

机器人建模与控制

第5章 微分运动学与静力学

5.5 逆微分运动学及奇异性

5.5.1 逆微分运动

在机械臂关节角处于 Θ 时，利用此时的雅可比矩阵 $J(\Theta)$ 和关节角速度，可以计算末端执行器的笛卡尔空间速度 v_N （包括线速度和角速度），即

$$v_N = J(\Theta)\dot{\Theta}$$

若已知末端执行器笛卡尔空间速度 v_N ，产生 v_N 的各关节角速度如下计算

$$\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta)v_N$$

由于对于冗余机械臂和欠驱动机械臂，雅可比矩阵不是方阵，需要考虑雅可比矩阵的伪逆（广义逆）。

若矩阵 A 的维度为 $m \times n$ ($m \neq n$)，且 A 为满秩，则 A 的伪逆（广义逆） A^+ 为：

1) $m > n$ 时， A^+ 为左逆矩阵， $A^+ = A_{left}^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$ $A^T A$ 满秩

2) $m < n$ 时， A^+ 为右逆矩阵， $A^+ = A_{right}^{-1} = A^T (A A^T)^{-1}$ $A A^T$ 满秩

5.5 逆微分运动学及奇异性

5.5.1 逆微分运动

若 A 为 $m \times n$ 维矩阵, 且 A 为满秩, 则线性方程组 $Ax=b$ 的解

1) $m > n$ 时, 方程组是过定的, 通常方程组无解。此时, 使得 $\|Ax-b\|^2$ 最小的 x 为方程的最小二乘解, 由左伪逆计算

$$x^* = A^+b = A_{left}^{-1}b = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x^* = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (2)^{-1}(2) = 1$$

2) $m < n$ 时, 方程组是欠定的, 通常方程组可能存在无数个解。此时, 所有解中使得 x 范数最小的 x 为方程的最小范数解, 由右伪逆计算

$$x^* = A^+b = A_{right}^{-1}b = A^T (AA^T)^{-1} b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 2, \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} 2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (2)^{-1}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.5 逆微分运动学及奇异性

5.5.1 逆微分运动

零空间(Null Space): 若 A 为 $m \times n$ 维矩阵, 则 A 的零空间为线性方程组 $Ax=0$

的所有解集合, 记为 $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax = 0\}$

1) $m \geq n$ 时, 若 A 为列满秩, A 的零空间只有零向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = 0$$

2) $m < n$ 时, 若 A 为行满秩, A 的零空间中的向量为

$$\tilde{x} = (I - A^+ A)x = (I - A_{right}^{-1} A)x = (I - A^T (AA^T)^{-1} A)x$$

其中, x 为任意 n 维向量

$$A = [1 \ 1], \tilde{x} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} [1 \ 1] \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

5.5 逆微分运动学及奇异性

5.5.1 逆微分运动

在机械臂关节角处于 Θ 时，雅可比矩阵为 $J(\Theta)$ ，由末端执行器的笛卡尔空间速度 v_N 求关节角速度的公式如下：

- (1) 无冗余：机械臂操作空间维度等于机械臂关节数，若雅可比矩阵满秩，则

$$\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta)v_N$$

- (2) 冗余：机械臂操作空间维度小于机械臂关节数，对于末端执行器的某一笛卡尔空间速度，通常会有无穷组对应的关节速度，若雅可比矩阵是行满秩的，其中满足关节速度范数最小的一个特解（最小范数解），用右伪逆计算

$$\dot{\Theta}_r = J^T (JJ^T)^{-1} v_N$$

通解为
$$\dot{\Theta} = \dot{\Theta}_r + \dot{\Phi}_f = J^T (JJ^T)^{-1} v_N + \left(I - J^T (JJ^T)^{-1} J \right) \dot{\Phi}_f$$

其中 $\dot{\Phi}_f$ 遍历所有的关节速度向量

- (3) 欠驱动：机械臂操作空间维度大于机械臂关节数，对于末端执行器的某一笛卡尔空间速度，可能没有对应的关节速度，这时，若雅可比矩阵是列满秩的，只能得到误差范数最小的关节速度（最小二乘解），用左伪逆计算

$$\dot{\Theta} = (J^T J)^{-1} J^T v_N$$

5.5 逆微分运动学及奇异性



5.5.2 奇异性

对于 6×6 的 J 和某个 θ ，若 $J(\theta)$ 可逆，则对任何笛卡尔速度向量 v_N ，由

$$\dot{\theta} = J^{-1}(\theta)v_N$$

可以计算出产生 v_N 的各关节转速，这些转速是产生 v_N 的唯一解

大多数 6×6 的 J 都有使得其不可逆的 θ 值，这些 θ 值所对应的位姿称为机构的**奇异位形**或简称**奇异状态**

所有的操作臂在工作空间的边界都存在奇异位形，并且大多数操作臂在它们的工作空间也有奇异位形

5.5 逆微分运动学及奇异性

5.5.2 奇异性

对于空间机械臂，总有 $\text{rank}(\mathbf{J}) \leq \min(6, n)$

对于平面机械臂，总有 $\text{rank}(\mathbf{J}) \leq \min(2, n)$ 这里 n 为机械臂关节数

对于一般机械臂，**奇异位形**为令雅可比矩阵 \mathbf{J} 不满秩的 $\boldsymbol{\Theta}$ 值所构成的位形，此时 $\text{rank}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta})) < \min(m, n)$

