自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大
用自己的浙大通行证账号登录

第六章 Chapter 6

频率特性分析法(Frequency Response)

第六章关键词

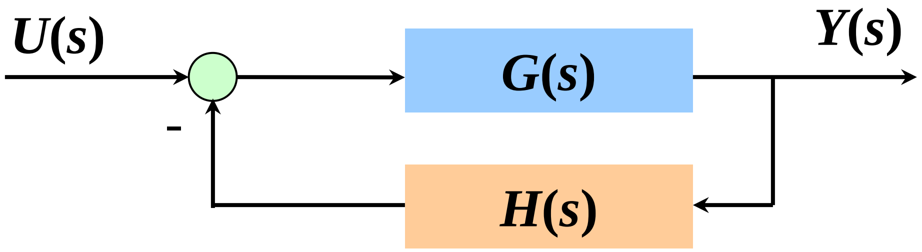
- 频率、频率响应、频率特性
- 幅频特性、相频特性
- 对数频率特性（BODE图）
- 极坐标图（奈奎斯特图）
- 奈奎斯特稳定判据
- 稳定裕度（幅值裕度、相位裕度）
- 频域性能

第六章主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性

回顾：模型

- 方块图：



- 微分方程：

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0 y(t)$$
$$=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_0 u(t)$$

