

# 《信号分析与处理》重点整理

梁毅浩

## 一、绪论

### 课程内容及思想

任何一个信号都可以用若干不同频率和幅度的正弦波叠加表示。

把一个信号变成是不同频率的正弦波信号的叠加，从而在频域分析信号。

通过分析一个系统对不同频率的信号的不同响应，就可以分析系统的信号响应。

### 信号的分类

连续信号、离散信号

信号 **在时间轴上取值** 是否连续

数字信号、模拟信号

- 模拟信号：时间、幅度均连续
- 数字信号：时间、幅度均离散

模拟  $\Rightarrow$  连续（连续不一定模拟）

数字  $\Rightarrow$  离散（离散不一定数字）

能量信号、功率信号

信号的能量  $W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$

信号的平均功率  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$

- 能量信号： $W$  为有限值， $P = 0$
- 功率信号： $W \rightarrow \infty$ ， $P$  为不等于0的有限值

幅度有限的周期信号必定是功率信号。

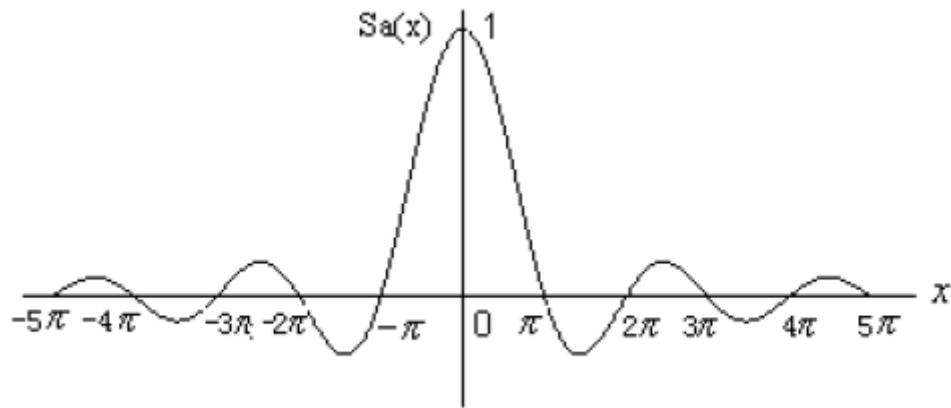
若一个信号的能量无限大，功率为零或无限大，那么这个信号既不是能量信号，也不是功率信号。（如： $t^{1/2}$ ， $e^{-t}$  等）

## 二、连续信号

### 时域描述

Sa函数（采样函数）

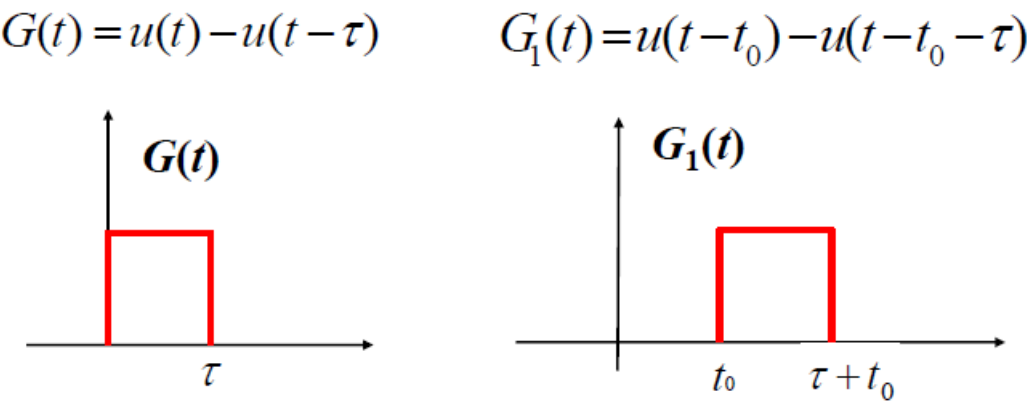
$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$$



奇异信号

- 单位斜坡信号  $r(t)$
- 单位阶跃信号  $u(t)$
- 单位冲击信号  $\delta(t)$

门函数  $G(t)$



单位冲击信号  $\delta(t)$

积分：  $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{0-}^t \delta(\tau) d\tau \quad \delta(t) = u'(t)$

**筛选：**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = \int x(t_0) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$

冲击偶  $\delta'(t)$

奇函数

$\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$

**筛选：**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) x(t) dt = -x'(0)$

---

时域计算

变换

只对  $t$  进行变换，而非  $()$  内整体。

卷积

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau$$

步骤：

1. 将  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  进行变量替换，成为  $x_1(\tau)$  和  $x_2(\tau)$ ，并对  $x_2(\tau)$  进行翻转运算，成为  $x_2(-\tau)$ ；
2. 将  $x_2(-\tau)$  平移  $t$ ，得到  $x_2(t - \tau)$ ；
3. 将  $x_1(\tau)$  和  $x_2(t - \tau)$  相乘，得到被积函数；
4. 将被积函数进行积分，即为所求的卷积积分，是关于  $t$  的函数

卷积结果的时宽等于  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  时宽的和

与冲激函数  $\delta(t)$  的卷积：

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau-t)\mathrm{d}\tau = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau-(t-t_0))\mathrm{d}\tau = x(t-t_0)$$

$$x(t-t_1) * \delta(t-t_2) = x(t-t_1-t_2)$$

## 频域分析

### *Fourier* 级数(CFS)

输入：连续、周期信号

输出：非周期、离散频谱

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t} \mathrm{d}t \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2.1}$$

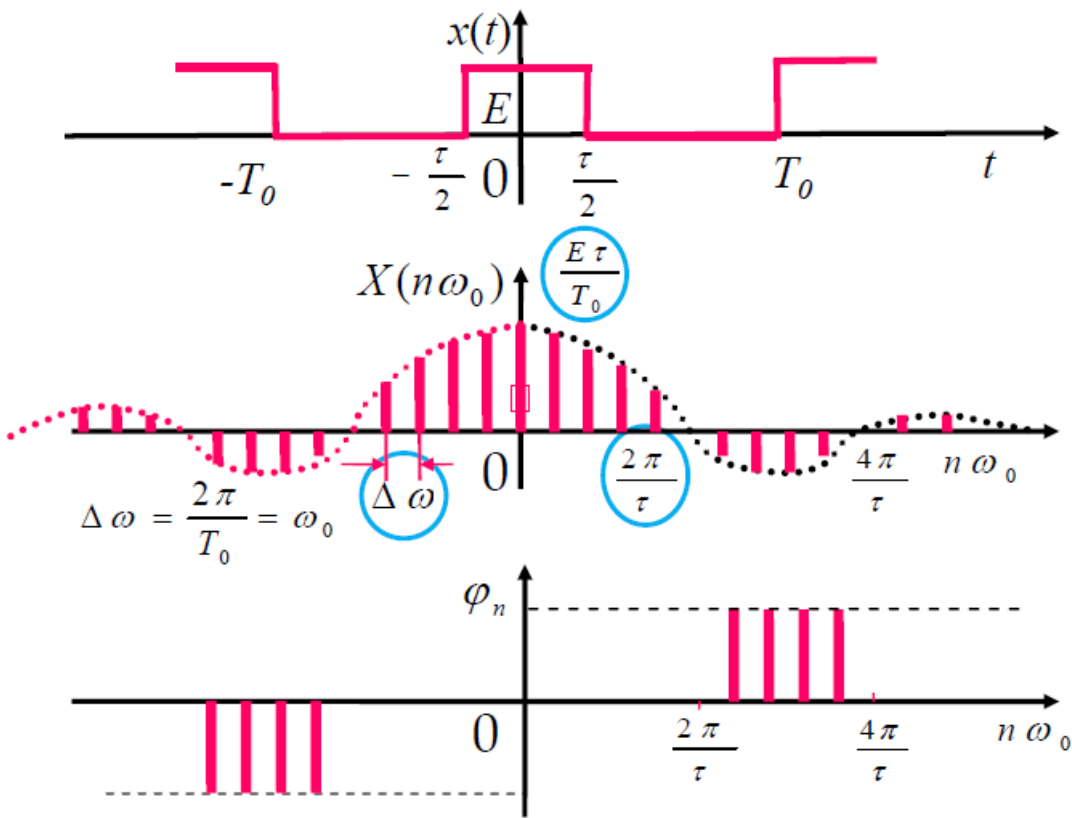
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \tag{2.2}$$

频谱：  $X(n\omega_0) = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$

周期矩形脉冲信号

$$X(n\omega_0) = \frac{E\tau}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \tag{2.3}$$

$$x(t) = \frac{E\tau}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t} \tag{2.4}$$



$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

- $T_0$  不变,  $\tau$  改变, 频谱最大值、零点位置改变
- $\tau$  不变,  $T_0$  改变, 频谱最大值、取值点间隔改变

$x(t)$  为实函数时，幅频偶对称，相频奇对称

“负”频率的出现是数学运算的结果，正负频率上的谱线矢量相加才代表该分量的幅度。

任何满足 *Dirichlet* 条件的周期信号频谱都具有：

- 离散性
- 谐波性
- 收敛性

当信号为方波等脉冲信号时，其高频分量主要影响脉冲的跳变沿，低频分量主要影响脉冲的顶部。所以，**波形变化越激烈**，所包含的**高频分量越丰富**；变化越缓慢，所包含的低频分量越丰富。

*Fourier* 变换(CFT)

输入：连续、非周期信号

输出：非周期、连续频谱

(周期函数也可做输入，输出为冲击串)

与CFS相比，周期矩形脉冲信号的周期T无限大时，输入变成非周期的单脉冲信号；频谱的谱线无限密集，频率变成连续变量。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \tag{2.5}$$