不同情况下的奇异点的判断条件为

(1) 无冗余 ($m=n$)：在此 $\boldsymbol{\Theta}$ 时 \mathbf{J} 不可逆，即 $\det(\mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta})) = 0$

(2) 冗余 ($m < n$)：在此 $\boldsymbol{\Theta}$ 时 \mathbf{J} 不行满秩，即 $\text{rank}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta})) < m$

(3) 欠驱动 ($m > n$)：在此 $\boldsymbol{\Theta}$ 时 \mathbf{J} 不列满秩，即 $\text{rank}(\mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta})) < n$

注意：对于平面机械臂，由于其末端姿态只有一个旋转自由度，且旋转轴一直垂直于平面，转角大小为所有转动关节的转角之和，所以判断奇异性时，平面机械臂只需关心平面二维线速度部分的雅可比矩阵，即

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}}$$

因此，对于平面机械臂，上述奇异位形的判断条件需利用雅可比矩阵 \mathbf{J}_v

5.5 逆微分运动学及奇异性

5.5.2 奇异性

奇异位形大致分为两类:

1) 边界奇异性:

工作空间边界的奇异位形。出现在操作臂完全展开或者收回使得末端执行器处于或非常接近空间边界的情况

2) 内点奇异性:

工作空间内部的奇异位形。出现在远离工作空间的边界, 通常是由于两个或两个以上的关节轴线共线引起的

当操作臂处于奇异位形时, 操作臂的末端在笛卡尔空间中会失去一个或多个自由度, 即此时无论选择多大的关节速度, 操作臂的末端在笛卡尔空间的某个方向上(或某个子空间中)都不能运动。

5.5 逆微分运动学及奇异性

$${}^0J(\Theta) = \begin{bmatrix} -l_2s_{12} - l_1s_1 & -l_2s_{12} \\ l_2c_{12} + l_1c_1 & l_2c_{12} \end{bmatrix}$$

5.5.2 奇异性

例子: 对于两自由度操作臂，末端执行器沿着 \hat{x} 轴以 1.0m/s 的速度运动。当操作臂远离奇异位形时，关节速度都在允许范围内。但是当 $\theta_2 = 0$ 时，操作臂接近奇异位形，此时关节速度趋向于无穷大

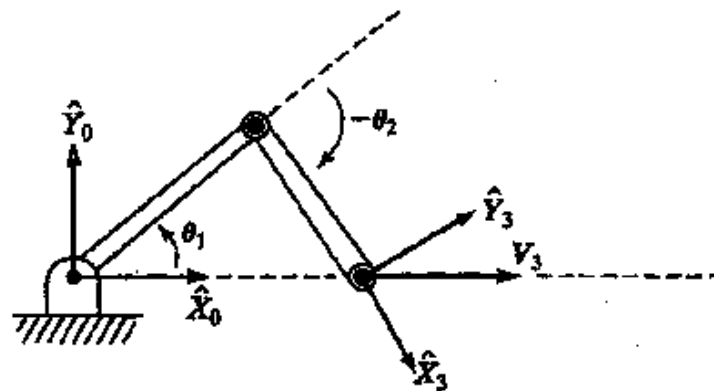
首先计算坐标系 {0} 中雅可比矩阵的逆:

$${}^0J^{-1}(\Theta) = \frac{1}{l_1l_2s_2} \begin{pmatrix} l_2c_{12} & l_2s_{12} \\ -l_1c_1 - l_2c_{12} & -l_1s_1 - l_2s_{12} \end{pmatrix}$$

当末端执行器以 1m/s 的速度沿着 \hat{x} 方向运动时，按照操作臂位形的函数计算出关节速度:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{c_{12}}{l_1s_2}, \quad \dot{\theta}_2 = -\frac{c_1}{l_2s_2} - \frac{c_{12}}{l_1s_2}$$

当操作臂伸展到接近 $\theta_2 = 0$ ，
两个关节的速度趋向无穷大.



