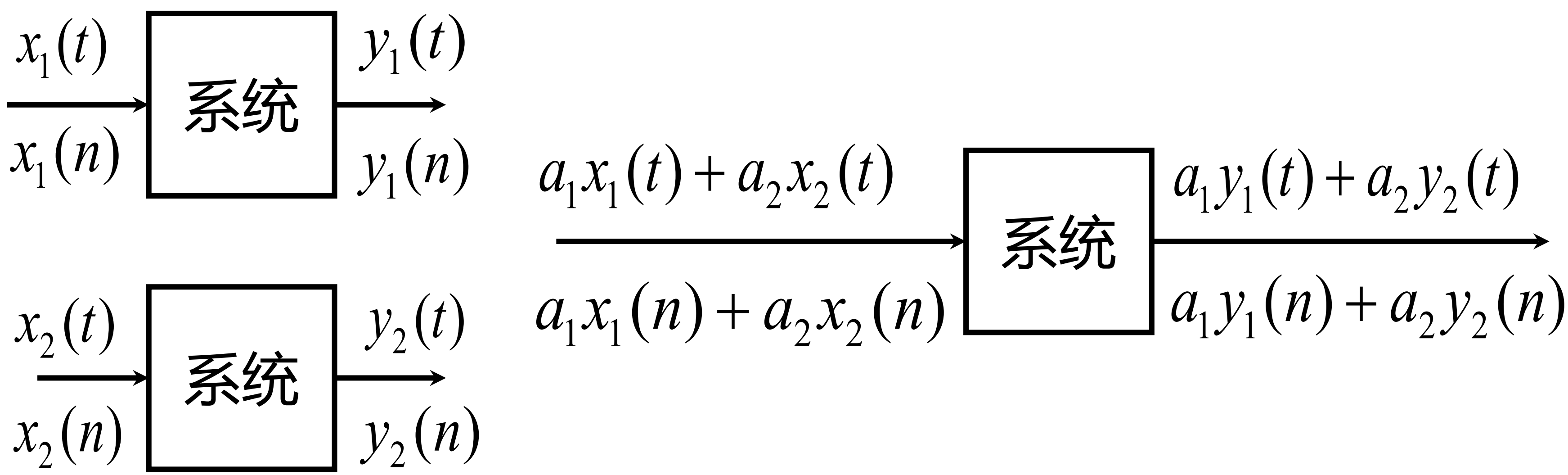
系统的分类

例： 由连续系统和离散系统组成的数字信号处理系统(混合系统)



系统的分类

线性系统和非线性系统



线性系统的线性特性，**叠加性**和**齐次性（均匀性）**

系统的分类

例　判断系统 $y(t)=tx(t)$ 是否为线性系统。

解：　$x_1(t)\rightarrow y_1(t)=tx_1(t)$

$x_2(t)\rightarrow y_2(t)=tx_2(t)$

令　$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$　　a,b 为任意常数

有　$y_3(t)=tx_3(t)=t[ax_1(t)+bx_2(t)]=atx_1(t)+btx_2(t)=ay_1(t)+by_2(t)$

故系统是线性系统。

系统的分类

例　　判断系统 $y(t)=x(t)x(t-1)$ 是否为线性系统。

解：　$x_1(t)\rightarrow y_1(t)=x_1(t)x_1(t-1)$

$x_2(t)\rightarrow y_2(t)=x_2(t)x_2(t-1)$

令　$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$　　　a,b 为任意常数

有

$$
\begin{aligned}
y_3(t)&=x_3(t)x_3(t-1)=[ax_1(t)+bx_2(t)][ax_1(t-1)+bx_2(t-1)]\\
&=a^2x_1(t)x_1(t-1)+b^2x_2(t)x_2(t-1)+abx_1(t)x_2(t-1)+abx_1(t-1)x_2(t)\\
&=a^2y_1(t)+b^2y_2(t)+ab[x_1(t)x_2(t-1)+x_1(t-1)x_2(t)]\\
&\neq ay_1(t)+by_2(t)
\end{aligned}
$$

所以系统为非线性的。

系统的分类

增量线性系统

例 判断系统 $y(t)=2x(t)+3$ 是否为线性系统。

解： $x_1(t) \to y_1(t)=2x_1(t)+3$

$x_2(t) \to y_2(t)=2x_2(t)+3$

令 $x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$ $\quad$ a,b 为任意常数

有 $y_3(t)=2x_3(t)+3=2[ax_1(t)+bx_2(t)]+3=2ax_1(t)+2bx_2(t)+3$

显然与 $ay_1(t)+by_2(t)=2ax_1(t)+3a+2bx_2(t)+3b$ 不相等，故系统是非线性的。

由线性方程构成的系统并不一定是线性系统

系统的分类

增量线性系统

令 $\Delta x(t)=x_2(t)-x_1(t)$

可得 $\Delta y(t)=y_2(t)-y_1(t)$

$$=[2x_2(t)+3]-[2x_1(t)+3]$$

$$=2[x_2(t)-x_1(t)]$$

$$=2\Delta x(t)$$

容易看出，这是一个既满足叠加性，又满足齐次性的表达式，它表示了这个系统输出的增量与输入增量之间成线性关系，把这一类系统称为**增量线性系统**。

系统的分类

稳定系统和不稳定系统

- 稳定性是系统的一个十分重要的特性，一个稳定的系统才是有意义的，不稳定的系统难以被实际应用。可以从多个方面给系统的稳定性下定义，一个直观、简单的定义是：**如果一个系统对其有界的输入信号的响应也是有界的，则该系统具有稳定性，或称该系统是稳定系统。否则，如果对有界输入产生的输出不是有界的，则系统是不稳定的。**
- 由于稳定性对于一个系统的重要意义，因此在系统分析中把它放在重要的地位，并给出一系列稳定性判据，在系统设计中也把它作为一项基本原则。在信号处理中，作为信号处理的工具，系统的稳定性要求也是显然的。

系统的分类

可逆系统与不可逆系统

- 如果一个系统对不同的输入信号产生不同的输出信号，即系统的**输入输出信号成一一对应的关系**，则称该系统是可逆的，或称为可逆系统，否则就是不可逆系统。

$y(t)=2x(t)$、$y(t)=x(t-t_0)$、$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$ 是可逆系统

下列系统是不可逆系统：

（1） $y(t)=0$，因为系统对任何输入信号产生同样的输出；

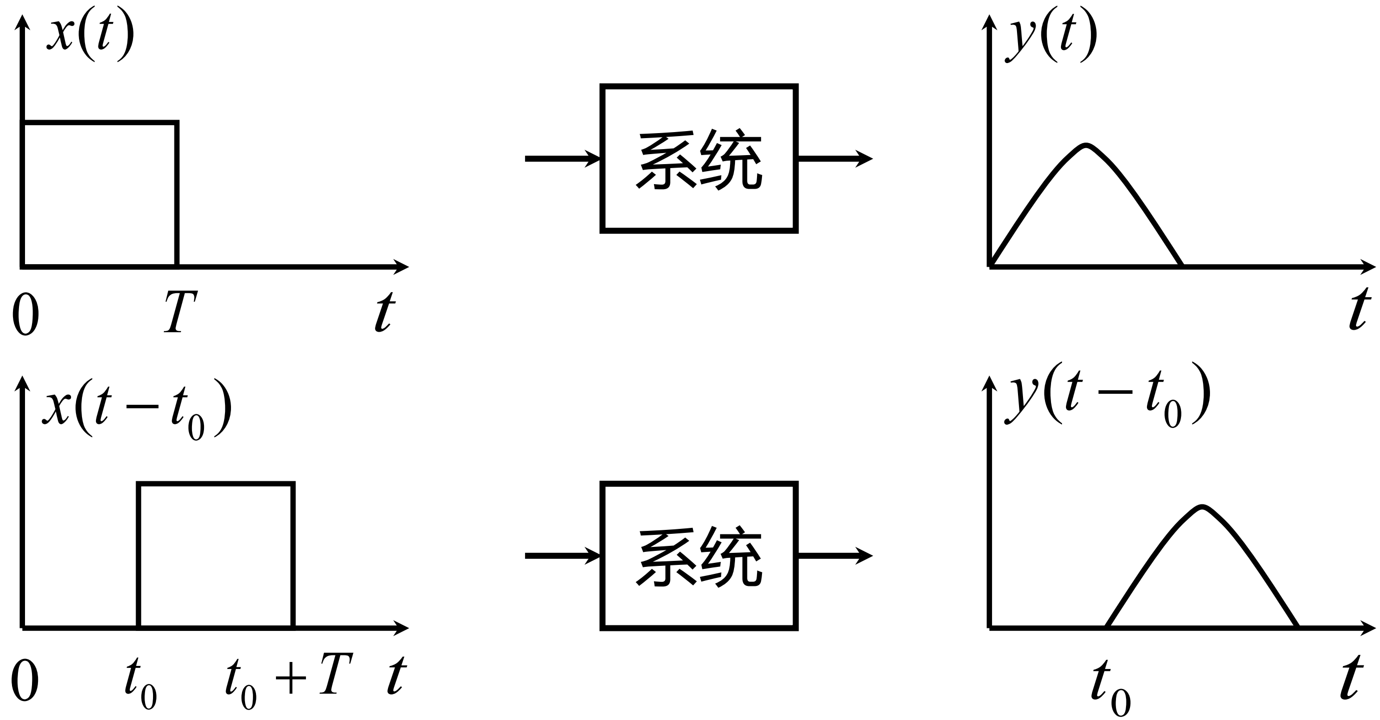
（2） $y(t)=\cos[x(t)]$，因为系统对输入 $x(t)+2k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$ 都有相同的输出；

（3） $y(n)=x^2(n)$ ，系统对 $x(n)$ 和 $-x(n)$ 这两个不同的输入信号产生相同的输出；

（4） $y(n)=x(n)x(n-1)$，系统的输入信号为 $x(n)=\delta(n)$ 和 $x(n)=\delta(n+1)$ 时，有相同的输出信号 $y(n)=0$。

系统的分类

时不变系统和时变系统



时不变系统的时不变特性

系统的分类

时不变系统和时变系统

检验一个系统的时不变性，可从定义出发，对于$x_1(t)$，有$y_1(t)$，令$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，检验$y_2(t)$是否等于$y_1(t-t_0)$，若是，则系统是时不变的，否则，系统就是时变的。

（1）$y(t)=\cos[x(t)]$是时不变的，因为$y_1(t)=\cos[x_1(t)]$，$y_1(t-t_0)=\cos[x_1(t-t_0)]$，对于$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，有$y_2(t)=\cos[x_2(t)]=\cos[x_1(t-t_0)]=y_1(t-t_0)$；

（2）反转系统$y(t)=x(-t)$是时变的，因为$y_1(t)=x_1(-t)$，$y_1(t-t_0)=x_1(-t+t_0)$，对于$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，有$y_2(t)=x_2(-t)=x_1(-t-t_0)\neq y_1(t-t_0)$；

（3）调制系统$y(t)=x(t)\cos\omega t$也是时变系统，因为$y_1(t)=x_1(t)\cos\omega t$，$y_1(t-t_0)=x_1(t-t_0)\cos\omega(t-t_0)$，对于$x_2(t)=x_1(t-t_0)$，有$y_2(t)=x_2(t)\cos\omega t=x_1(t-t_0)\cos\omega t\neq y_1(t-t_0)$；