- 传递函数：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\Phi(s)$$

- 状态空间模型：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du$$

回顾：求解

$$y(t) = y_{ss} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots$$

稳态响应

暂态响应

$A_1, A_2, \ldots$

由输入和传递
函数决定

由传递函数
极点决定

回顾：控制系统的性能

- 稳定性
- 快速性

特征方程的根（特征根）

根轨迹

→ 暂态响应

稳定系统

- 准确性

系统型别
&增益K

→ 误差系数

→ 稳态响应

稳态响应

➢ 例：

$x(t)$ → $G(s)=\dfrac{3}{2s+1}$ → $y(t)$

$x(t)=\sin(2t+45^{\circ})$

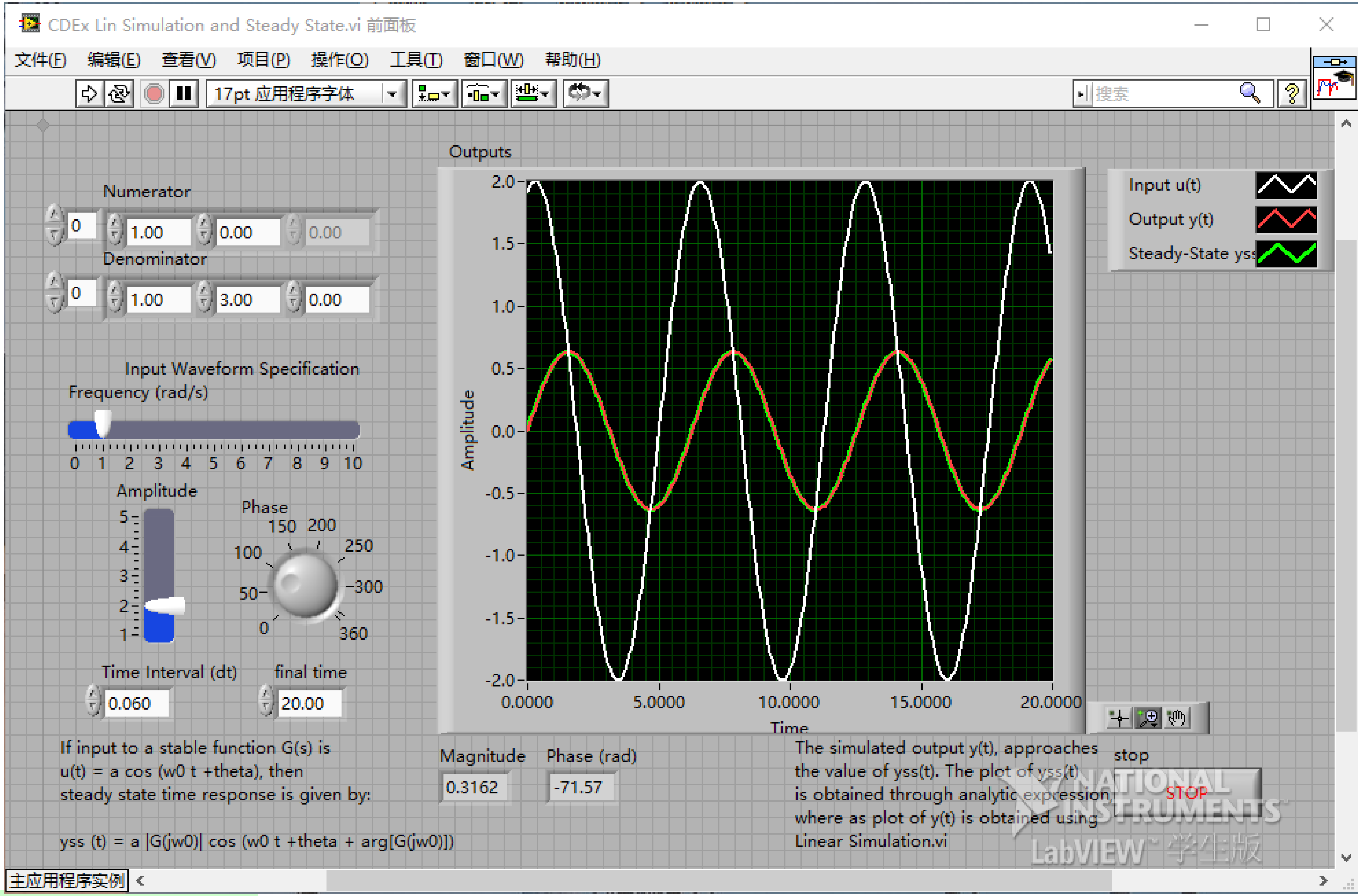
$$y(t)\big|_{t\to\infty}=??$$

终值定理??

NO!

稳态响应

➤ **仿真**



CDEx Lin Simulation and Steady State.vi 前面板
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 项目(P) 操作(O) 工具(T) 窗口(W) 帮助(H)
17pt 应用程序字体
搜索
Numerator
0
1.00
0.00
0.00
Denominator
0
1.00
3.00
0.00
Input Waveform Specification
Frequency (rad/s)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Amplitude
5 4 3 2 1
Phase
0 50 100 150 200 250 300 360
Time Interval (dt)
0.060
final time
20.00
Outputs
Amplitude
2.0 1.5 1.0 0.5 0.0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0
0.0000 5.0000 10.0000 15.0000 20.0000
Time
Input u(t)
Output y(t)
Steady-State yss
If input to a stable function G(s) is
u(t) = a cos (w0 t +theta), then
steady state time response is given by:
yss (t) = a |G(jw0)| cos (w0 t +theta + arg[G(jw0)])
Magnitude
0.3162
Phase (rad)
-71.57
The simulated output y(t), approaches
the value of yss(t). The plot of yss(t)
is obtained through analytic expression
where as plot of y(t) is obtained using
Linear Simulation.vi
stop
STOP
NATIONAL INSTRUMENTS
LabVIEW 学生版
主应用程序实例

结论

➢ 对于线性定常系统 (LTI)稳态响应

–正弦函数输入→正弦函数输出

输入： $u(t) = A\sin \underline{\omega t}$

输出： $y(t) = A \cdot \underline{G(\omega)} \sin[\underline{\omega t} + \underline{\alpha(\omega)}]$

具有相同频率!!

响应的幅值和相位与频率相关

概述

➢ 频率特性常用的两种图示方法：

❖Bode图（对数频率特性曲线）

❖Nyquist图（极坐标图，幅相曲线）

Hendrik Wade Bode
(1905-1982)

Harry Nyquist
(1889-1976)

概述

基于图形的系统性能分析和校正有两个基本方法：

➢ 根轨迹法

优点：

✓ 当参数（增益）变化时，显示闭环系统特征根的位置

✓ 精确地给出系统瞬态响应的相关信息。由于特征根的精确位置已经知道，通过拉氏反变换很容易获取系统的时域响应。

缺点：

✓无法处理测量噪声和扰动抑制

概述

- **频率响应法**
  - ✓ 可以从同一张图中推断出系统的稳定性和稳态性能
  - ✓ 容易处理频率范围的约束
  - ✓ 允许对噪声影响进行评价，通过设计一个滤波带来消除噪声，提高系统性能
  - ✓ 当系统模型未知时，可以用测量数据建模（数据建模的一种，对系统辨识是有利的）
  - ✓ 与根轨迹方法相比，可以处理纯滞后
  - ✓ 用图示法分析和设计系统，使用方便

