第八章 状态空间模型分析与设计

吴俊

jwu@iipc.zju.edu.cn

主要内容

- ✓ 回顾与简介
- ✓ 可控性与可观测性
- ✓ 线性变换和标准型
- ✓ SISO 系统状态反馈
- ✓ 状态变量反馈：稳态误差分析
- ✓ SISO 系统状态观测器
- ✓ ………

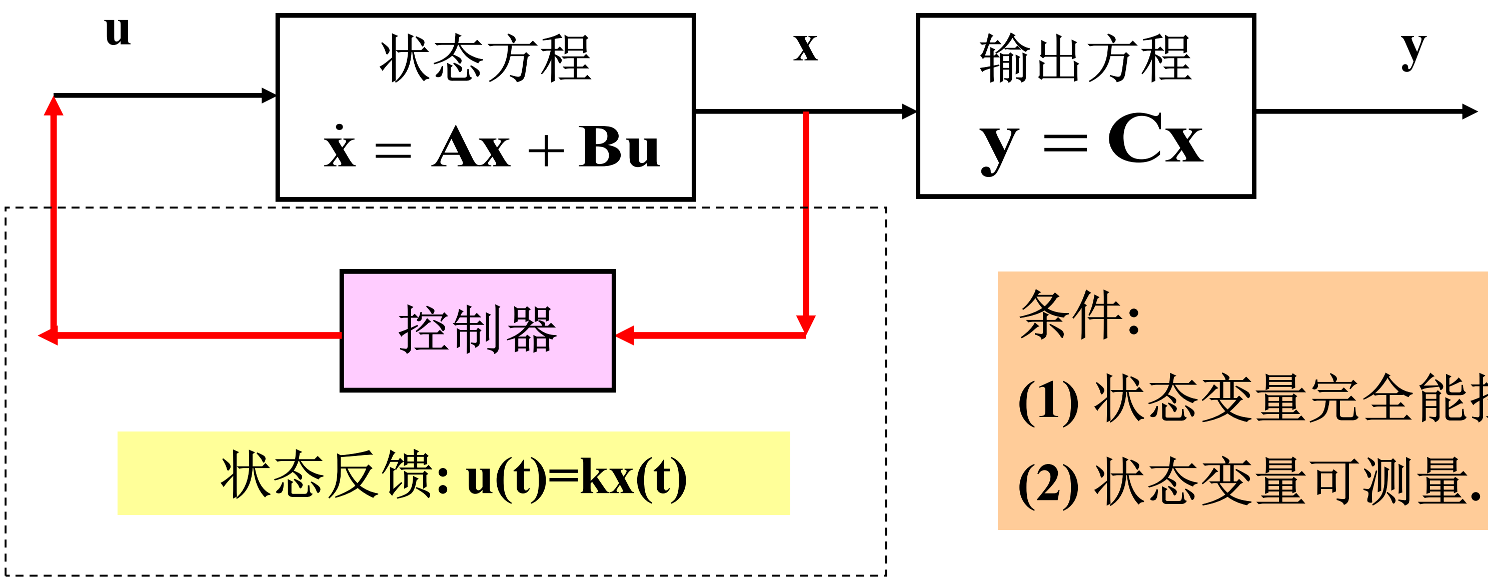
主要内容

- ✓ **SISO 系统状态观测器**
  - ✓ **基本思想**
  - ✓ **全维观测器**
  - ✓ **分离原理**
  - ✓ **降维观测器**

SISO 系统状态观测器

1. 基本思想

•**在第 4 节讨论通过状态反馈 u=Kx 进行极点任意配置时，总是假设所有的状态都是可以获取的。**



条件:

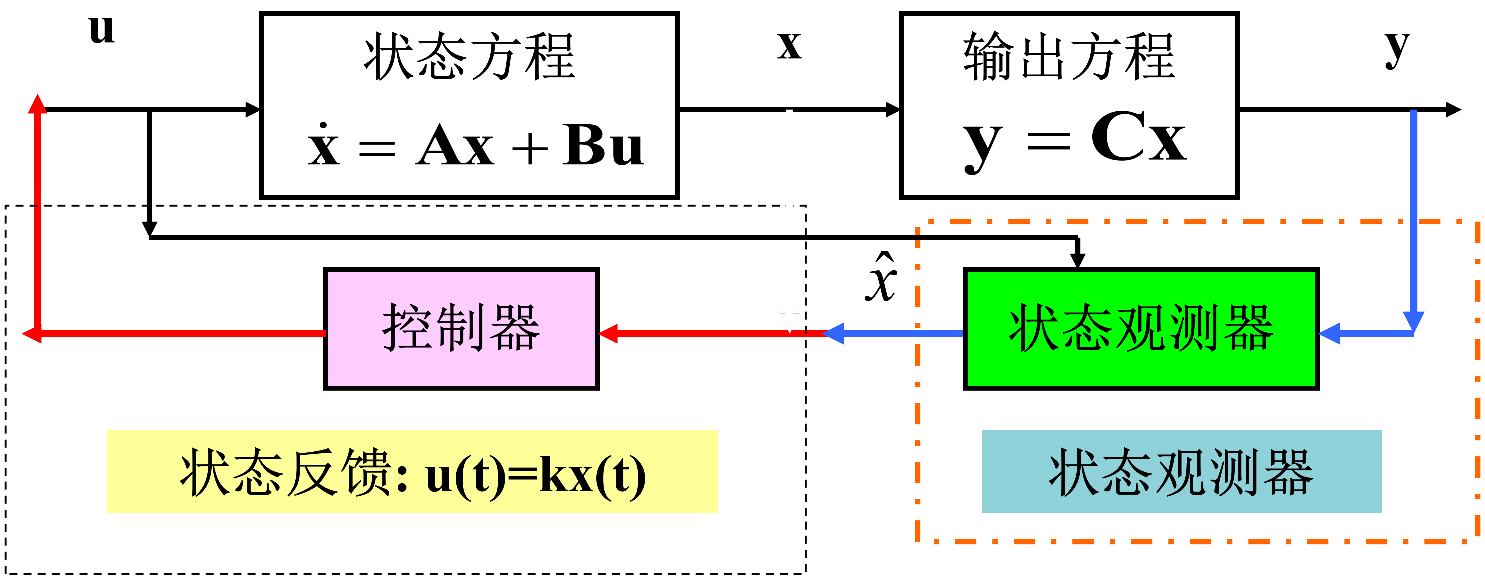
(1) 状态变量完全能控;

(2) 状态变量可测量.

SISO 系统状态观测器

1. 基本思想

如果状态变量不可测量，但是系统可观测, 则实时状态变量可以由系统输入和输出估计出来, 如图所示. 估计器被称为状态观测器.



SISO 系统状态观测器

1. 基本思想

- **实际工程中，能获取的往往是输出 y, 而非状态 x. 设计状态观测器的目的是利用已知的输出与输入信息估计出不能获取的状态。其中**

$$\mathbf{y} \in R^{m\times 1},\quad \mathbf{x} \in R^{n\times 1},\quad \mathrm{m} < \mathrm{n}$$

要求? **采用估计出的状态取代真实的状态必须满足 2 个基本要求:**

(1) $\|\hat{x}(t)\text{-}x(t)\|$ 收敛, $\lim\limits_{t\to\infty}\|\hat{x}(t)\text{-}x(t)\| = 0$

(2) $\|\hat{x}(t)\text{-}x(t)\|$ 收敛速度满足要求

向量$e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$的欧几里得范数

$$\|e(t)\| = \sqrt{e_1^2(t) + e_2^2(t) + \cdots + e_n^2(t)}$$

- **所谓状态观测器（又称状态重构或状态估计）：已知系统的动态数学模型，通过输入、输出信息估计出系统的全部状态信息。**

SISO 系统状态观测器

1. 基本思想

系统状态空间模型为Σ：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),\ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$
$$\mathbf{y} \in R^m,\ \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{u} \in R^r$$

1）方法一：利用系统输入及输出的微分信号可直接估计状态信息

$$y = Cx$$
$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$$
$$\ddot{y} = C\ddot{x} = CA^2x + CABu + CB\dot{u}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)} = Cx^{(n-1)} = CA^{n-1}x + \sum_{i=1}^{n-1} CA^{n-1-i}Bu^{(i-1)}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - CBu(t) \\ \ddot{y}(t) - CABu(t) - CB\dot{u}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} CA^{n-1-i}Bu^{(i-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t) = \mathbf{N}x(t)$$

当系统能观，则N的秩为n

$$\mathbf{N}^T\mathbf{N}\mathbf{X}(t) = \mathbf{N}^T\mathbf{Y}(t) \Rightarrow \mathbf{X}(t) = (\mathbf{N}^T\mathbf{N})^{-1}\mathbf{N}^T\mathbf{Y}(t)$$