5.5 逆微分运动学及奇异性

$$\dot{\Phi}_e = J^{-1}(\Phi)v_e$$



5.5.3 可操作度

$$\dot{\Phi}_e = \dot{\Phi}_r + \dot{\Phi} = J^T (JJ^T)^{-1} v_e + \left(I - J^T (JJ^T)^{-1} J \right) \dot{\Phi}_f$$

可操作度是衡量机器人位形与奇异位形距离的一种度量方式

由于欠驱动机器人的逆微分运动只有最小二乘解，一般只讨论无冗余和冗余机器人的可操作性问题

若机械臂处于某位形时关节向量为 Φ ，关节速度取为单位速度向量 $\dot{\Phi}_e$ ，满足 $\dot{\Phi}_e^T \dot{\Phi}_e = 1$ 此时，机器人末端速度记为 v_e ，则满足

(1) 机器人无冗余：
$$v_e^T \left(J(\Phi) J(\Phi)^T \right)^{-1} v_e = 1$$

(2) 机器人冗余：
$$v_e^T \left(J(\Phi) J(\Phi)^T \right)^{-1} v_e \leq 1$$

当机器人处于某位形时，限制关节速度为单位速度向量，机器人末端速度所构成的空间称作该位形的**可操作椭球体**。

5.5 逆微分运动学及奇异性

$$\mathbf{v}_e^T \left(\mathbf{J}(\Phi) \mathbf{J}(\Phi)^T \right)^{-1} \mathbf{v}_e \leq 1$$



5.5.3 可操作度

假设机器人有 N 个关节，末端速度空间的维数为 m ，要求 $N \geq m$ ，则 $m \times N$ 维雅可比矩阵 \mathbf{J} 的奇异值分解为

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$$

其中 $\mathbf{\Sigma}$ 是 $m \times N$ 维矩阵， $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$

其主对角线外的元素均为零，主对角线上的每个元素为 \mathbf{J} 的奇异值

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad i = 1, \dots, m \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$$

\mathbf{U} 和 \mathbf{V} 分别为 m 维和 N 维正交矩阵，且

\mathbf{U} 由矩阵 $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ 的特征向量 \mathbf{u}_i ($i = 1, \dots, m$) 张成，

\mathbf{V} 由矩阵 $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ 的特征向量 \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, N$) 张成。

由此得到

$$\mathbf{v}_e^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}_e = (\mathbf{U}^T \mathbf{v}_e)^T \mathbf{\Sigma}^{-2} (\mathbf{U}^T \mathbf{v}_e)$$

其中， $\mathbf{\Sigma}^{-2} = \text{diag}(\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_m^{-2})$ ，记 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{U}^T \mathbf{v}_e$ 则

$$\mathbf{v}_e^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}_e = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{\Sigma}^{-2} \boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} \leq 1$$

上式是一个标准的椭球体方程，表明机器人此位形的可操作椭球体的轴由向量 $\sigma_i \mathbf{u}_i$ 给出。

5.5 逆微分运动学及奇异性

5.5.3 可操作度

机器人关节速度取单位速度时：

(1) 可操作椭球体轴的长度越大，在该轴方向上，所得到的末端速度越大，表明在该方向上运动能力越强；

(2) 可操作椭球体轴的长度越小，在该轴方向上，所得到的末端速度越小，表明在该方向上运动能力越弱。

机器人位形的可操作椭球体描述了机器人改变末端位姿的能力。

为更直观的衡量机器人位形与奇异位形之间的距离，可以使用可操作椭球体的体积作为度量。

可操作椭球体的体积与雅可比矩阵 J 的奇异值的连乘 $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$ 成比例。

定义机器人处于位形 Φ 时的可操作度为 $\kappa(\Phi)$

$$\kappa(\Phi) = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m = \sqrt{\det(J(\Phi)J^T(\Phi))}$$

(1) 在奇异位形， JJ^T 不是满秩的，因此可操作度 $\kappa = 0$

(2) 在非奇异位形，可操作度 $\kappa > 0$ ，而且 κ 越大，机器人改变末端位姿的可操作性越好

5.5 逆微分运动学及奇异性

5.5.3 可操作度

当机器人无冗余时，雅可比矩阵 \mathbf{J} 为方阵，则 $\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = (\det \mathbf{J})^2$

