

# 自动控制理论

## Automatic Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大



## 第六章 Chapter 6

# 频率特性分析法(Frequency Response)



# 第六章关键词

---

- 频率、频率响应、频率特性
- 幅频特性、相频特性
- 对数频率特性（BODE图）
- 极坐标图（奈奎斯特图）
- 奈奎斯特稳定判据
- 稳定裕度（幅值裕度、相位裕度）
- 频域性能



# 第六章 主要内容

---

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
  - 频域指标与时域指标的关系
  - 系统校正
- ✓ 系统的闭环频率特性



# 频域指标与时域指标的关系

## 不同的性能指标

稳定性——是系统工作的前提

稳态特性——反映了系统稳定后的精度

动态特性——反映了系统响应的快速性

人们追求的是稳定性强，稳态精度高，动态响应快。

不同域中的性能指标的形式又各不相同：

1. 时域指标：超调量 $\sigma$ 、过渡过程时间 $T_s$ 、以及峰值时间 $T_p$ 、上升时间 $T_r$ 等。

2. 频域指标：

① 开环：截止频率 $\omega_c$ 、穿越频率 $\omega_x$ 、相位裕度 $\gamma$ 及幅值裕度 $h$ 等。

② 闭环：谐振峰值 $M_r$ 、谐振频率 $\omega_r$ 及带宽 $\omega_b$ 等。

# 频域指标与时域指标的关系

- 截止频率 $\omega_c$ 与阻尼比 $\zeta$ 、自然频率 $\omega_n$ 的关系

典型单位负反馈二阶系统的开环传递函数如下：

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}; \quad G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)}$$

其中：

$$\omega_n = \sqrt{K/T}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$$

由

$$|G(j\omega_c)| = \frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}\right) - 1 = 0$$

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right) = \left(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

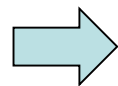
当阻尼比 $\zeta$ 一定的情况下，截止频率 $\omega_c$ 越大，自然频率 $\omega_n$ 也越大，闭环系统的上升时间、峰值时间和调节时间越小，系统的响应速度加快。

# 频域指标与时域指标的关系

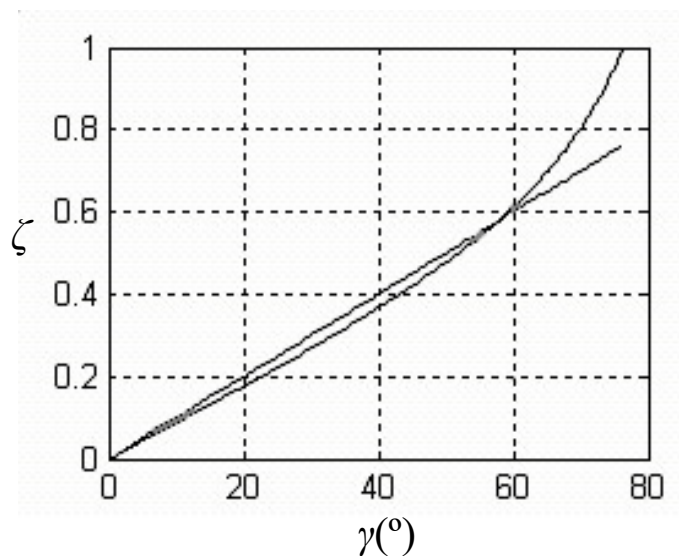
$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right) = \left(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

## ➤ 相位裕度 $\gamma$ 与阻尼比 $\zeta$ 的关系

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}$$



$$\gamma = \arctg \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} = \arctg \left( \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}} \right)$$



典型二阶系统的  $\gamma - \zeta$  图

$\gamma$  仅与  $\zeta$  有关， $\zeta$  为  $\gamma$  的增函数，且在  $\zeta \leq 0.7$  的范围内，可以近似地用一条直线表示它们之间的关系

$$\zeta \approx 0.01\gamma$$

二阶系统的相位裕度  $\gamma$  可以决定系统的  $\zeta$ ，但不能决定系统的自然频率  $\omega_n$ 。具有相同阻尼比  $\zeta$  的系统，当  $\omega_n$  不同时，过渡过程的调节时间相差很大。

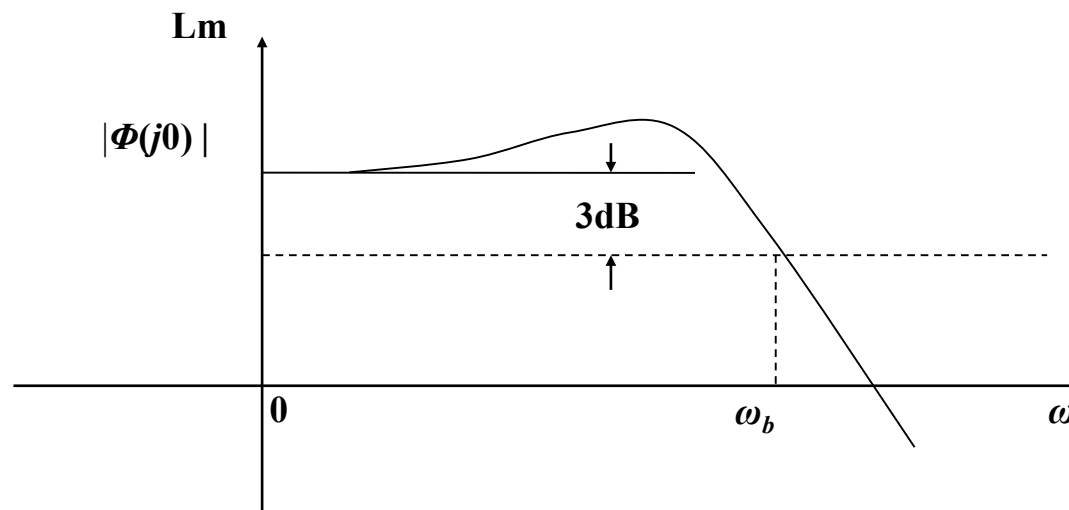
# 频域指标与时域指标的关系

## ➤ 带宽频率

当**闭环**幅频特性下降到频率为零时的分贝值以下3分贝时，对应的频率称为**带宽频率**。若出现多个交点，则指其中最低的频率。

对高于带宽频率的正弦输入信号，系统输出将呈现较大的衰减。

合理选择控制系统的带宽：  
既能以所需精度跟踪输入信号，又能抵制噪声扰动信号。



带宽频率示意图



# 频域指标与时域指标的关系

## ➤ 二阶系统频域指标与时域指标的关系

谐振峰值

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \zeta \leq 0.707$$



$$\sigma = e^{-\pi \sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}} \times 100\% \quad M_r \geq 1$$

谐振频率

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}, \quad \zeta \leq 0.707$$

带宽频率

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{2-4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

截止频率

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

相位裕度

$$\gamma = \arctg \left( \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \right)$$

调节时间

$$T_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} \quad \text{或} \quad \omega_n T_s = \frac{7}{\text{tg}\gamma}$$

二阶系统的谐振峰值  $M_r = 1.2 \sim 1.5$  时, 对应的系统超调量  $\sigma = 20 \sim 30\%$ , 这时系统可以获得较为满意的过渡过程。如果  $M_r > 2$ , 则系统的超调量  $\sigma$  将超过 40%。

# 频域指标与时域指标的关系

- 高阶系统：如存在主导极点，可采用二阶系统的公式；如不存在主导极点，有相应的频域与时域指标的近似公式：

谐振峰值

$$M_r = \frac{1}{|\sin \gamma|}$$

超调量

$$\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1), \quad 1 \leq M_r \leq 1.8$$

调节时间

$$T_s = \frac{K_0 \pi}{\omega_c}$$

$$K_0 = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, \quad 1 \leq M_r \leq 1.8$$



# 第六章 主要内容

---

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
  - 频域指标与时域指标的关系
  - 系统校正
- ✓ 系统的闭环频率特性



# 系统校正

---

- 系统校正的基本概念
- 常用校正装置的连接方式
- 串联校正
- 比例、积分、微分(PID)调节器

# 分析与校正的区别

- ◆ **系统分析** 根据**已知的系统**（即结构、参数已知），**计算出系统性能**，分析这些性能与系统参数之间的关系，**结果具有唯一性**。
- ◆ **系统的综合与校正** 根据**系统应具备的性能指标**以及原系统在性能指标上的缺陷，**引入校正装置（元件）**，以改善其性能指标。
  - 1) 逻辑上讲，系统的综合与校正是系统分析的逆问题。
  - 2) 满足系统性能指标的**校正装置**的**结构、参数和连接方式不是唯一的**，需对系统各方面性能、成本、体积、重量以及可行性综合考虑，选出最佳方案。

能使系统的控制性能满足控制要求而有目的地增添的元件称为控制系统的校正元件或称校正装置。

# 综合与校正的基本概念

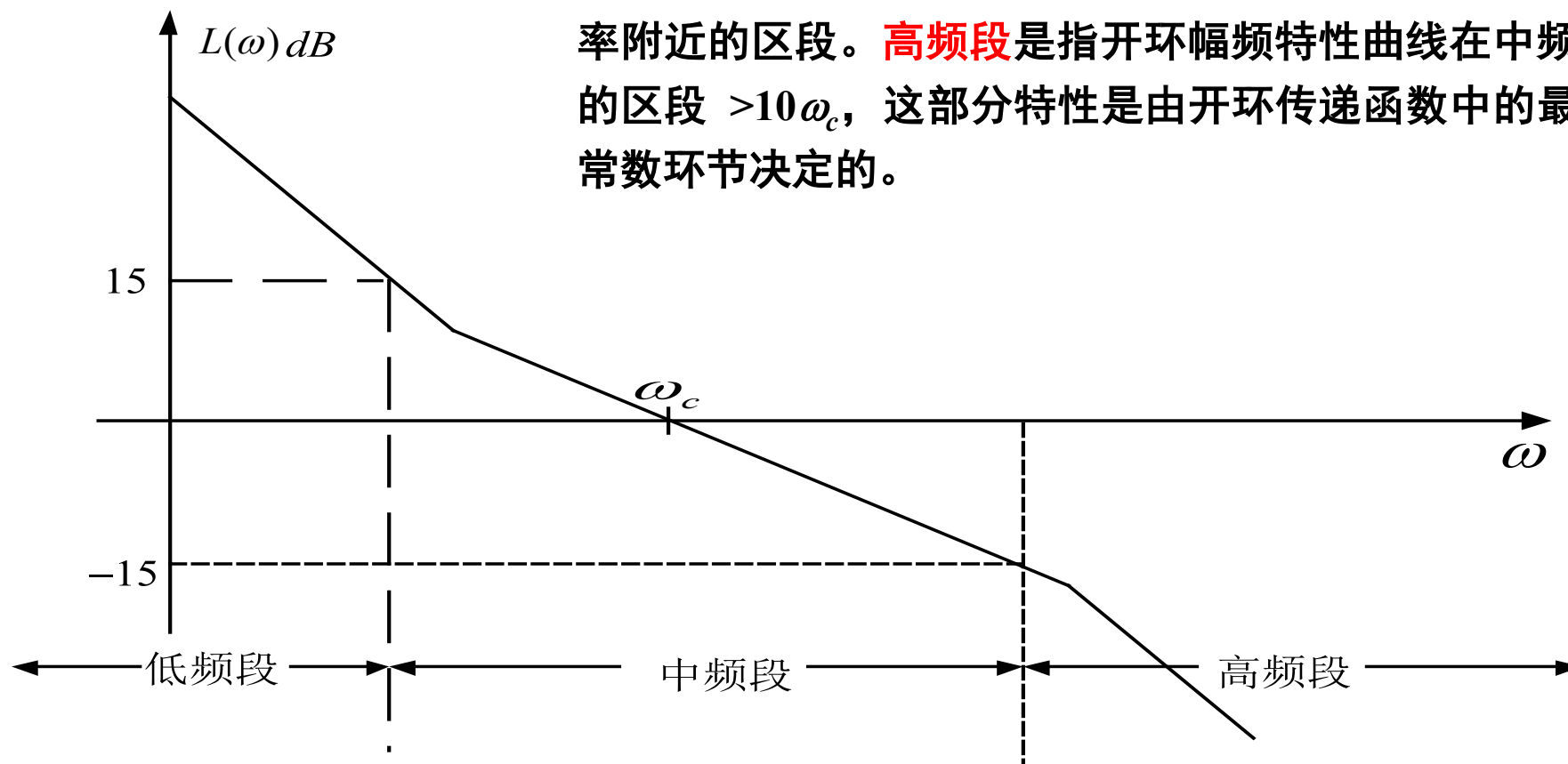
- ◆ 在控制工程实践中，综合与校正的方法应根据特定的性能指标来确定。
- ◆ 一般情况下，若性能指标以稳态误差  $e_{ss}$ 、峰值时间  $T_p$ 、最大超调量  $\sigma$  和过渡过程时间  $T_s$  等时域性能指标给出时，应用根轨迹法进行综合与校正比较方便；
- ◆ 如果性能指标是以相位裕度  $\gamma$ 、幅值裕度  $h$ 、谐振峰值  $M_r$ 、谐振频率  $\omega_r$  和系统带宽  $\omega_b$  等频域性能指标给出时，应用频率特性法进行综合与校正更合适。

# 综合与校正的基本概念

域 特性	时域 微分方程 ——分析法	复域 传递函数 ——根轨迹法	频域 频率特性 ——频率法 (开环Bode图为例) 开环因果且最小相位 主要用于0型、1型和2型
稳定性	运动方程的特征根具有负实部，则系统稳定。	闭环传递函数的极点分布在S平面的左半平面，则系统稳定。	频率特性的相位裕度大于 $0^\circ$ 、幅值裕度大于0dB，则系统稳定。
稳态	由运动方程的系数决定。	系统工作点处对应的开环根轨迹增益 $K_1$ 越大， $e_{ss}$ 越小。	取决于系统低频段特性，型别相同，低频段幅值越大， $e_{ss}$ 越小。
动态	过渡过程时间 $T_s$ 越短，最大超调量 $\sigma$ 越小，动态特性越好。	主要取决于系统主导极点位置。参数：阻尼比 $\zeta$ 、自然频率 $\omega_n$ ，主导极点距虚轴越近，系统振荡越厉害。	主要取决于系统中频段特性。参数：相位裕度 $\gamma$ 和截止频率 $\omega_c$ ， $\gamma$ 越小，振荡越厉害， $\omega_c$ 越大，响应速度越快。

# 三个频段的概念

三个频段的划分并没有严格的界限。**低频段**取决于开环增益和开环积分环节的数目，通常是指开环对数幅频特性在第一个转折以前的区段。**中频段**是指开环幅频特性曲线在截止频率附近的区段。**高频段**是指开环幅频特性曲线在中频段以后的区段  $>10\omega_c$ ，这部分特性是由开环传递函数中的最小时间常数环节决定的。





# 用开环频率特性进行系统设计

## (1) 稳

相位裕度 $\gamma$ 不低于45度  
幅值裕度不低于6dB

## (2) 快

相位裕度 $\gamma$ 在45度到60度之间  
尽可能大的开环截止频率 $\omega_c$

## (3) 准

开环幅频起始斜率为-20dB/dec或-40dB/dec  
低频段应有较高幅值

## (4) 抗干扰

开环高频段应有尽可能大的斜率。高频段特性是由小时间常数的环节决定的，由于其转折频率远离截止频率 $\omega_c$ ，所以对系统动态响应影响不大。但从系统的抗高频干扰能力来看，则需引起重视。