1. 基本思想

- **由上式可见：** 若系统能观，则由输入输出及它们的（n-1）阶导数构造向量 Y(t)，可获得x(t)。

- 然而，上述观测方法在多数工程场合却行不通

原因： 信号中不可避免地存在噪声，微分尤其是高阶的微分对噪声有放大作用－－可能足以覆盖真实的测量信号

例： 热噪声信号

$$\omega(t) = 0.01\sin 100t$$

$$\dot{\omega}(t) = \cos 100t$$

$$\ddot{\omega}(t) = -100\sin 100t$$

每次微分都将噪声信号的模放大到原值的100倍

因此，方法一没有普遍的实际应用价值。

SISO 系统状态观测器

1. 基本思想

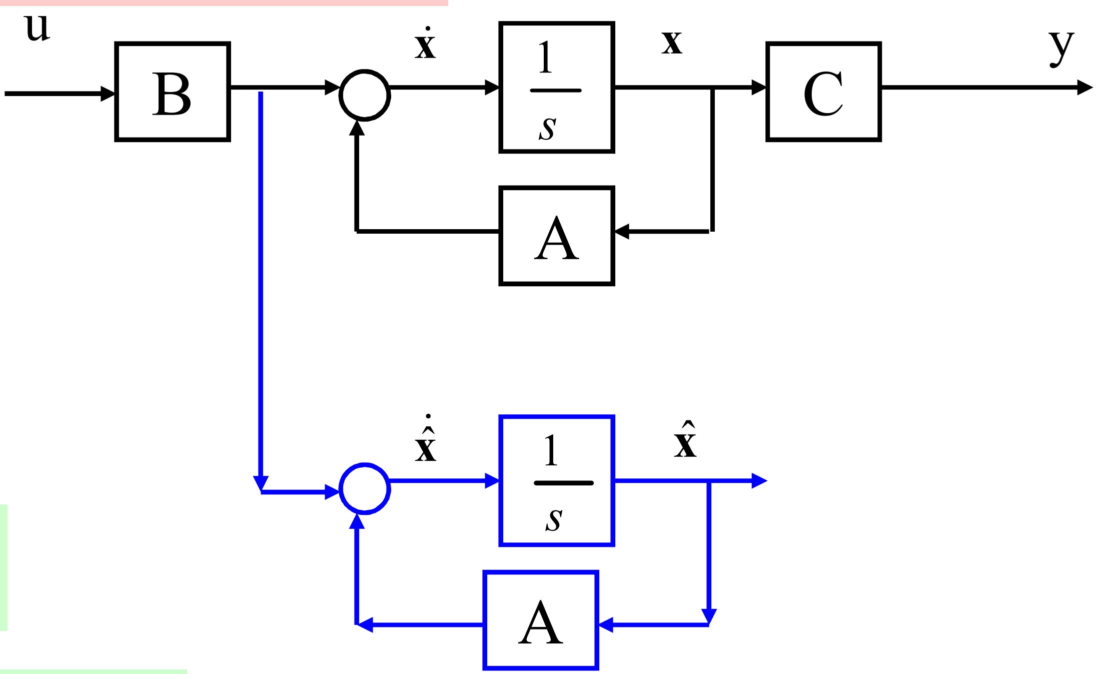
系统状态空间模型 Σ：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),\ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$
$$\mathbf{y} \in R^m,\ \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{u} \in R^r$$

2）方法二：利用系统数学模型估计状态信息

构造一个系统：

$$\tilde{\Sigma}:\ \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$$



$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A(\hat{x}(t) - x(t))$$

$$\hat{x}(t) - x(t) = e^{At}(\hat{x}_0 - x_0)$$

缺点1：工程中无法保证$\hat{x}_0 - x_0$=0，
若A不稳定，$\hat{x}(t) - x(t)$发散

缺点2：即使A稳定，收敛速度未必满足要求

缺点3：未用y和C的信息

1. 基本思想

对状态观测器的大致轮廓分析：

(1) 不需要对系统变量微分（u，y)