当机器人无冗余时，机器人位形 Φ 的可操作度为

$$\kappa(\Phi) = |\det(\mathbf{J}(\Phi))|$$

例子 计算如图所示的两连杆机器人的可操作度。

该机器人是无冗余的平面机器人，因此 $\kappa = |\det(\mathbf{J})| = l_1 l_2 |s_2|$

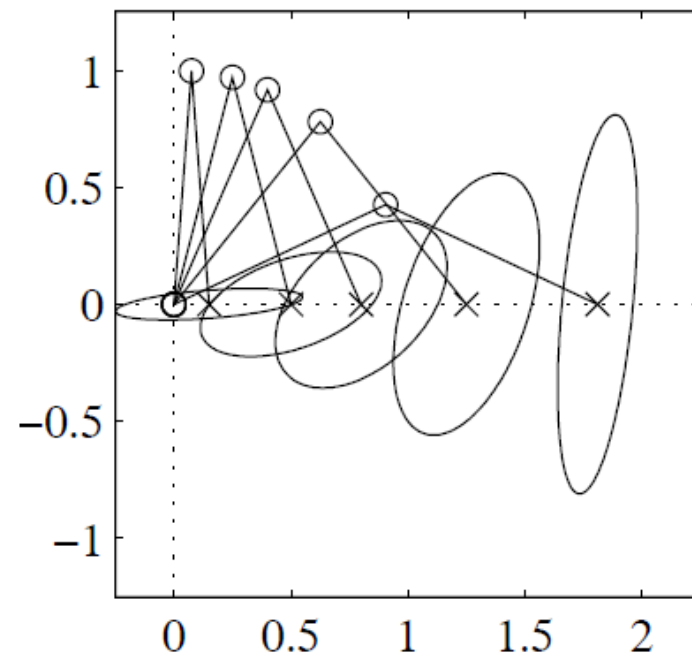
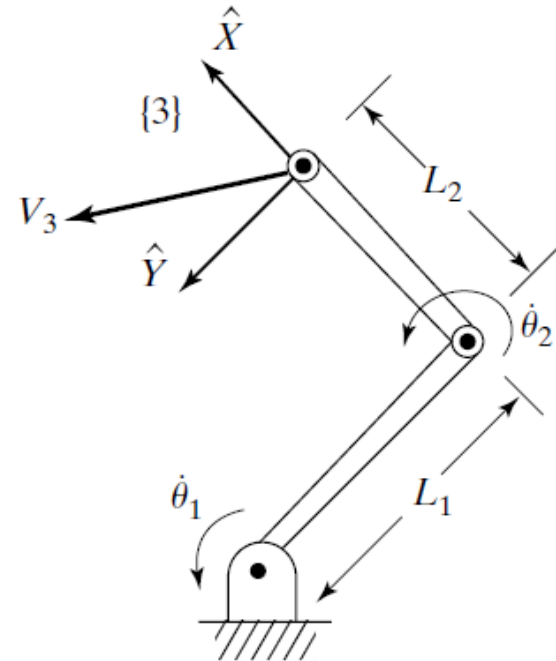
右图描述了两连杆平面机器人几种不同位形的可操作椭球体

当 $\theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ 时，该两连杆平面机器人末端具有最大的可操作度

可操作度可以用于机器人结构的辅助设计。

若需设计两连杆平面机器人，当连杆总长度 $l_1 + l_2$ 为定值时，
如何设计连杆长度使机器人具有最大的可操作性？

由该机器人的可操作度 κ 的表达式可知应当使乘积 $l_1 l_2$ 最大化，
故取连杆长度 $l_1 = l_2$ 可达到相应的目标。



5.6 分析雅可比矩阵

5.6.1 分析雅可比矩阵

- 几何雅可比矩阵 $\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = J(\Theta)\dot{\Theta}$
- 分析雅可比 $J_a(\Theta)$ ，基于对末端执行器姿态的最小表示

分析雅可比矩阵：通过操作臂末端的最小表示的运动学方程对关节变量的微分计算得到的雅可比矩阵。

令 $X = \begin{pmatrix} P(\Theta) \\ \Psi(\Theta) \end{pmatrix}$ 表示末端执行器的位姿，其中 $P(\Theta)$ 为基座坐标系原点到末端执行器坐标系原点的一般向量， $\Psi(\Theta)$ 为末端执行器坐标系相对于基座坐标系姿态的最小表示（例如固定角表示或欧拉角表示）。

分析雅可比满足以下形式：

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = J_a(\Theta)\dot{\Theta}$$

5.6 分析雅可比矩阵

5.6.2 刚体角速度与欧拉角速率的关系

刚体姿态用欧拉角（或固定角）表示时，刚体角速度与相应的欧拉角速率之间存在转换计算公式。

若刚体姿态矩阵为 $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ 刚体角速度 $\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

由 $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \mathbf{S}$
$$\begin{pmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{21} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{31} & \dot{r}_{32} & \dot{r}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

得到

$$\omega_x = \dot{r}_{31}r_{21} + \dot{r}_{32}r_{22} + \dot{r}_{33}r_{23}$$

$$\omega_y = \dot{r}_{11}r_{31} + \dot{r}_{12}r_{32} + \dot{r}_{13}r_{33}$$

$$\omega_z = \dot{r}_{21}r_{11} + \dot{r}_{22}r_{12} + \dot{r}_{23}r_{13}$$

5.6 分析雅可比矩阵



$$\omega_x = \dot{r}_{31}r_{21} + \dot{r}_{32}r_{22} + \dot{r}_{33}r_{23}$$

$$\omega_y = \dot{r}_{11}r_{31} + \dot{r}_{12}r_{32} + \dot{r}_{13}r_{33}$$

$$\omega_z = \dot{r}_{21}r_{11} + \dot{r}_{22}r_{12} + \dot{r}_{23}r_{13}$$

5.6.2 刚体角速度与欧拉角速率的关系

以Z-Y-Z欧拉角表示刚体在基坐标系中的姿态为例，记 $\Psi = (\alpha \ \beta \ \gamma)^T$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{Z'Y'Z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{pmatrix}$$

欧拉角速率为 $\dot{\Psi} = (\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma})^T$

