2024-2025学年 秋学期

现代控制理论

Modern Control Theory

学在浙大 http://course.zju.edu.cn
用自己的浙大通行证账号登录

主讲：吴俊　徐巍华

第7章 线性离散时间控制系统分析与综合

徐巍华

浙江大学智能系统与控制研究所,玉泉校区教十八235室

whxu@zju.edu.cn

13600549753

回顾：提纲

回顾：信号的采样与保持

- **采样器** $f^*(t)=f(t)\delta_T(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}(\omega-k\omega_s))$

- **采样定理** $\omega_s \geq 2\omega_{\mathrm{m}}$

- **零阶保持器** $\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}$

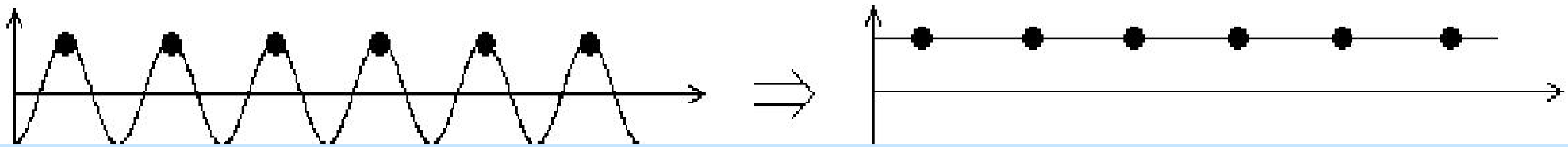
  - 保持器的任务就是解决各采样点之间的插值问题。
  - 保持器是具有外推功能的元件.
  - 保持器的外推作用,表现为现在时刻的输出信号取决于过去时刻离散信号的外推.

- **一阶保持器** $y(t)=u_k+\frac{u_k-u_{k-1}}{T}(t-kT),\ kT\leq t<(k+1)T$

- **用脉冲串描述离散时间信号**
- **用傅立叶级数处理单位脉冲串**

$$\boxed{f^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)}$$

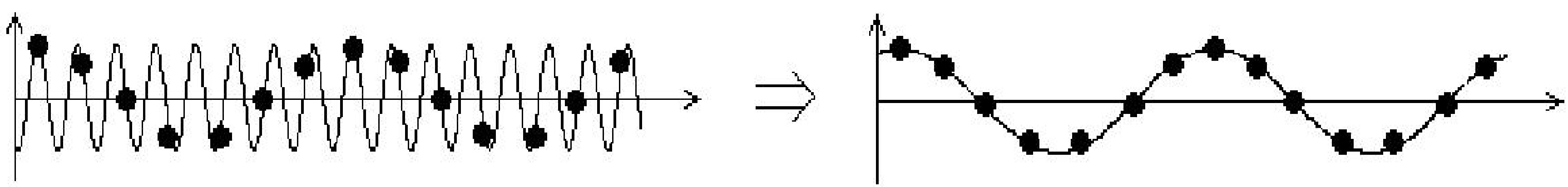
采样定理 $\omega_s \geq 2\omega_m$



T↓: 对控制过程的信息获得越多,控制效果也会越好;但计算量加大,实现较复杂控制规律的难度加大.

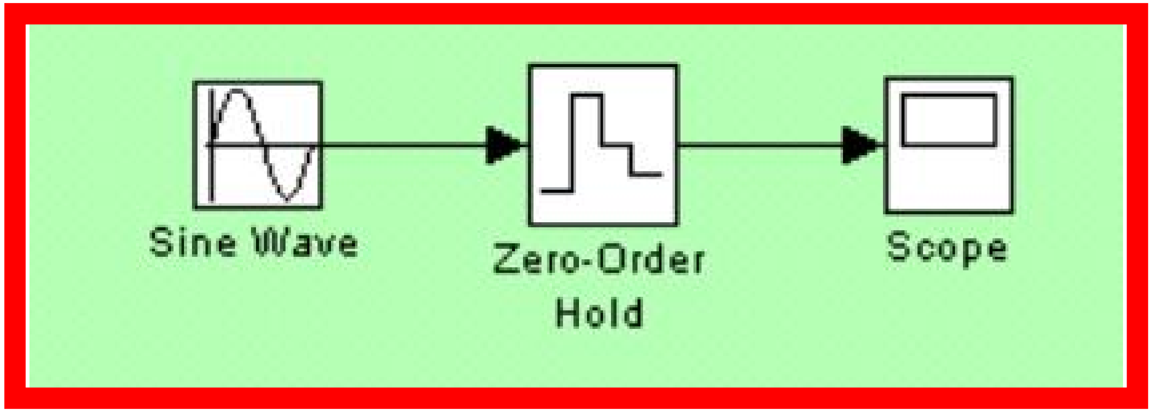
T↑: 给控制过程带来较大的误差,降低系统的动态性能,甚至有可能使控制系统不稳定.

(b) 采样频率等于信号频率的 2 倍，正弦信号离散后得到三角波信号

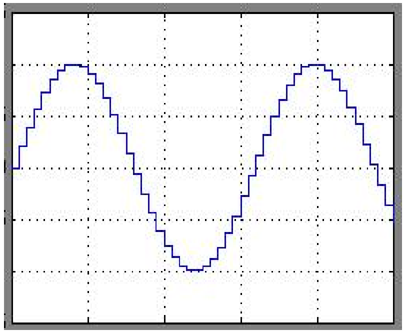


(c) 采样频率小于信号频率的 2 倍，正弦信号离散后得到更低频率的正弦信号

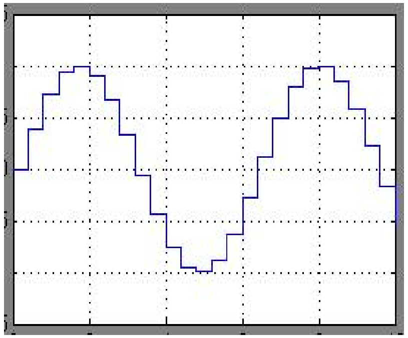
零阶保持器



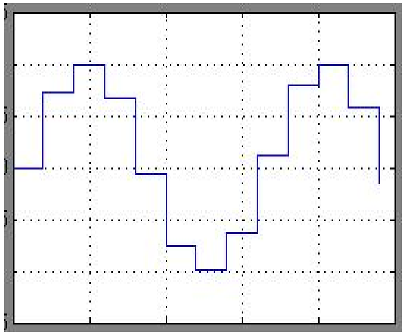
T=0.2



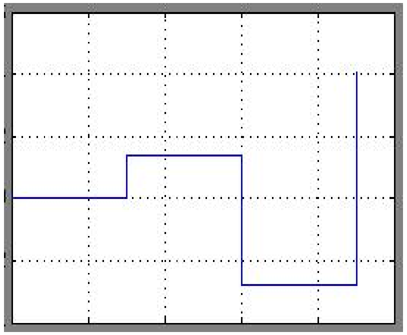
T=0.4



T=0.8



T=3



回顾：提纲

离散信号的Z变换

- 从DTFT到Z变换
- Z变换的收敛域
- Z变换的几何表示
- Z变换的性质
- Z反变换
- 单边Z变换
- Z变换与其他变换的关系

Z变换　　“采样拉普拉斯变换”

- 从Laplace变换到Z变换
- 单边Z变换的性质
- Z反变换
- Z变换的局限性

$$z \equiv e^{Ts}$$

$$s = \frac{1}{T}\ln z$$

回顾：从Laplace变换到Z变换

$$f^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta\left(t-kT\right)$$

$$F^*(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \quad \overset{z=\mathrm{e}^{Ts}}{\underset{s=\frac{1}{T}\ln z}{\Longleftrightarrow}} \quad F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

- z变换的本质与Laplace变换一样，都属频域法
- 将s的超越函数形式变为z的有理分式形式
- **注意** $F(z)\neq F(s)\Big|_{s=z}$

$$F(z)=F^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

$$F(s)=L[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(z)=Z[f^*(t)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

回顾：z变换常用方法

- z 变换(由$f(kT)$到$F(z)$)的常用方法

定义法、直接查表法(教材276页/new 238页)、部分分式法、留数法

- 本课程中均为单边Z变换：

$$f^*(t)=\sum_{\boxed{k=0}}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

$$F(z)=\sum_{\boxed{k=0}}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

Z变换表

E(s)	e(t)	E(z)
1	$\delta(t)$	1
e^{-nTs}	$\delta(t-nT)$	z^{-n}
$\frac{1}{s}$	1(t)	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
	a^K	$\frac{z}{z-a}$

常用函数的 z 变换都是 z 的有理分式。

$E(z)$ 中，分母多项式 z 的阶次大于等于分子多项式 z 的阶次。

$E(z)$ 的分母多项式中 z 的阶次与相应E(s)的分母多项式中 s 的阶次相同。

回顾：单边Z变换的几个性质

- 线性特性
- 位移特性

时移性质

- 卷积特性
- 求和特性
- 指数加权特性
- z域微分特性
- 初值和终值特性

与拉氏变换的基本定理有相似之处

回顾：单边Z变换的几个性质

- **移位 （*T*的整数倍）** p为正整数

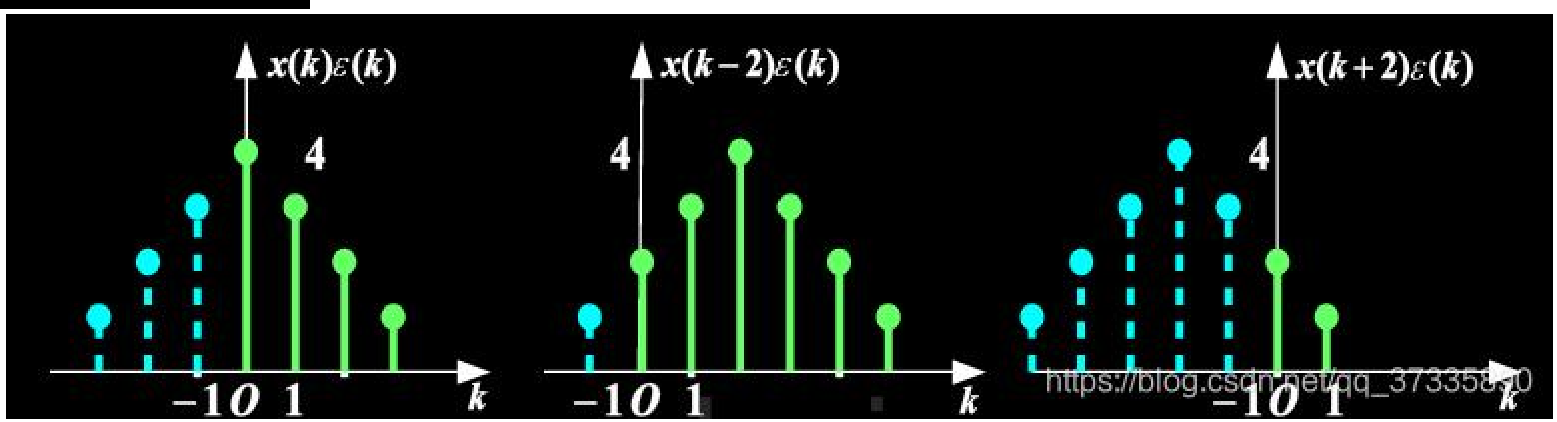
(a) 向右移位(滞后) $Z\left[f^*(t-pT)\right]=z^{-p}F(z)$

(b) 向左移位(超前) $Z\left[f^*(t+pT)\right]=z^{p}F(z)-\sum_{i=0}^{p-1}f(iT)z^{p-i}$

平移变换左加右减

$Z[x(k)\varepsilon(k)]$

假设信号x[k]取值如下，
实线 表示x[n]在n≥0的取值，虚线 表示x[n]在n<0的取值



回顾：单边Z变换的几个性质

- **初值定理：** 若 $\lim_{z\to\infty} F(z)$存在, 则

$$\lim_{k\to 0} f(kT) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots$$

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = f(0)$$

回顾：单边Z变换的几个性质

- **终值定理：** 如果 F(z) 满足下列条件之一

（1）F(z)的所有极点在开单位圆内

（2） F(z)有一个1阶极点在z=1，而其它极点在开单位圆内

则 $$\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)]$$

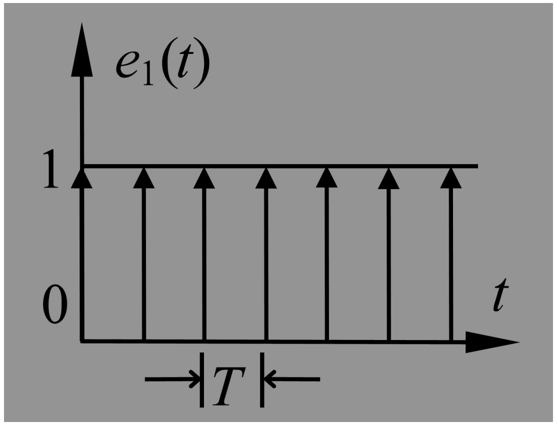
终值定理的等价表述：

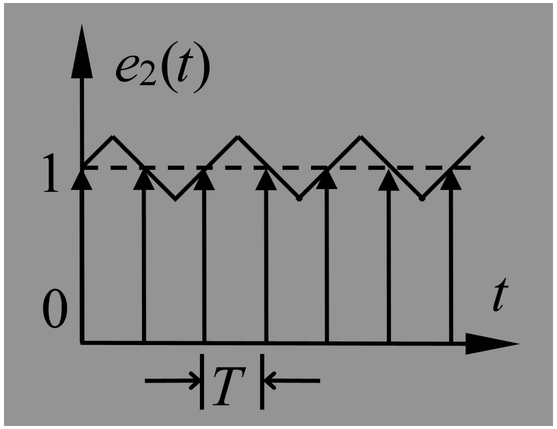
如果$(1-z^{-1})F(z)$在单位圆周上和单位圆外无极点，则$f(kT)$存在有界终值，