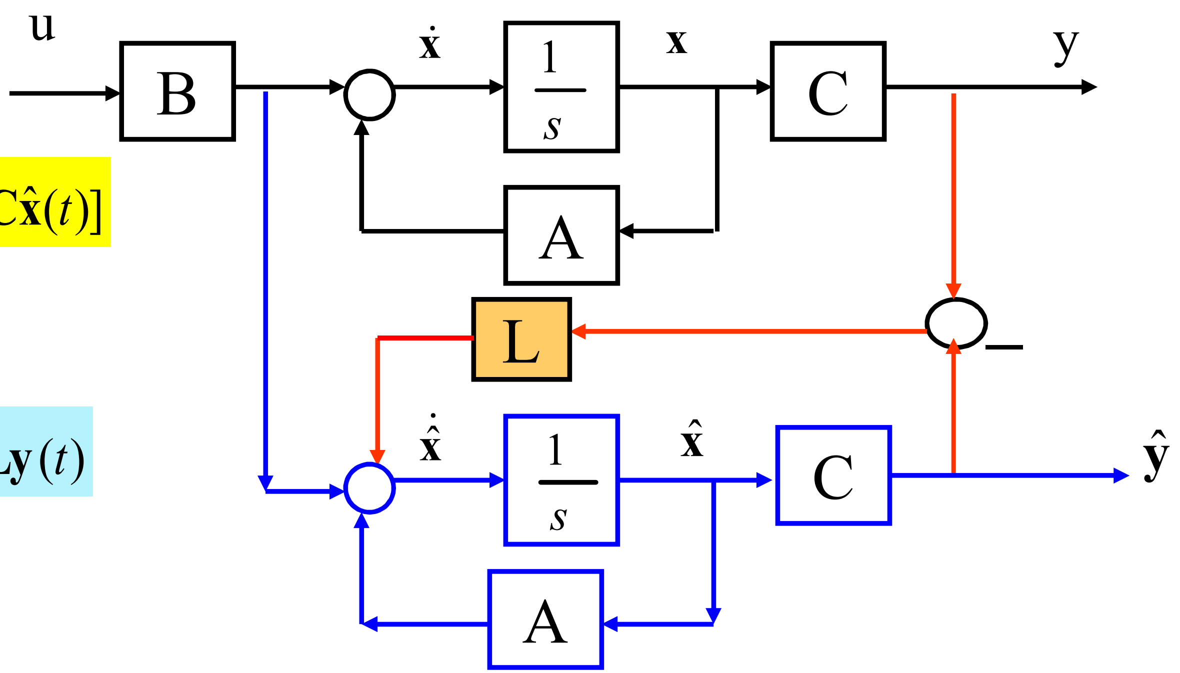
(2) 在已知 模型 基础上，可以通过调整某些参数，控制 $\hat{x}(t) \to x(t)$ **的收敛及收敛速度**

(3) 用C和y校正状态观测的偏差

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

引入校正环节，实质是反馈



$$\tilde{\Sigma}_o : \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)]$$

或写成

$$\tilde{\Sigma}_o : \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$$

$\mathbf{y} \in R^m$，$\mathbf{x} \in R^n$

$\mathbf{L}_{n\times m}$ – 待定常量矩阵

问题：

1）如何求L阵以保证所得到的状态观测器满足要求？

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

$$\tilde{\Sigma}_o: \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$
$$= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(Cx(t) - C\hat{x}(t))$$
$$= A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC(x(t) - \hat{x}(t))$$

- **定义真实状态与估计状态之间的误差为** $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$

则 $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$

$= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu - LC(\hat{x} - x)] = (A - LC)\tilde{x}$ ——状态估计误差方程

齐次方程求解

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{(\mathrm{A-LC})t}\tilde{\mathbf{x}}(0)$$

一般未知，因为x (0)一般不知道

要求 $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] = 0$ **且尽可能地快**

也即要求（A - LC）矩阵的所有特征值均位于左半平面。若(A-LC)的极点能任意配置， $\tilde{\mathbf{x}}$ **衰减的过程也就能被控制。**

2. 全维状态观测器设计

- **定理1：设系统 Σ：**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

完全能观，则可通过全维状态观测器Σ_o： $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$

估计它的状态，估计误差 $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ **由** $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(t)$ **决定，并可通过 L 阵的选取，任意配置（A - LC）的全部特征值。**

说明：因为｛A，C｝能观，对偶系统 Σ^*： $\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{C}^T\mathbf{u}^*(t)$

能控，据对偶原理，｛A^T，C^T｝能控, 则必存在K^*实现$(A^T + C^TK^*)$的极点任意配置

因为特征值不受转置影响 $\lambda(\mathbf{A}^T + \mathbf{C}^T\mathbf{K}^*) = \lambda(\mathbf{A} + (\mathbf{K}^*)^T\mathbf{C})$

只要令：$L = -(K^*)^T$，所以只要对偶系统能控(原系统能观)，(A - LC)的极点就可实现任意配置。L称为观测器的增益矩阵。

2. 全维状态观测器设计

- 由 定理1 的说明，可知系统状态观测器的设计问题实际上已经转化为状态反馈控制器的设计，方法完全类似。

Example 8-7-1 设有系统

(2001年考研题)

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{cx} = [1 \quad 0]\mathbf{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 - 10， - 1。

解： step 1: 能观性判别，系统完全能观。

step 2: 观测器期望特征方程 $\Delta^*(s) = (s+10)(s+1) = s^2 + 11s + 10 = 0$

step 3: 构造全维观测器，写出观测器特征方程

观测器 $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{Ly}(t)$

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

$$\Delta^*(s)=(s+10)(s+1)=s^2+11s+10=0$$

Example 8-7-1 **设有系统**

(2001年考研题)

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0.08\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{cx}=[1 \quad 0]\mathbf{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 - 10， - 1。

解： step 3: **构造全维观测器，写出观测器特征方程**

观测器 $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)=(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{Ly}(t)$