则
$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{r}_{31}r_{21} + \dot{r}_{32}r_{22} + \dot{r}_{33}r_{23} \\ &= \left(\frac{\partial r_{31}}{\partial \alpha} r_{21} + \frac{\partial r_{32}}{\partial \alpha} r_{22} + \frac{\partial r_{33}}{\partial \alpha} r_{23} \right) \dot{\alpha} + \left(\frac{\partial r_{31}}{\partial \beta} r_{21} + \frac{\partial r_{32}}{\partial \beta} r_{22} + \frac{\partial r_{33}}{\partial \beta} r_{23} \right) \dot{\beta} + \left(\frac{\partial r_{31}}{\partial \gamma} r_{21} + \frac{\partial r_{32}}{\partial \gamma} r_{22} + \frac{\partial r_{33}}{\partial \gamma} r_{23} \right) \dot{\gamma} \\ &= -s\alpha\dot{\beta} + c\alpha s\beta\dot{\gamma} = (0 \quad -s\alpha \quad c\alpha s\beta) \dot{\Psi} \end{aligned}$$

同样有
$$\omega_y = \dot{r}_{11}r_{31} + \dot{r}_{12}r_{32} + \dot{r}_{13}r_{33} = (0 \quad c\alpha \quad s\alpha s\beta) \dot{\Psi}$$

$$\omega_z = \dot{r}_{21}r_{11} + \dot{r}_{22}r_{12} + \dot{r}_{23}r_{13} = (1 \quad 0 \quad c\beta) \dot{\Psi}$$

5.6 分析雅可比矩阵

5.6.2 刚体角速度与欧拉角速率的关系

因此针对以Z-Y-Z欧拉角表示的姿态，可以得到

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -s\alpha & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & s\alpha s\beta \\ 1 & 0 & c\beta \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\Psi}}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi} = (\alpha \ \beta \ \gamma)^T$ $\dot{\boldsymbol{\Psi}} = (\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma})^T$

记

$$\boldsymbol{B}_a(\boldsymbol{\Psi}) = \begin{pmatrix} 0 & -s\alpha & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & s\alpha s\beta \\ 1 & 0 & c\beta \end{pmatrix}$$

则针对Z-Y-Z欧拉角，角速度与欧拉角速率的关系为：

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{B}_a(\boldsymbol{\Psi}) \dot{\boldsymbol{\Psi}}$$

上述角速度与欧拉角速率的关系公式也称为“欧拉运动学方程”

5.6 分析雅可比矩阵

5.6.3 分析雅可比与几何雅可比的关系

- 几何雅可比与分析雅可比矩阵的转换

$$\begin{array}{cc} \text{几何雅可比} & \text{分析雅可比} \\ \left(\begin{array}{c} v \\ \omega \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \dot{P} \\ \dot{\omega} \end{array} \right) = J(\Theta) \dot{\Theta} & \dot{X} = \left(\begin{array}{c} \dot{P} \\ \dot{\Psi} \end{array} \right) = J_a(\Theta) \dot{\Theta} \end{array}$$

$$J(\Theta) \dot{\Theta} = \left(\begin{array}{c} v \\ \omega \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \dot{P} \\ B_a(\Psi) \dot{\Psi} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & B_a(\Psi) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \dot{P} \\ \dot{\Psi} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & B_a(\Psi) \end{array} \right) J_a(\Theta) \dot{\Theta}$$

$$J_a(\Theta) = \left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & B_a^{-1}(\Psi) \end{array} \right) J(\Theta) \quad \text{要求 } B_a \text{ 矩阵可逆}$$

$$\text{记 } T_a = \left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & B_a^{-1}(\Psi) \end{array} \right) \quad \text{则 } J_a(\Theta) = T_a J(\Theta)$$

5.6 分析雅可比矩阵

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = J_a(\Phi) \dot{\Phi}$$



5.6.4 逆运动学数值解

机器人逆运动学的一种数值解法可以作为分析雅可比矩阵应用的一个例子

逆运动学问题：给定 N 自由度机器人期望的齐次变换矩阵 T^d ，求关节变量 $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_N]^T$

$${}^0_N T = {}^0_1 T(\phi_1) {}^1_2 T(\phi_2) \cdots {}^{N-1}_N T(\phi_N) = T^d$$

记末端执行器的位姿为 $X(\Phi)$ ，期望位姿为 X^d ，则问题转化为求关节向量 Φ 满足 $X(\Phi) = X^d$

利用牛顿-拉夫逊（Newton-Raphson）法可以迭代求解上述方程。

记期望的关节变量为 Φ^d ，即 $X(\Phi^d) = X^d$ ，牛顿-拉夫逊法是从一个猜测的初始关节变量 Φ^0 开始，迭代计算 Φ^k ，最终逼近 Φ^d 。过程中需要利用末端位姿关于关节变量的微分，这正是分析雅可比矩阵。