# 综合与校正的基本概念

## 无源或有源校正

**无源校正装置：**自身无放大能力，通常由RC网络组成，在信号传递中，会产生幅值衰减，且输入阻抗低，输出阻抗高，常需要引入附加的放大器，补偿幅值衰减和进行阻抗匹配。

无源串联校正装置通常被安置在前向通道中能量较低的部位上。

**有源校正装置：**常由运算放大器和RC网络共同组成，该装置自身具有能量放大与补偿能力，且易于进行阻抗匹配，所以使用范围与无源校正装置相比要广泛得多。



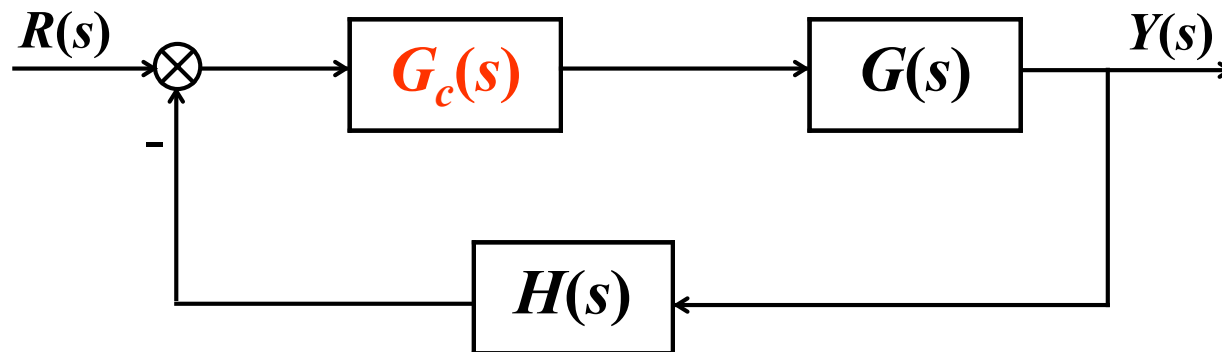
# 系统校正

---

- 系统校正的基本概念
- 常用校正装置的连接方式
  - 串联校正
  - 并联校正
  - 反馈校正
- 串联校正
- 比例、积分、微分(PID)调节器

# 串联校正

串联校正的接入位置应视校正装置本身的物理特性和原系统的结构而定。



串联校正

$G_c(s)$ : 校正装置传递函数

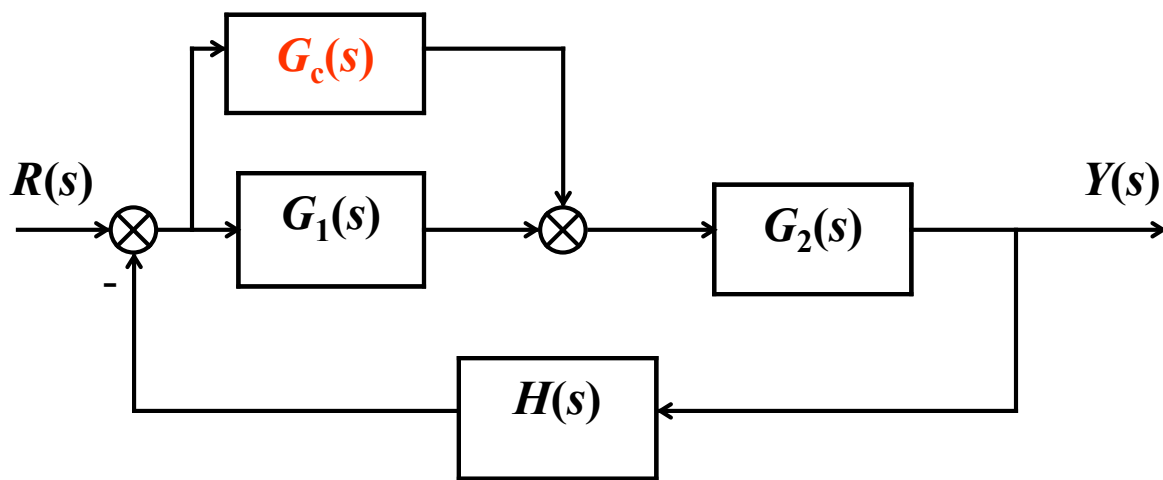
$G(s)$ : 原系统前向通道的传递函数

$H(s)$ : 原系统反馈通道的传递函数

分析简单，应用范围广，  
易于理解、接受。

# 并联校正（前馈校正：输入控制方式）

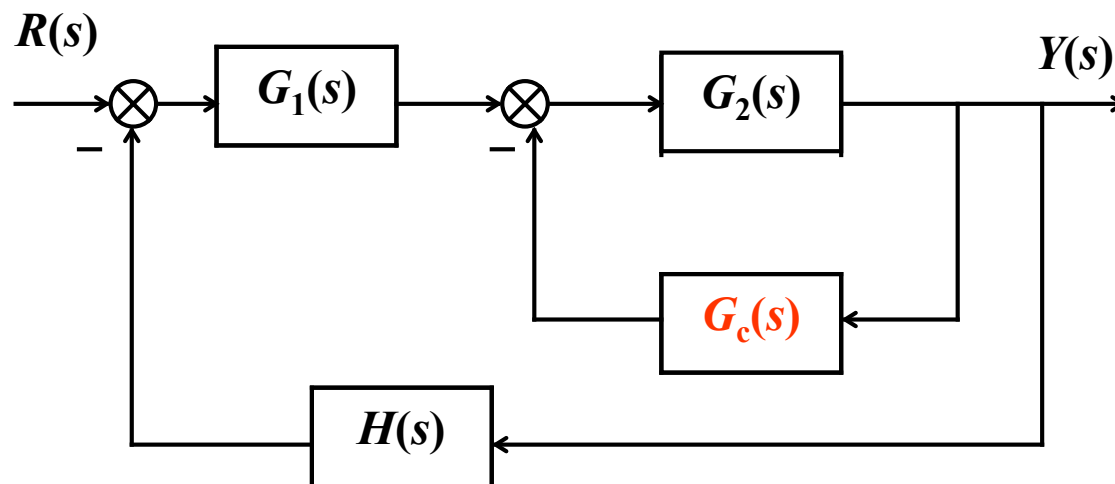
并联校正就是将校正装置 $G_c(s)$ 前向并接在原系统前向通道的一个或几个环节上。它比串联校正多一个连接点，即需要一个信号取出点和一个信号加入点。



并联校正

# 反馈校正

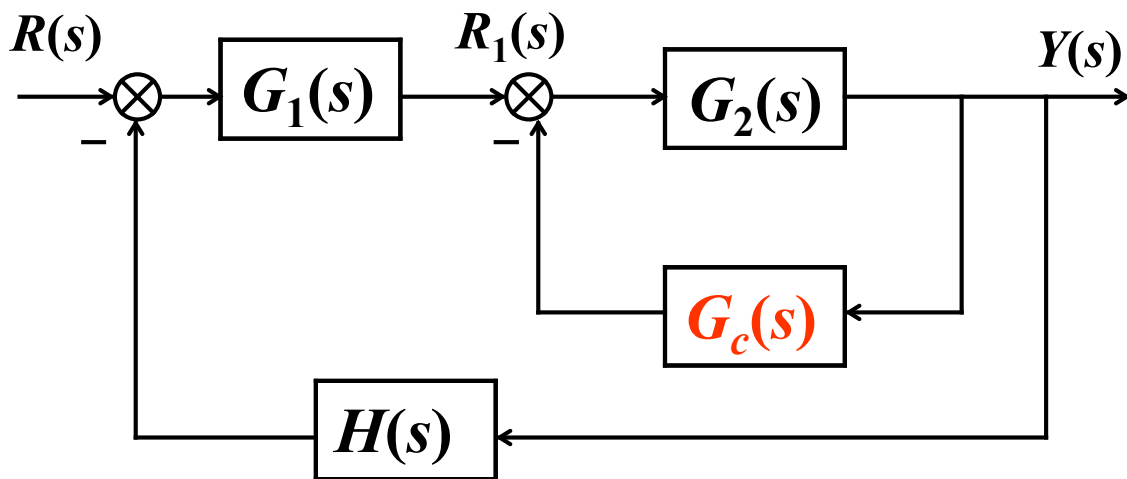
反馈校正就是将校正装置  $G_c(s)$  反向并接在原系统前向通道的一个或几个环节上，构成局部反馈回路。



反馈校正

# 反馈校正

反馈校正一般无附加放大器，所以所需元件比串联校正少。另一个突出优点是：只要合理地选取校正装置参数，可消除原系统中不可变部分参数波动对系统性能的影响。



$$\frac{Y}{R_1} = \frac{G_2}{1 + G_2 G_c}$$



若  $1 \ll 1 + G_2 G_c$ , 则  $\frac{Y}{R_1} \approx \frac{1}{G_c}$



可消除原系统中不可变部分参数波动对系统性能的影响

# 三种连接方式的合理变换

1. 三种连接方式可以等效地转换，系统的综合与校正非唯一的。
2. 在工程应用中，究竟采用哪一种连接方式，要视具体情况而定。要考虑的因素有：
  - 1) 原系统的物理结构，信号是否便于取出和加入；
  - 2) 信号的性质，系统中各点功率的大小，可供选用的元件；
  - 3) 设计者的经验和经济条件等。

例如：**串联校正**通常是由低能量向高能量部位传递信号，加上校正装置本身的能量损耗，必须进行能量补偿。因此，**串联校正装置通常由有源网络或元件构成**，即其中需要有放大元件。

而**反馈校正**结构比串联校正装置简单，若原系统随着工作条件的变化，它的某些参数变化较大时，**采用反馈校正效果会更好些**。



# 系统校正

---

- 系统校正的基本概念
- 常用校正装置的连接方式
- **串联校正**
  - 串联超前校正
  - 串联滞后校正
- **比例、积分、微分(PID)调节器**

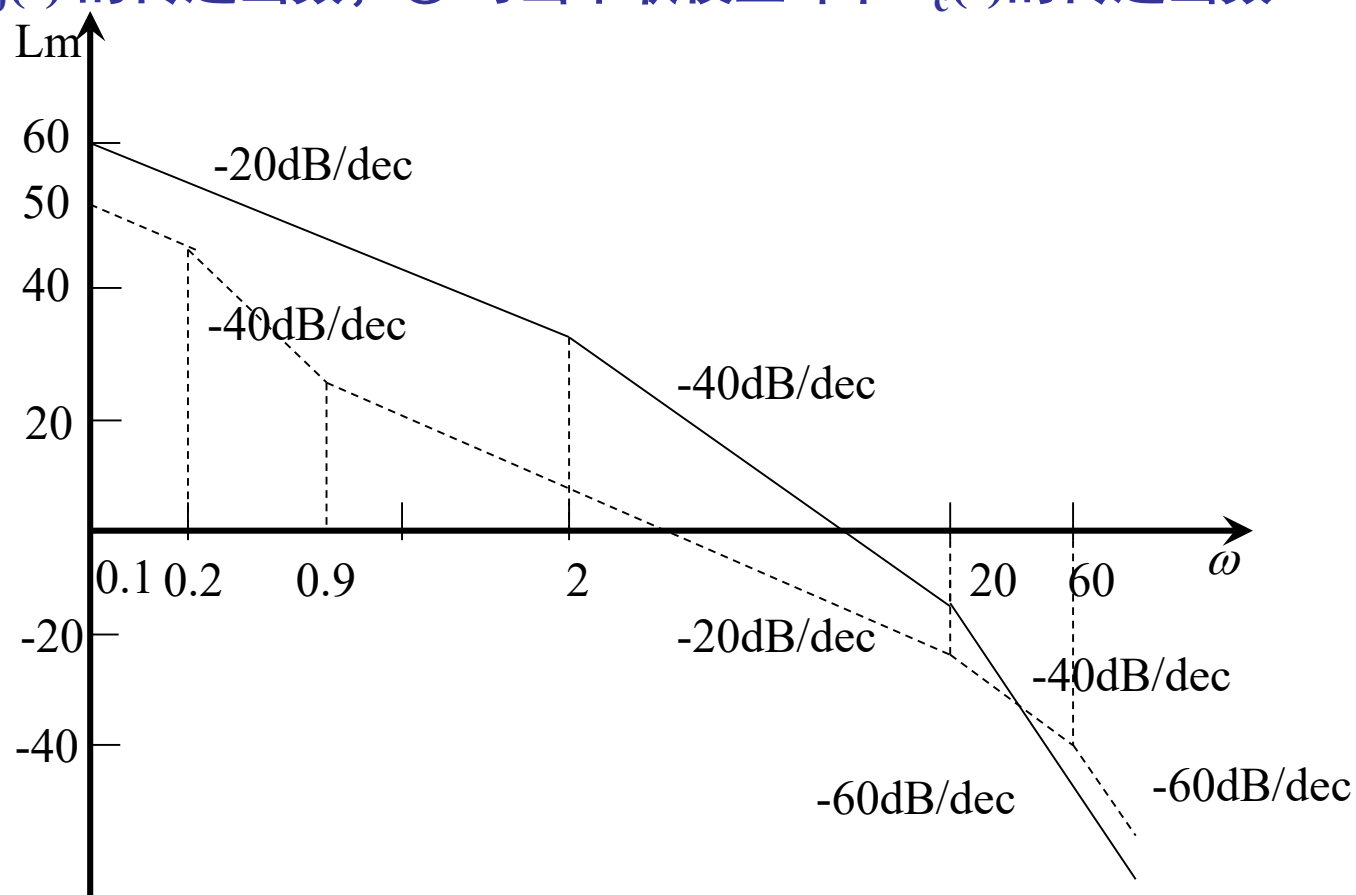
# 串联校正

- 当控制系统的性能指标以稳态误差 $e_{ss}$ 、相角裕度 $\gamma$ 、幅值裕度 $h$ 、谐振峰值 $M_r$ 、谐振频率 $\omega_r$ 和系统带宽 $\omega_b$ 等频域性能指标给出时，采用频率特性法对系统进行综合与校正比较方便
  - 在Bode图上，把校正装置的相频特性和幅频特性分别与原系统的相频特性和幅频特性相叠加，就能清楚地显示出校正装置的作用
  - 将原系统的相频特性和幅频特性与期望的相频特性和幅频特性比较后，就可得到校正装置的相频特性和幅频特性，从而获得满足性能指标要求的校正网络有关参数

# 串联校正例题

**例6-23** 最小相位系统 $G_0(s)$ 的对数渐近幅频特性如图中实线所示。采用串联校正后，系统的开环对数渐近幅频特性如图中虚线所示。

要求：① 写出 $G_0(s)$ 的传递函数；② 写出串联校正环节 $G_c(s)$ 的传递函数。



# 串联校正例题

解：（1）由图实线， $G_0(s)$  有3个环节：

$$\frac{K_1}{s}, \quad \frac{1}{T_2 s + 1}, \quad \frac{1}{T_3 s + 1}$$

又由图知：  $T_2 = 0.5$ ,  $T_3 = 0.05$

在低频段，  $LmG(j\omega) = LmK_1 - Lm\omega_1$

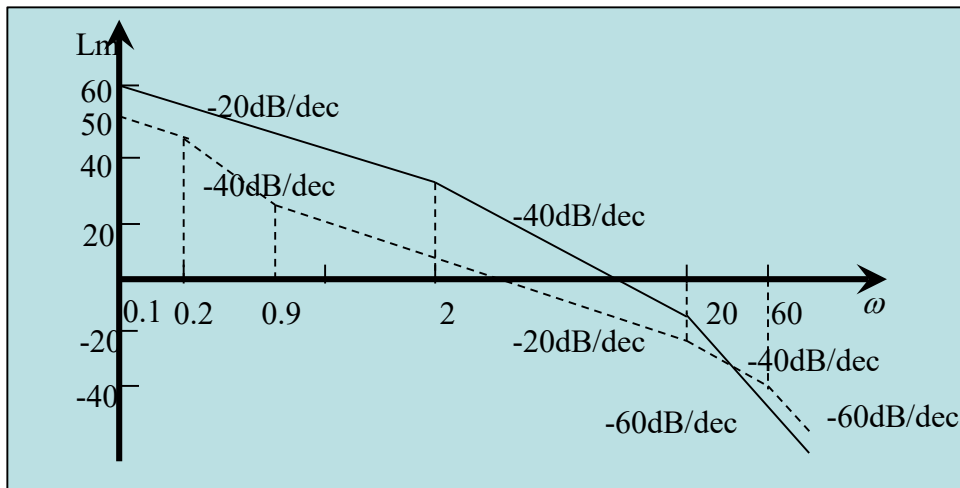
代入：  $\omega_1 = 0.1$

$$60 = LmK_1 - Lm0.1 = 20 \lg\left(\frac{K_1}{0.1}\right)$$

解之：  $3 = \lg \frac{K_1}{0.1} \Rightarrow K_1 = 100$

故：

$$G_0(s) = \frac{100}{s \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \left( \frac{s}{20} + 1 \right)}$$



