第八章　状态空间模型分析与设计

吴俊

junwuapc@zju.edu.cn

内容

- 回顾与简介
- 状态空间模型及求解
- 可控性和可观性
- 线性变换和标准型
- **SISO 系统状态反馈**
- 状态反馈: 稳态误差分析
- **SISO** 系统状态观测器
- ……………

SISO系统状态反馈——内容

- SISO 系统状态反馈
  - 基本概念 (通过状态反馈从开环到闭环)
  - 闭环线性系统的可控性与可观测性
  - 状态变量反馈设计
    - 直接法
    - 相变量法（可控标准型法）
    - 物理变量法
  - 状态反馈的一般特性 (采用相变量)
  - 状态变量反馈示例
    - 全极点系统
    - 零极点系统

SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

回顾: 如图(1), 若 $G_o(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ $G_c(s)=K_c$

系统的根轨迹 (随 K_c 变化) 如图(2)所示。但是无法得到[s]平面具有任意期望闭环极点（复数极点需共轭）的根轨迹, 这些闭环极点是由系统特性决定的. 该怎么办?

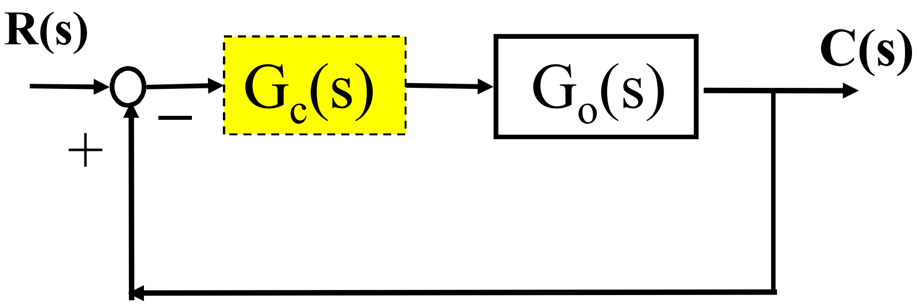


Fig. (1)

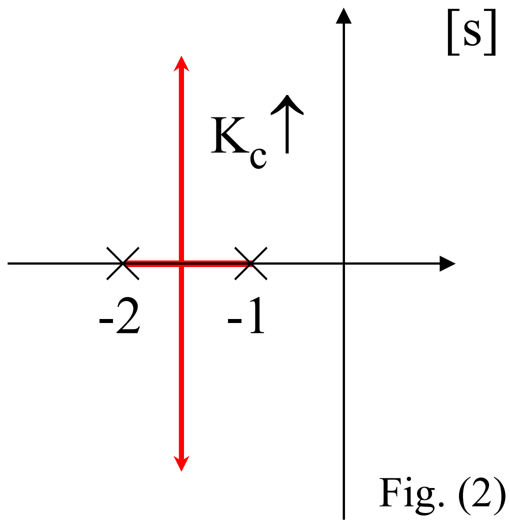


Fig. (2)

SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

回顾: 开环系统 $G_o(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$　　需要闭环极点为 **-5** 和 **-6**

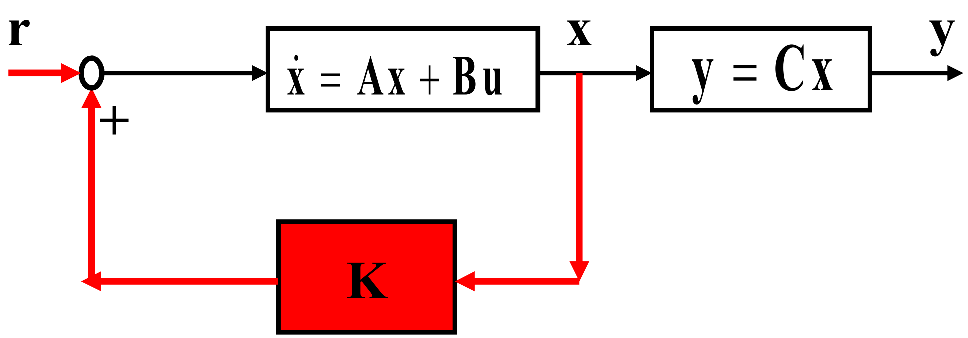
闭环系统 $G_{cl}(s) = \dfrac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} = \dfrac{1}{s^2-(p_1+p_2)s+p_1p_2}$

开环系统状态空间模型　$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$\mathbf{y} = C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

$\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{Kx}$



$$\Sigma_{cl} : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{Kx})$$
$$= (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Br} = \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x} + \mathbf{Br}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_1p_2 & p_1+p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$

设计 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ 满足 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_1p_2 & p_1+p_2 \end{bmatrix}$

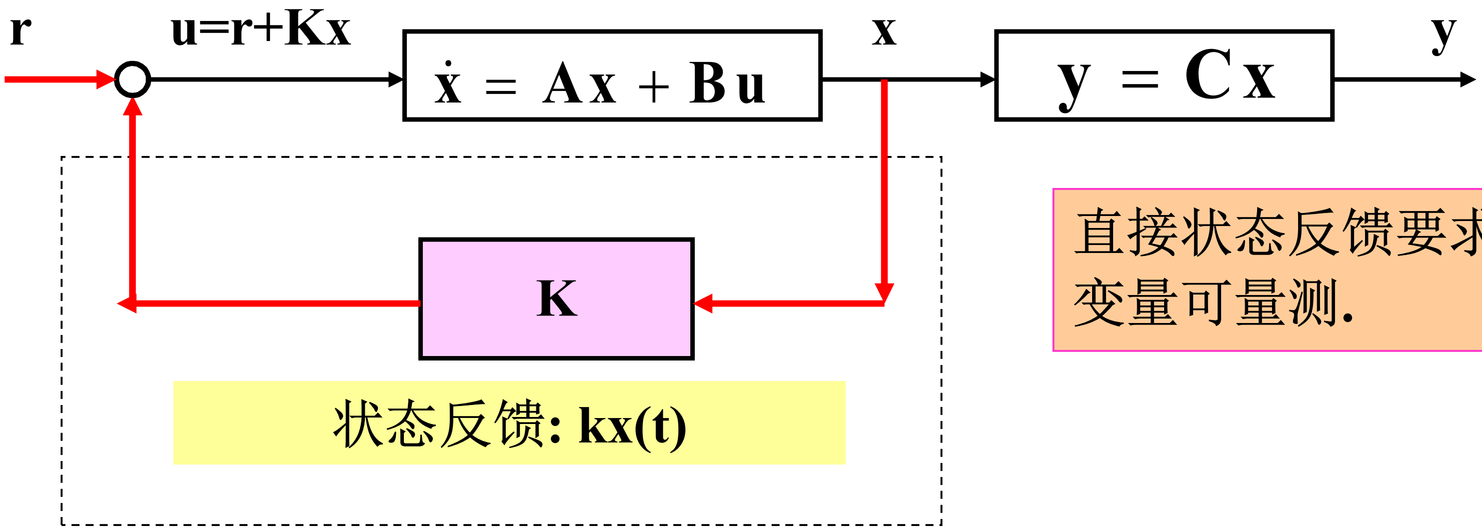
$\forall p_1, p_2$

$\begin{cases} k_1 = -p_1p_2 + 2 \\ k_2 = p_1 + p_2 + 3 \end{cases}$ 满足要求

SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

设计状态反馈控制器需要满足什么条件?

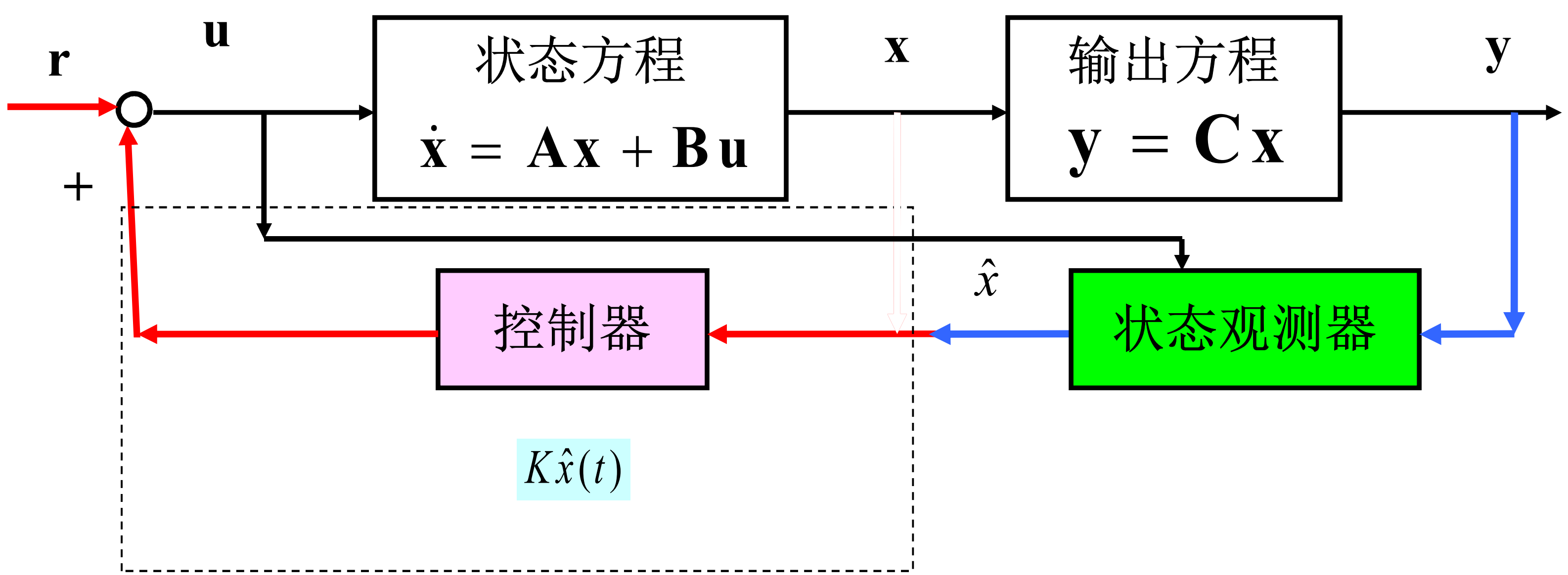


直接状态反馈要求状态变量可量测.

SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

若状态变量不可量测, 但是系统可观, 实时状态变量则可以由系统的输入输出估计得到, 如图所示. 估计器被称为状态观测器.



基于观测器的状态反馈要求系统可观.

SISO 系统状态反馈

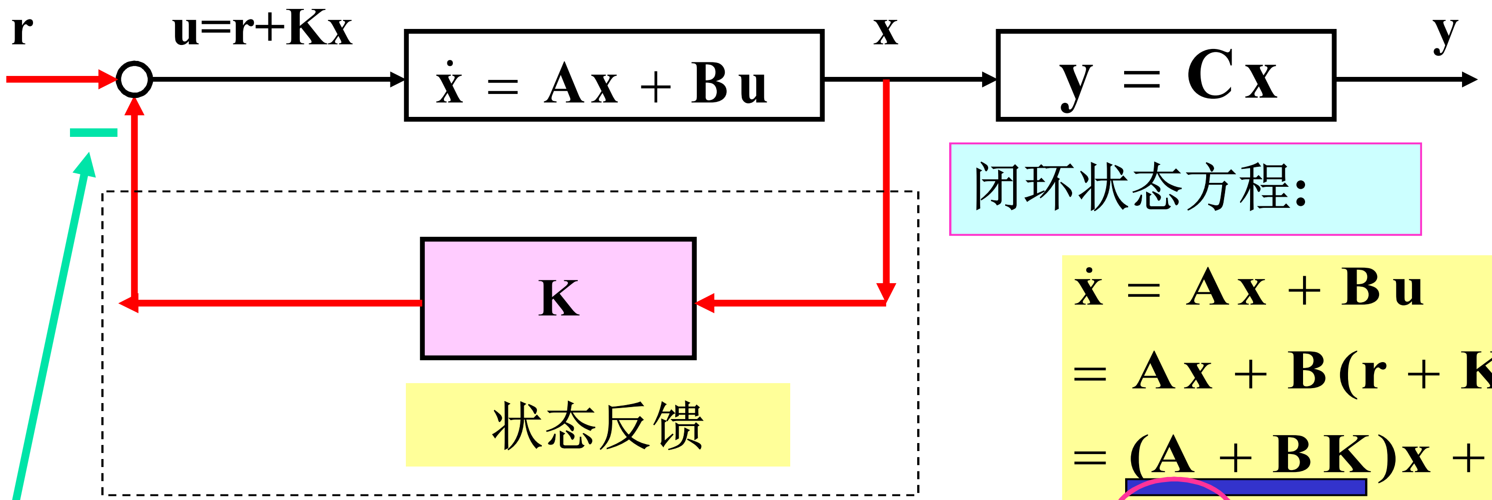
1. 基本概念 (从开环到闭环)

系统状态空间模型为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

状态反馈控制率为:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{K}\mathbf{x}$$



闭环状态方程:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{K}\mathbf{x}) \\ &= \underline{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} \\ &= \underline{\mathbf{A}_{cl}}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}\end{aligned}$$