系统的分类

- **证明** $y(n)=nx(n)$ 和 $y(n)=x(2n)$ 都是时变系统。

$$y_1(n)=nx_1(n)\Rightarrow y_1(n-n_0)=(n-n_0)x_1(n-n_0)$$

$$x_2(n)=x_1(n-n_0)\Rightarrow y_2(n)=nx_2(n)=n\cdot x_1(n-n_0)\neq y_1(n-n_0)$$

$$y_1(n)=x_1(2n)\Rightarrow y_1(n-n_0)=x_1(2n-2n_0)$$

$$x_2(n)=x_1(n-n_0)\Rightarrow x_2(2n)=x_1(2n-n_0)$$

$$y_2(n)=x_2(2n)=x_1(2n-n_0)\neq y_1(n-n_0)$$

例：$x_1(n)=\{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ \underline{5}\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\};\ n_0=2;$

$$x_1(n)\Rightarrow y_1(n)=x_1(2n)=\{1\ \ 3\ \ \underline{5}\ \ 3\ \ 1\}\Rightarrow y_1(n-2)=\{\underline{1}\ \ 3\ \ 5\ \ 3\ \ 1\}$$

$$x_2(n)=x_1(n-2)\Rightarrow y_2(n)=x_2(2n)=\{1\ \ \underline{3}\ \ 5\ \ 3\ \ 1\}$$

系统的分类

因果系统和非因果系统

- 因果系统是指系统在 t_0 时刻响应只与 $t=t_0$ 和 $t<t_0$ 时刻的输入有关，否则，即为非因果系统。也就是说，激励是产生响应的原因，响应是激励引起的后果，在任何时刻的响应只取决于激励的现在值与过去值，而不取决于激励的将来值。
- 系统的因果性也就是系统的物理可实现性，**只有因果系统才是物理可实现的**。

系统的分类

因果系统和非因果系统

$y(t)=x(t+1)$ 表示的系统是非因果系统，因为系统的输出显然与将来时刻的输入有关，例如 $y(0)$ 取决于 $x(1)$。

$y(t)=x(-t)$ 表示的系统是非因果系统，当 t=-1 时，$y(-1)$ 取决于 $x(1)$，与将来时刻的输入有关。

$y(n)=x(n)-x(n+1)$ 也表示了一个非因果系统，因为 $y(0)$ 不仅与 $x(0)$ 有关，还与将来时刻的输入 $x(1)$ 有关。

系统的分类

瞬时系统和动态系统

- 对于任意的输入信号，如果每一时刻系统的输出信号值仅仅取决于该时刻的输入信号值，而与别的时刻值无关，称该系统具有无记忆性，否则，该系统为有记忆的。无记忆的系统称为无记忆系统或瞬时系统，有记忆的系统称为记忆系统或动态系统。
- 一个电阻器是一个最简单的无记忆系统，因为电阻器两端某时刻的电压值$y(t)$完全由该时刻流过电阻R的电流值$x(t)$决定，即由如下**代数方程**描述

$$y(t) = R \cdot x(t)$$

系统的分类

- 含有储能元件的系统是一种动态系统，这种系统即使在输入信号去掉后，仍能产生输出，因为它所含的储能元件记忆着系统从前的状态，记忆着输入信号曾经有过的影响。例含电容器的系统是一个动态系统，它两端的电压$y(t)$与流过它的电流$x(t)$具有关系式

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 系统在t时刻的输出是t时刻以前输入的积累。动态系统通常可用**微分方程或差分方程**描述。

系统的分类

- 重点关注

线性，时不变系统

linear time-invariant systems

简称**LTI**

- 数学模型

线性常系数微分方程

线性常系数差分方程

信号的线性系统处理

时域法分析

- 线性时不变因果系统
- 线性时不变系统的单位冲激响应
- <u>线性时不变系统的时域分析</u>

频域法分析

- 频率响应
- 无失真传输
- 理想低通滤波器

复频域分析

- 微分方程的复频域求解
- 传递函数

<u>与书中构架不同，按照连续系统和离散系统的顺序讲解。</u>

线性时不变因果系统的数学模型

- 线性时不变连续系统

线性常系数微分方程 $$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t)$$

如：$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$

- 线性时不变离散系统

线性常系数差分方程 $$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \quad (a_0 = 1)$$

如：$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) - 3x(n-2)$

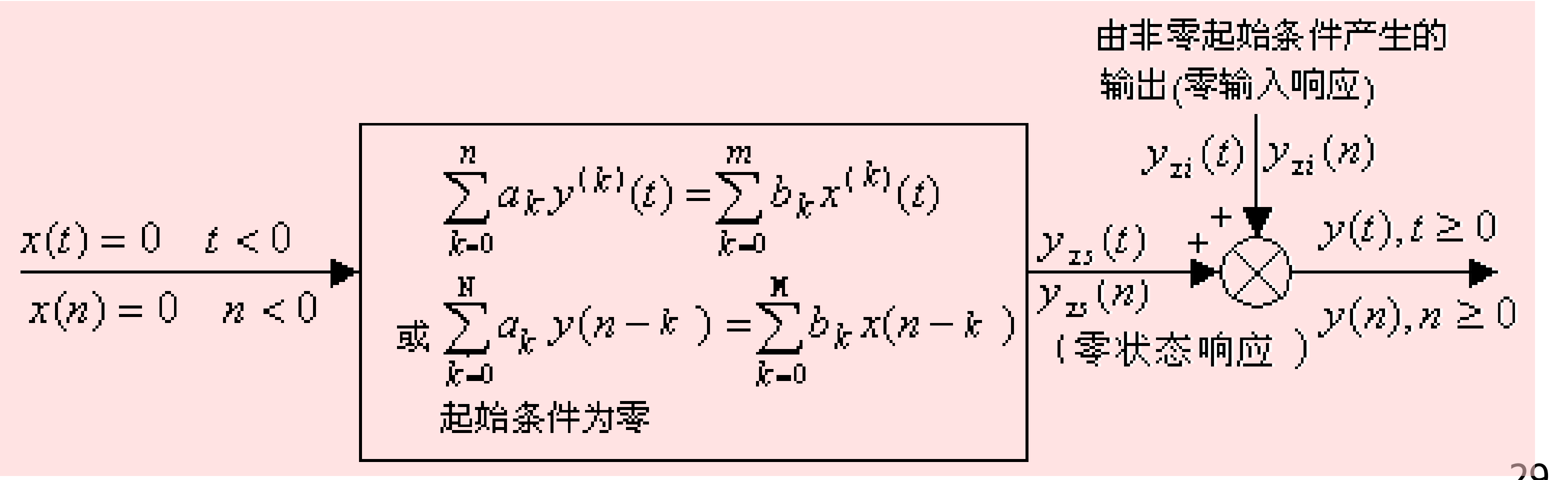
起始松驰

- “起始松驰”假设：系统的初始条件为零。

$$x(t)=0 \quad t<0 \rightarrow y(t)=0 \quad t<0$$

$$x(n)=0 \quad n<0 \rightarrow y(n)=0 \quad n<0$$

- 对于一个线性系统，只有满足“起始松驰”假设，系统才是时不变的，也是因果的。 **“起始松驰”假设意味着系统内部能量的一种静止状态，表示这类系统具有零起始条件，保证了描述系统的动态方程有唯一的解。**



零输入响应与零状态响应

- **零输入响应**

输入为零时系统仍存在的输出，这是历史上的激励所产生的响应延续。

- **零状态响应**

零初始条件（起始松弛）下系统对本次输入激励的响应。

- **系统的输出**

零输入响应与零状态响应的叠加。

线性时不变连续系统的时域法分析

➲ 单位冲激（脉冲）响应

系统零初始条件下对激励为单位冲激函数所产生的响应，记为***h*(*t*)**。通过求解微分（差分）方程，无法表现系统响应的物理意义，且求解困难。

线性常系数微分方程

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t) \xrightarrow[y(t)=h(t)]{x(t)=\delta(t)} \sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta^{(k)}(t)$$

$$t > 0 \Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = 0$$

通解，*n>m*

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t) \Longleftarrow \sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = 0$$

线性时不变连续系统的时域法分析

单位冲激响应

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t)$$

$h(t)$ 的形式与 n 、 m 值的相对大小密切相关

（1） $n > m$ 时， $h(t)$ 对应着 $\delta(t)$ 的一次以上积分，不会包含 $\delta(t)$ 及其导数。

（2） $n = m$ 时， $h(t)$ 对应着 $\delta(t)$ 具有如下形式：

$$h(t) = c\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

（3） $n < m$ 时， $h(t)$ 除了基本形式外，还会包含 $\delta(t)$ 直至其 $m-n$ 阶导数项

$$h(t) = \sum_{j=0}^{m-n} e_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

试求如下微分方程所描述的系统的单位冲激响应。

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+2x(t)$$

首先系统对应的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+3=0$，求得其两个特征根分别为：

$$\lambda_1=-1，\ \lambda_2=-3$$

根据上面所讨论的结果，本例中 $n=2, m=1$，$h(t)$ 应具有如下形式：

$$h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$$

将其代入原方程，即

$$h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

其中

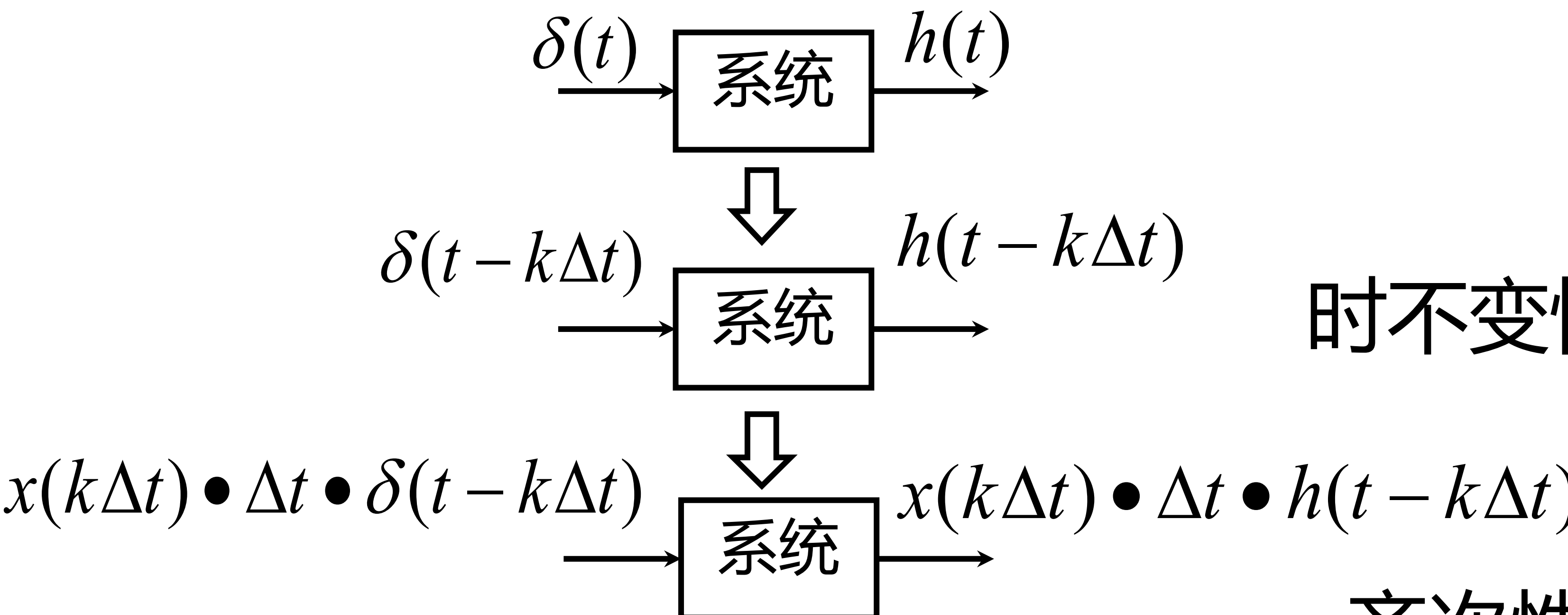
$$h'(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})\delta(t)-(A_1e^{-t}+3A_2e^{-3t})u(t)$$
$$=(A_1+A_2)\delta(t)-A_1e^{-t}u(t)-3A_2e^{-3t}u(t)$$
$$h''(t)=(A_1+A_2)\delta'(t)-[A_1e^{-t}\delta(t)-A_1e^{-t}u(t)]-[3A_2e^{-3t}\delta(t)-9A_2e^{-3t}u(t)]$$
$$=(A_1+A_2)\delta'(t)-(A_1+3A_2)\delta(t)+(A_1e^{-t}+9A_2e^{-3t})u(t)$$

