矩阵论（本科）22-23秋回忆卷

一

1. 若A为n阶可逆矩阵，证明A的行列式为所有奇异值的积
2. 若U、V为n阶酉矩阵，求证 $||UA||_2 = ||AV||_2 = ||UAV||_2 = ||A||_2$ （这里的范数指诱导范数/谱范数）

二

已知A、B均为n阶矩阵，（A+B）x 存在非零解, 且 A, B 都可逆, 证明

1. $\lambda = -1$是$A^{-1}B$的特征值
2. $\lambda = -1$是AB^{-1}的特征值

三

$\mathbf{x}$和$\triangle\mathbf{x}$均为$n \times 1$维向量

1. 写出 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} + \triangle\mathbf{x}$ 处泰勒展开式（写到二阶）
2. 由展开式推导 $f(\mathbf{x})$ 有极小点的充分必要条件
3. 写出最陡下降法和牛顿法的迭代过程

四

1. 写出A的Rayleigh商 $R(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}$ 取最大值的条件
2. 举例说明Rayleigh商的实际应用（说明问题背景、物理意义）

五

1. 求 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ 的梯度矩阵
2. 求 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$ 和 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的Hessian矩阵

六

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

1. 求解A的奇异值分解
2. 求A的伪逆
3. 求 $Ax=b$ 的最小二乘解

七

已知方程 $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{c}+\mathbf{e}$，$\vec{e}$ 为零均值误差向量，加权误差平方和 $Q(\mathbf{c})=\mathbf{e}^H\mathbf{W}\mathbf{e}$ ，A、W为Hermitian矩阵

1. 求使$Q(\mathbf{c})$最小的$\hat{\mathbf{c}}$
2. 若有约束条件$\mathbf{c}^H\mathbf{y}=1$，求最优化滤波器$\mathbf{c}$

八

1. 写出 $\min f_0(\mathbf{x}) \quad s.t. \quad f_i(\mathbf{x})<0 \quad (i=1,2\ldots q) \quad h_i(\mathbf{x})=0 \quad (i=1,2\ldots m)$ 的混合外罚函数和混合内罚函数（对数约束）
2. λ 是A的特征值， $\mathbf{u}$ 是 λ 对应的特征向量，写出 $A^3+A^2-4A+3I$
3. 说明方程 $Ax=b$ 中 $cond(A)$ 的物理意义，并说明当A奇异性很强或奇异时的两种解决方法