观测器特征方程

$$\Delta_o(s)=\left|s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\right|=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}[1 \quad 0]\right\}\right|$$

$$=s^2-(0.1-l_1)s-0.1l_1+0.1l_2$$

step 4: **求解观测器增益矩阵**

$$\Delta^*(s)=\Delta_o(s)\Rightarrow \mathbf{L}=\begin{cases}l_1=11.1\\ l_2=111.1\end{cases}$$

step 5: **写出全维观测器方程（此略）**

2. 全维状态观测器设计

Example 8-7-1-2 系统表示为

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}=x_1$$

假设状态$\mathbf{x}_2$不可测量. 构造状态观测器，使观测器极点位于**-9** 和 **-10.**

解：首先判断系统是否可观测. 由可观性矩阵

$$\mathbf{Rank}M_o=\mathbf{Rank}\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}=2$$

系统完全能观.

[A-LC]的极点由期望的特征多项式决定

$$\Delta^*(s)=(s+9)(s+10)=s^2+19s+90$$
$$=\Delta_o=\left|sI-(A-LC)\right|=s^2+(3+l_1)s+2+2l_1+3l_2$$

$$\Rightarrow\quad L=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\ \dfrac{56}{3}\end{bmatrix}$$

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

$$L=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \\ \frac{56}{3} \end{bmatrix}$$

Example 8-7-1-2

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u,$$

$$\dot{e}(t)=\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \end{bmatrix}=[A-LC]e(t)=\left\{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 16 \\ 56/3 \end{bmatrix}[1 \quad 0]\right\}e(t)=\begin{bmatrix} -17 & 3 \\ -56/3 & -2 \end{bmatrix}e(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}+Bu+L(y-\hat{y})=(A-Lc)\hat{x}+Bu+Ly=\begin{bmatrix} -17 & 3 \\ -56/3 & -2 \end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 16 \\ 56/3 \end{bmatrix}y$$

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

SISO 系

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 3 \\ -56/3 & -2 \end{bmatrix} e(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -17 & 3 \\ -56/3 & -2 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 16 \\ 56/3 \end{bmatrix}y$$

2. 全维状态观测器设计

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Example 8-7-1-2

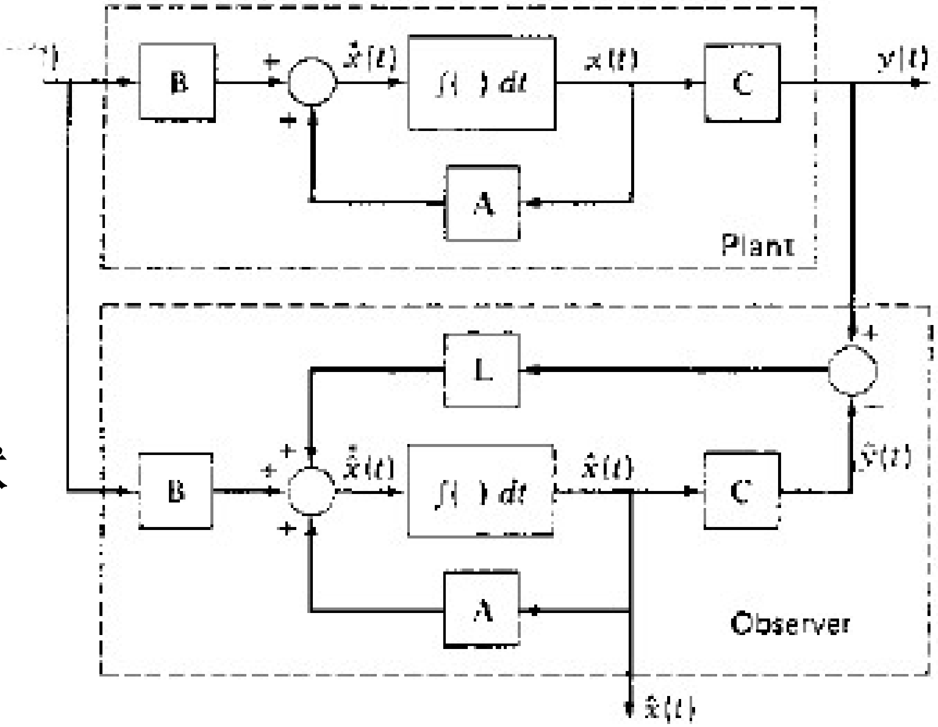
对于 **u(t)=1(t),** $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(0) \\ \hat{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ⇒ $e(0) = \begin{bmatrix} e_1(0) \\ e_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