记 $\delta\Phi^k = \Phi^d - \Phi^k$ ， $\delta X(\Phi^k) = X(\Phi^d) - X(\Phi^k)$ ，则由一阶泰勒展开近似得到

$$X(\Phi^d) = X(\Phi^k) + \frac{\partial X}{\partial \Phi}(\Phi^k) \delta\Phi^k + O((\delta\Phi^k)^2) \quad \delta X(\Phi^k) = \frac{\partial X}{\partial \Phi}(\Phi^k) \delta\Phi^k = J_a(\Phi^k) \delta\Phi^k$$

由此得到迭代计算式

$$\Phi^{k+1} = \Phi^k + J_a^{-1}(\Phi^k) \delta X(\Phi^k)$$

5.7 机器人的静力



操作臂在静态平衡（静止或匀速直线运动）状态下，考虑力和力矩如何从一个连杆向下一个连杆传递

- 操作臂的自由末端在工作空间推某个物体
- 用操作臂支撑住某个负载

我们希望求出保持系统静态平衡的关节扭矩。思路：

- 锁定所有的关节以使操作臂的结构固定
- 写出力和力矩对于各连杆坐标系的平衡关系
- 本章不考虑作用在连杆上的重力（动力学时会讨论）
- 在最后一个连杆受外部力/力矩时，为了保持操作臂的静态平衡，计算出需要对各关节轴依次施加多大的静力矩

5.7 机器人的静力

5.7.2 机器人连杆间的静力传递

为相邻连杆所施加的力和力矩定义以下特殊符号：

3维向量 f_i = 连杆*i*-1施加在连杆*i*上的力

3维向量 n_i = 连杆*i*-1施加在连杆*i*上的力矩

力平衡，将力相加并令其等于零：

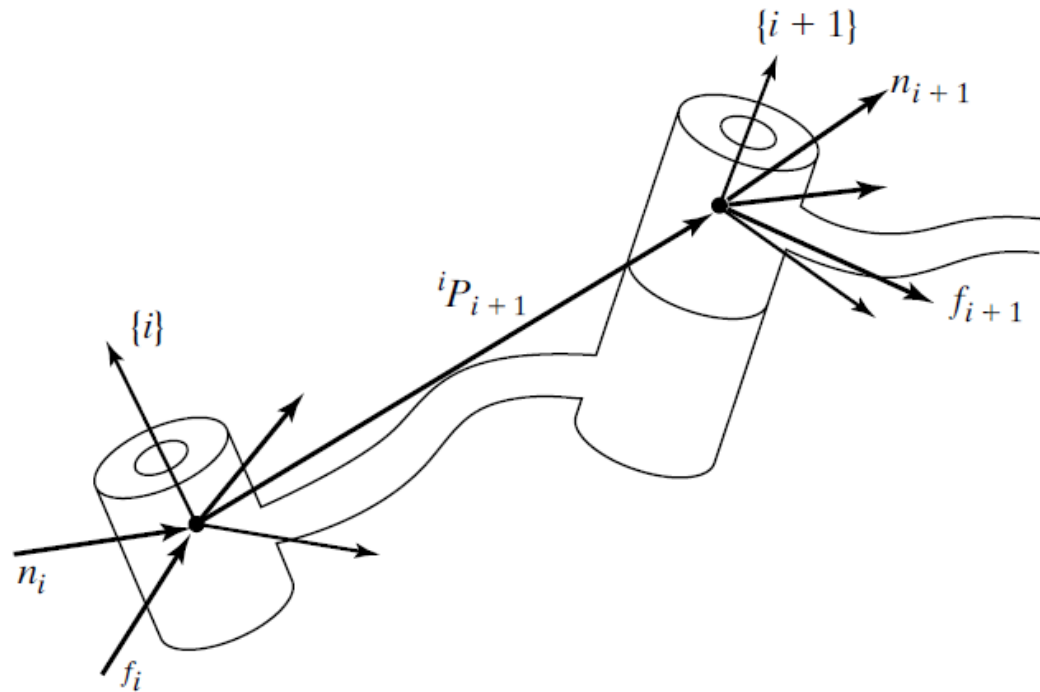
$${}^i f_i - {}^i f_{i+1} = 0 \longrightarrow {}^i f_i = {}^i f_{i+1}$$

力矩平衡，将绕坐标系{*i*}原点的力矩相加：

$${}^i n_i - {}^i n_{i+1} - {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} = 0$$



