第八章 状态空间模型分析与设计

吴俊

jwu@iipc.zju.edu.cn

内容

- 回顾与简介
- 状态空间模型及求解
- 可控性和可观性
- 线性变换和标准型
- **SISO** 系统状态反馈
- 状态反馈：稳态误差分析
- **SISO** 系统状态观测器
- ……………

Outline of Section 5

- 状态反馈: 稳态误差分析
  - 基本概念
  - 阶跃输入: $r(t)=R_0u_{-1}(t)$, $R(s)=R_0/s$
  - 斜坡输入: $r(t)=R_1u_{-2}(t)$, $R(s)=R_1/s^2$
  - 加速度输入: $r(t)=R_2u_{-3}(t)$, $R(s)=R_2/s^3$
  - 稳态误差系数

状态反馈: 稳态误差分析

1. 基本概念

- 考虑最小相位传递函数**G(s)**

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$$

其中 $k_G>0$, $w<n$, 且系数 c_i 为正($0<=i<=w$).当**w>0**时，称为零极点系统

•当**w=0**时，称为全极点系统

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K_G}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$$

此时 $c_0=1$

- 在下面的分析中,对相变量表示的系统进行分析,确定相应的反馈系数.所得到的结果仅仅适用于相变量表示的系统.

状态反馈: 稳态误差

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$$

2. 阶跃输入: $r(t)=R_0u_{-1}(t)$, $R(s)=R_0/s$

- 注意: 设计过程是基于相变量表示的系统, 状态反馈（负反馈）闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$

则误差 $E(s)=R(s)G_E(s)$

$$E(s)=R(s)\left(1-\frac{Y(s)}{R(s)}\right)=\frac{R_0}{s}\frac{s^n+\cdots+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$

应用 终值定理

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{R_0}{s}\frac{s^n+\cdots+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$
$$=\frac{R_0(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}{a_0+K_Gk_1}$$

零稳态误差

$$a_0+K_Gk_1-K_Gc_0=0\Rightarrow k_1=c_0-\frac{a_0}{K_G}$$

其中 $c_0>0$

状态反馈: 稳态误差分析

2. 阶跃输入: $r(t)=R_0u_{-1}(t)$, $R(s)=R_0/s$

- 即使 G(s) 是0型系统, 状态反馈系统阶跃输入下的零稳态误差可以获得.

- 一旦阶跃输入的零稳态误差确定，则反馈系数k_1 由系统参数决定.
对于所有状态反馈控制系统设计，无论G(s)是全极点系统还是零极点系统，这种阶跃输入零稳态误差设计方法都适用。

状态反馈：稳

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$

2. 阶跃输入: $r(t)=R_0u_{-1}(t)$, $R(s)=R_0/s$

- 系统特征方程为

$$s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+(a_{n-2}+K_Gk_{n-1})s^{n-2}+\cdots\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)=0$$

- 所有 **Y(s)/R(s)**的闭环极点在**s**平面左半平面（系统稳定）的必要条件是特征方程的所有系数必须为正.

阶跃输入零稳态误差条件$k_1=c_0-\dfrac{a_0}{K_G}$

$a_0+K_Gk_1=K_Gc_0>0$

符合稳定的要求

状态反馈: 稳态误差分析

3. 斜坡输入: $r(t)=R_1 t u_{-2}(t)$, $R(s)=R_1/s^2$

误差

$$E(s)=R(s)\left(1-\frac{Y(s)}{R(s)}\right)=\frac{R_1}{s^2}\frac{s^n+\cdots+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$

$k_1=c_0-\dfrac{a_0}{K_G}$,阶跃响应稳态误差为零

$$E(s)=R(s)\left(1-\frac{Y(s)}{R(s)}\right)=\frac{R_1}{s^2}\frac{s^n+\cdots+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+K_Gc_0}$$

终值

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{R_1}{s}\frac{s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+\underbrace{(a_1+K_Gk_2)}_{}s+K_Gc_0}=\frac{R_1(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)}{K_Gc_0}$$

零稳态误差

$$a_1+K_Gk_2-K_Gc_1=0\Rightarrow k_2=c_1-\frac{a_1}{K_G}$$

=0不稳定

- 对于全极点系统 $c_0=1$ 和 $c_1=0$; 则 $k_2=-a_1/K_G$;$a_1+K_Gk_2=0$
- *对于全极点系统，斜坡输入下通过状态反馈只能是有静差的.*