概述

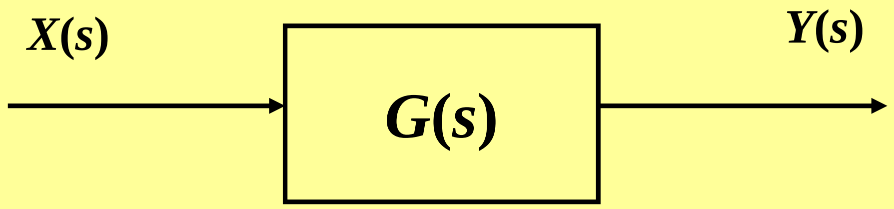
本章介绍：

- 系统频率特性
- 传递函数的两种图示方法：
  - 对数坐标图（the logarithmic plots）
  - 极坐标图（the polar plots）
- Nyquist稳定判据
- 频域性能分析

概述——频率特性

考虑系统

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$



系统方块图

若输入为

$$x(t) = X\sin\omega t$$

LT

$$X(s) = \frac{X\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= \frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \cdot \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \\ &= \frac{b}{s+j\omega} + \frac{\bar{b}}{s-j\omega} + \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-s_n} \end{aligned}$$

概述——频率特性

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=G(s)$$

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{b}{s+j\omega}+\frac{\bar{b}}{s-j\omega}+\frac{a_1}{s-s_1}+\frac{a_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-s_n}$$

$$\Big\Downarrow\ \mathrm{LT}^{-1}$$

$$y(t)=be^{-j\omega t}+\bar{b}e^{j\omega t}+a_1e^{s_1t}+a_2e^{s_2t}+\cdots+a_ne^{s_nt}$$

对于稳定系统，当t趋于无穷大时，所有瞬态项都趋于零，仅稳态响应保留。

$$\Big\Downarrow\ t\to\infty$$

$$y_\infty(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=be^{-j\omega t}+\bar{b}e^{j\omega t}$$

其中 b 和 $\bar{b}$ 可以通过留数定理或其他方法获得。

概述——频率特性

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=G(s)$$

$$\left\{\begin{aligned} b&=G(s)\frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\cdot(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega}=-\frac{G(-j\omega)X}{2j}\\ \bar{b}&=G(s)\frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\cdot(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega}=\frac{G(j\omega)X}{2j}\end{aligned}\right.$$

其中 $G(j\omega)$ 是复数，可以表示为

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)=arctg\left[\frac{\operatorname{Im}G(j\omega)}{\operatorname{Re}G(j\omega)}\right]$$

注意：是 ω的函数!!

同样地，$G(-j\omega)$： $G(-j\omega)=|G(-j\omega)|\cdot e^{-j\varphi(\omega)}=|G(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$

$$y_\infty(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=be^{-j\omega t}+\bar{b}e^{j\omega t}$$

概述——频率特性

$\bar{b}=\dfrac{G(j\omega)X}{2j}$　$b=-\dfrac{G(-j\omega)X}{2j}$　$\dfrac{Y(s)}{X(s)}=G(s)$

$$y_{\infty}(t)=be^{-j\omega t}+\bar{b}e^{j\omega t}=-|G(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)}\cdot\frac{Xe^{-j\omega t}}{2j}+|G(j\omega)|\cdot e^{j\phi(\omega)}\cdot\frac{Xe^{j\omega t}}{2j}$$

$$=|G(j\omega)|X\cdot\frac{e^{j(\omega t+\phi)}-e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j}$$

$$=|G(j\omega)|X\cdot\sin(\omega t+\phi)$$

$x(t)=X\sin\omega t$

表示稳态响应的幅值

或 $y_{\infty}(t)=Y\sin(\omega t+\phi)$

对于稳定的线性定常系统，由谐波输入产生的输出稳态分量仍然是与输入同频率的谐波函数，而幅值与相位的变化是频率ω的函数

其中 $G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}=|G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$ 通常被称为**频率特性**