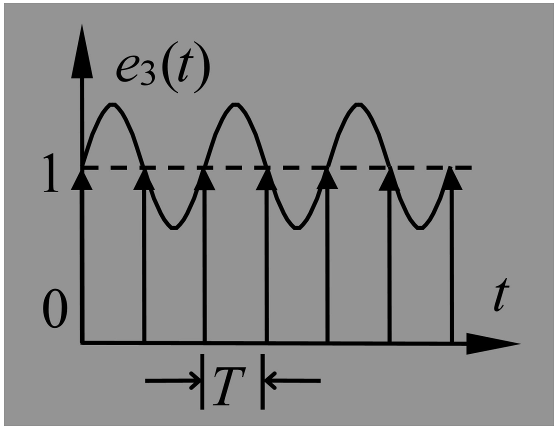
并且 $$\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)] = \lim_{z\to 1}[(z-1)F(z)]$$

z变换的离散特性

- z变换所处理的对象是离散时间序列，而不带有原信号采样点之间的任何信息。







$$e_1(t) \neq e_2(t) \neq e_3(t) \qquad E_1(z) = E_2(z) = E_3(z)$$

z变换的时间特性

采样信号展开式

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\cdot\delta(t-nT)$$
$$=e(0)\delta(t)+e(T)\delta(t-T)+e(2T)\delta(t-2T)+\cdots$$

作z变换

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\cdot z^{-n}=e(0)+e(T)\cdot z^{-1}+e(2T)\cdot z^{-2}+\cdots$$

调制脉冲$\delta(t-nT)$对应于变换算子 z^{-1}

z^{-1}又称为一步延迟因子

z变换算子 z 带有明确的时间信息。

Z反变换（由$F(z)$计算$f(kT)$）

➢ 定义

由$f(t)$的z变换$F(z)$，求其相对应的脉冲序列$f^*(t)$或数值序列$f(kT)$，称为**z反变换**，表示为

$$Z^{-1}\left[F(z)\right]=f(kT) \qquad \text{数值序列时}$$

$$Z^{-1}\left[F(z)\right]=f^*(t) \qquad \text{脉冲序列时}$$

$\{f(kT)\}$ $\xrightarrow{\text{z-变换}}$ $Z[f(kT)]=F(z)$

$Z^{-1}[F(z)]=f(kT)$ $\xleftarrow{\text{z 反变换}}$ $F(z)$

观察：

$$F(z)=\boxed{f(0)}+\boxed{f(T)}z^{-1}+\boxed{f(2T)}z^{-2}+\cdots$$

$$f^*(t)=\boxed{f(0)}\delta(t)+\boxed{f(T)}\delta(t-T)+\boxed{f(2T)}\delta(t-2T)+\cdots$$

如何求解？　　找出z^{-k}前的系数！！！

- **方法：**

  (1) 长除法　（幂级数展开法）

  (2) 部分分式法

  (3) 留数法

Z反变换

➢ 长除法

$X(z)$ 通常可表示为两个多项式之比。

$$X(z)=\frac{M(z)}{N(z)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^{-n}=C_0+C_1z^{-1}+C_2z^{-2}+\cdots+C_nz^{-n}+\cdots$$

式中：$C_n\left(n=0,1,2,3\ldots\right)$，即是$x\left(nT\right)$

- **不需要解方程，而是基于所求的最初几个序列值来猜解析表达式，有时难以得到解析表达式**
- **通常在只需求出序列最初几个数值或采用计算机进行数值求解时使用**

➢ **例7-2-7 已知** $F(z)=\dfrac{10z^2}{(z-1)(z-2)}$ **，求$F(z)$所示序列的终值。**

解：利用长除法

$$\frac{10z^2}{(z-1)(z-2)}=\frac{10z^2}{z^2-3z+2}=\frac{10}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=10+30z^{-1}+70z^{-2}+150z^{-3}+\cdots$$

可推知其终值为正无穷。

部分分式法

- 依据：Z变换的线性性质。
  - $X(z)$通常是z的有理分式，只要将$X(z)$的有理分式展开为部分分式，逐项查Z变换表，就可以得到反变换式。
- 考虑到Z变换表中，所有Z变换函数$X(z)$在其分子上普遍都有因子z，所以将$X(z)/z$展开成部分分式，然后将所得结果的每一项都乘以z，即得$X(z)$的部分分式展开式。这样做可以简化部分分式展开的计算过程。

需要知道X(z) 的全部极点，这意味着在高阶系统中要解高阶代数方程

回顾：Z反变换

- 例7-2-9： 已知 $X(z)=\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$，求$X(z)$所示序列。

解：由 部分分式法

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1-e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-aT}} \Rightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

查表

$$\therefore x[k]=1-e^{-akT}$$

$$\therefore x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{-akT})\delta(t-kT)$$

回顾：Z反变换

- **留数法**

设$X(z)$共有n个相异极点$z_1,\cdots,z_n$，则：

$$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left[X(z)z^{k-1}\right]_{z=z_i}$$

$$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}\lim_{z\to p_i}\left[\left(z-p_i\right)X(z)z^{k-1}\right]$$

可处理非有理形式，缺点与部分分式法相同

补充：

定理 **设a为$f(z)$的n级极点,**

$$\operatorname*{Res}_{z-a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \left[(z-1)^n f(z) \right]^{(n-1)}.$$

推论1: 设a为f(z)的一级极点, $\varphi(z)=(z-a)f(z)$,

则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \varphi(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$

推论2:**设a为f(z)的二级极点,** $\varphi(z) = (z-a)^2 f(z)$,

则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \varphi'(a) = \lim_{z\to a}(z-a)^2 f'(z).$

推论3 **设a为** $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ **的一级极点**

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Z反变换

01

部分分式法

需要知道X(z) 的全部极点，这意味着在高阶系统中要解高阶代数方程

02

长除法

- 不需要解方程，而是基于所求的最初几个序列值来猜解析表达式，有时难以得到解析表达式
- 通常在只需求出序列最初几个数值或采用计算机进行数值求解时使用

03

留数法

可处理非有理形式，缺点与部分分式法相同

回顾：Z变换的局限性

- 输出Z变换函数$Y(z)$，只确定了时间函数$y(t)$在采样瞬时上的数值，不能反映$y(t)$在采样间隔中的信息。故$Y(z)$的Z反变换$y(nT)$**只能代表采样瞬时$t=nT$时的数值**。

z变换实际应用中存在两个问题：

1、离散函数所对应的连续函数不唯一

2、当纯滞后不是采样周期的整数倍，无法应用z变换的滞后定理

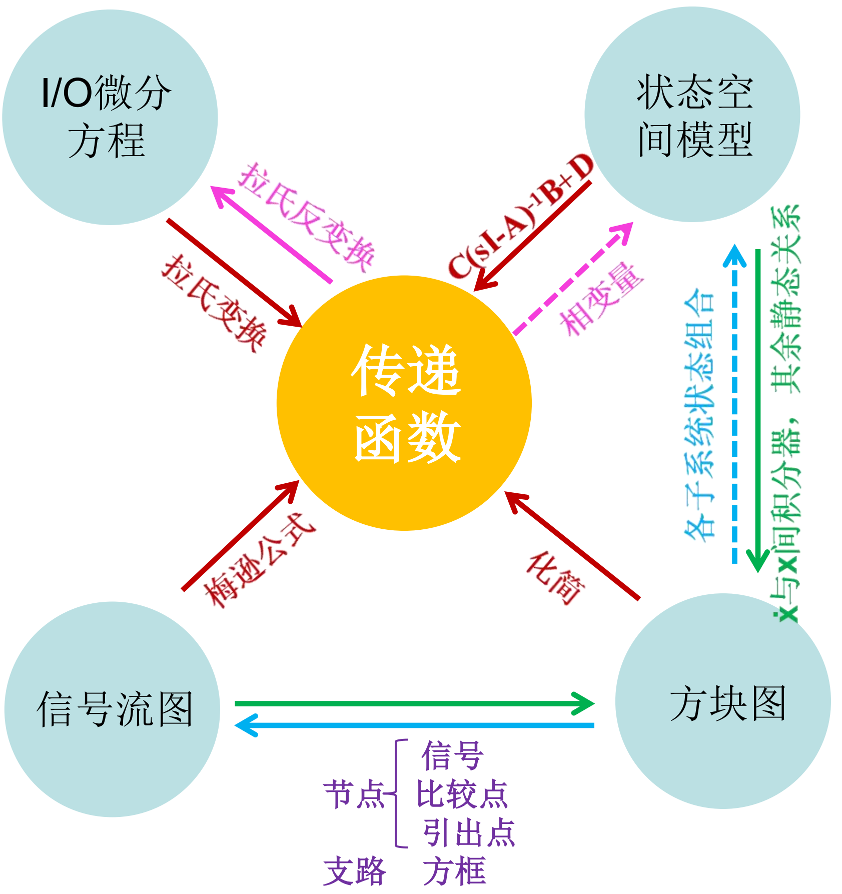
改进方法——修正（推广）Z变换法

在输出端加一个虚拟的纯滞后环节$e^{-\delta s}$，并同步采样。

——可以得到采样点中间任意时刻的信息

提纲

线性连续系统各种数学模型间的关系



7-4 离散系统的数学模型

为了研究离散系统的性能，需要建立离散系统的数学模型

线性离散系统的数学模型有：

差分方程

脉冲传递函数

离散状态空间

差分方程及其解法

脉冲传递函数的基本概念

开环脉冲传递函数和闭环脉冲传递函数的建立方法

离散系统

将输入序列 $r(n)$，$n=0,\pm 1,\pm 2,\ \cdots$

变换为输出序列 $c(n)$ 的一种变换关系

称为离散系统

记作 $$c(n)=F\left[r(n)\right]$$

其中：$r(n)$ 可以理解为 $t=nT$ 时，系统的输入序列 $r(nT)$

$c(n)$ 可以理解为 $t=nT$ 时，系统的输出序列 $c(nT)$

T 为采样周期

本课程主要学习和研究
线性定常离散系统

如果上式所示的变换关系是线性的,则称为线性离散系统;
如果这种变换关系是非线性的,则称为非线性离散系统.

