$$SO(3)=\left\{\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\r_{21}&r_{22}&r_{23}\\r_{31}&r_{32}&r_{33}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}\ \middle|\ \begin{bmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{bmatrix}=0,\ \begin{bmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{13}\\r_{23}\\r_{33}\end{bmatrix}\right\}$$

$R_x^{\mathrm T}R_y=R_y^{\mathrm T}R_z=R_z^{\mathrm T}R_x=0$ ${}^B_AT={}^A_BT^{-1}$ ${}^AP={}^AO_B+{}^A_BR\,{}^BP$

${}^B_AR={}^A_BR^{-1}={}^A_BR^{\mathrm T}$ $T^{-1}=\begin{bmatrix}R^{\mathrm T} & -R^{\mathrm T}O\\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\theta=\mathrm{Atan2}(y,x)$

${}^BO_A=-{}^B_AR\,{}^AO_B$

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta&0&\sin\beta\\0&1&0\\-\sin\beta&0&\cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\gamma&-\sin\gamma\\0&\sin\gamma&\cos\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta&\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma&\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\\sin\alpha\cos\beta&-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma&-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma\\-\sin\beta&\cos\beta\sin\gamma&\cos\beta\cos\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta&0&\sin\beta\\0&1&0\\-\sin\beta&0&\cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma&-\sin\gamma&0\\\sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma&-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma&\cos\alpha\sin\beta\\\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma&-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma&\sin\alpha\sin\beta\\-\sin\beta\cos\gamma&\sin\beta\sin\gamma&\cos\beta\end{bmatrix}$$

已知$R\in SO(3)$，求$\alpha,\beta,\gamma\in(-\pi,\pi]$使得$R=R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$

命题：$R_z(\pm\pi+\alpha)R_y(\pm\pi-\beta)R_x(\pm\pi+\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$

$(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times(-\pi,\pi]$

已知$R\in SO(3)$，求$(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times(-\pi,\pi]$使得$R=R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$

若$\cos\beta>0$ $\cos\beta=\sqrt{r_{32}^2+r_{33}^2}$ $\beta=\mathrm{Atan2}\left(-r_{31},\sqrt{r_{32}^2+r_{33}^2}\right)$ $\beta=\dfrac{\pi}{2}$时 $\alpha-\gamma=\mathrm{Atan2}(r_{23},r_{22})$

$\alpha=\mathrm{Atan2}(r_{21},r_{11})$ $\gamma=\mathrm{Atan2}(r_{32},r_{33})$ $\beta=-\dfrac{\pi}{2}$时 有类似结果 $\alpha+\gamma=\mathrm{Atan2}(-r_{23},r_{22})$

$${}^A_BR=\begin{bmatrix}k_x^2v\theta+c\theta&k_xk_yv\theta-k_zs\theta&k_xk_zv\theta+k_ys\theta\\k_xk_yv\theta+k_zs\theta&k_y^2v\theta+c\theta&k_yk_zv\theta-k_xs\theta\\k_xk_zv\theta-k_ys\theta&k_yk_zv\theta+k_xs\theta&k_z^2v\theta+c\theta\end{bmatrix}=R_K(\theta)$$

上式以满足1个约束$k_x^2+k_y^2+k_z^2=1$的4个变量$k_x,k_y,k_z,\theta$描述了姿态

齐次变换矩阵 $T=\left[\begin{array}{ccc|c}&R_K(\theta)&&P_d\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}&I&&P_d\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c}&R_K(\theta)&&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]$

需要注意：
1）右乘是先平移、后旋转；
2）左乘是先旋转、后平移；
3）相对于基础坐标系的旋转（左乘旋转），可能会产生平移

已知$R\in SO(3)$，求等效轴$\begin{bmatrix}k_x&k_y&k_z\end{bmatrix}^{\mathrm T}$和$\theta\in(-\pi,\pi]$使得$R=R_K(\theta)$

不难理解 $R_K(\theta)=R_{-K}(-\theta)$ 因此规定 $\theta\in[0,\pi]$ 若$\theta\in(0,\pi)$ $\theta=\mathrm{Acos}\left(\dfrac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right)$ $\begin{bmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix}r_{32}-r_{23}\\r_{13}-r_{31}\\r_{21}-r_{12}\end{bmatrix}$

若$\theta=\pi$ $\begin{bmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{bmatrix}=\pm\begin{bmatrix}\sqrt{(r_{11}+1)/2}\\r_{12}/\sqrt{2(r_{11}+1)}\\r_{13}/\sqrt{2(r_{11}+1)}\end{bmatrix}$ 两组解

若$\theta=0$ 任何单位向量$\begin{bmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{bmatrix}$均可 无穷组解

在等效轴 $[k_x\ k_y\ k_z]^{\mathrm T}$和等效轴角$\theta\in\mathbb{R}$的基础上，定义欧拉参数

$\eta=\cos\dfrac{\theta}{2}$ $\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_x\sin\frac{\theta}{2}\\k_y\sin\frac{\theta}{2}\\k_z\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$ 满足约束 $\eta^2+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2=1$

$$R=\begin{bmatrix}2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1&2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3)&2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2)\\2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3)&2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1&2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1)\\2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2)&2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1)&2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1\end{bmatrix}=R_\varepsilon(\eta)$$