获得$G(j\omega)$的两种方法：分析法和实验法。

概述——频率特性

定义：

谐波输入下，输出响应中与输入同频率的谐波分量与谐波输入的幅值之比$M(\omega)$为幅频特性，相位之差$\varphi(\omega)$为相频特性，并称其指数表达形式 $G(j\omega)=M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ 为频率特性。

例如：

输入： $x(t)=A\sin\omega t$

输出： $y(t)=A\cdot M(\omega)\sin[\omega t+\phi(\omega)]$

$M(\omega)$ 频率响应的幅值比

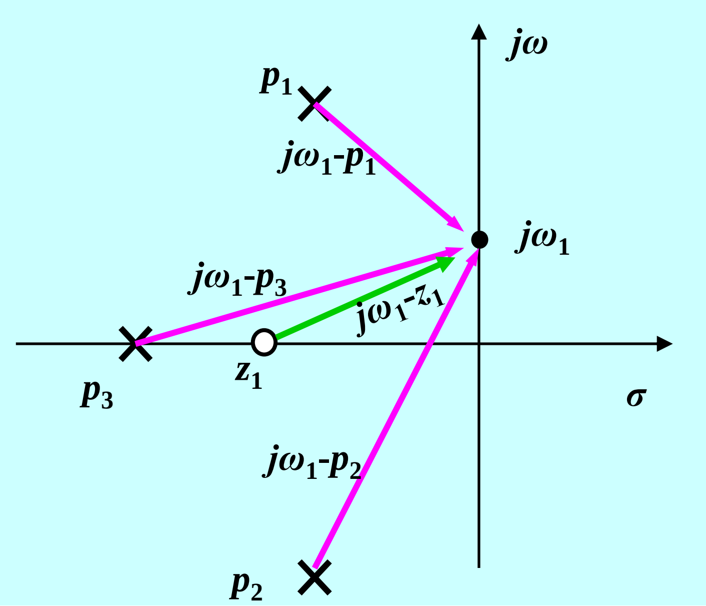
$\phi(\omega)$ 频率响应的相位差

当系统$G(s)$的输入为一频率ω的正弦信号时，稳态输出为同频率的正弦信号，与输入信号相比，其幅值增大为$|G(j\omega)|$倍，相位差$\angle G(j\omega)$。

概述——频率特性

线性稳定系统传递函数：

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$



频率响应：

$$M(\omega)=\left|\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\right|=\left|\frac{K(j\omega-z_1)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)\cdots(j\omega-p_m)}\right|=|G(j\omega)|$$

$$\begin{aligned}\phi(\omega)&=\angle B(j\omega)-\angle A(j\omega)=\angle G(j\omega)\\&=\angle K+\angle(j\omega-z_1)+\cdots\angle(j\omega-z_m)-\angle(j\omega-p_1)-\cdots-\angle(j\omega-p_n)\end{aligned}$$