闭环系统矩阵

有些教材采用

$\dot{x} = (A - BK)x + Br$

SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

状态反馈之后的 闭环特征方程为:

$$\because A_{cl} = (A + BK)$$

$$\mathbf{Q}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl}| = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}| = 0$$

状态反馈阵, 可以根据需要来设计

假设期望的 闭环极点为 λ_i, 那么

$$\Delta^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

状态反馈不改变系统的零点，不改变不能控子系统的极点，可任意改变能控子系统的极点（复极点需共轭）

定义：对系统(A,B)，若存在矩阵K使$(A+BK,B)$稳定，称(A,B)可镇定

(A,B)可镇定，当且仅当(A,B)的不能控子系统稳定

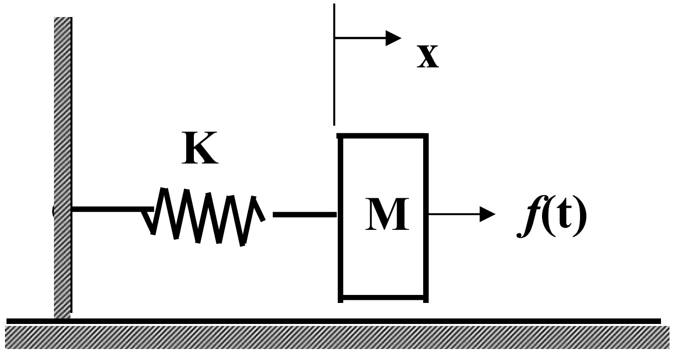
定理1：用状态反馈进行极点任意配置（复极点需共轭）的充要条件是系统完全能控

SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

Example 8-5-1 考虑一个无阻尼(ξ＝0)振荡器，希望将阻尼增加到 1,使2个极点均位于－$2\omega_0$。

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$



Simple mass-spring mechanical system

$$M\ddot{x} = f - Kx$$

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

$M = 1$

Solution: (1) 能控性矩阵的秩为

$$\text{Rank } M_C = \text{Rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = n$$

因此系统是 完全能控的. 可用状态反馈任意配置闭环极点。

假设状态变量可获得, 则状态反馈控制器可以实现，且 **K=[k_1 , k_2].**

SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

Example 8-5-1 考虑一个无阻尼($\xi=0$)振荡器，希望将阻尼增加到1,使2个极点均位于$-2\omega_0$。

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

(2) 闭环特征方程

$$\mathbf{Q}(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{BK}|=\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right|$$
$$=\lambda^2-k_2\lambda+\omega_0^2-k_1=0$$

(3) 期望的闭环特征方程

$$\Delta^*(\lambda)=(\lambda+2\omega_0)^2=\lambda^2+4\omega_0\lambda+4\omega_0^2=0$$

(4) $Q(\lambda)$ 和 $\Delta^*(\lambda)$ 对应项系数相等

$$-k_2=4\omega_0,\quad \omega_0^2-k_1=4\omega_0^2$$

$$K=[k_1\ \ k_2]=[-3\omega_0^2,\ \ -4\omega_0]$$

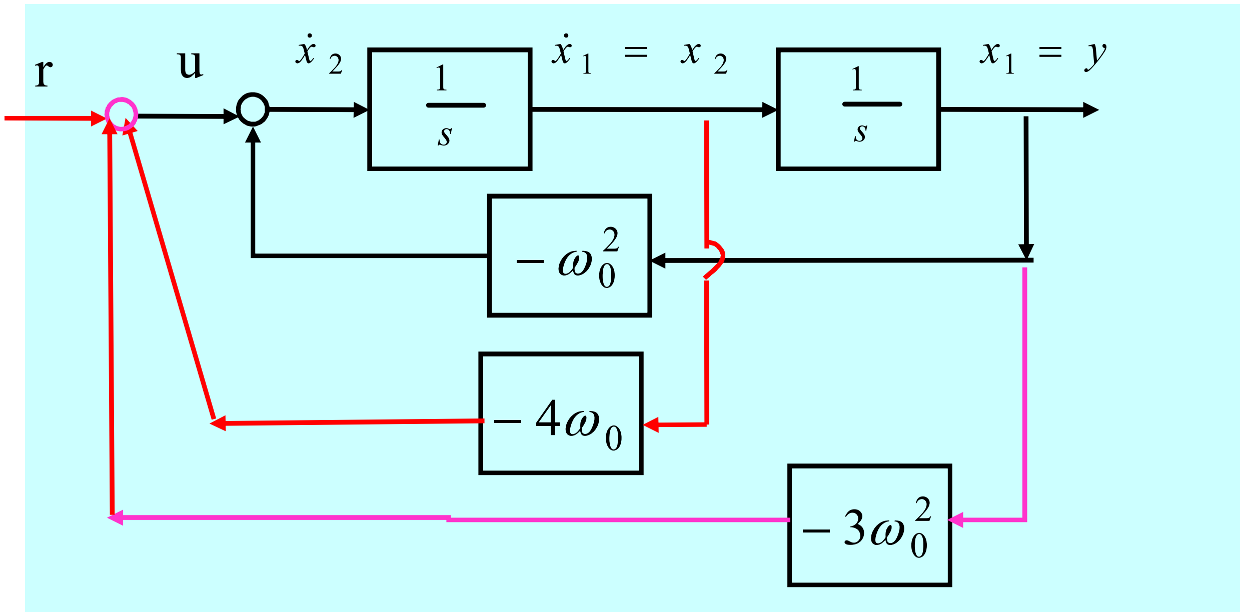
SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

Example 8-5-1 考虑一个无阻尼(ξ＝0)振荡器, 希望将阻尼增加到 1, 使2个极点均位于$-2\omega_0$。

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$K = [k_1 \ \ k_2] = [-3\omega_0^2, \ -4\omega_0]$$



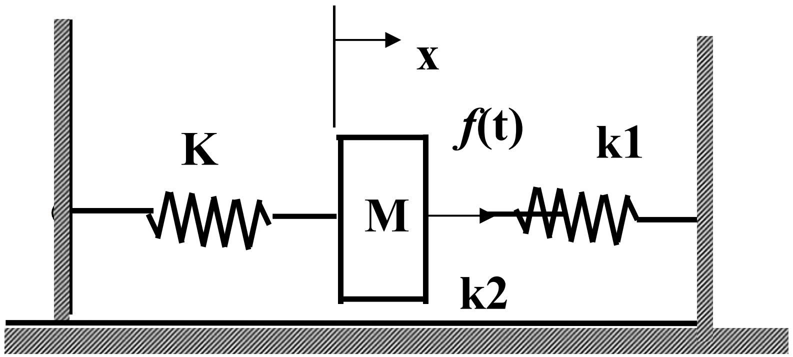
SISO 系统状态反馈

1. 基本概念 (从开环到闭环)

Example 8-5-1 考虑一个无阻尼($\xi=0$)振荡器, 希望将阻尼增加到 1, 使2个极点均位于$-2\omega_0$。

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$K=[k_1\ \ k_2]=[-3\omega_0^2,\ -4\omega_0]$$



With feedback

SISO 系统状态反馈

2. 闭环系统的能控性与能观性

问题1：闭环系统$(A+BK,B,C)$的能控性与开环系统(A,B,C)的能控性有何关系？

问题2：闭环系统$(A+BK,B,C)$的能观性与开环系统(A,B,C)的能观性有何关系？

定理2：对任意n阶系统(A,B,C)和维数匹配的任意状态反馈增益阵K，成立

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & (A+BK)B & \cdots & (A+BK)^{n-1}B \end{bmatrix}$$

证明：略

状态反馈不改变系统的能控性

存在n阶系统(A,B,C)和维数匹配的状态反馈增益阵K，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \neq \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ C(A+BK) \\ \vdots \\ C(A+BK)^{n-1} \end{bmatrix}$$

状态反馈可能改变系统的能观性

SISO 系统状态反馈

2. 闭环系统的能控性与能观性

Example 8-5-2 系统表示为

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

当状态反馈阵 **K=[0, -4]**,

试确定系统 Σ 和系统 Σ_{cl}的能控性和能观性?

Solution:

$$A+BK=\begin{bmatrix}1 & 2\\ k_1 & 3+k_2\end{bmatrix}$$

(1) 能控性

$$\Sigma:\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=2$$

$$\Sigma_{cl}:\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\mathrm{b} & (\mathrm{A}+\mathrm{bK})\mathrm{b}\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3+k_2\end{bmatrix}=2$$

(2) 能观性

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{cA}\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}=2$$

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{c}(\mathrm{A}+\mathrm{bK})\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1+k_1 & 5+k_2\end{bmatrix}=1$$

说明：状态反馈实现了极点的任意配置，将有可能影响能观性。

- 产生零极点相消：原来能观系统→不能观系统
- 消除零极点相消：原来不能观系统→能观系统

$$G=\frac{s+1}{(s-1)(s-3)}$$

$$G_k=\frac{s+1}{(s-1)(s+1)}$$

2. 闭环系统的能控性与能观性

问题：怎样的反馈控制不会改变系统的能控性与能观性？

静态输出反馈控制 **u=r+Ky=r+KCx** 不会改变系统的能控性与能观性

$$\Sigma_{cl}: \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{BKy} + Br = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{BKCx} + Br = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BKC})\boldsymbol{x} + Br$$

- 定理3 受控系统Σ｛**A**，**B**，**C**｝采用静态输出反馈控制 **u=r+Ky=r+KCx** 构成闭环系统Σ_{cl}｛**A**＋**BKC**，**B**，**C**｝，则闭环系统Σ_{cl}的能控性和能观性完全等价于原系统Σ 的能控性与能观性。换言之，静态输出反馈控制不影响系统的能控性与能观性。

证明(略）

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 直接法

Example 8-5-5 系统表示为

$$\Sigma: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试确定状态反馈增益阵 **K**,

使得闭环极点为 **-1, -1, -1.**

Solution: (1) 易知系统完全能控 (2) 闭环特征方程为

$$\mathbf{Q}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \lambda^3 + (-1 - k_3)\lambda^2 + (-2 - k_2)\lambda - k_3 - k_1$$

(3) 期望的闭环特征方程为 $\Delta^* = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$

(4) 两个闭环特征方程的对应项系数相等

$$3 = -1 - k_3 \Rightarrow k_3 = -4$$

$$3 = -2 - k_2 \Rightarrow k_2 = -5$$

$$1 = k_3 - k_1 \Rightarrow k_1 = -5$$

$$K = [-5 \quad -5 \quad -4]$$

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 直接法

Example 8-5-6 系统表示为

$$G(s)=\frac{K_p(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

试确定状态反馈阵 **K**, 使得闭环系统极点为-5，-6, 且对阶跃输入的稳态误差为零。

Solution: (1) 对角型状态模型为

$$\Sigma: \dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}K_p\\ K_p\end{bmatrix}u \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}_1$$

(2) 能控性？

$$\text{Rank } M_C=\text{Rank}\begin{bmatrix}K_p & -2K_p\\ K_p & -K_p\end{bmatrix}=2$$

因此系统是 完全能控.

(3) 闭环特征方程

$$|\lambda I-A-BK|=\lambda^2+(3-K_pk_1-K_pk_2)\lambda+(2-K_pk_1-2K_pk_2)$$

期望闭环特征方程

$$(\lambda+5)(\lambda+6)=\lambda^2+11\lambda+30$$

$$3-K_pk_1-K_pk_2=11$$

$$2-K_pk_1-2K_pk_2=30$$

$$k_1=\frac{12}{K_p} \qquad k_2=-\frac{20}{K_p}$$

(4) 用终值定理计算输出稳态值

$$Y(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}\frac{K_p(s+1)}{s^2+(3-K_pk_2-K_pk_1)s+2-2K_pk_2-K_pk_1}=1$$

$$K_p=2-2K_pk_2-K_pk_1 \qquad K_p=\frac{2}{1+2k_2+k_1}$$

$$k_1=\frac{2}{5} \qquad k_2=-\frac{2}{3} \qquad K_p=30$$

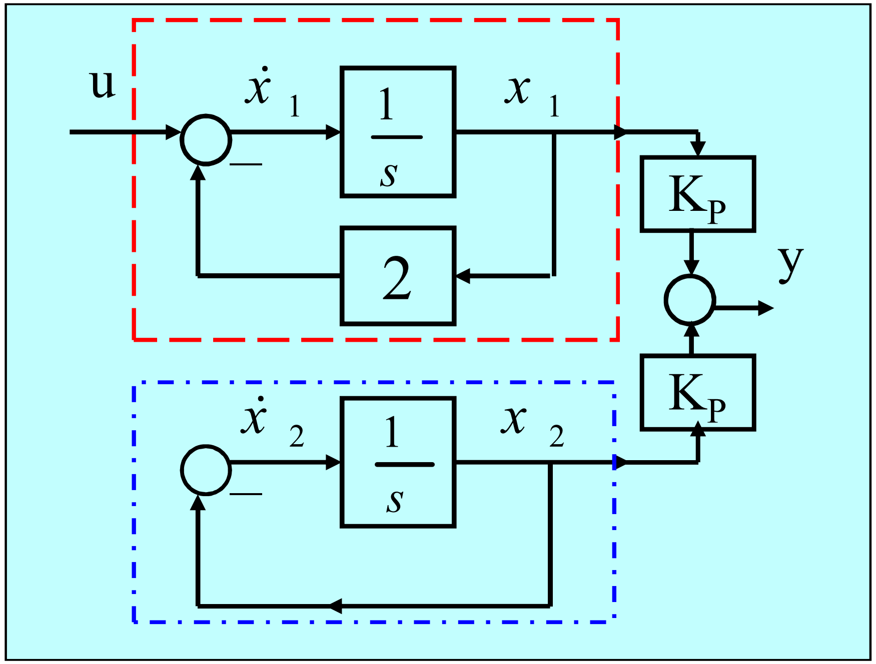
SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 直接法

Example 8-5-6-1 系统表示如下图

试确定状态反馈阵 **K**,

使得闭环极点位于**-5,-6**



Solution: (1) 如图所示状态模型为

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} K_p & K_p \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

(2) 能控性 ?