若$r_{11}+r_{22}+r_{33}>-1$，可得两组反号的欧拉参数

$+-$ $$\begin{bmatrix}\eta\\\varepsilon\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1}\end{bmatrix}$$

若$r_{11}+r_{22}+r_{33}=-1$，$r_{11}$、$r_{22}$和$r_{33}$不会同时等于$-1$

以$r_{11}=-1$为例，可得两组反号的欧拉参数

$$\begin{bmatrix}\eta\\\varepsilon\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{12})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{13})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1}\end{bmatrix}\quad\text{或}\quad\begin{bmatrix}\eta\\\varepsilon\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{12})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{13})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1}\end{bmatrix}$$

在环$(S,+,\cdot)$中,若乘法半群$(S,\cdot)$有单位元，则用1表示此单位元，并称该环为有单位元的环

在环$(S,+,\cdot)$中,若乘法半群$(S,\cdot)$是交换半群，则称该环为交换环

定义 一个集合$S$称为域$P$上的线性空间（向量空间），如果$S$上存在2元运算+（加法），且存在数乘运算$P\times S\to S$，满足

1) $(S,+)$是交换群
2) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x),\ \forall\alpha,\beta\in P,\ \forall x\in S$
3) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\ \forall\alpha\in P,\ \forall x,y\in S$
4) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\ \forall\alpha,\beta\in P,\ \forall x\in S$
5) $1x=x,\ \forall x\in S$，1是域$P$的单位元

定义1 设$S$是一个非空集合，$S\times S$到$S$的一个映射 $f$ 叫做$S$的一个2元运算（代数运算），即对于$S$中任意两个元$a$和$b$，通过$f$，唯一确定一个$c\in S: f(a,b)=c$，常记为$a\circ b=c$

定义2 设$S$是一个非空集合，若在$S$上存在一个2元运算$\circ$，且$\circ$满足结合律，即对于$S$中任意$a,b,c$，均有
$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$
则称$(S,\circ)$为半群

定义3 设$(S,\circ)$是半群，如果存在元素$e\in S$, $\forall a\in S: e\circ a=a, a\circ e=a$，则称$e$为该半群的单位元

定义4 有单位元$e$的半群$(S,\circ)$称为群，如果$(S,\circ)$的每个元都是可逆的

定义 当半群$(S,\circ)$的运算$\circ$满足交换律，即对于$S$中任意$a,b$，均有$a\circ b=b\circ a$，则称$(S,\circ)$为交换半群

定义 当群$(S,\circ)$也是交换半群时，则称$(S,\circ)$为交换群（Abel群）

定义 当称$(S,+,\cdot)$为环，如果$S$是一个非空集合，且在$S$上存在两个2元运算+（加法）和$\cdot$（乘法），满足

1) $(S,+)$是交换群
2) $(S,\cdot)$是半群，$a\cdot b$常省略运算符号，即$a\cdot b$记为$ab$
3) $\cdot$对+的分配律成立，即对于$S$中任意$a,b,c$，均有（运算表达有“先乘后加”的原则）
$a(b+c)=ab+ac,\ (b+c)a=ba+ca$

定义 一个至少含有两个元的环$(S,+,\cdot)$称为域，如果
1) $(S,+,\cdot)$是有单位元的交换环
2) 对$S$中的每个非零元$a$，存在$a'\in S: a'a=1, aa'=1$

在$\mathbb{R}^4$中定义Grassmann积

$$\begin{bmatrix}\eta\\\varepsilon\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\xi\\\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta\xi-\varepsilon^{\mathrm T}\delta\\\eta\delta+\xi\varepsilon+\varepsilon\times\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta&-\varepsilon_1&-\varepsilon_2&-\varepsilon_3\\\varepsilon_1&\eta&-\varepsilon_3&\varepsilon_2\\\varepsilon_2&\varepsilon_3&\eta&-\varepsilon_1\\\varepsilon_3&-\varepsilon_2&\varepsilon_1&\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\xi\\\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\end{bmatrix}$$

四元数乘法的定义

$$(\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3)(\xi+i\delta_1+j\delta_2+k\delta_3)=(\eta\xi-\varepsilon_1\delta_1-\varepsilon_2\delta_2-\varepsilon_3\delta_3)+i(\eta\delta_1+\varepsilon_1\xi+\varepsilon_2\delta_3-\varepsilon_3\delta_2)+j(\eta\delta_2-\varepsilon_1\delta_3+\varepsilon_2\xi+\varepsilon_3\delta_1)+k(\eta\delta_3+\varepsilon_1\delta_2-\varepsilon_2\delta_1+\varepsilon_3\xi)$$

如果有$\begin{bmatrix}\eta\\\varepsilon\end{bmatrix}\in S^3$，则$A^{\mathrm T}A=I$

如果还有$\begin{bmatrix}\xi\\\delta\end{bmatrix}\in S^3$，则$[\xi\ \ \delta^{\mathrm T}]A^{\mathrm T}A\begin{bmatrix}\xi\\\delta\end{bmatrix}=1$ 即 $\begin{bmatrix}\eta\xi-\varepsilon^{\mathrm T}\delta\\\eta\delta+\xi\varepsilon+\varepsilon\times\delta\end{bmatrix}\in S^3$

