

# 现代控制理论

## Modern Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大



## 第七章 Chapter 7

### 线性离散系统的分析与校正



# 主要内容

---

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

# 离散系统的稳定性与稳态误差

---

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- 稳态误差

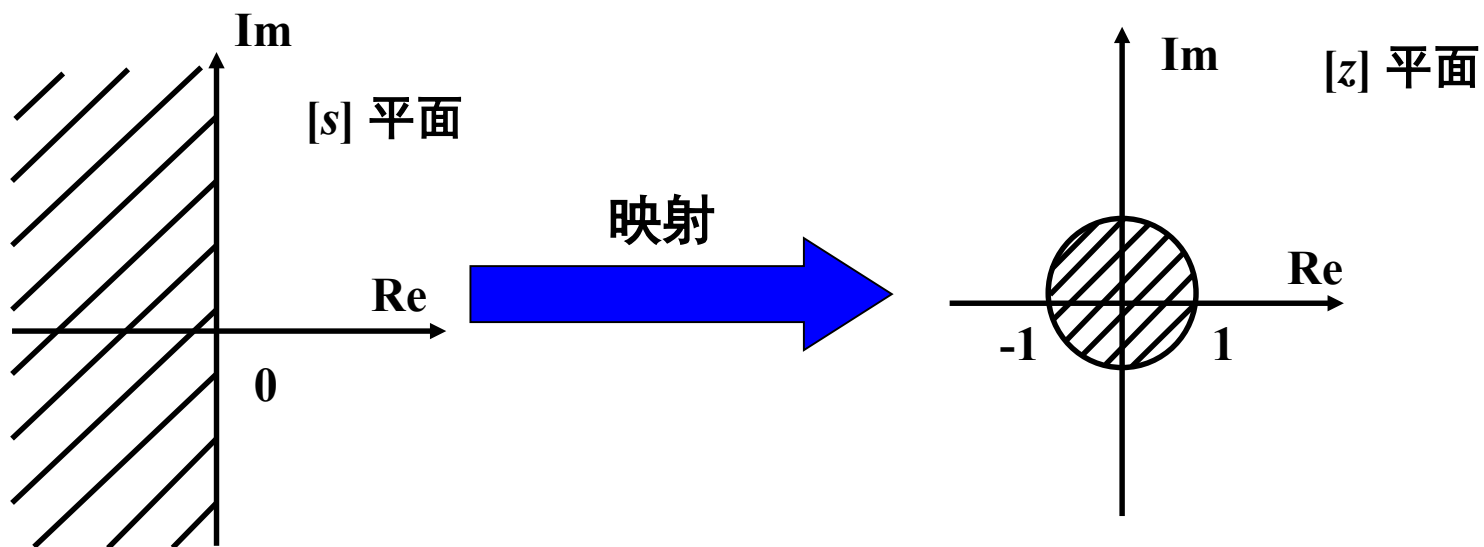
# S域到z域的映射

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j2\pi\omega/\omega_s}$$

(1)  $s$ 平面中实部  $\sigma$  为常数的线对应  $z$ 平面中半径为  $e^{\sigma T}$  的圆

$s$ 平面的虚轴对应  $z$ 平面的一系列重叠的单位圆

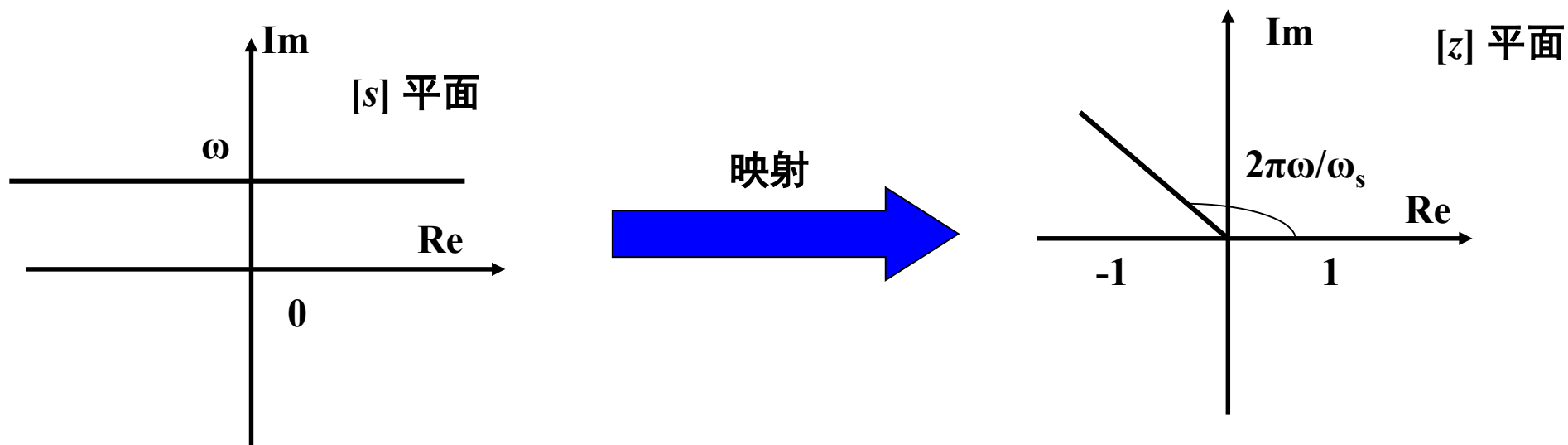
$s$ 平面的左半开平面对应  $z$ 平面的单位圆的内部



# S域到z域的映射

(2)  $s$ 平面中虚部  $\omega$  为常数的线对应  $z$ 平面中角度  $\omega T$  的射线

$s$ 平面的负实轴 ( $-\infty < \sigma \leq 0$ ) 对应于  $z$ 平面中  $0 < z \leq 1$  的实轴部分

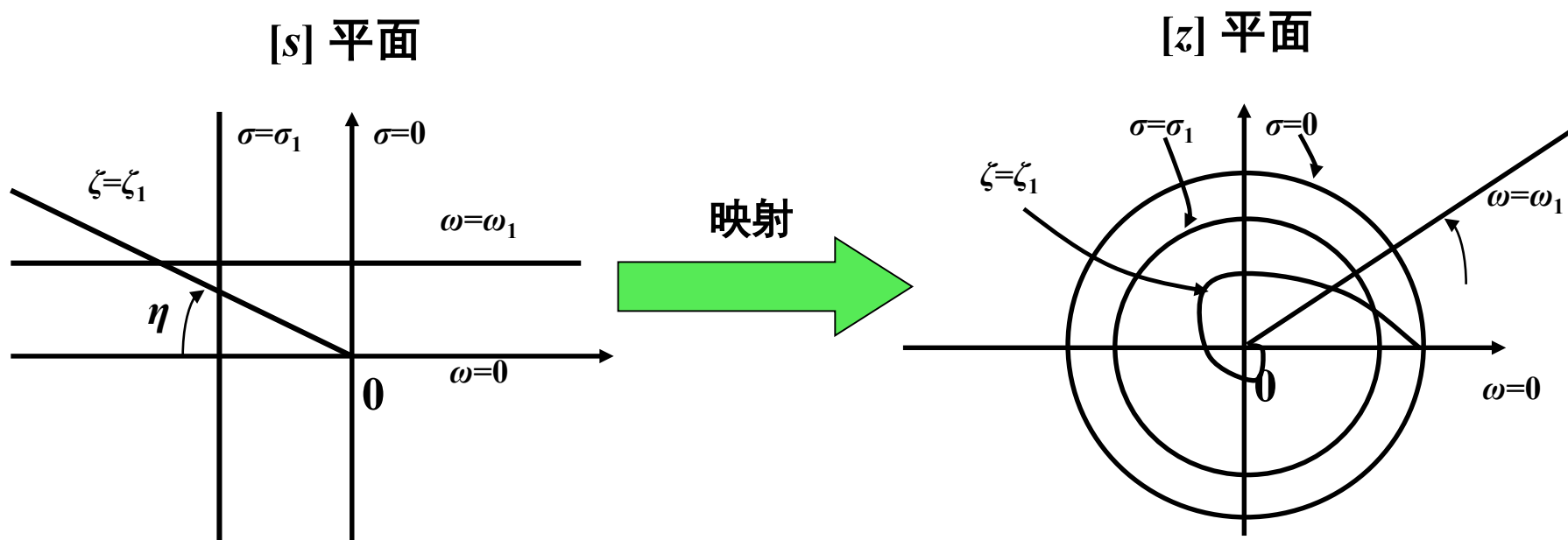


# S域到z域的映射

(3)  $s$ 平面中阻尼比为常数的线可以定义为

$$s = \sigma + j\omega = -\omega \operatorname{ctg} \eta + j\omega \quad \text{其中} \quad \eta = \cos^{-1} \zeta$$

$$z = e^{sT} = e^{-\omega T \operatorname{ctg} \eta + j\omega T} = e^{-\omega T \operatorname{ctg} \eta} \angle \omega T$$



# 离散系统的稳定性与稳态误差

---

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- 稳态误差



# 稳定性

## ➤ 离散系统稳定的定义

- 若离散系统在有界输入序列作用下，其输出序列也是有界的，则称该离散系统是稳定的。

## ■ 离散系统稳定的充分必要条件

### ➤ 时域中

线性定常差分方程

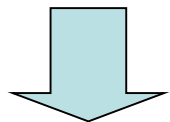
$$c(k) = -\sum_{i=1}^n a_i c(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k-j)$$

齐次方程:  $c(k) + \sum_{i=1}^n a_i c(k-i) = 0$       通解:  $A\alpha^k$

$$A\alpha^k + a_1 A\alpha^{k-1} + \cdots + a_n A\alpha^{k-n} = 0$$

代入

特征方程



# 稳定性

## ➤ 离散系统稳定的充分必要条件

### – 时域中

特征方程： $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

假设特征根： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

差分方程的通解： $c(k) = A_1\alpha_1^k + A_2\alpha_2^k + \cdots + A_n\alpha_n^k$

当特征方程的根  $|\alpha_i| < 1$  时,  $i=1, \dots, n$ , 必有  $\lim_{k \rightarrow \infty} c(k) = 0$

线性定常离散系统稳定的充分必要条件:

差分方程的所有特征根的模  $|\alpha_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$

# 稳定性

## ➤ Z 域

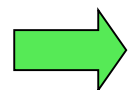
➤ 已知如下系统方框图，系统方程可以描述为

$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s)$$

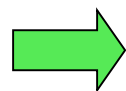


$$E^*(s) = R^*(s) - [G(s)H(s)]^* E^*(s)$$



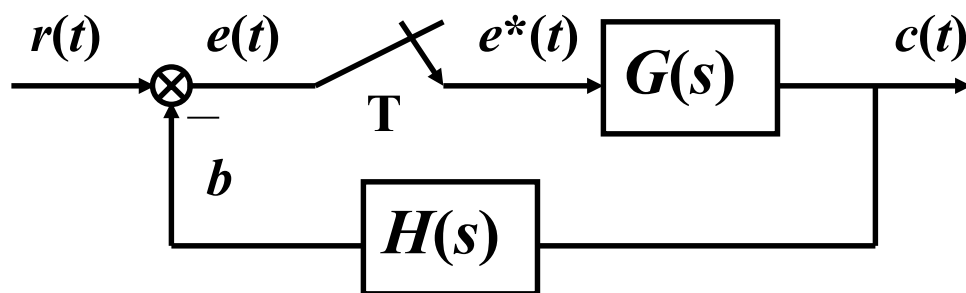
$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$



$$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$$

特征方程



➤ 注意

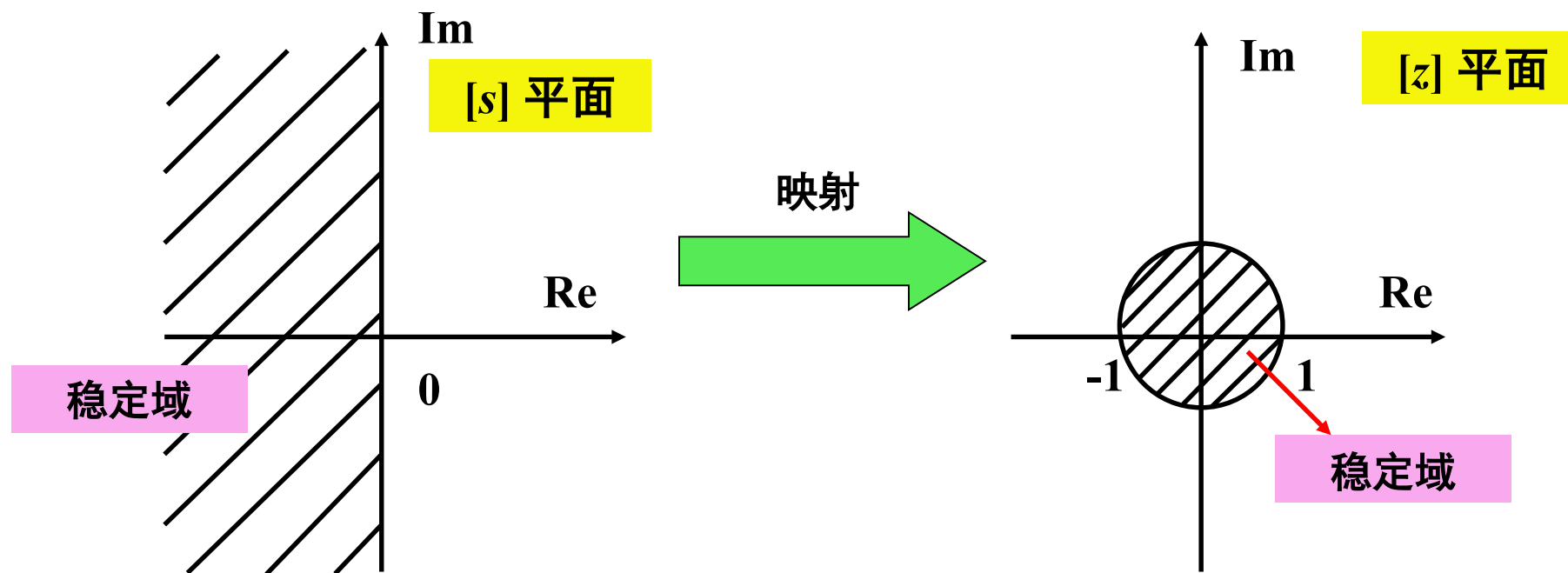
$GH^*(s) \equiv [G(s)H(s)]^*$   
一般地，

$GH^*(s) \neq G^*(s)H^*(s)$

# 稳定性

## ➤ 采样序列的 Laplace 变换

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \xrightarrow{\text{let } z \equiv e^{Ts}} F^*(s) \Big|_{s \equiv (1/T) \ln z} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$



# 稳定性

Z 域中的充分必要条件是特征方程的所有特征根在单位圆内。

例7-4-1 闭环采样系统的特征方程如下，判断系统的稳定性

$$z^2 + 2.3z + 3 = 0$$

解：法1) 特征方程的特征根为：

$$z_{1,2} = -1.15 \pm j1.295 \Rightarrow |z| = 1.732 > 1$$

因此，闭环系统是不稳定的。

# 稳定性

例7-4-1 闭环采样系统的特征方程如下，判断系统的稳定性

$$z^2 + 2.3z + 3 = 0$$

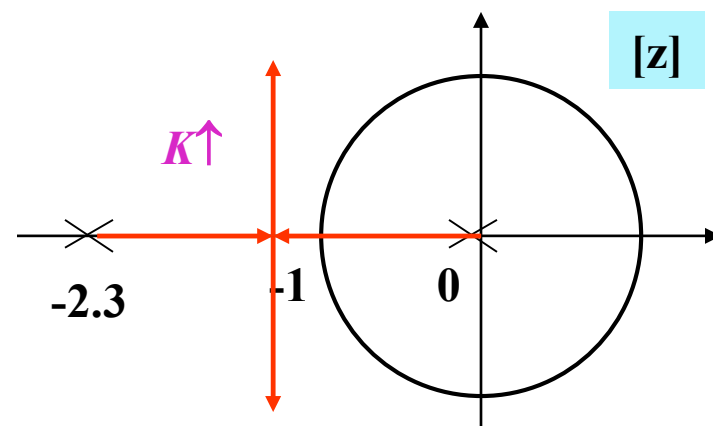
解：法2) 可以采用 **根轨迹** 方法来分析稳定性。

$$z^2 + 2.3z + 3 = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{z^2 + 2.3z} = 0 \Rightarrow [GH]_e = \frac{K}{z^2 + 2.3z}$$

开环极点：0 和 -2.3

Z平面的根轨迹如图所示

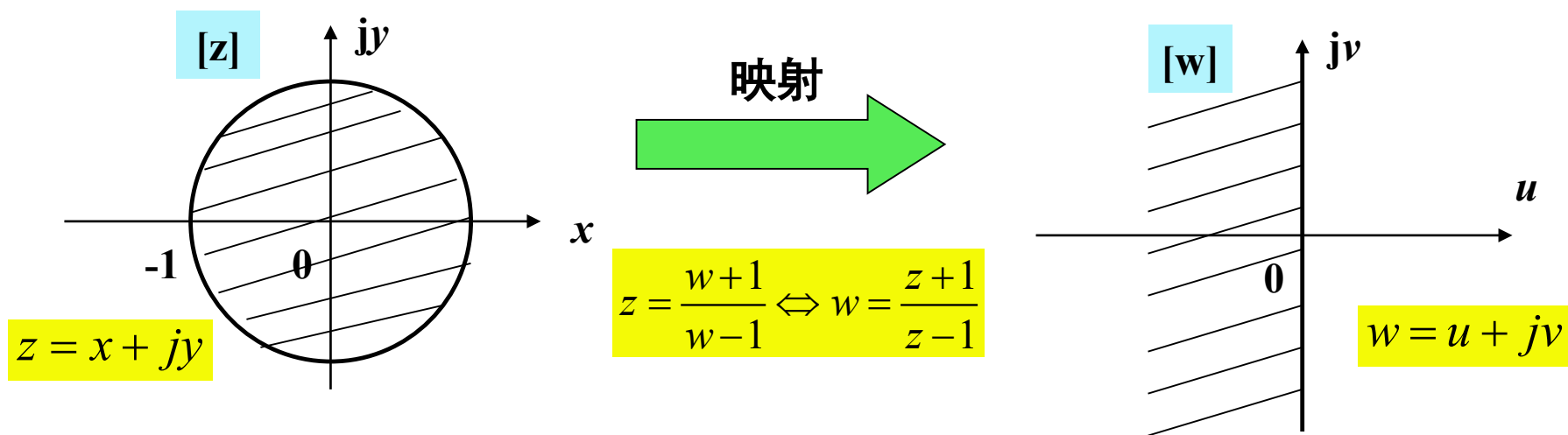
从图可以看出，对于  $K > 0$ ，闭环采样系统是不稳定的。



# 稳定性（从z域到w域）

- 对于采样系统的稳定性分析，是否也可以采用Routh稳定性判据？

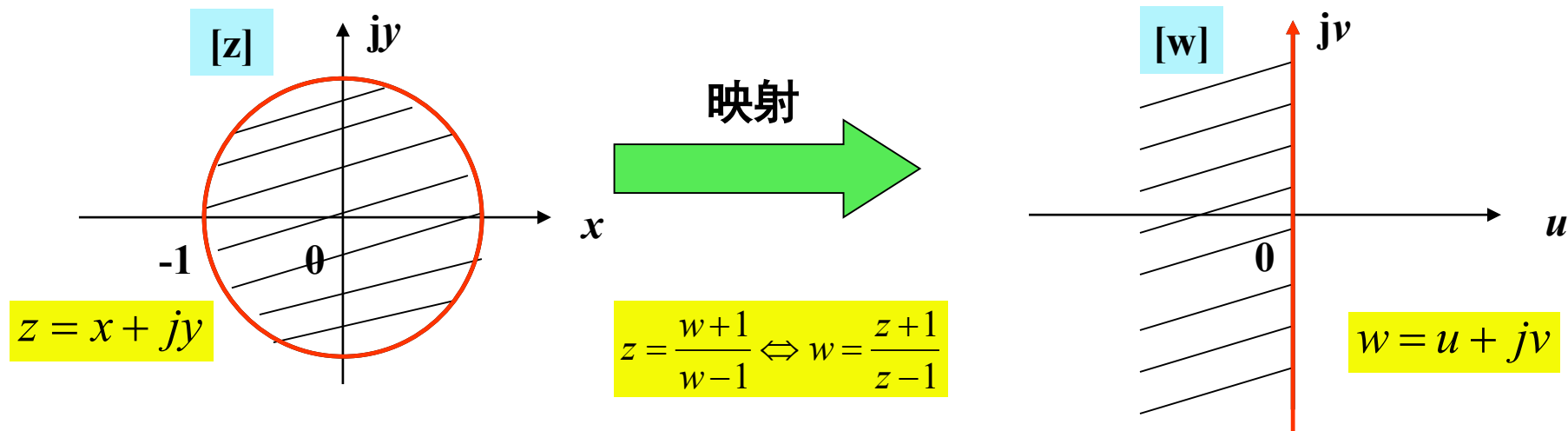
Routh稳定性判据不能直接采用，但是从[z]平面转换到[w]平面之后就可以采用了。



$$w = u + jv = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+jy+1}{x+jy-1} = \frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2} - j \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

# 稳定性（从z域到w域）

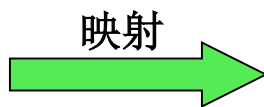
$$w = u + jv = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+jy+1}{x+jy-1} = \frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2} - j \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$