$${}^i n_i = {}^i n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1}$$



5.7 机器人的静力



$${}^i f_i = {}^i f_{i+1}$$

$${}^i n_i = {}^i n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1}$$

5.7.2 机器人连杆间的静力传递

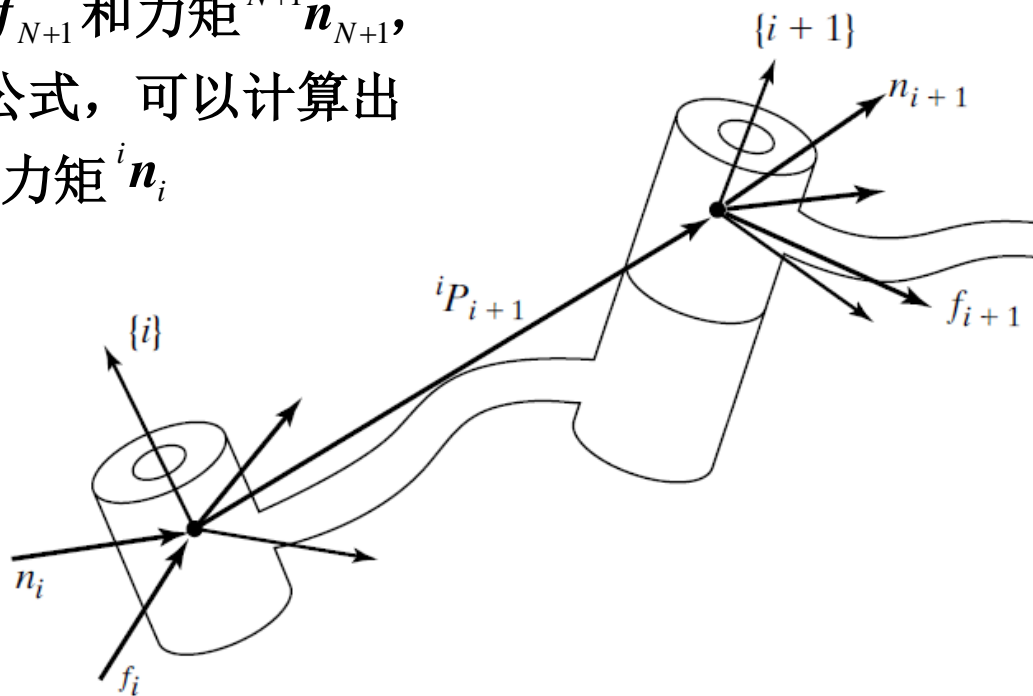
用坐标系 $\{i+1\}$ 相对于坐标系 $\{i\}$ 描述的旋转矩阵进行变换，得到连杆之间静力传递的表达式

$$\begin{aligned} {}^i f_i &= {}_{i+1}^i R {}^i f_{i+1} \\ {}^i n_i &= {}_{i+1}^i R {}^i n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i \end{aligned}$$

向内迭代法

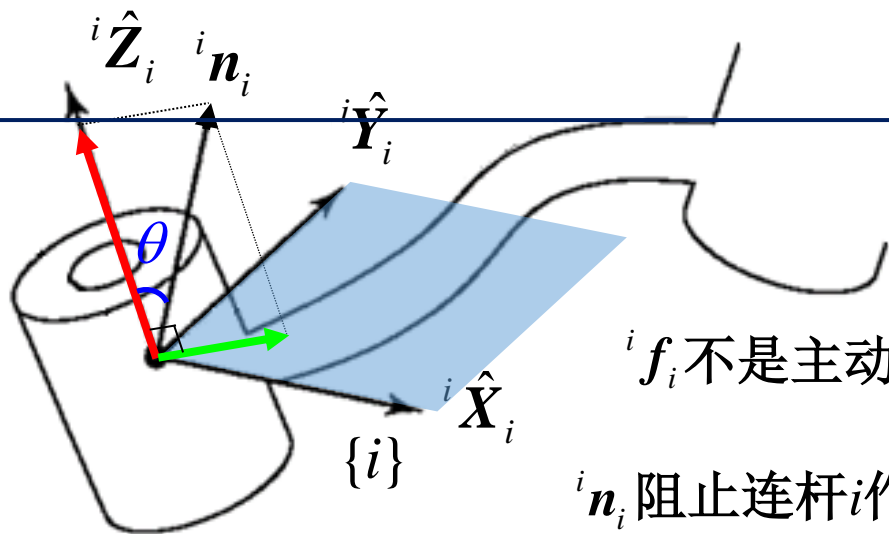
若已知末端施加给外部的力 ${}^{N+1} f_{N+1}$ 和力矩 ${}^{N+1} n_{N+1}$ ，从连杆 N 开始，依次应用这些公式，可以计算出作用在每一个连杆上的力 ${}^i f_i$ 和力矩 ${}^i n_i$

一个问题：为了平衡施加在连杆上的力和力矩，需要在关节提供多大的力矩（旋转关节）或力（移动关节）？



5.7 机械

5.7.2 机械



旋转关节*i*

${}^i f_i$ 不是主动力而是约束力，它阻止连杆*i*作直线运动

${}^i n_i$ 阻止连杆*i*作旋转运动，在{*i*}中对 ${}^i n_i$ 进行正交分解，可得到1个沿 ${}^i \hat{Z}_i$ 的力矩向量和1个垂直于 ${}^i \hat{Z}_i$ 的力矩向量

垂直于 ${}^i \hat{Z}_i$ 的力矩向量是约束力矩；沿 ${}^i \hat{Z}_i$ 的力矩向量是主动力矩，主动力矩需由关节*i*的旋转驱动器提供