需 $a_1+K_Gk_2>0$，

静态误差 $$e_{ss}=\frac{R_1(a_1+K_Gk_2)}{K_G}=\left(k_2+\frac{a_1}{K_G}\right)R_1$$

状态反馈: 稳态误差分析

3. 斜坡输入: $r(t)=R_1 tu_{-2}(t)$, $R(s)=R_1/s^2$

- 当系统至少包含一个零点时，$c_1>0$， $c_0>0$，

- 系统特征方程为

$$s^n+(a_{n-1}+K_G k_n)s^{n-1}+(a_{n-2}+K_G k_{n-1})s^{n-2}+\cdots\cdots+(a_1+K_G k_2)s+K_G c_0=0$$

无静差要求 $k_2=c_1-\dfrac{a_1}{K_G}$

$a_1+K_G k_2=K_G c_1>0$ 符合稳定的要求

•在这种情况下, *系统稳定且对斜坡输入无静差*

• 当系统至少有一个零点时，可以设计状态反馈使系统对阶跃输入和斜坡输入具有零稳态偏差.

状态反馈: 稳态误差分析

4. 加速度输入: $r(t)=(R_2 t^2/2)u_{-3}(t)$, $R(s)=R_2/s^3$

- 对于加速度输入, 分别研究全极点系统和零极点系统.

- 对于全极点系统, 有$c_0=1, c_1=0$

$$k_1 = c_0 - \frac{a_0}{K_G} = 1 - \frac{a_0}{K_G}$$

$$a_1 + K_G k_2 > 0$$

误差

$$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right) = \frac{R_2}{s^3}\frac{s^n + \cdots + (a_1 + K_G k_2 - K_G c_1)s + (a_0 + K_G k_1 - K_G c_0)}{s^n + (a_{n-1} + K_G k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_G k_2)s + (a_0 + K_G k_1)}$$

$$= \frac{R_2}{s^3}\frac{s^n + \cdots + (a_1 + K_G k_2)s}{s^n + (a_{n-1} + K_G k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_G k_2)s + K_G}$$

$$= \frac{R_2}{s^2}\frac{s^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_G k_2)}{s^n + (a_{n-1} + K_G k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_G k_2)s + K_G}, \quad a_1 + K_G k_2 > 0$$

$$e(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \infty$$

- 可以得出结论：全极点系统不能跟踪加速度输入.

状态反馈: 稳态误差分析

4. 加速度输入: $r(t)=(R_2t^2/2)u_{-3}(t)$, $R(s)=R_2/s^3$

- 对只有一个零点的零极点系统， $c_0>0, c_1=1, c_2=0$ $\quad k_1=c_0-\dfrac{a_0}{K_G}$ $\quad k_2=c_1-\dfrac{a_1}{K_G}=1-\dfrac{a_1}{K_G}$

误差

$$E(s)=\frac{R_2}{s^3}\frac{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$

$$=\frac{R_2}{s^3}\frac{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+K_Gs+K_Gc_0}$$

$$=\frac{R_2}{s}\frac{s^{n-2}+\cdots+(a_2+K_Gk_3)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+K_Gs+K_Gc_0},\quad a_2+K_Gk_3>0$$

$$e(t)_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{a_2+K_Gk_3}{K_Gc_0}R_2$$

- *只有一个零点的零极点系统，加速度输入下通过状态反馈只能是有静差的.*

需$\mathbf{a_2+K_Gk_3>0}$，

静态误差 $\quad e_{ss}==\dfrac{a_2+K_Gk_3}{K_Gc_0}R_2$

状态反馈: 稳态误差分析

4. 加速度输入: $r(t)=(R_2t^2/2)u_{-3}(t)$, $R(s)=R_2/s^3$

- 对有至少二个零点的零极点系统，$c_0>0, c_1>0, c_2>0$　$k_1=c_0-\dfrac{a_0}{K_G}$　$k_2=c_1-\dfrac{a_1}{K_G}$

误差

$$E(s)=\frac{R_2}{s^3}\frac{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3-K_Gc_2)s^2+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$

$$=\frac{R_2}{s^3}\frac{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3-K_Gc_2)s^2}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+K_Gs+K_Gc_0}$$

$$=\frac{R_2}{s}\frac{s^{n-2}+\cdots+(a_2+K_Gk_3-K_Gc_2)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+K_Gs+K_Gc_0}$$

$$e(t)_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\frac{a_2+K_Gk_3-K_Gc_2}{K_Gc_0}R_2$$

零稳态误差　$a_2+K_Gk_3-K_Gc_2=0\Rightarrow k_3=c_2-\dfrac{a_2}{K_G}$　$a_2+K_Gk_3=K_Gc_2>0$　满足稳定要求

- 当系统至少有二个零点时，可以设计状态反馈使系统对阶跃输入、斜坡输入和加速度输入具有零稳态偏差.