# 串联校正例题

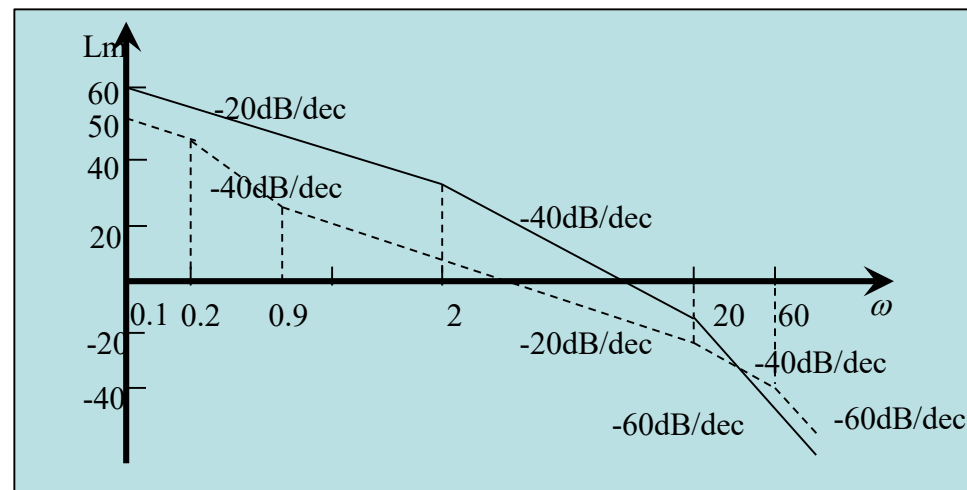
解：（2）加上串联校正环节  $G_c(s)$  后的虚线代表的传递函数也可求出：

不同的是：

$$50 = LmK_1 - Lm0.1 = 20 \lg\left(\frac{K_1}{0.1}\right)$$

$$2.5 = \lg \frac{K_1}{0.1} \Rightarrow K_1 = 31.62$$

$$G_0(s)G_c(s) = \frac{31.6 \left( \frac{s}{0.9} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{0.2} + 1 \right) \left( \frac{s}{20} + 1 \right) \left( \frac{s}{60} + 1 \right)}$$



$G_0(s)$  已知， $G_0(s) G_c(s)$  已求出，  
则  $G_c(s) = G_0(s) G_c(s) / G_0(s)$

$$G_c(s) = \frac{0.316 \left( \frac{s}{0.9} + 1 \right) \left( \frac{s}{2} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{0.2} + 1 \right) \left( \frac{s}{60} + 1 \right)}$$

# 串联超前校正

超前校正的主要作用是在中频段产生足够大的超前相角，以补偿原系统过大的滞后相角。超前网络的参数应根据相角补偿条件和稳态性能的要求来确定。

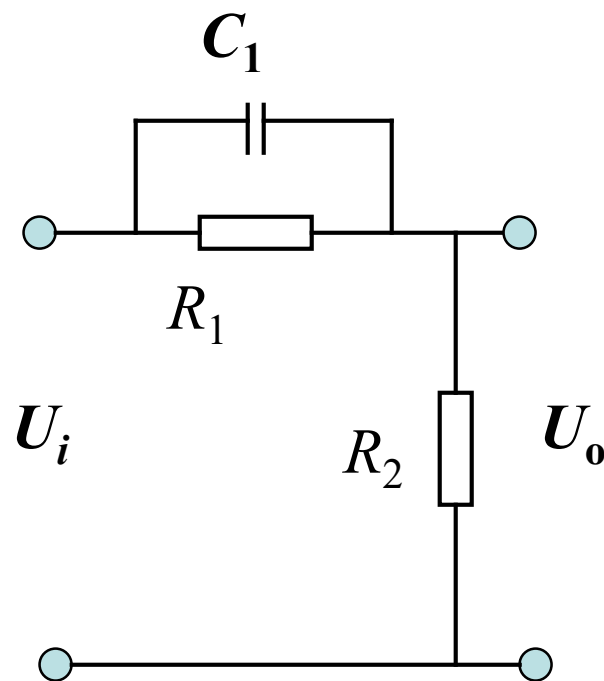
网络的传递函数

$$G(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

式中

$$T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}; \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$$

$$Z_1 = \frac{R_1}{1 + R_1 C s}; \quad Z_2 = R_2$$



无源超前网络

# 串联超前校正

网络的传递函数

$$G(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

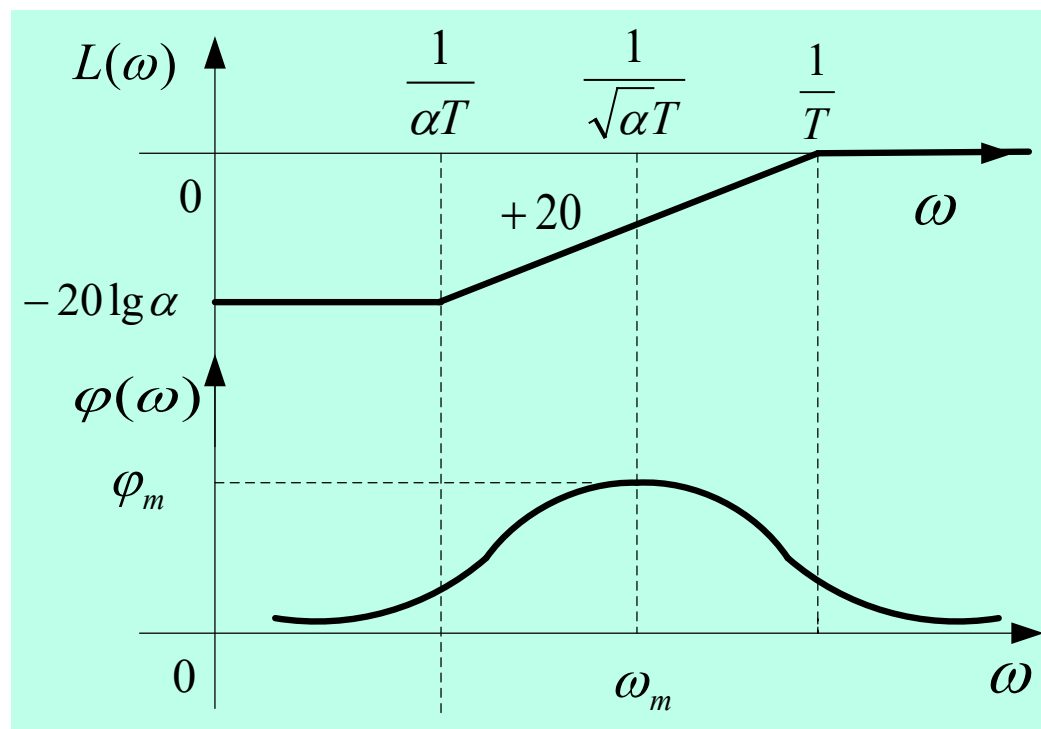
由上式可看出，无源超前网络具有幅值衰减作用，衰减系数为 $1/\alpha$ 。如果给超前无源网络串接一放大系数为 $\alpha$ 的比例放大器，就可补偿幅值衰减作用。此时，超前网络传递函数可写成：

$$G_1(s) = \alpha \cdot G(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

# 串联超前校正

超前网络的传递函数

$$G(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$



无源超前校正网络的对数频率特性



# 串联超前校正

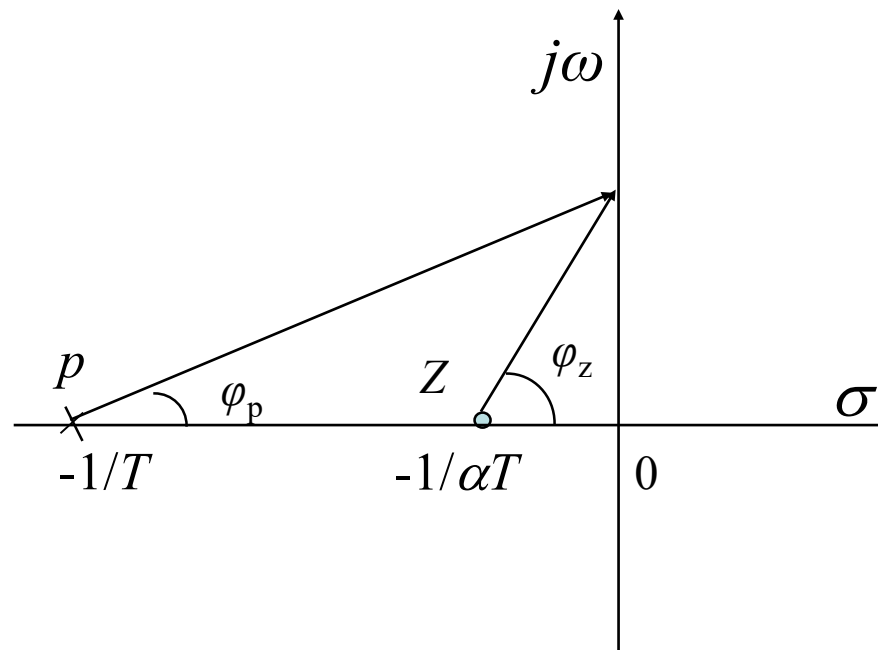
超前网络传递函数可写成：

$$G(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

可知，超前网络传递函数有一个极点 $p(-1/T)$ 和一个零点 $Z(-1/\alpha T)$ ，它们在复平面上的分布如图所示。

$$\text{可见： } \varphi_m = \varphi_z - \varphi_p > 0$$

即网络具有相位超前作用。



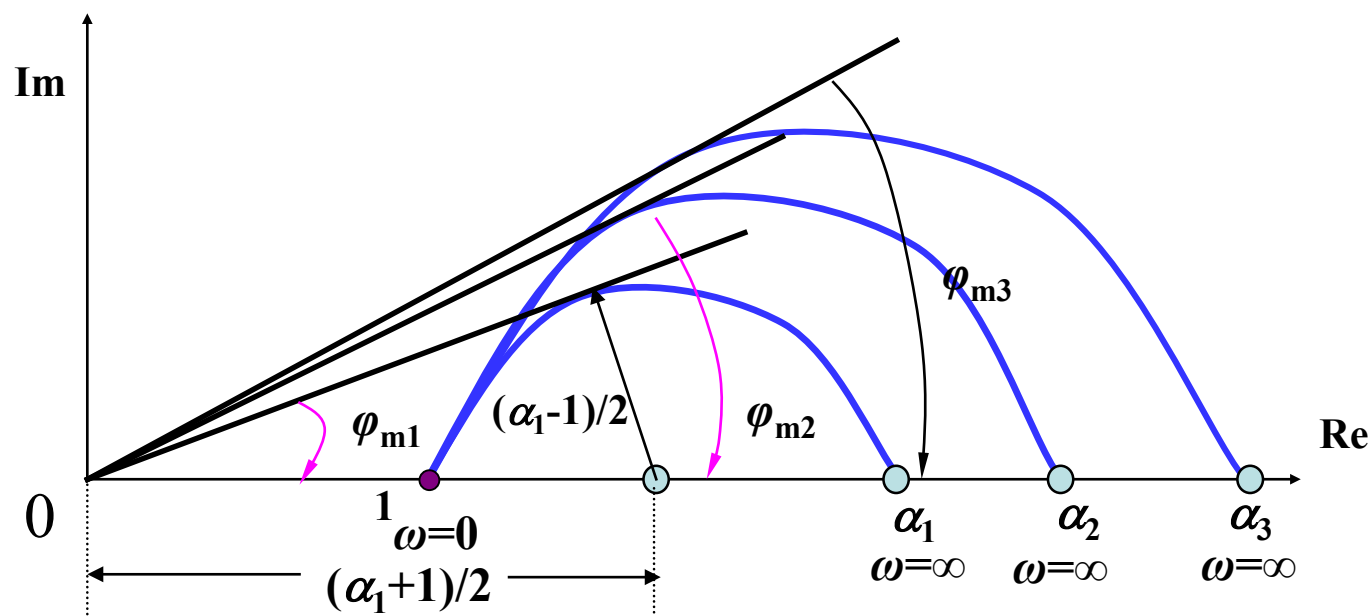
超前网络零、极点在S平面上的分布

# 串联超前校正

用  $s=j\omega$  代入  $G(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$ ，得到超前校正网络的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\alpha T\omega}{1 + jT\omega}$$

由此可得到超前网络极坐标图。



极坐标图起点：1

终点：α

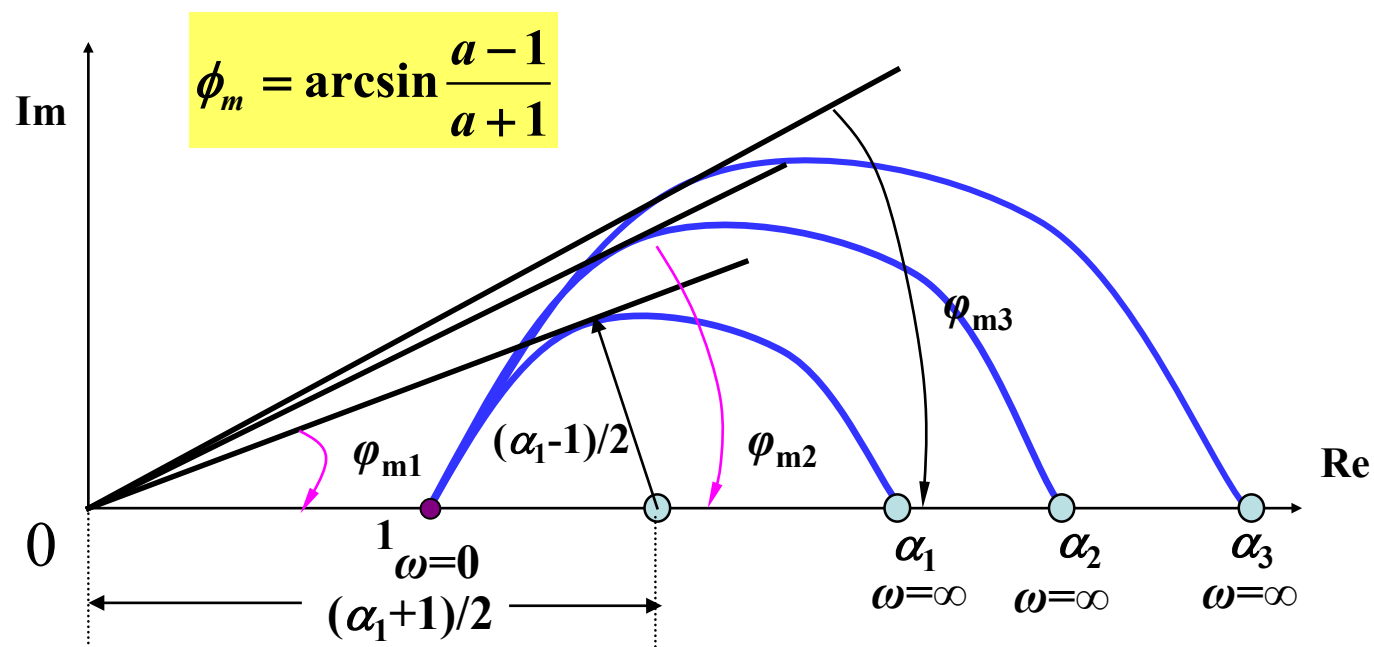
圆心：(α+1)/2

半径：(α-1)/2

超前网络极坐标图

# 串联超前校正（相位）

当 $\alpha$ 值趋于无穷大时，单个超前网络的最大超前相角 $\phi_m = 90^\circ$ ；当 $\alpha = 1$ 时超前相角 $\phi_m = 0^\circ$ ，这时网络已经不再具有超前作用，它本质上是一个比例环节。超前网络的最大超前相角 $\phi_m$ 与参数 $\alpha$ 之间的关系如下式所示。