$$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t) \qquad A_1=1/2, A_2=1/2$$

$$h(t)=(\tfrac{1}{2}e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

线性时不变连续系统的时域法分析

卷积积分



时不变性

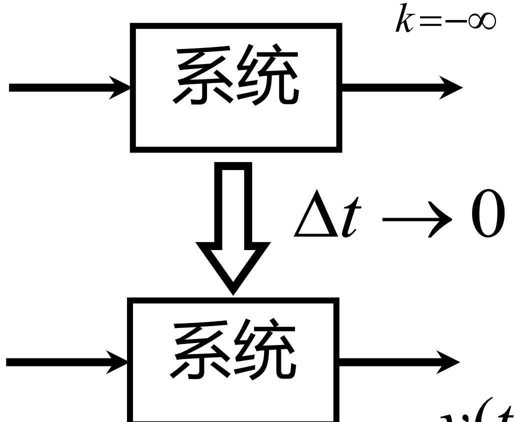
齐次性

线性时不变连续系统的时域法分析

➲ 卷积积分

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \bullet \delta(t - k\Delta t) \bullet \Delta t$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \bullet h(t - k\Delta t) \bullet \Delta t$$



叠加性

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \bullet \delta(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \bullet h(t - \tau) d\tau$$

$$= x(t) * h(t)$$

线性时不变系统对任意输入信号$x(t)$的响应

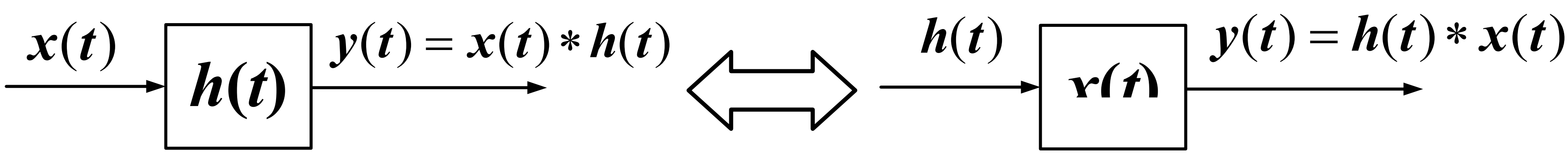
= 输入信号$x(t)$与系统单位冲激响应$h(t)$的卷积

线性时不变连续系统的时域法分析

➲ 卷积的性质

- **交换律**

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$



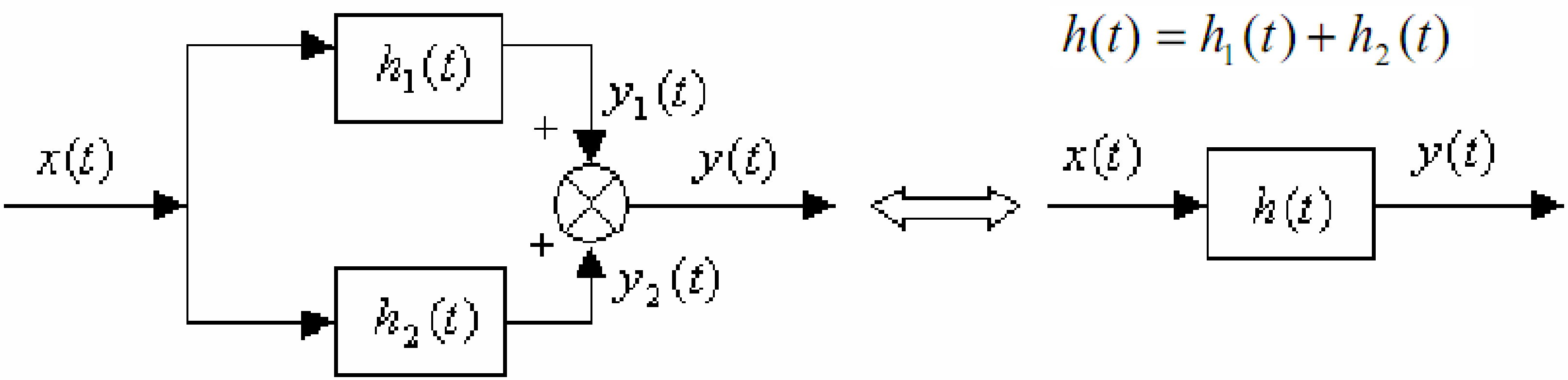
表明在线性时不变系统中，对于输出而言，输入信号和系统的单位冲激响应的作用可以互换。

线性时不变连续系统的时域法分析

➲ 卷积的性质

- **分配率**

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

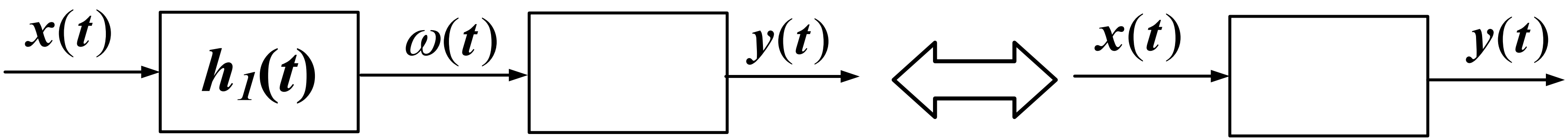


表明并联的线性时不变系统对输入的响应等于组成并联系统的各子系统对输入的响应之和

线性时不变连续系统的时域法分析

➲ 卷积的性质

- **结合律** $[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$



表明串联的线性时不变系统的单位冲激响应是各个子系统的单位冲激响应的逐次卷积

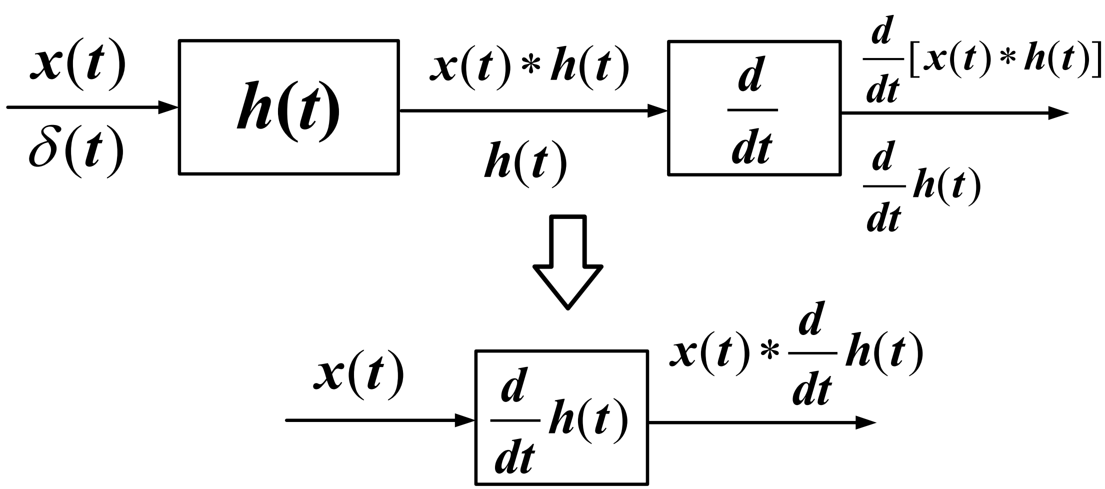
线性时不变连续系统的时域法分析

卷积的性质

- 微分

$$\frac{d}{dt}[x(t)*h(t)] = x(t)*\frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}x(t)*h(t)$$

$$\frac{d}{dt}[x(t)*h(t)] = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{d}{dt}h(t-\tau)d\tau = x(t)*\frac{d}{dt}h(t)$$



线性时不变连续系统的时域法分析

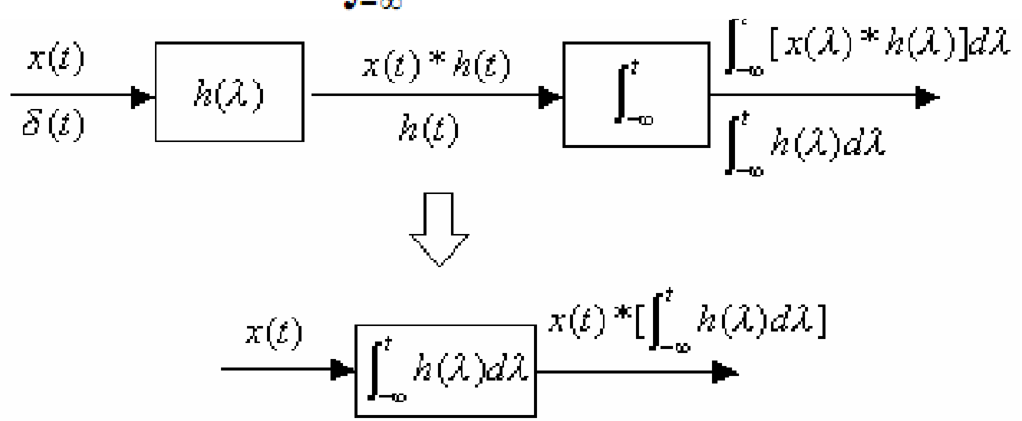
卷积的性质

- **积分**

$$\int_{-\infty}^{t}[x(\lambda)*h(\lambda)]d\lambda = x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda] = [\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda]*h(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}[x(\lambda)*h(\lambda)]d\lambda = \int_{-\infty}^{t}[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(\lambda-\tau)d\tau]d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda-\tau)d\lambda]d\tau$$

$$= x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda]$$



线性时不变连续系统的时域法分析

卷积的性质（常用）

- 冲激函数的卷积

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$\delta(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

$$x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-\mathrm{t}_2)$$

$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_1-\mathrm{t}_2)$$

$$x(t)*\delta'(t)=x'(t)$$

- 阶跃函数的卷积

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

线性时不变连续系统的频域法分析

- 考察单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统对复指数信号 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的响应