则相应的响应分别为:

$$x_2(t) = 0.5 + 0.5e^{-2t}$$

$$e_2(t) = 8e^{-9t} - 7e^{-10t}$$

$$\hat{x}_2(t) = 0.5 + 0.5e^{-2t} - 8e^{-9t} + 7e^{-10t}$$

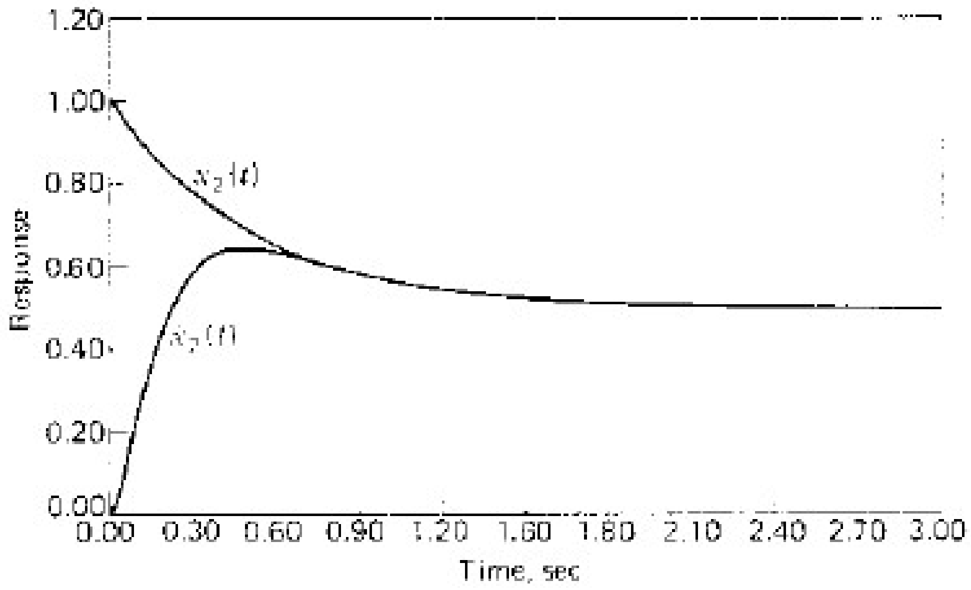


响应曲线如下图所示，估计状态 $\hat{x}_2(t)$ 能够快速跟踪实际状态 $x_2(t)$.

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

Example 8-7-1-2



对 **u(t)=1(t),**

$$x_2(t) = 0.5 + 0.5e^{-2t}$$

$$e_2(t) = 8e^{-9t} - 7e^{-10t}$$

$$\hat{x}_2(t) = 0.5 + 0.5e^{-2t} - 8e^{-9t} + 7e^{-10t}$$

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

全维观测器设计小结

1. 其设计方法类似于状态反馈控制器的设计，关键是求解增益矩阵 L

2. 当系统维数较低或C阵非零元素较少时，采用直接法设计较为方便；

但若维数＞ ＝3，或C阵中非零元素占优时，直接法求解将会困难（会遇到求解 f(L) 高阶方程）

------------这种情况下，简单通用的方法?

3. 回顾状态反馈控制器的设计方法，先化系统矩阵为标准型?

状态反馈：能控系统 $\Sigma \rightarrow$ 能控标准型 $\Sigma_c \rightarrow K_c \rightarrow K= K_cT_c^{-1}$

状态观测：能观系统 $\Sigma \rightarrow$ 能观标准型 $\Sigma_o \rightarrow L_o \rightarrow L=?$

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$x = T_o x_o$

$$\dot{x}_o = T_o^{-1} A T_o x_o + T_o^{-1} B u = A_o x_o + B_o u$$
$$y = C T_o x_o = C_o x_o$$

设计状态观测器

$$\dot{\hat{x}}_o = (A_o - L_o C_o)\hat{x}_o + B_o u + L_o y$$
$$\hat{y} = C_o \hat{x}_o$$

$\hat{x}_o = T_o^{-1}\hat{x}$

$$T_o^{-1}\dot{\hat{x}} = (A_o - L_o C_o) T_o^{-1}\hat{x} + B_o u + L_o y$$
$$\hat{y} = C_o T_o^{-1}\hat{x}$$

左乘**To**

$$\dot{\hat{x}} = T_o (A_o - L_o C_o) T_o^{-1}\hat{x} + T_o B_o u + T_o L_o y$$
$$= (A - T_o L_o C)\hat{x} + Bu + T_o L_o y$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

$L = T_o L_o$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

$$\mathbf{T}_o^{-1}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & ⋰ & ⋰ & 1 & \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-2} \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