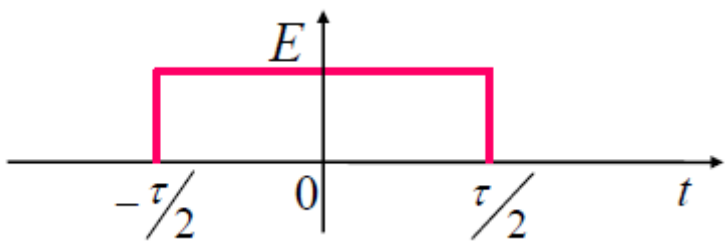
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \tag{2.6}$$

性质：

- 连续性
- 非谐波性
- 收敛性

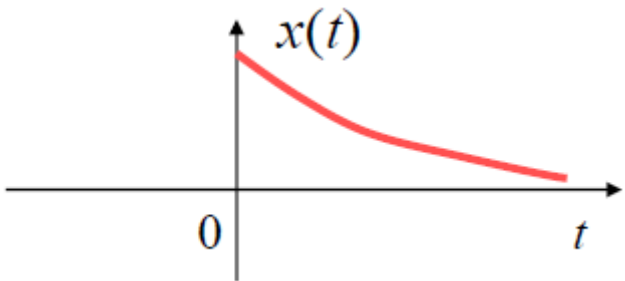
$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \cdot X_0(n\omega_0)$  ：周期脉冲  $x(t)$  的复傅里叶系数  $X(n\omega_0)$  等于单脉冲  $x_0(t)$  的傅里叶变换在  $n\omega_0$  的频率点的值除以  $T_0$ 。

矩形脉冲信号



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t} dt = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{2.7}$$

单边指数信号



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

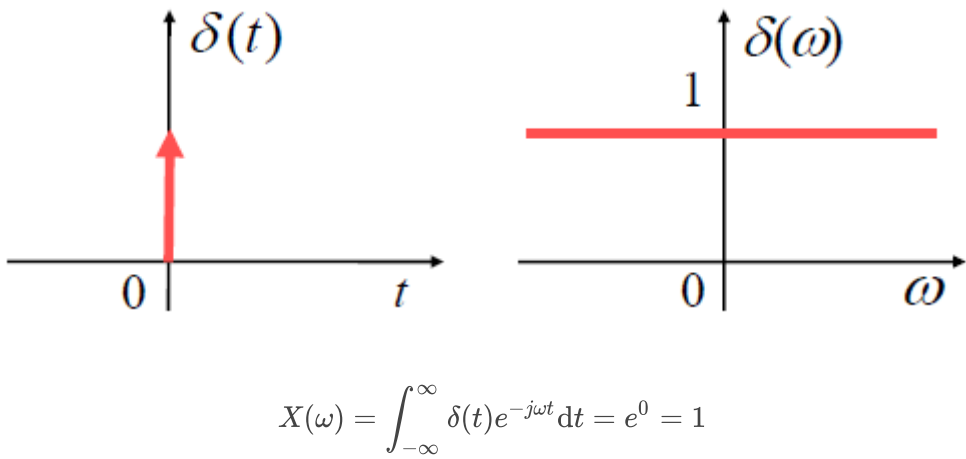
双边指数信号

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at}e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

双边奇指数信号

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^0 -e^{at}e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = -j\frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}$$

单位冲激信号



单位阶跃信号

看作单边指数信号  $a \rightarrow 0$  时的极限

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

单位直流信号

看作双边指数信号  $a \rightarrow 0$  时的极限

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

符号函数信号  $\text{sgn}(t)$

看作双边奇指数信号  $a \rightarrow 0$  时的极限

$$X(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ -j \frac{2\omega}{a^2 + \omega^2} \right] = \begin{cases} \frac{2}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

周期函数的CFT

复指数信号  $e^{j\omega_0 t}$

$$X_e(\omega) = X(\omega - \omega_0) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

正弦信号  $\sin \omega_0 t$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$
$$X(\omega) = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

一般周期信号

周期信号CFT与CFS的关系：

周期信号的CTFT（频谱密度函数）是离散函数，由无穷多个冲激函数组成，位于周期信号各谐波频率  $n\omega_0$  处，其强度为对应CFS复傅里叶系数  $X(n\omega_0)$  的  $2\pi$  倍，即：

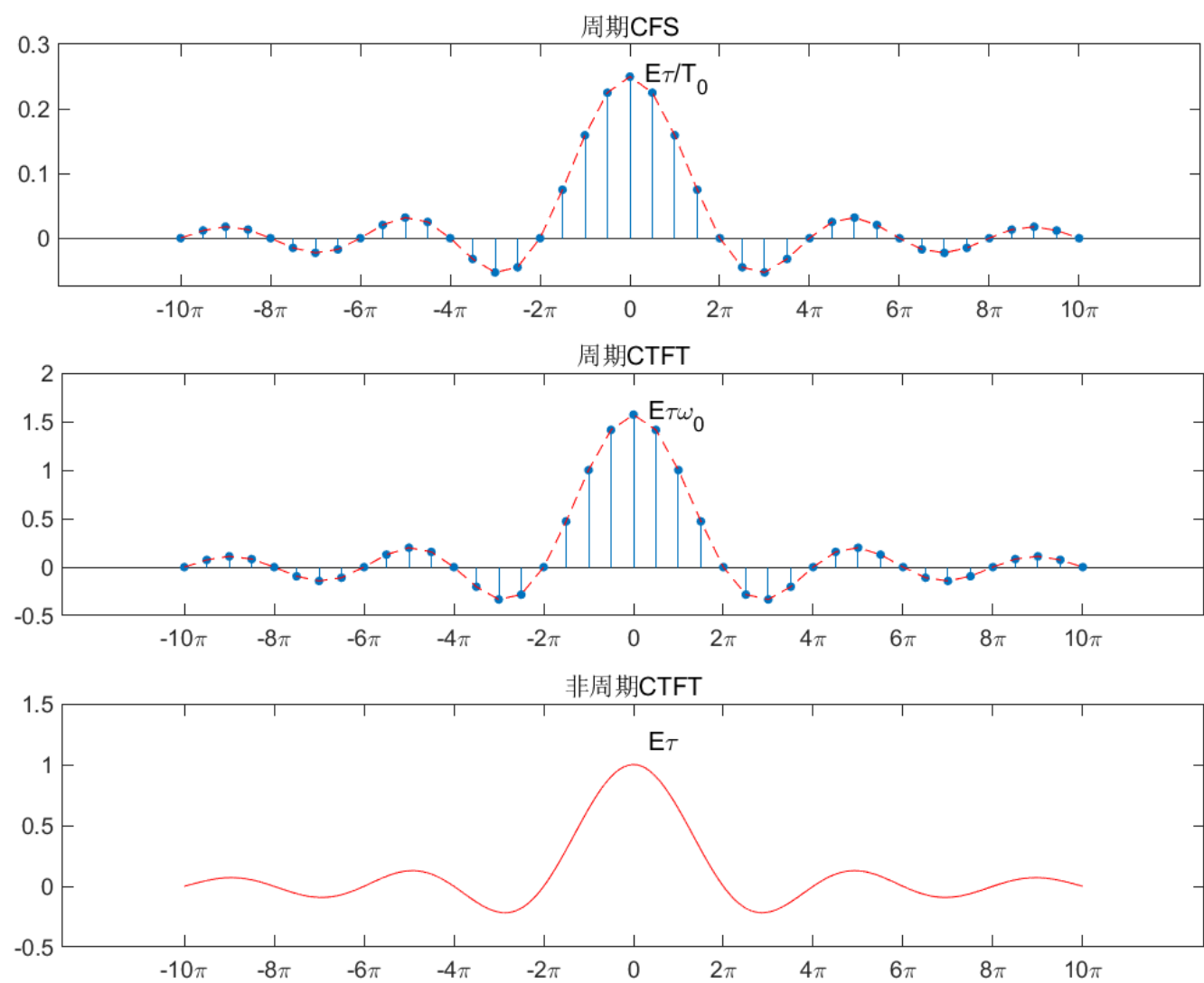
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

周期信号CFS与非周期信号CFT的关系：

周期信号  $x(t)$  的CFS复傅里叶系数  $X(n\omega_0)$  等于非周期信号（单周期）  $x_0(t)$  的CTFT在  $n\omega_0$  的频率点的值除以  $T_0$ ，即：

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \cdot X_0(n\omega_0)$$

以上三者函数图像包络线形状均相同。



根据单位冲激信号CTFT和周期信号CTFT与非周期信号CTFT的关系，可得：周期冲激串的CTFT为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \rightarrow \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

## CFT性质

若  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

### 奇偶性

若  $F[x(t)] = X(\omega)$ ，则  $F[x^*(t)] = X^*(-\omega)$

- 实偶函数的傅立叶变换仍为实偶函数
- 实奇函数的傅立叶变换则为虚奇函数

### 对偶性

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

### 尺度变换

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$$

如果在信号传输过程中要压缩信号的持续时间，则不得不展宽频带。所以在通信系统中，**通信速度和占用频带宽度是一对矛盾**。

### 时移特性

$$x(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0} X(\omega)$$

频谱幅度不变，相位变化

### 频移特性

$$x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega \mp \omega_0)$$

$$\mathcal{F}[x(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \quad (2.8)$$

$$\mathcal{F}[x(t)\sin\omega_0t]=\frac{1}{2}\mathrm{j}X(\omega+\omega_0)-\frac{1}{2}\mathrm{j}X(\omega-\omega_0)$$

(2.9)

微分特性

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}\leftrightarrow(j\omega)^nX(\omega): \text{不含直流分量}$$

时域的微分运算对应于频域乘以  $j\omega$  因子，相应地增强了高频成分。

积分特性

$$\int_{-\infty}^tx(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$$

*Parseval* 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

(2.10)

信号的总能量可由时域和频域分别求得。

时域、频域卷积

若  $x_1(t)\leftrightarrow X_1(\omega)$    $x_2(t)\leftrightarrow X_2(\omega)$ ，则：

$$\begin{aligned}x_1(t)*x_2(t)&\leftrightarrow X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)\\x_1(t)\cdot x_2(t)&\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)\end{aligned}$$

(2.11)

