信号分析与处理

第五章 滤 波 器

浙江大学　电气工程学院

张健

jian_zhang_zju@zju.edu.cn

大纲

滤波器概述

- 滤波概念及基本原理
- 滤波器的分类
- 滤波器的技术指标

模拟滤波器设计

- 相关概念及方法
- 巴特沃思低通滤波器
- 切比雪夫低通滤波器
- 模拟滤波器频率变换

数字滤波器设计

- 相关概念及方法
- 无限冲激响应(IIR)数字滤波器
- 有限冲激响应(FIR)数字滤波器

第一节 滤波器概述

- 滤波的概念及其基本原理
- 滤波器的分类
- 滤波器的技术指标

滤波的概念及其基本原理

- 滤波是根据**有用信号**与**噪声**或**干扰**的不同特性，从含有噪声或干扰的信号中消除或减弱噪声，提取有用信号的过程。
- 实现滤波功能的系统就称为**滤波器**。
- 滤波问题存在于信号传输与处理的整个过程中，如：音响系统的音调控制，通信中的干扰消除，频分复用系统中的解复用与解调。

滤波器的分类

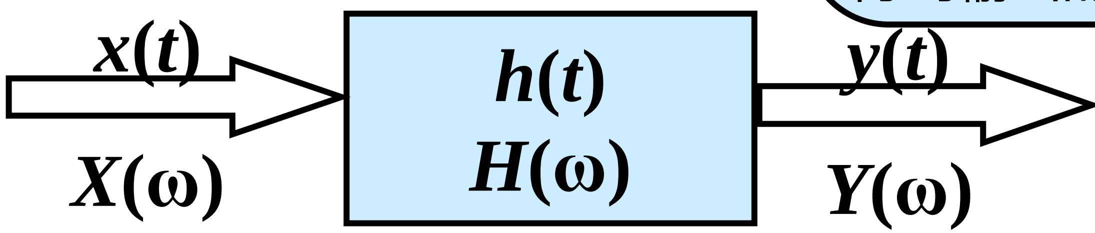
模拟滤波器和数字滤波器

- 如果利用**模拟电路直接对模拟信号**进行滤波处理则构成模拟滤波器，它是一个连续线性时不变系统。如果利用**离散时间系统对数字信号**进行滤波处理则构成数字滤波器，它是一个离散线性时不变系统。
- 数字滤波器既可以由硬件（延迟器、乘法器和加法器）实现，也可以由相应的软件实现，还可以用软硬件结合来实现。模拟滤波器只能用硬件实现，其元件是R、L、C及运算放大器或开关电容等。因此，数字滤波器的实现要比模拟滤波器方便，且较易获得理想的滤波性能。

模拟滤波器特性

实际应用中，使模拟信号经带限滤波后再通过A/D变换完成采样与量化，此数字信号经数字滤波器实现信号处理的要求，将处理后的数字信号经D/A变换和平滑滤波得到输出的模拟信号。

➲ 模拟滤波器的结构



- 时域输入、输出关系为

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- 频域输入、输出关系为

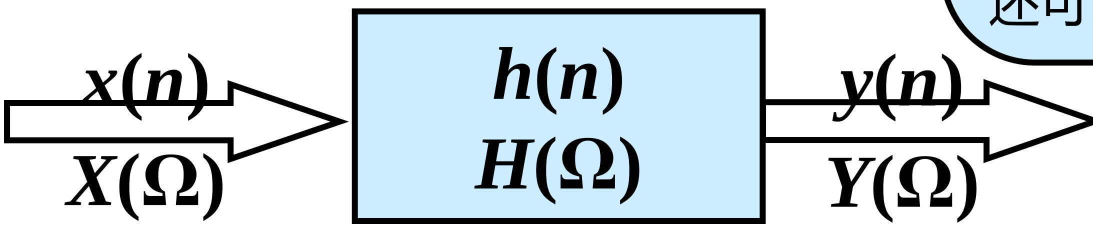
$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

数字滤波器特性

数字滤波器的结构

若滤波器的输入、输出都是离散时间信号时，该滤波器的冲激响应也必然是离散的，称这样的滤波器为数字滤波器。

数字滤波器既可由硬件（延迟器、乘法器和加法器）实现，也可由相应的软件实现，还可以用软硬件结合来实现。



- 时域输入、输出关系为

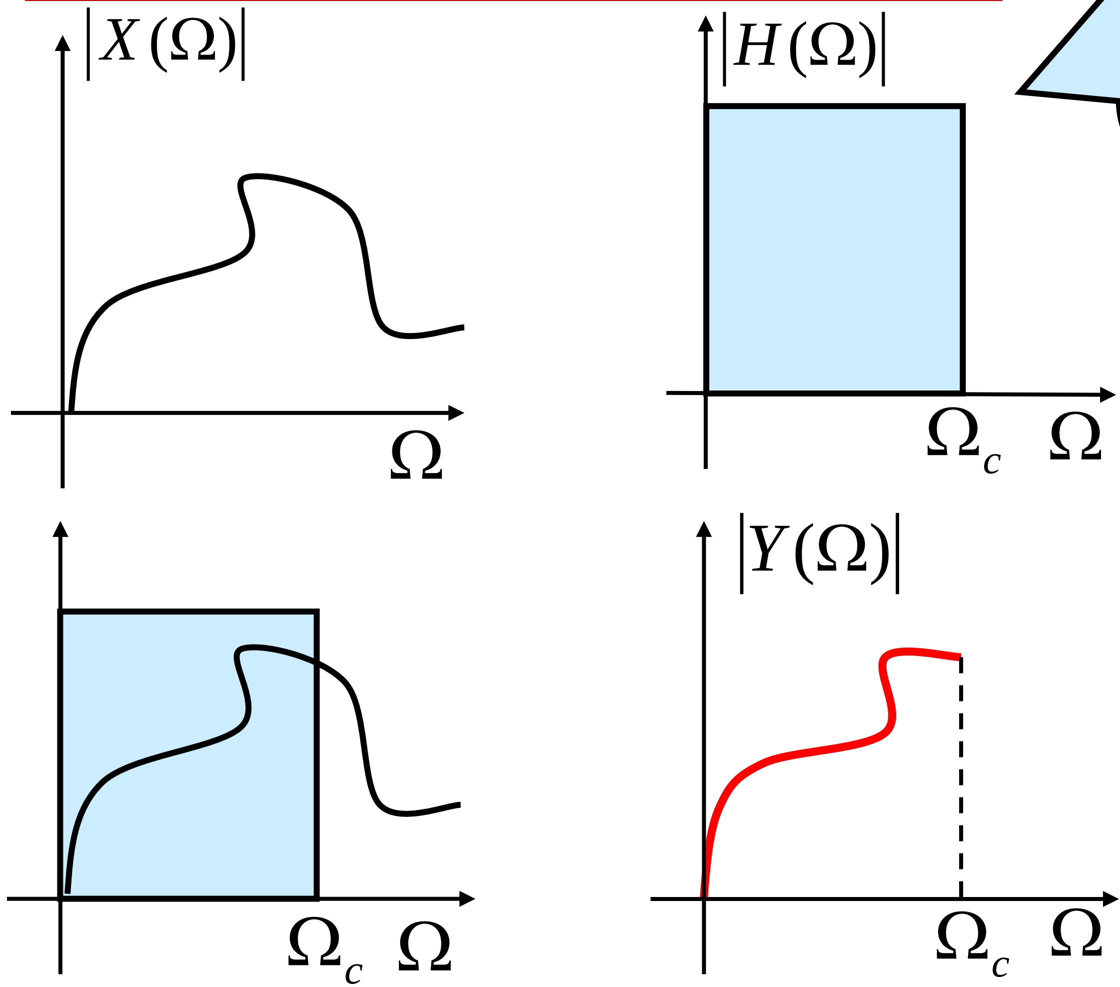
$$y(n) = x(n) * h(n)$$

- 频域输入、输出关系为

$$Y(\Omega) = H(\Omega) X(\Omega)$$

滤波原理

输入信号$x(n)$通过滤波器$h(n)$的结果是使输出$y(n)$中不再含有的$|\Omega| > \Omega_c$频率成分，而使$|\Omega| < \Omega_c$的频率成分“不失真”地通过



滤波器的分类

➲ 经典滤波器和现代滤波器

- 经典滤波器：假定输入信号$x(n)$中的有用信号和希望去掉的信号**具有不同的频带**，当$x(n)$通过滤波器后可去掉无用的信号。
- 现代滤波器：从含有噪声的数据（时间序列）中**估计**出信号的某些**特征**或信号本身。当信号被估计出后，被估计出的信号将比原信号有**更高的信噪比**。