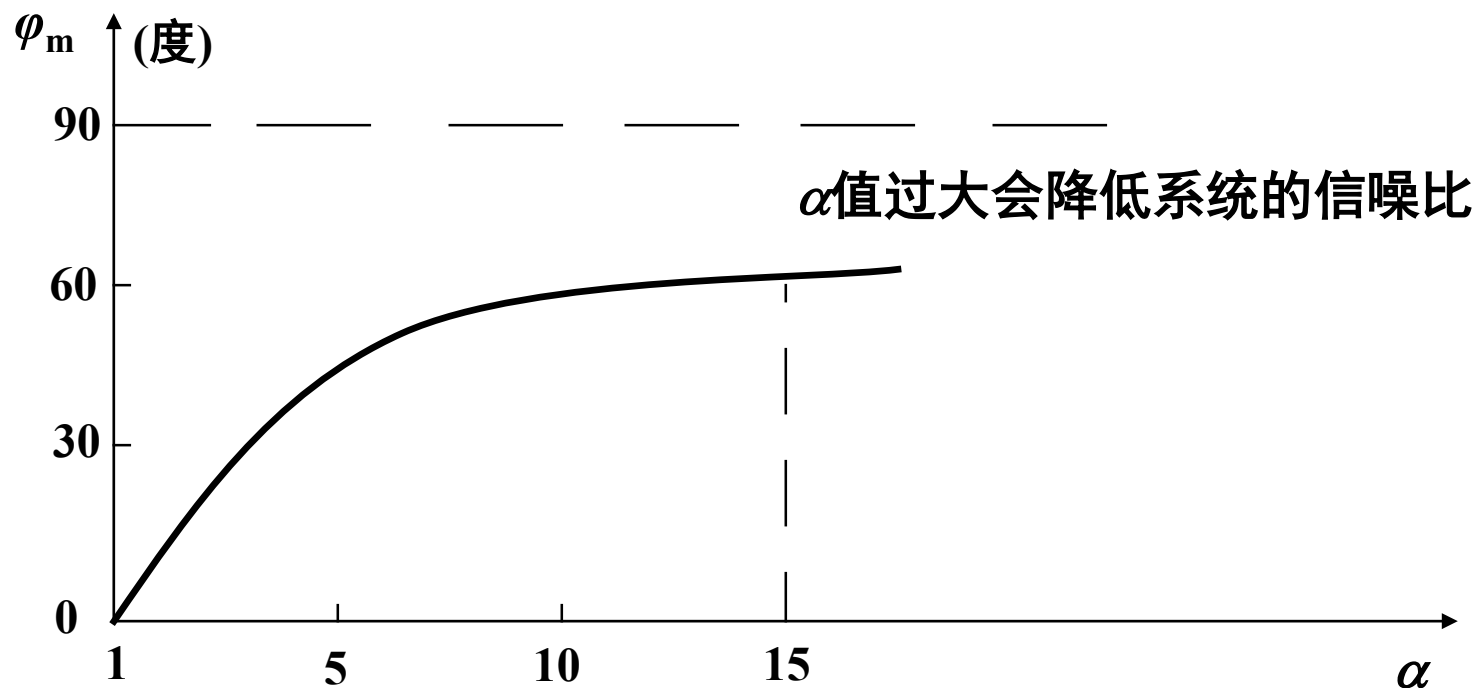


超前网络极坐标图

# 串联超前校正（相位）

当 $\varphi_m > 60$ 度， $\alpha$ 急剧增大，网络增益衰减很快。

当 $\alpha$ 值 $>15$ 后， $\varphi_m$ 变化很小，故一般取 $\alpha$ 值在1~15之间。



超前网络的 $\alpha$ - $\varphi_m$ 曲线

# 串联超前校正（幅值）

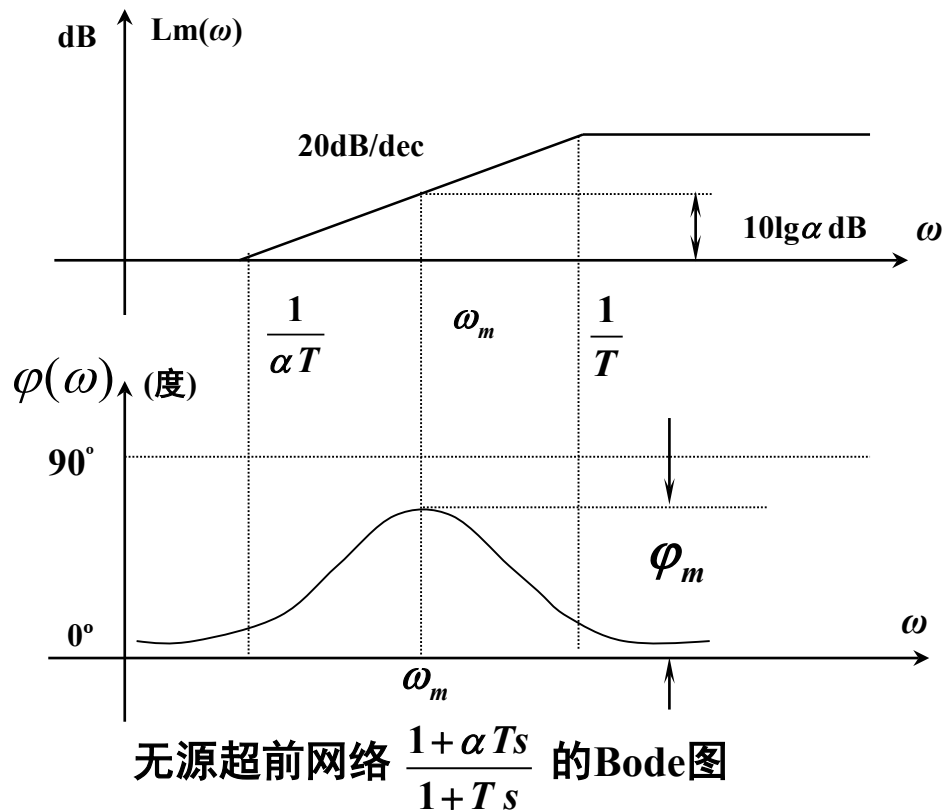
$$G_1(s) = \alpha \cdot G(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

- 最大幅值增益是  $20\lg\alpha(\text{dB})$ ，频率范围  $\omega > 1/T$ ；
- 由相频特性可求出最大超前相角对应的频率  $\omega_m$ ，

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

- 在  $\omega_m$  处的对数幅值为  $10\lg\alpha$
- $\omega_m$  是两个转折频率的几何中心点

$$\lg \omega_m = \frac{1}{2}(\lg \omega_1 + \lg \omega_2) = \frac{1}{2}\left(\lg \frac{1}{\alpha T} + \lg \frac{1}{T}\right) = \lg \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$



# 串联超前校正

**例6-24** 设单位反馈系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{k}{s(s+1)}$ ，要求校正后系统满足：

(1) 相位裕度  $\gamma \geq 40^\circ$ ；(2) 稳态速度误差系数  $K_1 = 12 \text{秒}^{-1}$ 。

**解：** (1) 根据稳态误差要求，确定开环增益  $K$ 。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s(s+1)} = 12$$

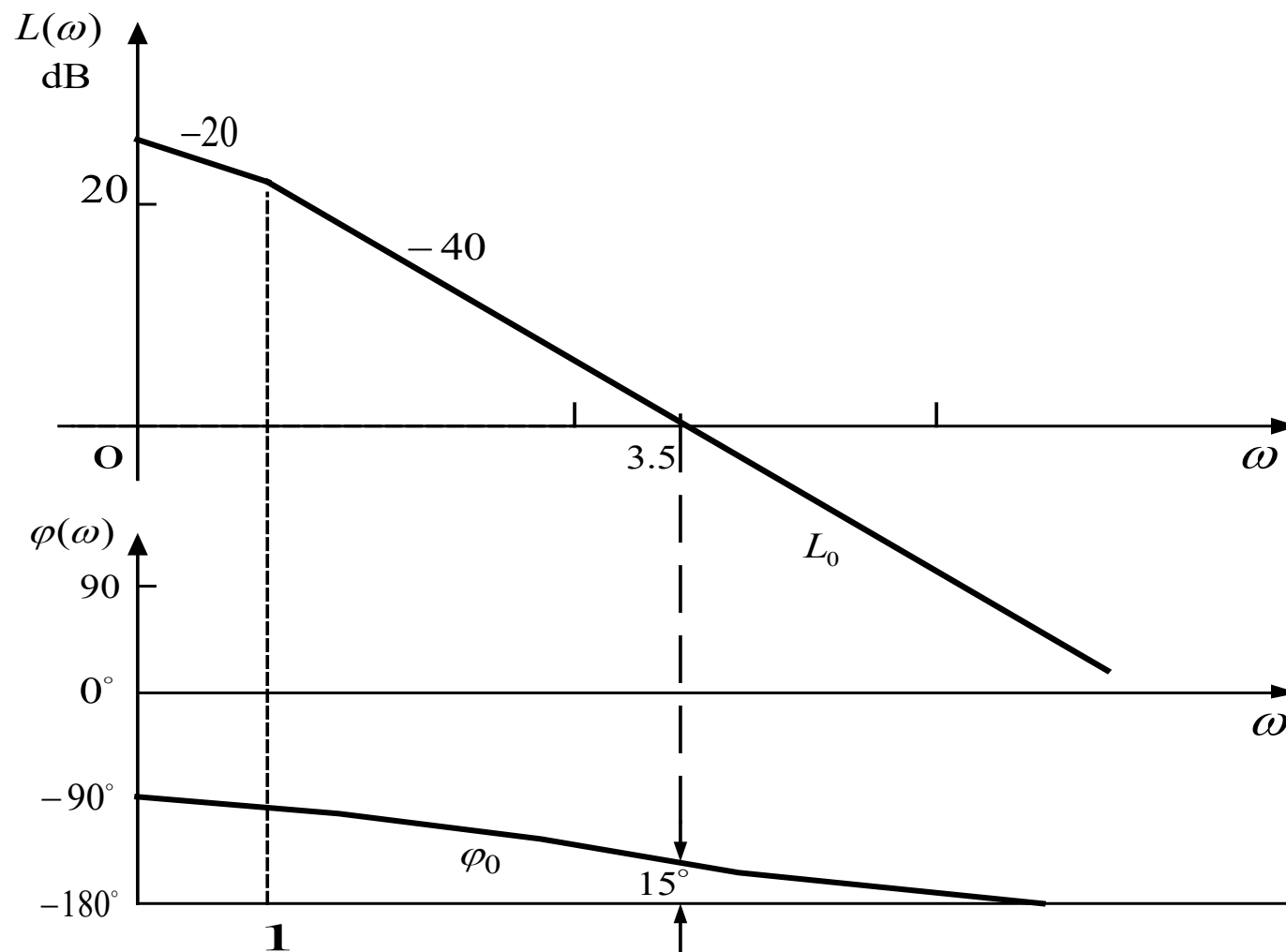
即  $k=12$  可以满足稳态误差的要求。

画出校正前系统的Bode图，求出相位裕度  $\gamma_0$  和截止频率（增益穿越频率）  $\omega_{c0}$

校正前系统的频率特性  $G_0(j\omega) = \frac{12}{j\omega(j\omega+1)}$

作出原系统的Bode图，求出原系统  $\gamma_0 = 15^\circ$ ， $\omega_{c0} = 3.5 \text{ rad/s}$

# 串联超前校正



# 串联超前校正

(2) 根据要求相位裕度，估算需补偿的超前相角。

$$\Delta\gamma = \Delta\theta + \varepsilon = \gamma - \gamma_0 + \varepsilon$$

$\Delta\gamma$  中，  $\Delta\theta = \gamma - \gamma_0$  ， 习惯上又称为校正装置相位补偿的理论值。

$\Delta\gamma = \Delta\theta + \varepsilon$  ， 称为校正装置相位补偿的实际值。

当相位在 $\omega_{c0}$ 处衰减变化比较缓慢时，取

$$\Delta\gamma = \Delta\theta + \varepsilon = 40^\circ - 15^\circ + 5^\circ = 30^\circ$$

增量 $\varepsilon$ （一般取 $5^\circ \sim 12^\circ$ ）是为了补偿校正后系统截止频率 $\omega_c$ 增大（右移）所引起的原系统相位滞后。

若在 $\omega_{c0}$ 处衰减变化比较快， $\varepsilon$ 的取值也要随之增大，甚至要选用其它的校正装置才能满足要求。





# 串联超前校正

$$G_0(j\omega) = \frac{12}{j\omega(j\omega + 1)}$$

(3) 求 $\alpha$ 。

令  $\phi_m = \Delta\gamma = 30^\circ$ ，按下式确定 $\alpha$ ，即

$$\phi_m = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$



$$\alpha = \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} = 3$$

为了充分利用超前网络的相位超前特性，应使校正后系统的截止频率（增益穿越频率） $\omega_c$ 正好在 $\omega_m$ 处，即取： $\omega_c = \omega_m$ 。

分析可知， $\omega_m$ 位于 $1/\alpha T$ 与 $1/T$ 的几何中点，求得：

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

而在 $\omega_m$ 点上 $G_0(j\omega)$ 的幅值应为：

$$-10\lg\alpha = -4.8\text{dB}$$



# 串联超前校正

$$G_0(j\omega) = \frac{12}{j\omega(j\omega + 1)}$$

(3) 求 $\alpha$ 。

令  $\phi_m = \Delta\gamma = 30^\circ$ ，按下式确定 $\alpha$ ，即

$$\phi_m = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$



$$\alpha = \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} = 3$$

从原系统的Bode图上，我们可求得： $\omega_m = 4.6 \text{ rad/s}$ ，所以

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}} = 0.126 \text{ s}$$

$$\frac{1}{T} = 7.94 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha T = 0.378 \text{ s}$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 2.65 \text{ s}^{-1}$$