主动力矩可表示为 $\tau_i {}^i \hat{Z}_i$ ，其中 $\tau_i = |{}^i n_i| \cos \theta = |{}^i n_i| |{}^i \hat{Z}_i| \cos \theta = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i$

移动关节*i*

${}^i n_i$ 是约束力矩。在{*i*}中对 ${}^i f_i$ 进行正交分解，得到1个主动力和1个约束力，需由关节*i*的直线驱动器提供的主动力表示为 $\tau_i {}^i \hat{Z}_i$ ，其中 $\tau_i = {}^i f_i^T {}^i \hat{Z}_i$

5.7 机器人的静力

5.7.2 机器人连杆间的静力传递

例子: 两连杆操作臂，在末端执行器施加作用力向量 3F ，求出所需的关节力矩。

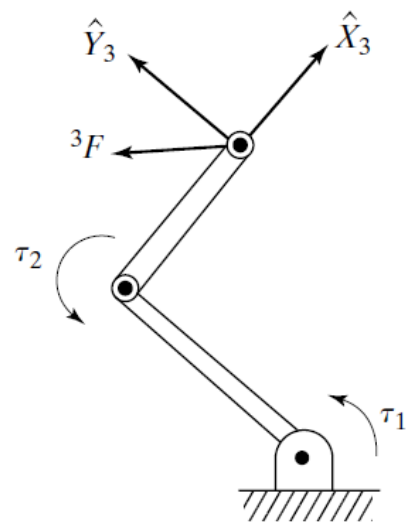
先写出各齐次变换矩阵、外力和外力矩

$${}^0_1T = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3f_3 = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^3n_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

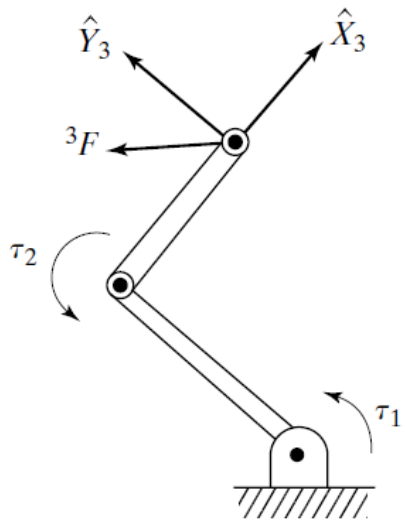


5.7 机器人的静力



5.7.2 机器人连杆间的静力传递

从{3}开始向内迭代



$${}^2\mathbf{f}_2 = {}^2_3\mathbf{R}^3\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^2\mathbf{n}_2 = {}^2_3\mathbf{R}^3\mathbf{n}_3 + {}^2\mathbf{P}_3 \times {}^2\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{pmatrix}$$

$${}^1\mathbf{f}_1 = {}^1_2\mathbf{R}^2\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^1\mathbf{n}_1 = {}^1_2\mathbf{R}^2\mathbf{n}_2 + {}^1\mathbf{P}_2 \times {}^1\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times {}^1\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y \end{pmatrix}$$

$${}^i\mathbf{f}_i = {}^i_{i+1}\mathbf{R}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1}$$

$${}^i\mathbf{n}_i = {}^i_{i+1}\mathbf{R}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + {}^i\mathbf{P}_{i+1} \times {}^i\mathbf{f}_i$$

5.7 机器人的静力

5.7.2 机器人连杆间的静力传递

求主动力矩

$$\boldsymbol{\tau}_1 = {}^1\mathbf{n}_1^T {}^1\hat{\mathbf{Z}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = {}^2\mathbf{n}_2^T {}^2\hat{\mathbf{Z}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_2 f_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_2 f_y$$

表达为向量形式

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

与速度传递式比较，发现静力传递式中的矩阵是速度雅可比的转置！

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_2 + l_1 c_2 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

5.7 机器人的静力

5.7.3 力域中的雅可比

在静态下，关节力矩与末端力平衡

操作臂末端力作用于外部，如果操作臂末端有一个位移，就做了功

如果令位移无穷小，就可以用**虚功**思想来处理静态的情况

在笛卡尔空间作的功等于关节空间作的功，即 $F^T \delta x = \tau^T \delta \Theta$

F 是末端作用于外部的 6×1 维笛卡尔力-力矩向量

δx 是末端的 6×1 维无穷小笛卡尔位移向量

τ 是 6×1 维关节力矩向量

$\delta \Theta$ 是 6×1 维无穷小关节位移向量

由雅可比的定义，有 $\delta x = J \delta \Theta$ ，因此 $F^T J \delta \Theta = \tau^T \delta \Theta$

对所有的 $\delta \Theta$ ，上式均成立，则 $F^T J = \tau^T$ ，即 $\tau = J^T F$

雅可比的转置将作用于操作臂的笛卡尔力映射成等效关节力矩

力域也有奇异性问题，如：奇异位形下，末端在某些方向得不到期望的静力

Thanks!