因此，系统是不完全能控的.

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 直接法

若系统不完全能控, 则不能通过状态反馈来任意配置闭环极点.

Solution: (3) 闭环特征方程

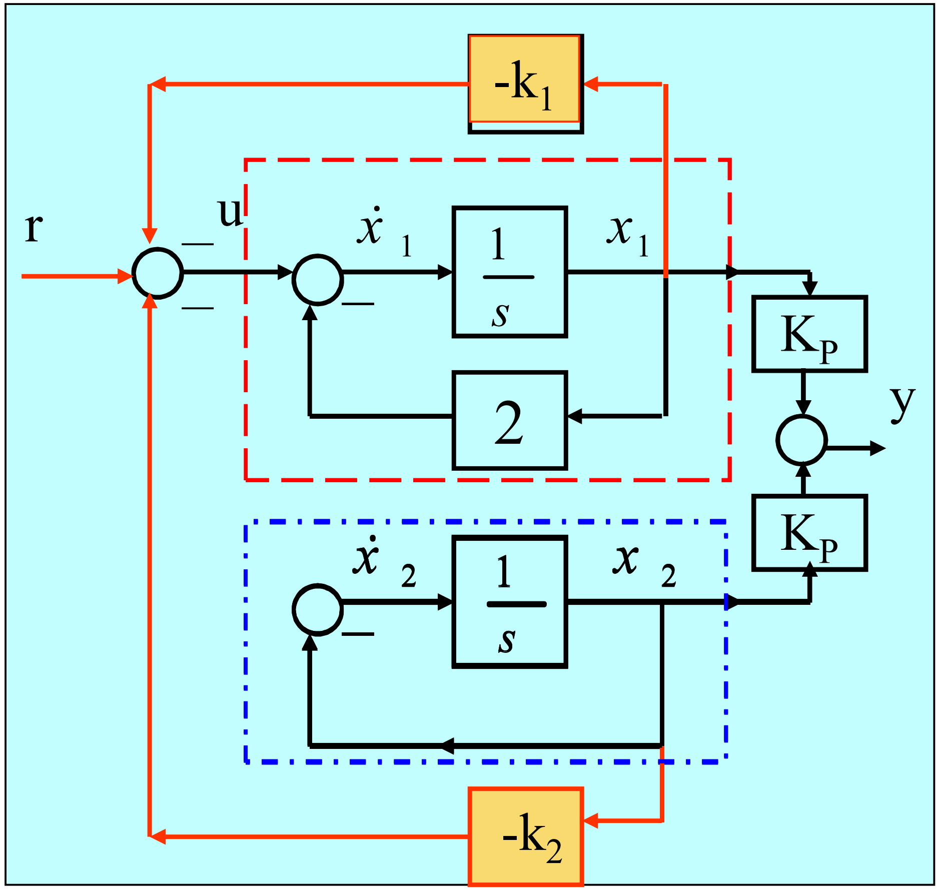
$$Q(\lambda)=\left|\lambda I-A-BK\right|=\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right|$$

$$=\lambda^2+(3-k_1)\lambda+2-k_1$$

闭环传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_p(s+1)}{(s+2-k_1)(s+1)}=\frac{K_p}{s+2-k_1}$$

因此 s_1 = -2 经状态反馈之后变为 s_1 = $-2+k_1$, 其中 k_1 可以按照闭环极点期望值进行配置. 但是不能控极点 s_2 = -1 不能通过状态反馈来改变.



SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 直接法

总结：对于一个给定系统状态反馈 K 的设计问题:

$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u}$ $\quad \mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{K}\mathbf{x}$ $\quad \sum_{cl:} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{A}_{c1}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}$

(1) 检查 系统的能控性

(2) 计算 闭环 特征方程 Q(λ)=det(λ I-A-BK)

$$\mathbf{Q}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}| = \lambda^n + g_{n-1}(K)\lambda^{n-1} + g_{n-2}(K)\lambda^{n-2} + \cdots + g_1(K)\lambda + g_0(K)$$

(3) 计算具有期望特征值λ_I $(i=1,2,\ldots,n)$的 期望 特征方程

$$\Delta^* = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

通常, 求解n个方程是比较困难的, 怎么样简化求解呢?

(4) 两个闭环特征方程的对应项系数相等

解 n 个方程: $g_i(K) = \beta_i$ $\quad \mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

示例 8-5-5, 8-5-6 是低阶的, 因此状态反馈阵 K 的代数解可以很容易直接计算得到. 对于 高阶 系统, 计算就比较麻烦了. 有一种简化方法.

首先, 转换状态方程为能控标准型, 因此系统矩阵为友矩阵.

然后, 设计能控标准型下的状态反馈增益阵 K_C. 通过这种方法可以简化设计过程.

得到矩阵 K_C 之后, 根据 K_C 计算实际可执行的状态反馈增益阵 K_P.

对于一个状态空间表达式描述的完全能控SISO控制系统, 配置期望的闭环特征值, 状态反馈增益阵K 是唯一的.

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

给定SISO 系统: $\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p\mathbf{u};\ \ \mathbf{y} = \mathbf{c}_p\mathbf{x}_p$

设计状态反馈阵 $\mathbf{K}_p$以得到期望的闭环极点为 $\lambda_i\ (i=1,2,\ldots,n)$

设计步骤

(1) 确定 系统的能控性

$\mathrm{Rank}\ \mathrm{M}_C = n\,?$

完全能控 ↓

不完全能控 → 无解或无穷多解

(2) 列写开环 特征多项式

$$\Delta = \det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_p] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

$$\Delta = \det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_p] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

设计步骤

(3) 构造矩阵 $\mathbf{T}_c$, 将一般的状态方程转换为能控标准型.

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p \mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}_p \mathbf{x}_p$$

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{T}_c \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}_p\mathbf{T}_c\mathbf{x} + \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{b}_p\mathbf{u} = \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{b}_c\mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}_c\mathbf{x}$$

其中能控标准型状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

(4) 采用状态反馈阵 $\mathbf{k}_c = \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} & \cdots & k_{cn} \end{bmatrix}$

形成闭环反馈控制系统: $\dot{x} = A_c x + b_c(r + k_c x) = (A_c + b_c k_c)x + b_c r = A_{ccl}x + b_c r$

$$\mathbf{A}_{ccl} = \mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} & \cdots & k_{cn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 + k_{c1} & -a_1 + k_{c2} & \cdots & -a_{n-2} + k_{c(n-1)} & -a_{n-1} + k_{cn} \end{bmatrix}$$

闭环反馈系统特征方程: $\Delta_k = \lambda^n + (a_{n-1} - k_{cn})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_{c2})\lambda + (a_0 - k_{c1})$

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

设计步骤

闭环反馈系统特征方程：$\Delta_k = \lambda^n + (a_{n-1} - k_{cn})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_{c2})\lambda + (a_0 - k_{c1})$

(5) 选择 期望的特征根，从而获得相应的闭环方程

$$\Delta^* = Q_{cl}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$
$$= \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta\lambda + \beta_0$$

(6) 令 期望特征方程 和 反馈闭环系统特征方程相等，求解矩阵 $\mathbf{k}_c$的元素

$$\begin{aligned} \beta_0 &= a_0 - k_{c1} \\ \beta_1 &= a_1 - k_{c2} \\ &\vdots \\ \beta_{n-1} &= a_{n-1} - k_{cn} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} k_{c1} &= a_0 - \beta_0 \\ k_{c2} &= a_1 - \beta_1 \\ &\vdots \\ k_{cn} &= a_{n-1} - \beta_{n-1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{ci} = \boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \boldsymbol{\beta}_{i-1} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

设计步骤

(7) 计算原状态反馈阵 $\mathbf{k}_p$

开环 系统方程.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{b}_c\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{x}_p$$

$$T_c^{-1}\dot{x}_p = A_cT_c^{-1}x_p + b_cu$$

$$\dot{x}_p = T_cA_cT_c^{-1}x_p + T_cb_cu = A_px_p + b_pu$$

闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = (\boldsymbol{A}_p + \boldsymbol{b}_p\boldsymbol{k}_p)\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p\boldsymbol{r}$$

闭环 系统方程

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c)\mathbf{x} + \mathbf{b}_c\mathbf{r}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{x}_p$$

$$T_c^{-1}\dot{x}_p = (A_c + b_ck_c)T_c^{-1}x_p + b_cr$$

$$\dot{x}_p = T_c(A_c + b_ck_c)T_c^{-1}x_p + T_cb_cr = (T_cA_cT_c^{-1} + T_cb_ck_cT_c^{-1})x_p + T_cb_cr$$

$$\dot{x}_p = (A_p + b_pk_cT_c^{-1})x_p + b_pr$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_c\mathbf{T}_c^{-1}$$

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

Example 8-5-7-1 系统表示为

$$\Sigma:\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

试确定状态反馈阵 **K,**

将闭环极点配置到 **-1, -1, -1.**

Solution: (1) 能控性？

$$\operatorname{Rank} M_C=\operatorname{Rank}\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\operatorname{Rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}=3$$

因此系统是 完全能控的.

(2) 列写开环 特征多项式

$$\Delta=\det[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\det\begin{bmatrix}\lambda&-1&0\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{bmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+0 \Rightarrow \begin{aligned}a_2&=-1\\a_1&=-2\\a_0&=0\end{aligned}$$

$$M_C=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

ISO 系统状态反馈

状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

$$a_2=-1$$
$$a_1=-2$$
$$a_0=0$$

Example 8-5-7-1系统表示为

$$\Sigma: \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

试确定状态反馈阵 **K**,

将闭环极点配置到 **-1, -1, -1.**

Solution: (3) 构造矩阵 **T**, 将一般的状态方程转换为能控标准型.

$$\mathbf{x}_p=\mathbf{T}_c\mathbf{x}$$

$$\mathbf{T}_c=\mathbf{M}_C\mathbf{L}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_c^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c=\mathbf{A}_c\mathbf{x}+\mathbf{b}_c\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}_c=\mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_c=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&2&1\end{bmatrix}, \mathbf{b}_c=\mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

可以不列写

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

$$\mathbf{T}_c^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

Example 8-5-7-1系统表示为

$$\Sigma:\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

试确定状态反馈阵 **K**,

将闭环极点配置到 **-1, -1, -1.**

Solution: (4) 列写具有期望特征根的 (-1,-1,-1) 闭环特征多项式

$$\Delta^*=(\lambda+1)^3=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$$

$$\beta_0=1\quad \beta_1=3\quad \beta_2=3$$

(5) 能控标准型下的状态反馈阵$\mathbf{k}_c$

$$k_{c1}=a_0-\beta_0=0-1=-1$$
$$k_{c2}=a_1-\beta_1=-2-3=-5$$
$$k_{c3}=a_2-\beta_2=-1-3=-4$$

$$\Delta=\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+0$$

$$a_2=-1\quad a_1=-2\quad a_0=0$$

(6) 计算反馈矩阵 $\mathbf{k}_p$

$$\mathbf{k}_p=\mathbf{k}_c\mathbf{T}_c^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-5&-4\end{bmatrix}$$

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 采用能控标准型（相变量法）

前面2种设计状态反馈的方法

直接法

能控标准型法

直接设计法：适用于低阶系统（如二阶或B阵中只有1个1，其余均为0的三阶系统），否则有可能会遇到求解 n 个方程的复杂问题

标准型的设计法：先将已知的系统转换到能控标准型，设计出能控标准型下的状态反馈矩阵，然后再变换到原来状态空间下的状态反馈阵。

关键：(1)变换矩阵T_c?