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \cdot e^{j\omega t}$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

线性时不变系统对复指数信号的响应仍是一个同频率的复指数信号，只是其幅值和相位发生了改变，而其改变由频率响应函数$H(\omega)$决定。

➲ 对于任意信号 $x(t)$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

利用系统的齐次性和叠加性

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

FT反变换

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

从两方面进行信号的改变

$$|Y(\omega)|=|X(\omega)|\cdot|H(\omega)|$$

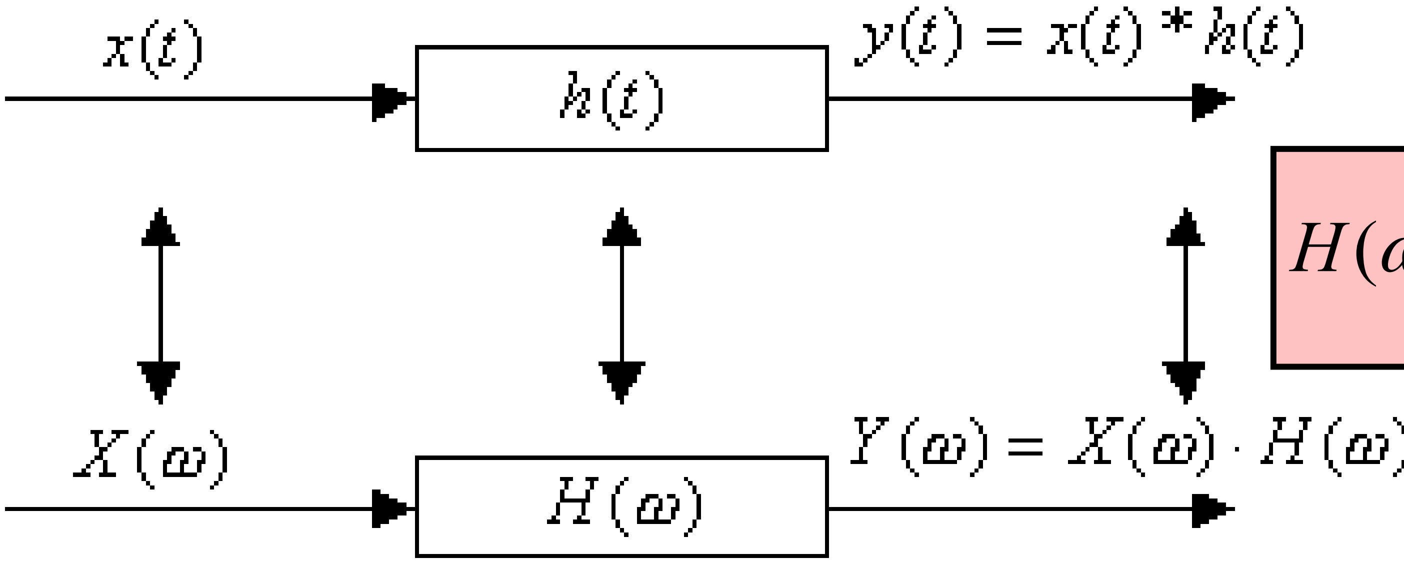
$$\varphi_y(\omega)=\varphi_x(\omega)+\varphi_h(\omega)$$

使输入信号的某些频率分量得到增强，某些频率分量被削弱或保持不变，具有**滤波**的特性

$$y(t)=x(t)*h(t) \xleftrightarrow{\text{FT时域卷积定理}} Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \rightarrow H(\omega)=\underbrace{|H(\omega)|}_{\text{系统的幅频特性}}e^{j\underbrace{\varphi_h(\omega)}_{\text{系统的相频特性}}}$$

线性时不变系统的时域、频域对应关系



$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$H(\omega)$是系统在零状态条件下，系统输出响应的傅立叶变换$Y(\omega)$与输入激励的傅立叶变换$X(\omega)$之比。

频率响应特性

$$\boxed{H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=|H(\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_h(\omega)}}$$

$|H(\omega)|\sim\omega$ 称为系统的幅频特性。

$\angle\varphi_h(\omega)\sim\omega$ 称为系统的相频特性。

输出信号 $y(t)$ 的**幅度频谱**为 $|Y(\omega)|=|X(\omega)|\cdot|H(\omega)|$

相位频谱为 $\varphi_y(\omega)=\varphi_x(\omega)+\varphi_h(\omega)$

这种改变使输入信号的某些频率分量得到增强，某些频率分量被削弱或保持不变，具有滤波的特性。

[例1]已知描述某系统的微分方程为

$$y'(t)+2y(t)=x(t)$$

求系统对输入信号 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的响应。

解：对方程两边取傅立叶变换，得

$$j\omega Y(\omega)+2Y(\omega)=X(\omega)$$

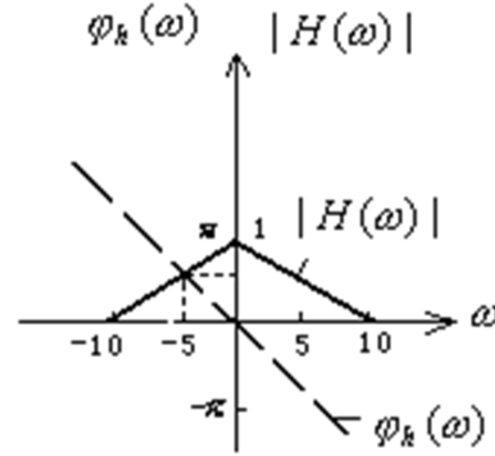
- 系统的频率特性函数 $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\dfrac{1}{j\omega+2}$
- 对$x(t)$取傅立叶变换 $X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}$
- 系统响应$y(t)$的傅立叶变换为

$$Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)=\frac{1}{j\omega+1}\cdot\frac{1}{j\omega+2}=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}$$

- 对$Y(\omega)$取傅立叶反变换

$$y(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

例：如图所示系统的幅频特性和相频特性。求当系统激励为 $x(t)$=2+4cos5t+4cos10t 时的响应 $y(t)$。



- 单位直流信号的傅立叶变换

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$ **对偶性**

因$\delta(t)$是偶函数,故 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Longrightarrow x(t)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega \mp \omega_0)$$ **频移性**

$$\left[x(t)\cos\omega_0 t\right] = \left[x(t)\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\left[x(t)\sin\omega_0 t\right] = \left[x(t)\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}\right] \leftrightarrow \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[X(\omega-\omega_0)-X(\omega+\omega_0)\right]$$

例：如图所示系统的幅频特性和相频特性。求当系统激励为 $x(t)$=2+4cos5t+4cos10t 时的响应 $y(t)$。

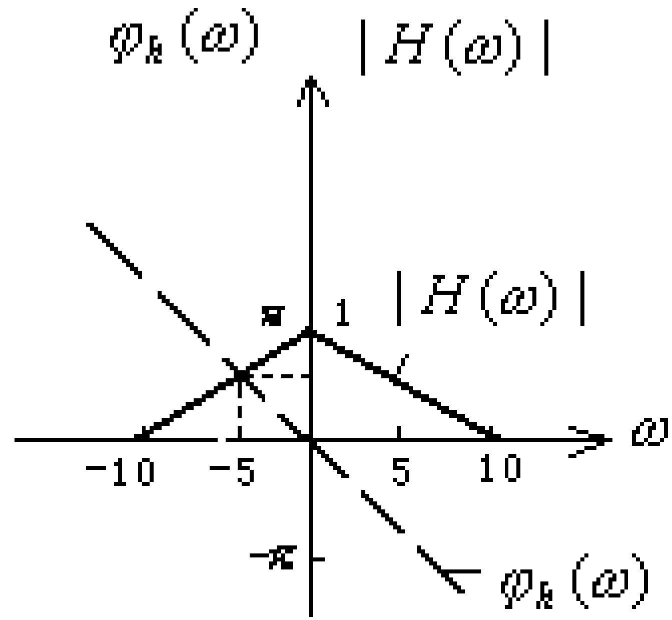
$$X(\omega)=4\pi\delta(\omega)+4\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]+$$
$$4\pi[\delta(\omega+10)+\delta(\omega-10)]$$

$$=4\pi\sum_{n=-2}^{2}\delta(\omega-n\omega_0)\qquad (\omega_0=5)$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=4\pi\sum_{n=-2}^{2}H(\omega)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$=4\pi\sum_{n=-2}^{2}H(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$=4\pi[H(-10)\delta(\omega+10)+H(-5)\delta(\omega+5)+$$
$$H(0)\delta(\omega)+H(5)\delta(\omega-5)+H(10)\delta(\omega-10)]$$



$$H(-10)=H(10)=0、H(-5)=0.5e^{j\frac{\pi}{2}}、H(5)=0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}、H(0)=1$$

滤波?

$$Y(\omega)=4\pi[0.5e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega+5)+\delta(\omega)+0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega-5)]$$

$$\updownarrow$$

$$e^{-j(5t-\frac{\pi}{2})}+2+e^{j(5t-\frac{\pi}{2})}=2+2\cos(5t-\frac{\pi}{2})$$

无失真传输

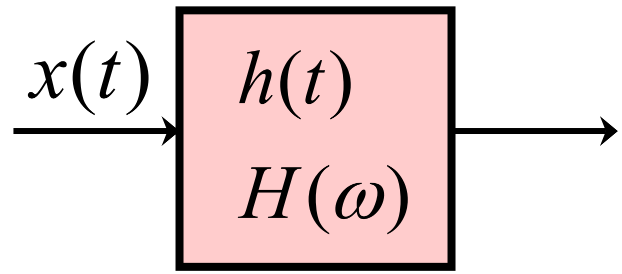
- 信号无失真传输是实现信息可靠传送与交换的基本条件，它要求信号通过系统后，在时域上保持原来信号随时间变化的规律，即**信号的波形不变**，而只能是**幅度上对原信号按比例地放大或缩小**，或者**在时间上有一固定的延迟**。

无失真传输

- 设原信号为 $x(t)$， 其频谱为 $X(\omega)$，经无失真传输后，输出信号 $y(t)$ 应为

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} X(\omega)$$



- **无失真传输系统的频率特性函数为**

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ke^{-j\omega t_0} \qquad y(t) = K \cdot x(t - t_0)$$

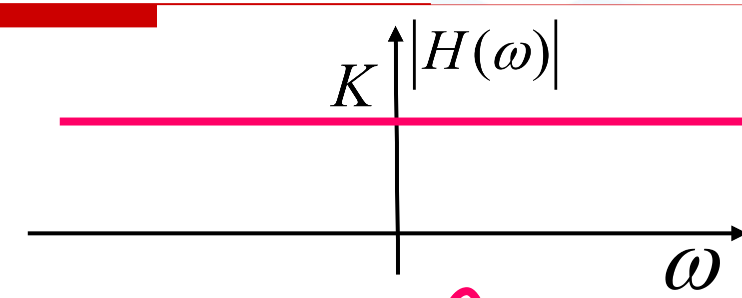
- **其幅频特性和相频特性分别为**

$$\left.\begin{array}{l} |H(\omega)| = K \\ \varphi_h(\omega) = -\omega t_0 \end{array}\right\}$$