单位四元数与欧拉参数一一对应

原点不变条件下的3维向量的转换公式 ${}^AP={}^A_BR\,{}^BP$

基于乘法，单位四元数可直接描述3维姿态和3维坐标系旋转

：上述3维向量的转换公式可基于单位四元数表达为

$ix_2+jy_2+kz_2=(\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3)(ix_1+jy_1+kz_1)(\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3)^*$

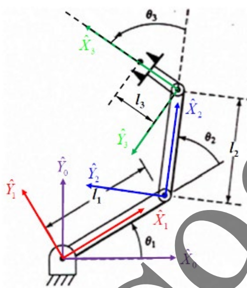
Grassmann积是$S^3$中的2元运算 基于Grassmann积，欧拉参数可在$S^3$中直接描述3维姿态和3维坐标系旋转

- $\alpha_{i-1}=$绕$\hat X_{i-1}$轴，从$\hat Z_{i-1}$旋转到$\hat Z_i$的角度
- $a_{i-1}=$沿$\hat X_{i-1}$轴，从$\hat Z_{i-1}$移动到$\hat Z_i$的距离
- $d_i=$沿$\hat Z_i$轴，从$\hat X_{i-1}$移动到$\hat X_i$的距离
- $\theta_i=$绕$\hat Z_i$轴，从$\hat X_{i-1}$旋转到$\hat X_i$的角度

$${}^{i-1}_{\ \ i}T=\begin{bmatrix}\cos\theta_i&-\sin\theta_i&0&a_{i-1}\\\sin\theta_i\cos\alpha_{i-1}&\cos\theta_i\cos\alpha_{i-1}&-\sin\alpha_{i-1}&-\sin\alpha_{i-1}d_i\\\sin\theta_i\sin\alpha_{i-1}&\cos\theta_i\sin\alpha_{i-1}&\cos\alpha_{i-1}&\cos\alpha_{i-1}d_i\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$${}^B_WT={}^0_3T=\begin{bmatrix}c_{123}&-s_{123}&0&l_1c_1+l_2c_{12}\\s_{123}&c_{123}&0&l_1s_1+l_2s_{12}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_\phi&-s_\phi&0&x\\s_\phi&c_\phi&0&y\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

当最后3根轴相交时，连杆坐标系{4}、{5}、{6}的原点均位于这个交点上，这点的基坐标为 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^0P_{4ORG}\\1\end{bmatrix}={}^0_1T\,{}^1_2T\,{}^2_3T\begin{bmatrix}{}^3P_{4ORG}\\1\end{bmatrix}$



若$-1\le c_2\le1$，上式有解，否则无解 $c_2=\dfrac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}$

若上式有解，则

$s_2=\pm\sqrt{1-c_2^2}$，$\theta_2=\mathrm{Atan2}(s_2,c_2)$

得到2个可行的$\theta_2$

为便于计算引入新的变量：

$x=l_1c_1+l_2c_{12}$ $\Rightarrow$ $x=k_1c_1-k_2s_1$ 其中 $k_1=l_1+l_2c_2$
$y=l_1s_1+l_2s_{12}$ $\quad$ $y=k_1s_1+k_2c_1$ $\quad$ $k_2=l_2s_2$

$$\begin{bmatrix}{}^2P_{4ORG}\\1\end{bmatrix}={}^2_3T\begin{bmatrix}{}^3P_{4ORG}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta_3&-s\theta_3&0&a_2\\s\theta_3c\alpha_2&c\theta_3c\alpha_2&-s\alpha_2&-s\alpha_2d_3\\s\theta_3s\alpha_2&c\theta_3s\alpha_2&c\alpha_2&c\alpha_2d_3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3\\-d_4s\alpha_3\\d_4c\alpha_3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\theta_3)\\f_2(\theta_3)\\f_3(\theta_3)\\1\end{bmatrix}$$

为了求解这种形式的方程，进行变量代换：令

$r=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$，$\gamma=\mathrm{Atan2}(k_2,k_1)$

即 $k_1=r\cos\gamma$，$k_2=r\sin\gamma$

$f_1=f_1(\theta_3)=a_3c_3+d_4s\alpha_3s_3+a_2$

$f_2=f_2(\theta_3)=a_3c\alpha_2s_3-d_4s\alpha_3c\alpha_2c_3-d_4s\alpha_2c\alpha_3-d_3s\alpha_2$

$f_3=f_3(\theta_3)=a_3s\alpha_2s_3-d_4s\alpha_3s\alpha_2c_3+d_4c\alpha_2c\alpha_3+d_3c\alpha_2$

求出 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$后，可计算出${}^0_3R={}^0_1R\,{}^1_2R\,{}^2_3R$