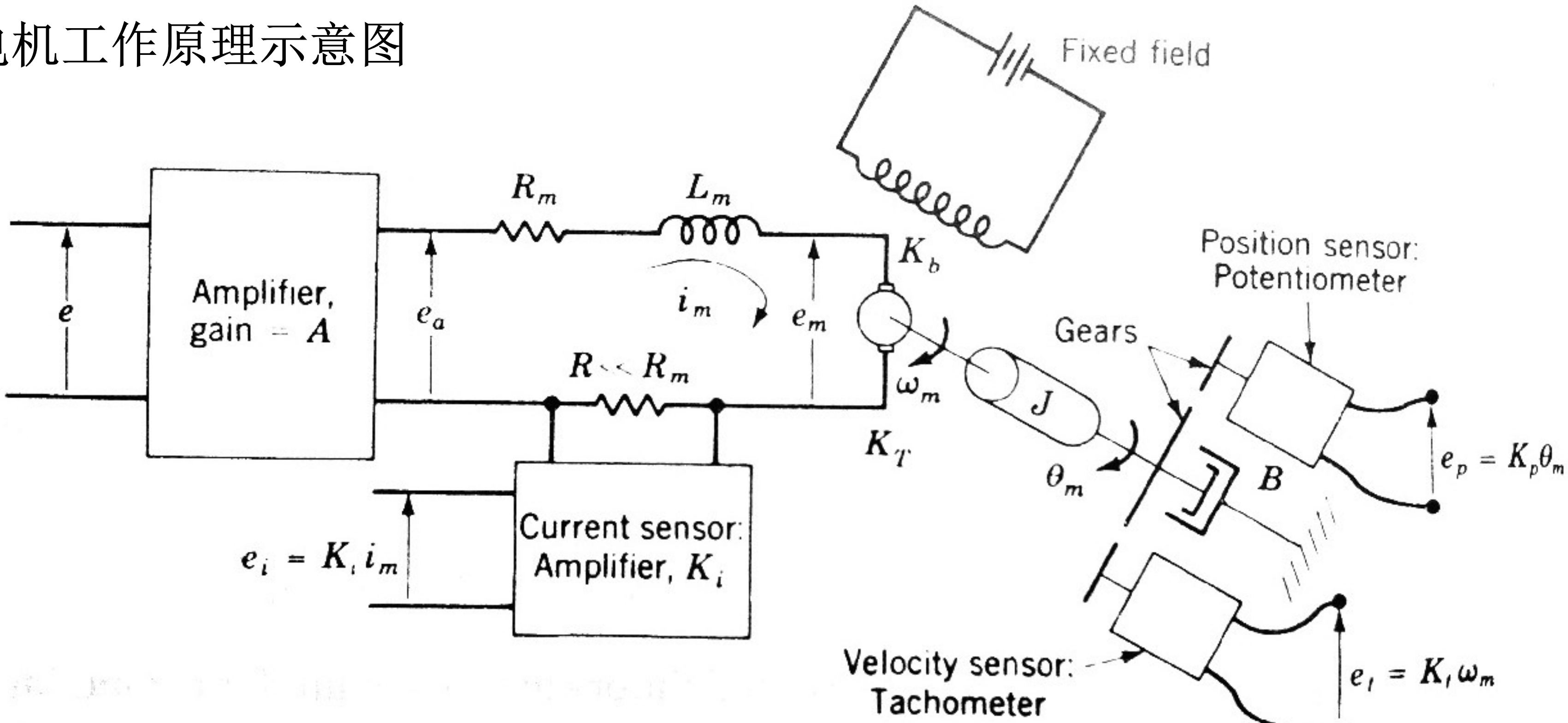
(2)求出能控标准型下的Kc后，一定要记住变换至原状态空间 $\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_c T_c^{-1}$

标准型的设计法为人们提供了一种标准的直接求解状态反馈矩阵K的设计过程，从而可以借助计算机来完成。

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 物理变量法

电机工作原理示意图



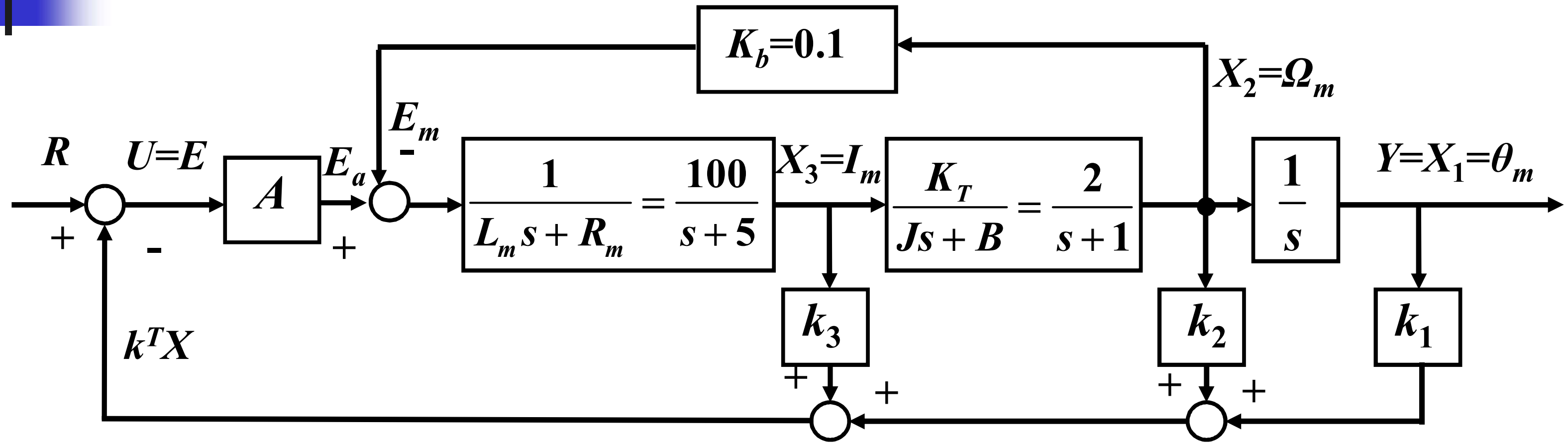
$$e_a = Ae, \quad e_a - e_m = (R_m + L_m D)i_m, \quad e_m = K_b\omega_m$$

$$T = K_T i_m = JD\omega_m + B\omega_m, \ \omega_m = D\theta_m$$

为了得到最多的可测状态, *经常选取状态量为物理变量.*

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 物理变量法



(a)

图(a)表示闭环位置控制系统的方框图. 每个状态变量经放大器进行反馈，其放大倍数（增益） $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$ 和 $\mathbf{k_3}$ 称为反馈系数 (包括传感器常数，以及其他系统设计所需要的附加增益).

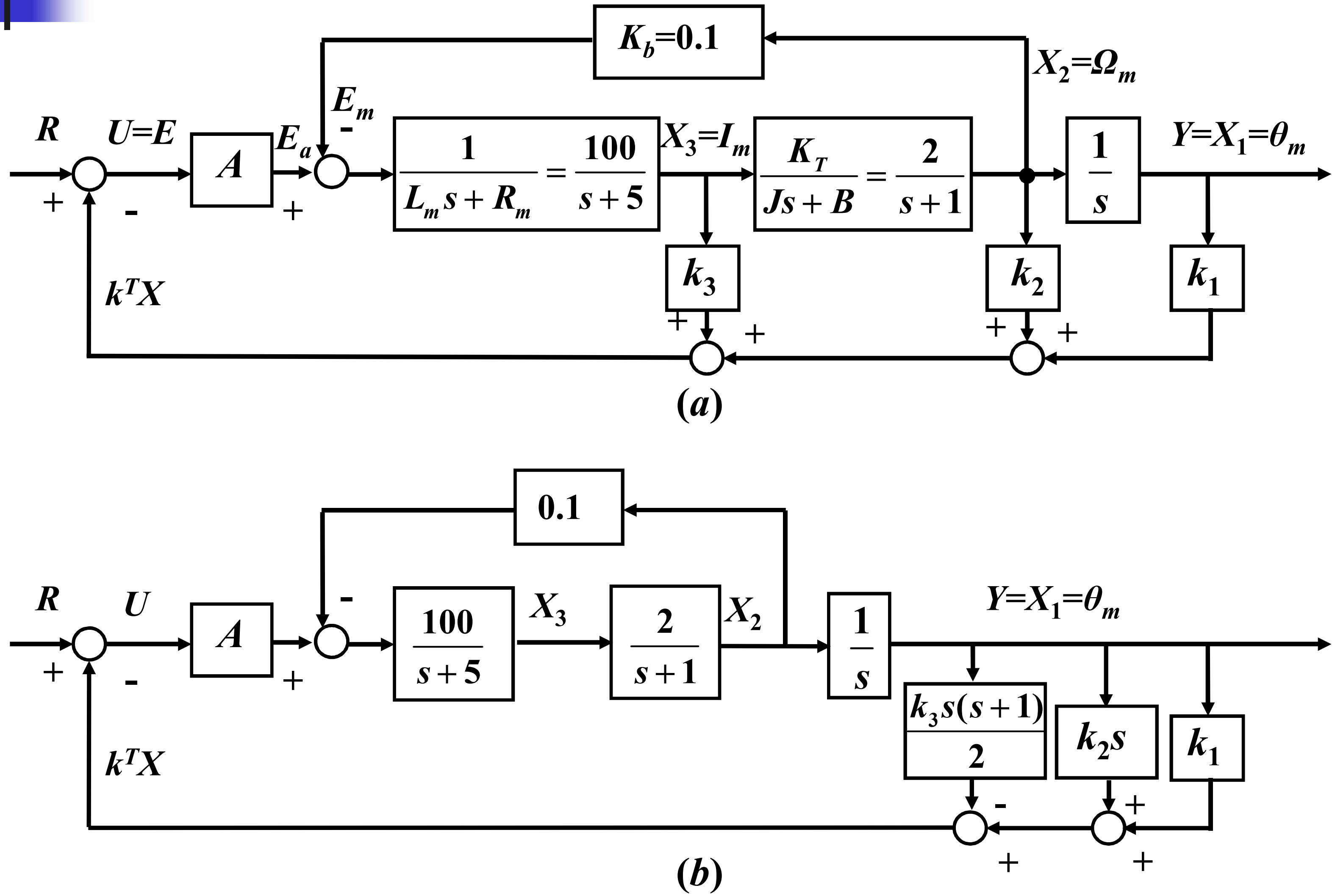
负反馈　　A, k_1, k_2, k_3由设计者确定

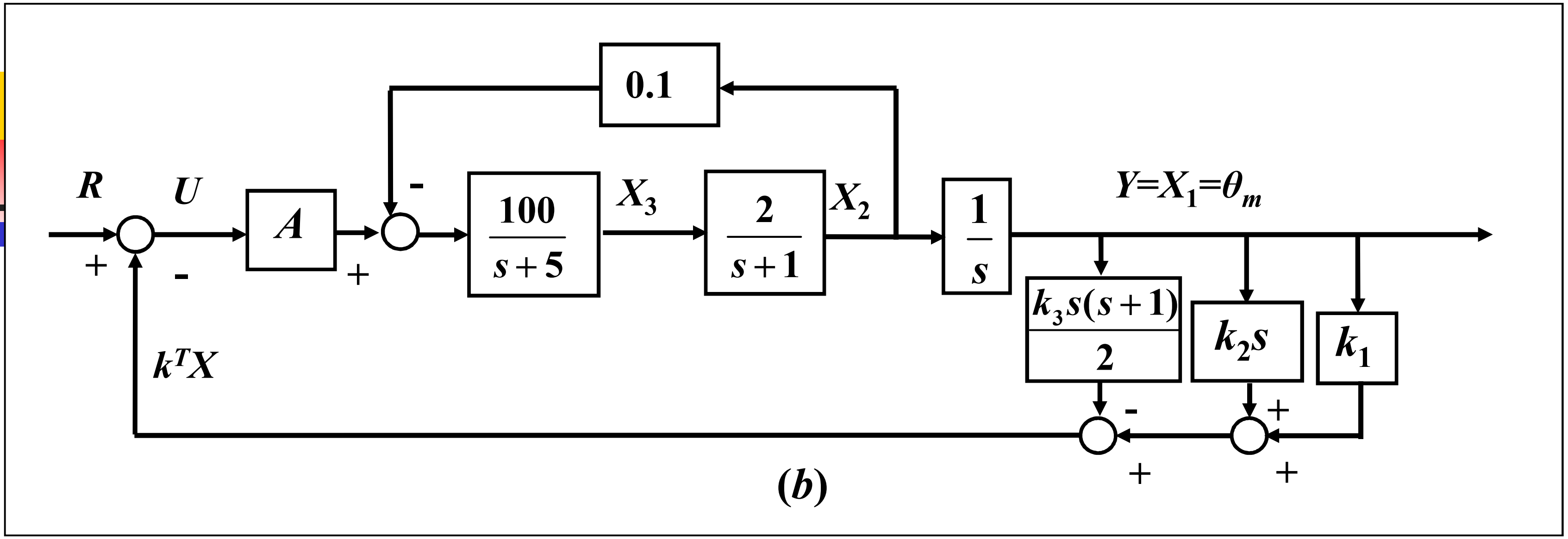
要求：阶跃响应无静差，闭环极点位于$s_{1,2}=-a\pm jb, s_3=-c$

状态反馈之和为 $\mathbf{kX}=\begin{bmatrix}\mathrm{k}_1 & \mathrm{k}_2 & \mathrm{k}_3\end{bmatrix}\mathbf{X}=\mathrm{k}_1 X_1+k_2 X_2+k_3 X_3$