线性相位

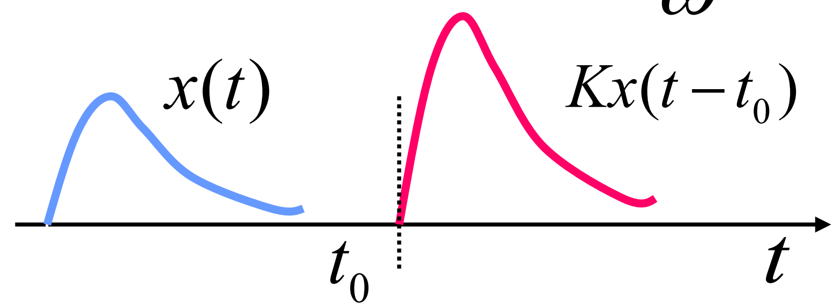
无失真传输

- 信号幅度不失真



- 信号放大、时延，波形不失真

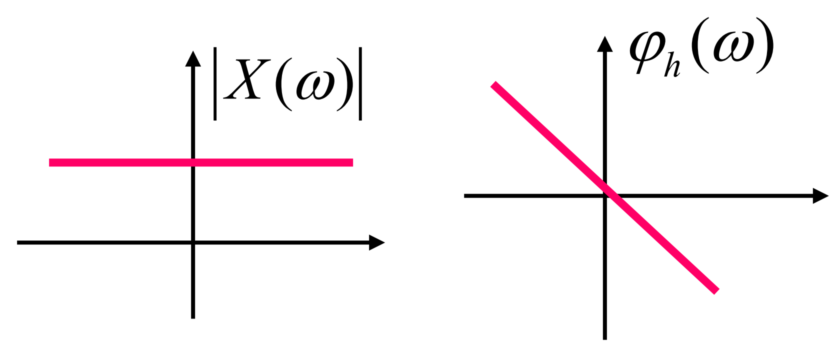
$$y(t) = Kx(t - t_0)$$



- 线性相位，波形不失真

$\varphi_h(\omega)$

$$Y(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_0}$$



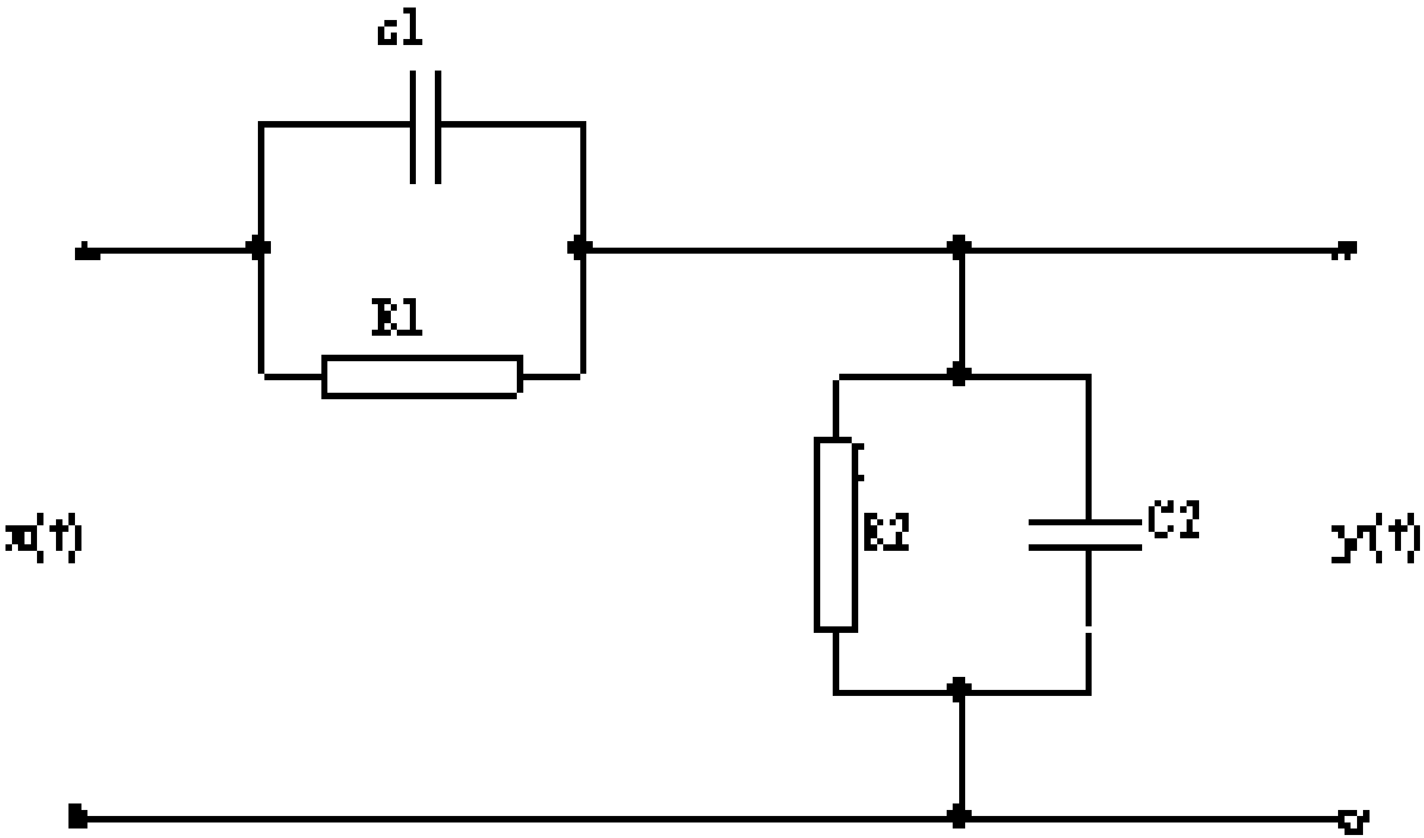
无失真传输的频域条件

仅是理想条件，但在实际中任何带有信息的物理信号都是带限信号，为实现无失真传输，只要在信号占据的频率范围内，系统的频率特性满足无失真传输条件即可

- 系统的幅频特性是一个与频率无关的常数，即在全部频带内，系统都具有恒定的放大倍数
- 系统的相频特性与频率成线性关系。且信号通过系统的延迟时间 t_0 就是系统相频特性 $\varphi_h(\omega)$ 斜率的负值，即

$$t_0 = -\frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega}$$

例2：下图是示波器的探头衰减器电路，求被测信号通过衰减器实现无失真传输必须满足的条件。



解：可求得衰减器的频率特性函数为

$$H(\omega)=\frac{C_1}{C_1+C_2}\cdot\frac{j\omega+\dfrac{1}{R_1C_1}}{j\omega+\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}}$$

若要使 **$H(\omega)$** 满足无失真传输条件，只有

$$\frac{1}{R_1C_1}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2}=\frac{C_2}{C_1}$$

$$H(\omega)=\frac{C_1}{C_1+C_2}$$

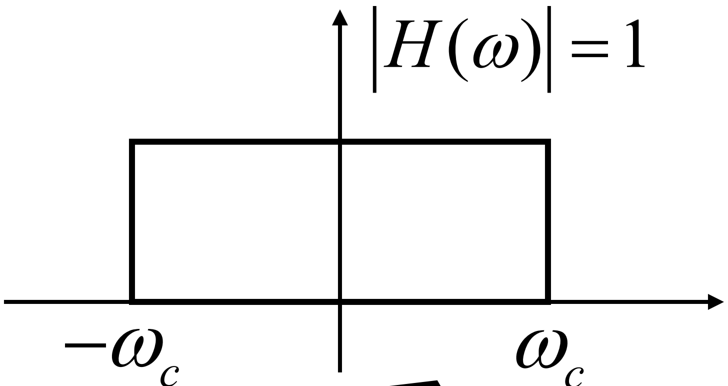
$$|H(\omega)|=\frac{C_1}{C_1+C_2}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

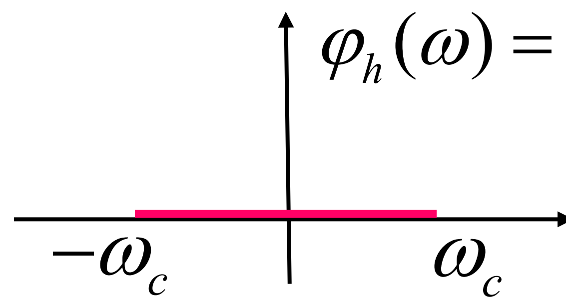
$$\varphi_h(\omega)=0$$

理想低通滤波器

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)$$





ω_c 称为滤波器的截止频率

$0<|\omega|<\omega_c$ 称为滤波器的通带

$|\omega|>\omega_c$ 称为滤波器的阻带

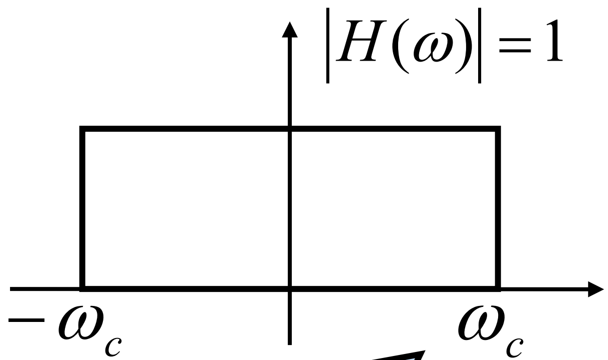
非因果系统

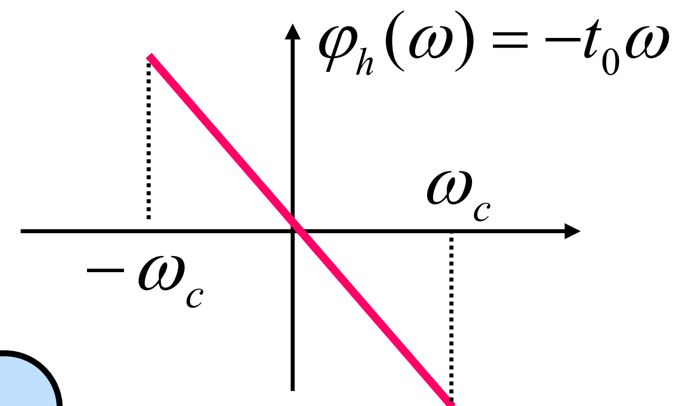
物理上不可实现

理想低通滤波器

$$H(\omega)=\begin{cases}1e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c(t-t_0))$$