三、离散信号

---

时域描述

矩形序列

$$\begin{aligned}R_N(n)&=\begin{cases}1 & (0\leq n\leq N-1)\\0 & (n<0\text{ or }n\geq N)\end{cases}\\&=u(n)-u(n-n_0)\end{aligned}$$

从 0 到 N-1 共 N 个

正弦型序列

$$x(n)=A\sin(\Omega n+\varphi)$$

其中  $0<\Omega\leq2\pi$ 。

正弦序列周期：

$$N=(\frac{2\pi}{\Omega})k$$

(3.1)

$k$  的取值使得  $N$  为最小正整数。

---

时域分析

时域采样及恢复

采样

采样周期  $T_s$

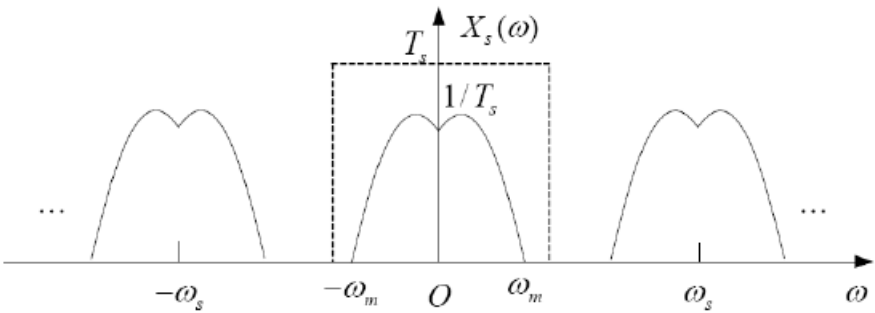
采样频率  $f_s = 1/T_s$

采样角频率  $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$

采样后频谱：

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

(3.2)



频谱变化：

- 频谱发生了周期延拓，即将原连续信号的频谱  $X(\omega)$  分别延拓到以  $\pm\omega_s, \pm2\omega_s, \dots$  为中心的频谱
- 频谱的幅度乘  $1/T_s$

**Nyquist 频率**：  $\omega_s = 2\omega_m$

采样定理

一个频率有限信号  $x(t)$  ， 如果频谱只占据了  $-\omega_m \rightarrow +\omega_m$  的范围， 则可以用等间隔的抽样值来唯一地表示。而抽样间隔不大于  $\frac{1}{2f_m}$  ， 或者说最低抽样频率为  $2f_m$  。

信号恢复

$$G(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} \quad , \quad X(\omega) = X_s(\omega)G(\omega) \quad , \quad \text{则:}$$

$$x(t) = x_s(t) * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin[\omega_m(t - nT_s)]}{\omega_m(t - nT_s)}$$

频域采样及恢复

**频域采样定理**： 对于一个长度为  $2t_m$  的时限信号， 为了能够从频域样本集合完全恢复原信号的频谱， 其频域的采样间隔必须满足  $T_0 \geq 2t_m$  ， 即  $\omega_0 \leq \pi/t_m$  。

时域变化：

- 信号发生了周期延拓，即将原信号  $x(t)$  以  $\pm T_0, \pm 2T_0, \dots$  为中心延拓
- 频谱的幅度乘  $1/\omega_0$

---

时域计算

时间尺度变换

若  $x(n) = x(t)|_{t=nT}$  则  $x(2n) = x(t)|_{t=n2T}$  ， 即  $x(2n)$  是  $x(n)$  的抽取序列

卷积和

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n - m) = x(n) * h(n)$$

**步骤：**



$x(n) \rightarrow x(m)$   
 $h(n) \rightarrow h(m) \rightarrow h(-m) \rightarrow h(n-m)$

换坐标

翻转

平移

$x(m) \cdot h(n-m) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$

相乘

累加

对位相乘求和法

[例]  $h(n) = \{-1, 2, 4, 0, 5\}, x(n) = \{1, 3, 6, 1, -1, 4\}$

解： 这一方法的算式如下：

对位相乘求和

1  3   6   1  -1  4
× -1  2   4   0  5
-1 -3  -6  -1  1  -4
2   6 12  2  -2  8
4 12 24 4  -4 16
0  0  0  0  0  0
+

5  15 30  5 -5 20
-1 -1  4 23 32 13 34 21 -5 20

即  $y(n) = \{-1,-1,4,23,32,13,34,21,-5,20\}$

频域分析

DFS

$\Omega_0 = \omega_0 T = \frac{2\pi}{T_0} T = \frac{2\pi}{NT} T = \frac{2\pi}{N}$

$\Omega_0 n = \omega_0 t$

周期离散序列的Fourier展开：

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$
 (3.3)

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$
 (3.4)

对比：

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$
 (2.1)

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$
 (2.2)

$X(k\Omega_0)$  是变量  $k$  的周期函数，周期为  $N$  。（可以类比为  $k$  次谐波的系数）

DFS性质

若 $x(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0), h(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} H(k\Omega_0)$  ， 则：

周期卷积

$$x(n) \circledast h(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k)$$
 (3.5)

$$x(n) \circledast h(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0) H(k\Omega_0)$$
  

$$x(n)h(n) \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega_0) \circledast H(k\Omega_0)$$

周期卷积仅在单个周期内求和，而线性卷积对所有  $k$  值求和。

复共轭

$$x^*(-n) \longleftrightarrow X^*(k\Omega_0)$$

位移性质

$$x(n-m) \longleftrightarrow e^{-jk\Omega_0 m} X(k\Omega_0)$$

Parseval定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)h^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) H^*(k\Omega_0)$$

当  $x(n) = h(n)$  时，有：

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k\Omega_0)|^2 \tag{3.6}$$

满足采样定理时，连续时间周期信号的频谱  $X(k\omega_0)$  离散时间周期信号的频谱  $X(k\Omega_0)$  的主值序列。

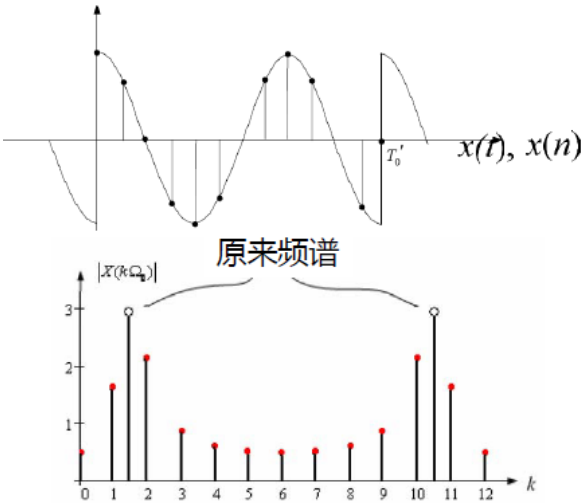
混叠

不满足采样定理时， $X(k\Omega_0)$  出现频谱混叠。

对于具有无限频谱分量的连续时间周期信号（如矩形、三角形等脉冲串），必然无法准确地从有限样点求得原始周期信号的频谱，而只能通过恰当地提高采样率，增加样点数，来减少混叠对频谱分析所造成的影响。

泄漏

离散时间周期信号由于截取波形的时间长度不恰当造成泄露误差。



这种从原来比较集中的谱线由于截取信号长度不当，出现了分散的扩展谱线的现象，称之为频谱泄漏或功率泄漏。

为了减小泄漏误差，必须取自一个基本周期或基本周期的整倍数为宜。若待分析的周期信号事先不知道其确切的周期，则可截取较长时间长度的样点进行分析。当然，必须在采样频率满足采样定理的条件下进行。

DTFT

输入：离散、非周期信号序列

输出：周期、连续频谱

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \tag{3.7}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \tag{3.8}$$

$X(\Omega)$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数

实数序列的离散时间傅里叶变换的幅频特性是  $\Omega$  的偶函数，相频特性是  $\Omega$  的奇函数。

性质

常见变换序列

DFT

时域、频域都离散，只有DFS满足。

从DFS得到DFT

- 1. 时间有限非周期离散信号进行周期延拓，变为周期离散信号；
- 2. DFS， 求出离散频谱函数  $X(k\Omega_0)$  ；
- 3. 取主值区间： $0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq N-1$ ；
- 4. 乘周期N。

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

(3.9)

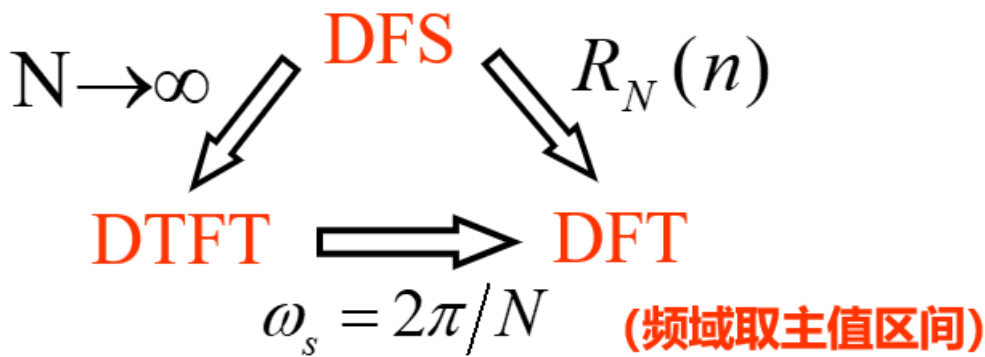
$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

(3.10)

DFT与DFS、DTFT之间的关系

DFT是DFS的主值序列，是一种通过DFS得出的变换，将有限非周期离散信号的频谱离散化。

DFT是在频域上对DTFT在  $[0,2\pi)$  区间以  $2\pi/N$  为取样间隔进行等间隔采样再取主值。频域采样后时域发生周期延拓，周期为N。



DFT采样

用DFT计算信号的频谱时，采样频率必须大于两倍的信号最高截止频率，对周期信号至少要取一个整周期。

取样间隔要保证满足采样定理，即如果序列在时域内长度为  $N_0$ ，频域内一个周期采样点个数为  $N$ ，则  $N \geq N_0$ ； $N > N_0$  时，时域序列补0。通常为了算法统一，取  $N = N_0$ ，记N点DFT。