1) 当  $|z| = x^2 + y^2 = 1$

2) 当  $|z| = x^2 + y^2 < 1$

3) 当  $|z| = x^2 + y^2 > 1$



对 [w]:  $u=0$

对 [w]:  $u < 0$ , 位于左半平面

对 [w]:  $u > 0$ , 位于右半平面

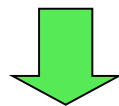


# 稳定性（频域响应）

- 通过双线性变换  $z = \frac{w+1}{w-1}$  解决脉冲传递函数不能直接应用频域的问题

- 设闭环离散系统特征方程为

$$1 + G(z) = 0$$



$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$1 + G(w) = 0$$



$$w = j\omega$$

$$1 + G(j\omega) = 0$$

式中的  $\omega$  通常称为伪频

- 经过如上双线性变换后，连续系统中的各种频域判据均可应用。

# 稳定性

例7-4-1 闭环采样系统的特征方程如下，判断系统的稳定性

$$z^2 + 2.3z + 3 = 0$$

解：法3) 转换平面法：[z] 平面到 [w] 平面

$$z^2 + 2.3z + K = 0 \Rightarrow \left( \frac{w+1}{w-1} \right)^2 + 2.3 \left( \frac{w+1}{w-1} \right) + K = 0$$



$$(3.3 + K)w^2 + (2 - 2K)w + K - 1.3 = 0$$



$$-3.3 < K; \quad K < 1; \quad K > 1.3$$



注意：二阶系统稳定的充分必要条件是特征方程所有系数同号。

因此，不存在K使闭环系统稳定。

# 稳定性

$$Z\left[\frac{K}{s^2}\right] = \frac{KTz}{(z-1)^2}$$



例7-4-2 给定单位负反馈系统的对象和零阶保持器传递函数分别为

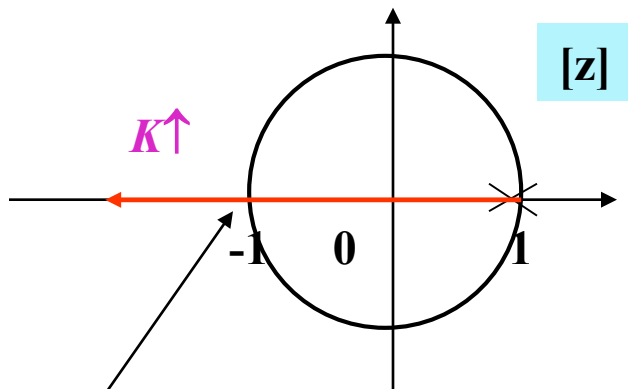
$$G(s) = \frac{K}{s} \quad \text{和} \quad H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

其中 $K > 0$ 。分析该系统的闭环稳定性。

解：法1) 计算开环脉冲传递函数

$$GH_0(s) = \frac{K(1 - e^{-Ts})}{s^2}$$

$$\left| \frac{KT}{z-1} \right| = 1 \bigg|_{\substack{z=1 \\ z=-1}} \Rightarrow 0 < K < \frac{2}{T}$$



$$(KT)^* = |2|; \quad K^* = \frac{2}{T}$$

↓ Z变换

(1)

$$GH_0(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{K}{s^2}\right\} = \frac{KT}{z-1}$$

$$\downarrow z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$GH_0(w) = \frac{KT}{\frac{w+1}{w-1} - 1} = \frac{KT}{2}(w-1)$$

# 稳定性

例7-4-2 给定单位负反馈系统的对象和零阶保持器传递函数分别为

$$G(s) = \frac{K}{s} \quad \text{和} \quad H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad \text{其中 } K > 0. \text{ 分析该系统的闭环稳定性。}$$

解:

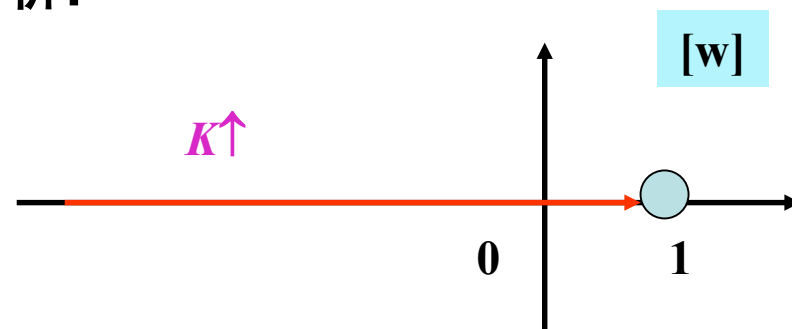
$$GH_0(w) = \frac{KT}{\frac{w+1}{w-1} - 1} = \frac{KT}{2}(w-1)$$

$$1 + GH_0(w) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{KT}{2}(w-1) = 0 \Rightarrow w = 1 - \frac{2}{KT}$$

$$1 - \frac{2}{KT} < 0 \Rightarrow 0 < K < \frac{2}{T}$$

法2) 直接求w平面的特征根或用w平面的根轨迹来分析:

$$1 + GH_0(w)|_{w=0} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{KT}{\frac{w+1}{w-1} - 1} \bigg|_{w=0} = 0$$



$$K = \frac{2}{T}$$

$$0 < K < \frac{2}{T}$$

# 稳定性

例7-4-3 闭环采样系统的特征方程如下，试求使系统稳定的 $K$ 值范围？

$$z^2 - z + 0.5K = 0$$

解：法1) 从  $[z]$  平面转换到  $[w]$  平面

$$z^2 - z + 0.5K = 0 \Rightarrow \left( \frac{w+1}{w-1} \right)^2 - \left( \frac{w+1}{w-1} \right) + 0.5K = 0$$



$$0.5Kw^2 + (2-K)w + 2 + 0.5K = 0$$

根据Routh's 稳定判据，当 $0 < K < 2$ 时，闭环采样系统稳定。

# 稳定性

例7-4-3 闭环采样系统的特征方程如下，试求使系统稳定的 $K$ 值范围？

$$z^2 - z + 0.5K = 0$$

解：法2) 绘制系统的根轨迹图

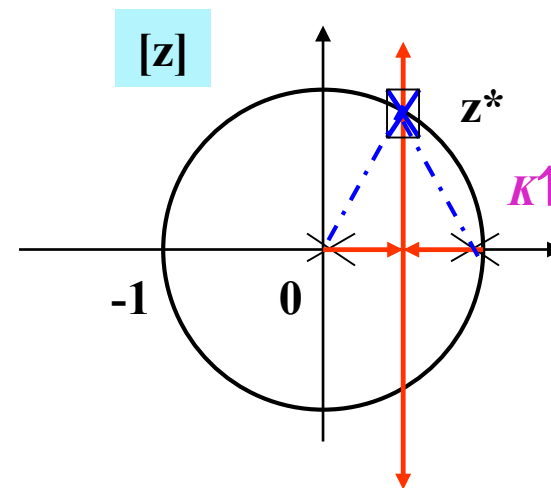
$$z^2 - z + 0.5K = 0 \Rightarrow 1 + \frac{0.5K}{z^2 - z} = 0 \Rightarrow [GH]_e = \frac{K'}{z^2 - z}$$



$$0.5K = K' = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow K = 2$$

利用幅值条件  
和分离点0.5

从根轨迹图可以看出，当  $0 < K < 2$  时，闭环系统稳定。



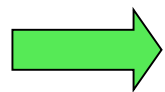
# 稳定性

例7-4-3 闭环采样系统的特征方程如下，试求使系统稳定的 $K$ 值范围？

$$z^2 - z + 0.5K = 0$$

解：法3) 求解特征方程

$$z^2 - z + 0.5K = 0$$



$$|z_{1,2}| = \left| \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2K}}{2} \right| < 1 \Rightarrow 0 < K < 2$$

所得结果与其他方法的结果相同，当  $0 < K < 2$  时，闭环采样系统稳定。

**特别注意：**  $z$  平面 几何边界是单位圆

# 稳定性

例7-4-4 采样反馈系统如图所示，其中  $H(s)=1$ ，  
采样周期为  $T=1$ ，试求使系统稳定的  $K$  值范围？

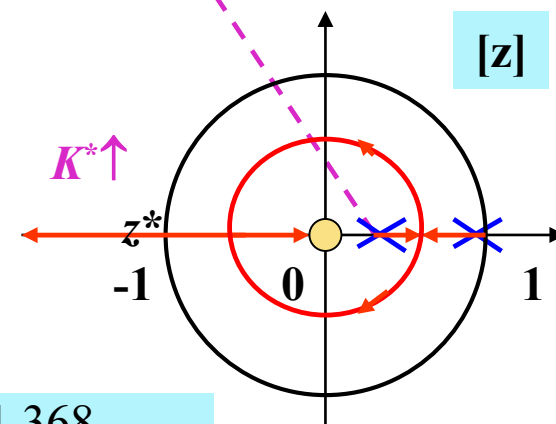
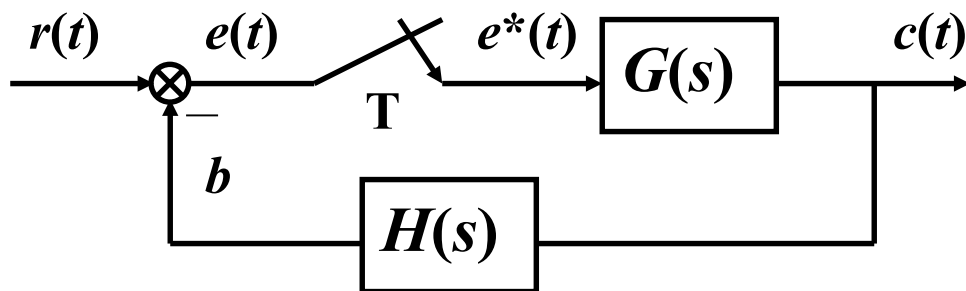
$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

解：1) 开环脉冲传递函数

$$G(z) = Z\left\{\frac{K}{s(s+1)}\right\} = \frac{Kz^{-1}(1-e^{-T})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} \Big|_{T=1} = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

2) 根轨迹如右图

3) 当  $z=-1$ ,  $K_{\max}^* = \frac{2 \cdot 1.368}{1} = 2.73 \Rightarrow K = \frac{2.73}{0.632} = 4.2$



$$K_{\max} = \frac{2 \cdot 1.368}{0.632} = 4.2$$

当  $0 < K < 4.2$ ，系统稳定。

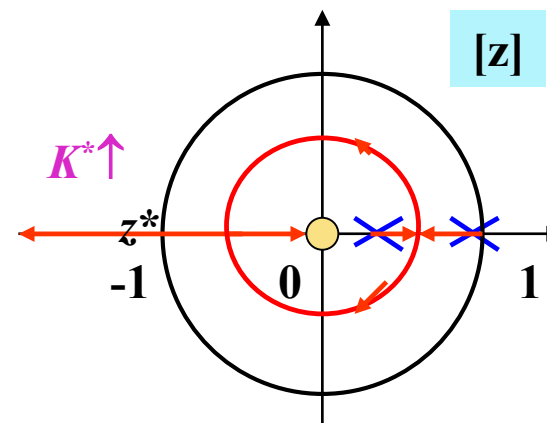


# 稳定性

例7-4-4 采样反馈系统如图所示，其中  $H(s)=1$ ，  
采样周期为  $T=1$ ，试求使系统稳定的  $K$  值范围？

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

当  $0 < K < 4.2$ ，系统稳定。



如果是二阶连续系统，根轨迹如何？稳定性？

➤ 可以看出，二阶采样系统当增益增大时系统不稳定，二阶连续系统对所有的正增益系统都是稳定的。这是二者之间的区别。

# 稳定性（零阶保持）

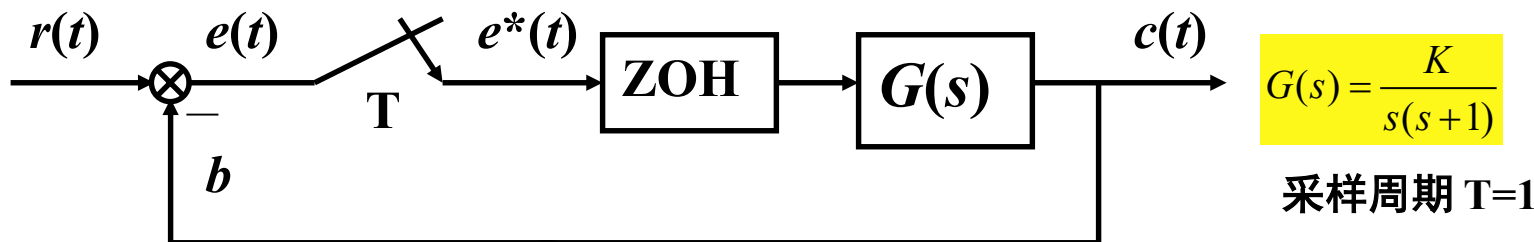
► 零阶保持（ZOH）的函数是对采样函数 $f^*(t)$ 进行分段连续构造出来的。其传递函数为

$$G_{\text{ZOH}}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

► ZOH 给系统引入了一个滞后角，因此，影响了系统的稳定性和时域特性。

例 如图，前向通道脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{C(z)}{E(z)} = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(s+1)} \right\} = K \frac{(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})} \stackrel{T=1}{=} \frac{0.368K(z + 0.717)}{(z-1)(z - 0.368)}$$