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0.378s + 1}{0.126s + 1}$$



# 串联超前校正

(4) 引入  $\alpha$  倍的放大器。为了补偿超前网络造成的衰减，引入  $\alpha$  倍的放大器， $\alpha = 3$ 。

得到超前校正装置的传递函数：

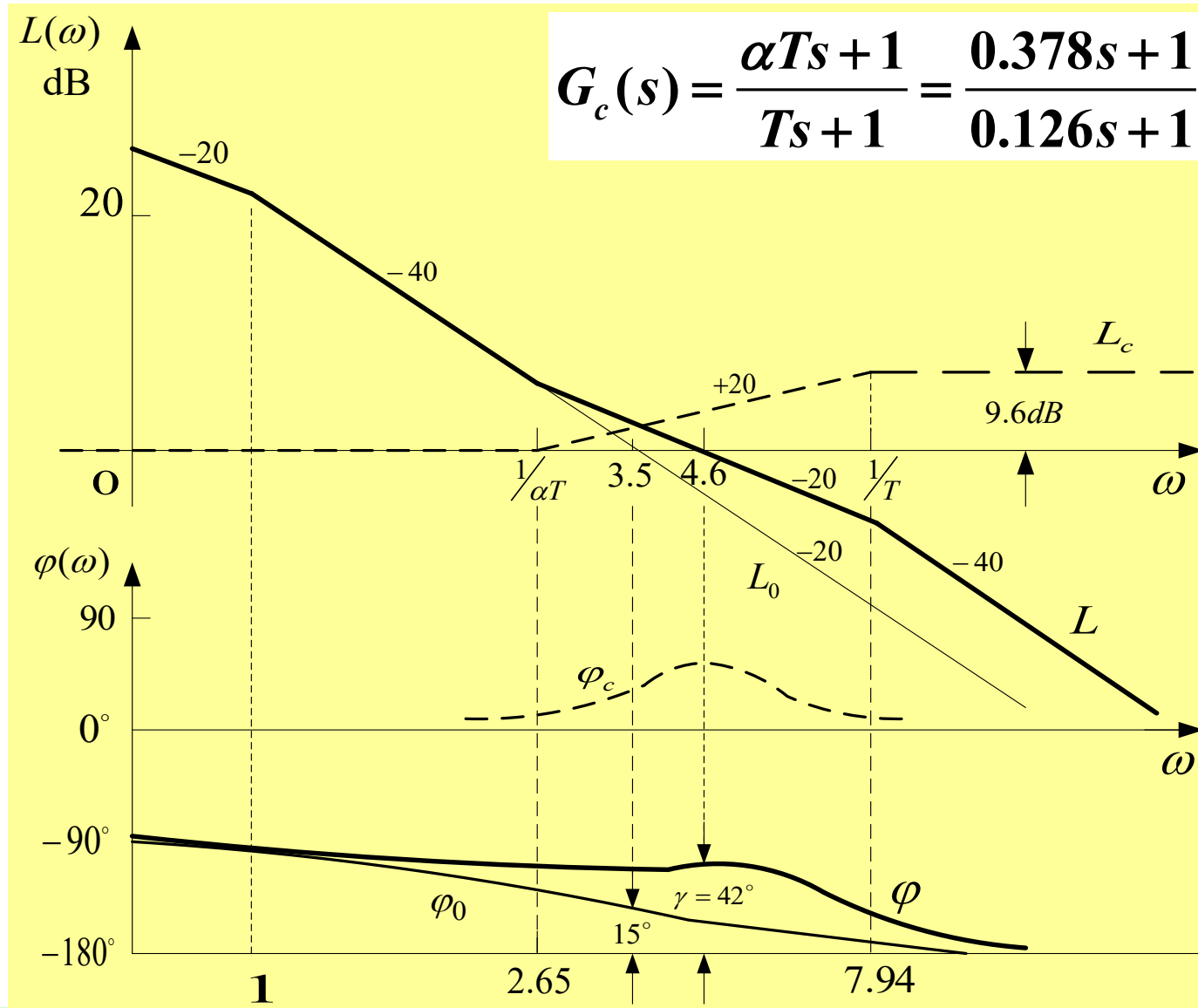
$$\alpha G_c(s) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{0.378s + 1}{0.126s + 1} = \frac{0.378s + 1}{0.126s + 1}$$

所以，校正后系统的开环传递函数：

$$G(s) = G_0(s) \cdot \alpha G_c(s) = \frac{12(0.378s + 1)}{s(s + 1)(0.126s + 1)}$$

(5) 检验。求得： $K_v = 12s^{-1}$ ， $\gamma = 42^\circ$ ， $h = +\infty \text{dB}$ ， $\omega_c$  从 3.5 rad/s 增加到 4.6 rad/s。原系统的动态性能得到改善，满足要求。

# 串联超前校正



# 串联超前校正

通过超前校正分析可知：

**(1) 提高了控制系统的相对稳定性**——使系统的稳定裕量增加，超调量下降。

工业上常取  $\alpha=10$ ，此时校正装置可提供约  $55^\circ$  的超前相位。为了保证系统具有  $30^\circ\sim 60^\circ$  的相位裕度，要求校正后系统  $\omega_c$  处的幅频斜率应为  $-20\text{dB/dec}$ ，并占有一定的带宽。

**(2) 加快了控制系统的反应速度**——过渡过程时间减小。由于串联超前校正的存在，使校正后系统的  $\omega_c$ 、 $\omega_r$  及  $\omega_b$  均变大了。带宽的增加，会使系统响应速度变快。

**(3) 系统的抗干扰能力下降了**——高频段抬高了。

**(4) 控制系统的稳态性能是通过步骤(1)中选择校正后系统的开环增益来保证的。**

# 串联超前校正

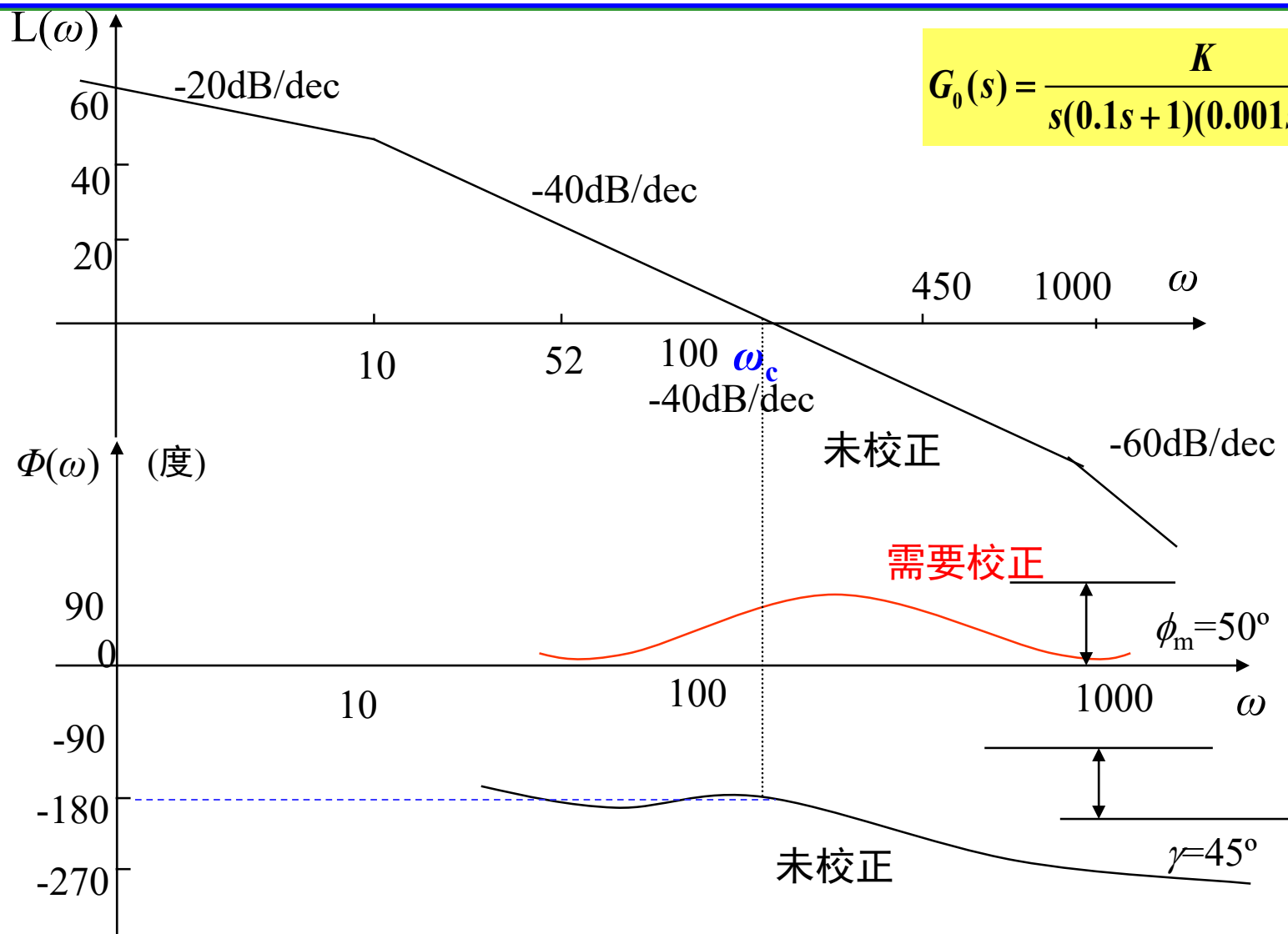
**例6-25** 设单位反馈系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.001s+1)}$

要求校正后系统满足：(1) 相位裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ ；(2) 稳态速度误差系数  $K_1 = 1000 \text{秒}^{-1}$ 。

解：由稳态速度误差系数  $K_1$  求出系统开环放大系数  $K = K_1 = 1000 \text{s}^{-1}$ ，  
由于原系统前向通道中含有一个积分环节，当其放大系数  
 $K = 1000 \text{s}^{-1}$  时，能满足稳态误差的要求。

根据原系统的开环传递函数  $G_0(s)$  和已求出的开环放大系数  $K = 1000 \text{s}^{-1}$  绘制出原系统的对数相频特性和幅频特性：

# 串联超前校正



串联校正前后控制系统的对数频率特性



# 串联超前校正

根据原系统的开环对数幅频特性的幅值穿越频率增益临界点 $\omega_c=100$ 弧度/秒，求出原系统的相角裕度 $\gamma \approx 0^\circ$ ，这说明原系统在 $K=1000\text{s}^{-1}$ 时处于临界稳定状态，不能满足 $\gamma \geq 45^\circ$ 的要求。

为满足 $\gamma \geq 45^\circ$ 的要求，给校正装置的最大超前相角 $\varphi_m$ 增加一个补偿角度 $\Delta\varphi$ ，即有 $\varphi_m = \gamma + \Delta\varphi \approx 50^\circ$ ；由下式，可求出校正装置参数 $\alpha=7.5$ 。

$$\varphi_m = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$



# 串联超前校正

通常应使串联超前网络最大超前相角 $\varphi_m$ 对应的频率 $\omega_m$ 与校正后的系统的增益临界点 $\omega_c'$ 重合，由图求出 $\omega_m$ 所对应的校正网络幅值增益为 $10\lg\alpha = 10\lg 7.5 = 8.75\text{dB}$ ，从图中原系统的幅频特性为 $-8.75\text{dB}$ 处求出 $\omega_m = \omega_c' = 164$ 弧度/秒，由 $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ 得串联超前校正装置的两个转折频率分别为

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_m = 450$$

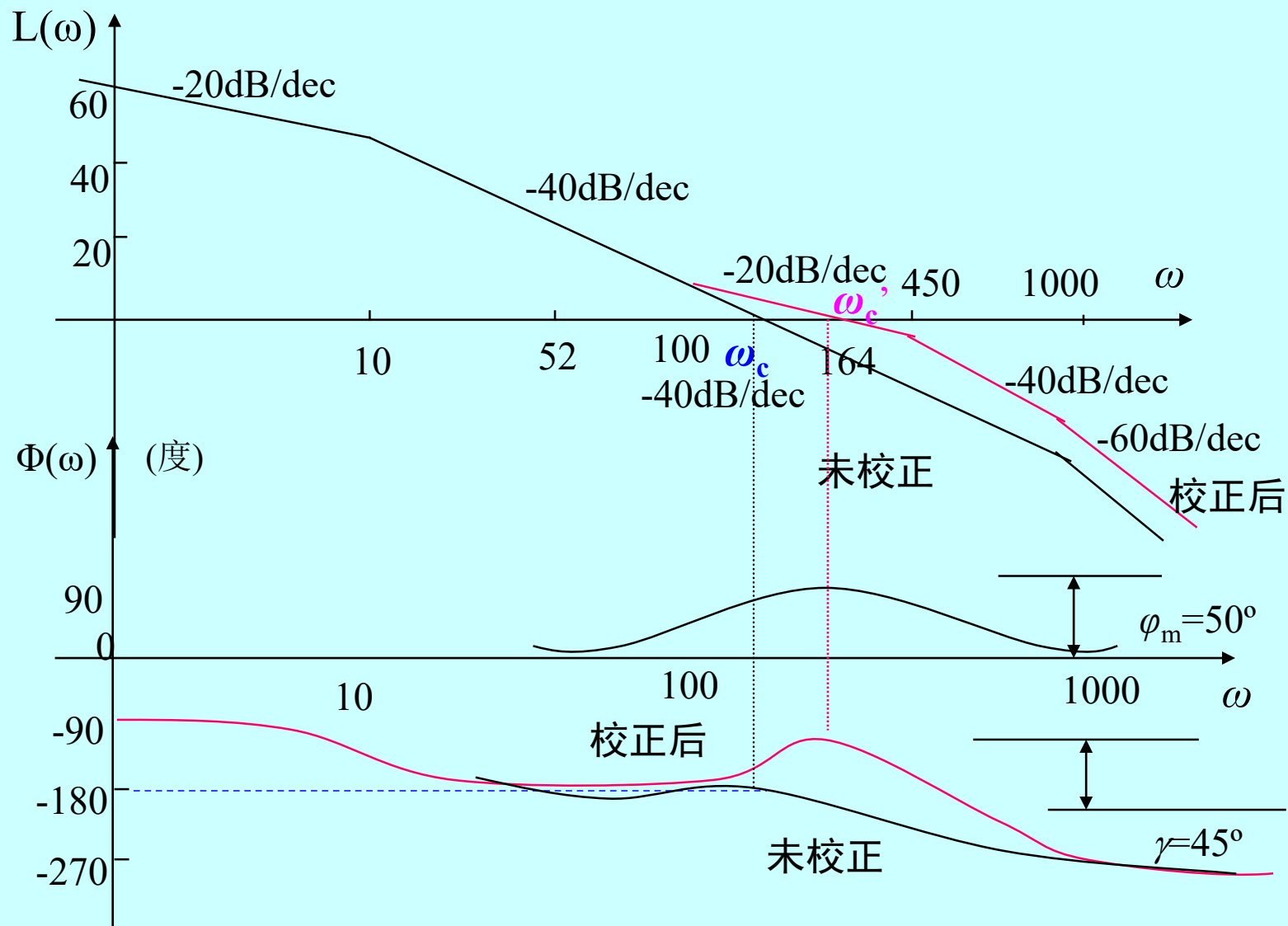
$$\frac{1}{\alpha T} = 60$$

经过校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = KG_c(s)G_0(s) = \frac{1000(0.0167s + 1)}{s(0.1s + 1)(0.001s + 1)(0.0022s + 1)}$$