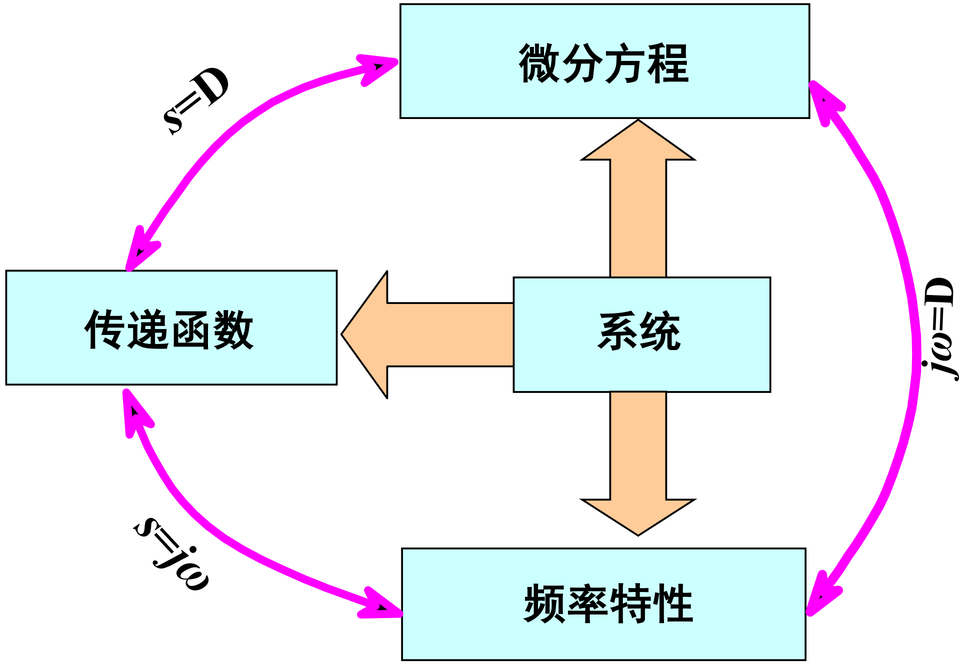
概述——频率特性

一旦系统的频率响应确定，则通过傅立叶反变换可以求出系统的**时域响应**。

$$R(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(j\omega)=\Phi(j\omega)R(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)}R(j\omega)$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$



概述——频率特性

常用的频域图示方法可以分为两类：

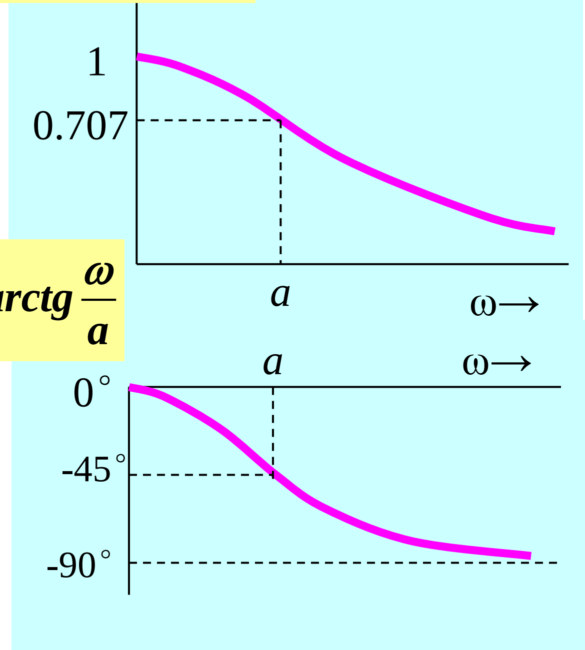
1) 在直角坐标系中，频率与输出输入比的**幅值**之间的关系图，以及相应的**相角**与频率之间的关系图，例如

输入：$X(j\omega)$ 输出：$Y(j\omega)$

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{a}{s+a}=\frac{a}{j\omega+a}$$

$$M(\omega)=\left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|=\frac{a}{\sqrt{\omega^2+a^2}}$$

$$\phi(\omega)=\angle\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=-arctg\frac{\omega}{a}$$



在对数坐标系中被称为*bode*图或对数频率特性曲线（由对数幅频曲线和对数相频曲线组成）

概述——频率特性

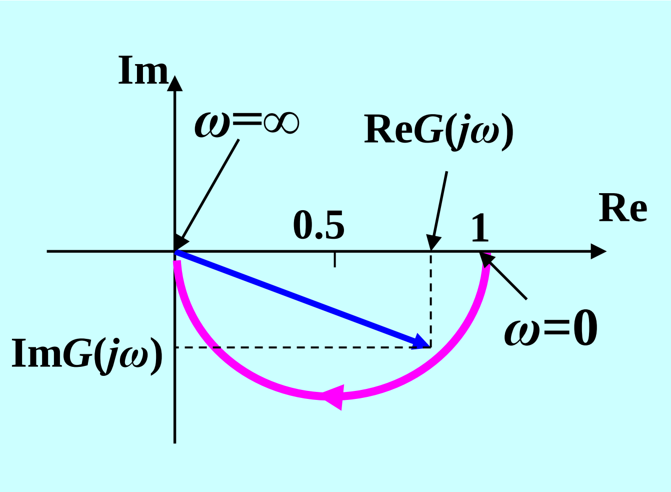
2) 在极坐标系中以频率为参数绘制输出输入比被称为 Nyquist 图（或幅相频率特性曲线）——通常在开环系统响应中应用