$N$  不同，DFT结果不同： $N$  越大，DFT越接近DTFT。

DFT性质

圆周移位

圆周移位的概念

有限长序列

$$x(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

周期延拓

$$\tilde{x}_N(n)$$

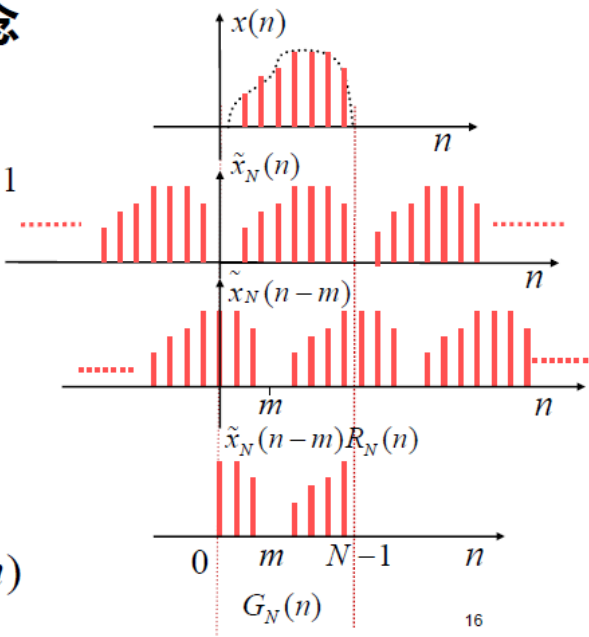
线性位移

$$\tilde{x}_N(n-m)$$

加窗

得到圆周移位序列

$$\tilde{x}_N(n-m)R_N(n)$$



序列  $x(n)$  的圆周移位表示为  $x_p(n-m) = \tilde{x}_N(n-m) = x((n-m))_N \cdot R_N(n)$  , 其中  $((n-m))_N$  表示  $(n-m)$  被  $N$  除的余数。

时移特性

时域圆周移位  $m$  位:

$$x((n-m))_N R_N(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} e^{-j\Omega_0 m k} X(k)$$

频域圆周位移  $k_0$

$$e^{j\Omega_0 k_0 n} x(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X((k-k_0))_N R_N(k)$$

圆周卷积

$$x(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x((n-m))_N R_N(n)$$

$$x(n) \otimes h(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k)H(k)$$

两序列长度必须相等，长度不等时，对较短序列进行补零。得到序列长度与原序列相同。

圆周卷积与线性卷积的关系

圆周卷积是线性卷积以圆周卷积长度周期延拓后取主值序列；

如果两序列补零后的长度  $L$  满足  $L \geq M + N - 1$  , 则圆周卷积与线性卷积结果相同。

线性卷积对应DTFT，圆周卷积对应DFT

步骤:

- 1.  $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 补零，使两序列长度相等；
- 2. 将 $x_2(n)$ 周期延拓；
- 3.  $x_2(n)$ 翻转，然后取主值；
- 4.  $x_1(n)$ 与翻转后 $x_2(n)$ 对应项相乘后求和
- 5. 翻转后的 $x_2(n)$ 进行平移后取主值；
- 6.  $x_1(n)$ 与翻转平移后的 $x_2(n)$ 对应项相乘后求和。

FFT（基2FFT）

DFT的计算：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \tag{3.11}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \tag{3.12}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{1 \times 1} & W_N^{2 \times 1} & \cdots & W_N^{(N-1) \times 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_N^0 & W_N^{1 \times (N-1)} & W_N^{2 \times (N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1 \times 1} & W_N^{-2 \times 1} & \cdots & W_N^{-(N-1) \times 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1) \times 1} & W_N^{-(N-1) \times 2} & \cdots & W_N^{-(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

将  $x(n)$  或  $X(k)$  的次序重排，并利用  $W_N$  的特性，将长序列的离散傅里叶变换运算逐次分解成较短序列的离散傅里叶变换计算，从而提高运算效率。

若算法是对输入序列  $x(n)$  进行逐次分解进行的，则叫做时间抽选(Decimation In Time, DIT) FFT算法。

若序列  $x(n)$  的长度  $N = 2\beta$ ， $\beta$  是整数（可以对序列增补零值点来达到）。则通过分解，其最小的DFT运算单元是2点。通常将FFT运算中最小DFT运算单元称为**基(radix)**，因而把这种算法称为**基2时间抽选FFT算法**。

### DFT旋转因子

$$W_N^n = \text{e}^{-\text{j} \frac{2\pi}{N} n}$$

周期性： $W_N^{r+mN} = W_N^r$

可约性： $W_{2N}^k = W_N^{k/2}$


对称性： $W_N^{r+\frac{N}{2}} = -W_N^r$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{rk} \\ &= G(k) + W_N^k H(k) \end{aligned}$$

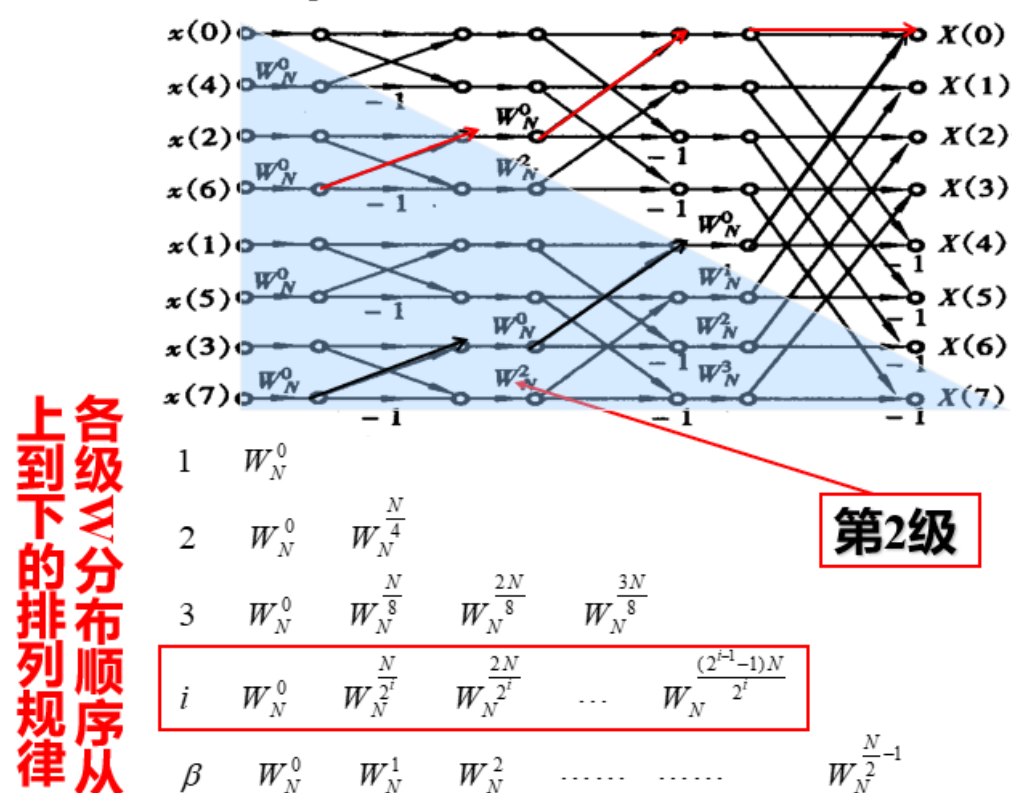
$G(k)$  表示  $x(n)$  的序号为偶数的序列的和， $H(k)$  表示  $x(n)$  的序号为奇数的序列的和。

X(0)=G(0) +  $W_8^0$  H(0)  
X(1)=G(1) +  $W_8^1$  H(1)  
X(2)=G(2) +  $W_8^2$  H(2)  
X(3)=G(3) +  $W_8^3$  H(3)  
X(4)=G(4) +  $W_8^4$  H(4) = G(0) -  $W_8^0$  H(0)  
X(5)=G(5) +  $W_8^5$  H(5) = G(1) -  $W_8^1$  H(1)  
X(6)=G(6) +  $W_8^6$  H(6) = G(2) -  $W_8^2$  H(2)  
X(7)=G(7) +  $W_8^7$  H(7) = G(3) -  $W_8^3$  H(3)

对称性



## 权系数（输入倒位序、输出自然序）

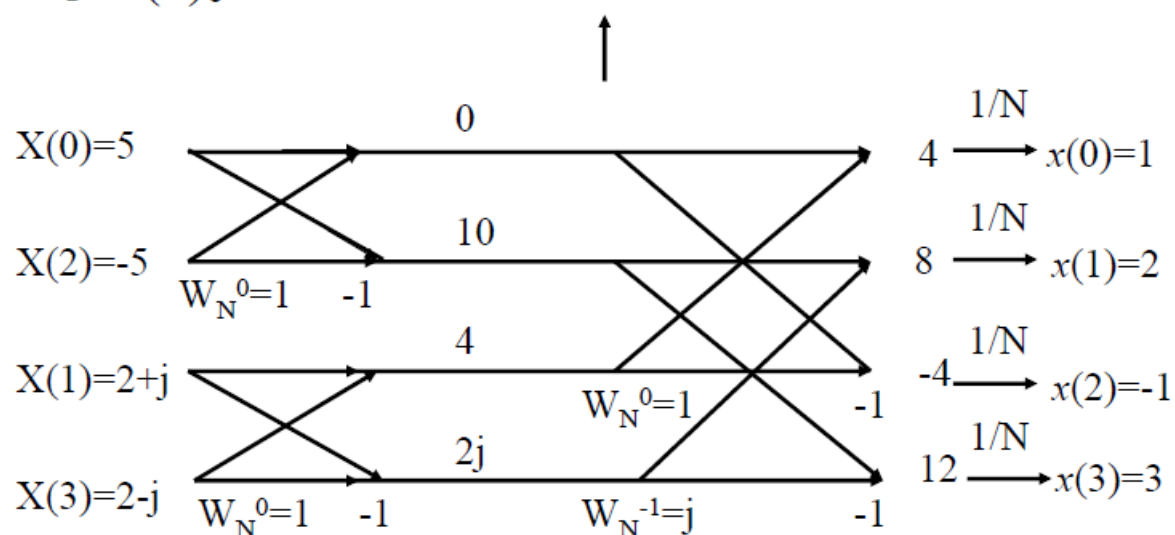


34

## IFFT

蝶形流图同样适用于IFFT，但加权系数由  $W_N^{nk}$  改为  $W_N^{-nk}$ ，并且运算结果乘  $1/N$ 。

**例：**已知有限长序列： $X(k)=\{5, 2+j, -5, 2-j\}$ ，试利用DIT IFFT求  $x(n)$ 。



## 分辨率

$N$ ：频域内采样点个数

基本频率(Hz)  
频率分辨率 $f_0$

$\overline{n=0}$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \omega_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0} T_s$$