滤波器的分类

经典的滤波器

构成滤波器元件的性质

- 无源滤波器
- 有源滤波器

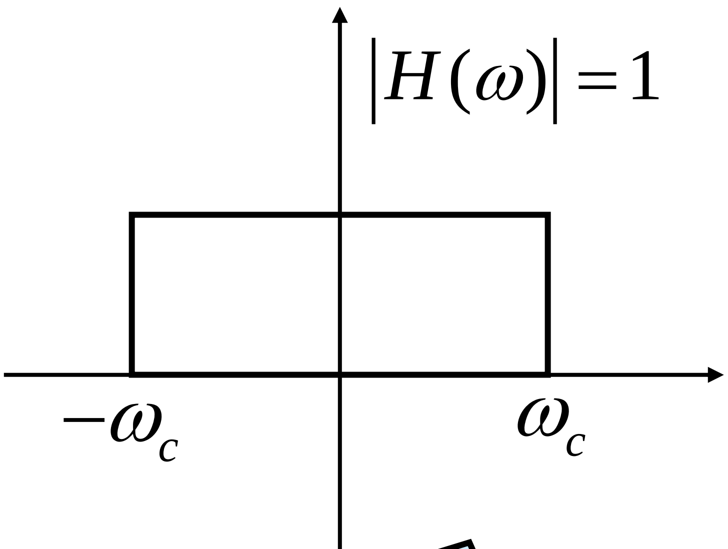
滤波器幅频特性的通带与阻带范围

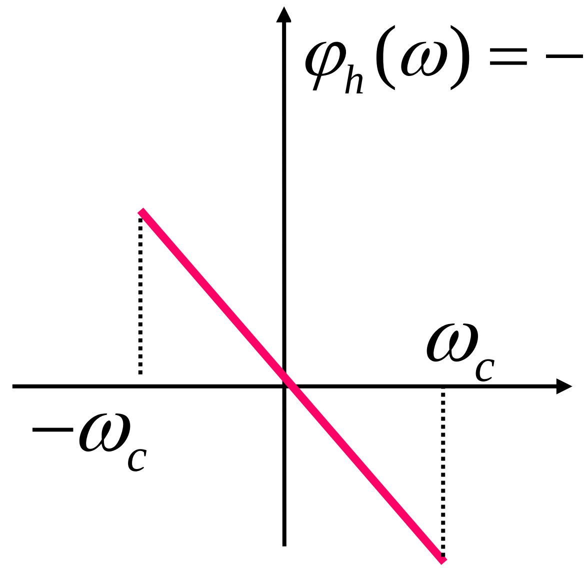
- 低通滤波器
- 高通滤波器
- 带通滤波器
- 带阻滤波器

滤波器所处理信号的性质

- 模拟滤波器
- 数字滤波器

$$H(\omega)=\begin{cases}1e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}\qquad h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c(t-t_0))$$





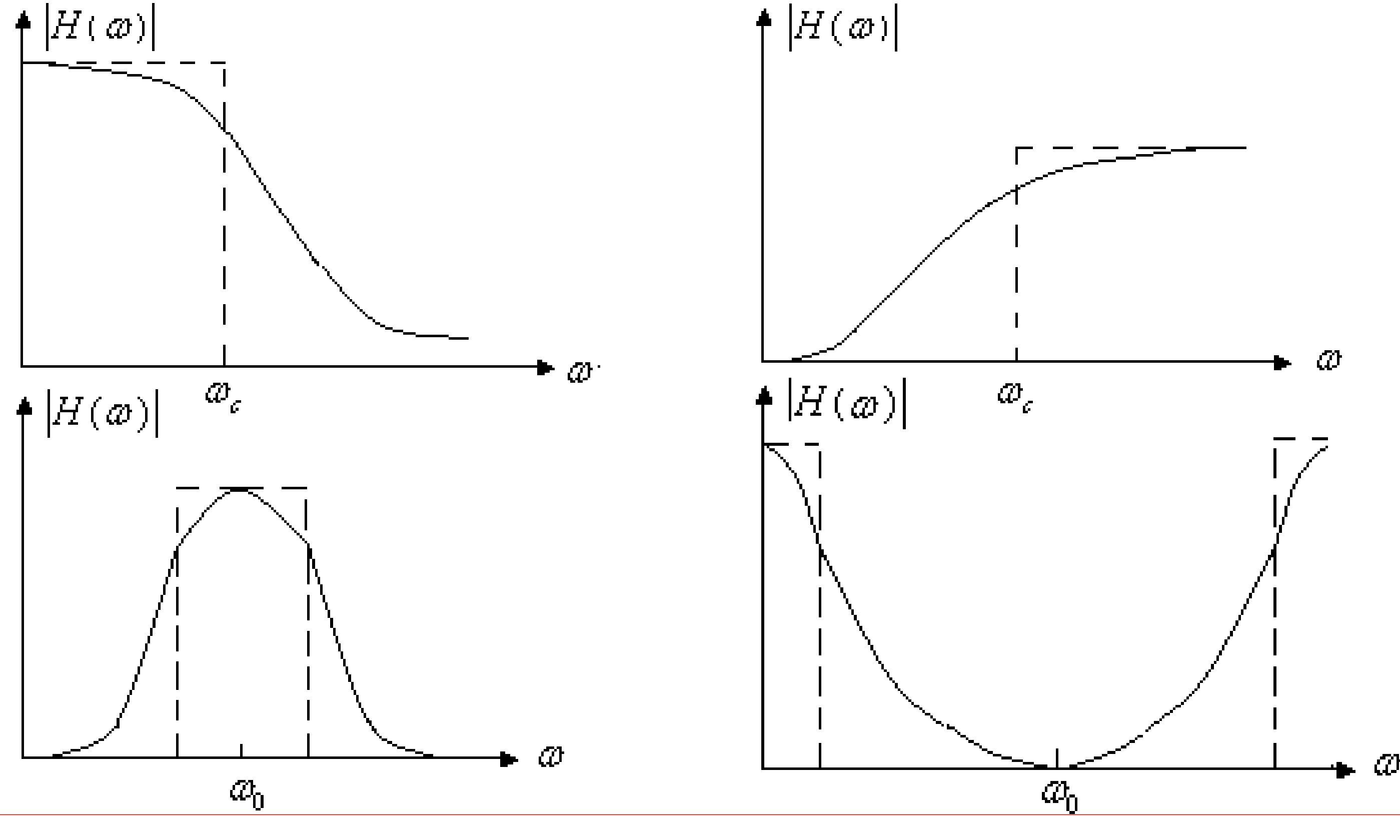
ω_c 称为滤波器的截止频率

$\boldsymbol{0}<|\omega|<\omega_c$ 称为滤波器的通带

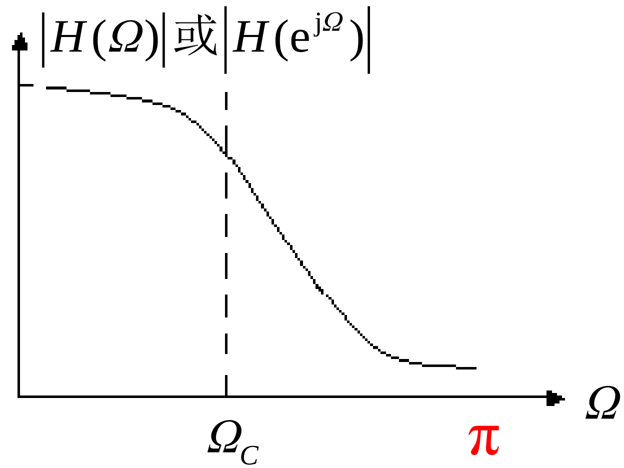
$|\omega|>\omega_c$ 称为滤波器的阻带

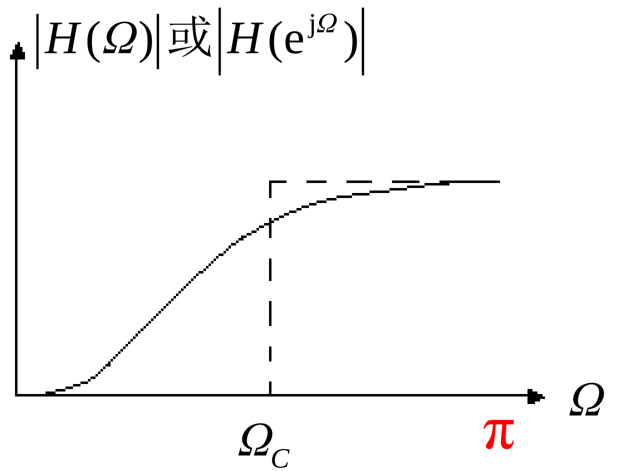
模拟滤波器幅频特性

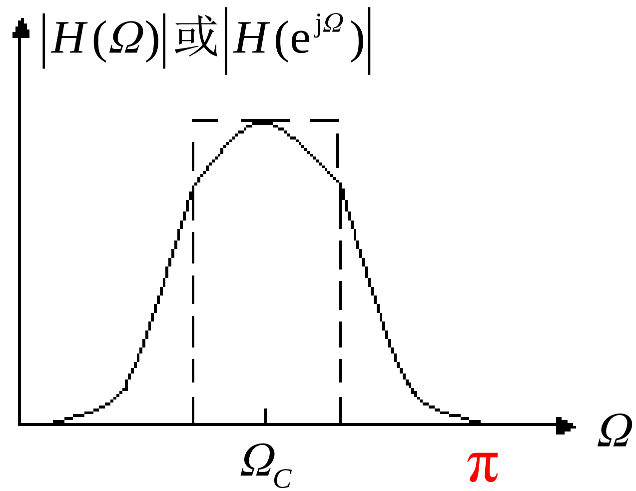
根据滤波器幅频特性的通带与阻带的范围：低通、高通、带通、带阻和全通等类型滤波器。