例 6-1：传递函数$G(s)$

$$G(s)=\frac{1}{1+Ts} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1-j\omega T}{1+(T\omega)^2}$$

$$\left[\mathrm{Re}G(j\omega)-\frac{1}{2}\right]^2+\mathrm{Im}^2G(j\omega)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

其Nyquist 图是以(0.5, j0) 为圆心，以0.5为半径的圆

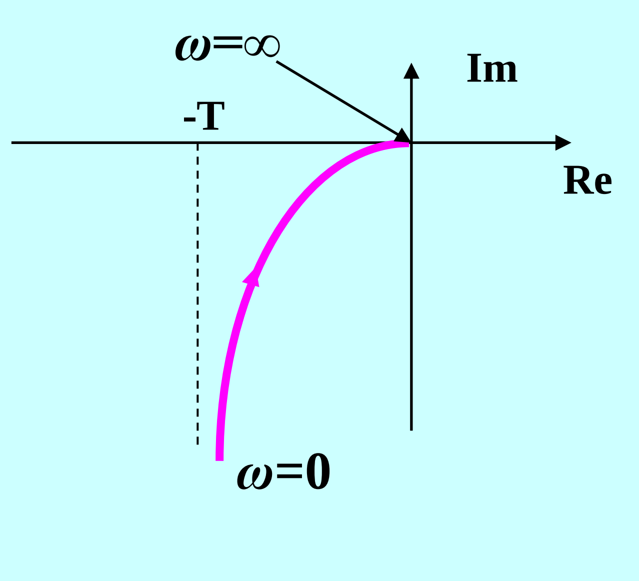


概述——频率特性

例 6-2：传递函数$G(s)$

$$G(s)=\frac{1}{s(Ts+1)} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega T+1)}=\frac{-T}{1+\omega^2T^2}-j\frac{1}{\omega(1+\omega^2T^2)}$$

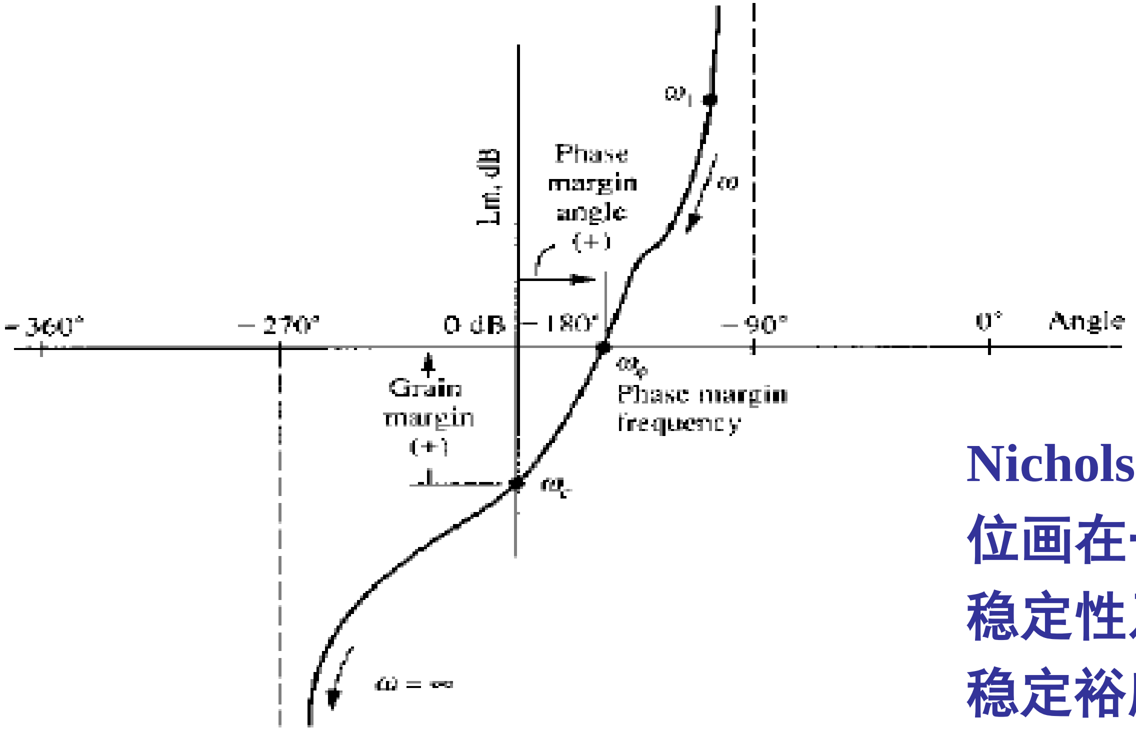
$$\Rightarrow \begin{cases} G(j\omega)\big|_{\omega\to 0}=-T-j\infty=\infty\angle(-90^\circ) \\ G(j\omega)\big|_{\omega\to\infty}=-0-j0=0\angle(-180^\circ) \end{cases}$$