# 稳定性（零阶保持）

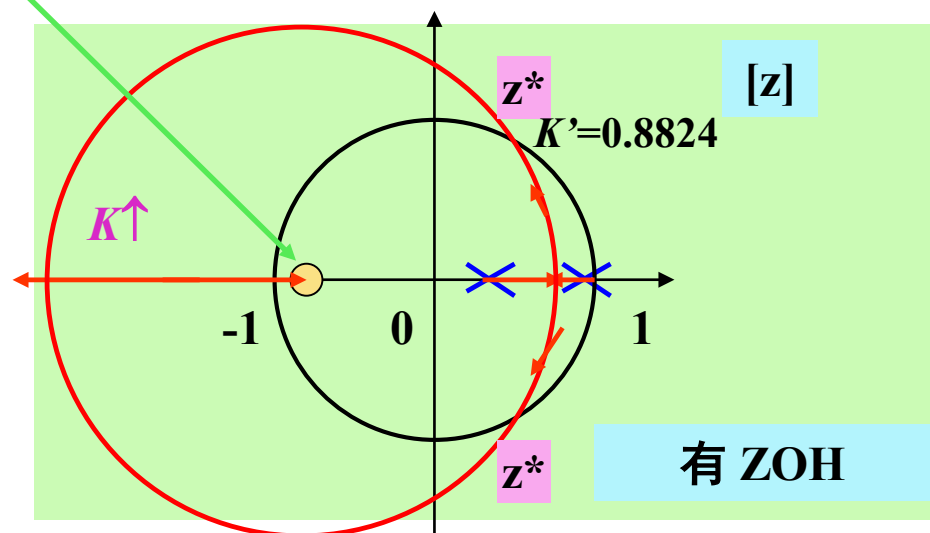
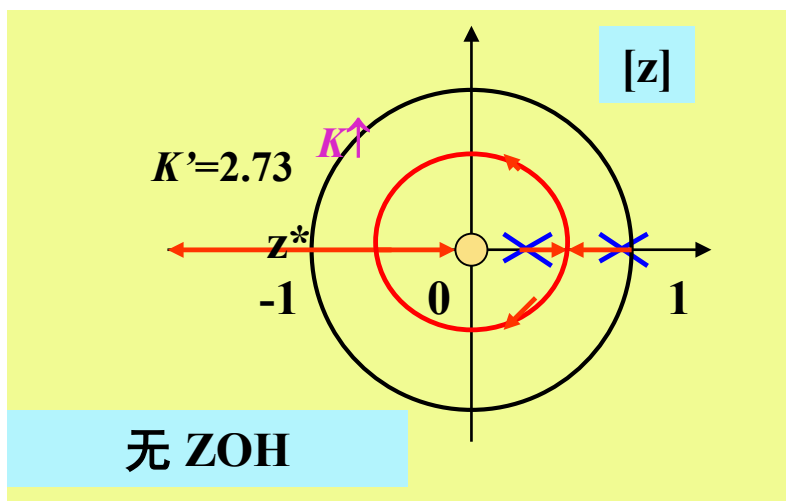
►比较：与没有 ZOH的Z变换进行比较

$$G(z) = Z\left\{\frac{K}{s(s+1)}\right\} = \frac{Kz^{-1}(1-e^{-T})}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} \Big|_{T=1} = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

和

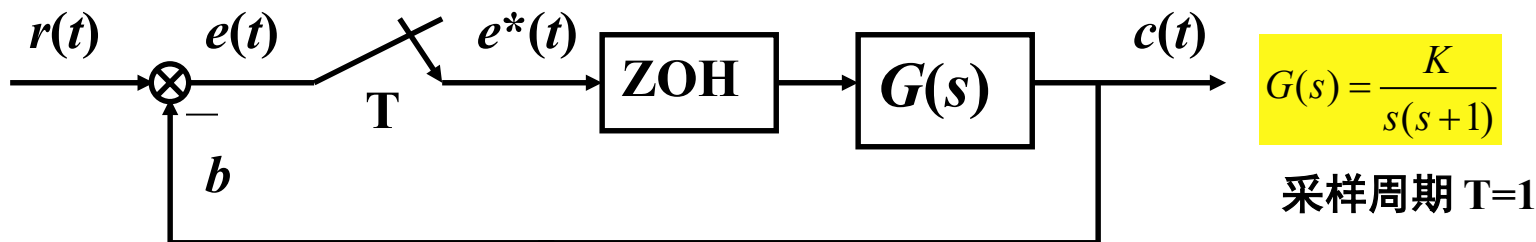
$$G(z) = \frac{C(z)}{E(z)} = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(s+1)}\right\} = \frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

如图所示。开环零点从原点移至 $z=-0.717$ 。



# 稳定性（采样周期）

## ➤ 分析采样周期对系统稳定性的影响



### 前向通道传递函数

$$G(z) = \frac{C(z)}{E(z)} = K \frac{(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

### 闭环系统脉冲传递函数

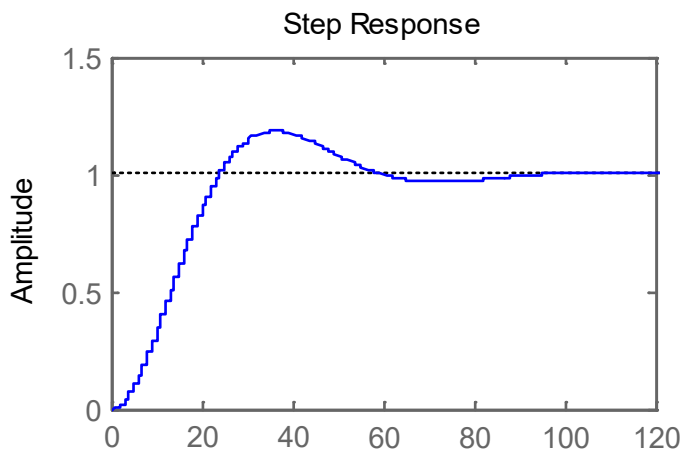
$$\phi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K[(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})]}{z^2 + [K(e^{-T} + T - 1) - (1 + e^{-T})]z + [K(1 - e^{-T} - Te^{-T}) + e^{-T}]}$$

# 稳定性（采样周期）

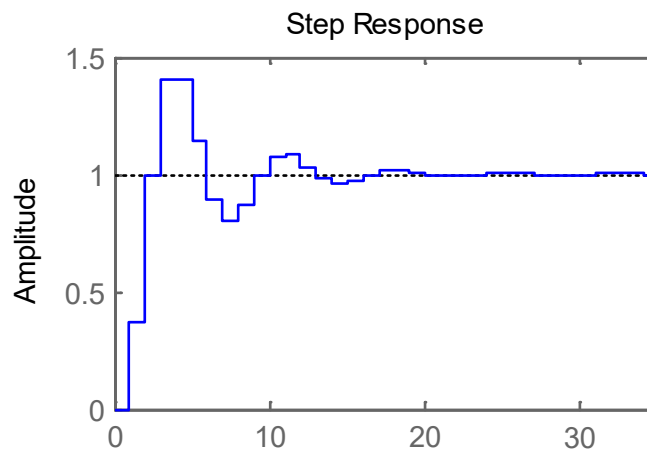
## ➤ 分析采样周期对系统稳定性的影响

$$\phi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K[(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})]}{z^2 + [K(e^{-T} + T - 1) - (1 + e^{-T})]z + [K(1 - e^{-T} - Te^{-T}) + e^{-T}]}$$

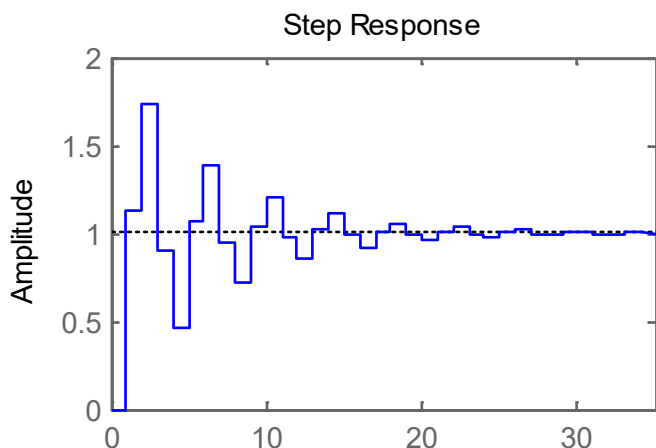
T=0.1



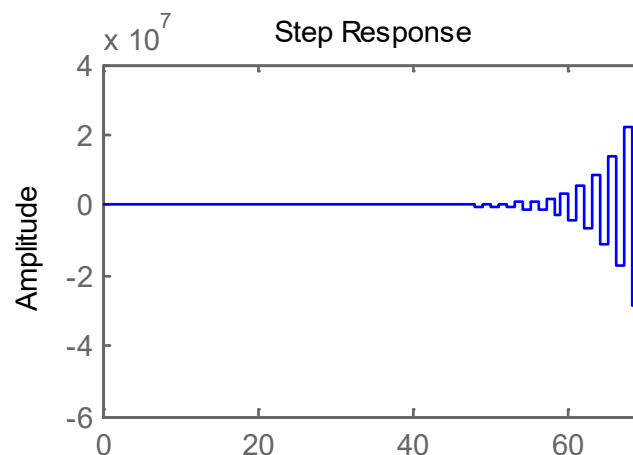
T=1



T=2



T=4



# 稳定性

结论：

- 1) 当采样周期一定时，加大开环增益会使离散系统的稳定性变差，甚至使系统变得不稳定；
  - 从例7-4-4可以看出，二阶采样系统当增益增大时系统不稳定，二阶连续系统对所有的正增益系统都是稳定的。这是二者之间的区别。
- 2) 当开环增益一定时，采样周期越长，丢失的信息越多，对离散系统的稳定性及动态性能都不利，甚至可使系统失去稳定性。