再由已知的${}^0_6R$，求出${}^3_6R={}^0_3R^{\mathrm T}\,{}^0_6R$

对于任何一个4、5、6轴相互正交的6R操作臂，最后三个关节角是一种欧拉角，即${}^3_6R$可由这种欧拉角表示

这时，$\theta_4,\theta_5,\theta_6$可用欧拉角解法求得

$\dfrac{x}{r}=\cos\gamma\cos\theta_1-\sin\gamma\sin\theta_1$ $\Rightarrow$ $\cos(\gamma+\theta_1)=\dfrac{x}{r}$

$\dfrac{y}{r}=\cos\gamma\sin\theta_1+\sin\gamma\cos\theta_1$ $\quad$ $\sin(\gamma+\theta_1)=\dfrac{y}{r}$

于是 $\gamma+\theta_1=\mathrm{Atan2}(\frac{y}{r},\frac{x}{r})=\mathrm{Atan2}(y,x)$ $\Rightarrow$ $\theta_1=\mathrm{Atan2}(y,x)-\mathrm{Atan2}(k_2,k_1)$

最后，可以解得 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\mathrm{Atan2}(s_\phi,c_\phi)=\phi$ $\Rightarrow$ $\theta_3=\phi-\theta_1-\theta_2$

$$\begin{bmatrix}{}^1P_{4ORG}\\1\end{bmatrix}={}^1_2T\begin{bmatrix}{}^2P_{4ORG}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta_2&-s\theta_2&0&a_1\\s\theta_2c\alpha_1&c\theta_2c\alpha_1&-s\alpha_1&-s\alpha_1d_2\\s\theta_2s\alpha_1&c\theta_2s\alpha_1&c\alpha_1&c\alpha_1d_2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(\theta_3)\\f_2(\theta_3)\\f_3(\theta_3)\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1(\theta_2,\theta_3)\\g_2(\theta_2,\theta_3)\\g_3(\theta_2,\theta_3)\\1\end{bmatrix}$$

1）若$a_1=0$，则$r=k_3=f_1^2+f_2^2+f_3^2+a_1^2+d_2^2+2d_2f_3$

注意到 $f_1=f_1(\theta_3)=a_3c_3+d_4s\alpha_3s_3+a_2$

$f_2=f_2(\theta_3)=a_3c\alpha_2s_3-d_4s\alpha_3c\alpha_2c_3-d_4s\alpha_2c\alpha_3-d_3s\alpha_2$

$f_3=f_3(\theta_3)=a_3s\alpha_2s_3-d_4s\alpha_3s\alpha_2c_3+d_4c\alpha_2c\alpha_3+d_3c\alpha_2$

求解$\theta_2$

根据$r=(k_1c_2+k_2s_2)2a_1+k_3, z=(k_1s_2-k_2c_2)s\alpha_1+k_4$，可解得$\theta_2$

$$g_3=g_3(\theta_2,\theta_3)=s_2s\alpha_1f_1+c_2s\alpha_1f_2+c\alpha_1f_3+d_2c\alpha_1$$

求解$\theta_1$

根据$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1g_1-s_1g_2\\s_1g_1+c_1g_2\end{bmatrix}$，$x$和$y$是已知的，可解得$\theta_1$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^0P_{4ORG}\\1\end{bmatrix}={}^0_1T\begin{bmatrix}{}^1P_{4ORG}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta_1&-s\theta_1&0&0\\s\theta_1&c\theta_1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1g_1-s_1g_2\\s_1g_1+c_1g_2\\g_3\\1\end{bmatrix}$$

将$u=\tan\dfrac{\theta_3}{2}, c_3=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, s_3=\dfrac{2u}{1+u^2}$代入，可将$r=k_3$化为$u$的二次方程

利用二次方程可以得到$\theta_3$

2）若$s\alpha_1=0$，则$z=k_4$，同样采用化简为多项式的办法，由二次方程得$\theta_3$

3）否则，消去$s_2$和$c_2$，得到

$$\frac{(r-k_3)^2}{4a_1^2}+\frac{(z-k_4)^2}{s^2\alpha_1}=k_1^2+k_2^2$$

采用化简为多项式的办法，可得到一个四次方程，由此解得$\theta_3$

$${}^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BR\,{}^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ$$

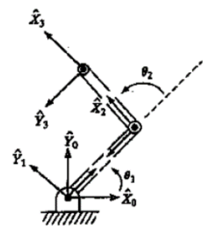
令 $r=x^2+y^2+z^2=(c_1g_1-s_1g_2)^2+(s_1g_1+c_1g_2)^2+g_3^2$

$=g_1^2+g_2^2+g_3^2=f_1^2+f_2^2+f_3^2+a_1^2+d_2^2+2d_2f_3+2a_1(c_2f_1-s_2f_2)$

角速度矩阵 $^A_BS=\begin{bmatrix}0 & -\Omega_z & \Omega_y\\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x\\ -\Omega_y & \Omega_x & 0\end{bmatrix}$ $^A_B\dot{R}={}^A_BS\,{}^A_BR$ $^A_BS={}^A_B\dot{R}\,{}^A_BR^{-1}={}^A_B\dot{R}\,{}^A_BR^T$

$^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BR\,{}^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ$

$^A\Omega_C={}^A\Omega_B+{}^A_BR\,{}^B\Omega_C$ $^A\Omega_C={}^A\Omega_B+{}^A_BR\,{}^B\Omega_C$ $^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BR\,{}^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ$