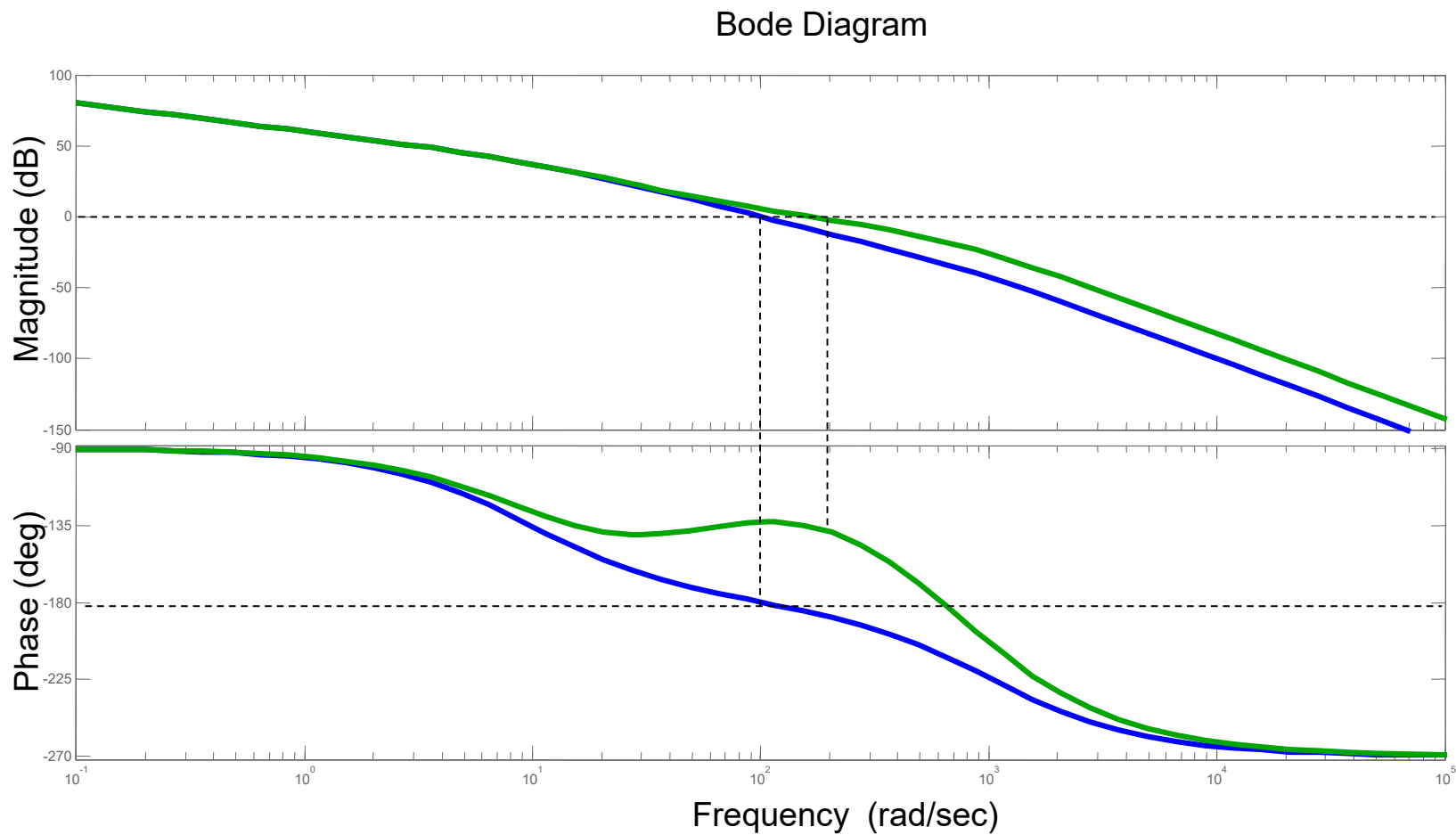
根据校正系统后的开环传递函数 $G(s)$ 绘制Bode图。相角裕度 $\gamma' = 45^\circ$ ，幅值穿越频率 $\omega_c' = 164$ 弧度/秒。

# 串联超前校正



串联校正前后控制系统的对数频率特性

# 串联超前校正



# 串联超前校正

## 串联超前校正对系统的影响

- 增加开环频率特性在幅值穿越频率附近的正相角，从而提高了系统的相位裕度；
- 减小对数幅频特性在幅值穿越频率上的负斜率，从而提高了系统的稳定性；
- 提高了系统的频带宽度，从而提高了系统的响应速度；
- 不影响系统的稳态性能。
- 但若原系统不稳定或稳定裕量很小，且开环相频特性曲线在幅值穿越频率附近有较大的负斜率时，不宜采用相位超前校正；因为随着幅值穿越频率的增加，原系统负相角增加的速度将超过超前校正装置正相角增加的速度，超前网络就起不到补偿滞后相角的作用了。

# 串联超前校正

## 频率特性法校正步骤

- (1) 根据稳态性能的要求，确定系统的开环放大系数 $K$ ；
- (2) 利用求得的 $K$ 值和原系统的传递函数，绘制原系统的Bode图；
- (3) 在Bode图上求出原系统的幅值和相位裕度，确定为使相位裕度达到规定的数值所需增加的超前相角，即超前校正装置的 $\varphi_m$ 值，将 $\varphi_m$ 值求出校正网络参数 $\alpha$ ，在Bode图上确定原系统幅值等于 $-10\lg\alpha$ 对应的频率 $\omega_c'$ ；以这个频率作为超前校正装置的最大超前相角所对应的频率 $\omega_m$ ，即令 $\omega_m = \omega_c'$ ；
- (4) 将已求出的 $\omega_m$ 和 $\alpha$ 的值求出超前网络的参数 $\alpha T$ 和 $T$ ，并写出校正网络的传递函数 $G_c(s)$ ；
- (5) 最后将原系统前向通道的放大倍数增加 $K_c = \alpha$ 倍，以补偿串联超前网络的幅值衰减作用，写出校正后系统的开环传递函数 $G(s) = K_c G_0(s) G_c(s)$ ，并绘制校正后系统的Bode图，验证校正的结果。

# 系统校正

---

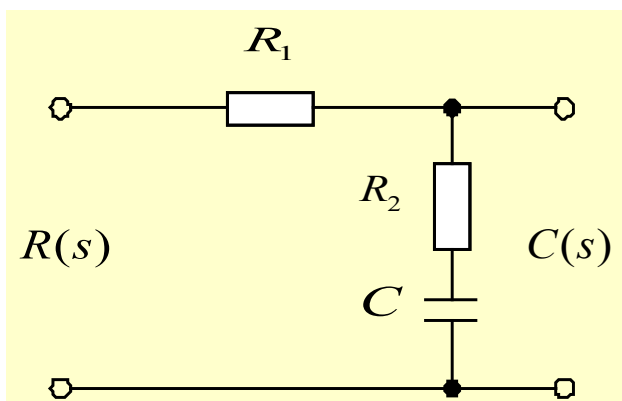
- 系统校正的基本概念
- 常用校正装置的连接方式
- **串联校正**
  - 串联超前校正
  - **串联滞后校正**
- **比例、积分、微分(PID)调节器**

# 串联滞后校正

## 1. 滞后校正装置

具有滞后相位特性（即相频特性 $\varphi(\omega)$ 小于零）的校正装置叫滞后校正装置，又称之为积分校正装置。

常见无源滞后网络的电路图。



$$G_c(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$$

式中：  $T=R_2C$

➤ 此校正网络的对数频率特性分析如下：

# 串联滞后校正

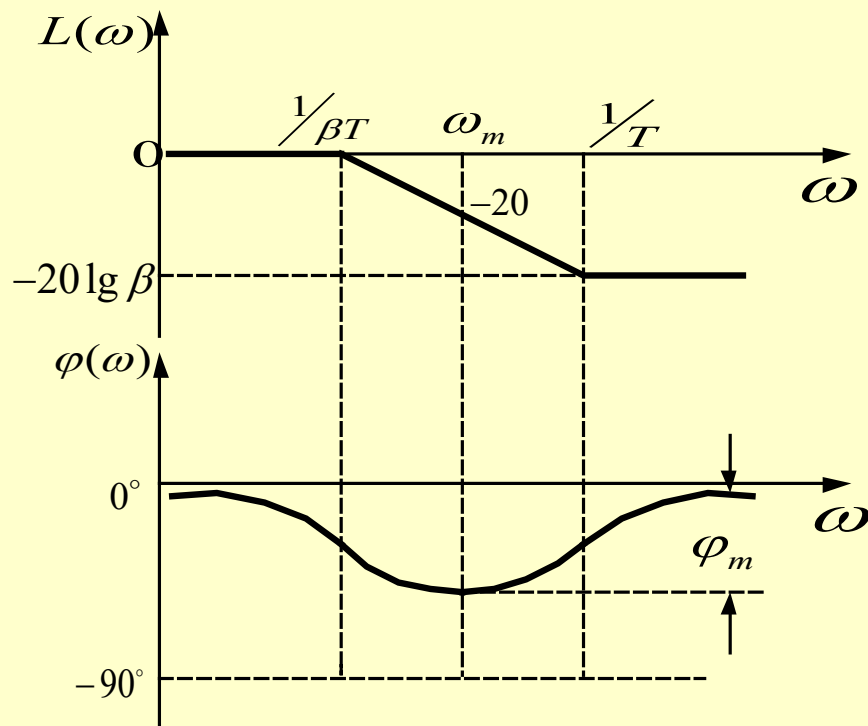
2. 特点：1) 幅频特性小于或等于0dB。是一个低通滤波器。

2)  $\varphi(\omega)$  小于等于零。可看作是一阶微分环节与惯性环节的串联，但惯性环节时间常数  $\beta T$  大于一阶微分环节时间常数  $T$ （分母的时间常数大于分子的时间常数），即积分效应大于微分效应，相角表现为一种滞后效应。

3) 最大负相移发生在转折频率  $\frac{1}{T}$  与  $\frac{1}{\beta T}$  的几何中点。

$$\varphi_m = -\arcsin \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \arcsin \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

$$\beta = \frac{1 + \sin(-\phi_m)}{1 - \sin(-\phi_m)}$$





# 串联滞后校正

**例6-26** 设一系统的开环传递函数为： $G_0(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.5s+1)}$

要求校正后，稳态速度误差系数  $K_v=5\text{秒}^{-1}$ ， $\gamma \geq 40^\circ$ 。

**解：**(1) 根据稳态误差要求确定开环增益 $K$ 。绘制未校正系统的Bode图，并求出其相位裕度和幅值裕度。

确定 $K$ 值。因为

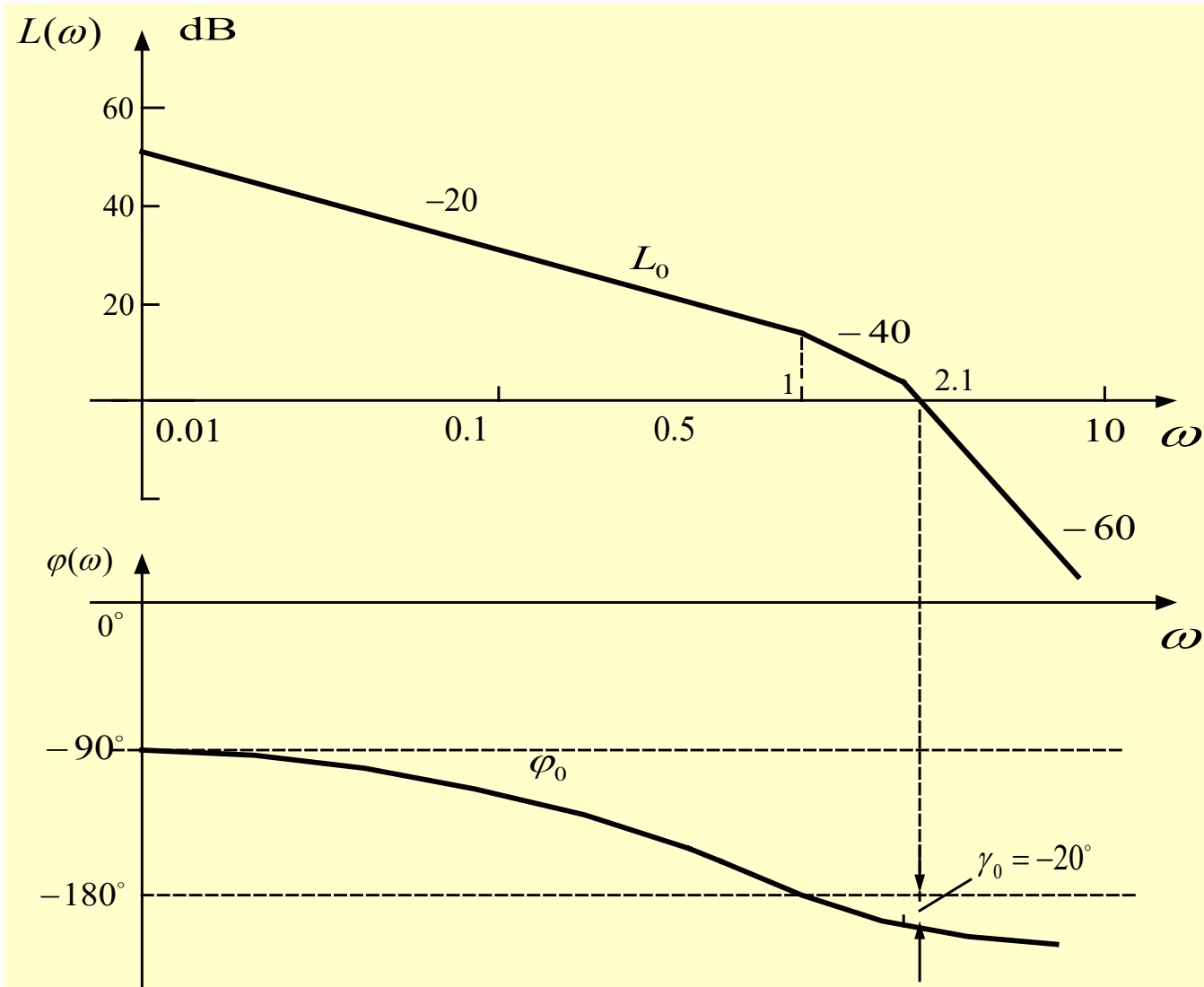
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sk}{s(s+1)(0.5s+1)} = K$$

所以： $K_v=K=5$

作出原系统的Bode图，见下页。

求得原系统的相位裕度： $\gamma_0 = -20^\circ$ ，系统不稳定。

# 串联滞后校正



# 串联滞后校正

## (2) 确定校正后系统的幅值穿越频率 $\omega_c$ 。

在此频率上，系统要求的相位裕量应等于要求的相位裕量再加上 $(5^\circ \sim 12^\circ)$ ——补偿滞后校正网络本身在 $\omega_c$ 处的相位滞后。