$$\neq 2\pi f_0 = \frac{2\pi f_s}{N}$$

$$f_s = Nf_0 \quad T_0 = NT_s$$

$T_0$  周期（采样记录长度），  
 $N$  点采样，形成有限长序列  
 $T_s$  采样间隔

$f_0 = f_s/N$ ， $f_0$  越小越好： $f_s$  不能无限降低（满足采样定理）

## 频率（显示）分辨率

离散傅里叶变换  $X(k)$  是对  $X(\Omega)$  的采样，只给出频谱在离散点  $\Omega = 2\pi k/N$  上的值，而无法反映这些点之间的内容，因此存在**栅栏现象**。有时谱峰正好位于两个离散点之间，这样DFT就无法检测出此峰值。

DFT 的频率分辨率：



$$\Delta f = f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{f_s}{N} \tag{3.13}$$

$\Delta f$  越小越好，若抽样频率  $f_s$  不变，则应增大  $N$ ，即信号截取的宽度（数据宽度  $T_0$  越长）

补0没有增加时域信号的有效信息，因此，不会改变DFT/FFT的物理分辨率，只能增加频谱频率（显示）分辨率。

## 物理分辨率

泄漏：

频率有限信号必定是时域无限信号，计算机对其进行处理必须首先加窗得到有限长序列，时域的截断造成频谱产生失真，它从原有的频率受限图形扩展开来，

由于截断造成原信号的频谱扩展，产生**泄漏**现象。通常也出现混叠现象。

频谱泄漏不可避免，可以采取改变窗函数的形状（不用矩形窗），以改善频域拖尾、收敛慢的缺陷。例如：升余弦窗[汉宁(*Hanning*)窗]、改进的升余弦窗[汉明(*Hamming*)窗]。

改变窗函数的形状可以减小旁瓣，但会增大主瓣宽度。这两者不可同时解决，一定存在矛盾！

## 补零的作用

使数据 $N$ 为2的整次幂，便于使用FFT。

补零后，其实是对DFT结果做了插值，克服“栅栏”效应，使谱外观平滑化；所谓栅栏效应，就像站在栅栏旁边透过栅栏看外面风景，肯定有被栅栏挡住比较多风景，此时就可能漏掉较大频域分量，但是补零以后，相当于你站远了，改变了栅栏密度，风景就看的越来越清楚了。

## 应用FFT考虑的问题

### 以足够高的采样频率截取足够多的输入数据

采样率通常取带宽的2.5-4倍，一般取2.56倍。如果不知道信号的带宽，而且发现采样频率1/2频率附近存在很大幅度的频谱分量，就应该进一步提高采样频率。信号的幅度谱一般随着频率的升高而下降，如果发现某个频率分量的幅度随着采样在改变，一般认为发生了频率混叠，需要对信号添加抗混叠滤波器。

### 用补零的方法延长输入数据序列的长度使之等于 $2^N$

提高FFT的运算的有效性，并且提高FFT得到的信号频谱的精细程度

### 对输入数据序列加窗以减小FFT的频谱泄露

物理分辨率取决于窗函数的主瓣的宽度，主瓣越宽，物理分辨率越低。其他窗函数主瓣都比矩形窗宽，但是旁瓣比矩形窗低且衰减快。也就是说，用其他形状的窗减小频谱泄露是以牺牲物理分辨率为代价的。

### 信号中含有较大的直流分量

（不重要）在加窗前，计算信号的平均值，并从原始输入信号的所有取样值中减去直流成分，这样用FFT时得到的结果不含有大幅度的零频率成分，避免掩盖零频率附近的频谱成分。

## Z变换

增长型的离散信号（序列） $x(n)$  的傅里叶变换是不收敛的，为了满足傅里叶变换的收敛条件，类似拉普拉斯变换，将  $x(n)$  乘以一衰减的实指数信号  $r^{-n}$  ( $r > 1$ )，使信号  $x(n) \cdot r^{-n}$  满足收敛条件。

令复变量  $z = re^{j\Omega}$ ，定义离散时间信号（序列） $x(n)$  的Z变换：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{3.14}$$

收敛域

当  $x(n)$  有界时，令上述级数收敛的  $z$  的所有可取值的集合称为收敛域

比值判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

根值判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

$\rho < 1$  级数收敛， $\rho = 1$  级数可能收敛， $\rho > 1$  级数不收敛

几类序列的收敛域

有限长序列

在有限区间内，有非零的有限值的序列，只要级数的每一项有界，则级数就收敛

收敛域为除了 0 和  $\infty$  的整个 Z 平面

右边序列

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad n_1 \leq n \leq \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|} &< 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} &= R_{x_1} < |z| \end{aligned}$$

**圆外收敛**，收敛域为  $R_{x_1} < |z| < \infty$  （若  $n_1 > 0$ ，则收敛域还包括  $|z| = \infty$ ）

左边序列

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad -\infty \leq n \leq n_2 \\ X(z) &\stackrel{m=-n}{=} \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^m \stackrel{n=m}{=} \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n)z^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)z^n|} &< 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|} &< |z|^{-1} \end{aligned}$$

收敛域为：

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}} = R_{x_2}$$

**圆内收敛**，若  $n_2 > 0$ ，则收敛域不包括  $|z| = 0$

双边序列

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad -\infty \leq n \leq \infty \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \end{aligned}$$

Z变换的几何表示

在极点处  $X(z)$  不收敛，因而收敛域内没有极点，而且收敛域的边界总是以极点为界的同心圆



Z变换性质

线性

时移

$$x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

尺度变换

$$a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z)$$

Z反变换

部分分式法

$X(z)$  是有理真分式，有  $N$  个单极点：

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)} \\ &= A_0 + \frac{A_1 z}{z-p_1} + \frac{A_2 z}{z-p_2} + \dots + \frac{A_N z}{z-p_N} \end{aligned}$$

$$x(n) = A_0 \delta(n) + A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_N p_N^n \quad (n \geq 0)$$

单边Z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

单边Z变换的绝大部分性质与双边Z变换对应的性质相同，与双边z变换不同的性质有：

时移定理

左移：

$$Z[x(n+m)u(n)] = z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right]$$

右移：

$$Z[x(n-m)u(n)] = z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-k} \right]$$

初值定理

若  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$  存在，则：

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

终值定理

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$  存在，则：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

常用序列的Z变换

$$\delta(n) \leftrightarrow 1 \quad \text{ROC: 全平面}$$

$$\delta(n-n_o) \leftrightarrow z^{-n_o} \quad \text{ROC: } |z| > 0$$

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

$$a^n \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

？Z变换与Laplace 变换？

序列  $x(n)$  的Z变换就等于其理想抽样信号拉普拉斯变换进行映射的结果

序列  $x(k)$  在单位圆上面的Z变换  $X(z)$  就等于其理想抽样信号后所得到的序列的离散时间傅里叶变换。

四、信号处理

研究对象：线性时不变系统LTI

连续系统分析：列写微分方程→求解微分方程

离散系统分析：列写差分方程→求解差分方程

系统的稳定性：如果一个系统对其有界的输入信号的响应也是有界的，则该系统具有稳定性，或称该系统是稳定系统。否则，如果对有界输入产生的输出不是有界的，则系统是不稳定的。

线性时不变因果系统的数学模型

- 连续系统：线性常系数微分方程，例如：

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$$

- 离散系统：线性常系数差分方程，例如：

$$y(n) - 5y(n - 1) + 6y(n - 2) = x(n) - 3x(n - 2)$$

连续系统

起始松弛

系统的初始条件为零：

$$\begin{aligned} x(t) = 0 \quad (t < 0) &\rightarrow y(t) = 0 \quad (t < 0) \\ x(n) = 0 \quad (n < 0) &\rightarrow y(n) = 0 \quad (n < 0) \end{aligned}$$

只有满足“起始松弛”假设，系统才是时不变的，也是因果的。

“起始松弛”假设意味着系统内部能量的一种静止状态，表示这类系统具有零起始条件，保证了描述系统的动态方程有唯一的解。

时域法分析

单位冲激（脉冲）响应

系统**零初始条件下**对激励为单位冲激函数所产生的响应，记为  $h(t)$ ，即：

$$x(t) = \delta(t), y(t) = h(t)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t)$$

通过求解微分（差分）方程，无法表现系统响应的物理意义，且求解困难。

- $n > m$  时，通解为：

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

- $n = m$  时，通解为：

$$h(t) = c\delta(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

## 卷积积分

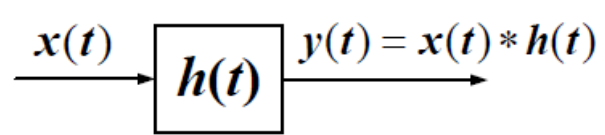
## 复指数信号 $x(t) = e^{j\omega t}$ 响应

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

LTI系统对复指数信号的响应仍是一个同频率的复指数信号，只是其幅值和相位发生了改变，而其改变由频率响应函数  $H(\omega)$  决定。

## 任意信号 $x(t)$ 的响应

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$



## 无失真传输

信号的波形不变，而只能是幅度上对原信号按比例地放大或缩小，或者在时间上有一固定的延迟。

输入： $x(t)$ ，输出  $y(t) = Kx(t - t_0)$ ，

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ke^{-j\omega t_0}$$

详见课件例题

## 复频域分析

在  $s$  域中讨论系统对输入信号的响应及其特性就是复频域分析法。能方便地求取系统的零输入响应、零状态响应以及全响应

设LTI系统：

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t) \tag{4.1}$$

不满足“起始松弛”条件，即具有非零初始条件：

$$y^{(i)}(0_-) \ (i = 0, 1, \cdots, n)$$

对等式两侧进行*Laplace*变换，得：

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[ s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0_-) \right] = \sum_{j=0}^m b_j s^j X(s)$$