# 离散系统的稳定性与稳态误差

---

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- **稳态误差**

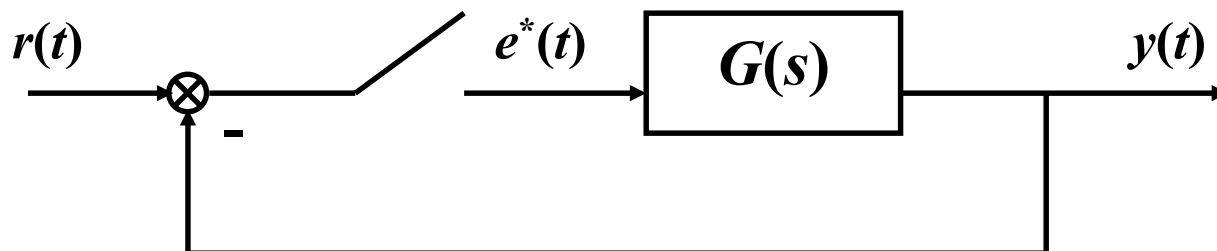
# 稳态误差

- **稳态误差系数**在采样系统和连续系统中具有同样的意义和重要性：表明了系统在稳态时输出跟踪给定类型输入的情况。

讨论：如图所示稳定的单位负反馈系统（与连续系统类似）。

可以很容易得到**误差脉冲传递函数**

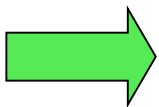
$$G_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G(z)}$$





# 稳态误差

$$G_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G(z)}$$

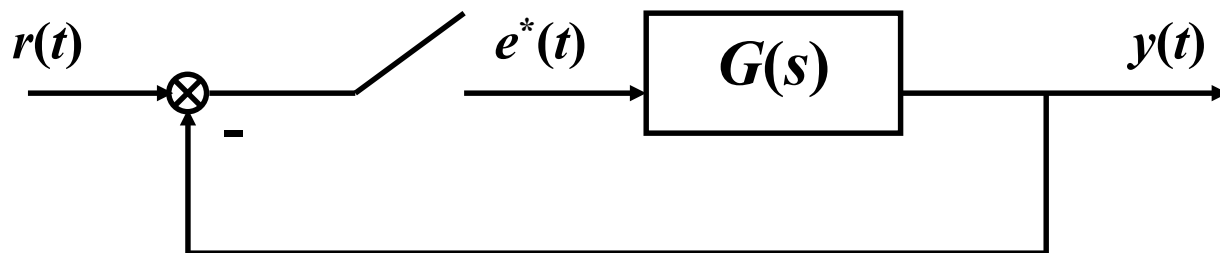


$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)} R(z)$$

根据终值定理

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{R(z)}{1 + G(z)}$$

与连续系统类似，根据系统开环脉冲传递函数在 $z=1$ 的极点的个数而分为0型、1型、2型.....系统。



# 稳态误差

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{R(z)}{1+G(z)}$$



➤ 阶跃输入,  $R(z)=R_0z/(z-1)$

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{R_0}{1+G(z)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{R_0}{1+G(1)}$$

定义阶跃（比例）误差系数  $K_p$

$$K_p \equiv \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

仅适用于阶跃输入  $r(kT)=R_0$ 。

对0型系统

$$e^*(\infty) = \frac{R_0}{1+K_p}$$

对1型及以上系统

$$K_p = \infty$$

$$e^*(\infty) = 0$$

# 稳态误差

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{R(z)}{1+G(z)}$$



➤ 斜坡输入,  $R(z)=R_1 Tz/(z-1)^2$

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{R_1}{1+G(z)} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R_1}{(z-1)[1+G(z)]} = T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R_1}{(z-1)G(z)}$$

定义斜坡（速度）误差系数  $K_v$ ,

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$$

仅适用于斜坡输入  $r(kT) = R_1 kT$  。

对0型系统

$$K_v = 0$$

$$e^*(\infty) = \infty$$

对1型系统

$$e^*(\infty) = T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R_1}{(z-1)G(z)} = T \frac{R_1}{K_v}$$

对2型及以上系统

$$K_v = \infty$$

$$e^*(\infty) = 0$$

# 稳态误差

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{R(z)}{1+G(z)}$$



➤ 加速度输入,  $R(z)=R_2 T^2 z(z+1)/2(z-1)^3$

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{R_2}{1+G(z)} \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = T^2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R_2}{(z-1)^2 G(z)}$$

定义**加速度误差系数** $K_a$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$$

仅适用于加速度输入  $r(kT) = \frac{R_2 (kT)^2}{2}$ 。

对 0 型和 1 型系统

$$K_a = 0$$

$$e^*(\infty) = \infty$$

对 2 型系统

$$e^*(\infty) = T^2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R_2}{(z-1)^2 G(z)} = T^2 \frac{R_2}{K_a}$$

对 3 型及以上系统

$$K_a = \infty$$

$$e^*(\infty) = 0$$

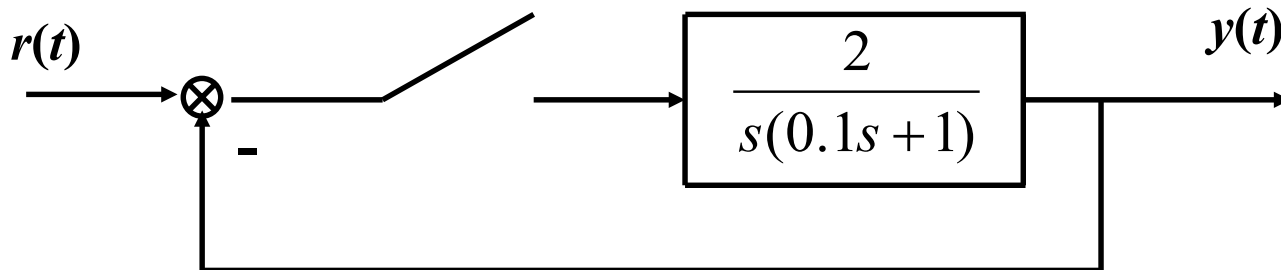
注：与连续系统的稳态误差相比：采样系统的稳态误差还与采样周期T有关。

# 稳态误差

$$Z\left\{\frac{K}{s(s+a)}\right\} = \frac{K}{a} Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right\}$$



**例7-4-5** 已知离散系统的结构如图所示，采样周期 $T=0.1$ 秒，求系统单位阶跃和单位斜坡输入时的稳态误差。



**解：1)** 开环脉冲传递函数

$$G(z) = Z\left[\frac{2}{s(0.1s+1)}\right] = \frac{1.264z}{(z-1)(z-0.368)}$$

**2)** 这是一个1型系统。对单位阶跃输入，稳态误差为0。

**3)** 当输入为单位斜坡，速度误差系数 $K_v$ 为

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \frac{1.264}{(z-0.368)} \Big|_{z=1} = \frac{1.264}{0.632}$$

因此，对于单位斜坡输入，稳态误差为

$$e(\infty) = \frac{T}{K_v} = \frac{0.0632}{1.264} = 0.05$$

# 主要内容

---

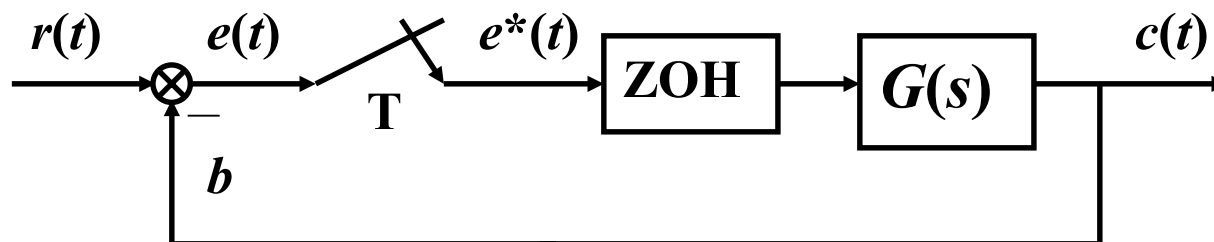
- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

# 瞬态响应

## ➤ 离散系统的时间响应



例



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

采样周期  $T=1$

开环脉冲传递函数 ( $T=1$ ) :

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环系统脉冲传递函数 ( $T=1$ ) :

$$\phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

单位阶跃响应:

$$C(z) = 0.368z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5} + \dots$$

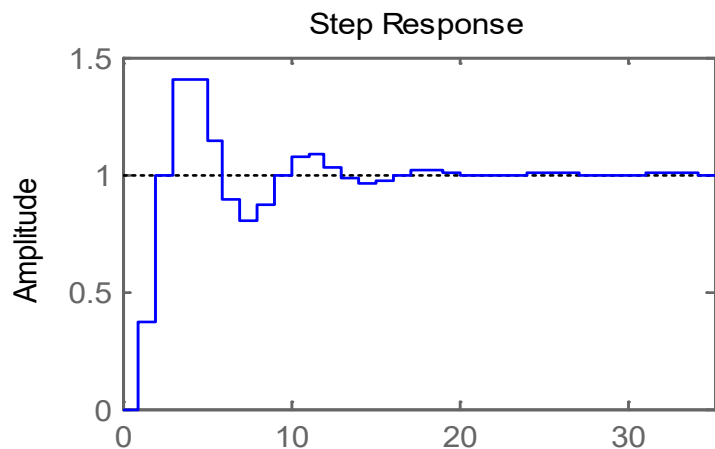
# 瞬态响应

## ➤ 采样器和保持器对动态性能的影响

### 有保持器的采样系统

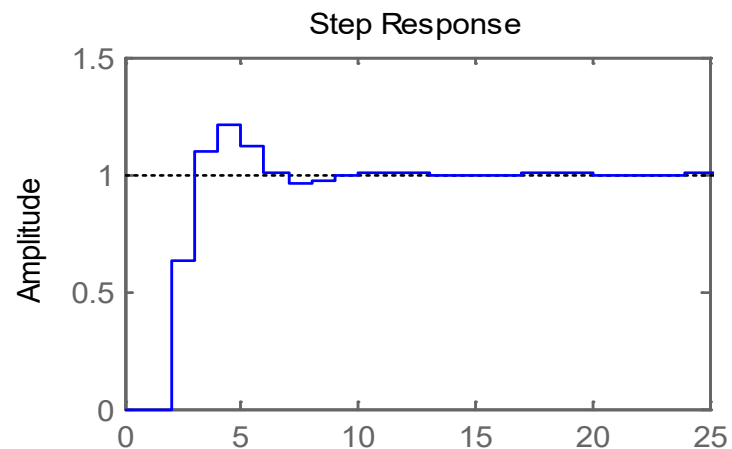
$$G(z) = \frac{C(z)}{E(z)} = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{0.368(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\phi(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$