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 物理变量法





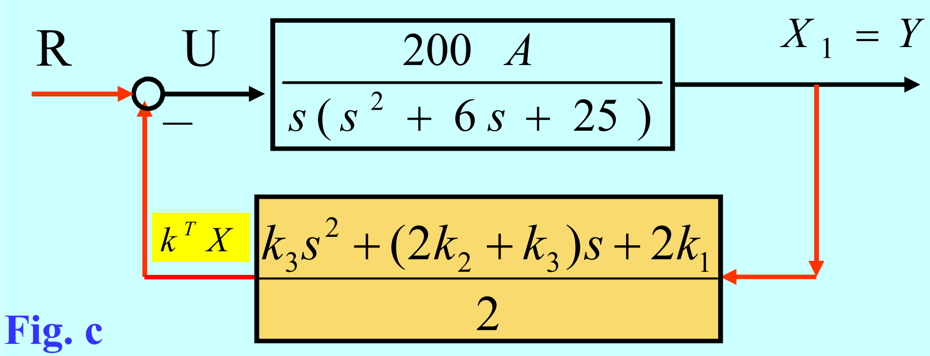


Fig. c

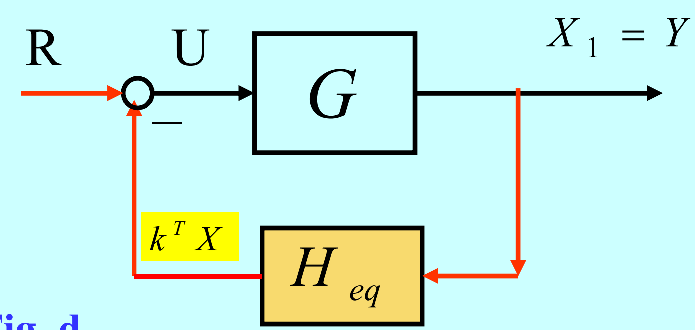


Fig. d

$$G(s)=\frac{200A}{s(s^2+6s+25)},\qquad H_{eq}(s)=\frac{k_3s^2+(2k_2+k_3)s+2k_1}{2}$$

闭环传函： $$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H_{eq}(s)}=\frac{200A}{s^3+(6+100k_3A)s^2+(25+200k_2A+100k_3A)s+200k_1A}$$

SIS $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H_{eq}(s)} = \frac{200A}{s^3+(6+100k_3A)s^2+(25+200k_2A+100k_3A)s+200k_1A}$

3. 状态反馈设计: 物理变量法

设计要点

1) 若要求对阶跃输入的零稳态偏差, 从方程.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{200A}{s^3+(6+100k_3A)s^2+(25+200k_2A+100k_3A)s+200k_1A} \qquad R(s)=\frac{R_0}{s}$$

$$error = 0 \Rightarrow y(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \frac{R_0}{k_1} = R_0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1$$

2) 对于期望的极点位置，特征方程具有如下形式

$$(s+a\pm jb)(s+c) = s^3+d_2s^2+d_1s+d_0 = 0$$

令对应的 **Y(s)/R(s)**分母的系数相等

$$d_2 = 6+100k_3A$$
$$d_1 = 25+200k_2A+100k_3A$$
$$d_0 = 200k_1A = 200A$$

SISO 系统状态反馈

3. 状态反馈设计: 物理变量法

经典控制理论对状态反馈的理解

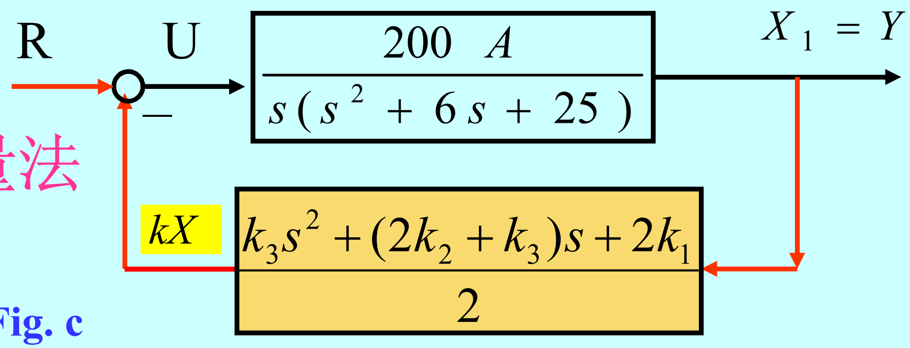
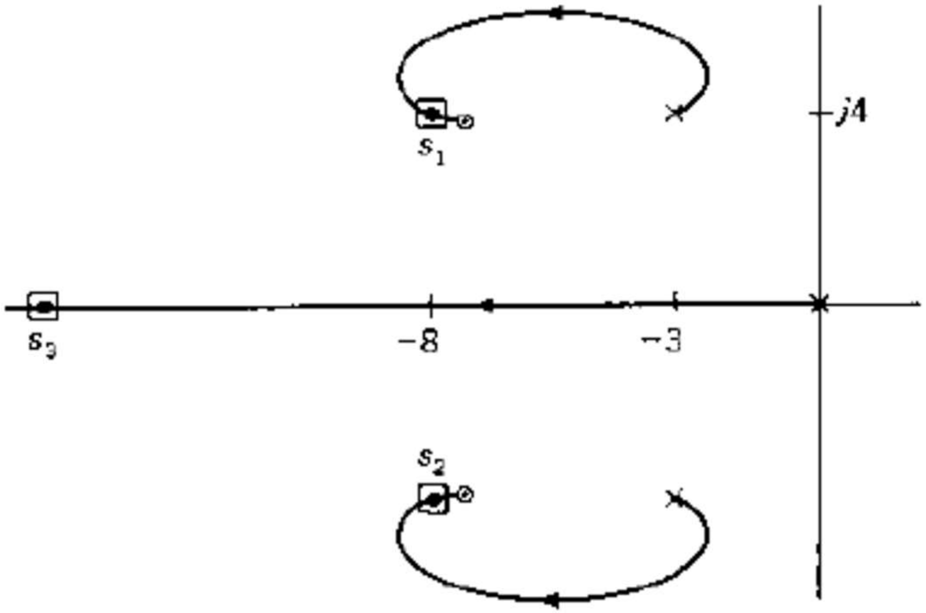


Fig. c

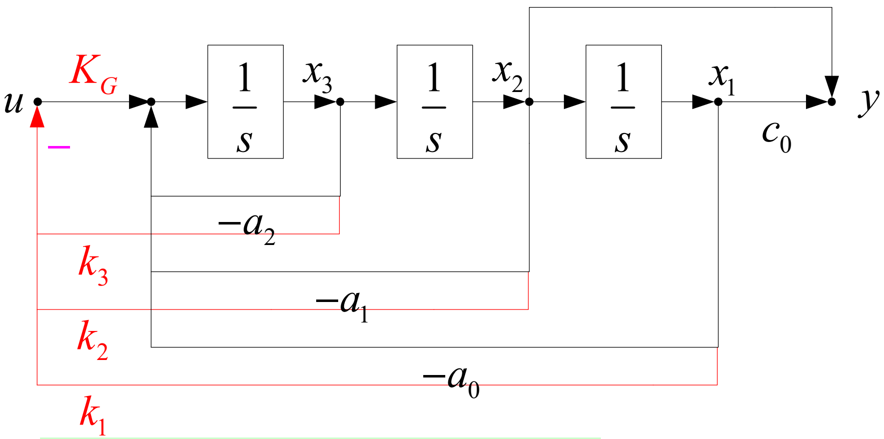
状态反馈等价于动态输出反馈（可能带纯微分环节），给开环传递函数**G(s)H$_{eq}$(s)**引入了附加零点，没有增加极点. 设置**H$_{eq}$(s)**的零点 以产生期望的响应. 一般地, 附加开环传递函数零点使得根轨迹向左移动; **i.e.,** 使系统更加稳定并且提高系统响应特性.

从根轨迹分析的观点来看,对于 **k$_3$>0**，系统的根轨迹有一条渐近线与正实轴的夹角 **γ=-180°**，可以通过选择 **H$_{eq}$(s)** 零点的位置使得对于所有的正增益系统都是稳定的. 图 **e** 表示一种零点的选择及其根轨迹图.



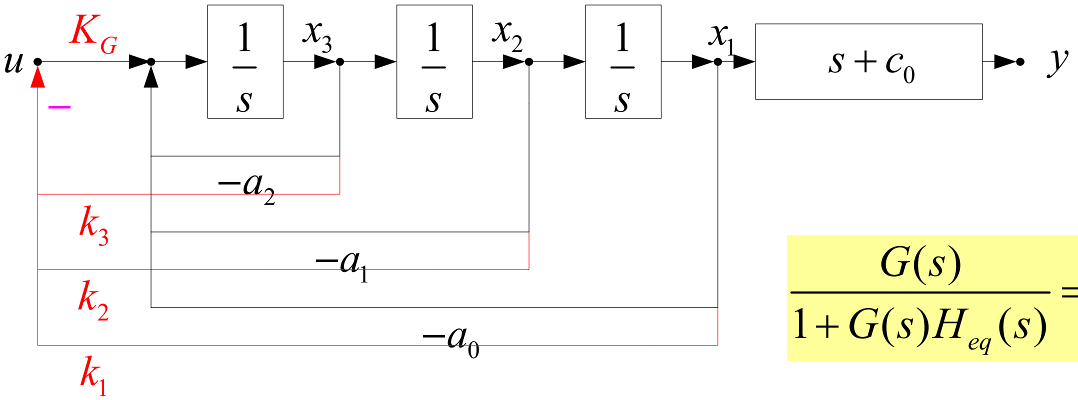
SISO 系统的状态反

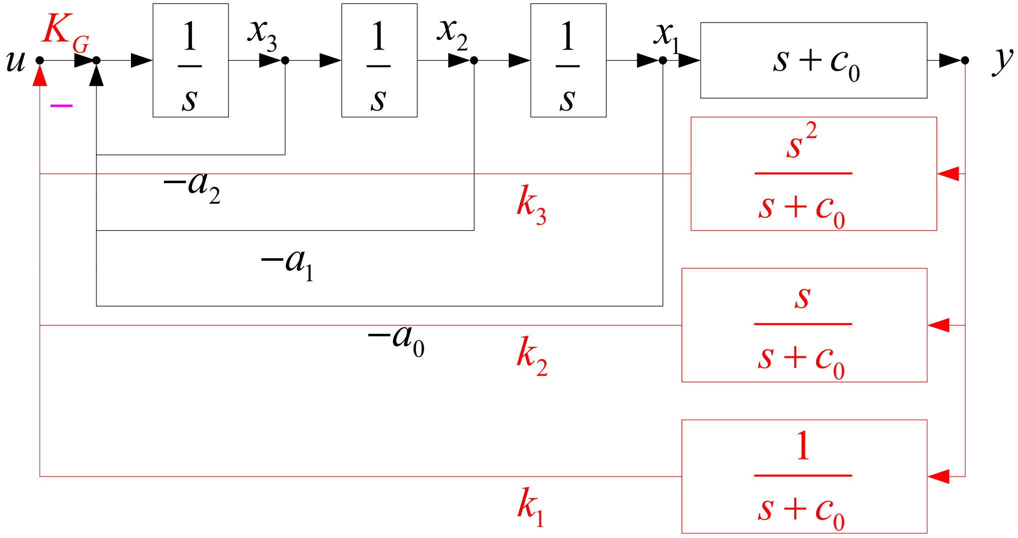
4. 状态反馈的一般性质

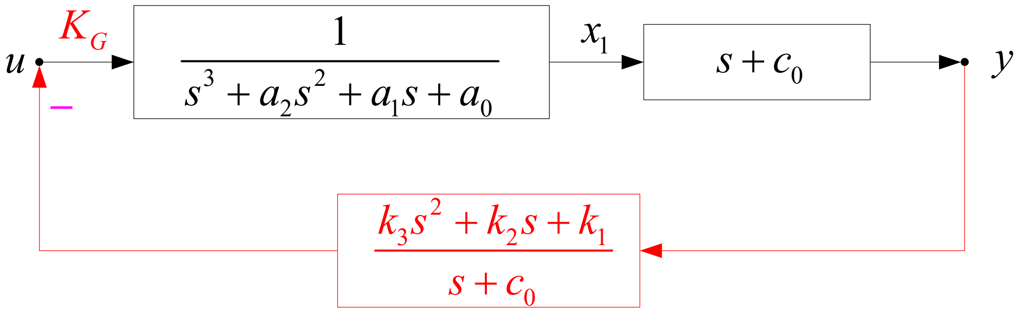


$$G(s)=\frac{K_G(s+c_0)}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

$$u=-k_1x_1-k_2x_2-k_3x_3$$







$$H_{eq}(s)=\frac{k_3s^2+k_2s+k_1}{s+c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s)=\frac{K_G(k_3s^2+k_2s+k_1)}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