即：

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s) + \frac{\sum_{i=0}^n a_i \left[ \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0_-) \right]}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

上式第一项表示系统在“起始松弛”情况下对激励的响应，即零状态响应  $y_{zs}(t)$  的*Laplace*变换  $Y_{zs}(s)$ ；第二项表示零输入相应  $y_{zi}(t)$  的*Laplace*变换  $Y_{zi}(s)$ 。

## 传递函数

定义在**零初始条件**下，系统输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比为系统的传递函数  $H(s)$ ，即：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \tag{4.2}$$

$H(s)$  即为系统单位冲激响应。

## 离散系统

线性常系数差分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (a_0 = 1) \tag{4.3}$$

具有N个初始条件  $y(-1), y(-2) \cdots y(-N)$

$$h(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^n u(n) & N > M \\ \sum_{j=0}^{N-M} C_j \delta(n-j) + \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^n u(n) & N \leq M \end{cases}$$

### 单位响应求解方法

1. 写出单位样值作用下系统的差分方程，如  $h(n) - 5h(n-1) + 4h(n-2) = \delta(n)$
2. 递推得到单位样值作用时刻系统的输出作为其边界条件之一，如  $h(0)$
3. 写出激励为零时系统的差分方程，并写出N个边界条件，求解该方程即为所求解

$\delta(n)$  的作用相当于在  $n = 0$  时使系统产生一个初态而后激励为零，系统的响应为由该初引起的**零输入响应**。

## Z域法分析

与复频域分析类似，用Z变换代替Laplace变换，对差分方程两边进行Z变换，然后求取Z反变换。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left[ Y(z) + \sum_{i=-k}^{-1} y(i) z^{-i} \right] &= \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \left[ X(z) + \sum_{i=-k}^{-1} x(i) z^{-i} \right] \\ Y(z) &= \frac{-\sum_{k=0}^N a_k \sum_{i=-k}^{-1} y(i) z^{-(i+k)} + \left[ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right] X(z)}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \\ &= \frac{M(z)}{D(z)} + \frac{N(z)}{D(z)} X(z) \\ &= Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z) \end{aligned}$$

系统的**零状态响应**的Z变换与激励的Z变换之比称为系统函数  $H(z)$ ：

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$x(n) = \delta(n)$  时， $X(z) = 1$ ， $H(z) = Y_{zs}(z)$

## 稳定性判别

离散时间系统稳定的充要条件：

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| &\leq M \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h(n) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 五、滤波器

如果利用模拟电路直接对模拟信号 进行滤波处理则构成模拟滤波器，它是一个连续线性时不变系统。如果利用离散时间系统对数字信号进行滤波处理则构成数字滤波器，它是一个离散线性时不变系统。

数字滤波器既可以由硬件（延迟器、乘法器和加法器）实现，也可以由相应的软件实现，还可以用软硬件结合来实现。模拟滤波器只能用硬件实现，其元件是 R、L、C 及运算放大器或开关电容等。因此，数字滤波器的实现要比模拟滤波器方便，且较易获得理想的滤波性能。

### 滤波器的技术指标

通带衰减函数：

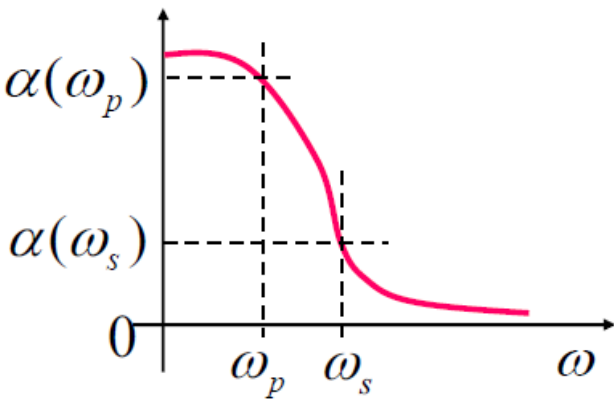
$$\alpha_p = -20 \lg |H(\omega_p)|$$

阻带衰减函数：

$$\alpha_s = -20 \lg |H(\omega_s)|$$

其中  $\omega_p$  为通带截止频率， $\omega_s$  为阻带截止频率。

设计低通滤波器时，通常取  $\alpha_p = 3\text{dB}$ 。



### 模拟滤波器

**中心问题：** 求出一个物理上可实现的传递函数  $H(s)$ ，使它的频率响应尽可能逼近理想的频率特性。

**设计方法：** 根据给定的性能指标——通带和阻带的工作损耗，如通带衰减  $\alpha_p$ 、阻带衰减  $\alpha_s$ ，由频率特性幅度平方函数  $|H(\omega)|^2$  求系统函数  $H(s)$ 。

**$H(s)$  必须满足条件：**

- 是一个具有实系数的  $s$  有理函数；
- 极点分布在  $s$  的左半平面；
- 分子多项式的阶次必须不大于分母多项式的阶次。

此外，一般希望所设计滤波器的冲激响应  $h(t)$  为实函数。

### 由频率特性幅度平方函数 $|H(\omega)|^2$ 求系统函数 $H(s)$

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H(-\omega) = H(s)H(-s)|_{s=j\omega} \tag{5.1}$$

1. 用  $-s^2$  代替  $\omega^2$ ，确定  $H(s), H(-s)$  的零极点（对  $j\omega$  轴呈镜像分布）， $H(s)$  的极点必须位于  $s$  的左半平面。
2. 若要求所设计滤波器为最小相位系统，则  $H(s)$  的零点应分布在左半平面或  $j\omega$  轴上；若有零点在  $j\omega$  轴上，此时零点必为偶阶重零点，要把轴上的零点平分给  $H(s), H(-s)$ ；若不要求所设计为最小相位系统，则零点位置与稳定性无关，可任选。
3. 根据零极点确定传递函数。

Butterworth 低通滤波器

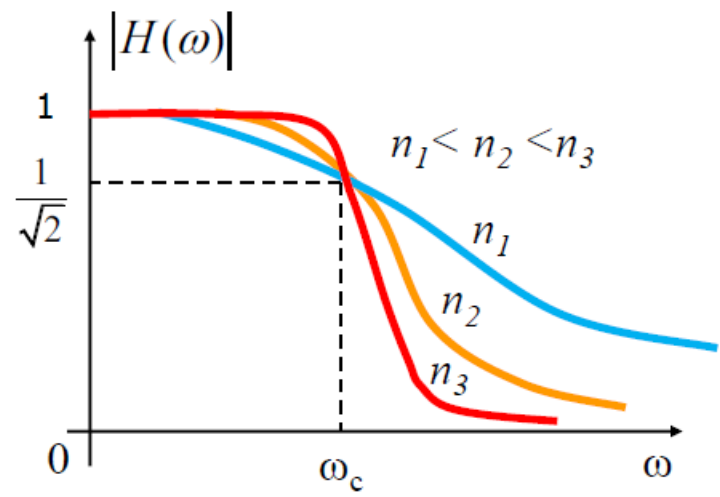
以 *Butterworth* 函数作为传递函数

幅频特性：

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

(5.2)

其中  $\omega_c = \omega_p$  满足  $\alpha_p = 3\text{dB}$  , 即  $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2}$



若阶数为  $n$  , 在  $\omega = 0$  点, 它的前  $(2n - 1)$  阶导数都等于零, 这表明 *Butterworth* 滤波器在附近一段范围内是非常平直的, 它以原点的最大平坦性来逼近理想滤波器。因此, *Butterworth* 低通滤波器也称为**最大平坦幅值滤波器**。

极点分布

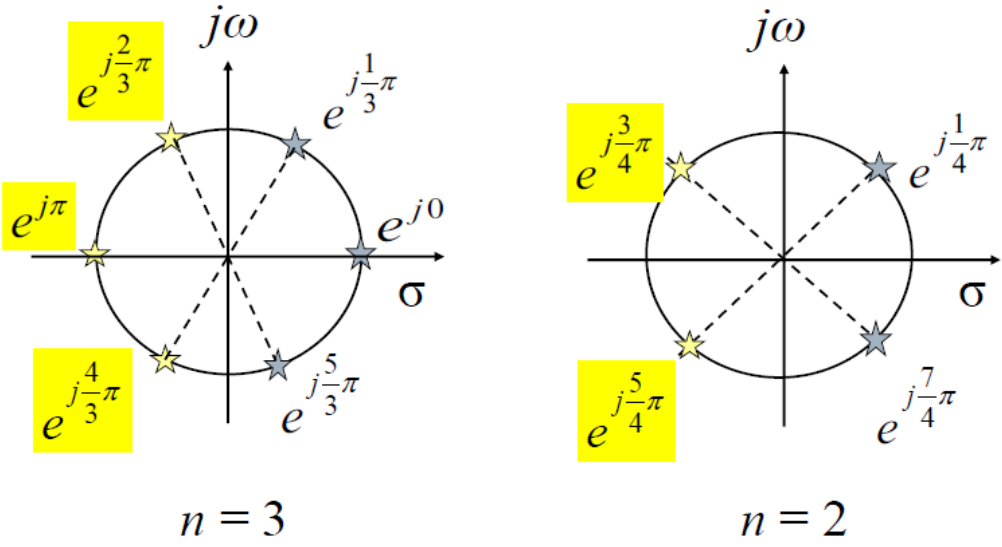
对于  $n$  阶 *Butterworth* 滤波器：

$$|H(\omega)|^2 = H(s)H(-s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}}$$