离散系统的数学模型

1　**线性差分方程**

2　脉冲传递函数

3　离散系统的权序列

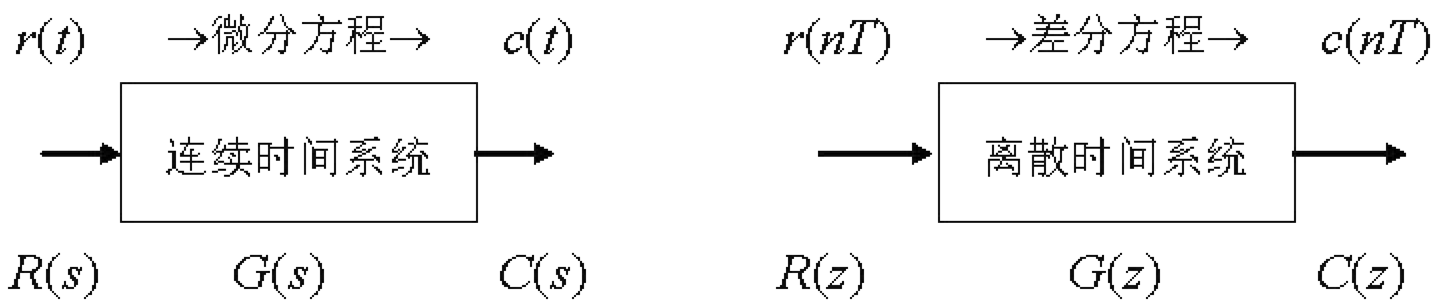
4　离散系统的状态空间模型

5　各种离散模型的关系

6　求解离散状态方程

1 线性差分方程

➢ 差分的定义



两个采样点信息之间的微商即称为差分。

$$\Delta r_n = \frac{r(nT) - r[(n-1)T]}{T}$$

忽略采样间隔 T

$$\Delta r_n = r(n) - r(n-1)$$

1 线性差分方程

差分的阶：采样点间信号平均变化率的不同称为差分的阶。

CSE

一阶差分：采样点幅值之差

二阶差分：一阶差分之差

n阶差分：n−1阶差分之差

➢ 差分的定义

设采样信号$f(kT)$，并令T=1s

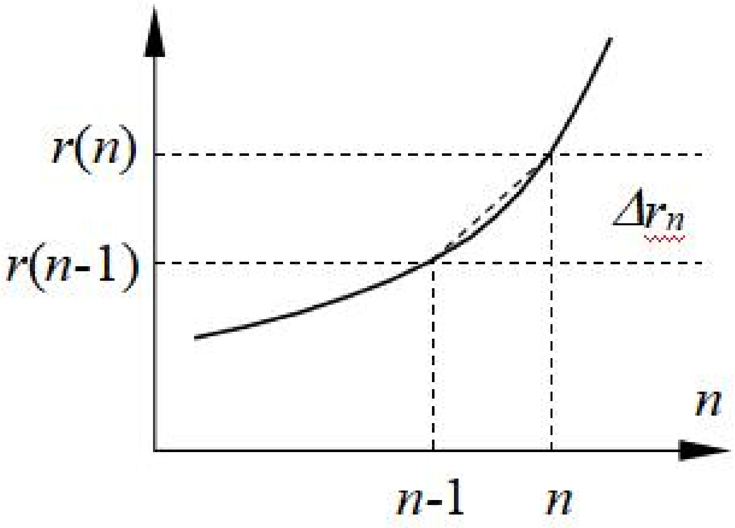
一阶前向差分定义为 $$\Delta f(k) \overset{\text{def}}{=} f(k+1) - f(k)$$

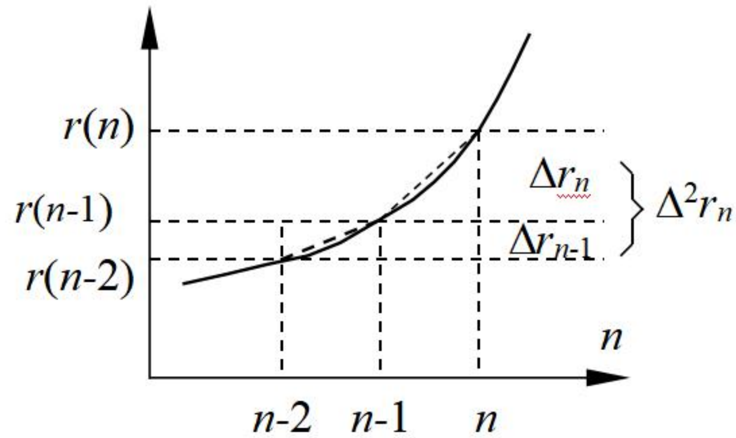
二阶前向差分定义为

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(k) &= \Delta\left[\Delta f(k)\right] = \Delta\left[f(k+1) - f(k)\right] = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) \\ &= f(k+2) - f(k+1) - \left[f(k+1) - f(k)\right] \\ &= f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)\end{aligned}$$

n阶前向差分 $$\Delta^n f(K) = \Delta^{n-1} f(k+1) - \Delta^{n-1} f(k)$$

差分的阶：采样点间信号平均变化率的不同称为差分的阶。





一阶差分：采样点幅值之差

二阶差分：一阶差分之差

n阶差分：n-1阶差分之差

1 线性差分方程

同理，**一阶后向差分**定义为

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$$

二阶后向差分定义为

$$\nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) = f(k) - f(k-1) - \left[f(k-1) - f(k-2)\right]$$
$$= f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$

n**阶后向差分**定义为：

$$\nabla^n f(k) = \nabla^{n-1} f(k) - \nabla^{n-1} f(k-1)$$

1 线性差分方程

➤ 差分方程

类似于微分方程，确定两个离散时间序列关系的方程就称为差分方程

若方程的变量除了含有$f(k)$以外，还有$f(k)$的差分

$$\Delta f(k)\cdots\Delta^{n} f(k)$$

则称该方程为差分方程。

1 线性差分方程

- 正如通常采用线性定常微分方程描述线性连续系统一样，通常采用线性定常差分方程描述线性离散系统。
- 可用**前向差分方程**来描述线性定常离散控制系统

$$\begin{aligned}&a_n y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)\\&=b_m r(k+m)+b_{m-1}r(k+m-1)+\cdots+b_1 r(k+1)+b_0 r(k)\end{aligned}$$

- **后向差分方程**描述线性定常离散系统也可用

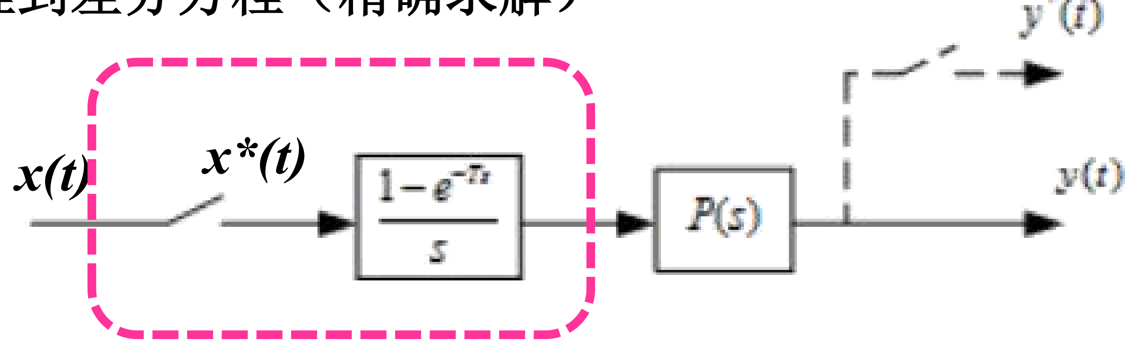
$$\begin{aligned}&a_n y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0 y(k-n)\\&=b_m r(k)+b_{m-1}r(k-1)+\cdots+b_0 r(k-m)\end{aligned}$$

- 因果系统，$m \le n$，称n为差分方程的阶次

不失一般性，为方便起见，可设a_n=1

1 线性差分方程

- 从微分方程到差分方程（精确求解）



一阶微分方程 $T_1\dfrac{dy}{dt}+y=Kx$，当$nT< t <(n+1)T$，输入恒为$x(nT)$，微分方程的解：

$$y(t)=ce^{-t/T_1}+Kx(nT)$$

将边界条件$y(nT)$代入，得$c=\dfrac{y(nT)-Kx(nT)}{e^{-nT/T_1}}$

将 c 及终止时间 $t=(n+1)T$代入方程解，得

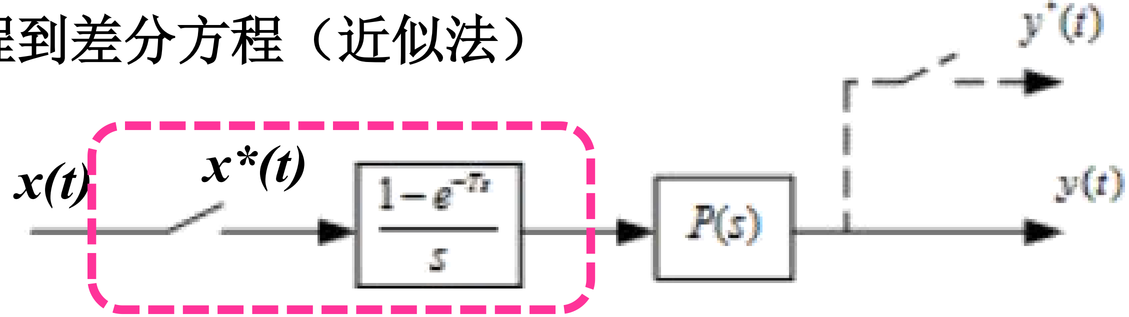
$$y[(n+1)T]=\frac{[y(nT)-Kx(nT)]e^{-(n+1)T/T_1}}{e^{-nT/T_1}}+Kx(nT)$$

$$\boxed{y[(n+1)T]-ay(nT)=Kbx(nT)}$$

其中$a=e^{-T/T_1},b=1-e^{-T/T_1}$

1 线性差分方程

- 从微分方程到差分方程（近似法）



一阶微分方程

$$T_1\frac{dy}{dt}+y=Kx$$

$nT<t<(n+1)T$

$$T_1\frac{y[(n+1)T]-y(nT)}{T}+y(nT)=Kx(nT)$$

一阶差分方程表示

$$y[(n+1)T]-(1-\frac{T}{T_1})y(nT)=K\frac{T}{T_1}x(nT)$$

$$\boxed{y[(n+1)T]-ay(nT)=Kbx(nT)}$$

其中$a=1-\dfrac{T}{T_1},b=\dfrac{T}{T_1}$

其中$a=e^{-T/T_1},b=1-e^{-T/T_1}$

当采样周期T比系统的主要时间常数T1小得多的时候
可以忽略不计 模型离散化所造成的误差

1 线性差分方程

- **求解差分方程**常用的有**迭代法**和**Z变换法**

- 迭代法（递推法）

线性定常差分方程 （前向或后向）

输入序列、边界条件

递推关系

输出序列

已知差分方程$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=u(k)$,其输入序列$u(k)=1$,边界条件为$y(0)=0, y(1)=1$,请用递推法求$y(k)$。

解：$y(k+2)=5y(k+1)-6y(k)+u(k)$

$$y(2)=5y(1)-6y(0)+u(0)=6$$

$$y(3)=5y(2)-6y(1)+u(1)=25$$

$$y(4)=5y(3)-6y(2)+u(2)=90$$

$$\vdots$$

1 线性差分方程

- Z变换法

$$a_n y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)$$
$$=b_m r(k+m)+b_{m-1}r(k+m-1)+\cdots+b_1 r(k+1)+b_0 r(k)$$

$$a_n y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0 y(k-n)$$
$$=b_m r(k)+b_{m-1}r(k-1)+\cdots+b_0 r(k-m)$$

对差分方程两边做z变换

↓

代入已知的初始条件

↓

由Z变换式求出输出序列y(kT)的Z变换表达式Y(z)

↓

对Y(z)进行Z反变换，求出y(kT)

- Z变换法

➢ 例7-3-1 已知离散系统的差分方程为 $y\left[(k+1)T\right]+2y(kT)=5kT$

且$y(0)$ = -1，求差分方程的解。（Z变换法）

解：对差分方程取Z变换，得 $z\left[Y(z)-y(0)\right]+2Y(z)=5\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$

$$Y(z)=\frac{5Tz}{(z-1)^2(z+2)}-\frac{z}{z+2}$$

$$\because \frac{1}{(z+2)(z-1)^2}=\frac{1}{9(z+2)}+\frac{1}{3(z-1)^2}-\frac{1}{9(z-1)}$$

$$\therefore Y(z)=\frac{5T}{9}\left[\frac{z}{z+2}+\frac{3z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}\right]-\frac{z}{z+2}$$

查Z变换表，有

$$y(kT)=\frac{5T}{9}\left[(-2)^k+3k-1\right]-(-2)^k$$

$$y^*(t)=\frac{5T}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(1-\frac{9}{5T}\right)(-2)^k+3k-1\right]\delta(t-kT)$$

例 用z变换解下列差分方程

$$C(k+2)+3C(k+1)+2C(k)=0$$

初始条件为：$C(0)=0, C(1)=1.$

解 对上式进行z变换得

$$z^2C(z)-z^2C(0)-zC(1)+3zC(z)-3zC(0)+2C(z)=0$$

代入初始条件，并解得

$$C(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}$$

故：$$C(k)=(-1)^k-(-2)^k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

离散系统的数学模型

1 线性差分方程

2 脉冲传递函数 Z传递函数

3 离散系统的权序列

4 离散系统的状态空间模型

5 各种离散模型的关系

6 求解离散状态方程

- **采样函数拉氏变换的两个重要性质**
  - 采样函数$e^*(t)$ 的拉氏变换 $E^*(s)$具有周期性

$$E^*(s - jk\omega_s) = E^*(s)$$

  - 若$E^*(s)$与连续函数的拉氏变换$G(s)$相乘后再离散化，则$E^*(s)$可以从离散符号中提取出来

$$[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$$

2 脉冲传递函数

Laplace变换的频移特性

若$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$

则$x(t)e^{at} \xleftrightarrow{L} X(s-a)$, a为复常数

引理: 对任意整数k, 有$H^*(s) = H^*(s - jk\omega_s)$

采样函数$e^*(t)$ 的拉氏变换 $E^*(s)$具有周期性

证明: $h^*(t) = h(t)\delta_T(t) = h(t)\dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} = \dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t)e^{jn\omega_s t}$

$$H^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s - \mathrm{j}n\omega_s)$$