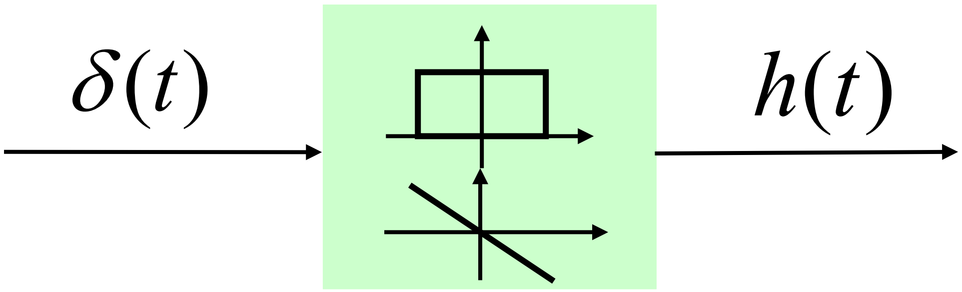


ω_c 称为滤波器的截止频率

$0<|\omega|<\omega_c$ 称为滤波器的通带

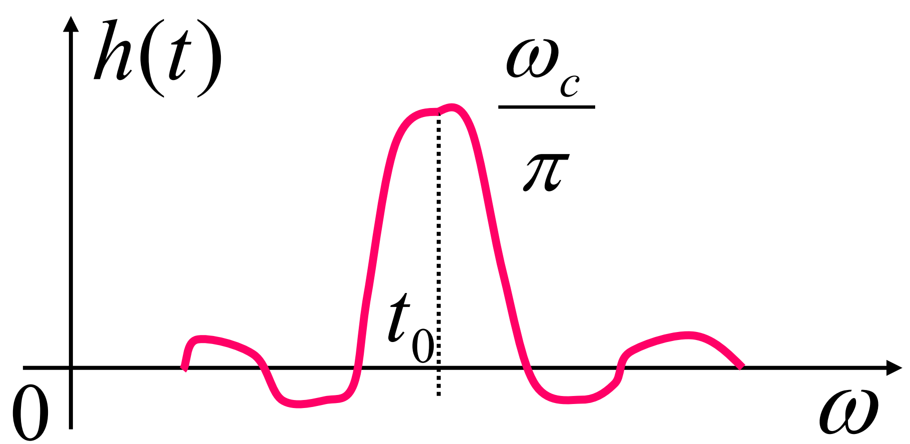
$|\omega|>\omega_c$ 称为滤波器的阻带

理想低通滤波器的冲激响应



$$h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega(t-t_0)} d\omega$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t-t_0)]$$



[例3] 求信号$x(t)$=Sa(t)cos(2t) 通过理想低通滤波器（设通带内的放大倍数为k）后的输出响应。

解： 求输入信号的傅立叶变换

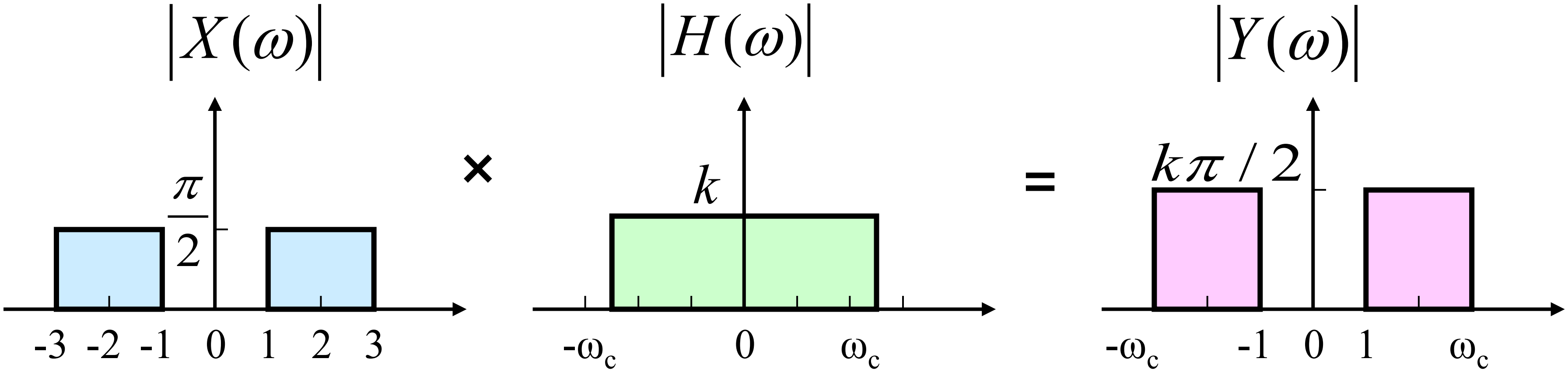
$x(t)=\mathrm{Sa}(t)\cos(2t) \xleftrightarrow{\text{频域卷积定理}} X(\omega)=\dfrac{\pi}{2}[g(\omega+2)+g(\omega-2)]$

$$Sa(t) \xleftrightarrow{F} \pi \cdot g(\omega) \quad \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

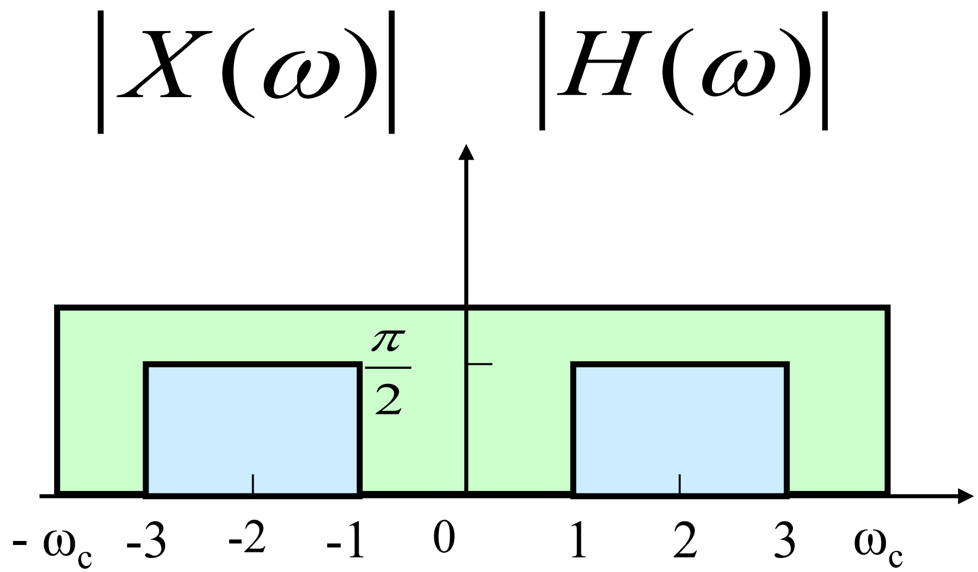
$$f(t)\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{\pi \cdot g(\omega) * \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\ \}$$

- 滤波器频率响应函数 $$H(\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$
- 滤波器输出信号的频谱为 $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$



- 根据以上图示，分三种情况讨论$Y(\omega)$
- (1) $\omega_c > 3$



输入信号的频带完全被包含在低通滤波器的通带内，有

$$Y(\omega) = \frac{k\pi}{2}[g(\omega+2) + g(\omega-2)]e^{-j\omega t_0}$$

$$|Y(\omega)| = k|X(\omega)|$$

$$y(t) = kx(t-t_0) = kSa(t-t_0)\cos 2(t-t_0)$$

输出信号为输入信号的 t_0 延时的 k 倍

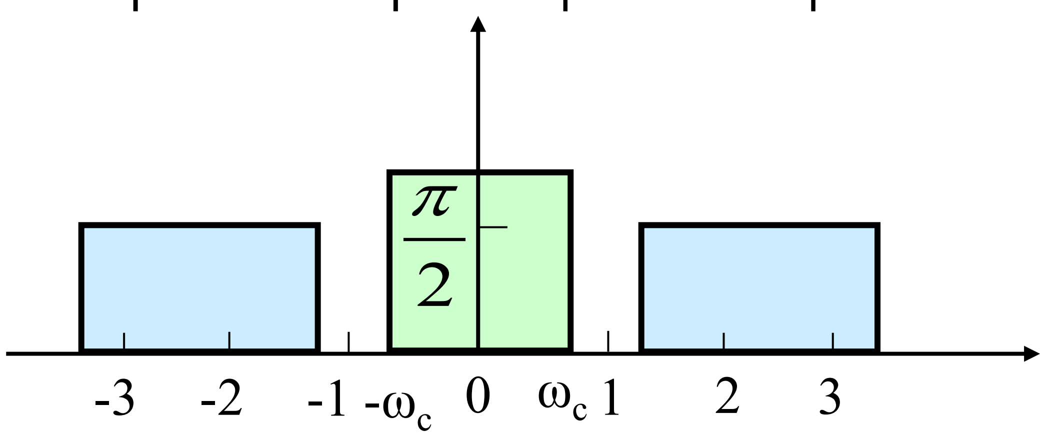
(2) $\omega_c < 1$

输入信号频带完全落在低通滤波器的通带外,则有

$$Y(\omega) = 0, y(t) = 0$$

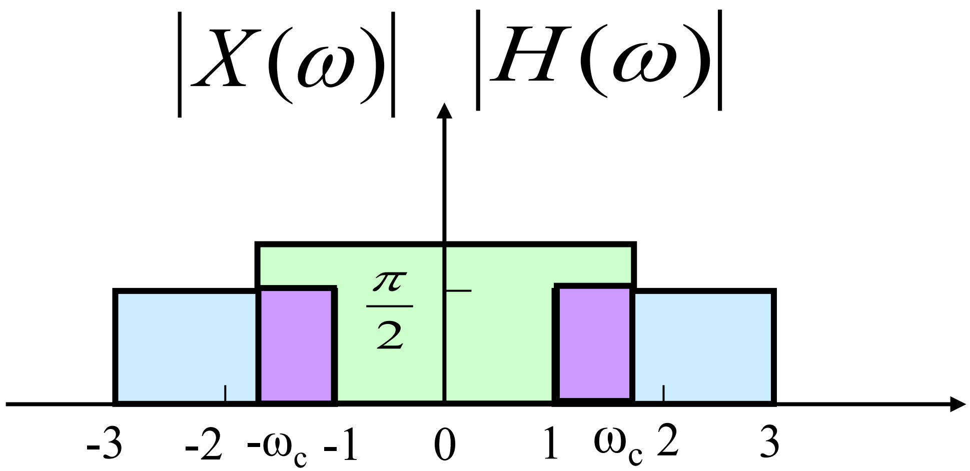
- **系统无输出**

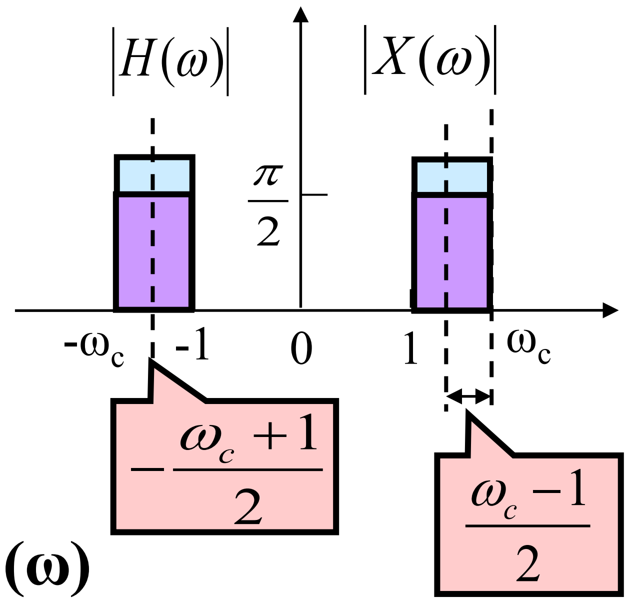
$$\left|X(\omega)\right| \qquad \left|H(\omega)\right|$$