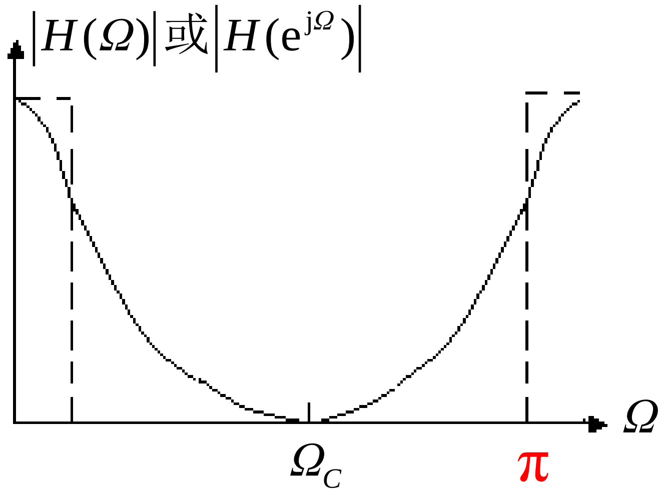


数字滤波器幅频特性



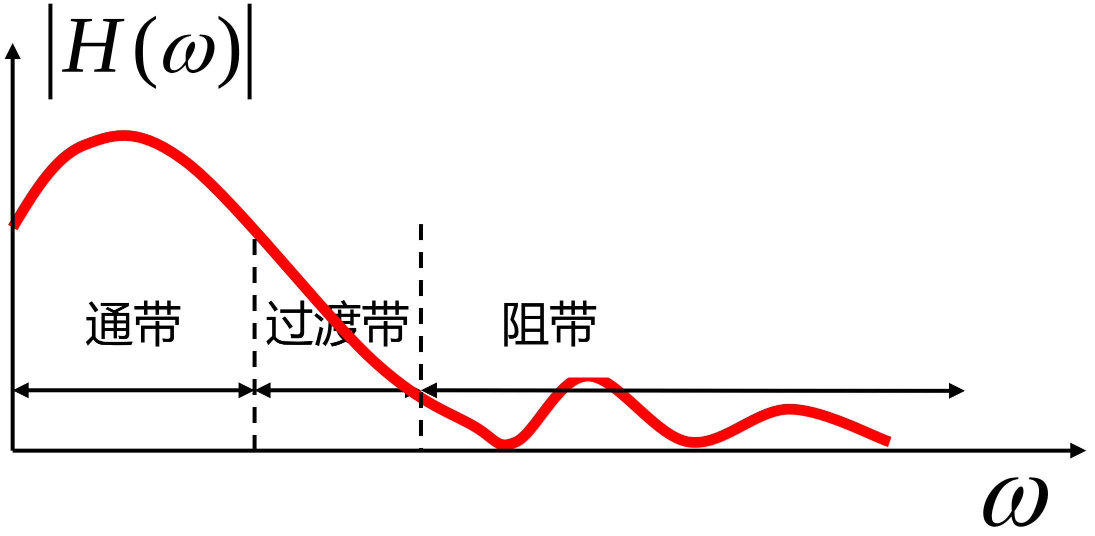






滤波器的技术指标

理想滤波器的矩形幅频特性不可能实际实现。



滤波器的技术指标

1、具有物理可实现性的滤波器特性：

- 允许滤波器的幅频特性在通带和阻带有一定的衰减范围，且幅频特性在这一范围内允许有起伏。
- 在通带和阻带之间有一定的过渡带。

滤波器的技术指标

- 信号以很小的衰减通过滤波器的频率范围称为滤波器的“通频带”，简称“通带”
  - 对于频率响应函数为$H(\omega)$的因果滤波器，设$H(\omega)$的峰值为1，通带定义为：满足 $|H(\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 的所有频率的集合，即从0dB的峰值点下降到-3dB的频率的集合。

$20\lg|H(\omega)|$

- 阻止信号通过滤波器的频率范围称为滤波器的“阻频带”，简称“阻带”。
- 过渡带即为通带与阻带之间的频率范围

滤波器的技术指标

- **中心频率：滤波器上下两个截止频率的几何平均值**

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$$

- **通带波动 Δ_α ：在滤波器的通带内，频率特性曲线的最大峰值与谷值之差。**

滤波器的技术指标

- **相移 φ：某一特定频率的信号通过滤波器时，其在滤波器的输入和输出端的相位之差。**
- **群延迟 τ：又称为“包络延迟”，它是用相移 φ 对于频率的变化律来衡量的，即**

$$\tau = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

滤波器的技术指标

$|H(0)|$ 假定已被归一化为1

- 衰减函数α

$$\alpha = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20\lg|H(\omega)|$$

- 1、通带衰减函数α_p

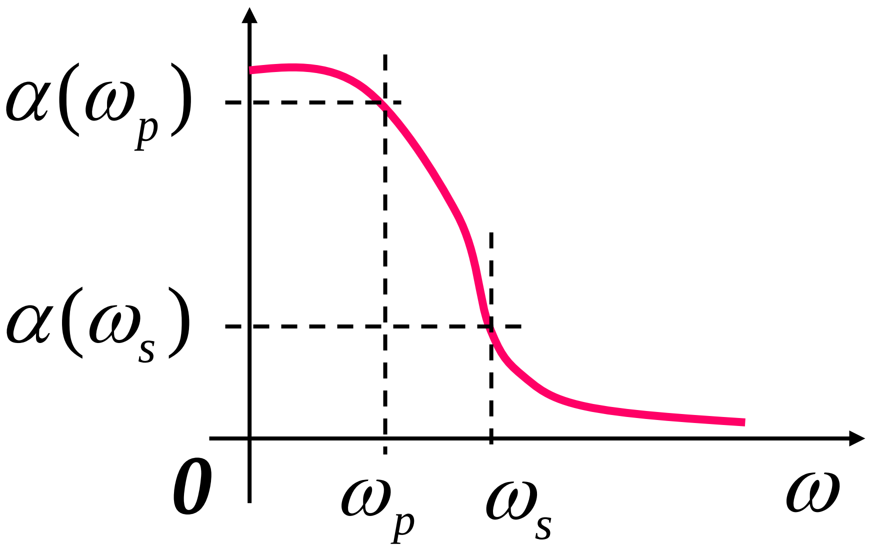
$$\alpha_p = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega_p)|} = -20\lg|H(\omega_p)|$$

- 2、阻带衰减函数α_s

$$\alpha_s = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega_s)|} = -20\lg|H(\omega_s)|$$

滤波器的技术指标

以巴特沃斯低通滤波器为例说明



$\alpha(\omega_p)$ 通带最大衰减

$\alpha(\omega_s)$ 阻带最小衰减

ω_p 通带截止频率

ω_s 阻带下限频率

设计低通滤波器时，通常取幅值下降3dB时所对应的频率值 ω_{3dB} 为通带截止频率，即

$\omega_c = \omega_p = \omega_{3dB}$ 此时，$\alpha_p = -20\lg|H(\omega)| = -20\lg 0.707 = 3dB$

第二节 模拟滤波器

- 相关概念及方法
- 巴特沃思低通滤波器
- 切比雪夫低通滤波器
- 模拟滤波器频率变换

相关概念及方法

- 设计模拟滤波器的中心问题：求出一个物理上可实现的传递函数$H(s)$，使它的频率响应尽可能逼近理想的频率特性。
- 设计模拟滤波器的方法：根据给定的性能指标 - 通带和阻带的工作损耗，如通带衰减 α_p 、阻带衰减 α_s ，由频率特性幅度平方函数 $|H(\omega)|^2$ ，求系统函数$H(s)$。

相关概念及方法

- 物理可实现的模拟滤波器的传递函数$H(s)$必须满足下列条件
  - 是一个具有实系数的 s 有理函数；
  - 极点分布在 s 的左半平面；
  - 分子多项式的阶次必须不大于分母多项式的阶次。