全维观测器设计通用方法

Step 1. 对给定系统进行能观性判别，系统能观才能设计状态观测器

Step 2. 对能观系统构造一个变换矩阵$\mathbf{T}_o$；将系统 Σ 变成能观标准型 Σ_o

设系统 Σ：
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{T}_o\mathbf{x}_o(t)$$

$$\mathbf{T}_o=\mathbf{M}_o^{-1}\overline{\mathbf{M}}_o$$

$$\Sigma_o:\dot{\mathbf{x}}_o(t)=\mathbf{A}_o\mathbf{x}_o(t)+\mathbf{B}_o\mathbf{u}(t)$$
$$=\mathbf{T}_o^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_o\mathbf{x}(t)+\mathbf{T}_o^{-1}\mathbf{B}u$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}_o\mathbf{x}_o=\mathbf{C}\mathbf{T}_o\mathbf{x}(t)$$

Step 3. 根据指定的观测器期望极点 λ_i 求期望的特征方程

$$\Delta^*(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)=s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0$$

Step 4. 通过简单的数值运算得到能观标准型的增益阵 $\mathbf{L}_o$，再借助变换矩阵 $\mathbf{T}_o$得到原系统的观测器增益阵 $\mathbf{L}$。

$$\boxed{l_{oi}=\beta_{i-1}-a_{i-1},\ i=1,2,\cdots n}$$

Step 5. 写出原系统的状态观测器。

$$\mathbf{L}=\mathbf{T}_o\mathbf{L}_o$$

2. 全维状态观测器设计

Example 8-7-2 设有系统 (化工P313, 7-18)

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{cx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法一：直接法设计

解：step 1: 能观性判别，系统能观。故可以设计状态观测器

step 2: 期望观测器特征方程 $\Delta^*(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$

step 3: 构造全维观测器，写出闭环观测器特征方程

$$\Delta_o(s) = \left|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\right| = \left|\begin{bmatrix} s-(1-l_1) & l_1 & 0 \\ l_2 & s-(2-l_2) & -1 \\ l_3 & l_3 & s-2 \end{bmatrix}\right|$$
$$= s^3 + s^2(-5 + l_1 + l_2) + s(8 - 4l_1 - 3l_2 + l_3) + 4l_1 + 2l_2 - l_3 - 4$$

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

Example 8-7-2 设有系统

(化工P313, 7-18)

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{c}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法一：直接法设计

解： step 4. 比较 2个特征方程 s 的同次幂系数，求解出L

$$\Delta^*(s)=(s+3)(s+4)(s+5)=s^3+12s^2+47s+60=\Delta_o(s)$$

$$\Delta_o(s)=s^3+s^2(-5+l_1+l_2)+s(8-4l_1-3l_2+l_3)+4l_1+2l_2-l_3-4$$

$$\begin{aligned}-5+l_1+l_2&=12\\8-4l_1-3l_2+l_3&=47\\4l_1+2l_2-l_3-4&=60\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}l_1&=120\\l_2&=-103\\l_3&=210\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad L=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}120\\-103\\210\end{bmatrix}$$

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

$$L=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix}$$

Example 8-7-2 **设有系统**

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{cx}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

(化工P313, 7-18)

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法一：直接法设计

解： step 5.**写出全维观测器方程** $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)=(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{Ly}(t)$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)=(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{Ly}(t)$$
$$=\begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}+\begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix}y+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

2. 全维状态观测器设计

Example 8-7-2 设有系统

(化工P313, 7-18)

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法二：化为标准型方法设计

解：step 1: 能观性判别，系统能观。故可以设计状态观测器

且能观矩阵

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

开环特征方程

$$\Delta(s) = |sI - A| = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & s-2 \end{vmatrix} = s^3 - 5s^2 + 8s - 4$$

$$\Delta(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

系统状态观测器

状态观测器设计

$$\Delta(s) = s^3 - 5s^2 + 8s - 4 = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

Example 8-7-2 设有系统 **(化工P313, 7-18)**

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{cx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法二：化为标准型方法设计

解： step 2: 构造一个变换矩阵T_o；将系统 Σ 变成能观标准型 Σ_o

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \iddots & \iddots & 1 & \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-2} \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{T}_o^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_o = \mathbf{c}\mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_o = \mathbf{T}_o^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SISO 系统状态观测器

2. 全维状态观测器设计

$$\mathbf{A}_o=\mathbf{T}_o^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_o=\begin{bmatrix}0&0&4\\1&0&-8\\0&1&5\end{bmatrix}$$

Example 8-7-2 设有系统

(化工P313, 7-18)

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{c}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法二：化为标准型方法设计