分母为0, 得到：

$$p_k = j\omega_c(-1)^{\frac{1}{2n}} = \omega_c e^{j\left(\frac{2k-1}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

- $H(s), H(-s)$  的  $2n$  个极点以为间隔均匀分布在半径为  $\omega_c$  的圆上, 这个圆称为 *Butterworth* 圆;
- 所有极点以  $j\omega$  轴为对称轴成对称分布,  $j\omega$  轴上没有极点;
- $n$  为奇数时, 实轴上有极点,  $n$  为偶数时, 实轴上无极点。



阶次  $n$  的确定

取  $\omega_c = \omega_p$  (即  $\alpha_p = 3\text{dB}$ ) , 有：

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg(\omega_s/\omega_c)}$$

(5.3)

传递函数

取全部左半平面的极点为  $H(s)$  的极点：

$$H(s) = \frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}$$

频率归一化

选择截止频率  $\omega_c$  作为参考频率，令  $\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}$ ， $\bar{s}$  称归一化复频率。

查表找到  $n$  阶对应的 *Butterworth* 多项式，则  $H(\bar{s})$  分母为 *Butterworth* 多项式，分子为1。

最后将  $s = \bar{s}\omega_c$  代入。

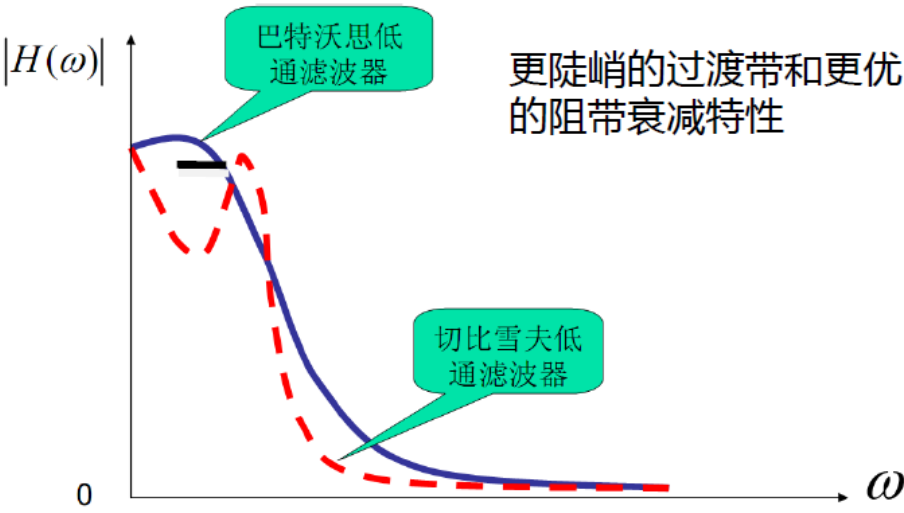
Chebyshev 低通滤波器

由 *Chebyshev* 多项式的正交函数推导得到。

- 在通带内是等波纹的，在阻带内则是单调下降的，称为 *Chebyshev* I 型
- 在通带内是单调的，在阻带内是等波纹的，称为 *Chebyshev* II 型

与 Butterworth 低通滤波器比较

- Butterworth* 低通滤波器的幅频特性，无论在通带与阻带内都随频率而单调变化，**滤波特性简单**。
- Butterworth* 低通滤波器在通带内**误差分布不均匀**，靠近频带边缘误差最大，当滤波器阶数  $n$  较小时，**阻带幅频特性下降较慢，与理想滤波器的特性相差较远**。若要求阻带特性下降迅速，则需增加滤波器的阶数，设计该滤波器时所用元器件数量增多，线路也趋于复杂。
- 若将误差均匀地分布在通带内，从而可设计出阶数较低的滤波器。这种误差均匀分布的办法可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来完成。



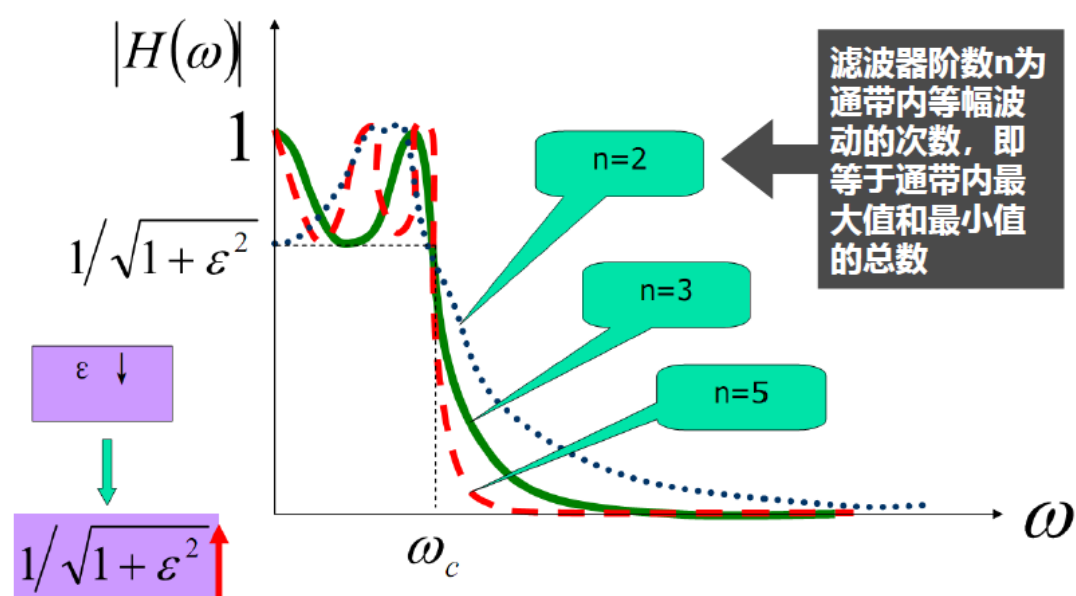
幅频特性

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

其中， $\varepsilon$  是决定通带内起伏大小的波动系数，为小于1的正数； $\omega_c$  为通带截止频率； $T_n(x)$  是  $n$  阶 *Chebyshev* 多项式（由于考试对计算不做要求，此处不做整理）。

*Chebyshev* I 型滤波器有三个参数需要确定： $\varepsilon$ ， $\omega_c$ ， $n$ 。 $\omega_c$  一般按照实际要求给定； $\varepsilon$  表示通带内最大损耗，由容许的通带最大衰减  $\alpha_{max}$  确定。





- 当  $0 \leq \omega \leq \omega_c$  时,  $|H(\omega)|$  在1与  $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$  之间等幅波动,  $\varepsilon$  愈小, 波动幅度愈小;
- 当  $\omega = 0$  时, 若  $n$  为奇数, 则  $|H(\omega)| = 1$ ; 若  $n$  为偶数, 则  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ ; 通带内误差分布是均匀的;
- 所有曲线在  $\omega = \omega_c$  时通过  $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$  点;
- $\omega > \omega_c$  时, 曲线单调下降,  $n$  值愈大, 曲线下降愈快;
- 通带内相频特性有起伏波动, 即相位是非线性的。

## 模拟滤波器的频率转换

将设计好的低通滤波器 ( *Butterworth* , *Chebyshev* 等) 转化为 **高通, 带通或带阻**

以低通转换为高通为例:

1. 归一化后, 低通滤波器通带  $[0, 1]$  , 阻带  $[1, +\infty]$  ;
2. 令  $\omega' = 1/\omega$  , 滤波器低通的通带变换到高通的阻带, 而低通的阻带变换到高通的通带

例题详见课件

## 数字滤波器

输入输出都是数字信号

优点:

- 精度高
- 可靠性高
- 灵活性高
- 便于大规模集成: 数字滤波器可工作于极低频率, 也可比较容易地实现模拟滤波器难以实现的线性相位系统。

## 数字滤波器的原理

设输入序列为  $x(n)$ , 输出序列为  $y(n)$ , 则:

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (5.4)$$

则脉冲传递函数:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

FIR: 若  $a_i = 0$ , 则  $H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$ ,  $h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \cdots + b_M \delta(n-M)$ , 系统函数是  $z^{-1}$  的多项式, 其相应的单位脉冲响应的长度是有限的, 最多有  $M+1$  项。



IIR：若至少有一个  $a_i$  的值不为零，并且分母至少存在一个根不为分子所抵消，例如： $H(z) = \frac{b_0}{1-z^{-1}} = b_0 (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)$   $|z| > 1$ ， $h(n) = b_0[\delta(n) + \delta(n-1) + \dots] = b_0 u(n)$ ，说明该数字滤波器的单位脉冲响应有无限多个，时间长度持续到无限长。

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

- 设计任务：用具有无限多个单位冲激响应的有理函数逼近给定的滤波器幅频特性；
- 间接设计法：借助模拟滤波器的传递函数  $H(s)$  求出相应数字滤波器的传递函数  $H(z)$ 。就是根据给定技术指标的要求，先确定一个满足该指标的模拟滤波器  $H(s)$ ，再寻找一种变换关系把  $s$  平面映射到  $z$  平面，使  $H(s)$  变换成所需数字滤波器的传递函数  $H(z)$

两个基本条件

为了使数字滤波器保持模拟滤波器的特性，保证稳定的模拟滤波器的传递函数，映射为对应的数字滤波器传递函数后，依然保持稳定，需满足：

- $s$  平面的复频率轴必须映射到  $z$  平面的单位圆上；
- 为了保持模拟滤波器的稳定性，必须要求  $s$  平面的左半平面映射到  $z$  平面的单位圆以内。