状态反馈: 稳态误差分析

小结

- 对阶跃输入, 即使G(s)为0型系统，无论全极点系统或零极点系统，都可以通过状态反馈使系统具有零稳态偏差特性

- 对斜坡输入, 若系统为全极点稳定系统，则*无法通过状态反馈*使其具有零稳态偏差特性，但闭环系统可以是稳定的，稳态误差为有限值。*仅当系统至少有一个零点时，可以通过状态反馈使闭环系统对斜坡输入具有零稳态偏差特性*。

- 对加速度输入, 全极点系统无法跟踪输入.只有一个零点时，无法通过状态反馈实现无静差，但可闭环稳定，稳态误差为有限值。*仅当系统至少有两个零点时，可以通过状态反馈使闭环系统对加速度输入具有零稳态偏差特性.*

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数

- 如图所示系统,

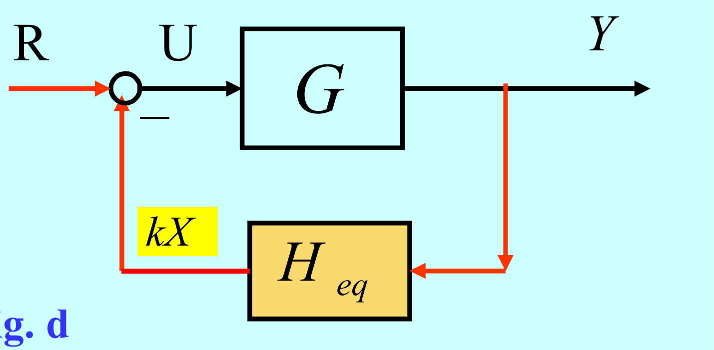

Fig. d

系统闭环传递函数为

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H_{eq}(s)}$$

- 同样的， 可以将其转化为单位反馈系统，前向通道传递函数为 G_{eq}，闭环传函为

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_{eq}(s)}{1+G_{eq}(s)}$$

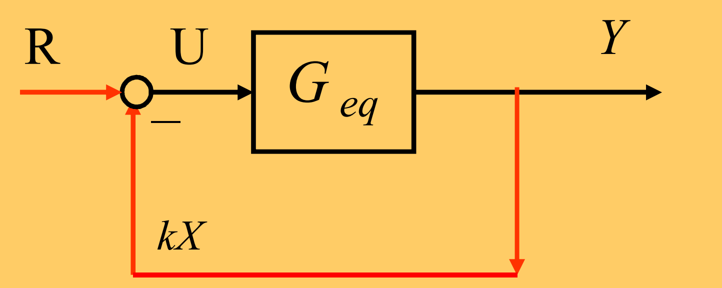

Fig.

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数

- 求解 $\mathbf{G_{eq}}$

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_{eq}(s)}{1+G_{eq}(s)}$$

$$M(s)+M(s)G_{eq}(s)=G_{eq}(s)$$

$$M(s)=(1-M(s))G_{eq}(s)$$

$$G_{eq}(s)=\frac{M(s)}{1-M(s)}$$

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_G(s^w+\cdots c_2s^2+c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$

$$\begin{aligned}G_{eq}(s)&=\frac{K_G(s^w+\cdots+c_2s^2+c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)-K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots+c_2s^2+c_1s+c_0)}\\&=\frac{K_G(s^w+\cdots+c_2s^2+c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3-K_Gc_2)s^2+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}\end{aligned}$$

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数

$$G_{eq}(s)=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots+c_2s^2+c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3-K_Gc_2)s^2+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}$$

- 全极点系统**w=0, c_0=1, c_1=0, c_2=0**

$$G_{eq}(s)=\frac{K_G}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}$$

阶跃输入$e(t)_{ss}=0$ $k_1=c_0-a_0/K_G$ $a_1+K_Gk_2>0$

$$G_{eq}(s)=\frac{K_G}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+(a_1+K_Gk_2)s}$$