$h(t)e^{jn\omega_s t} \xleftrightarrow{L} H(s - \mathrm{j}n\omega_s)$

对任意整数k, $H^*(s - \mathrm{j}k\omega_s) = \dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s - \mathrm{j}k\omega_s - \mathrm{j}n\omega_s)$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s - \mathrm{j}(n+k)\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n+k=-\infty}^{\infty} H(s - \mathrm{j}(n+k)\omega_s) = H^*(s)$$

2 脉冲传递函数

- 命题: $[G(s)F^*(s)]^* = G^*(s)F^*(s)$

证：由 $H^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(s - jn\omega_s)$

$$[G(s)F^*(s)]^* = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[G(s - jn\omega_s)F^*(s - jn\omega_s)]$$

$F^*(s) = F^*(s - jn\omega_s)$

$$[G(s)F^*(s)]^* = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[G(s - jn\omega_s)F^*(s)]$$

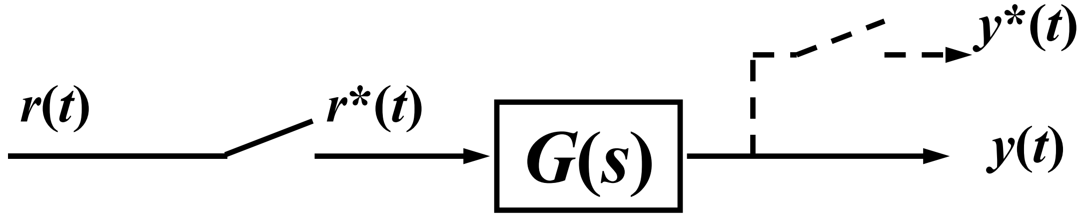
$$= F^*(s)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(s - jn\omega_s)$$

$$= G^*(s)F^*(s)$$

若G(s)的输入是离散时间信号，且在G(s)后有采样器，则采样器可以与G(s)合并为G*(s)=G(z)

2 脉冲传递函数

- **定义**



脉冲传递函数：在零初始条件下，输出$y^*(t)$的z变换$Y(z)$与非零输入$r^*(t)$的z变换$R(z)$之比，$G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=\dfrac{b_m z^m+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}, m\le n$

零初始条件：当$k<0$时，$y(k)=0$，$r(k)=0$

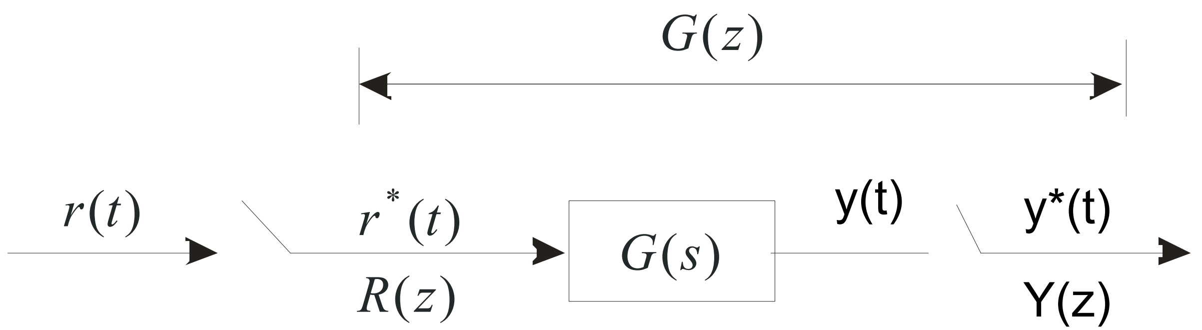
等价定义：在零初始条件下，系统的单位脉冲响应序列的z 变换

$$G(z)=Z\left[y^*(t)\right]\Big|_{r^*(t)=\delta(t)}$$

输入输出关系 $Y(z)=G(z)R(z)$

若没有对$r(t)$的采样，则无$G(z)$!!

注意：



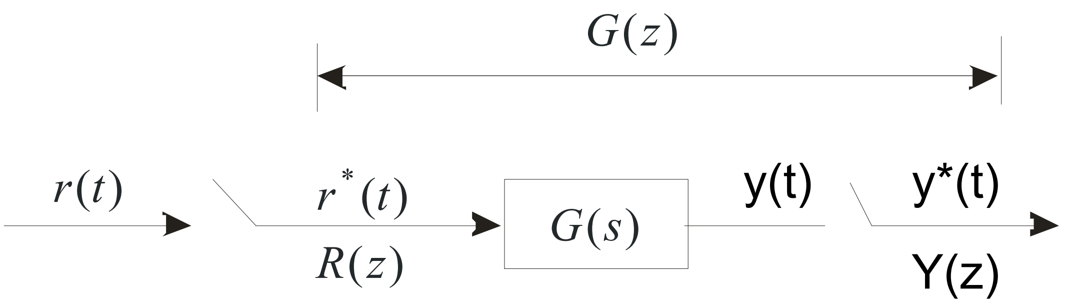
1、G(s) 表示线性环节本身的传递函数，G(z)表示线性环节和采样器两者组合体的传递函数；

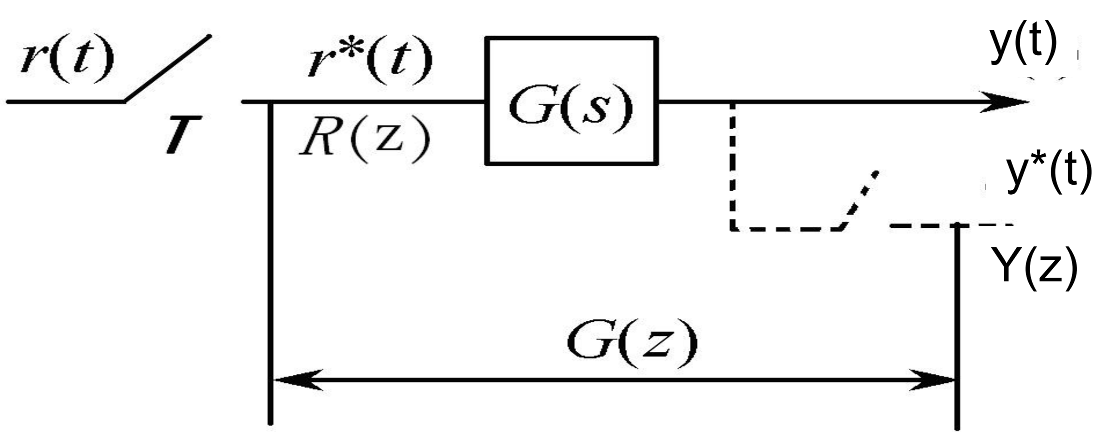
2、 G(z)不是通过G(s) 置换两个自变量而成，而是通过求G(s)的Z变换而来；

$$G(z) = Z(g(t)) = Z(L^{-1}(G(s)))$$

注意：

3、实际上大多数采样系统的输出信号往往是连续信号$y(t)$，而不是离散信号y*(t) 。在这种情况下，为了应用脉冲传递函数的概念，我们可以在输出端虚设一个采样开关。 如图中虚线所示，它与输入采样开关一样以周期T同步工作。这样，输出的采样信号就可根据公式求得。

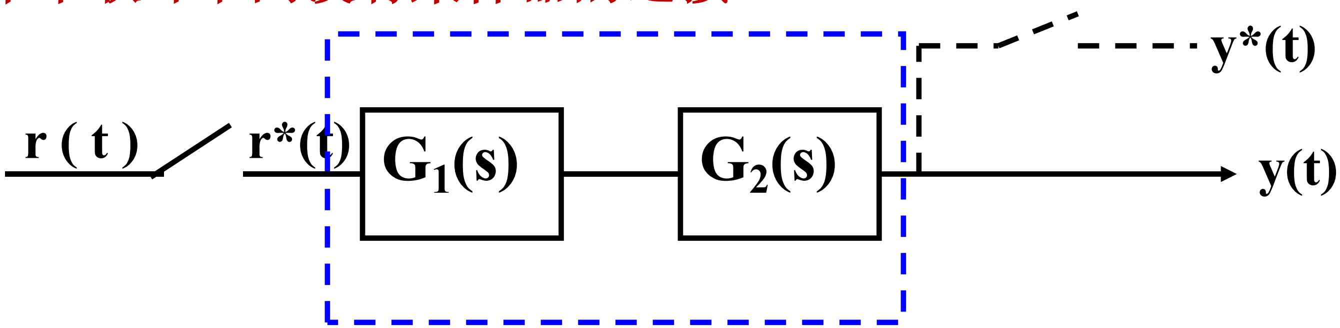




2 脉冲传递函数

- **开环串联系统的脉冲传递函数**

1） 两个串联环节间没有采样器的连接



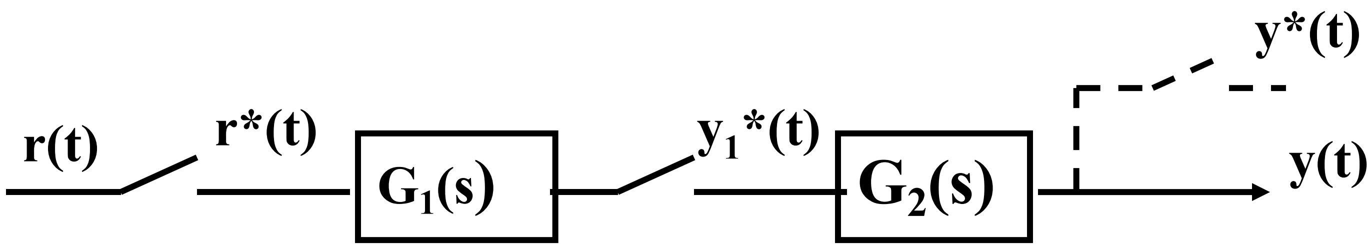
$$G(Z)=\frac{Y(Z)}{R(Z)}=Z[G_2(s)G_1(s)]$$

也记 $G_2G_1(z)=Z\left[G_2(s)G_1(s)\right]=G_2G_1^*(s)$

注意：一般地$G_2G_1^*(s)\neq G_2^*(s)G_1^*(s)$

2 脉冲传递函数

2） 两个串联环节间有采样器的连接，且采样器同步工作

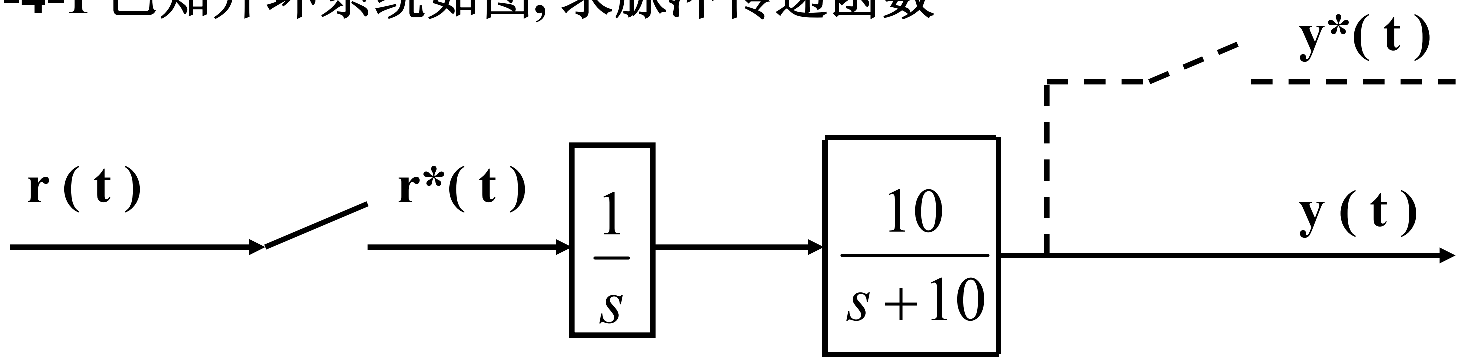


$$G_1(z)=\frac{Y_1(z)}{R(z)}=Z[G_1(s)]$$

$$G_2(z)=\frac{Y(z)}{Y_1(z)}=Z[G_2(s)]$$

$$\Rightarrow \quad G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_2(z)G_1(z)$$