除以上条件外，一般希望所设计滤波器的冲激响应h(t)为实函数

相关概念及方法

- 由频率特性幅度平方函数$|H(\omega)|^2$求系统传递函数$H(s)$的方法：

$h(t)$为实函数 $\Longrightarrow$ $H^*(\omega)=H(-\omega)$

$$|H(\omega)|^2=H(\omega)H^*(\omega)=H(\omega)H(-\omega)$$

$$\Downarrow$$

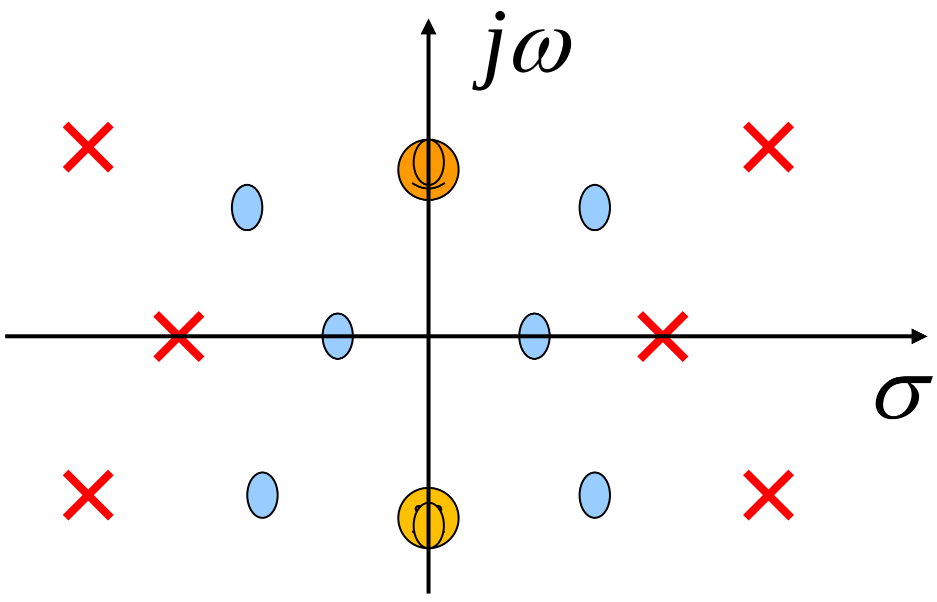
$$|H(\omega)|^2=H(s)H(-s)\big|_{s=j\omega}$$

$$\Downarrow$$

$H(s)$ $H(-s)$的零极点分布对 $j\omega$ 轴呈镜像分布

相关概念及方法

- 这些零、极点中，有一半属于$H(s)$，另一半则属于$H(-s)$



相关概念及方法

- 根据$H(s)$的可实现条件和$H(s)\ H(-s)$的零、极点分布，可将给定的幅度平方函数以 $-s^2$ 代替 ω^2，确定$H(s)$与$H(-s)$的零、极点：

  - $H(s)$的极点必须位于s的左半平面， $H(-s)$的极点必须位于s的右半平面

相关概念及方法

零点选取取决于所设计滤波器是否为**最小相位系统**

- 若是最小相位系统，则 $H(s)$ 的所有零点也应分布在左半平面或 $j\omega$ 轴上
- 若非最小相位系统，则零点位置与稳定性无关，可任选取
- 若有零点在 $j\omega$ 轴上，则按正实性要求，在jω轴上的零点必须是偶阶重零点，此时，要把轴上的零点平分给 $H(s)$ 与 $H(-s)$ 。

例题

给定滤波特性的幅度平方函数

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{(\mathbf{1}-\omega^2)^2}{(\mathbf{4}+\omega^2)(\mathbf{9}+\omega^2)}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数

解: 用 $-s^2$ 代替 ω^2，有

$$H(s)H(-s)=\frac{(1+s^2)^2}{(4-s^2)(9-s^2)}$$

$$=\frac{(1+s^2)^2}{(s+2)(-s+2)(s+3)(-s+3)}$$

$H(s)\,H(-s)$的**极点**为　　s=±2，s=±3

$H(s)\,H(-s)$的**零点**为　　s=±j，s=±j

***H*(*s*)** 作为可实现滤波器的传递函数，取左半平面的极点及 $j\omega$ 轴上一对共轭零点

$$H(s)=\frac{\mathbf{1}+s^2}{(s+\mathbf{2})(s+\mathbf{3})}=\frac{\mathbf{1}+s^2}{s^2+\mathbf{5}s+\mathbf{6}}$$

二、巴特沃思（Butterwoth）低通滤波器

- 巴特沃思低通滤波器是以**巴特沃思函数**作为滤波器的传递函数，该函数以最高阶泰勒级数的形式来逼近理想矩形特性。

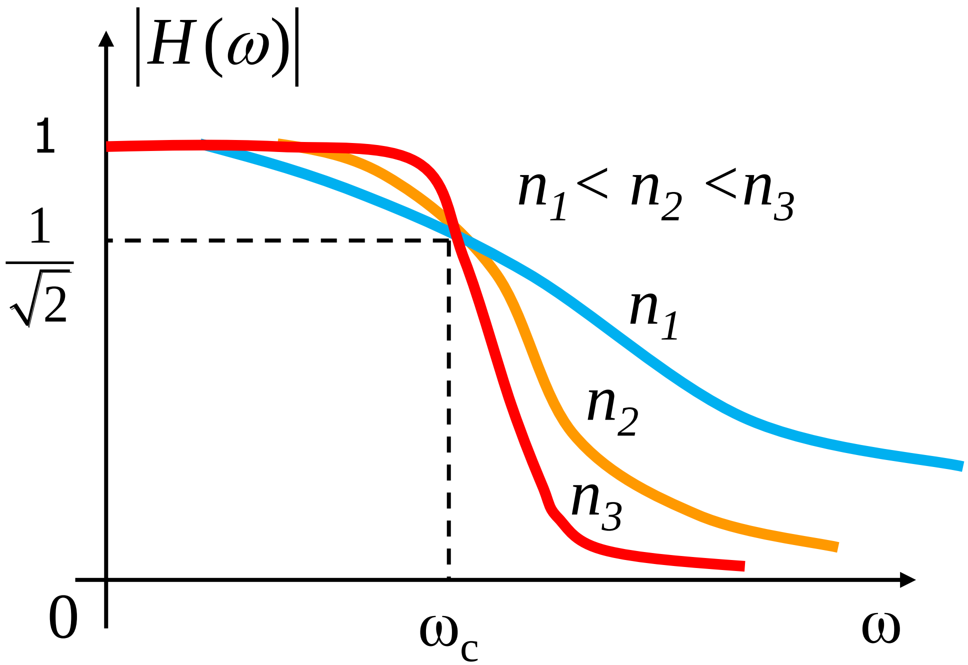
巴特沃思低通滤波器的幅频特性

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -20\lg\left|H(\omega_p)\right| \\ &= -20\lg\left|H(\omega_c)\right| \\ &= -20\lg\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

n 为滤波器的阶数；ω_c 为滤波器的截止频率，当 $\omega=\omega_c$ 时，$\left|H(\omega)\right|^2=\dfrac{1}{2}$，所以 ω_c 对应的是滤波器的 -3dB 点。

巴特沃思低通滤波器的幅频特性



巴特沃思低通滤波器的幅频特性

- 幅值函数是单调递减的，在 ω=0 处，具有最大值 $|H(\omega)|=1$
- 在 $\omega=\omega_c$ 处, $|H(\omega_c)|=0.707$， 即 $|H(\omega_c)|$ 比 $|H(0)|$ 下降了3dB
- 当 ω 趋于无穷时，幅值趋于零, $|H(\infty)|=\mathbf{0}$ ；
- 当阶数***n***增加时，通带幅频特性变平，阻带幅频特性衰减加快，过渡带变窄，幅频特性趋于理想低通特性，但 $|H(\omega_c)|=0.707|H(0)|$ 的关系并不随阶次的变化而改变;
- 在 ω=0 处最大程度地逼近理想低通特性，可以证明：若阶数为 n ，在 ω=0 点，它的前（2n-1）阶导数都等于零，这表明巴特沃思滤波器在附近一段范围内是非常平直的，它以原点的最大平坦性来逼近理想滤波器。因此，巴特沃思低通滤波器也称为**最大平坦**幅值滤波器。