$\hat{Z}_1=\hat{Z}_2=\hat{Z}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $P_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $P_2=\begin{bmatrix}l_1c_1\\l_1s_1\\0\end{bmatrix}$ $P_3=\begin{bmatrix}l_2c_{12}+l_1c_1\\l_2s_{12}+l_1s_1\\0\end{bmatrix}$

当关节i+1是旋转关节时

$^{i+1}\omega_{i+1}={}^{i+1}_iR\,{}^i\omega_i+\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$

$^{i+1}\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_iR({}^i\upsilon_i+{}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})$

当关节i+1是移动关节时

$^{i+1}\omega_{i+1}={}^{i+1}_iR\,{}^i\omega_i$

$^{i+1}\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_iR({}^i\upsilon_i+{}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})+\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$

$$\begin{bmatrix}\upsilon_3\\ \omega_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_2s_{12}-l_1s_1 & -l_2s_{12} & 0\\ l_2c_{12}+l_1c_1 & l_2c_{12} & 0\\ 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \dot\theta_3\end{bmatrix}$$

$^i\upsilon_{i+1}={}^i_0R\upsilon_{i+1}$ ：推导思路 $v_N=\begin{bmatrix}\upsilon_N\\ \omega_N\end{bmatrix}$ $\Theta=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_N\end{bmatrix}$ $v_N=\begin{bmatrix}\hat{Z}_1\times(P_N-P_1) & \hat{Z}_2\times(P_N-P_2) & \cdots & \hat{Z}_{N-1}\times(P_N-P_{N-1}) & 0\\ \hat{Z}_1 & \hat{Z}_2 & \cdots & \hat{Z}_{N-1} & \hat{Z}_N\end{bmatrix}\dot{\Theta}$

$^iJ(\Theta)=\begin{bmatrix}^i_0R & 0\\ 0 & ^i_0R\end{bmatrix}J(\Theta)$ $=J(\Theta)\dot{\Theta}$

向内迭代法 $^if_i={}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}$

$^in_i={}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1}+{}^iP_{i+1}\times{}^if_i$

$\upsilon_3=\begin{bmatrix}-l_1s_1\dot\theta_1-l_2s_{12}(\dot\theta_1+\dot\theta_2)\\ l_1c_1\dot\theta_1+l_2c_{12}(\dot\theta_1+\dot\theta_2)\\0\end{bmatrix}$ $\omega_3=\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot\theta_1+\dot\theta_2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}^i\upsilon_N\\ ^i\omega_N\end{bmatrix}={}^iJ(\Theta)\dot{\Theta}$ $\dot{\Theta}=J^{-1}(\Theta)v_N$

静力： $^if_i={}^if_{i+1}$ $^in_i={}^in_{i+1}+{}^iP_{i+1}\times{}^if_{i+1}$

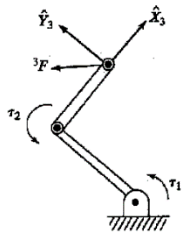
$\begin{bmatrix}^3\upsilon_3\\ ^3\omega_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}^3_0R & 0\\ 0 & ^3_0R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\upsilon_3\\ \omega_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1s_2 & 0 & 0\\ l_2+l_1c_2 & l_2 & 0\\ 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \dot\theta_3\end{bmatrix}$

$^3\upsilon_3=\begin{bmatrix}u_x & u_y & 0\end{bmatrix}^T$

旋转关节i 主动力矩可表示为 $\tau_i\,{}^i\hat{Z}_i$，其中 $\tau_i=|{}^in_i|\cos\theta=|{}^in_i||{}^i\hat{Z}_i|\cos\theta={}^in_i^T\,{}^i\hat{Z}_i$

移动关节i 关节i的直线驱动器提供的主动力矩表示为 $\tau_i\,{}^i\hat{Z}_i$ $\tau_i={}^if_i^T\,{}^i\hat{Z}_i$

$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1s_2 & l_1c_2+l_2\\ 0 & l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_x\\ f_y\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1s_2 & 0\\ l_2+l_1c_2 & l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{bmatrix}$



$^3f_3=\begin{bmatrix}f_x\\f_y\\0\end{bmatrix}$ ， $^3n_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $^1n_1={}^1_2R\,{}^2n_2+{}^1P_2\times{}^1f_1=\begin{bmatrix}0\\0\\l_1s_2f_x+l_1c_2f_y+l_2f_y\end{bmatrix}$

$\tau_1={}^1n_1^T\,{}^1\hat{Z}_1=l_1s_2f_x+l_1c_2f_y+l_2f_y$

$\tau_2={}^2n_2^T\,{}^2\hat{Z}_2=l_2f_y$ $\tau=J^T\mathcal{F}$

$^0J^{-1}(\Theta)=\dfrac{1}{l_1l_2s_2}\begin{bmatrix}l_2c_{12} & l_2s_{12}\\ -l_1c_1-l_2c_{12} & -l_1s_1-l_2s_{12}\end{bmatrix}$

$^2n_2={}^2_3R\,{}^3n_3+{}^2P_3\times{}^2f_2=\begin{bmatrix}l_2\\0\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}f_x\\f_y\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\l_2f_y\end{bmatrix}$