例7-4-1 已知开环系统如图, 求脉冲传递函数



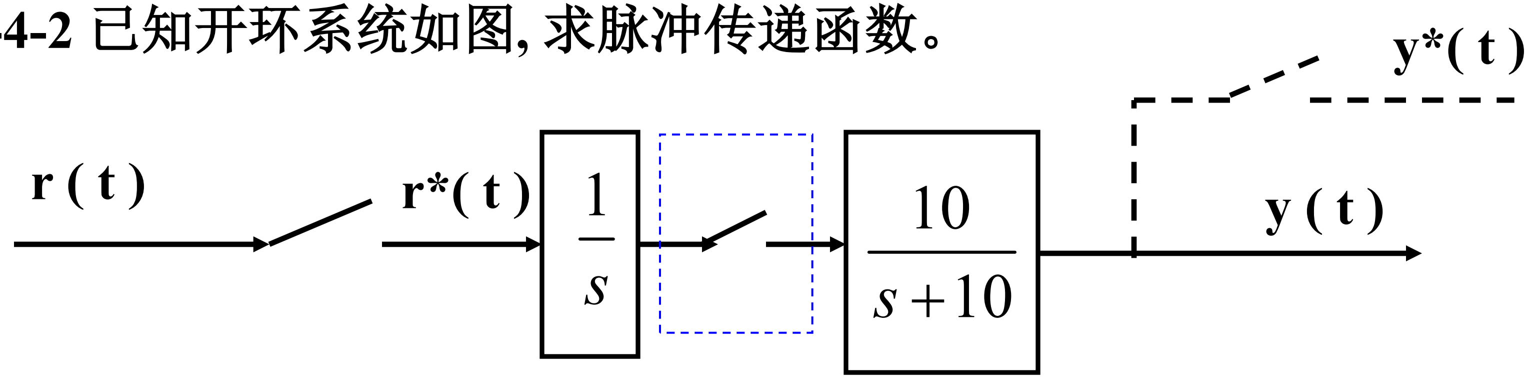
解:

$$G(Z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=Z[G_2(s)G_1(s)]$$

$$G(z)=Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right]=Z\left[\frac{1}{s}\right]-Z\left[\frac{1}{s+10}\right]$$

$$=\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-10T}}\right)=\frac{(1-e^{-10T})z}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

例7-4-2 已知开环系统如图, 求脉冲传递函数。



解：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_2(z)\cdot G_1(z)$$

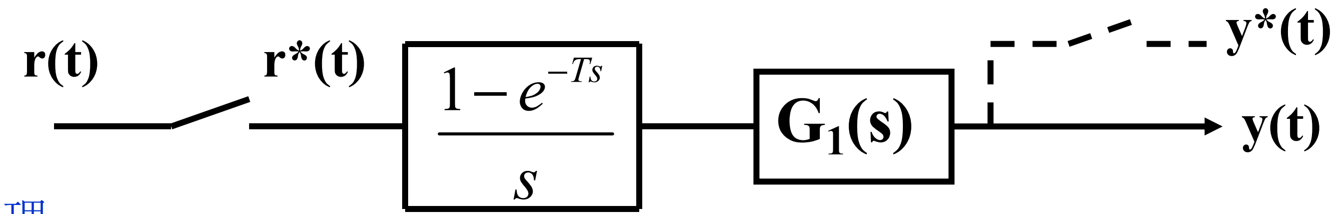
$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s}\right]\cdot Z\left[\frac{10}{s+10}\right]=\frac{10z^2}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

$$\boxed{\neq Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right]=\frac{(1-e^{-10T})z}{(z-1)(z-e^{-10T})}}$$

在串联环节之间有无同步采样开关隔离时，其总的脉冲传递函数是不同的，但是，不同之处仅表现在其零点不同，极点仍然一样。

2 脉冲传递函数

3) 带零阶保持器的开环系统的脉冲传递函数



由线性定理

$$G(z)=Z\left[G_1(s)\frac{1-e^{-TS}}{s}\right]=Z\left[G_1(s)\frac{1}{s}\right]-Z\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]$$

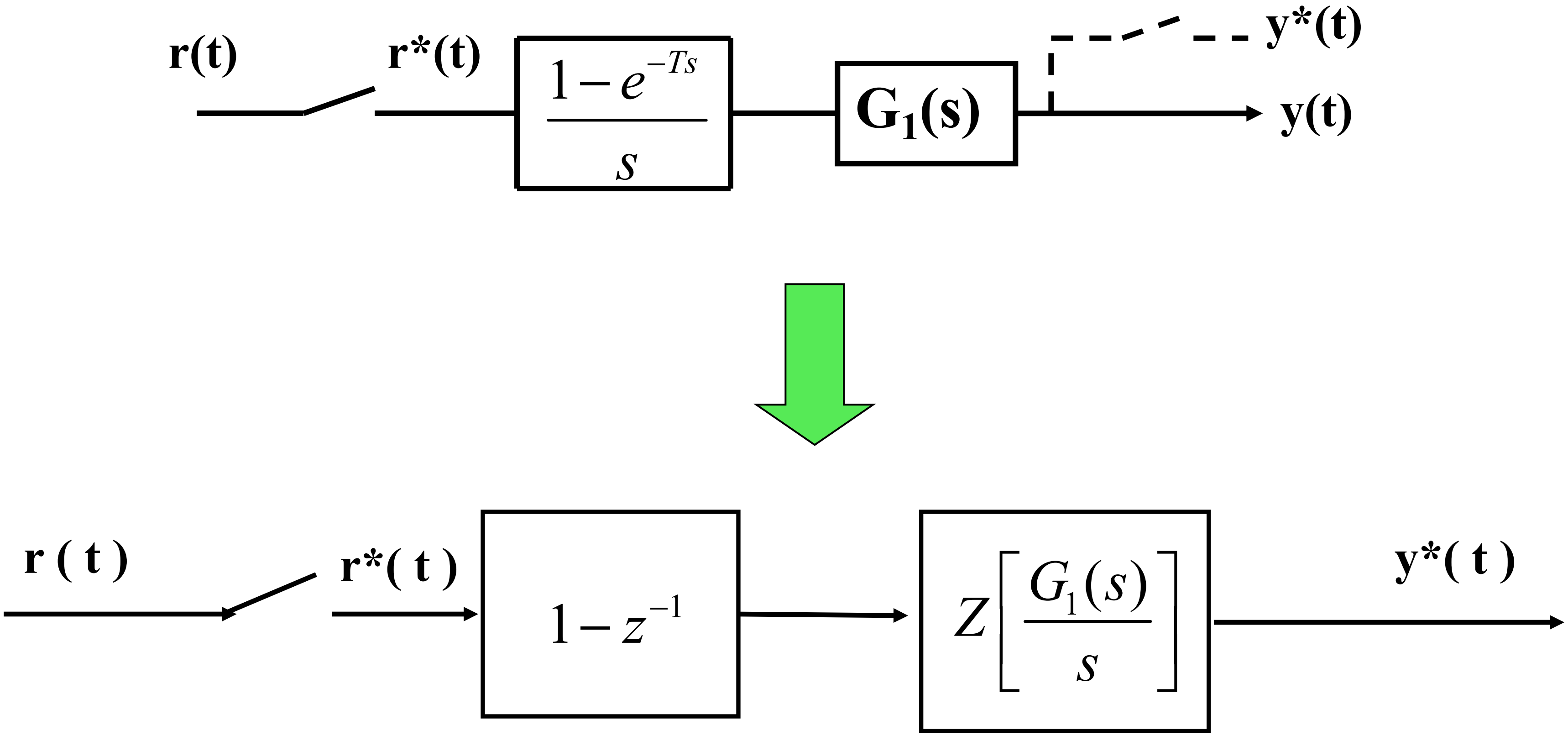
令$G_2(s)=G_1(s)\frac{1}{s}$,其单位脉冲响应为$g_2(t)$

则$L^{-1}\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]=g_2(t-T)$ *Laplace*变换的时移特性

于是$Z\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]=Z\left[g_2(t-T)\right]=z^{-1}G_2(z)$ *Z*变换的移位特性

故 $G(z)=(1-z^{-1})G_2(z)$

2 脉冲传递函数



$$G(z) = Z\left[G_1(s)\frac{1-e^{-TS}}{s}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G_1(s)}{s}\right]$$

思考

- 不同形式的并联环节?

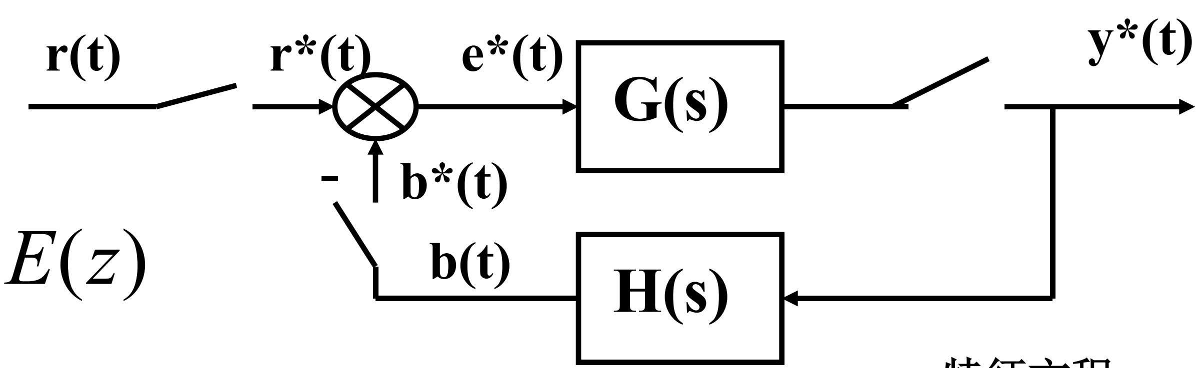
p.281-282

2 脉冲传递函数

采样器位置多种可能性
反馈回路离散系统没有唯一的
结构图形式

- **闭环反馈系统的脉冲传递函数**

1) 反馈回路 (1)



$$Y(z)=G(z)E(z)$$

$$E(z)=R(z)-H(z)Y(z)$$

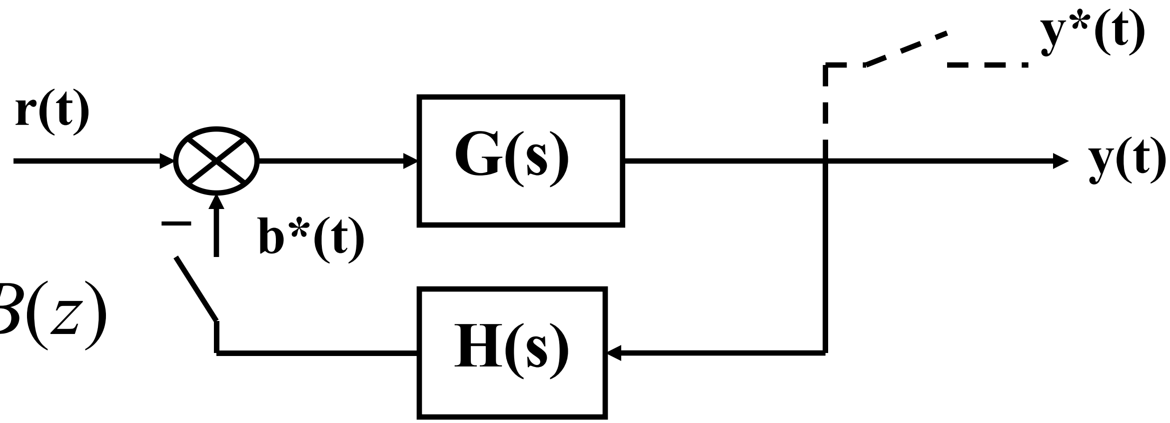
$$Y(z)=G(z)R(z)-G(z)H(z)Y(z)$$

$$[1+G(z)H(z)]Y(z)=G(z)R(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{\boxed{1+G(z)H(z)}}$$

特征方程

从输入端开始，顺着箭头方向一步步分析计算

2) 反馈回路(2)



$$Y(z)=GR(z)-G(z)B(z)$$

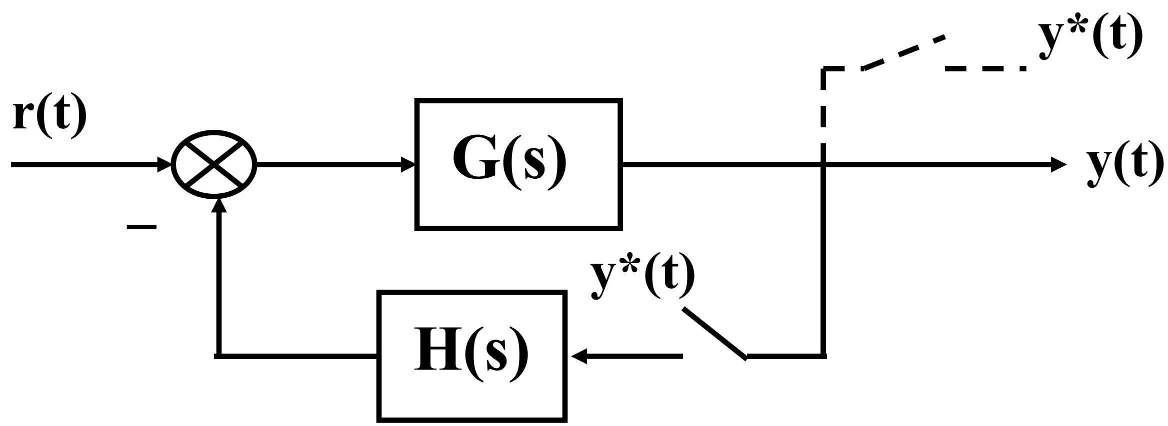
$$B(z)=HGR(z)-HG(z)B(z)$$

$$B(z)=\frac{HGR(z)}{1+HG(z)}$$

$$Y(z)=GR(z)-\frac{G(z)HGR(z)}{1+HG(z)}$$

注意: 无 $G_{closed}(z)$.