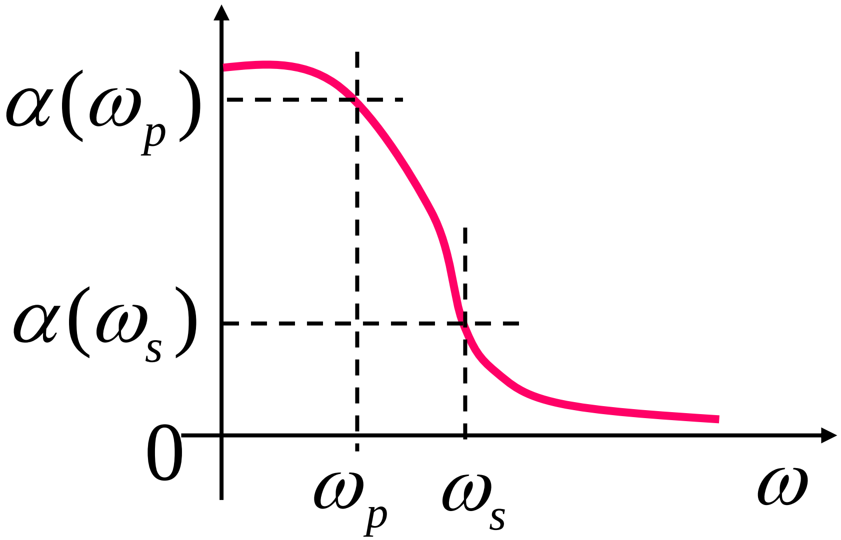
巴特沃思低通滤波器阶次的确定

➲ 在工程设计中常用**衰减函数**来描述滤波器的幅频特性：

$$\alpha = -20\lg|H(\omega)| = -20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}\right) = -20\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

巴特沃思低通滤波器阶次的确定



$\alpha(\omega_p)$ 通带最大衰减

$\alpha(\omega_s)$ 阻带最小衰减

ω_p 通带截止频率

ω_s 阻带下限频率

设计低通滤波器时，通常取幅值下降 3dB 时所对应的频率值 ω_{3dB} 为通带截止频率，即

$\omega_c = \omega_p = \omega_{3dB}$ 此时，$\alpha_p = 3dB$

巴特沃思低通滤波器阶次的确定

一般模拟低通滤波器的设计指标由**参数 ω_p，α_p，ω_s 和α_s 给出**，因此对于巴特沃思滤波器情况下，设计的实质就是为了求得由这些参数所决定的滤波器阶次 ***n***

$$\alpha_P = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega_p)|} = -10\lg|H(\omega_p)|^2 = 10\lg[1+(\omega_p/\omega_c)^{2n}]$$

$$\alpha_s = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega_s)|} = -10\lg|H(\omega_s)|^2 = 10\lg[1+(\omega_s/\omega_c)^{2n}]$$

一般设计模拟滤波器时，通常取幅值下降 3dB 时所对应的频率为通带截止频率，所以 $\omega_c = \omega_p$

巴特沃思低通滤波器阶次的确定

取 $\omega_{p}=\omega_c$ （即取$\alpha_p=3\text{dB}$），可以得到

$$\boxed{n \geq \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg(\omega_s/\omega_c)}}$$

若取 $\omega_p=\omega_c=1$ （采用归一化频率），上式变为：

$$\boxed{n \geq \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\omega_s}}$$

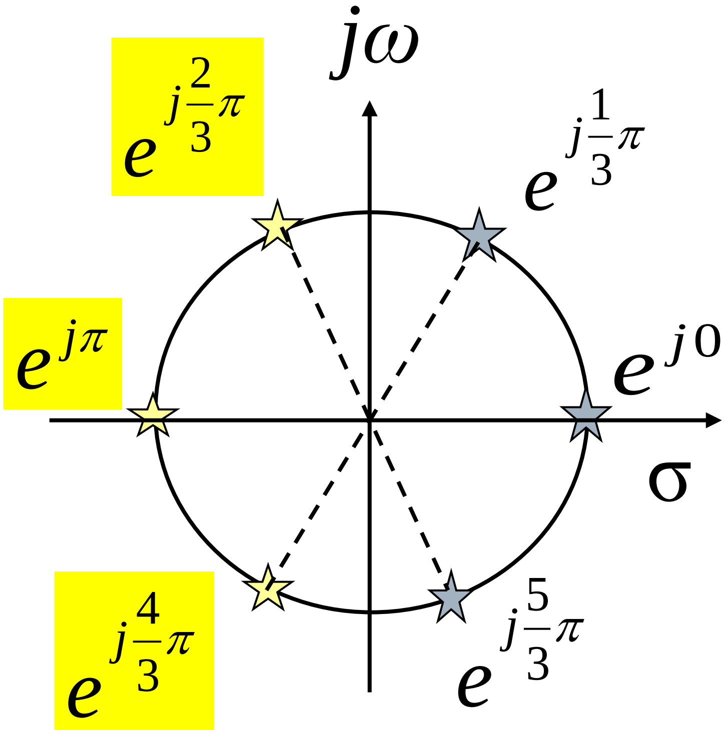
巴特沃思低通滤波器的极点分布

$$|H(\omega)|^2 = H(s)(H-s)\big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}}$$

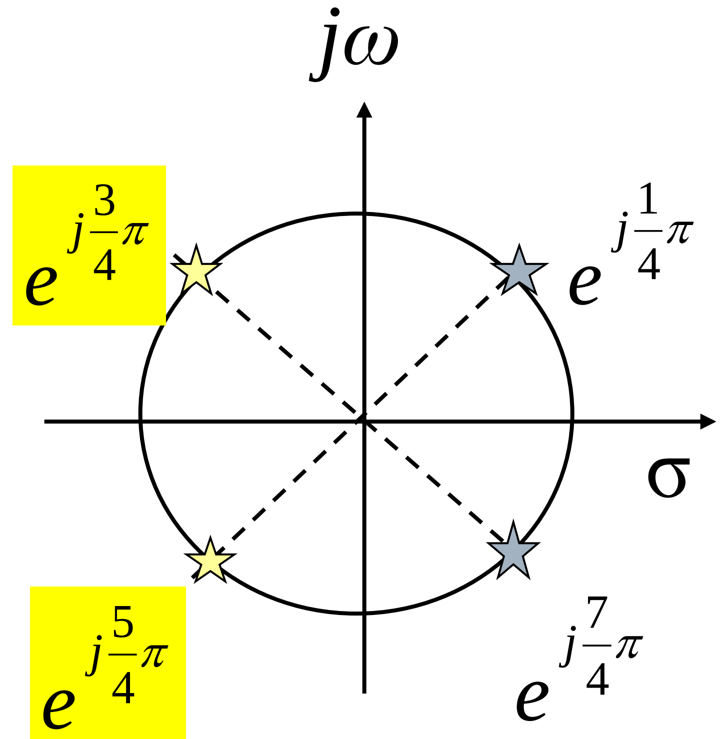
$$1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n} = 0$$

$$S_k = j\omega_c(-1)^{\frac{1}{2n}} = \omega_c e^{j\left(\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n$$

巴特沃思滤波器的极点分布



$n=3$



$n=2$

巴特沃思滤波器的极点分布

- $H(s)H(-s)$的 $2n$ 个极点以 $\dfrac{\pi}{n}$ 为间隔均匀分布在半径为 ω_c 的圆上，这个圆称为巴特沃思圆；
- 所有极点以 $j\omega$ 轴为对称轴成对称分布， $j\omega$ 轴上没有极点；
- 当 n 为奇数时，有两个极点分布在 $s=\pm\omega_c$ 的实轴上；n 为偶数时，实轴上没有极点。所有复数极点两两呈共轭对称分布。

巴特沃思低通滤波器的传递函数

- 为得到稳定的 $H(s)$，取全部左半平面的极点为 $H(s)$ 的极点，而对称分布的右半 s 平面的极点对应 $H(-s)$ 的极点

$$H(s)=\frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)}$$

巴特沃思低通滤波器的传递函数

- 对不同截止频率 ω_c，得到的同一阶次巴特沃思滤波器的传递函数也有所不同，为使滤波器设计具有通用性，需将频率进行归一化处理
- 选择截止频率 ω_c 作为参考频率，为此，H(s)的分子、分母各除以 ω_c^n，并令 $\bar{s}=\dfrac{s}{\omega_c}$，$\bar{S}$ 称为**归一化复频率**.