冲激响应不变法

准则

$$h(n) = h(t)|_{t=nT}$$

设计思路

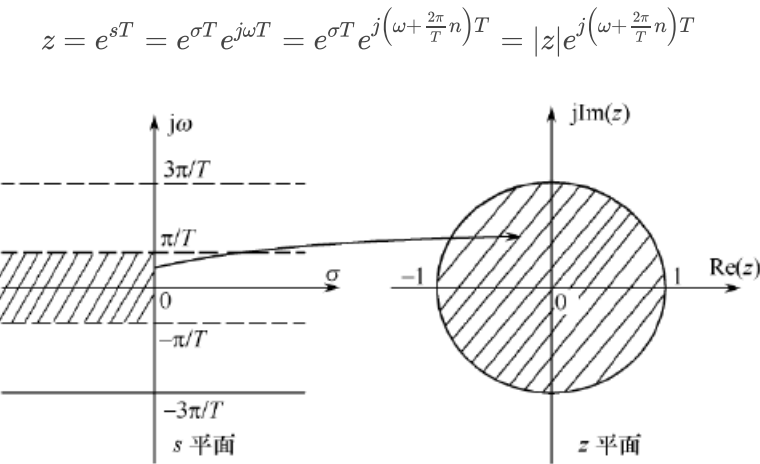
- 根据技术指标确定模拟滤波器  $H(s)$
- 对  $H(s)$  取 *Laplace* 反变换求冲激响应  $h(t)$
- 由冲激响应不变的原则，对  $h(t)$  采样得到  $h(n)$
- 求  $h(n)$  的Z变换，求出数字滤波器  $H(z)$

原理

把  $H(s)$  部分分式展开式中的  $\frac{1}{s-p_i}$  代之以  $\frac{1}{1-e^{p_i T} z^{-1}}$  即可直接得出数字滤波器的传递函数  $H(z)$

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s-p_i} \longleftrightarrow H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{1-e^{p_i T} z^{-1}} \tag{5.6}$$

从  $s$  平面到  $z$  平面的映射



$s$  平面的虚轴映射为  $z$  平面的单位圆，左半平面映射单位圆内，右半平面映射单位圆外；

当  $\sigma$  不变， $\omega$  以  $2\pi/T$  整数倍改变时，映射值不变，也就是将  $s$  平面沿着  $j\omega$  轴分割成一条条宽度为  $2\pi/T$  的水平带，每条水平带都按照前面分析的关系重叠映射成整个  $z$  平面。

特点

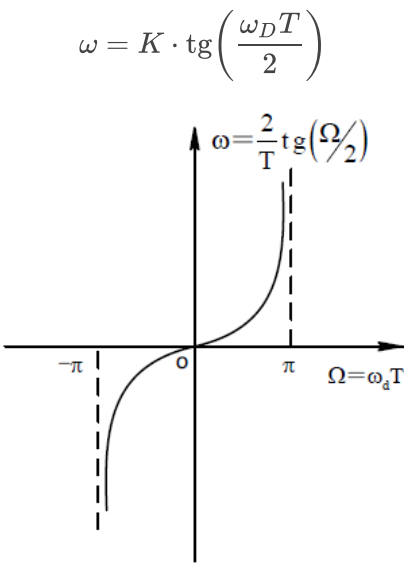
- 模拟滤波器与数字滤波器的频率变换是线性关系，即  $\Omega = \omega T$ ，如果模拟滤波器是线性相位，变换后的数字滤波器也是线性相位；
- 具有较好的时域逼近特性；
- $s$  平面与  $z$  平面间的映射关系不是一一对应的，其多值性容易造成频谱混叠现象，不适用于高通和带阻滤波器。

双线性变换法

频率特性有一一对应关系，可以采用非线性频率压缩方法。

原理

1. 将整个频率轴上的频率范围压缩  $-\pi/T_s$  到  $\pi/T_s$ 之间（后用  $T$  代替  $T_s$ ）：



2. 用  $z = e^{sT}$  转换到  $z$  平面上：

$$s = K \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$
$$z = \frac{K + s}{K - s}$$

一般取  $k = 2/T$ ，即：

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

(5.7)

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

(5.8)

在设计数字滤波器时，设计模拟滤波器所使用的指标应采用公式(5.7)进行非线性转换（预畸变）。

特点

- 双线性变换是  $s$  平面到  $z$  平面一一对应映射关系；
- 双线性变换将  $s$  平面虚轴唯一地映射到  $z$  平面的单位圆，保证了  $H(z)$  的频率响应能模仿  $H(s)$  的频率响应，避免了频率响应混叠现象。
- $s$  平面的虚轴映射为  $z$  平面的单位圆，左半平面映射单位圆内，右半平面映射单位圆外，保证了  $H(z)$  和  $H(s)$  相比，其稳定性不发生变化。

步骤

1. 将技术指标中数字角频率  $\Omega$  利用公式(5.7)转换为模拟角频率  $\omega$ ，按转换后的技术指标设计模拟滤波器并得到系统传递函数  $H(s)$ ；
2. 将  $H(s)$  按照公式(5.8)变换得到  $H(z)$ 。

有限冲激响应（FIR）数字滤波器

定性考核

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} = \sum_{i=0}^M h(i) z^{-i}$$

$h(n)$  长度为  $M + 1$  。

设所期望的理想滤波器的频率特性为  $H_d(\Omega)$ ，设计FIR数字滤波器，其频率特性为  $H(\Omega)$ ，使其逼近  $H_d(\Omega)$ 。

特点

- 1. 很容易的获得严格的线性相频特性；
- 2. 一定是稳定的（极点只有  $z = 0$ ）；
- 3. 可以用 FFT 实现，可以大大提高运算效率；
- 4. 当充分逼近锐截止滤波器时，要求较长的脉冲响应序列  $h(n)$ ,  $N$  取值很大，运算量大大增加。

FIR滤波器具有线性相位特性的条件

如果FIR 数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$ （设长度为  $N$ ）是实数序列，且满足以下任一条件：

- 偶对称： $h(n) = h(N - 1 - n)$
- 奇对称： $h(n) = -h(N - 1 - n)$

则该数字滤波器具有严格的线性相位特性。

窗函数法

原理

取：

$$h(n) = h_N(n) = h_d(n)w_N(n)$$

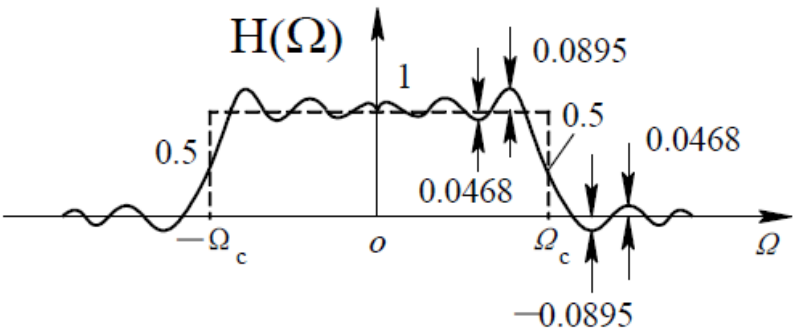
其中  $w_N(n)$  为窗函数，使频率特性均方误差为最小。

$h(n)$  必须是因果、有限长序列，且为偶对称或奇对称（满足线性相位特性的条件）

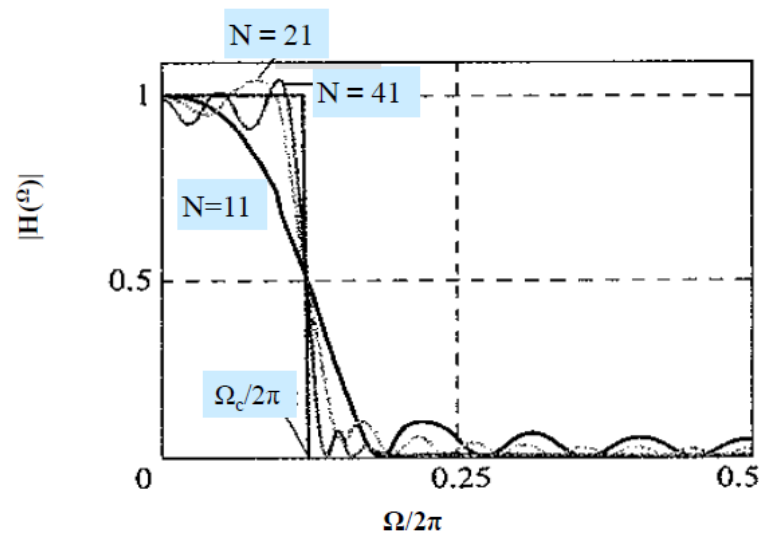
特点

- 1. 窗函数法设计FIR数字滤波器在时域内进行；
- 2. 窗函数法不需借助原型模拟滤波器；
- 3. 窗函数法是用一个因果性的、有限长的序列  $h(n)$  的频率特性去逼近非因果的、无限长的序列  $h_d(n)$  的频率特性  $H_d(\Omega)$ （理想滤波器的频率特性）。

窗函数对频率特性的影响



- 1. 过渡带宽度等于窗函数  $w_N(n)$  频率响应  $W_N(\Omega)$  的主瓣宽度，窗函数主瓣越宽，过渡带越宽；
- 2. 截止频率  $\Omega_c$  两侧  $H(\Omega)$  出现最大过冲值，过冲两侧形成振荡，其振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度，而振荡的多少，则取决于旁瓣的多少。因此，增加窗函数的长度N只能减少过渡带宽度，但不能改变主瓣和旁瓣的相对值，即不能改变过冲值。



Gibbs 现象：在矩形窗情况下，最大相对过冲值总是8.95%。

窗函数的选择

$W_N(\Omega)$  主瓣应该尽可能窄，以获得较陡的过渡带；

尽量减少窗函数频谱的（最大）旁瓣的相对幅度，使能量尽量集中于主瓣、减少过冲，平滑通带以及增大对阻带的衰减（即，得到较小的阻带纹波）。

步骤（或许不做要求？）

## 六、梳理

待补充

三种卷积之间的联系

- 周期卷积是线性卷积的周期延拓
- 圆周卷积是周期卷积的主值序列
- 圆周卷积是线性卷积周期延拓后取主值序列

表2-3DTFT对称性质

## 七、问题整理

待补充