3) 反馈回路(3)

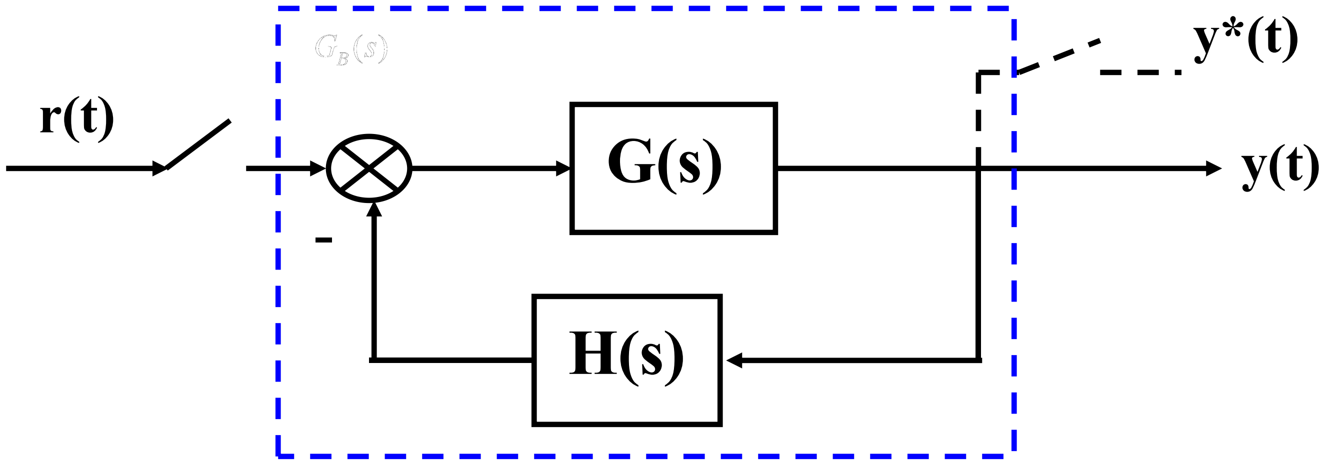


注意: 无 $G_{closed}(z)$.

$$Y(z)=GR(z)-GH(z)Y(z)$$

$$Y(z)=\frac{GR(z)}{1+GH(z)}$$

4) 反馈回路(4)



$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

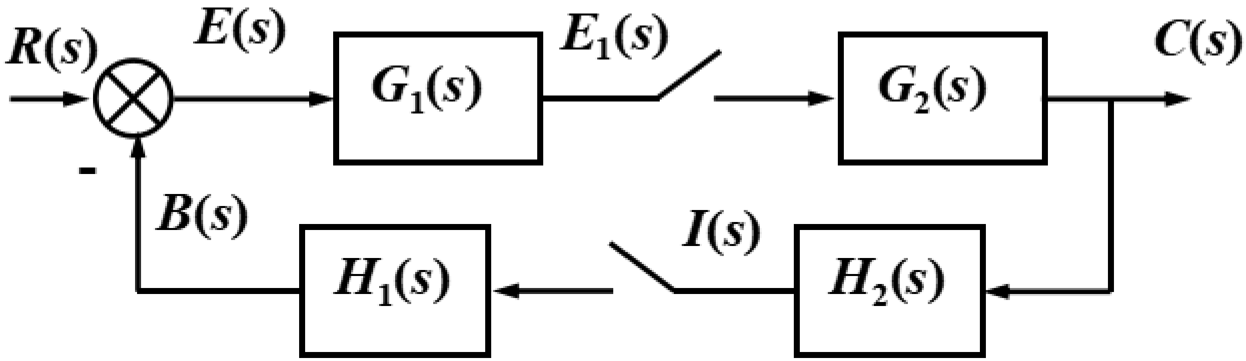
$$Y(z) = G_B(z)R(z)$$

$$Y(z) = \frac{G}{1+GH}(z)R(z)$$

$$G_{closed}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G}{1+GH}(z)$$

2 脉冲传递函数

例7-4-3



解:

$$C(z) = G_2(z)E_1(z)$$

$$\left.\begin{array}{l} E_1(z) = G_1R(z) - G_1H_1(z)I(z) \\ I(z) = H_2G_2(z)E_1(z) \end{array}\right\} \Rightarrow E_1(z) = \frac{G_1R(z)}{1 + G_1H_1(z)H_2G_2(z)}$$

$$C(z) = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_1H_1(z)H_2G_2(z)}$$

2 脉冲传递函数

- **比较连续系统的传递函数G(s)与离散系统的脉冲传递函数G(z)**

相同： 1）线性定常系统；

2）零初始条件；

3）只与系统的结构参数有关

差异： 1）G(s)一定存在；G(z)则不一定，取决于输入端R(z)存在否（即输入端是否有采样器)；故很多时候是求输出Y的Z变换式；

2）当系统具有相同环节时，G(z)或Y(z)与采样器的位置相关,可用逐步推导法来求。

2 脉冲传递函数

- 输出变量的Z变换式Y(z)的计算——单回路梅逊公式的推广：

  若前向通道(环内)中有一实际的采样器存在，就可用“视察法”直接求Y(z) 。

$$Y(z)=\frac{G_f(z)}{1-G_0(z)}$$

注意:此式的结果是Y(z)而非G(z)

此式针对正反馈

其中： $G_0(z)$ 为开环脉冲传递函数（环可以从任一采样器断开，沿信号方向走一周而构成）；

$G_f(z)$ 为前向通路中输出量的Z变换，如将R(s)视为前向通路中的一个环节， $G_f(z)$ 是包括输入在内的由输入到输出的前向通路的Z变换函数。

对于一般的单闭环系统

$$y(z)=\frac{\text{前向通道上,从输入信号开始,依次写出各传递函数相应的代号字母(不带}s\text{),当遇到采样开关时,填上}(z)}{1+\text{系统环中从某一采样开关算起,依次将各传递函数相应的代号字母写出,遇到采样开关时,填上}(z)\text{,循环一周即可}}$$

2 脉冲传递函数

- **方块图运算时对采样开关的处理技巧**

单回路梅逊公式的推广：若前向通道(环内)中有一实际的采样开关存在，就可用“**视察法**”直接求$Y(z)$。

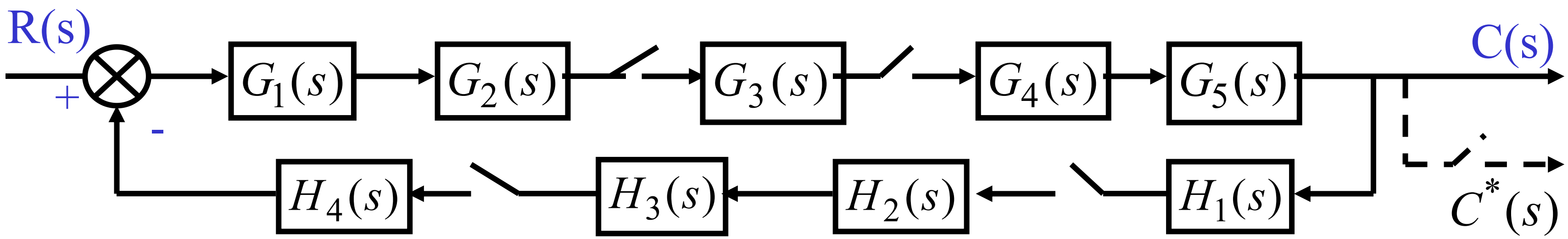
1）用代数法**在采样开关出口处按连续系统**处理（暂时对采样开关“视而不见”）（——特别注意采样开关的位置）；

2）在采样开关隔开的环节处加上“ * ”号（或直接用z变换式表示）；

3）对输出$y(t)$**虚拟采样**并消去中间变量；

4）方块图的等效变换与连续系统完全相同，其原则是变换前后对应的输入输出信息不变。

例



$$C(z)=\frac{RG_1G_2(z)G_3(z)G_4G_5(z)}{1+G_4G_5H_1(z)H_2H_3(z)H_4G_1G_2(z)G_3(z)}$$

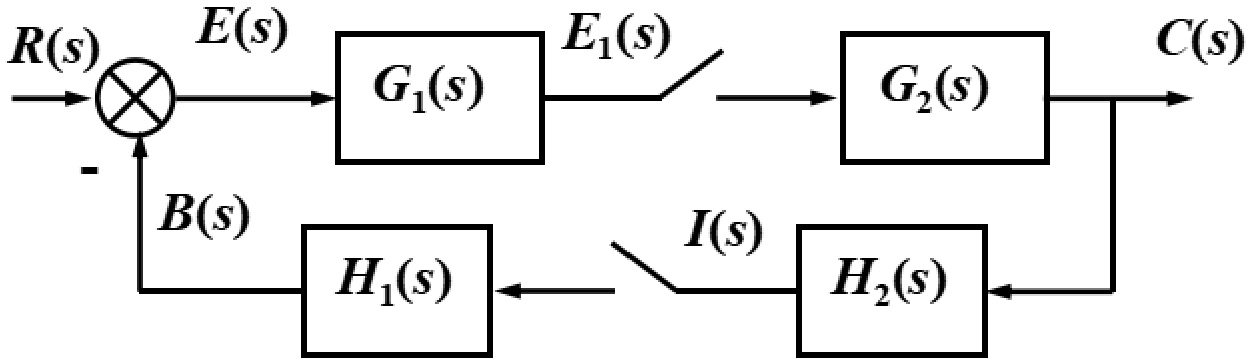
$C(z)=$ 前向通道上，从输入信号开始，依次写出各传递函数相应的代号 字母(不带s)，当遇到采样开关时，填上(z)

———————————————————————————

1+系统环中从某一采样开 关算起，依次将各传递函数相应的代号字 母写出，遇到采样开关时，填上(z)，循环一周即可

2 脉冲传递函数

- 例7-4-3



解：采用“视察法”直接求C(z)

$$G_f(z) = G_2(z)G_1R(z)$$

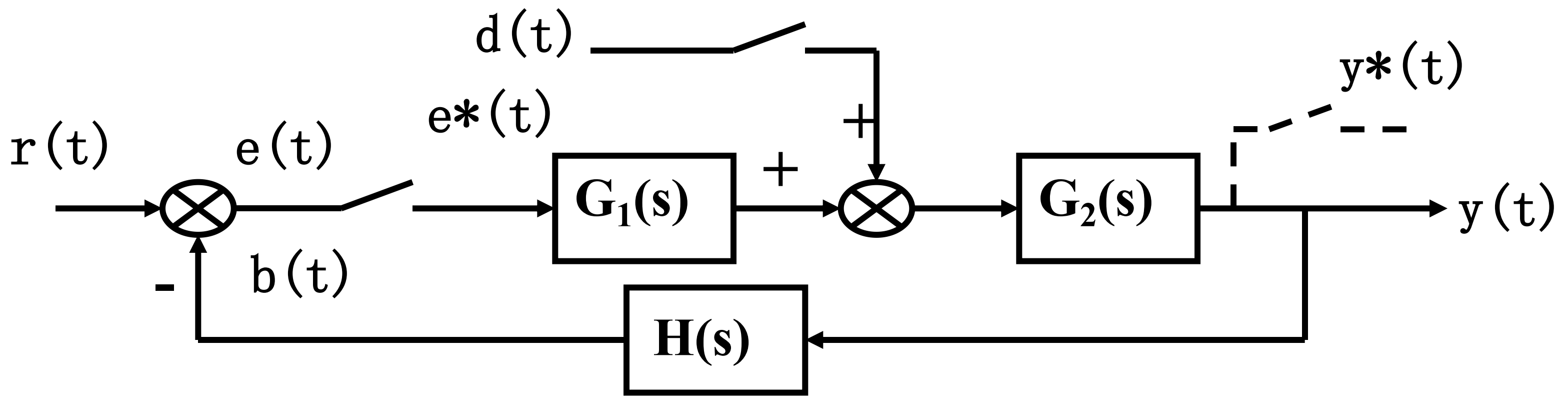
$$G_0(z) = -G_1H_1(z)H_2G_2(z)$$

$$\boxed{C(z) = \frac{G_f(z)}{1 - G_0(z)} = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_1H_1(z)H_2G_2(z)}}$$

$$C(z) = \frac{\text{前向通道上，从输入信号开始，依次写出各传递函数相应的代号字母(不带}s\text{)，当遇到采样开关时，填上}(z)}{1+\text{系统环中从某一采样开关算起，依次将各传递函数相应的代号字母写出，遇到采样开关时，填上}(z)\text{，循环一周即可}}$$