巴特沃思低通滤波器的传递函数

- 当*n*为偶数时

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n/2}\left(\bar{s}^2 - 2\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\bar{s} + 1\right)}$$

- 当*n*为奇数时

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(\bar{s}+1)\left(\bar{s}^2 - 2\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\bar{s} + 1\right)}$$

巴特沃思多项式

归一化频率的各阶巴特沃思多项式

n	巴特沃思多项式
1	$\bar{s}+1$
2	$\bar{s}^2+\sqrt{2}\bar{s}+1$
3	$\bar{s}^3+2\bar{s}^2+2\bar{s}+1$
4	$\bar{s}^4+2.613\bar{s}^3+3.414\bar{s}^2+2.613\bar{s}+1$
5	$\bar{s}^5+3.236\bar{s}^4+5.236\bar{s}^3+5.236\bar{s}^2+3.236\bar{s}+1$
6	$\bar{s}^6+3.864\bar{s}^5+7.464\bar{s}^4+9.141\bar{s}^3+7.464\bar{s}^2+3.864\bar{s}+1$
7	$\bar{s}^7+4.494\bar{s}^6+10.103\bar{s}^5+14.606\bar{s}^4+14.606\bar{s}^3+10.103\bar{s}^2+4.464\bar{s}+1$
8	$\bar{s}^8+5.126\bar{s}^7+13.137\bar{s}^6+21.846\bar{s}^5+25.688\bar{s}^4+21.846\bar{s}^3+13.137\bar{s}^2+5.126\bar{s}+1$

- 考试如果需要用到，会给出，不用背！

例1 求三阶巴特沃思低通滤波器的传递函数，设 $\omega_c = 1rad/s$

解： $n=3$为奇数，则幅度平方函数为

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^6}$$

$$\omega^2 = -s^2$$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1-s^6}$$

滤波器的六个极点分别为 $s_{p1} = \omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}$ $s_{p2} = -\omega_c$

$s_{p3} = -\omega_c e^{j\frac{\pi}{3}}$ $s_{p4} = -\omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}$ $s_{p5} = \omega_c$ $s_{p6} = \omega_c e^{j\frac{\pi}{3}}$

取位于s平面左半平面的极点，可得系统传递函数

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{(s-\omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}})(s+\omega_c)(s+\omega_c e^{j\frac{\pi}{3}})} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

例2 若巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当 $\omega_1 = \mathbf{2}\, rad/s$ 时，其衰减不大于3dB；当 $\omega_2 = \mathbf{6}\, rad/s$ 时，其衰减不小于30dB。求此滤波器的传递函数。

解： 令 $\omega_c = \omega_1 = \omega_p = \omega_{3dB} = 2\, rad/s \quad \omega_s = \omega_{\mathbf{2}} = \mathbf{6} rad/s$

归一化后的频域指标为

$$\varpi_c = \frac{\omega_p}{\omega_c} = \mathbf{1}, \quad \alpha_p = \mathbf{3}dB \qquad \varpi_s = \frac{\omega_{\mathbf{2}}}{\omega_c} = \mathbf{3}, \quad \alpha_s = \mathbf{30}dB$$

可求得该滤波器的阶数为

$$n = \frac{\lg\sqrt{\mathbf{10}^{\mathbf{0.1}\alpha_s} - \mathbf{1}}}{\lg\dfrac{\omega_s}{\omega_c}} = \frac{\lg\sqrt{\mathbf{10}^{3} - \mathbf{1}}}{\lg \mathbf{3}} \approx \mathbf{3.143}$$

取 $n = 4$，查表可得此滤波器归一化传递函数为

$$H\left(\overline{s}\right)=\frac{1}{\overline{s}^4+2.613\overline{s}^3+3.414\overline{s}^2+2.613\overline{s}+1}$$

通过反归一化处理，令 $s=\overline{s}\omega_c$ ，可求出实际滤波器的传递函数为

$$H\left(s\right)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)+1}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{2}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{2}\right)^2+2.613\left(\frac{s}{2}\right)+1}$$

$$=\frac{16}{s^4+5.226s^3+13.656s^2+20.904s+16}$$

巴特沃兹模拟低通滤波器设计方法总结

一般模拟低通滤波器的设计指标由参数 ω_p，α_p，ω_s 和α_s给出， 因此对于巴特沃思滤波器情况下，设计的实质就是为了求得由这些参数所决定的滤波器**阶次n**和传递函数。

$$\alpha_s = 20\lg\frac{|H(0)|}{|H(\omega_s)|} = -10\lg|H(\omega_s)|^2 = 10\lg[1+(\omega_s/\omega_c)^{2n}]$$

$$n \geq \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

求得n

由n查表得到归一化的模拟低通滤波器系统函数，令$s=s/\omega_c$得到实际的系统函数。

三、切比雪夫（Chebyshev）低通滤波器

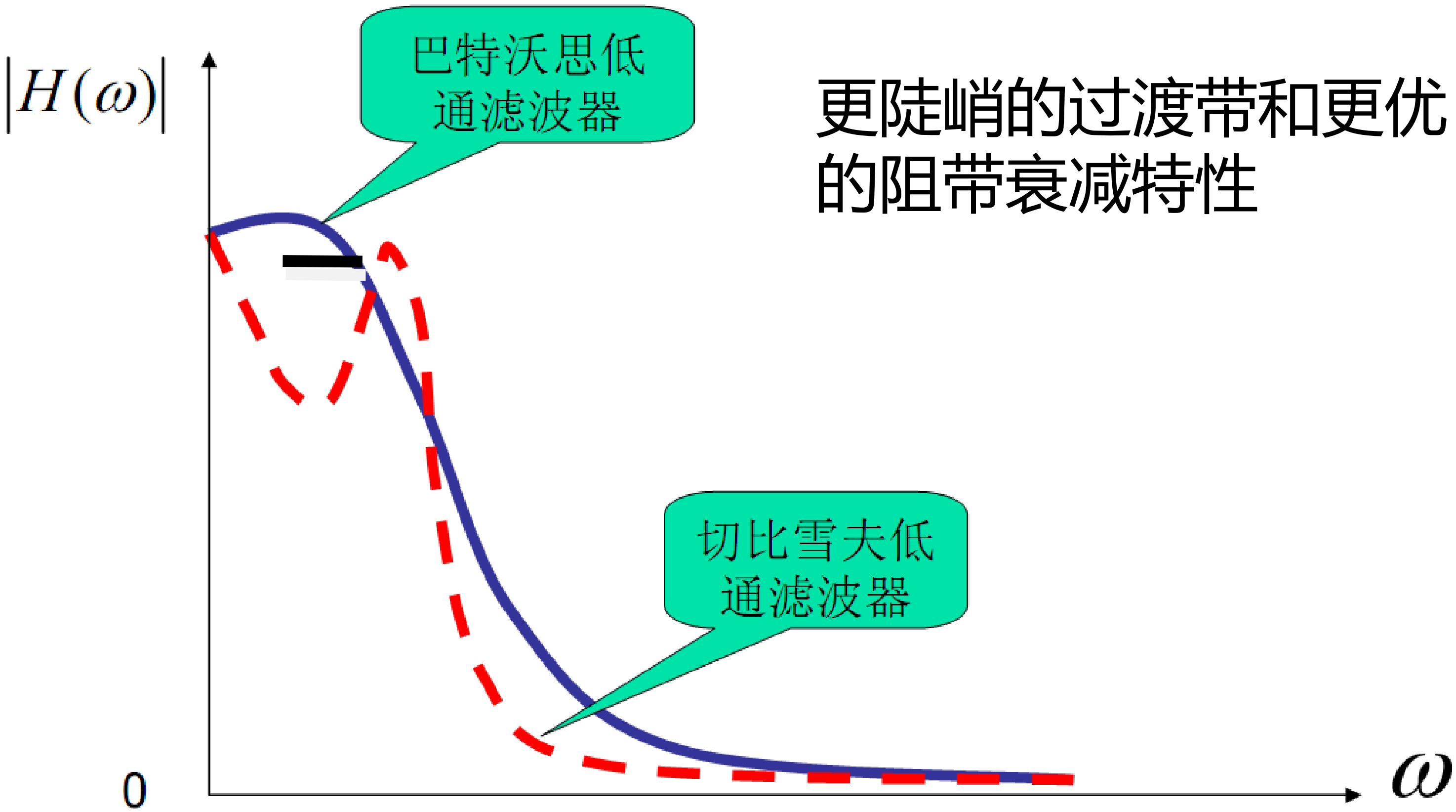
- 切比雪夫滤波器是由**切比雪夫多项式**的正交函数推导而来，采用通道内等波动、通道外损耗单调递增的准则逼近理想滤波器特性。

两种低通滤波器的比较

- 巴特沃思低通滤波器的幅频特性，无论在通带与阻带内都随频率而单调变化，滤波特性简单。
- 巴特沃思低通滤波器在通带内误差分布不均匀，靠近频带边缘误差最大，当滤波器阶数n 较小时，阻带幅频特性下降较慢，与理想滤波器的特性相差较远。若要求阻带特性下降迅速，则需增加滤波器的阶数，设计该滤波器时所用元器件数量增多，线路也趋于复杂。
- 若将误差均匀地分布在通带内，从而可设计出阶数较低的滤波器。这种误差均匀分布的办法可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来完成。