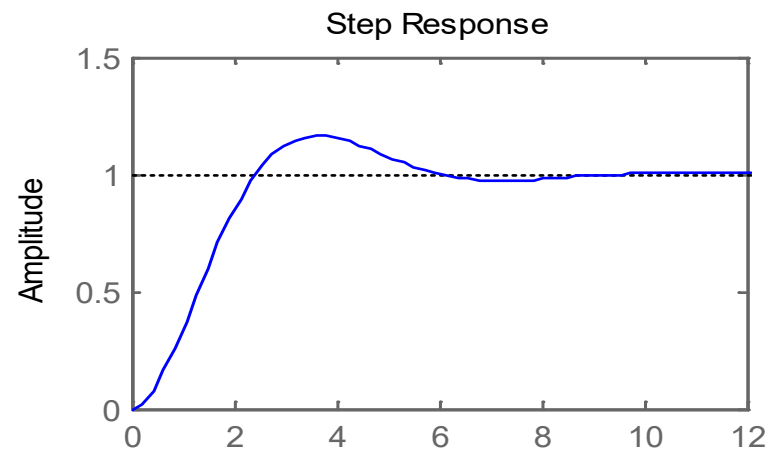
### 无保持器的采样系统

$$\phi(z) = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z + 0.368}$$



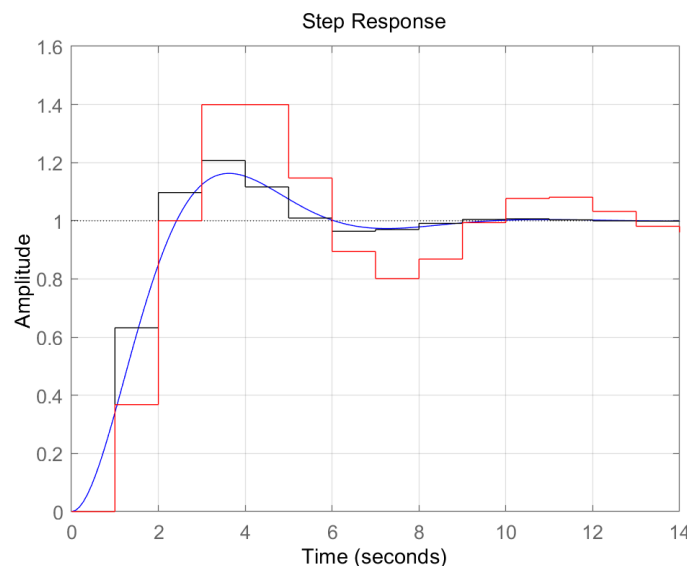
### 连续系统

$$\phi(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$



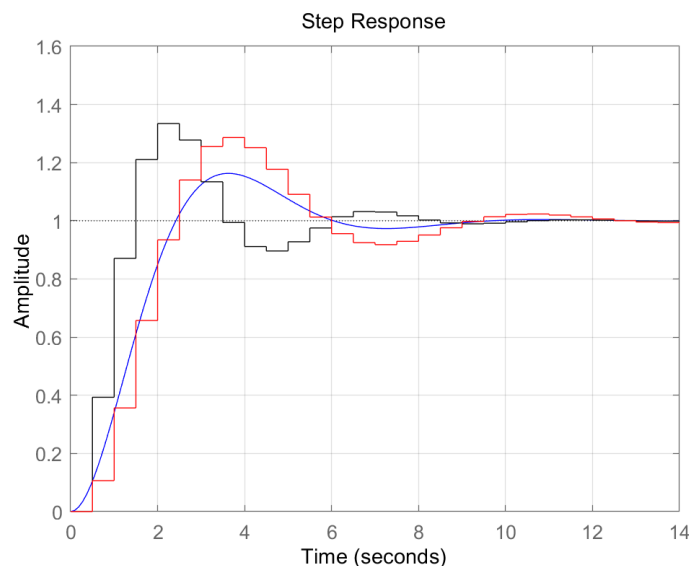


# 瞬态响应



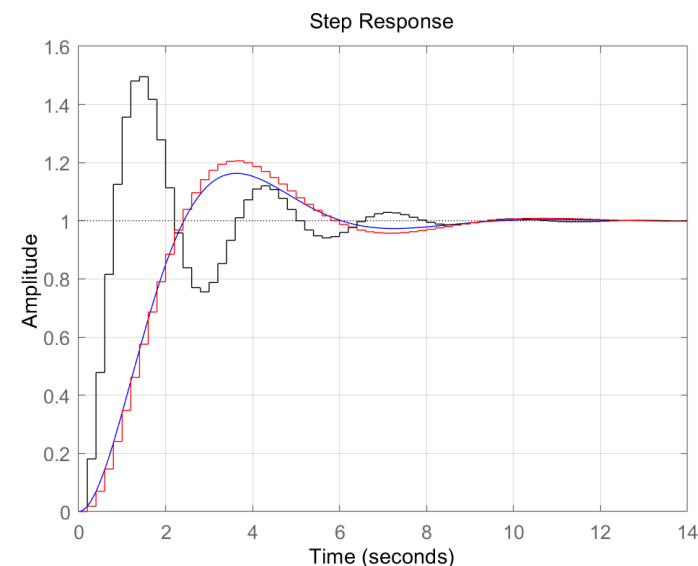
**T=1**

—— 连续系统



**T=0.5**

—— 无保持器的采样系统



**T=0.2**

—— 有保持器的采样系统

**结论：**

- 1) 采样器可使系统的峰值时间和调节时间略有减少，但使超调量增大；
- 2) 零阶保持使系统的峰值时间和调节时间都加长，超调量和振荡次数也增加。这是因为零阶保持器的相角滞后降低了系统的稳定程度。

# 瞬态响应

## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

通常离散控制系统的闭环脉冲传递函数可表示为（设系统无重极点）：

$$G_B(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{k=1}^n (z - P_k)}$$

当系统输入  $r(t)$  为单位阶跃时，其系统输出的Z变换  $C(z)$  为：

$$C(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{k=1}^n (z - P_k)} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

展开成部分分式，有

$$C(z) = \frac{C(1)}{R(1)} \cdot \frac{z}{z - 1} + \sum_{k=1}^n \frac{C_k z}{z - P_k}$$

其中，各分式的系数  $C_k$  可用留数法求取

$$C_k = \lim_{z \rightarrow P_k} K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (z - P_j)} \cdot \frac{1}{z - 1}$$

$c^*(t)$  的稳态部分

# 瞬态响应

## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

1)  $P_k$  为正实根，对应的瞬态分量

$$c_k(nT) = Z^{-1} \left\{ \frac{C_k z}{z - P_k} \right\} = C_k P_k^n$$

令

$$P_k = e^{aT}; \quad a = \frac{1}{T} \ln P_k$$

则

$$c_k(nT) = C_k e^{anT}$$

若  $P_k=1$ ，即闭环极点位于右半Z平面上圆周上，闭环系统瞬态响应  $c_k(nT)$  为等幅脉冲；对应图1中 a 点对应波形。

若  $P_k<1$ ，则闭环极点位于单位圆内，此时  $a<0$ ，则输出响应  $c_k(nT)$  呈指数衰减状；对应图1中 b 点对应波形。

若  $P_k>1$ ，闭环极点位于单位圆外，此时  $a>0$ ，则输出响应  $c_k(nT)$  呈指数增加状，对应图1中 c 点对应波形。

# 瞬态响应

## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

2) 当 $P_k$ 为负实根, 则对应的瞬态分量为

$$c_k(nT) = C_k P_k^n$$

若 $P_k = -1$ , 输出响应分量 $c_k(nT)$ 对应图1中d点波形, 呈等幅跳跃输出。

若 $|P_k| < 1$ , 输出响应分量 $c_k(nT)$ 对应图1中e点波形。

若 $|P_k| > 1$ , 输出响应分量 $c_k(nT)$ 对应图1中f点波形, 呈发散跳跃变化。

# 瞬态响应

## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

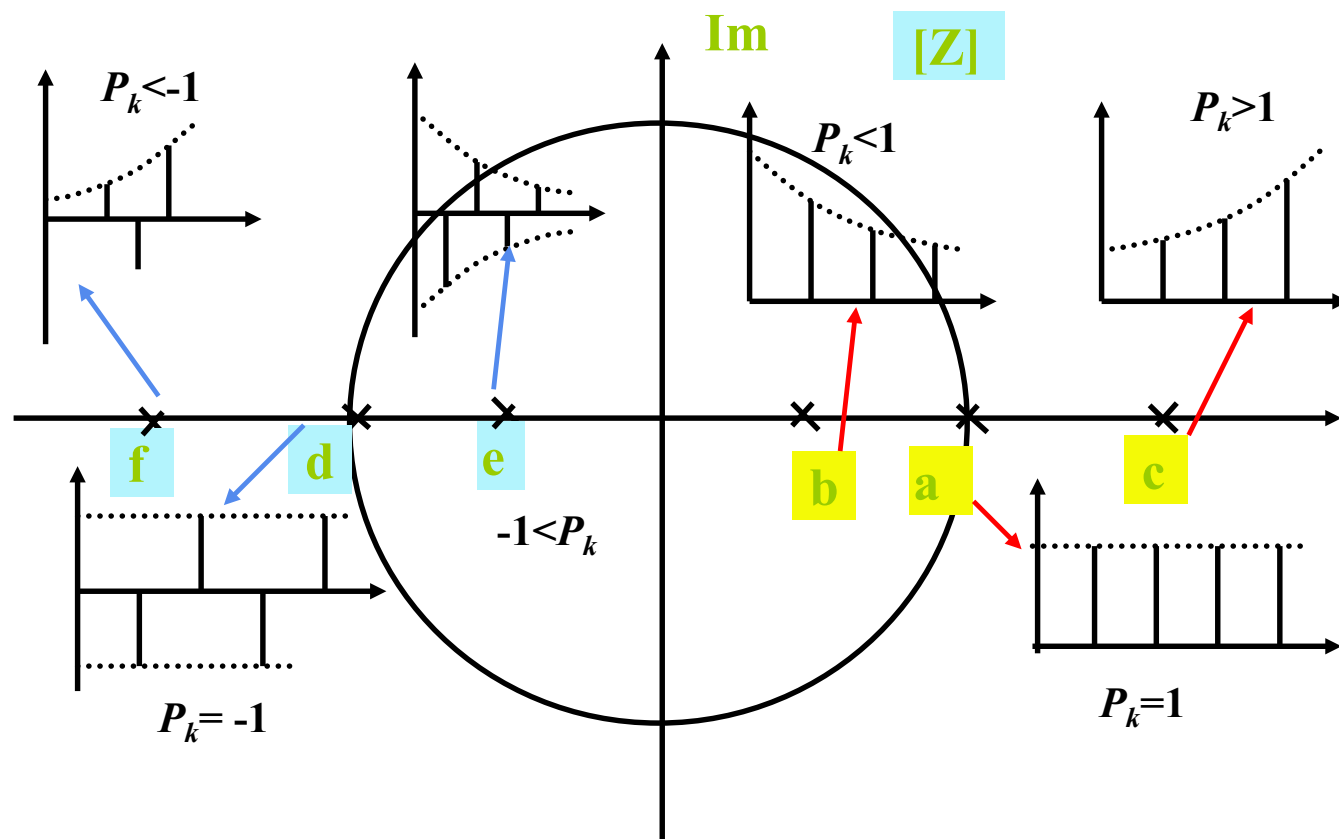


图1 闭环实极点分布与相应瞬态响应

# 瞬态响应

## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

$$c_k(nT) = C_k P_k^n$$

3) 当 $P_k, P_{k+1}$ 为一对共轭复根时, 为

$$P_k = |P_k| e^{j\theta_k}$$

与

$$P_{k+1} = |P_k| e^{-j\theta_k}$$

此时,  $C_k, C_{k+1}$  也为一对共轭复数

$$C_k = |C_k| e^{j\phi_k}$$

与

$$C_{k+1} = |C_k| e^{-j\phi_k}$$

则它们对应的瞬态分量 $c_{k,k+1}(nT)$  为

$$\begin{aligned} c_{k,k+1}(nT) &= |C_k| |P_k|^n e^{j(n\theta_k + \phi_k)} + |C_k| |P_k|^n e^{-j(n\theta_k + \phi_k)} \\ &= 2 |C_k| |P_k|^n \cos(n\theta_k + \phi_k) \end{aligned}$$