•由于是 1 型系统，, 阶跃误差系数为 $K_p=\lim_{s\to 0}[G_{eq}(s)]=\infty$

斜坡误差系数为 $K_v=\lim_{s\to 0}[sG_{eq}(s)]=\frac{K_G}{a_1+K_Gk_2}$

加速度误差系数为 $K_a=\lim_{s\to 0}[s^2G_{eq}(s)]=0$

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数

$$G_{eq}(s)=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots+c_2s^2+c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3-K_Gc_2)s^2+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}$$

- 只有一个零点的系统**w=1, c_0>0,c_1>0,c_2=0**

$$G_{eq}(s)=\frac{K_G(c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}$$

对阶跃和斜坡输入的$e(t)_{ss}=0$ $k_1=c_0-a_0/K_G$ $k_2=c_1-a_1/K_G$ $a_2+K_Gk_3>0$

$$G_{eq}(s)=\frac{K_G(c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3)s^2}$$

- **2** 型系统，，阶跃误差系数为 $K_p=\lim_{s\to 0}[G_{eq}(s)]=\infty$

斜坡误差系数为 $K_v=\lim_{s\to 0}[sG_{eq}(s)]=\infty$

加速度误差系数为 $K_a=\lim_{s\to 0}[s^2G_{eq}(s)]=\dfrac{K_Gc_0}{a_2+K_Gk_3}$

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数

$$G_{eq}(s)=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots+c_2s^2+c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3-K_Gc_2)s^2+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}$$

- 至少有二个零点的系统**w>=2, c_0>0,c_1>0,c_2>0**

$$G_{eq}(s)=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots+c_2s^2+c_1s+c_0)}{s^n+\cdots+(a_2+K_Gk_3-K_Gc_2)s^2+(a_1+K_Gk_2-K_Gc_1)s+(a_0+K_Gk_1-K_Gc_0)}$$

对阶跃和斜坡输入的$e(t)_{ss}=0$　$k_1=c_0-a_0/K_G$　$k_2=c_1-a_1/K_G$　$k_3=c_2-a_2/K_G$

- 3 型系统，,阶跃误差系数为　$K_p=\lim_{s\to 0}[G_{eq}(s)]=\infty$

斜坡误差系数为　$K_v=\lim_{s\to 0}[sG_{eq}(s)]=\infty$

加速度误差系数为　$K_a=\lim_{s\to 0}[s^2G_{eq}(s)]=\infty$

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数: 总结

- 状态反馈稳态误差系数

State-variable feedback system	Number of zeros	K_p	K_v	K_a
All-pole plant	$w=0$	∞	$\dfrac{K_G}{a_1+K_G k_2}$	0
Pole-zero plant	$w=1$	∞	∞	$\dfrac{K_G c_0}{a_2+K_G k_3}$
	$w\geq 2$	∞	∞	∞

†For phase-variable representation.

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数: 总结

•状态反馈系统零稳态误差的条件

System	Number of zeros required	Input: Step	Ramp	Parabola	$G_{eq}(s)$ type
All-pole plant	$w=0$	$k_1 = 1 - \frac{a_0}{K_G}$	‡	§	1
Pole-zero plant	$w=1$	$k_1 = c_0 - \frac{a_0}{K_G}$	$k_2 = c_1 - \frac{a_1}{K_G}$	‡	2
	$w \geq 2$			$k_3 = C_2 - \frac{a_2}{K_G}$	3

†For phase-variable representation.
‡A steady-steady error exists.
§Cannot follow.

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数: 总结

- 对于状态反馈系统, 可以使G_{eq}*具有*任意期望的*型别，* *而与G(s)的型别无关.*
- 为了 获得 ***m*** **(m>0)***型系统*, 下式需要满足

$$a_{i-1} + K_G k_i - K_G c_{i-1} = 0 \quad \text{for all } i = 1, 2, 3, \cdots, m$$

- 一个非**m**型系统可以通过状态反馈使其具有**m**型系统的特性，而不需要在原系统中串级纯积分环节.
- 为了获得 ***m*** *型系统*, 闭环系统传递函数至少需要具有 **m-1** 个零点. 这是状态反馈系统的重要特点。

状态反馈: 稳态误差分析

5. 稳态误差系数: 总结

- 注意到：由各输入下的零稳态误差 $e(t)_{ss}=0$ *来决定的*状态反馈系数 k_1, k_2 和 k_3 是基于系统相变量表达式的. 这些值可能不一定能满足闭环系统期望特征根的要求。

- 一旦设计出了满足系统稳态和瞬态响应要求的系统,就可以通过计算相应物理系统特征方程和相变量表示系统特征方程系数来计算出物理系统的反馈系数。

Thanks！