两种低通滤波器的比较

三阶巴特沃思低通滤波器和切比雪夫低通滤波器幅频特性

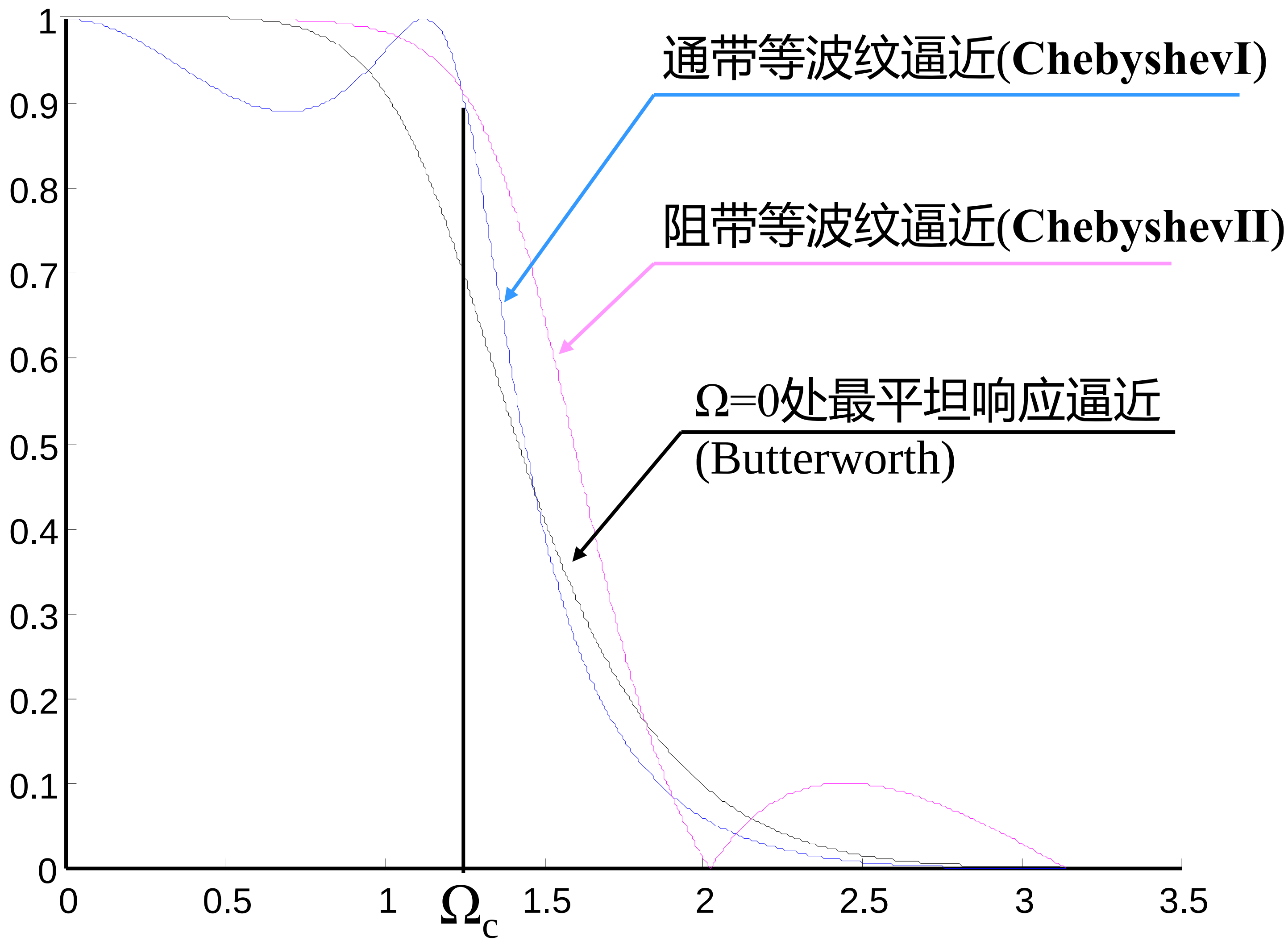


更陡峭的过渡带和更优的阻带衰减特性

两种低通滤波器的比较

- 切比雪夫滤波器是由切比雪夫多项式的正交函数推导出来的，采用了在通带内等波动，在通带外衰耗单调递增的准则去逼近理想滤波器特性。
- 在通带内是等波纹的，在阻带内则是单调下降的，称为**切比雪夫I型**。
- 在通带内是单调的，在阻带内是等波纹的，称为**切比雪夫II型**。

两种低通滤波器的比较



通带等波纹逼近(ChebyshevI)
阻带等波纹逼近(ChebyshevII)
Ω=0处最平坦响应逼近
(Butterworth)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
Ωc
1.5
2
2.5
3
3.5

切比雪夫低通滤波器的幅频特性

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

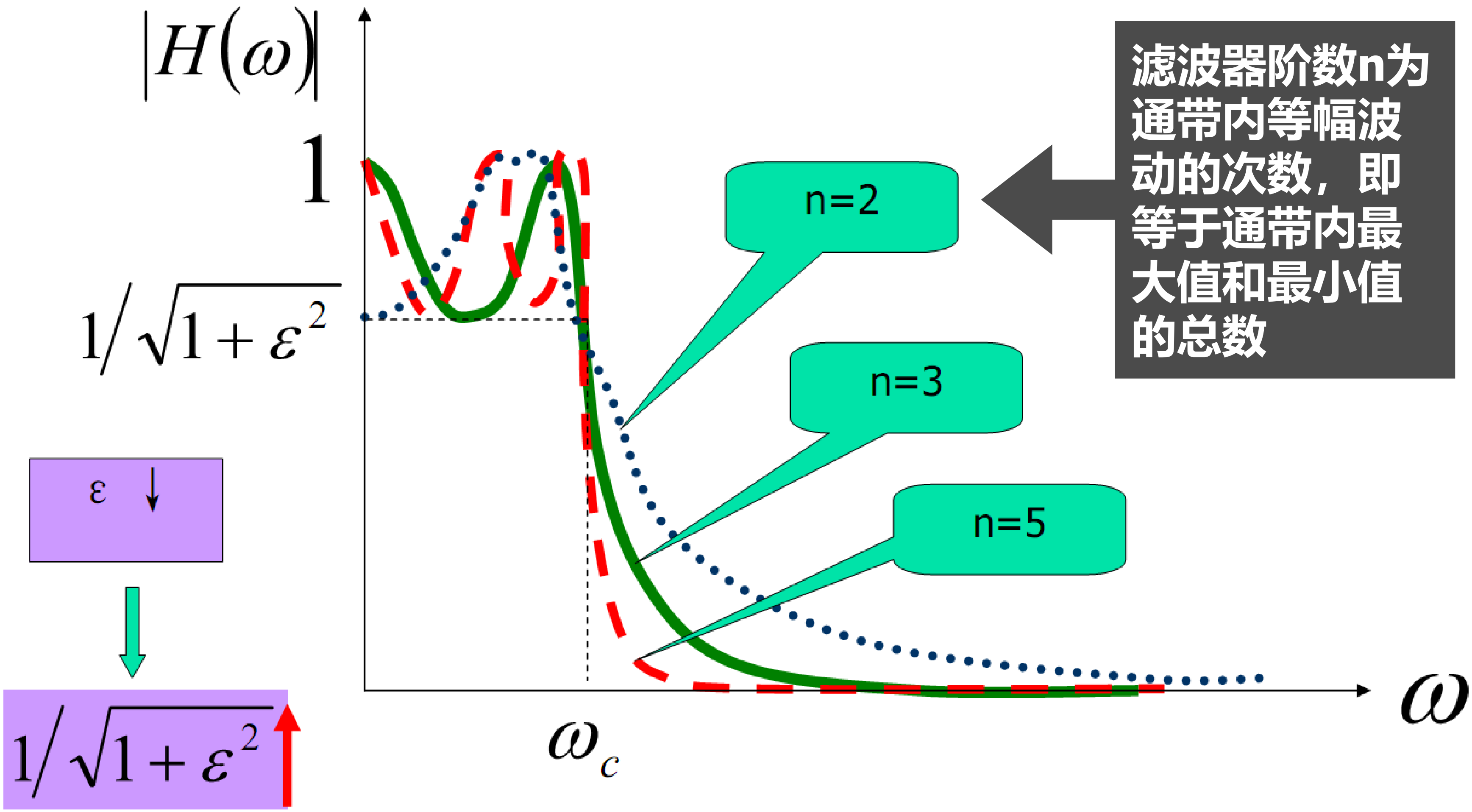
式中，ε 是决定通带内起伏大小的波动系数，为小于**1**的正数；ω_c 为通带截止频率；$T_n(x)$是 n 阶切比雪夫多项式，定义为

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n\cos^{-1}(x)) & |x| \le 1 \\ \cosh(n\cosh^{-1}(x)) & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