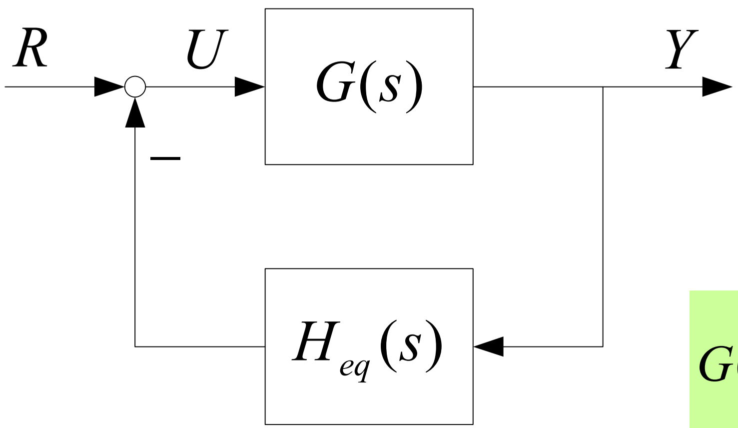
$$\frac{G(s)}{1+G(s)H_{eq}(s)}=\frac{K_G(s+c_0)}{s^3+(a_2+K_Gk_3)s^2+(a_1+K_Gk_2)s+(a_0+K_Gk_1)}$$

非最小相位系统：传递函数有零点位于右半开平面（有不稳定零点）

最小相位系统：传递函数没有不稳定零点

- 考虑最小相位传递函数 $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$

  其中$k_G>0, w<n$



$$H_{eq}(s)=\frac{k_ns^{n-1}+k_{n-1}s^{n-2}+\cdots\cdots+k_2s+k_1}{s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s)=\frac{K_G(k_ns^{n-1}+k_{n-1}s^{n-2}+\cdots\cdots+k_2s+k_1)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+(a_{n-2}+K_Gk_{n-1})s^{n-2}+\cdots\cdots+(a_0+K_Gk_1)}$$

SISO 系统的状态反馈

4. 状态反馈的一般性质（采

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$$

$$H_{eq}(s)=\frac{k_ns^{n-1}+k_{n-1}s^{n-2}+\cdots\cdots+k_2s+k_1}{s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s)=\frac{K_G(k_ns^{n-1}+k_{n-1}s^{n-2}+\cdots\cdots+k_2s+k_1)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$$

结论

1) $H_{eq}(s)$ 有 n-1 个零点. 零点由 k_i 来确定.

2) 开环传递函数 $G(s)H_{eq}(s)$ 与 G(s)具有相同的 n 个极点

3) 基于 $G(s)H_{eq}(s)$， 对于 $k_n>0$, n条根轨迹中， n-1 条分支 终止于 n-1 个零点， 一条根轨迹终止于负无穷远点. 若 $H_{eq}(s)$ 的所有零点都在 s 平面的左半平面，系统的稳定性可以通过选择较大的 k_G 值来保证.

4) 状态反馈可以配置闭环系统极点以获得期望的系统特性

5) 也可将部分闭环极点配置在不期望的零点位置，从而对消不期望的零点.

Y(s)/R(s)的极点数减去零点数必须等于 G(s)的极点数减去零点数.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+(a_{n-1}+K_Gk_n)s^{n-1}+(a_{n-2}+K_Gk_{n-1})s^{n-2}+\cdots\cdots+(a_0+K_Gk_1)}$$

SISO 系统的状态反馈

4. 状态反馈的一般性质（采

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K_G(s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$$

$$H_{eq}(s)=\frac{k_ns^{n-1}+k_{n-1}s^{n-2}+\cdots\cdots+k_2s+k_1}{s^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots\cdots+c_1s+c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s)=\frac{K_G(k_ns^{n-1}+k_{n-1}s^{n-2}+\cdots\cdots+k_2s+k_1)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots\cdots+a_1s+a_0}$$

设计步骤

Step 1. 绘制系统的状态变量图.

Step 2. 假设所有的状态变量可测量.

Step 3. 根据k_i's，获得 $H_{eq}(s)$ 和 $Y(s)/R(s)$ 。

Step 4. 根据单位阶跃输入（$u_{-1}(t)$）零稳态偏差的要求，计算 k_1 值; 即, $y(t)_{ss}=\lim_{s\to 0}sY(s)=1$.

Step 5. 根据期望的系统特性（M_p, t_p, t_s, 和稳态误差）分析期望的 $Y(s)/R(s)$. 有时候也通过配置一个或多个闭环极点来对消不期望的零点.

Step 6. 令steps 3 和 5 所得到的闭环传递函数相等. 分母多项式中对应项系数相等，从而解得 k_i的值. 若在设计中采用相变量而实现中采用物理变量, 则必须进行线性变换， 将相变量反馈系数转换为控制系统中物理变量对应的系数.

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 全极点系统

• 若 G(s) 没有零点, 则称其为全极点系统（**all-poles plant**）**.**

Design Example--1. 对于如图**Fig. a**所示系统, 设计**A**及状态反馈使闭环系统具有以下特性 M_p=1.043, t_s=5.65s, 以及对阶跃输入$r(t)=R_0 u_{-1}(t)$具有零稳态偏差特性。

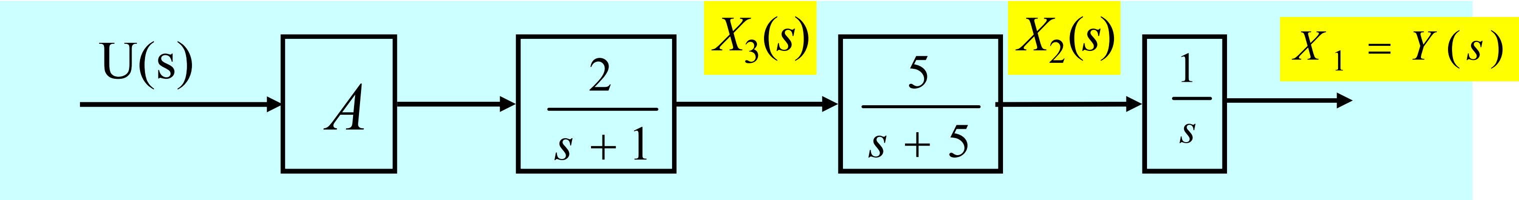


Fig. a

解：**Step1**：选得状态如图示（由于开环传递函数无零极点相消情况，故系统是可控的）。

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 全极点系统

Example----全极点系统

状态反馈后的闭环方块图如下

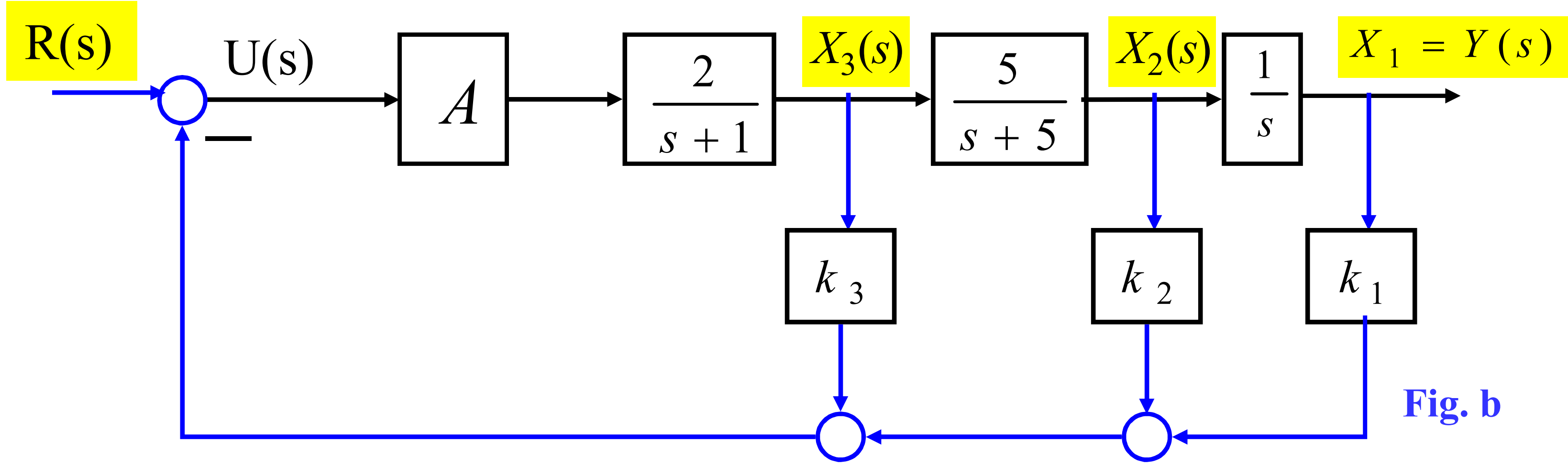


Fig. b

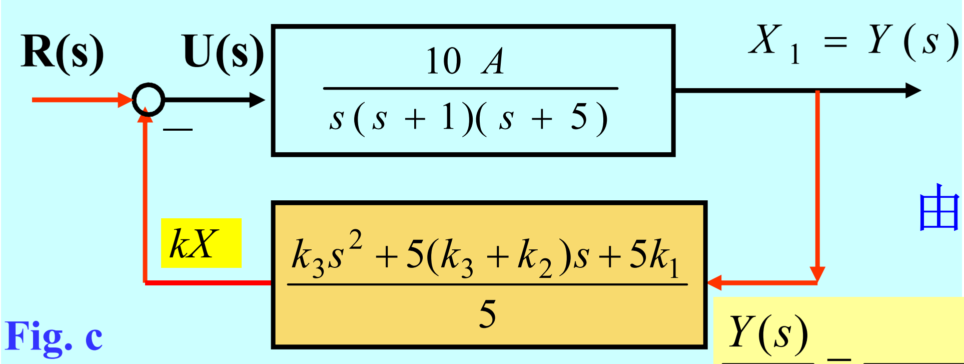


Fig. c

由图可求得闭环传递函数:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{10A}{s^3+(6+2Ak_3)s^2+[5+10A(k_3+k_2)]s+10Ak_1}$$

$$\text{SIS}\quad \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{10A}{s^3+(6+2Ak_3)s^2+[5+10A(k_3+k_2)]s+10Ak_1} \qquad (**)$$

5. 状态反馈示例: 全极点系统

Design Example--1.对于如图**Fig. a**所示系统, 设计状态反馈使闭环系统具有以下特性 $M_p=1.043$, $t_s=5.65s$, 以及对阶跃输入$r(t)=R_o u_{-1}(t)$具有零稳态偏差特性。

解：**Step2**：因为要求当阶跃输入为R_0时具有零稳态偏差，即当$t\to\infty$时，$e(t)=y(t)-R_0\to 0$。因此利用终值定理得

$$y(t)_{ss}=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{R_0}{s}\cdot\frac{10A}{s^3+(6+2Ak_3)s^2+[5+10A(k_3+k_2)]s+10Ak_1}=R_0$$

即：

$$y(t)_{ss}=R_0\cdot\frac{10A}{10Ak_1}=R_0\Rightarrow k_1=1$$

Step3：因为是三阶系统，假设其具有一对由所要求的闭环性能指标决定的复数主极点（由要求的时域性能指标求出）

（1）由于要求最大峰值为$M_p=1.043$

$$M_p=1.043=1+\exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\Rightarrow\xi=0.708$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{10A}{s^3+(6+2Ak_3)s^2+[5+10A(k_3+k_2)]s+10Ak_1} \quad (**)$$

SI

$$\xi=0.708$$

5. 状态反馈示例: 全极点系统

Design Example--1.对于如图**Fig. a**所示系统, 设计状态反馈使闭环系统具有以下特性 M_p=1.043, t_s=5.65s, 以及对阶跃输入$r(t)=R_o u_{-1}(t)$具有零稳态偏差特性。

解: **Step3** : （2）要求调节时间为t_s=5.65s

$$t_s=\frac{4}{|\sigma|} \Rightarrow \sigma=\xi\varpi_n=\frac{4}{5.65}=0.708$$

即得到: （3）一对复数主极点: $s_{1,2}=-\sigma\pm j\varpi_n\sqrt{1-\xi^2}=-0.708\pm j0.706$

非主导极点设为－100，故可求得期望的闭环传递函数:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{10A}{(s+100)(s+0.708\pm j0.706)}=\frac{10A}{s^3+101.4s^2+142.6s+100}$$

（4）该期望方程应该与前闭环传递函数相同，而为了达到零稳态偏差，前面已经求出: $k_1=1$

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 全极点系统

Design Example--1. 对于如图**Fig. a**所示系统, 设计状态反馈使闭环系统具有以下特性 M_p=1.043, t_s=5.65s, 以及对阶跃输入 $r(t)=R_o u_{-1}(t)$ 具有零稳态偏差特性。

解：因而有

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{10A}{s^3+(6+2Ak_3)s^2+[5+10A(k_3+k_2)]s+10A}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{10A}{(s+100)(s+0.708\pm j0.706)}=\frac{10A}{s^3+101.4s^2+142.6s+100}$$