### 确定 $\omega_c$

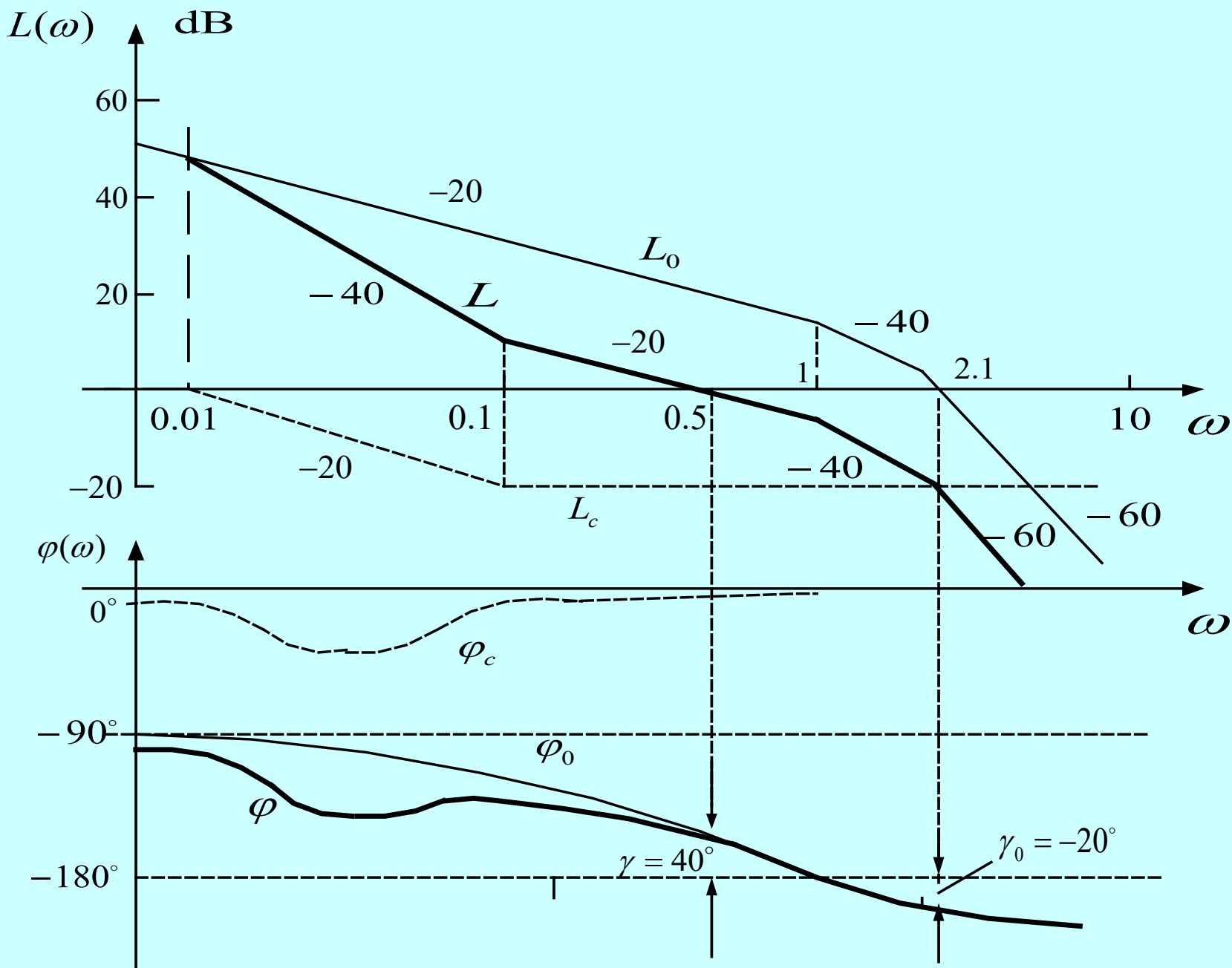
原系统在 $\omega_{c0}$ 处的相角衰减得很快，采用超前校正作用不明显，故考虑采用滞后校正。现要求校正后系统的 $\gamma \geq 40^\circ$ ，为了补偿滞后校正网络本身的相位滞后，需再加上 $5^\circ \sim 12^\circ$ 的补偿角，所以取

$$\Delta\gamma = 40^\circ + (5^\circ \sim 12^\circ) = 52^\circ \quad (\text{补偿角取} 12^\circ)$$

在Bode图上可找得，在 $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$ 附近的相位角等于 $-128^\circ$  (即相位裕量为 $52^\circ$ )，故取此频率为校正后系统的幅值穿越频率。即：

$$\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$$

# 串联滞



# 串联滞后校正

(3) 求 $\beta$ 值。确定原系统频率特性在 $\omega=\omega_c$ 处幅值下降到0dB时所必需的衰减量 $\Delta L$ 。由等式

$$\Delta L=20\lg\beta \quad \text{求取}\beta\text{值}$$

由图得原系统在 $\omega_c$ 处的幅频增益为20dB，为了保证系统的幅值穿越频率在 $\omega_c$ 处，滞后校正装置应产生20dB的衰减量： $\Delta L=20\text{dB}$ ，即

$$20=20\lg\beta \quad \beta=10$$

(4) 选取 $T$ 值。为了使滞后校正装置产生的相位滞后对校正后系统的幅值穿越频率 $\omega_c$ 处的影响足够小，应满足，一般取  $\omega_c=(5\sim 10)\times 1/T$

取

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{5} \omega_c = 0.1$$

$$\frac{1}{\beta T} = 0.01$$

# 串联滞后校正

(5) 确定滞后校正装置的传递函数。

$$G_c(s) = \frac{10s + 1}{100s + 1} = \frac{1}{10} \times \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

校正后系统的开环传递函数

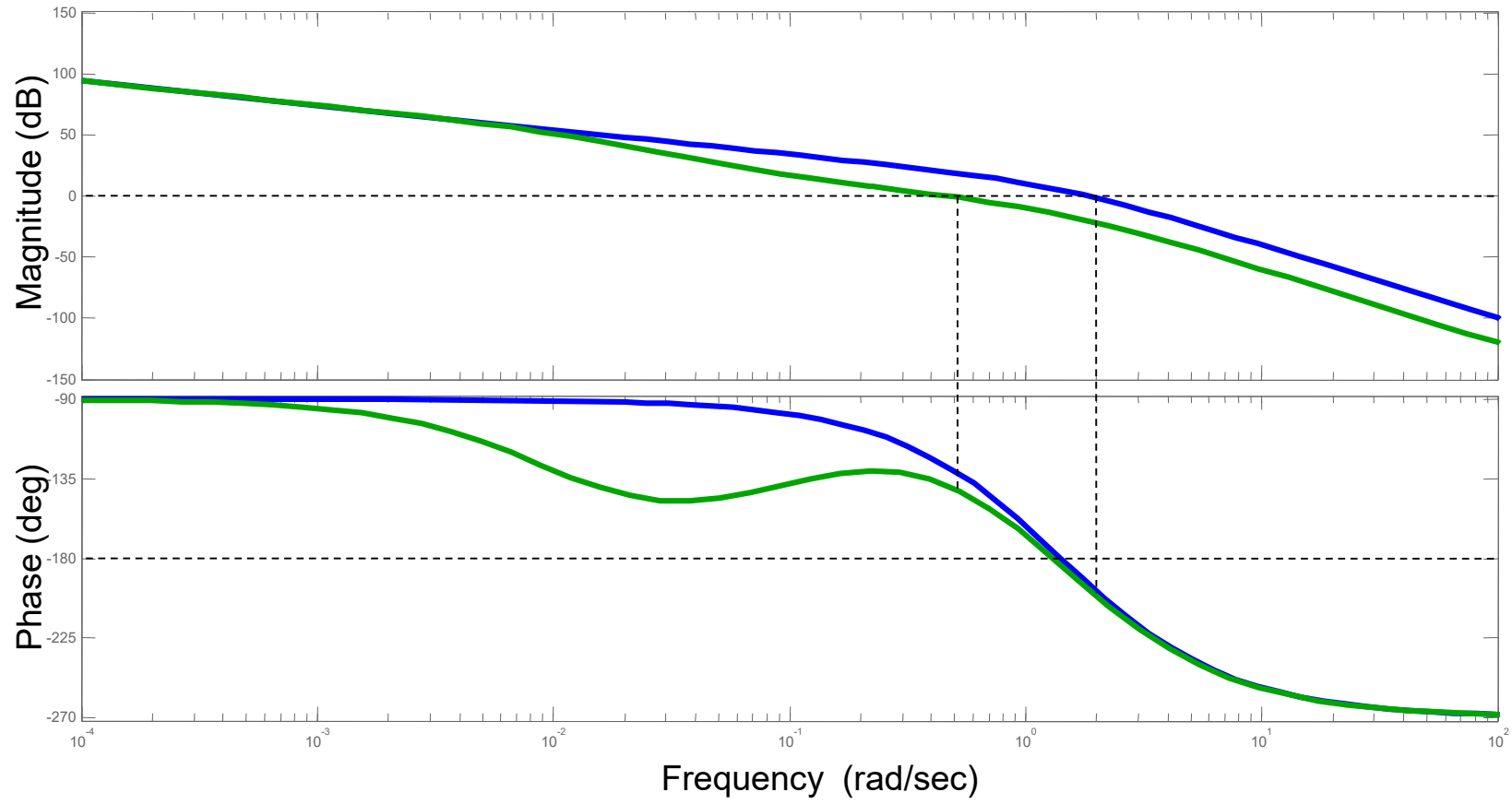
$$G(s) = G_0(s) \cdot G_c(s) = \frac{5(10s + 1)}{s(100s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

(6) 检验。

作出校正后系统的Bode图，求得相位裕度 $=40^\circ$ ， $K_V=5$ 。所以，系统满足要求。

# 串联滞后校正

Bode Diagram



# 串联滞后校正

由上分析可知：在滞后校正中，我们利用的是滞后校正网络在高频段的衰减特性，而不是其相位的滞后特性。

对系统滞后校正后：

① 改善了系统的稳定性

相位裕度由负变正，系统由不稳定变稳定

② 稳态性能不变

开环低频幅值和相位不变

③ 响应速度变慢

滞后校正装置使系统的频带变窄，导致动态响应时间增大

④ 高频抗干扰能力提高

高频段开环幅频曲线压低



# 串联滞后校正

## 超前校正和滞后校正的区别与联系

	超前校正	滞后校正
原理	利用超前网络的相角超前特性，改善系统的动态性能。	利用滞后网络的高频幅值衰减特性，改善系统的稳态性能。
效果	(1)在 $\omega_c$ 附近，原系统的对数幅频特性的斜率变小，相位裕度与幅值裕度变大。 (2)系统的频带宽度增加。 (3)由于相位裕度增加，超调量下降。 (4)不影响系统的稳态特性，即校正前后 $e_{ss}$ 不变。	(1)在相对稳定性不变的情况下，系统的稳态精度提高了。 (2)系统的增益剪切频率 $\omega_c$ 下降，闭环带宽减小。 (3)对于给定的开环放大系数，由于 $\omega_c$ 附近幅值衰减，使相位裕度、幅值裕度及谐振峰值均得到改善。
缺点	(1)频带加宽，对高频抗干扰能力下降。 (2)用无源网络时，为了补偿校正装置的幅值衰减，需附加一个放大器。	频带变窄，使动态响应时间变大。
应用范围	(1) $\omega_c$ 附近，原系统的相位滞后变化缓慢，超前相位一般要求小于 $55^\circ$ ，对于多级串联超前校正则无此要求。 (2)要求有大的频宽和快的瞬态响应。 (3)高频干扰不是主要问题。	(1) $\omega_c$ 附近，原系统的相位变化急剧，以致难于采用串联超前校正。 (2)适于频宽与瞬态响应要求不高的情况。 (3)对高频抗干扰有一定的要求。 (4)低频段能找到所需要的相位裕量。



# 系统校正

---

- 系统校正的基本概念
- 常用校正装置的连接方式
- 串联校正
- 比例、积分、微分(PID)调节器

# 比例、积分、微分(PID)调节器

PID调节器在工业控制中得到广泛地应用。它有如下特点：

## 1. 对系统的模型要求低

实际系统要建立精确的模型往往很困难。而PID调节器对模型要求不高，甚至在模型未知的情况下，也能进行调节。

## 2. 调节方便

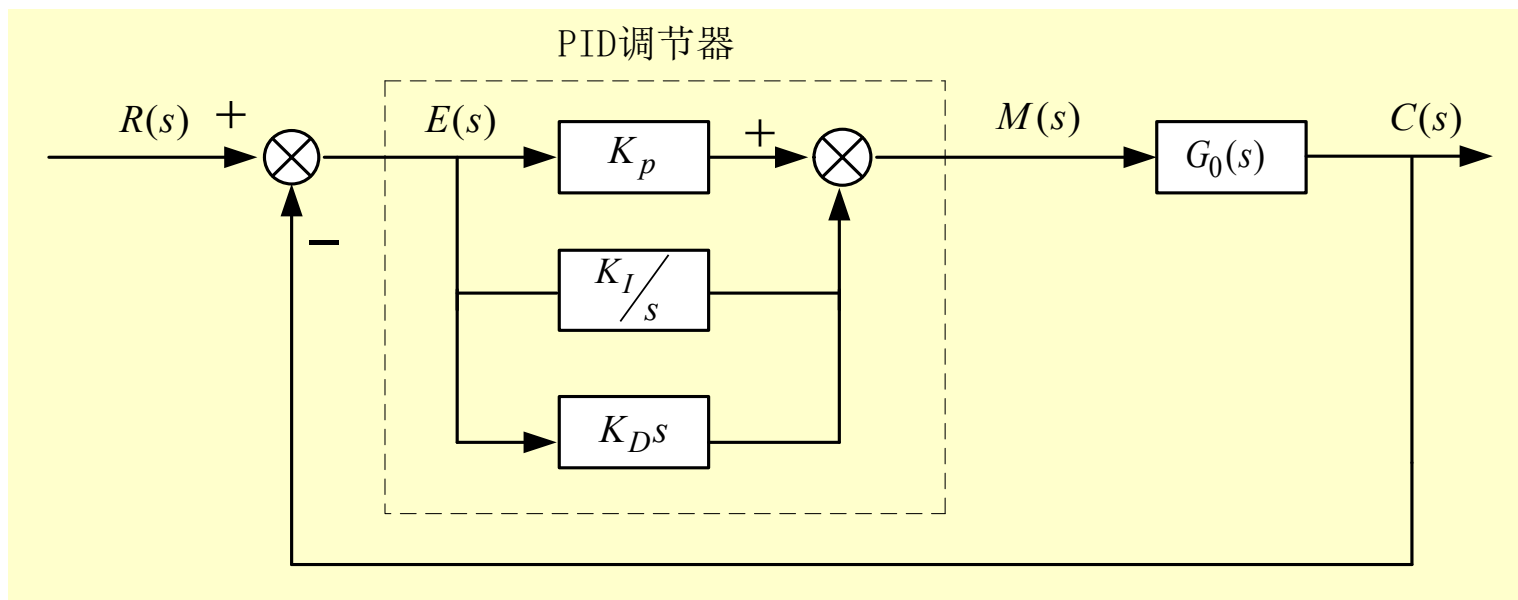
调节作用相互独立，最后以求和的形式出现的，人们可改变其中的某一种调节规律，大大地增加了使用的灵活性。

## 3. 适应范围较广

一般校正装置，**系统参数改变**后调节效果差，而PID调节器的适应范围广，在一定的变化区间中，仍有很好的调节效果。

——鲁棒性

# 比例、积分、微分(PID)调节器



PID调节器的动态方程为：

$$m(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

# 比例、积分、微分(PID)调节器

写成传递函数形式

$$G_e(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

$$G_e(s) = \frac{K_D \left( s + \frac{K_p + \sqrt{K_p^2 - 4K_I K_D}}{2K_D} \right) \left( s + \frac{K_p - \sqrt{K_p^2 - 4K_I K_D}}{2K_D} \right)}{s}$$

引入PID调节器后，系统的型别数增加了1，稳态性能得到提升，还提供了两个零点，适当配置这两个零点可增强系统稳定性和提高系统动态性能。

# PID调节器的频域分析

## ➤ 确定PID控制器参数（PID参数整定）的Ziegler-Nichols方法

在系统闭环情况下，让系统在纯比例器的作用下产生等幅振荡，利用此时的比例系数 $K_u$ 和振荡周期 $T_u$ ，查表得到PID参数

控制器类型	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P	$0.5K_u$		
PI	$0.4K_u$	$0.8T_u$	
PD	$0.8K_u$		$0.12T_u$
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.12T_u$