概述——频率特性

以频率为参数，纵坐标为对数幅值，横坐标为相角（对数幅值 vs 相角），被称为 Nichols图或者对数幅相曲线。

——第三种频域图形表现形式



Nichols图的优点是将对数幅值与相位画在一张图中，直接可读出系统的稳定性及其稳定的裕度（以后会介绍稳定裕度的概念）。

第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性

Bode图（对数坐标图）

对数坐标图的优点

1) 将乘积和除法的数学操作转化为加法和减法；
2) 用渐近线表示幅频特性，作图方便；
3) 半对数坐标扩展了低频段。

首先运用直线近似的方法来获得系统的近似特性，然后修正直线，提高精度。

足够多的数据

对数坐标图 → 极坐标图

Bode图（对数坐标图）

对数坐标图的定义：

缩写“log” 表示以10为底的对数

对数幅频：频率特性 $G(j\omega)$ 幅值 (幅频特性)的对数，以分贝来表示

$$20\log|G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

称为对数幅频，缩写为Lm。因此

$$\text{Lm}G(j\omega)=20\log|G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

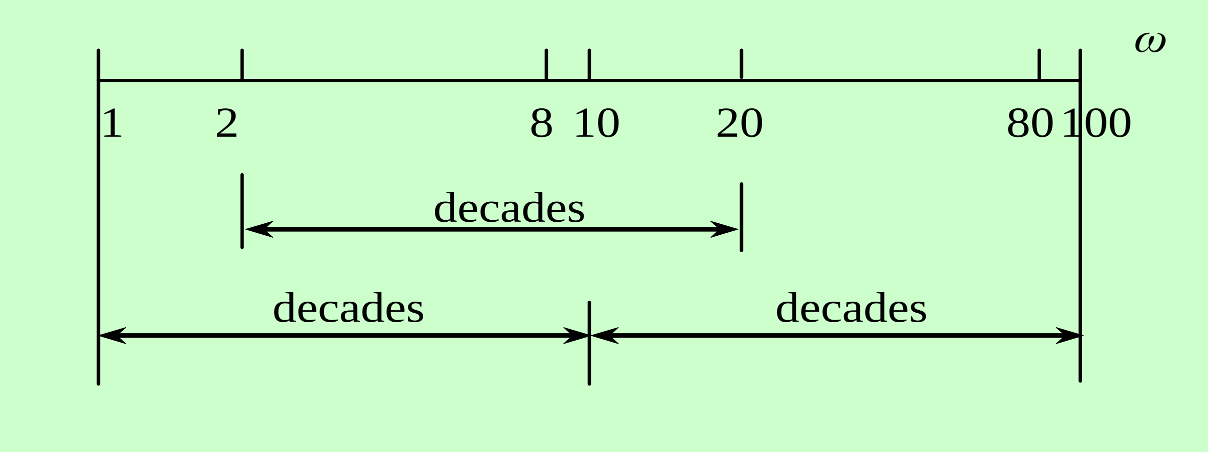
由于频率特性 $G(j\omega)$是频率的函数，因此 Lm 也是频率的函数。

Bode图（对数坐标图）

倍频概念

Octave (倍频)：倍频是f_1到f_2的频带，其中 $f_2/f_1=2$。 例如：频带 1~2Hz 是 1个倍频宽度，频带17.4~34.8Hz 也是一个倍频宽度。