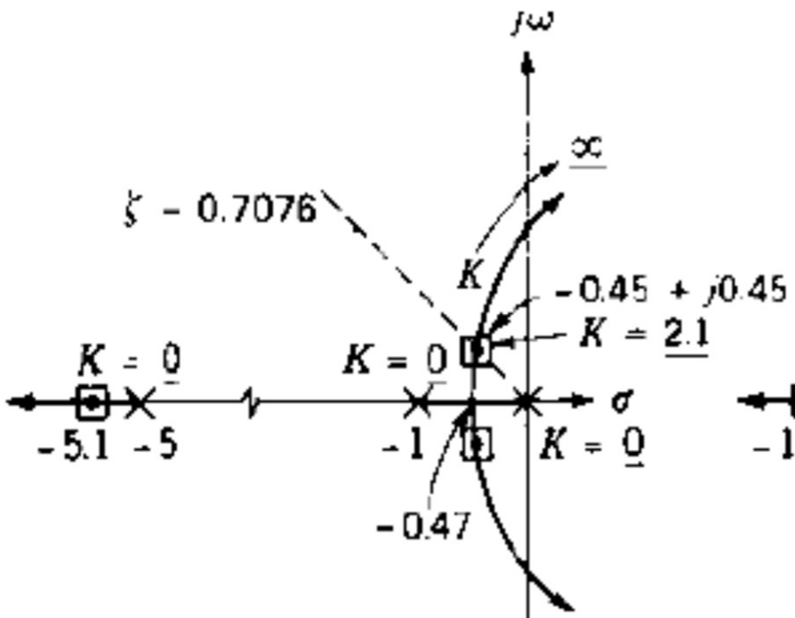
$$\begin{aligned}(6+2Ak_3)&=101.4\\5+10A(k_3+k_2)&=142.7\\10Ak_1&=100\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}k_3&=4.77\\k_2&=-3.393\\A&=10\end{aligned}$$

所以：系统的开环放大系数**A＝10**，以及状态反馈增益阵: **K＝[1, -3.393, 4.77]**。

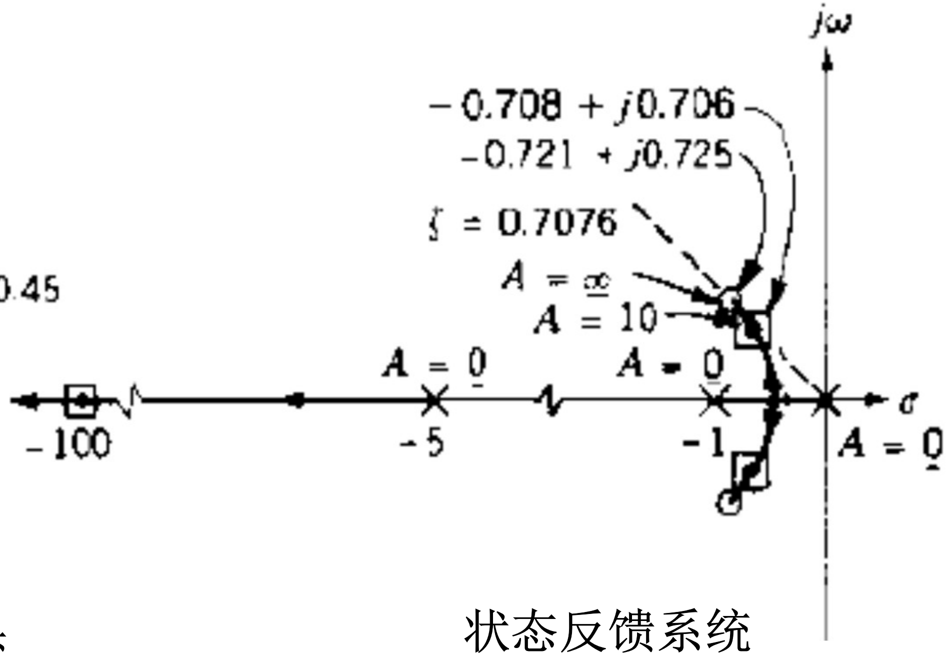
SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 全极点系统

解：状态反馈设计与传统的单位反馈系统的根轨迹如图所示



基本的单位反馈系统



状态反馈系统

注意：对状态反馈而言，当A＞0，系统总是稳定的。由于A＝10的闭环根就在G(s)H_{eq}(s)的零点附近，即使A＞10后再增大，闭环根的位置基本不变，对增益A的增大变化不敏感。——敏感度问题——

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 全极点系统

Design Example--1.对于如图**Fig. a**所示系统, 设计状态反馈使闭环系统具有以下特性 $M_p=1.043$, $t_s=5.65s$, 以及对阶跃输入$r(t)=R_o u_{-1}(t)$具有零稳态偏差特性。

由根轨迹图可以直观地看出，不敏感的原因中由于2个期望的主导极点接近$H_{eq}(s)$的零点，以及第3个根是非主导极点。

结论：要达到对增益变化的不敏感，期望的闭环系统必须有 β 个主导闭环极点位于$H_{eq}(s)$的 β 个零点的附近，其余的（n－β）个极点是非主导的。该例中，$n=3, \beta=2, n-\beta=1$.

注意：对状态反馈而言，其与经典控制理论是有联系的，此例即将时域的动态性能指标、主导极点、静态误差等概念融合在一起了。故基本概念非常重要。

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统

Design Example--1的设计示例处理的系统只有极点; 因此闭环传递函数没有零点 . 下面 介绍具有零点和极点的系统， 闭环传递函数具有如下形式

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_G(s-z_1)(s-z_2)\cdots\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots\cdots(s-p_n)}$$

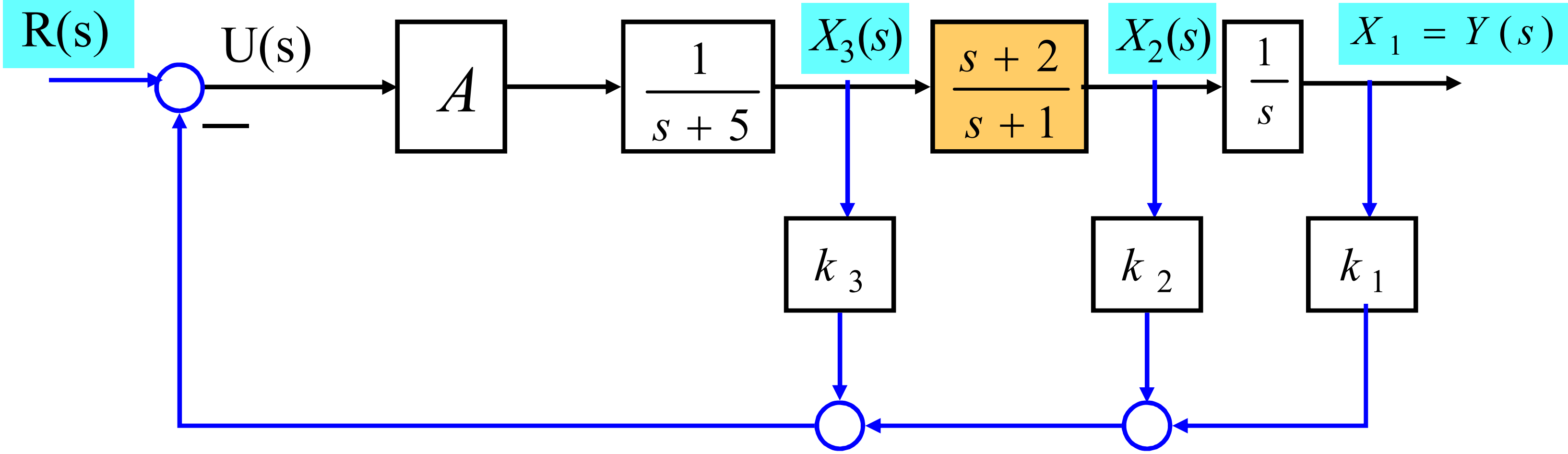
与对象 **G(s)**具有相同的零点. 当存在开环零点时， 闭环系统的特征方程比全极点对象的闭环系统特征方程要复杂的多。

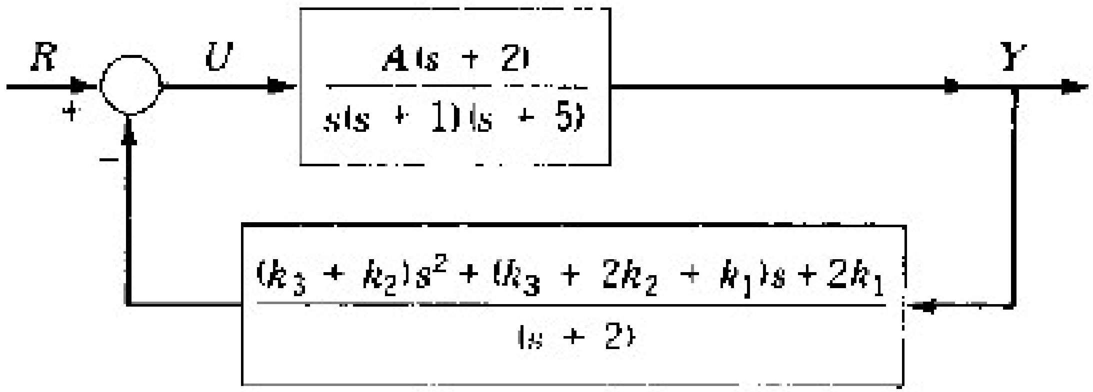
- 若 $G_x(s)=Y(s)/U(s)$零点位置是满足要求的, 设计步骤和全极点示例 **Example-1**的步骤一样.

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统

Design Example--2. 如图所示状态反馈系统





(b)

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统

Design Example--2.系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{A(s+2)}{s^3+[6+(k_3+k_2)A]s^2+[5+(k_3+2k_2+k_1)A]s+2k_1A}$$

这个系统的期望闭环传递函数假设为

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{desired}}=\frac{2}{s^2+2s+2} \quad (1)$$

注意：状态反馈不改变系统的零点.

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{actually desired}}=\frac{2(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\frac{2(s+2)}{s^3+4s^2+6s+4} \quad (2)$$

$$A=2$$

$$2k_1A=4\Rightarrow k_1=1$$

$$\left.\begin{array}{l}5+(k_3+2k_2+k_1)A=6\\ 6+(k_3+k_2)A=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}k_2=\dfrac{1}{2}\\ k_3=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统

Design Example--2.系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{A(s+2)}{s^3+[6+(k_3+k_2)A]s^2+[5+(k_3+2k_2+k_1)A]s+2k_1A}$$

根轨迹分析

$$k_1=1 \qquad k_2=\frac{1}{2};k_3=-\frac{3}{2}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{A(s+2)}{s(s+1)(s+5)}$$

$$H_{eq}(s)=\frac{(k_3+k_2)s^2+(k_3+2k_2+k_1)s+2k_1}{(s+2)}$$

$$G(s)H_{eq}(s)=\frac{-A(s^2-s/2-2)}{s(s+1)(s+5)}=-1$$

$$s^2-s/2-2=0$$

$$z_1=-1.189;z_2=1.686$$

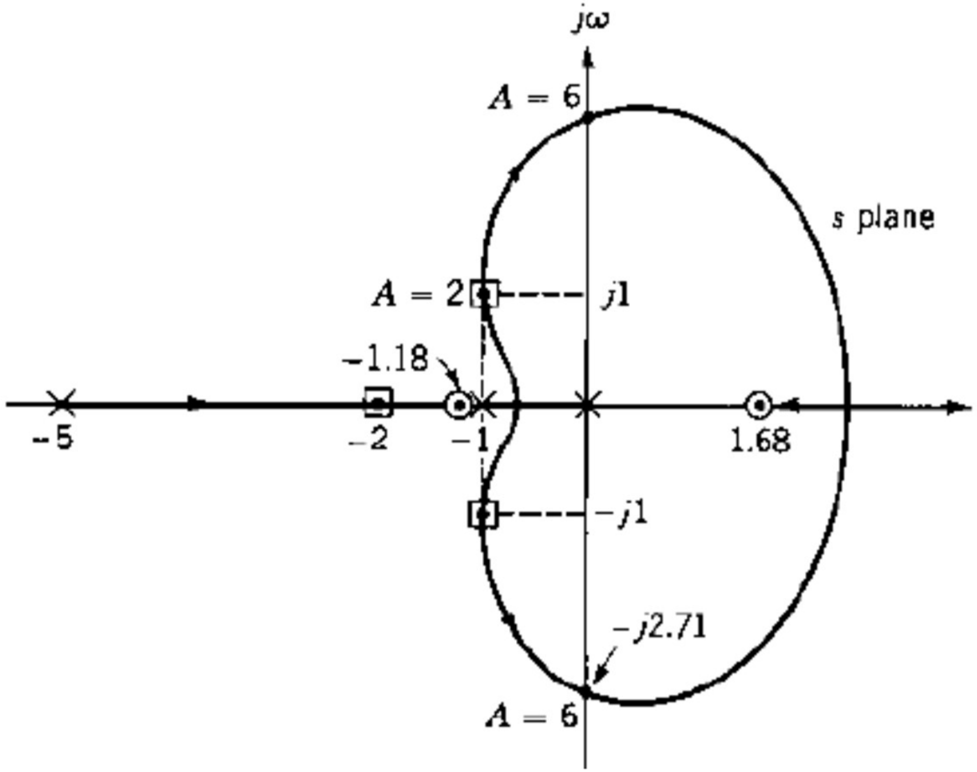
$$G(s)H_{eq}(s)=\frac{A(s^2-s/2-2)}{s(s+1)(s+5)}=1$$