# 瞬态响应

## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

$$c_k(nT) = C_k P_k^n$$

3) 当 $P_k, P_{k+1}$ 为一对共轭复根时

$$\begin{aligned} c_{k,k+1}(nT) &= |C_k| |P_k|^n e^{j(n\theta_k + \phi_k)} + |C_k| |P_k|^n e^{-j(n\theta_k + \phi_k)} \\ &= 2|C_k| |P_k|^n \cos(n\theta_k + \phi_k) \end{aligned}$$

若 $|P_k| < 1$ ，则对应的瞬态响应分量为振幅衰减的正弦振荡，对应图2中a点对应的波形。

若 $|P_k| > 1$ ，则对应的瞬态响应分量为发散正弦振荡，对应图2中b点对应的波形。

$$\text{令 } \theta_k = \omega T$$



$$\omega = \frac{\theta_k}{T}$$

为系统对应瞬态分量的振荡频率，其振荡周期

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi T}{\theta_k}$$

# 瞬态响应

振荡周期

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi T}{\theta_k}$$



## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

- 设一个振荡周期中所包含的脉冲个数为  $n$ ，采样周期为  $T$ ，则

$$nT = T_d = \frac{2\pi T}{\theta_k}$$

所以

$$n = \frac{2\pi}{\theta_k}$$

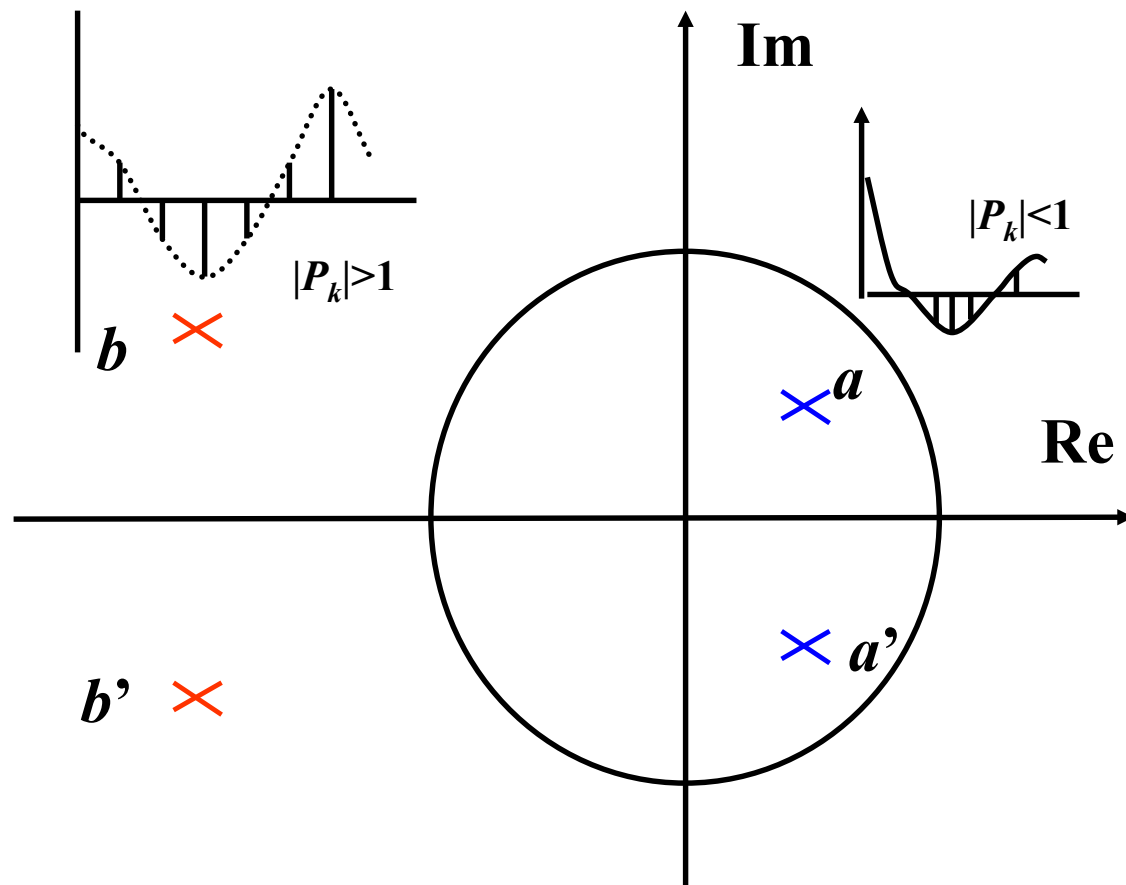


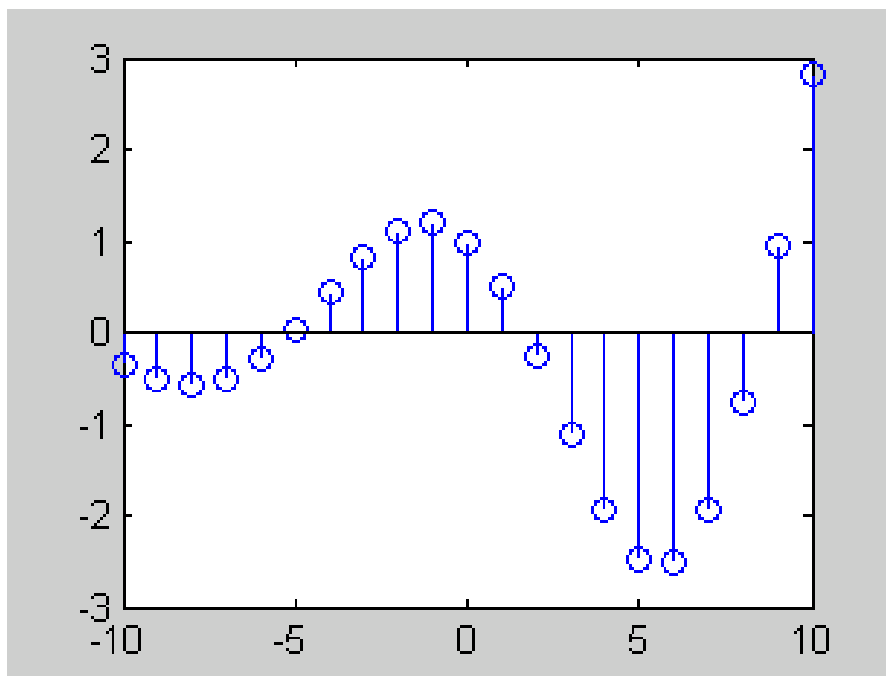
图2 闭环复极点分布与相应瞬态响应



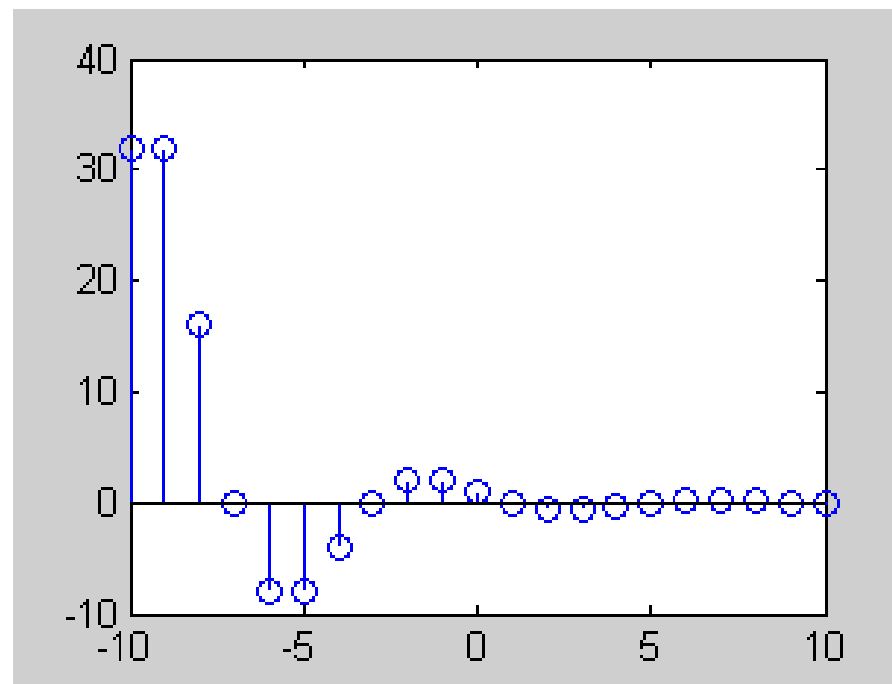
# 瞬态响应

## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

$$|P_k| > 1$$



$$|P_k| < 1$$

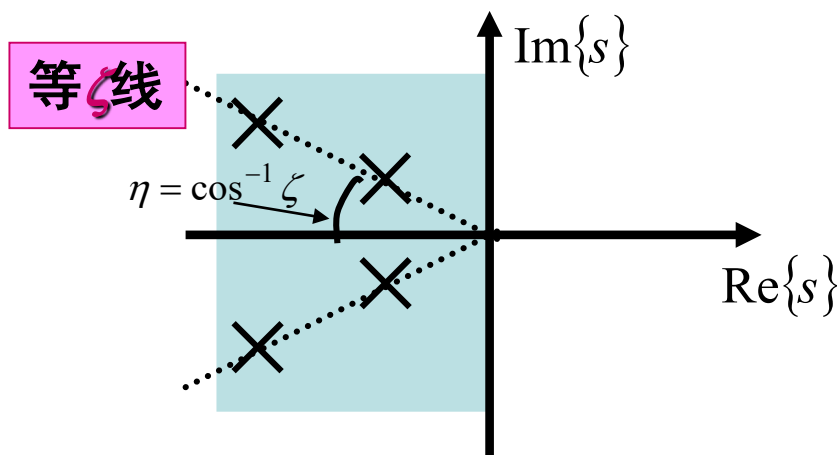


# 回顾：连续系统

- 闭环零极点与瞬态响应的关系，先回忆在连续系统中的重要动态指标

$$M_o = \sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad 0 \leq \zeta < 1$$

相同的超调，与阻尼比 $\zeta$ 有关



由上式可见，最大百分比超调量完全由 $\zeta$ 决定， $\zeta$ 越小，超调量越大。当 $\zeta=0$ 时， $\sigma\%=100\%$ ，当 $\zeta=1$ 时， $\sigma\%=0$ 。