静力传递式中的矩阵是速度雅可比的转置

$^A\Omega_B=\begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix}$ $^A_B\dot{R}={}^A_BS\,{}^A_BR$

$^A_BS=\begin{bmatrix}0 & -\Omega_z & \Omega_y\\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x\\ -\Omega_y & \Omega_x & 0\end{bmatrix}$

线加速度公式: $^A\dot{V}_Q={}^A\dot{V}_{BORG}+{}^A_BR\,{}^B\dot{V}_Q+2\,{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BV_Q+{}^A\dot\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ+{}^A\Omega_B\times({}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ)$

当 $^BQ$ 是常数 $^A\dot{V}_Q={}^A\dot{V}_{BORG}+{}^A\dot\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ+{}^A\Omega_B\times({}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ)$

$^AI=\begin{bmatrix}I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz}\\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz}\\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz}\end{bmatrix}$

假设 {B}相对于{A}以 $^A\Omega_B$ 转动，同时 {C} 相对于 {B} 以 $^B\Omega_C$ 转动 矢量 $P_c=\begin{bmatrix}x_c\\y_c\\z_c\end{bmatrix}$ 表示刚体质心在坐标系{A}中的位置。

$\dfrac{d}{dt}({}^A_BR\,{}^BV_Q)={}^A_BR\,{}^B\dot{V}_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BV_Q$ 角加速度公式 $^A\dot\Omega_C={}^A\dot\Omega_B+{}^A_BR\,{}^B\dot\Omega_C+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^B\Omega_C$ $^AI={}^CI+m[P_c^TP_cI_3-P_cP_c^T]$ $I_{xy}=\iiint_V xy\rho dv$

欧拉方程：$^CN={}^CI\,{}^C\dot\omega+{}^C\omega\times{}^CI\,{}^C\omega$ 牛顿方程: $F=m\dot{\upsilon}_C$ $I_{xx}=\iiint_V(y^2+z^2)\rho dv$

连杆之间的线加速度传递: $^A\dot{V}_Q={}^A\dot{V}_{BORG}+{}^A_BR\,{}^B\dot{V}_Q+2\,{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BV_Q+{}^A\dot\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ+{}^A\Omega_B\times({}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ)$

状态空间方程

$\tau=M(\Theta)\ddot\Theta+V(\Theta,\dot\Theta)+G(\Theta)$

当第 i+1个关节是移动关节 $^{i+1}\dot\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_iR[{}^i\dot\upsilon_i+{}^i\dot\omega_i\times{}^iP_{i+1}+{}^i\omega_i\times({}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})]+\ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}+2\,{}^{i+1}\omega_{i+1}\times\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$

$-m_2l_1l_2s_2\dot\theta_2^2$ 是与离心力有关的项，因为它是速度的平方.

对于转动关节，该算法归纳如下: $-2m_2l_1l_2s_2\dot\theta_1\dot\theta_2$ 是与哥氏力有关的项，它总是包含两个不同关节速度的乘积.

外推: i: 0 →n $^0\omega_0={}^0\dot\omega_0=0$ $^0\dot\upsilon_0=-{}^0g$ $\theta_i,\dot\theta_i,\ddot\theta_i$ 均已知

内推: i: n+1 → 1

$^if_i={}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}+{}^iF_i$

位形空间方程 $B(\Theta)$ --n×n(n-1)/2 哥氏力系数矩阵.

$C(\Theta)$ --n×n 离心力系数矩阵.

$^{i+1}\omega_{i+1}={}^{i+1}_iR\,{}^i\omega_i+\dot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$ $^{n+1}f_{n+1}=0,\ {}^{n+1}n_{n+1}=0$

$^in_i={}^iN_i+{}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1}+{}^iP_{C_i}\times{}^iF_i+{}^iP_{i+1}\times{}^i_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}$

$^{i+1}\dot\omega_{i+1}={}^{i+1}_iR\,{}^i\dot\omega_i+{}^{i+1}_iR\,{}^i\omega_i\times\dot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}+\ddot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$ $^{i+1}\dot\omega_{i+1}={}^{i+1}_iR\,{}^i\dot\omega_i$ $\tau_i={}^in_i^T\,{}^i\hat{Z}_i$ 对于移动关节 $\tau_i={}^if_i^T\,{}^i\hat{Z}_i$

$\tau=M(\Theta)\ddot\Theta+B(\Theta)[\dot\Theta\dot\Theta]+C(\Theta)[\dot\Theta^2]+G(\Theta)$

$^{i+1}\dot\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_iR({}^i\dot\omega_i\times{}^iP_{i+1}+{}^i\omega_i\times({}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})+{}^i\dot\upsilon_i)$ $^{i+1}\dot\upsilon_{i+1}={}^{i+1}_iR[{}^i\dot\upsilon_i+{}^i\dot\omega_i\times{}^iP_{i+1}+{}^i\omega_i\times({}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})]+\ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}+2\,{}^{i+1}\omega_{i+1}\times\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$