注意需要绘制 0° 根轨迹

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{desired}} = \frac{2}{s^2+2s+2}$$



根轨迹的两个分支进入*s* 平面的右半平面, 当 **A>6**时系统将不稳定

特征根与$G(s)H_{eq}(s)$ 的零点

z_1=-1.189,z_2=1.686并不靠近，系统对增益的变化非常敏感. A值得增大将使系统的性能发生很大的变化

所用控制器结构无法同时满足"敏感度"和"-2是闭环极点"的要求，需要改进控制器结构

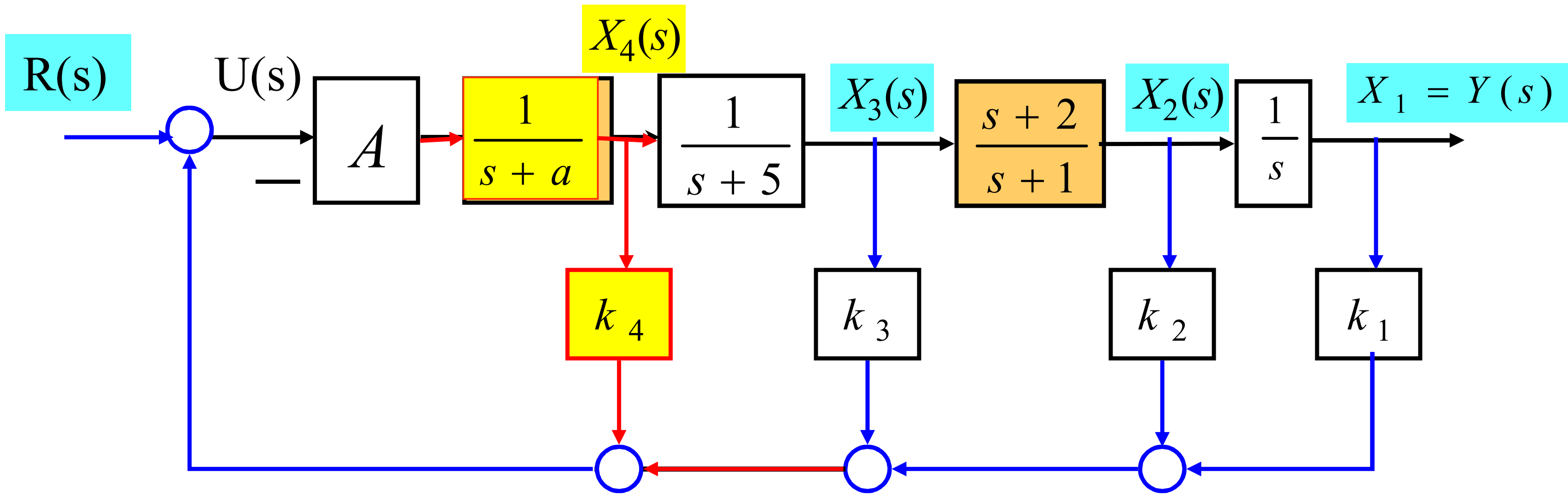
若希望降低敏感度，将$G(s)H_{eq}(s)$的零点设置在期望极点附近，则无法满足"-2是闭环极点"的要求

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统

Design Example--3. 为了使系统对增益变化不敏感和对所有的正增益值保持稳定

期望的闭环系统必须增加至少一个非主导极点，即分母的阶次为**4**，所以在前向通道串联一个环节



原则上，a可选为除2外的任意实数

在此，选$a=1$

Fig. a

增加一个开环极点的同时，开环零点也增加了一个，这对零极点分在-2的左右即可。

5. 状态反馈示例: 零极点系统

Design Example--3.

期望的闭环传递函数

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{actually desired}} = \frac{K_G(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+2)(s-p)}$$

其中 K_G=A，p 由阶跃输入的零稳态误差来决定.

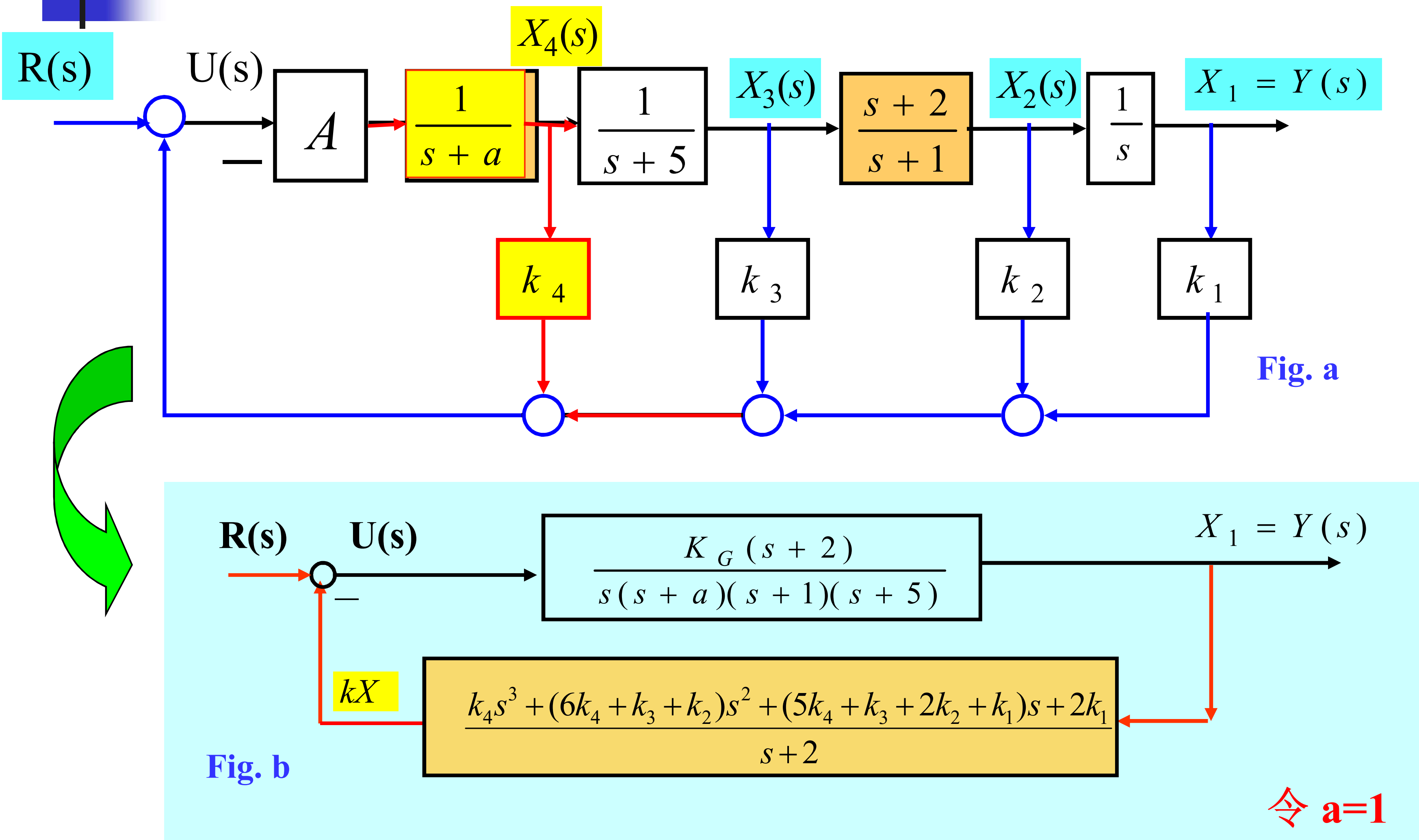
$$y(t)_{ss} = \lim_{s\to 0} sY(s) = R_0 \cdot \frac{-K_G}{2p} = R_0 \Rightarrow K_G = -2p$$

选择 K_G=100, 保证 p=-50 是一个非主导极点。

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{actually desired}} = \frac{100(s+2)}{s^4+54s^3+206s^2+304s+200}$$

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统



令 a=1

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统

Design Example--3.

从 **Fig.b**, 设 **a=1**, 系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{100(s+2)}{s^4+[7+100k_4)s^3+[11+100(6k_4+k_3+k_2)]s^2+[5+100(5k_4+k_3+k_2+k_1)]s+200k_1}$$

$$\updownarrow$$

$$\left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{\text{actually desired}}=\frac{100(s+2)}{(s+2)(s^2+2s+2)(s+50)}=\frac{100(s+2)}{s^4+54s^3+206s^2+304s+200}$$

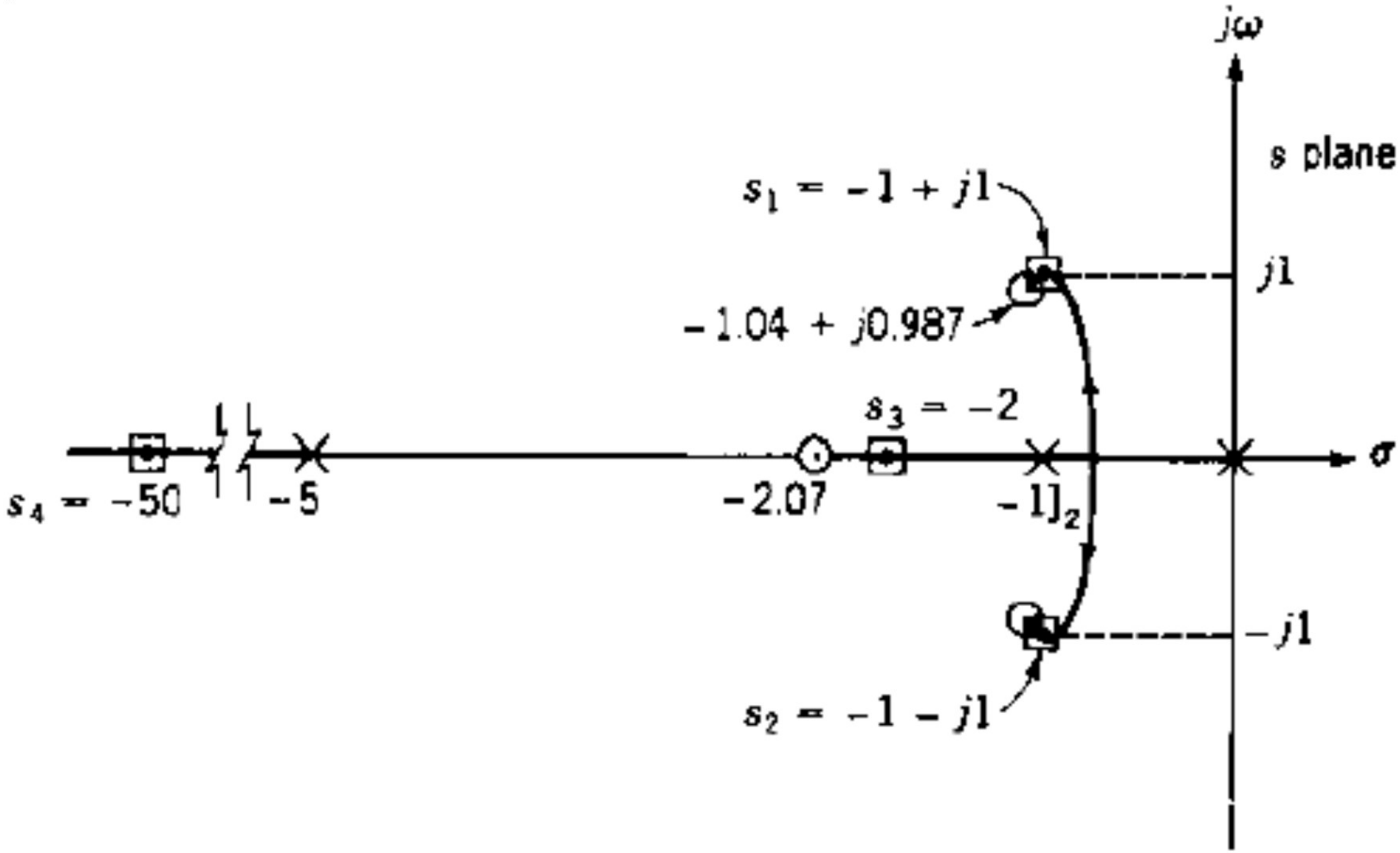
$$\Downarrow$$

状态反馈矩阵 **K=[1, 0.51,-1.38, 0.47]**

根轨迹见下页

SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例: 零极点系统



SISO 系统状态反馈

5. 状态反馈示例

- 通过以上三个示例 说明了系统设计的方法

(1) 分析期望的系统特性以及闭环传递函数.

(2) 分析期望系统的根轨迹 $G(s)H_{eq}(s)=-1$，验证对增益变化的不敏感性.

(3) 确定 k_i 值以产生期望的系统特性.

Thanks！