(3) $1<\omega_c<3$

输入信号的频带部分落在低通滤波器通带内





- 把**不考虑放大及时延**的$Y(\omega)$看成是$Y_1(\omega)$

$$Y_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{\pi g_1(\omega)*\pi[\delta(\omega+\frac{\omega_c+1}{2})+\delta(\omega-\frac{\omega_c+1}{2})]\}$$

$$\boxed{g_1(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\dfrac{\omega_c-1}{2}\\ 0 & |\omega|>\dfrac{\omega_c-1}{2}\end{cases}}$$

$$Sa(\omega_c t) \Longleftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} g(\omega), \quad g(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$\frac{\omega_c - 1}{2} Sa(\frac{\omega_c - 1}{2} t) \Longleftrightarrow \pi g_1(\omega)$$

$$\boxed{g_1(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\omega_c - 1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_c - 1}{2} \end{cases}}$$

$$\cos \omega_0 t \Longleftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\cos(\frac{\omega_c + 1}{2} t) \Longleftrightarrow \pi[\delta(\omega + \frac{\omega_c + 1}{2}) + \delta(\omega - \frac{\omega_c + 1}{2})]$$

时域卷积定理： $x_1(t) \cdot x_2(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

$$y_1(t) = \frac{\omega_c - 1}{2} Sa(\frac{\omega_c - 1}{2} t) \cos(\frac{\omega_c + 1}{2} t)$$

由$Y_1(\omega)$推导$Y(\omega)$

$$Y(\omega) = kY_1(\omega)e^{-j\omega t_0} \qquad |\omega| < \omega_c$$

➲ **利用傅立叶变换的时移特性**

$$x(t \pm t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\pm j\omega t_0} X(\omega)$$

$$y(t) = \frac{k(\omega_c - 1)}{2} Sa(\frac{\omega_c - 1}{2}(t - t_0))\cos(\frac{\omega_c + 1}{2}(t - t_0))$$

复频域分析

在s域中讨论系统对输入信号的响应及其特性就是复频域分析法。信号在频域中有非常明确的物理意义，在复频域中其物理意义不清晰。但是作为一种分析方法，它比频域法更方便、更有效：

- 更方便地求取系统对输入信号的响应（求解微分方程)
- 更有效地研究既定系统的特性
- 方便地实行系统的综合和设计

微分方程的复频域求解

设线性时不变系统为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{(j)}(t)$$

式中，$\boldsymbol{x(t)}$ 为 $\boldsymbol{t=0}$ 时接入的因果输入信号；$\boldsymbol{y(t)}$ 为系统的输出信号。设 $\boldsymbol{x(t)}$ 接入前，系统不处于静止状态，即系统具有非零初始条件:

$$y^{(i)}(0\_) \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

微分方程的复频域求解

根据单边拉普拉斯变换及其时域微分性质

$$L[y^{(i)}(t)] = s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0_-)$$

由于 **$x(t)$** 是 **t=0** 时接入的因果信号，得

$$x^{(j)}(0_-) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L[x^{(j)}(t)] = s^j X(s)}$$

将系统两边取拉普拉斯变换,得

$$\sum_{i=0}^{n} a_i [s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0_-)] = \sum_{j=0}^{m} b_j s^j X(s)$$

微分方程的复频域求解

$$[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i]Y(s) - \sum_{i=0}^{n} a_i [\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0)] = [\sum_{j=0}^{m} b_j s^j]X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} X(s) + \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i [\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0_-)]}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

s的有理函数与输入信号的拉普拉斯变换X(s) 相乘，表示系统在“起始松弛”情况下对激励的响应。这一项为系统零状态响应 $y_{zs}(t)$的拉普拉斯变换 $Y_{zs}(s)$

s的有理函数,与输入的拉普拉斯变换无关，仅取决于输出及其各阶导数的初始值。这一项表示系统在本次输入为零时仍有的输出，即零输入响应 $y_{zi}(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y_{zi}(s)$

微分方程的复频域求解

$$Y(s)=Y_{zs}(s)+Y_{zi}(s)$$

两边取拉普拉斯反变换

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$$

$$y_{zs}(t)=L^{-1}\left[\frac{\sum_{j=0}^{m}b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}X(s)\right]$$

$$y_{zi}(t)=L^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i[\sum_{k=0}^{i-1}s^{i-1-k}y^{(k)}(0_-)]}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}\right]$$

利用复频域分析法,能方便地求取系统的零输入响应、零状态响应以及全响应，这是时域法、频域法都难以做到的。

微分方程的复频域求解

例：线性时不变系统

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2x'(t)+6x(t)$$

的初始状态为 $y(0_-)=2, y'(0_-)=1$,求在输入信号 $x(t)=u(t)$ 的作用下,系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

解： 对方程取单边拉普拉斯变换，有

$$s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)+3sY(s)-3y(0_-)+2Y(s)$$
$$=2sX(s)+6X(s)$$

整理结果

$$(s^2+3s+2)Y(s)-y'(0_-)-(s+3)y(0_-)=(2s+6)X(s)$$

代入初始条件

$$y(0_-)=2,\ y'(0_-)=1$$

$$Y(s)=\frac{2s+6}{s^2+3s+2}X(s)+\frac{y'(0_-)+(s+3)y(0_-)}{s^2+3s+2}$$
$$=Y_{zs}(s)+Y_{zi}(s)$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{y'(0\_)+(s+3)y(0\_)}{s^2+3s+2}=\frac{1+2(s+3)}{s^2+3s+2}$$

$$=\frac{2s+7}{(s+1)(s+2)}=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+6}{s^2+3s+2}X(s)$$

$$X(s)=L[u(t)]=\frac{1}{s}$$

$$=\frac{2s+6}{s(s+1)(s+2)}=\frac{3}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$y_{zi}(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$$

$$y_{zs}(t)=(3-4e^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(3+e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$$

传递函数

如果仅考虑零状态响应，即认为系统在零初始条件下对输入激励的响应，则

$$Y(s)=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} X(s)$$

定义在零初始条件下,系统输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比为系统的传递函数,记为$H(s)$，即

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

s的有理分式，它只与描述系统的微分方程的结构及系数a_i、b_j有关

传递函数

由于系统的传递函数较易获得,往往通过对$\boldsymbol{H(s)}$的反变换求系统的单位冲激响应，也可以由

$$H(\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$$

求系统的频率特性函数，给系统分析带来方便。

除此之外，传递函数在系统理论中占有十分重要的地位，它的零、极点的分布与系统的稳定性、瞬态响应都有明确的对应关系，在反馈控制系统的分析和综合中更是重要的工具。

[例2] 求下述线性时不变系统的单位冲激响应

$$y''(t)+2y'(t)+2y(t)=x'(t)+3x(t)$$

解： 设系统的初始条件为零，对微分方程取拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=sX(s)+3X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+3}{s^2+2s+2}=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{2}{(s+1)^2+1}$$

利用频移性质

$$L^{-1}[\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}]=e^{-t}\cos t u(t) \qquad L^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2+1^2}]=e^{-t}\sin t u(t)$$

系统的单位冲激响应

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=e^{-t}[\cos t+2\sin t]u(t)$$

[例3] 已知线性时不变系统对 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的零状态响应为 $y(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$

试求该系统的单位冲激响应并写出描述该系统的**微分方程**

$$x(t)=e^{-t}u(t) \Rightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$y(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

$$Y(s)=\frac{3}{s+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{1}{s+3}=\frac{2s+8}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\cdot(s+1)=\frac{4}{s+2}-\frac{2}{s+3}$$

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=(4e^{-2t}-2e^{-3t})u(t)$$

续例3

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\frac{2s+8}{s^{2}+5s+6}$$

求反变换,并注意到系统的初始条件为零，得

$$s^{2}Y(s)+5sY(s)+6Y(s)=2sX(s)+8X(s)$$

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2x'(t)+8x(t)$$

线性时不变离散系统的时域法分析

线性常系数差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \quad (a_0 = 1)$$

或写为：

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N)$$
$$= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots + b_{M-1} x(n-M+1) + b_M x(n-M)$$

且已知N个初始条件： $y(-1)$、$y(-2)\cdots y(-N)$

将激励 $\delta(n)$ 及其响应 $h(n)$ 代入

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k)$$

线性时不变离散系统的时域法分析

与连续系统类似的讨论，可得到$h(n)$

$$h(n)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}A_i\lambda_i^n u(n) & N>M\\ \sum_{j=0}^{N-M}C_j\delta(n-j)+\sum_{i=1}^{N}A_i\lambda_i^n u(n) & N\le M\end{cases}$$

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

$$A_i\lambda_i^n u(n)=A_i\delta(n)+A_i\lambda_i\delta(n-1)+\cdots+A_i\lambda_i^M\delta(n-M)+\cdots$$

已知线性时不变因果离散系统的差分方程为

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

试求出该系统的单位样值响应。

系统的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$，

求得两个特征根分别为 $\lambda_1=3,\lambda_2=2$，

又由于 $N=M=2$，根据(4-14)式，$h(n)$ 为

$$h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$$

它应满足差分方程

$$h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$$

按照上述讨论，$A_1 3^n u(n)$ 和 $A_2 2^n u(n)$ 分别可写为

$$A_1 3^n u(n)=A_1\delta(n)+3A_1\delta(n-1)+9A_1\delta(n-2)+\cdots$$

$$A_2 2^n u(n)=A_2\delta(n)+2A_2\delta(n-1)+4A_2\delta(n-2)+\cdots$$

所以 $h(n)=(C_0+A_1+A_2)\delta(n)+(3A_1+2A_2)\delta(n-1)+(9A_1+4A_2)\delta(n-2)+\cdots$

且有 $h(n-1)=(C_0+A_1+A_2)\delta(n-1)+(3A_1+2A_2)\delta(n-2)+\cdots$

$$h(n-2)=(C_0+A_1+A_2)\delta(n-2)+\cdots$$

将它们代入上面的差分方程并加以整理得

$$(C_0+A_1+A_2)\delta(n)+(-5C_0-2A_1-3A_2)\delta(n-1)+6C_0\delta(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$$

等式两边对应项系数相等，则有

$$\begin{cases} C_0+A_1+A_2=1 \\ 5C_0+2A_1+3A_2=0 \\ 6C_0=-3 \end{cases}$$

解此联立方程，得

$$C_0=-1/2,\ A_1=2,\ A_2=-1/2$$

故系统的单位样值响应为

$$h(n)=-0.5\delta(n)+2\cdot 3^n u(n)-0.5\cdot 2^n u(n)$$

$h(n)$用后推方程表示为

$$h(n)=\delta(n)-3\delta(n-2)+5h(n-1)-6h(n-2)$$

迭代求解法

分别令 n=0、1、2，得

$$h(0)=\delta(0)-3\delta(-2)+5h(-1)-6h(-2)=1$$

$$h(1)=\delta(1)-3\delta(-1)+5h(0)-6h(-1)=5$$

$$h(2)=\delta(2)-3\delta(0)+5h(1)-6h(0)=16$$

其中 $h(-1)=0$, $h(-2)=0$，这是零初始条件决定的。分别将 $h(0)$、$h(1)$、$h(2)$ 代入下式

$$h(n)=C_0\delta(n)+A_1\cdot 3^n u(n)+A_2\cdot 2^n u(n)$$

得如下联立方程：

$$\begin{cases} C_0+A_1+A_2=1 \\ 3A_1+2A_2=5 \\ 9A_1+4A_2=16 \end{cases}$$

解此联立方程，得 $C_0=-1/2, A_1=2, A_2=-1/2$ ，得到和上面同样的结果，即

$$h(n)=-0.5\delta(n)+2\cdot 3^n u(n)-0.5\cdot 2^n u(n)$$

例 求系统的单位脉冲响应

$$y(n)-5y(n-1)+4y(n-2)=x(n)\left(n\geq 0\right)$$

解： $h(n)$应满足下列方程：

$$h(n)\text{-}5h(n\text{-}1)+4h(n\text{-}2)=\delta(n)$$

因$n<0$时系统处于零初始状态，故$h(-1)=h(-2)=0$。

递推得δ(n)引起的系统初值为$h(0)=1$.