$[\dot\Theta\dot\Theta]=\begin{bmatrix}\dot\theta_1\dot\theta_2\\ \dot\theta_1\dot\theta_3\\ \vdots\\ \dot\theta_{n-1}\dot\theta_n\end{bmatrix}$ $[\dot\Theta^2]=\begin{bmatrix}\dot\theta_1^2\\ \dot\theta_2^2\\ \vdots\\ \dot\theta_n^2\end{bmatrix}$ 操作臂运动方程:

$^{i+1}\dot\upsilon_{C_{i+1}}={}^{i+1}\dot\omega_{i+1}\times{}^{i+1}P_{C_{i+1}}+{}^{i+1}\omega_{i+1}\times({}^{i+1}\omega_{i+1}\times{}^{i+1}P_{C_{i+1}})+{}^{i+1}\dot\upsilon_{i+1}$ $L=K-P$

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\Theta}-\dfrac{\partial L}{\partial\Theta}=\tau$

$^{i+1}F_{i+1}=m_{i+1}\,{}^{i+1}\dot\upsilon_{C_{i+1}}$ L是拉格朗日函数，K是系统动能，P是系统势能

对于操作臂而言

$^{i+1}N_{i+1}={}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\dot\omega_{i+1}+{}^{i+1}\omega_{i+1}\times{}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\omega_{i+1}$ $F_i=\dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}_i})-\dfrac{\partial L}{\partial x_i}$ 式中F是线运动中的所有外力之和，

拉格朗日函数: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial k}{\partial\dot\Theta}-\dfrac{\partial k}{\partial\Theta}+\dfrac{\partial u}{\partial\Theta}=\tau$

操作臂的动能表达式: T是转动中的所有外力矩之和，X是系统变量。

$L(\Theta,\dot\Theta)=k(\Theta,\dot\Theta)-u(\Theta)$

$k_i=\dfrac{1}{2}m_i\upsilon_{C_i}^T\upsilon_{C_i}+\dfrac{1}{2}{}^i\omega_i^T\,{}^{C_i}I_i\,{}^i\omega_i$ $T_i=\dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta_i})-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_i}$ 例子: 两连杆平面机械臂的笛卡尔空间形式的动力学方程.

连杆i的势能可表示为: $^0g$ 是 3×1 的重力矢量，$^0P_{C_i}$ 是连杆i的质心的位置 $V(\Theta,\dot\Theta)=\begin{bmatrix}-m_2l_1l_2s_2\dot\theta_2^2-2m_2l_1l_2s_2\dot\theta_1\dot\theta_2\\ m_2l_1l_2s_2\dot\theta_1^2\end{bmatrix}$

$u_i=-m_i\,{}^0g^T\,{}^0P_{C_i}+u_{ref_i}$ $M(\Theta)=\begin{bmatrix}m_2l_2^2+2m_2l_1l_2c_2+(m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_2^2+m_2l_1l_2c_2\\ m_2l_2^2+m_2l_1l_2c_2 & m_2l_2^2\end{bmatrix}$ 可以得到:

笛卡尔状态空间方程 $F=M_\chi(\Theta)\ddot\chi+V_\chi(\Theta,\dot\Theta)+G_\chi(\Theta)$

F 作用于机器人末端的虚拟操作力-力矩矢量

$\chi$ 能够恰当表达末端执行器位姿的笛卡尔矢量. $G(\Theta)=\begin{bmatrix}m_2l_2gc_{12}+(m_1+m_2)l_1gc_1\\ m_2l_2gc_{12}\end{bmatrix}$ $M_\chi(\Theta)=\begin{bmatrix}m_2+\dfrac{m_1}{s_2^2} & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}$ $G_\chi(\Theta)=\begin{bmatrix}m_1g\dfrac{c_1}{s_2}+m_2gs_{12}\\ m_2gc_{12}\end{bmatrix}$

$M_\chi(\Theta)$ 笛卡尔质量矩阵.

$V_\chi(\Theta,\dot\Theta)$ 笛卡尔空间的速度项矢量. $J(\Theta)=\begin{bmatrix}l_1s_2 & 0\\ l_1c_2+l_2 & l_2\end{bmatrix}$ ， $J^{-1}(\Theta)=\dfrac{1}{l_1l_2s_2}\begin{bmatrix}l_2 & 0\\ -l_1c_2-l_2 & l_1s_2\end{bmatrix}$ $V_\chi(\Theta,\dot\Theta)=\begin{bmatrix}-(m_2l_1c_2+m_2l_2)\dot\theta_1^2-m_2l_2\dot\theta_2^2-(2m_2l_2+m_2l_1c_2+m_1l_1\dfrac{c_2}{s_2^2})\dot\theta_1\dot\theta_2\\ m_2l_1s_2\dot\theta_1^2+m_2l_1s_2\dot\theta_1\dot\theta_2\end{bmatrix}$

$G_\chi(\Theta)$ 笛卡尔空间的重力项矢量.