# PID调节器的频域分析

等幅振荡时,  $(-1, 0)$  点在开环幅相曲线  $K_u G_0(j\omega)$  上

$$\omega_x = \omega_c = \frac{2\pi}{T_u}$$

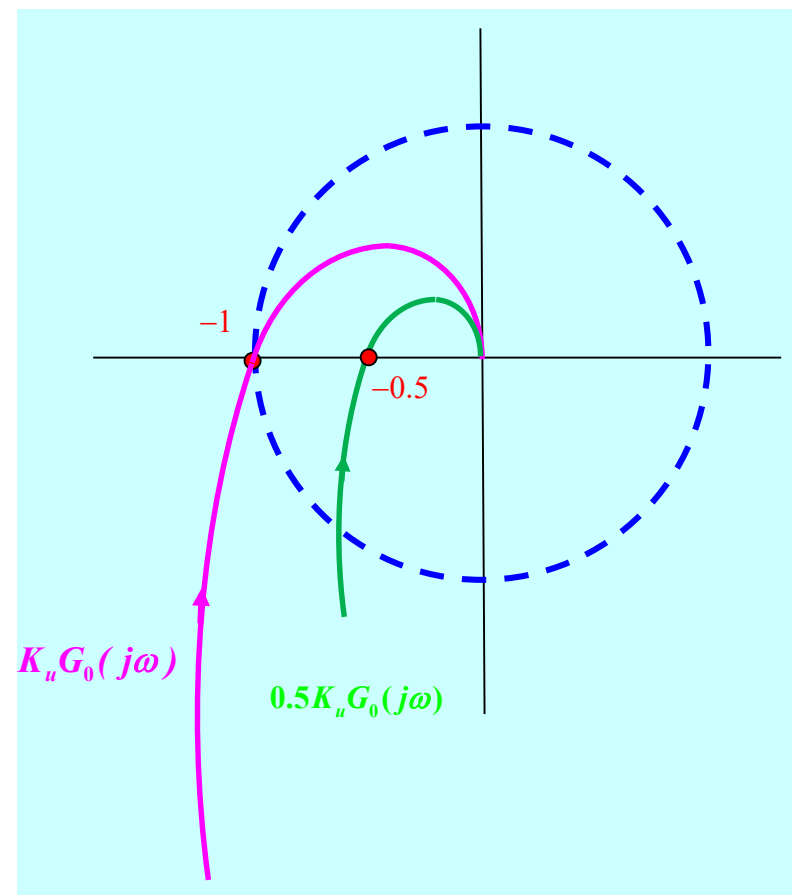
穿越频率  $\omega_x$ , 截止频率  $\omega_c$

幅值裕度  $h = 1$ , 相位裕度  $\gamma = 0^\circ$

P控制器的  $K_p = 0.5K_u$  时

$0.5K_u G_0(j\omega)$  与负实轴的交点为  $-0.5$

幅值裕度  $h = 2 = 6\text{dB}$ , 穿越频率  $\omega_x = \frac{2\pi}{T_u}$



# PID调节器的频域分析

PI控制器  $K_P + \frac{K_P}{T_I} \frac{1}{s} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = K_P \left( \frac{1 + T_I s}{T_I s} \right)$

$K_P = 0.4K_u, T_I = 0.8T_u$

开环频率特性

$K_P \left( \frac{1 + jT_I \omega}{jT_I \omega} \right) G_0(j\omega) = 0.4K_u \left( \frac{1 + jT_I \omega}{jT_I \omega} \right) G_0(j\omega)$

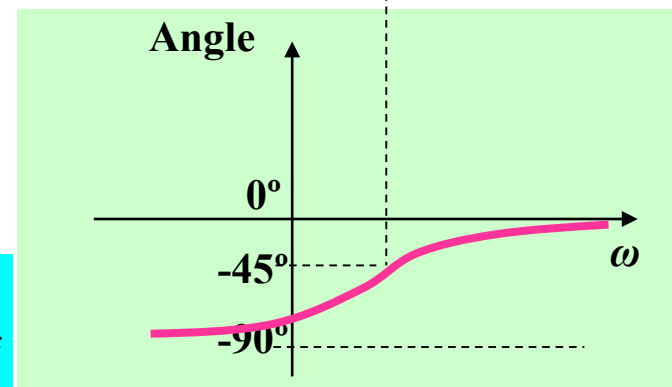
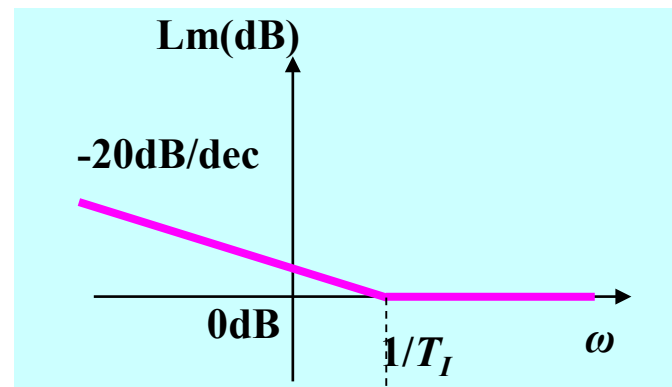
先考虑  $0.4K_u G_0(j\omega)$ :

幅值裕度  $h = \frac{1}{0.4} = 2.5 \approx 8\text{dB}$ , 穿越频率  $\omega_x = \frac{2\pi}{T_u}$

在  $\frac{1 + jT_I \omega}{jT_I \omega}$  的bode图中, 转折频率  $\frac{1}{T_I} = \frac{1}{0.8T_u} = \frac{1}{0.8 \times 2\pi} \frac{2\pi}{T_u} \approx \frac{1}{5} \omega_x$

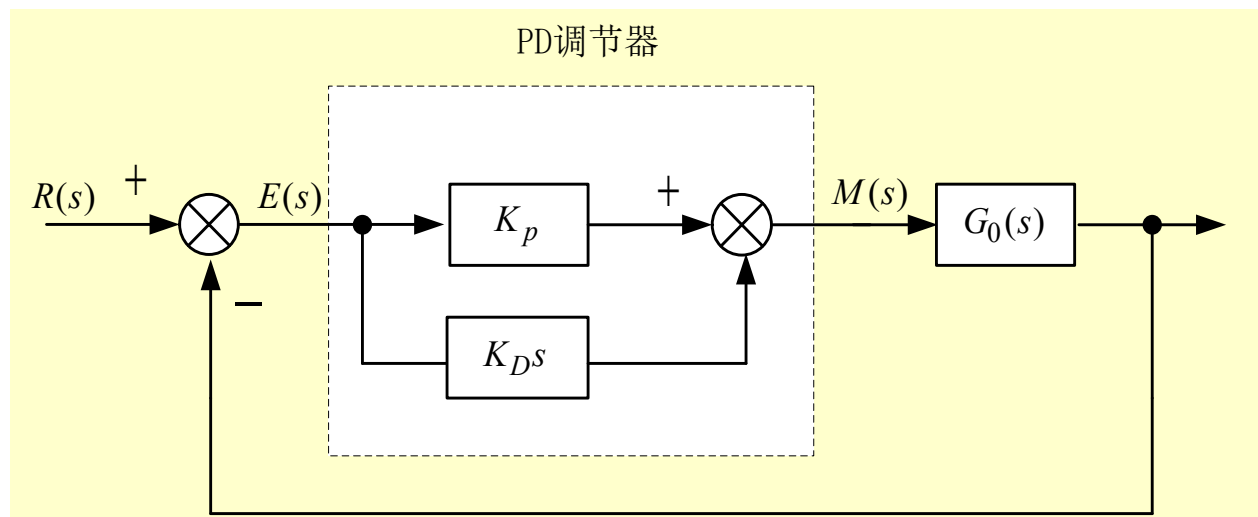
在穿越频率  $\omega_x$  处,  $\frac{1 + jT_I \omega}{jT_I \omega}$  的幅值约等于0dB, 相角接近0°

$0.4K_u \left( \frac{1 + jT_I \omega}{jT_I \omega} \right) G_0(j\omega)$  的穿越频率在  $\frac{2\pi}{T_u}$  附近, 幅值裕度不低于6dB





# 比例-微分(PD)调节器及其控制规律



调节器的动态方程:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_D \frac{de(t)}{dt}$$

传递函数:

$$G_c(s) = K_p + K_D s = K_p + K_p T_D s = K_p (1 + T_D s)$$

式中:  $K_D = K_p T_D$ ——微分调节器比例系数;

$T_D$ ——微分时间常数。

# 比例-微分(PD)调节器及其控制规律

为了说明调节器的物理意义，以二阶系统为例：

$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

系统的开环传递函数：

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{\omega_n^2(K_p + K_D s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

以上分析可知：

PD调节器的引入，相当于给原系统的开环传递函数增加了一个  $s = -K_p / K_D$  的零点。

微分调节器作用由  $T_D$  决定。  $T_D$  大，微分作用强，  $T_D$  小，微分作用弱，选择好  $T_D$  很重要。



# 比例-微分(PD)调节器及其控制规律

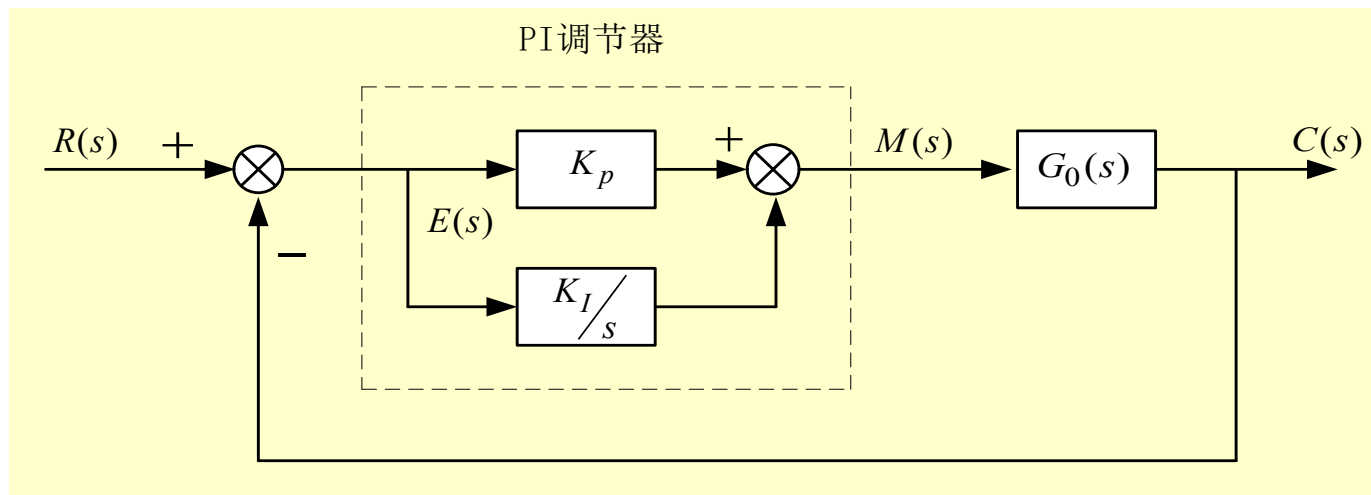
由以上分析可知：

微分控制是一种“预见”型的控制。它测出  $e(t)$  的瞬时变化率，作为一个有效早期修正信号，在超调量出现前会产生一种校正作用。

如果系统的偏差信号变化缓慢或是常数，偏差的导数就很小或者为零，这时微分控制也就失去了意义。

**注意：**模拟PD调节器的微分环节是一个高通滤波器，会使系统的噪声放大，抗干扰能力下降，在实际使用中须加以注意解决。

# 比例-积分(PI)调节器及其控制规律



PI调节器的传递函数：
$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

令 
$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

则 
$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{\omega_n^2(K_p s + K_1)}{s^2(s + 2\zeta\omega_n)}$$



# 比例-积分(PI)调节器及其控制规律

可见：引入PI调节器后，闭环系统由原来的I型系统变成了II型系统，对改善系统的稳态特性是有好处的。

另一方面由于积分环节引入相位滞后，系统的稳定性下降了。如果  $K_p$ 、 $K_I$  选择不当，很可能会造成不稳定。

# 比例 (P)调节器及其控制规律

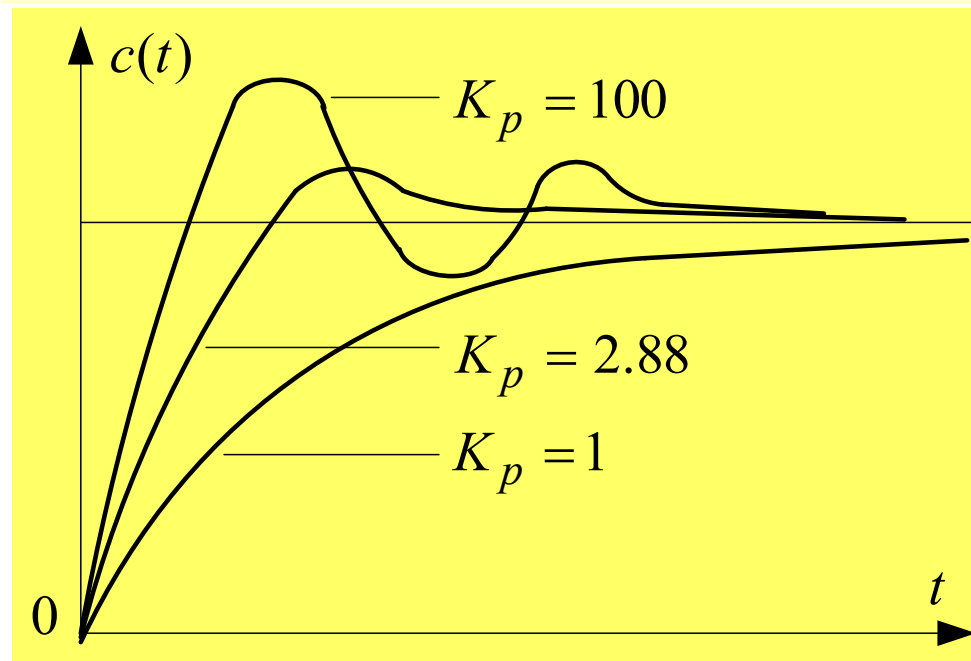
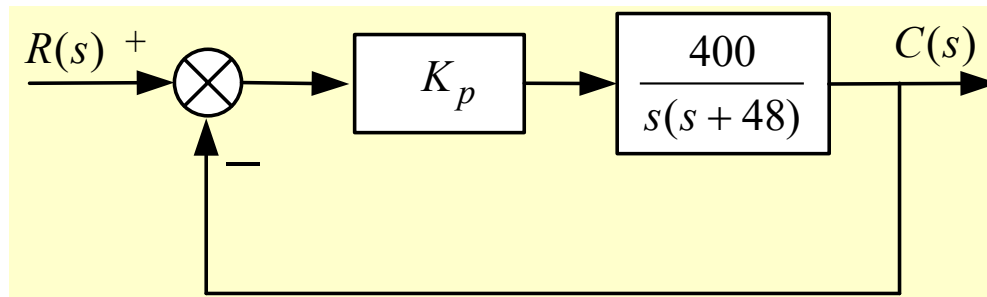
**例6-27：** 试分析比例调节器引入前后性能的变化。

解：

当 $K_p=1$ 时， $\zeta=1.2$ ，处于过阻尼状态，无振荡， $T_s$ 很长。

当 $K_p=100$ 时， $\zeta=0.12$ ，处于欠阻尼状态，超调量 $\sigma_p=68\%$ 。

当 $K_p=2.88$ 时， $\zeta=0.707$ ，处于欠阻尼状态， $\sigma_p=4.3\%$ ， $T_s=0.17s$ ，此时较理想。



---

*The End*