$n>0$时，系统方程为

$h(n)\text{-}5h(n\text{-}1)+4h(n\text{-}2)=0$ 初始条件 $h(0)=1,h(-1)=0$

续例题

方程的通解为 $h(n)=A_1 1^n + A_2 4^n$

$$\begin{cases} h(0)=A_1+A_2=1 \\ h(-1)=A_1+\dfrac{A_2}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow A_1=-\frac{1}{3}, A_2=\frac{4}{3}$$

所以系统的单位响应为：

$$h(n)=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot 4^n \qquad (n\geq 0)$$

单位响应求解方法总结

(a) 写出单位样值作用下系统的差分方程。

如$h(n)-5h(n-1)+4h(n-2)=\delta(n)$

(b) 递推得到单位样值作用时刻系统的输出作为其边界条件之一，如$h(0)$。

(c) 写出激励为零时系统的差分方程，并写出N个边界条件，求解该方程即为所求解。

$$h(n)-5h(n-1)+4h(n-2)=0$$

初始条件$h(0)=1,h(-1)=0$

离散系统的单位脉冲响应

在连续线性系统中，由单位冲激函数$\delta(t)$作用于系统引起单位冲激响应（零状态响应）$h(t)$。任意激励的响应（零状态响应）可以采用单位冲激响应参与的**卷积**实现。对于离散线性系统，有单位样值序列$\delta(n)$作用于系统引起单位脉冲响应（零状态响应）$h(n)$。任意激励的响应（零状态响应）可以采用单位脉冲响应参与的**卷积和**实现。

因为$\delta(n)$只在$n=0$时作用于处于零状态下的系统，而$n > 0$时$\delta(n)$全为零。故$\delta(n)$的作用相当于在$n=0$时使系统产生一个初态而后激励为零，系统的响应为由该初态引起的零输入响应。

卷积和、任意信号的零状态响应

若：$h(n)$为单位序列的零状态响应，则根据**线性**和**时不变性**，激励（序列）$x(n)$ 的零状态响应 $y(n)$ 为：

$$x(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)\delta(n-i)$$

$$\delta(n)\rightarrow h(n)$$

$$x(n)\rightarrow y(n)$$

$$\Rightarrow$$

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)h(n-i)$$

$$=x(n)*h(n)$$

称为$x(n)$和$h(n)$的卷积和。

若$x(n)$和$h(n)$皆为因果序列，那么求和限从0至n。

如果$x(n)$和$h(n)$都为有限长序列，$x(n)$的取值范围为$[0, N_1-1]$，$h(n)$的取值范围为$[0,N_2-1]$，那么$y(n)$的取值范围为：**$[0,N_1+N_2-2]$**,即$y(n)$的长度为**N_1+N_2-1**。

例：已知系统的单位响应为：$h(n)=a^n u(n)$，系统的激励为：$x(n)=b^n u(n)$, $a \neq b$，

求该系统对激励$x(n)$的零状态响应 $y(n)$。

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i)=\sum_{i=0}^{\infty} b^i a^{n-i} u(n-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} b^i a^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^i a^n = a^n \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \qquad (n=0,1\ldots)$$

提示：卷积和（系统的零状态响应）可借助离散傅里叶变换（DFT）的快速算法 - 快速傅里叶变换（FFT）实现。

线性时不变离散系统的Z域法分析（补充）

根据单边Z变换的移位特性：$x(n-j)\leftrightarrow z^{-j}[X(z)+\sum_{i=-j}^{-1}x(i)z^{-i}]$

对差分方程两边Z变换：$\sum_{k=0}^{N}a_k \mathrm{Z}[y(n-k)]=\sum_{k=0}^{M}b_k \mathrm{Z}[x(n-k)]$

$$\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{i=-k}^{-1}y(i)z^{-i}]=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}[X(z)+\underline{\sum_{i=-k}^{-1}x(i)z^{-i}}]$$

激励在$n=0$时接入：$x(n)=0$ （$n<0$）

$$Y(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}a_k\sum_{i=-k}^{-1}y(i)z^{-(i+k)}+[\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}]X(z)}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

$$=\frac{M(z)}{D(z)}+\frac{N(z)}{D(z)}X(z)$$

可以看出：$D(z)$、$N(z)$是z^{-1}的多项式，它们的系数是差分方程的系数a_k和b_k。$M(z)$也是z^{-1}的多项式，其系数与a_k和响应的各初始状态$y(-1)\ldots y(-N)$有关，与激励无关。

线性时不变离散系统的Z域法分析（补充）

$$Y(z)=\frac{M(z)}{D(z)}+\frac{N(z)}{D(z)}X(z)\Rightarrow y(n)=\mathrm{Z}^{-1}[\frac{M(z)}{D(z)}]+\mathrm{Z}^{-1}[\frac{N(z)}{D(z)}X(z)]$$

$$=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$$

第一项仅与初始状态有关而与激励无关，因而是**零输入响应**，第二项仅与激励有关而与初始状态无关，因而是**零状态响应。**

结论：

用Z变换求解差分方程的方法是对差分方程两边进行Z变换，然后求取Z反变换。

例 求解 $y(n)-7y(n-1)+12y(n-2)=17\cdot u(n)$

初始条件 $y(-1)=1, y(-2)=2$

解： $Y(z)-7\left[z^{-1}Y(z)+y(-1)\right]+12\left[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]=\dfrac{17}{1-z^{-1}}$

$$Y(z)=\frac{17}{\left(1-7z^{-1}+12z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{-17-12z^{-1}}{1-7z^{-1}+12z^{-2}}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{17z^{2}}{(z-3)(z-4)(z-1)}+\frac{-17z-12}{(z-3)(z-4)}$$

$$=\frac{5z+12}{(z-3)(z-4)(z-1)}$$

$$=\frac{-27/2}{z-3}+\frac{32/3}{z-4}+\frac{17/6}{z-1}$$

$y(n) = -13.5\cdot(3)^{n}+10.67\cdot(4)^{n}+2.83 \quad (n\geq 0)$.

利用Z变换描述离散系统特性（补充）

$$Y(z)=\frac{M(z)}{D(z)}+\frac{N(z)}{D(z)}X(z)$$

$$=Y_{zi}(z)+Y_{zs}(z)$$

系统的零状态响应的Z变换与激励的Z变换之比称为<u>系统函数</u>，用$H(z)$表示：

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

系统函数只与描述系统的差分方程系数a_k和b_k有关，即只与系统的结构参数有关，它较完满地描述了系统的特性。

利用Z变换描述离散系统特性

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

当激励$x(k)$为单位脉冲序列时：

$$X(z)=\mathcal{Z}[\delta(n)]=1$$

$$H(z)=Y_{ZS}(z)$$

系统函数是系统单位响应的 z 变换。

系统函数与卷积和的关系

由序列 Z 变换**时域卷积特性**可知：

$$Y_{zs}(z) = X(z)\cdot H(z) \Rightarrow y_{ZS}(n) = \mathrm{Z}^{-1}[X(z)\cdot H(z)]$$

$$= x(n) * \mathrm{Z}^{-1}[H(z)]$$

而任意信号的零状态响应是激励和单位响应的卷积和

$$y_{zs}(n) = x(n) * h(n)$$

于是可得： $\mathrm{Z}^{-1}[H(z)] = h(n)$

即：

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}}$$

由离散系统的系统函数判别系统的稳定性

- **离散时间系统稳定的充分必要条件**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \le M$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \le M$$

因果系统

$$\lim_{n\to\infty} h(n) \to 0$$

  - **单位样值（冲激，脉冲）响应$h(n)$绝对可和**

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$|y(n)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(m)||x(n-m)| \le M_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)$$

由离散系统的系统函数判别系统的稳定性

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=K\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_i z^{-1})}$$

- 系统的单位响应（假设都为单极点情况），绝对可积

$$h(n)=\sum_{i=1}^{N} A_i p_i^{\,n} + A_0\cdot\delta(n)$$

  - 当$|p_i|>1$时，极点在Z平面的单位圆外，$h(n)$的对应分量的幅度随着n的增加而增加。
  - 当$|p_i|<1$时，极点在Z平面的单位圆内，$h(n)$的对应分量的幅度随着n的增加而减小。
  - 当$|p_i|=1$时，极点在Z平面的单位圆上，$h(n)$的对应分量的幅度随着n的增加不变。

各种$H(\ )$，$h(\ )$

连续LTI的单位冲激响应　$h(t)$ 时域

　　零初始条件下对激励为单位冲激函数$\delta(t)$所产生的响应

连续LTI的频率特性（响应）函数　$H(\omega)$ 频域

　　零状态下，系统输出响应的傅里叶变换与输入信号傅里叶变换之比，即$h(t)$ 的傅里叶变换

连续LTI的传递函数（系统函数，网络函数) $H(s)$复频域

　　零初始条件下系统输出与输入的拉普拉斯变换之比，即$h(t)$的拉普拉斯变换

对于离散LTI，有类似的单位脉冲（样值）响应$h(n)$，频率特性函数$H(\Omega)$和系统函数$H(z)$

例：求下列差分方程的单位响应：

$$y(n)-\frac{1}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$$

解：$Y_{zs}(z)(1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2})=X(z)(1+2z^{-1})$

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$=\frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{2z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$h(n)=\mathrm{Z}^{-1}[H(z)]=3(\frac{1}{2})^n-2(-\frac{1}{3})^n \qquad (n\geq 0)$$

例：利用 Z 变换法求下述差分方程描述的系统的零输入响应和零状态响应，$x(n)=u(n)$ 。

$$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)+2\cdot x(n-2)$$

$$y(-1)=2 \quad y(-2)=-1/2$$

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)]$$

$$=X(z)+2z^{-2}X(z)$$

$$Y(z)=\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}X(z)+\frac{y(-1)+2z^{-1}y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \quad y_{zs}(n)=2^{n+1}+\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{3}{2} \quad (n\geq 0)$$

$$y_{zi}(n)=2^{n+1}-(-1)^n \quad (n\geq 0)$$

作业5

第三版

P187 18(1); 20; 21(1)(2)

P256-259 5,6,11,16,21