切比雪夫低通滤波器的幅频特性



滤波器阶数n为通带内等幅波动的次数，即等于通带内最大值和最小值的总数

切比雪夫低通滤波器的幅频特性

- 当 $0 \le \omega \le \omega_c$ 时, | H(ω)|在1与 $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ 之间等幅波动，ε愈小，波动幅度愈小。
- 所有曲线在 $\omega=\omega_c$ 时通过 $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ 点。
- 当 $\omega = 0$ 时，若 n 为奇数，则 |H(ω)|=1；若 n 为偶数,则 $|H(\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$；通带内误差分布是均匀的。
- 当 $\omega>\omega_c$ 时，曲线单调下降，n 值愈大，曲线下降愈快。
- 通带内相频特性有起伏波动，即相位是非线性的。

切比雪夫低通滤波器的阶次

- I型切比雪夫滤波器有三个参数需要确定：波动系数 ε，通带截止频率 ω_c 和阶数 n。通带截止频率一般按照实际要求给定；ε 表示通带内最大损耗，由容许的通带最大衰减 $\alpha_{\max}$ 确定。

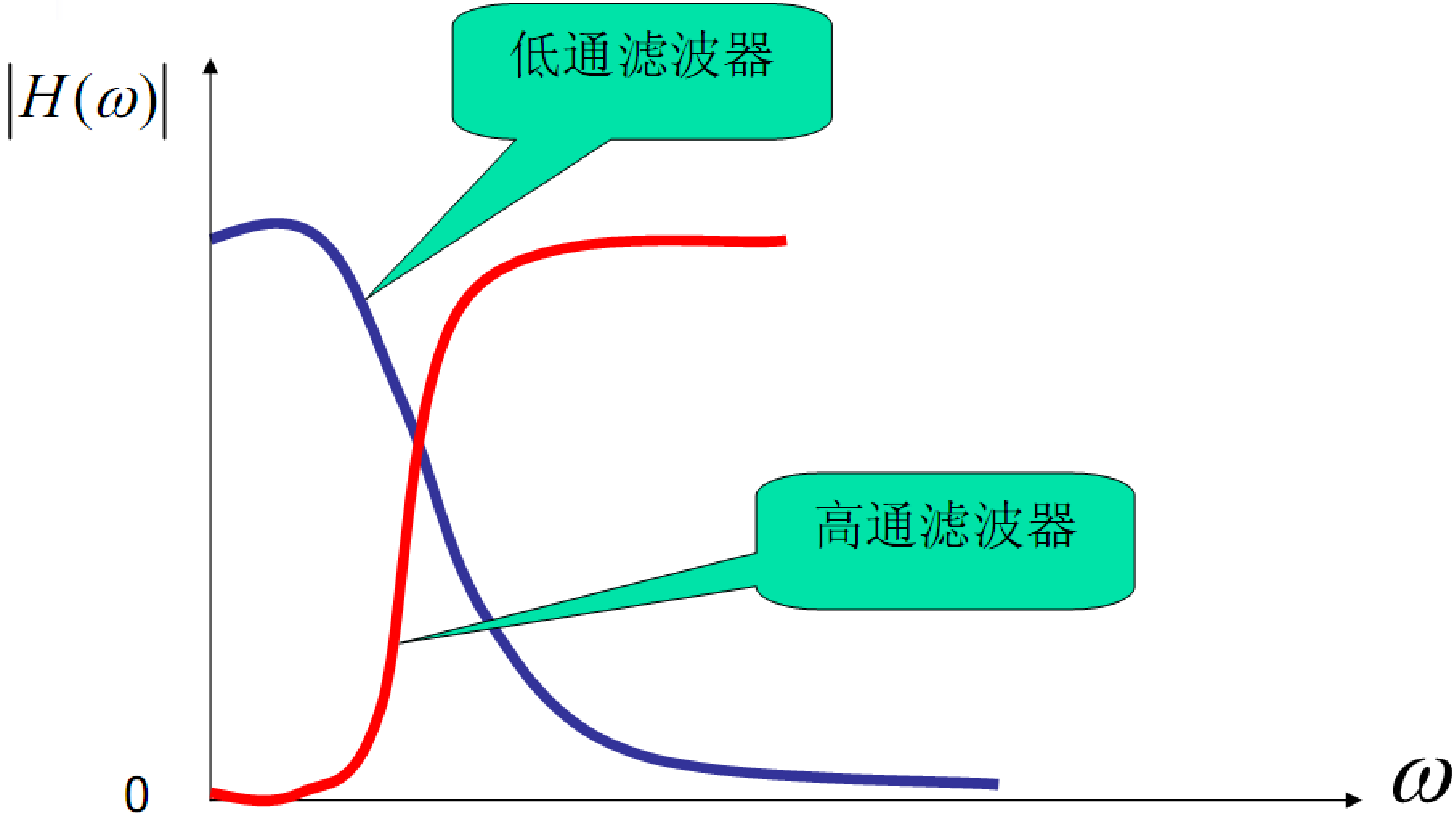
切比雪夫低通滤波器的阶次

- 由滤波器的通带截止频率 ω_c 及通带内允许的最大衰减 $\alpha_{\max}$ 和阻带下限截止频率 ω_s 及阻带内允许的最小衰减 $\alpha_{\min}$ ，可以确定滤波器所需的阶数n。

四、模拟滤波器的频率变换

- 在实际工程中，需要**设计高通**、**带通**和**带阻滤波器**时，通常是将设计好的低通滤波器，如**巴特沃思低通滤波器**或**切比雪夫低通滤波器**等，在传递函数$H(s)$中通过**频率变换**，转换成为其他类型的滤波器。

低通滤波器转换成高通滤波器



低通滤波器转换成高通滤波器

归一化低通到归一化高通的频率变换可表示为

$$s_L = \frac{1}{s_H}$$

将平面上的低通特性变换为平面上的高通特性

归一化频率之间的关系为

$$\omega_L = \frac{1}{\omega_H}$$

当ω_L为0→1时，则ω_H取值为∞→1；当ω_L为1 →∞时，则ω_H取值为1→0，滤波器低通的通带变换到高通的阻带，而低通的阻带变换到高通的通带

低通滤波器转换成高通滤波器

- 当低通特性变换为其它特性时，其衰减幅度与波动值均保持不变，仅仅是相应的频率位置产生了变换。

低通滤波器转换成高通滤波器

当给定高通滤波器的技术指标时，**设计步骤:**

- 对高通滤波器技术指标进行频率归一化处理。通常对巴特沃思滤波器以其3dB频率为频率归一化因子；对切比雪夫滤波器以其等波动通带截止频率为归一化因子。
- 将高通的技术指标变换成低通的技术指标。
- 根据转换出的低通滤波器的技术指标，按照前面介绍的低通滤波器设计方法设计满足技术指标的低通滤波器。
- 对设计出的归一化低通滤波器的系统函数进行变换，得到归一化高通滤波器的系统函数。
- 将设计的归一化高通滤波器进行反归一化处理，得到实际的高通滤波器。

设计一个巴特沃思高通滤波器，要求 $f_p = 4kHz$ 时，$\alpha_p \le 3dB$，$f_s = 2kHz$ 时，$\alpha_s \ge 15dB$。

对高通滤波器进行频率归一化，以 f_p 为归一化因子，有

$\bar{\omega}_{Hp} = 1$ （对应 $f_p = 4kHz$）

$\bar{\omega}_{Hs} = \dfrac{\omega_{Hs}}{\omega_{Hp}} = 0.5$ （对应 $f_s = 2kHz$）

根据式（5－46），得到相应低通滤波器的归一化截止频率为

$$\bar{\omega}_{Lp} = \frac{1}{\bar{\omega}_{Hp}} = 1$$

$$\bar{\omega}_{Ls} = \frac{1}{\bar{\omega}_{Hs}} = 2$$

低通滤波器的技术指标为 $\overline{\omega}_{Lp}=1,\alpha_p\le 3dB;\overline{\omega}_{Ls}=2,\alpha_s\ge 15dB$。

得到归一化的巴特沃思低通滤波器的阶数为

$$n\ge\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\overline{\omega}_{Ls}}=\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\times 15}-1}}{\lg 2}=2.4683$$

取 n=3，查表 5－1，则设计出 3 阶归一化低通滤波器的传递函数为

$$H_L(\bar{s})=\frac{1}{\bar{s}^3+2\bar{s}^2+2\bar{s}+1}$$

由式（5－45）可得归一化高通滤波器的系统传递函数为

$$H_H(\bar{s})=\frac{\bar{s}^3}{\bar{s}^3+2\bar{s}^2+2\bar{s}+1}$$

将 $\bar{s}=\dfrac{s}{\omega_c}$ 代入上式进行反归一化处理，得到实际的巴特沃思高通滤波器为

$$H_H(s)=\frac{s^3}{s^3+2\omega_c s^2+2\omega_c^2 s+\omega_c^3}$$

其中，截止频率为 $\omega_c=2\pi f_p=8\pi\times 10^3\,rad/s$。

作业

- P318（第三版）
- 习题1
- 习题4