Decade(十倍频)：当$f_2/f_1=10$时，则频带f_1到f_2称为一个十倍频。频带1~10 Hz或者 2.5~25 Hz 称为一个十倍频宽度。



Bode图（对数坐标图）

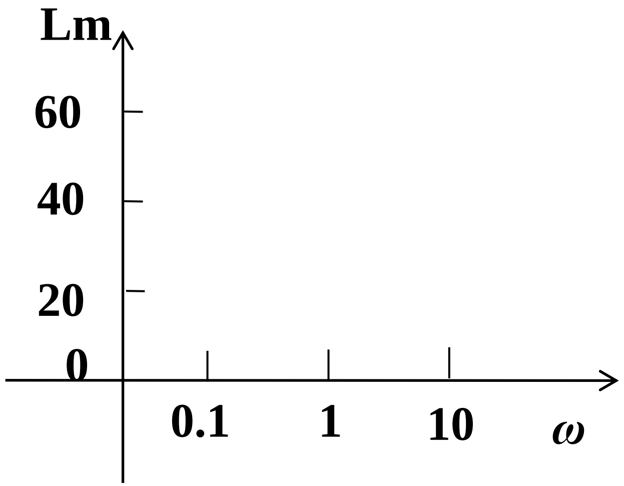
Bode图（对数频率特性曲线）：

对数频率特性曲线由对数幅频曲线和对数相频曲线组成

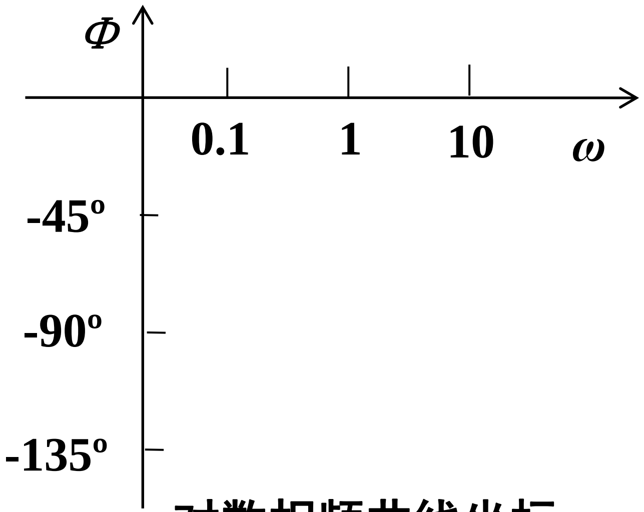
对数频率特性曲线的横坐标：按logω分度，单位为弧度/秒（rad/s）

对数幅频曲线的纵坐标：按Lm$G(j\omega)$=20log|$G(j\omega)$|线性分度，单位是分贝

对数相频曲线的纵坐标：按$\Phi(\omega)$线性分度，单位为度



对数幅频曲线坐标



对数相频曲线坐标

Bode图（对数坐标图）

$$LmG(j\omega)=20\log|G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

频域响应：

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)^r\cdots}{(j\omega)^m(1+j\omega T_a)[1+(2\zeta/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2]\cdots}$$

对数幅值：

$$LmG(j\omega)=LmK_m+Lm(1+j\omega T_1)+rLm(1+j\omega T_2)+\cdots-mLm(j\omega)$$
$$-Lm(1+j\omega T_a)-Lm\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]-\cdots$$

相角方程：

$\tan^{-1}\omega T_1$

$m90^\circ$

$$\angle G(j\omega)=\angle K_m+\angle(1+j\omega T_1)+r\angle(1+j\omega T_2)+\cdots-m\angle(j\omega)$$
$$-\angle(1+j\omega T_a)-\angle\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]-\cdots$$

$0^\circ/-180^\circ$

$$\tan^{-1}\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}$$

绘制Bode图

一般形式的传递函数

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)^r\cdots}{(j\omega)^m(1+j\omega T_a)[1+(2\zeta/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2]\cdots}$$

典型环节：

$$K_m \qquad (j\omega)^{\pm m} \qquad (1+j\omega T)^{\pm r} \qquad \left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm p}$$

$$K_m \qquad (j\omega)^{\pm 1} \qquad (1+j\omega T)^{\pm 1} \qquad \left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm 1}$$

典型环节的Bode图叠加在一起就可以得到整个频率特性的Bode图，特别是采用对数幅频渐近特性曲线的时候。

The End