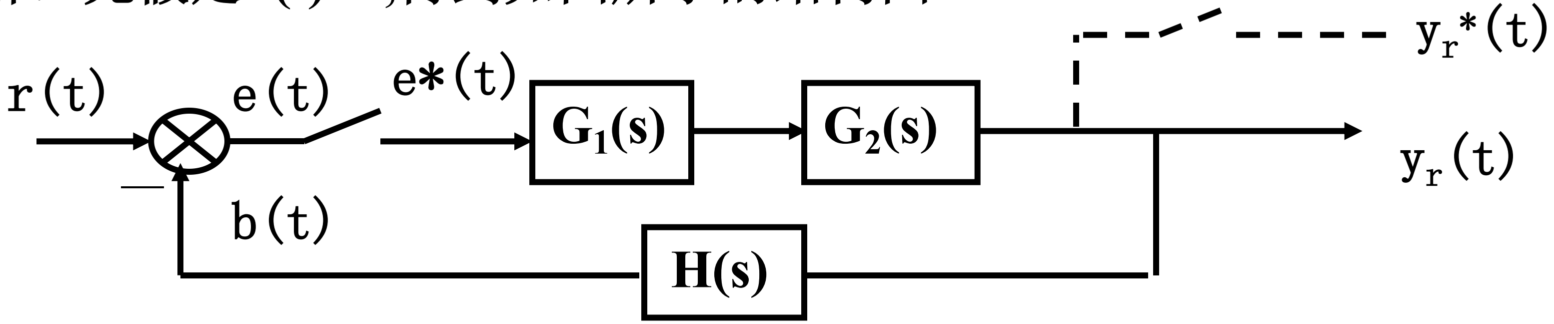
与逐步推导法的结果相同

- 例7-4-4 已知带闭环控制系统如图, 求脉冲传递函数及输出Z变换式。



带干扰的闭环控制系统

解：先假定d(t)=0,得到如图所示的结构图



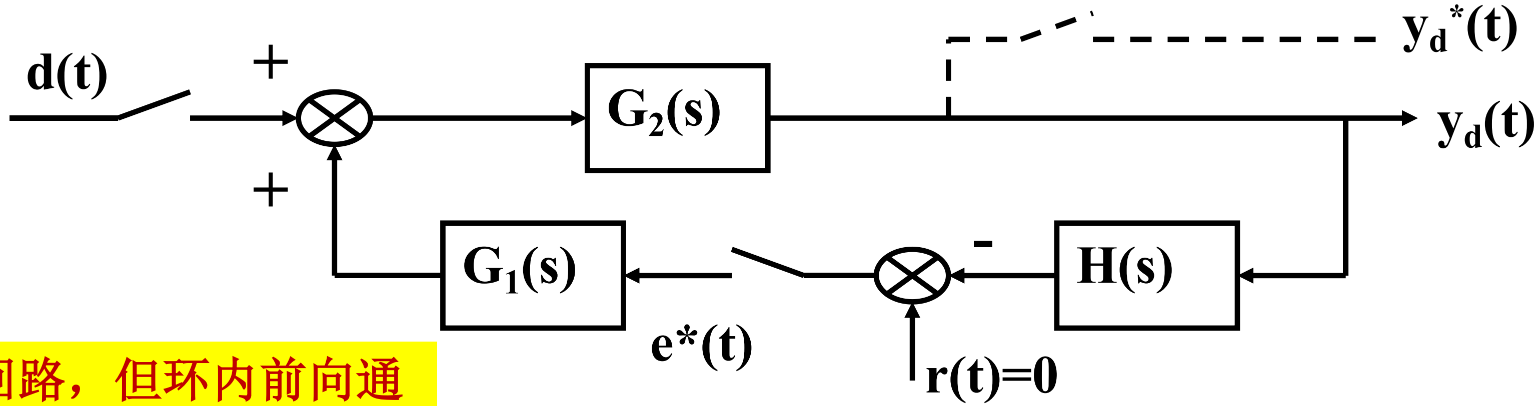
满足“视察法”直接求Y(z)条件，试求Y(z)!!

$$Y(z)=\frac{G_2G_1(z)R(z)}{1+HG_2G_1(z)}$$

$$G_{R\_closed}(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_2G_1(z)}{1+HG_2G_1(z)}$$

2 脉冲传递函数

再假定输入r(t)=0,得到按扰动输入的系统结构图



单回路，但环内前向通道无采样器，不满足“视察法”条件!!

将$Y_D(z)$用$E(z)$表示, $Y_D(z)=G_2(z)D(z)+G_2G_1(z)E(z)$

从d(t)至e*(t)的环内前向通道有采样器，满足“视察法”条件!!

$$E(z)=-\frac{HG_2(z)D(z)}{1+HG_2G_1(z)}$$

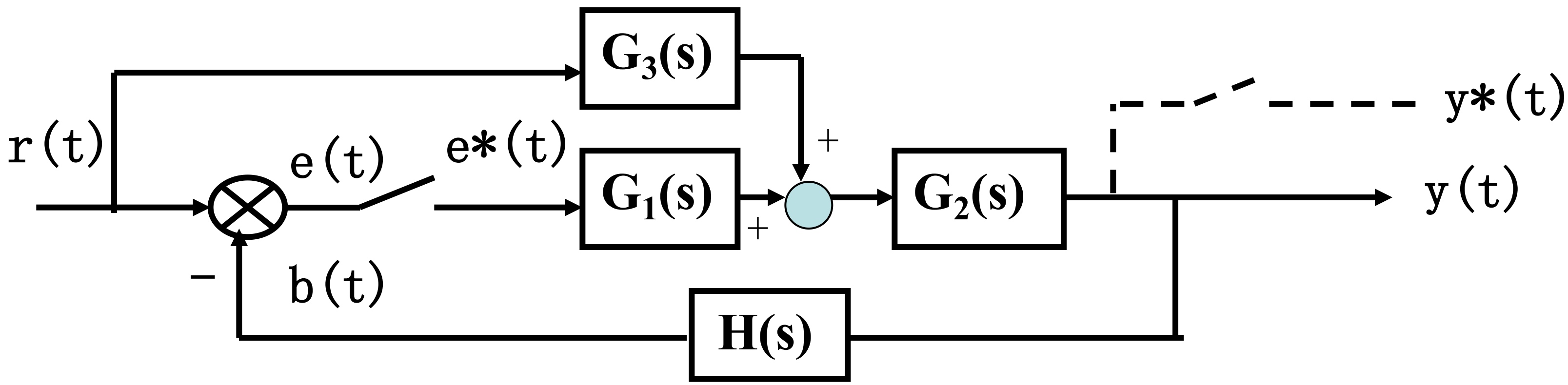
此处特别要留意符号!

$$Y_D(z)=G_2(z)D(z)-\frac{G_2G_1(z)HG_2(z)}{1+HG_2G_1(z)}D(z)$$

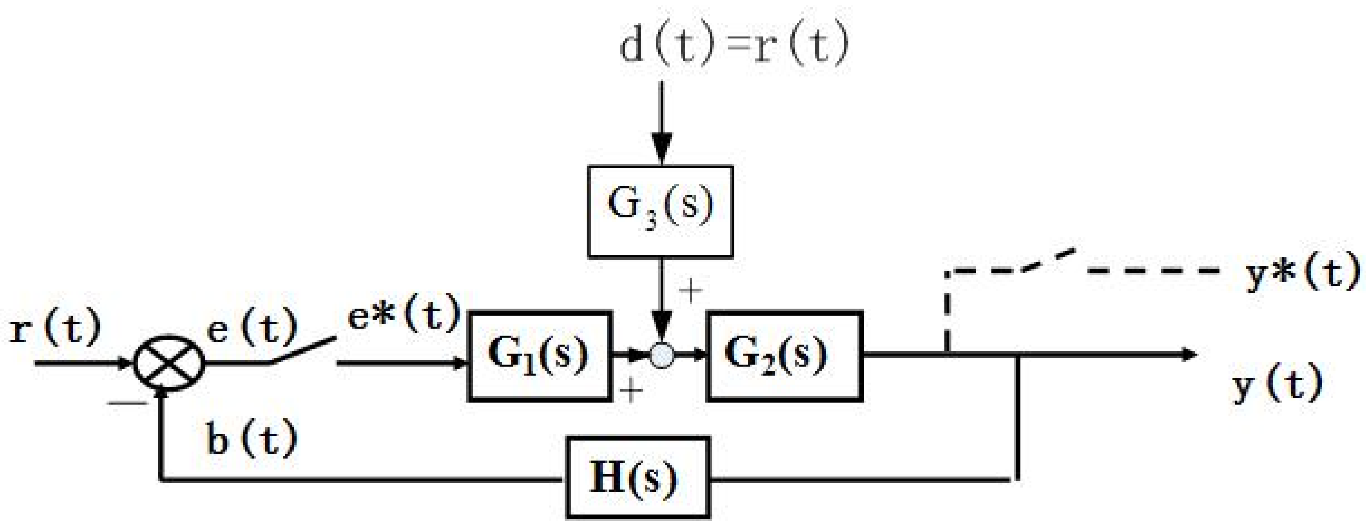
合并得 $Y(z)=Y_R(z)+Y_D(z)=\dfrac{G_2G_1(z)}{1+HG_2G_1(z)}R(z)+\left[G_2(z)-\dfrac{G_2G_1(z)HG_2(z)}{1+HG_2G_1(z)}\right]D(z)$

2 脉冲传递函数

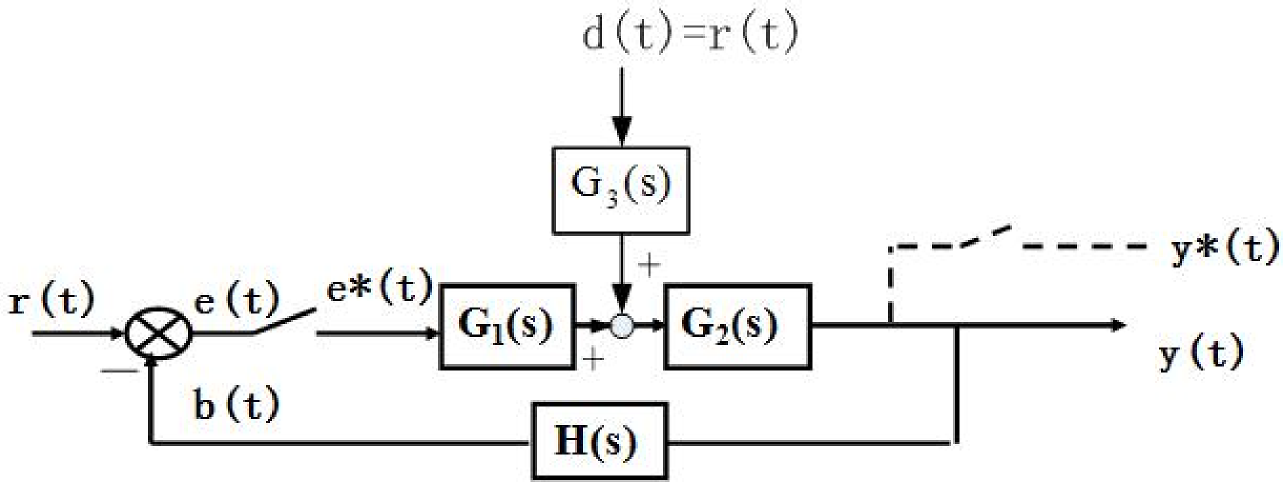
- 补充题一1：求脉冲传递函数及输出的Z变换。



多条前向通路,依线性性质进行拆分



2 脉冲传递函数



视察法 $Y_R(z)=\dfrac{G_2G_1(z)R(z)}{1+HG_2G_1(z)}$

此处特别要留意符号!