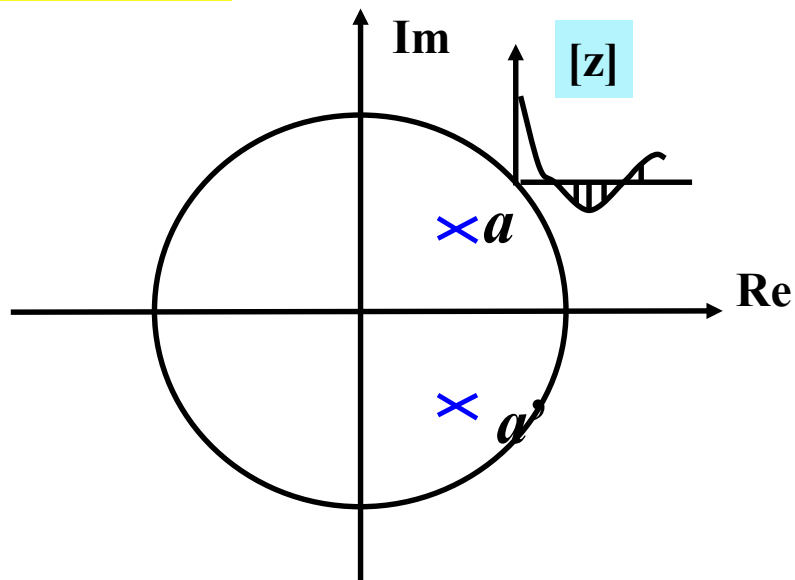
# 瞬态响应

## ➤ 闭环零极点与瞬态响应的关系

- 在s平面，定义阻尼比为常数的射线为

$$s = \sigma + j\omega = -\omega \operatorname{ctg} \eta + j\omega$$

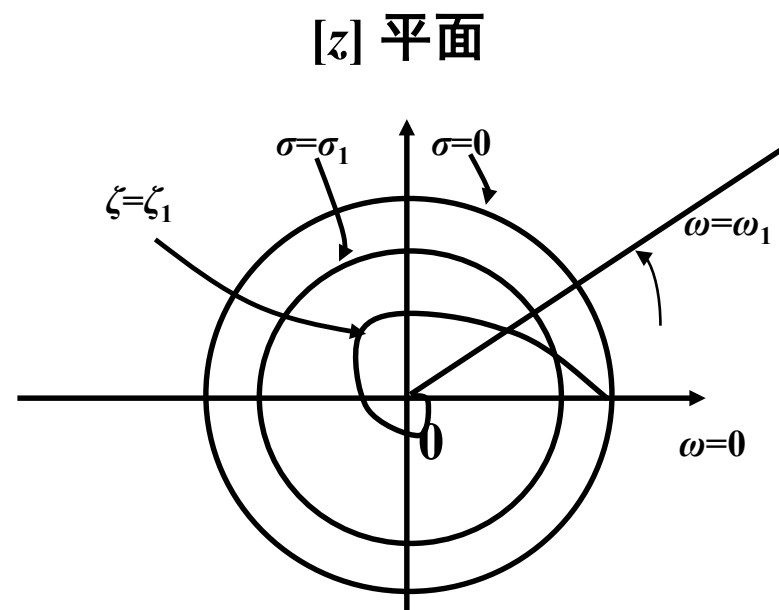
其中  $\eta = \cos^{-1} \zeta$



闭环复极点分布与相应瞬态响应

因此

$$z = e^{sT} = e^{-\omega T \operatorname{ctg} \eta + j\omega T} = e^{-\omega T \operatorname{ctg} \eta} \angle \omega T$$



# 瞬态响应

- 当闭环实极点位于 $z$ 平面左半单位圆内时，由于输出衰减脉冲交替变号，故动态过程质量很差
- 当闭环复极点位于 $z$ 平面左半单位圆内时，由于输出衰减高频振荡脉冲，故动态过程质量欠佳
- 在离散系统设计时，应把闭环极点安置在 $z$ 平面的右半单位圆内，且尽量靠近原点

# 瞬态响应

$$z = e^{sT} = e^{-\omega T \text{ctg} \eta + j\omega T} = e^{-\omega T \text{ctg} \eta} \angle \omega T$$

$$\eta = \cos^{-1} \zeta$$



例7-4-6 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为  $z=0.368 \pm j0.482$ ，试分析采样反馈系统的瞬态响应？

$$s = -0.5 \pm j0.9187 \quad \zeta = 0.48$$

解：1) 闭环特征根  $z^* = 0.368 \pm j0.482$ ，则

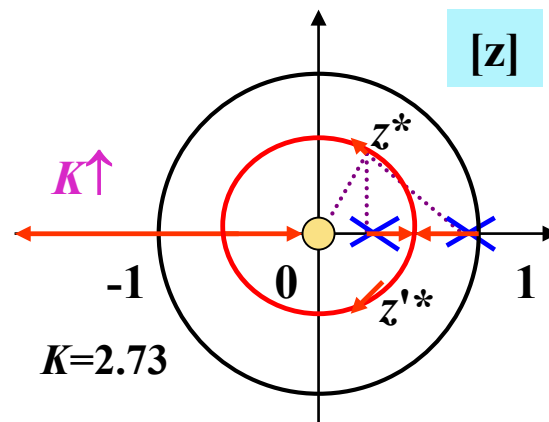
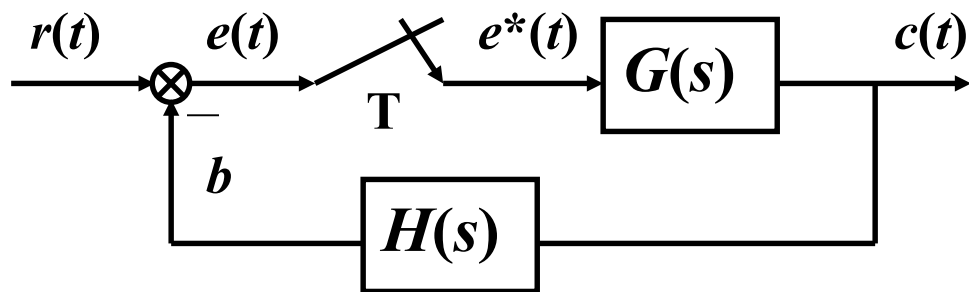
$$K^* = \frac{0.482 \cdot \sqrt{0.482^2 + (1 - 0.368)^2}}{\sqrt{0.368^2 + 0.482^2}} = 0.632 = 0.632K$$

$$GH(z) = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

2) 闭环传函

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.632z}{(z - 0.368 + j0.482)(z - 0.368 - j0.482)}$$

$$G_B = \frac{GH(z)}{1 + GH(z)} = \frac{K^* z}{(z - z^*)(z - z'^*)}$$



# 瞬态响应

**例7-4-6** 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为  $z=0.368\pm j0.482$ ，试分析采样反馈系统的瞬态响应？

**解：** 3) 对于单位阶跃输入

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

输出 Z变换表达式  $C(z)$

**法1：**

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{0.632z}{(z^2 - 0.736z + 0.368)} \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= 0.632z^{-1} + 1.096z^{-2} + 1.205z^{-3} + 1.12z^{-4} + 1.014z^{-5} + \dots \end{aligned}$$

$C(z)$ 的反变换为  $c(kT) = 0\delta(t) + 0.632\delta(t-T) + 1.096\delta(t-2T) + 1.205\delta(t-3T) + \dots$

**注意：** 采样瞬时的  $c(kT)$ 序列为  $C(z)$  表达式中对应项的系数。

# 瞬态响应

**例7-4-6** 假设例7-4-4 中期望的闭环特征根为  $z=0.368\pm j0.482$  , 试分析采样反馈系统的瞬态响应?

**解:** 3) 对于单位阶跃输入

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

输出 Z变换表达式  $C(z)$

$$C(z) = \frac{0.632z}{(z^2 - 0.736z + 0.368)} \cdot \frac{z}{z-1} \Rightarrow \frac{C(z)}{z} = \frac{1}{z-1} + \frac{-z + 0.368}{(z^2 - 0.736z + 0.368)}$$

**法2:**

$$C(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z(z - e^{-0.5} \cos 1)}{(z^2 - 2ze^{-0.5} \cos 1 + e^{-1})}$$

$C(z)$ 的反变换

$$c(kT) = 1 - e^{-0.5kT} \cos kT$$

这种方式称为 “**解析式**” 表达式（不会引入误差）。

**注意:**  $C(z)$ 只能表示 $c(t)$ 在 $kT$ 采样时刻的采样值 $c^*(t)$ , **不能反映出**采样周期之间的信息。

# 瞬态响应

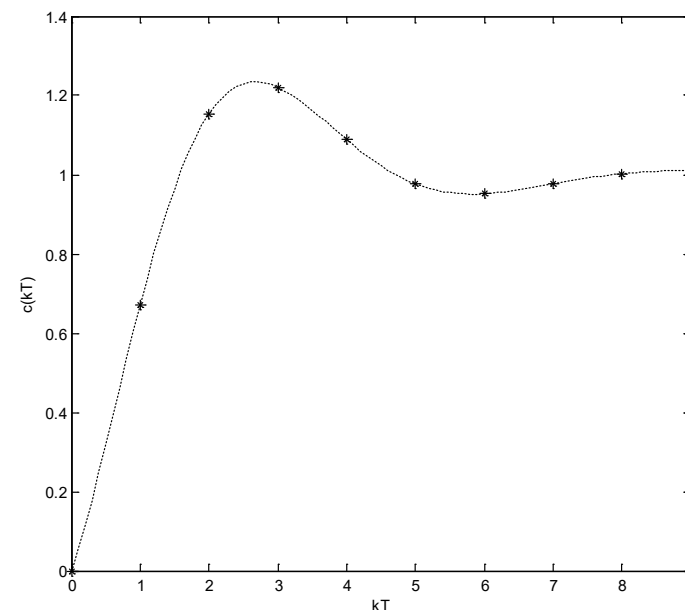
法1的 $C(z)$ 的逆变换是“开放”式

$$c(kT) = 0\delta(t) + 0.632\delta(t - T) + 1.096\delta(t - 2T) + 1.205\delta(t - 3T) + \dots$$

法2的 $C(z)$ 的逆变换为“解析”式

$$c(kT) = 1 - e^{-0.5kT} \cos kT$$

**系统的单位阶跃响应如图。**注意：连续的线仅是连接了顶点而已。真实得到的值只有每个采样瞬间才有值。



**注意：**采样瞬时的  $c(kT)$  序列为  $C(z)$  表达式中对应项的系数。



# 瞬态响应

- 连续系统中通常采用的分析方法可以同样应用于离散系统，如：根轨迹，瞬态响应等。
- 可以根据期望的阻尼比 $\zeta$  和回复时间 $t_s$ 来选择期望的闭环特征根。注意 [s] 平面到 [z] 平面的映射关系。
- 注意  $c(kT)$  或  $c^*(t)$  序列中的初值和终值。

# 瞬态响应

## ➤ 有限时间响应系统

当闭环脉冲传递函数所有极点**都分布在原点**时，此时的系统具有一个很特别的响应，即在有限时间结束过渡过程，达到稳态，此时的闭环脉冲传递函数具有如下形式

$$G_B(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n} = \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \dots + \frac{b_0}{a_n} z^{-n}$$

其单位脉冲响应

$$h^*(t) = \frac{b_n}{a_n} \delta(t) + \frac{b_{n-1}}{a_n} \delta(t - T) + \dots + \frac{b_0}{a_n} \delta(t - nT)$$

即在单位脉冲作用下，该系统的瞬态响应能在 $nT$ 内结束，即 $n$ 拍可结束过渡过程，这个特点是连续系统所不具备的。

# 离散系统分析

---

- S域到Z域的映射
- 稳定性
- 稳态误差
- 瞬态响应

---

*The End*