笛卡尔位形空间中的力矩方程

$F=J^{-T}\tau=J^{-T}M(\Theta)\ddot\Theta+J^{-T}V(\Theta,\dot\Theta)+J^{-T}G(\Theta)$ 当 $s_2=0$ 时，操作臂位于奇异位置

$\tau=J^T(\Theta)(M_\chi(\Theta)\ddot\chi+V_\chi(\Theta,\dot\Theta)+G_\chi(\Theta))$

$\dot\chi=J\dot\Theta\ \Rightarrow\ \ddot\chi=\dot{J}\dot\Theta+J\ddot\Theta\ \Rightarrow\ \ddot\Theta=J^{-1}\ddot\chi-J^{-1}\dot{J}\dot\Theta$

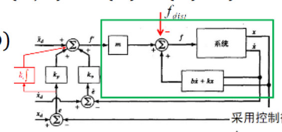
代入得: $F=J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\ddot\chi-J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\dot{J}\dot\Theta+J^{-T}V(\Theta,\dot\Theta)+J^{-T}G(\Theta)$ $\dfrac{\theta_2-\theta_1}{t_{d12}-\frac{1}{2}t_1}$ $t_1=t_{d12}-\sqrt{t_{d12}^2-\dfrac{2(\theta_2-\theta_1)}{\ddot\theta_1}}$ $\ddot\theta_1=SGN(\theta_2-\theta_1)|\ddot\theta_1|$ $\dot\theta_{12}=\dfrac{\theta_2-\theta_1}{t_{d12}-\frac{1}{2}t_1}$ $t_{12}=t_{d12}-t_1-\dfrac{1}{2}t_2$

于是 $M_\chi(\Theta)=J^{-T}(\Theta)M(\Theta)J^{-1}(\Theta)$

$f'=\ddot{x}_d+\boxed{k_v\dot{e}+k_pe+k_i\int edt}$ $\dot\theta_{jk}=\dfrac{\theta_k-\theta_j}{t_{djk}}$ $\ddot\theta_k=SGN(\dot\theta_{kl}-\dot\theta_{jk})|\ddot\theta_k|$ $t_k=\dfrac{\dot\theta_{kl}-\dot\theta_{jk}}{\ddot\theta_k}$ $t_{jk}=t_{djk}-\dfrac{1}{2}t_j-\dfrac{1}{2}t_k$

$V_\chi(\Theta,\dot\Theta)=J^{-T}(\Theta)(V(\Theta,\dot\Theta)-M(\Theta)J^{-1}(\Theta)\dot{J}\dot\Theta)$ PID控制

$G_\chi(\Theta)=J^{-T}(\Theta)G(\Theta)$



该力是施加在弹簧上的力: $f_e=k_ex$

通过力分析得到系统方程: $f=m\ddot{x}+k_ex+f_{dist}$

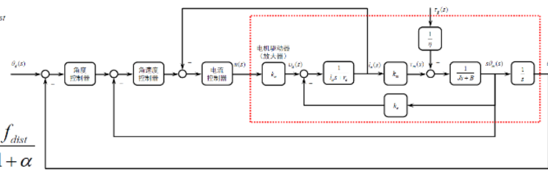
因此输入力与接触力的关系方程为 $f=mk_e^{-1}\ddot{f}_e+f_e+f_{dist}$

$\tau_m=\left(I_m+\dfrac{I}{\eta^2}\right)\ddot\theta_m+\left(b_m+\dfrac{b}{\eta^2}\right)\dot\theta_m+\dfrac{\tau}{\eta}=J\ddot\theta_m+B\dot\theta_m+\dfrac{\tau}{\eta}$ ⇨ $s\theta_m(s)=\dfrac{1}{Js+B}\left(\tau_m(s)-\dfrac{\tau_g(s)}{\eta}\right)$

操作臂的线性控制 $l_a\dfrac{di_a}{dt}+r_ai_a=\upsilon_a-k_e\dfrac{d\theta_m}{dt}$ ⇨ $i_a(s)=\dfrac{1}{l_as+r_a}(\upsilon_a(s)-k_es\theta_m(s))$ $\tau_m=k_mi_a$

$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=f$ 采用控制律分解方法进行反馈线性化，$f=\alpha f'+\beta$ ，取 $\alpha=mk_e^{-1}$ ， $\beta=f_e+f_{dist}$

$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=\alpha f'+\beta$ 设计控制率 $f'=-k_v\dot{x}-k_px$ 令 $e_f=f_d-f_e$ ， 因此，控制律为: $f=mk_e^{-1}[\ddot{f}_d+k_{vf}\dot{e}_f+k_{pf}e_f]+f_e+f_{dist}$



取 代入上式，得 $\ddot{x}+k_v\dot{x}+k_px=0$ 由此得到误差线性系统: $\ddot{e}_f+k_{vf}\dot{e}_f+k_{pf}e_f=0$

$\beta=b\dot{x}+kx$ 在控制律中用 $f_d$ 代替 $f_e+f_{dist}$，则实际控制律为:

$\alpha=m$ $\ddot{e}+k_v\dot{e}+k_pe=0$ ⇨ 闭环系统的误差方程 $f=mk_e^{-1}[\ddot{f}_d+k_{vf}\dot{e}_f+k_{pf}e_f]+f_d$ 稳态误差: $e_f=\dfrac{f_{dist}}{1+\alpha}$

临界阻尼: kp=闭环刚度, kv=2√kp 稳态分析: $mk_e^{-1}k_{pf}e_f+e_f=f_{dist}$