$Y_D(z)=G_2G_3D(z)+G_2G_1(z)E(z)$

再用视察法 $E(z)=-\dfrac{HG_2G_3D(z)}{1+HG_1G_2(z)}$

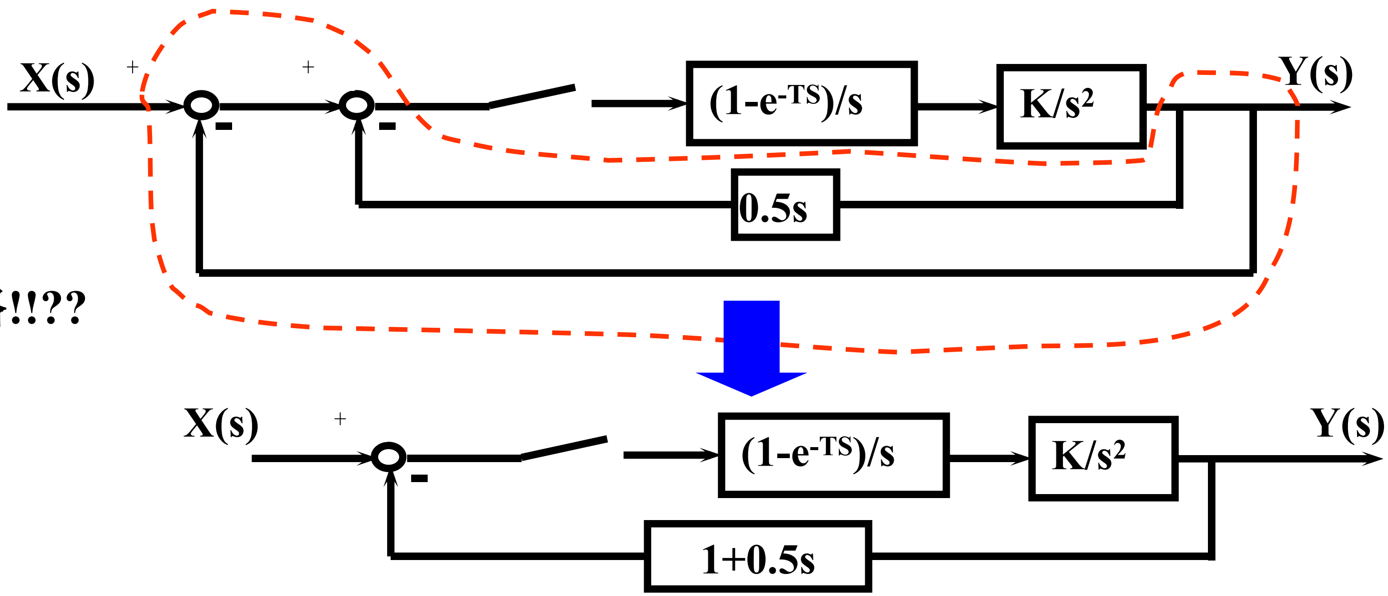
$$Y(z)=Y_R(z)+Y_D(z)=\frac{G_2G_1(z)}{1+HG_2G_1(z)}R(z)+G_2G_3D(z)-\frac{G_2G_1(z)HG_2G_3D(z)}{1+HG_1G_2(z)}$$

注意:

注意到$d(t)=r(t), Y(z)=G_2G_3R(z)+\dfrac{G_2G_1(z)R(z)-G_2G_1(z)HG_2G_3R(z)}{1+HG_1G_2(z)}$

无 $G_{closed}(z)$

- 补充题一2：求脉冲传递函数及输出的Z变换。



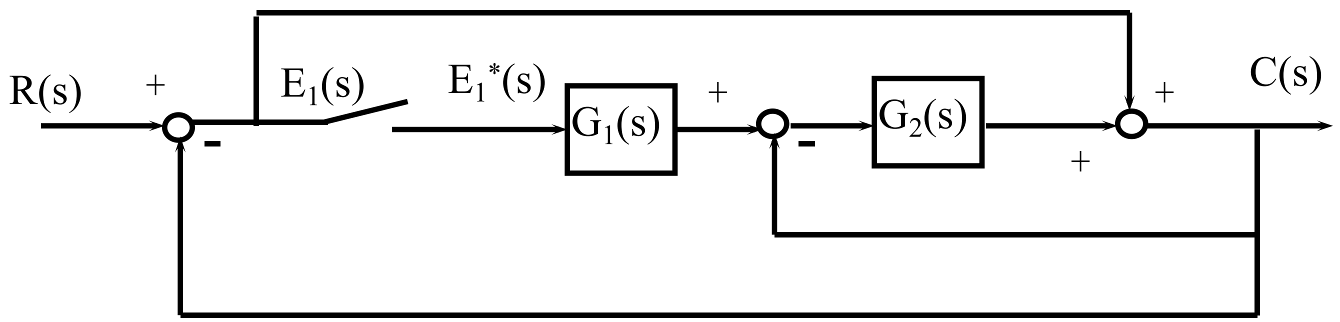
多回路!!??

$$Y(z)=\frac{G_f(z)}{1-G_0(z)}$$

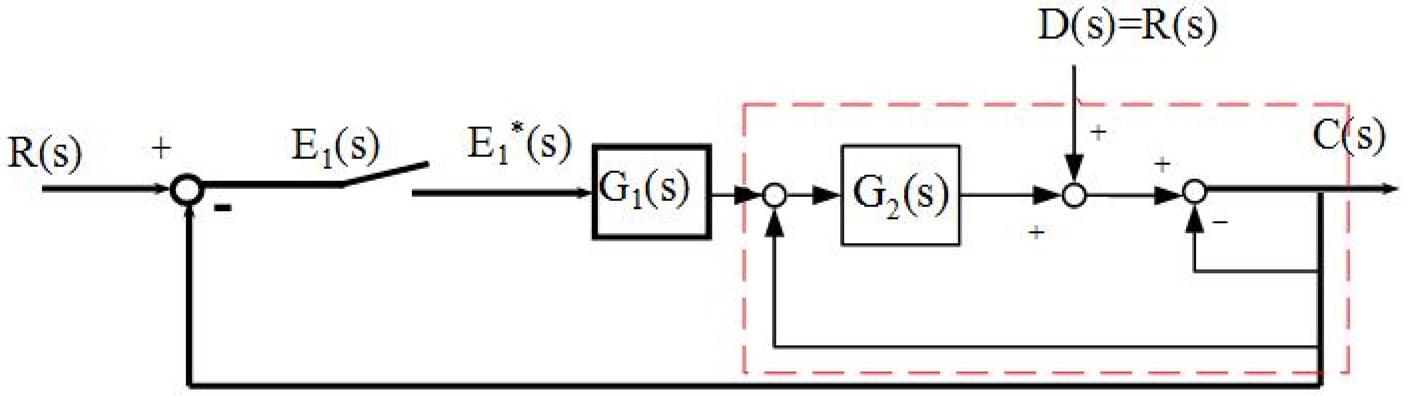
$$G_f(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s^2}\right]X(z)$$

$$G_0(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s^2}(-1-0.5s)\right]$$

- 补充题一3：求脉冲传递函数及输出的Z变换。



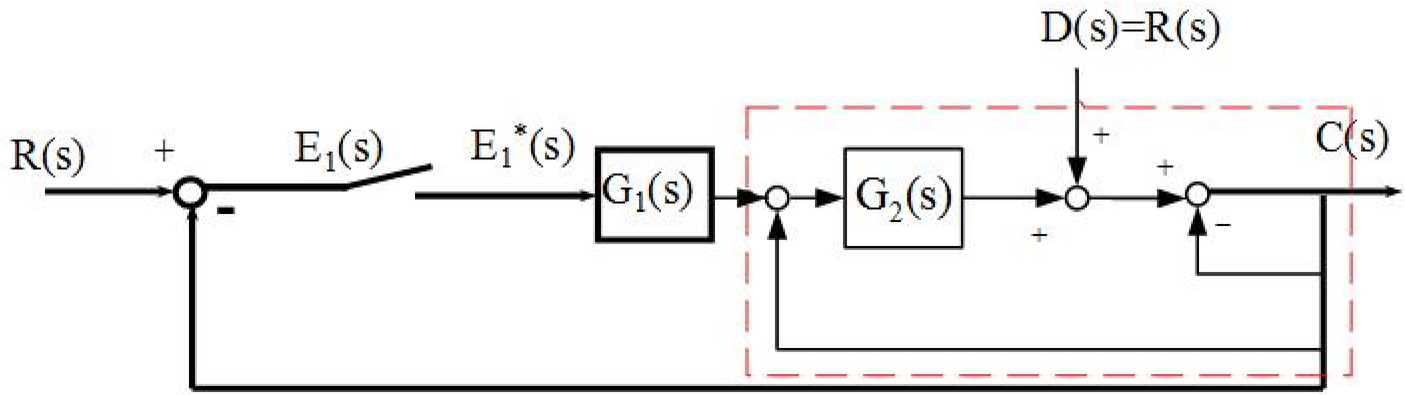
00级期末试题



二条前向通道，拆分

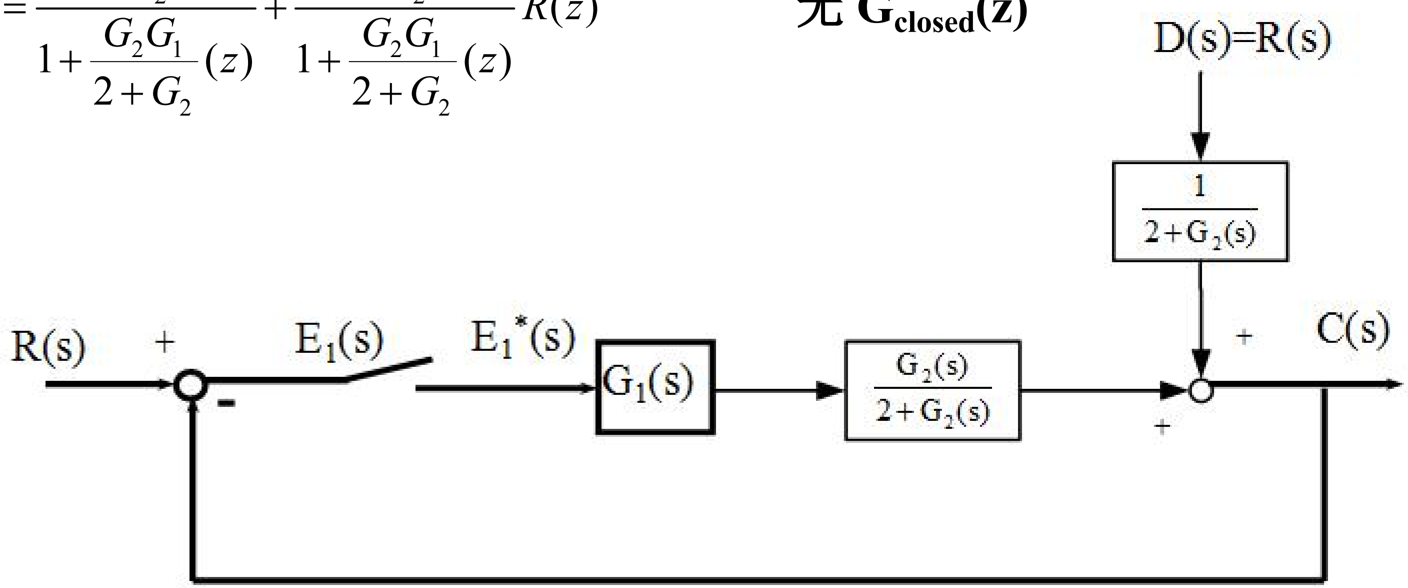
三条回路，有二条回路无采样器，设法消去

2 脉冲传递函数



$$C(z)=\frac{\frac{R}{2+G_2}(z)}{1+\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}+\frac{\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}{1+\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}R(z)$$

无 $G_{closed}(z)$



脉冲传递函数——局限性

- Z变换的推导是建立在假定采样信号可以用理想脉冲序列来近似的基础上，这种假定只有当采样持续时间τ与系统最小时间常数及采样周期T_S相比很小时才能成立。
- 输出Z变换函数$Y(z)$，只确定了时间函数$y(t)$在采样瞬时上的数值，不能反映$y(t)$在采样间隔中的信息。故$Y(z)$的Z反变换$y(nT)$只能代表采样瞬时$t=nT$时的数值。
- 用Z变换法分析离散系统时，系统连续部分传递函数$G_p(s)$的极点至少要比其零点多两个，否则其脉冲响应在$t=0$处会跳变，用Z变换法得到的系统采样输出$y^*(t)$与实际连续输出$y(t)$差别较大，甚至完全不符。（实际中一般可满足此前提）

离散系统的数学模型

1 线性差分方程

2 脉冲传递函数

3 离散系统的权序列（单位脉冲响应序列）

4 离散系统的状态空间模型

5 各种离散模型的关系

6 求解离散状态方程