解：step 3: 根据指定的观测器期望极点 λ_i 求期望的特征方程(与前同)

$$\Delta^*(s)=(s+3)(s+4)(s+5)=s^3+12s^2+47s+60=s^3+\beta_2s^2+\beta_1s+\beta_0$$

$$\mathbf{A}_o-\mathbf{L}_o\mathbf{c}_o=\begin{bmatrix}0&0&-60\\1&0&-47\\0&1&-12\end{bmatrix}$$

step 4: 通过简单的数值运算得到能观标准型的增益阵 $\mathrm{L_o}$，再借助变换矩阵 $\mathrm{T_0}$得到原系统的观测器增益阵 L。

$$\Delta(s)=s^3-5s^2+8s-4=s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

$$l_{oi}=\beta_{i-1}-a_{i-1},\ i=1,2,\cdots n$$

$$l_{o1}=60-(-4)=64$$
$$l_{o2}=47-8=39$$
$$l_{o3}=12-(-5)=17$$

$$\mathbf{L}_o=\begin{bmatrix}64\\39\\17\end{bmatrix}$$

2. 全维状态观测器设计

Example 8-7-2 设有系统

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{cx}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

(化工P313, 7-18)

试设计全维状态观测器，希望观测器的极点为 -3, -4, -5。

方法二：化为标准型方法设计

解：step 4: 通过简单的数值运算得到能观标准型的增益阵 L_0，再借助变换矩阵 T_0得到原系统的观测器增益阵 L。

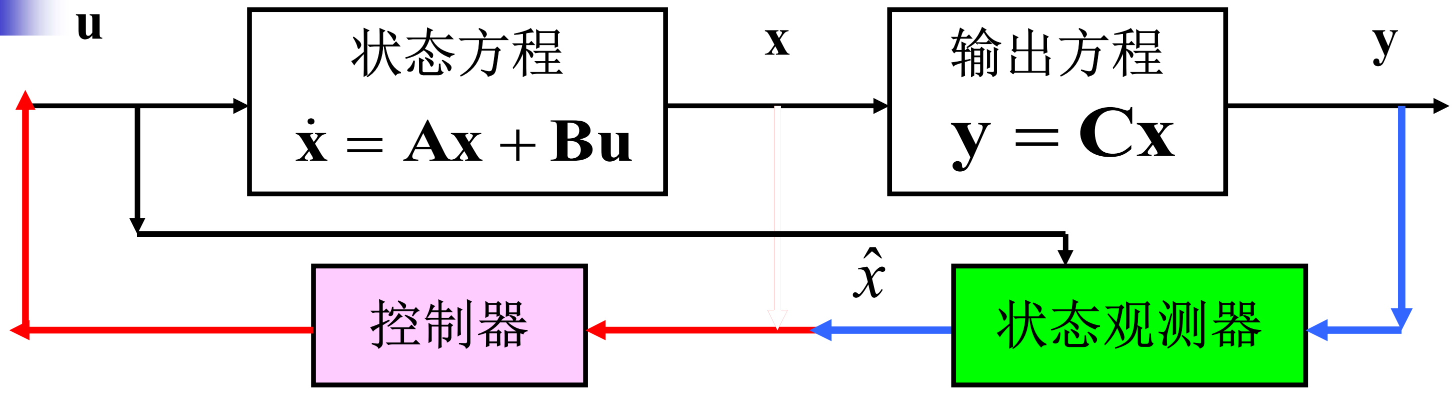
$$\therefore \mathbf{L}=\mathbf{T}_o\mathbf{L}_o=(\mathbf{T}_o^{-1})^{-1}\begin{bmatrix}64\\39\\17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}64\\39\\17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}120\\-103\\210\end{bmatrix}$$

step 5: 写出全维观测器方程

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)=(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{Ly}(t)$$

SISO 系统状态观测器

3. 分离原理



极点$\lambda(A+BK)$　　　　极点$\lambda(A-LC)$

构成$2n$阶的复合系统（带全维观测器的状态反馈系统）

稳定的$\lambda(A+BK)$和稳定的$\lambda(A-LC)$能保证复合系统稳定吗？

前面我们学的状态反馈设计方法和观测器设计方法还能用于复合系统设计吗？
是否需要针对复合系统，研究新的设计方法？

分离原理正是回答了这 些问题

SISO 系统状态观测器

3. 分离原理

分离原理：设(A,B,C)为n阶，经构造状态反馈阵K和状态观测阵L，形成的带全维观测器的状态反馈系统共有$2n$个极点，其中：n个极点是$\lambda(A+BK)$，另n个极点是$\lambda(A-LC)$

证明：　$\dot{x}=Ax+Bu$　　$y=Cx$　　$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly$　　$u=r+K\hat{x}$

选择$\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$为复合系统的状态

$$\dot{x}=Ax+Bu=Ax+B(r+K\hat{x})=Ax+BK\hat{x}+Br$$

$$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly=(A-LC)\hat{x}+B(r+K\hat{x})+LCx=LCx+(A-LC+BK)\hat{x}+Br$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A-LC+BK \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}r \qquad y=\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

取变换阵

$$T=\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \qquad T^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

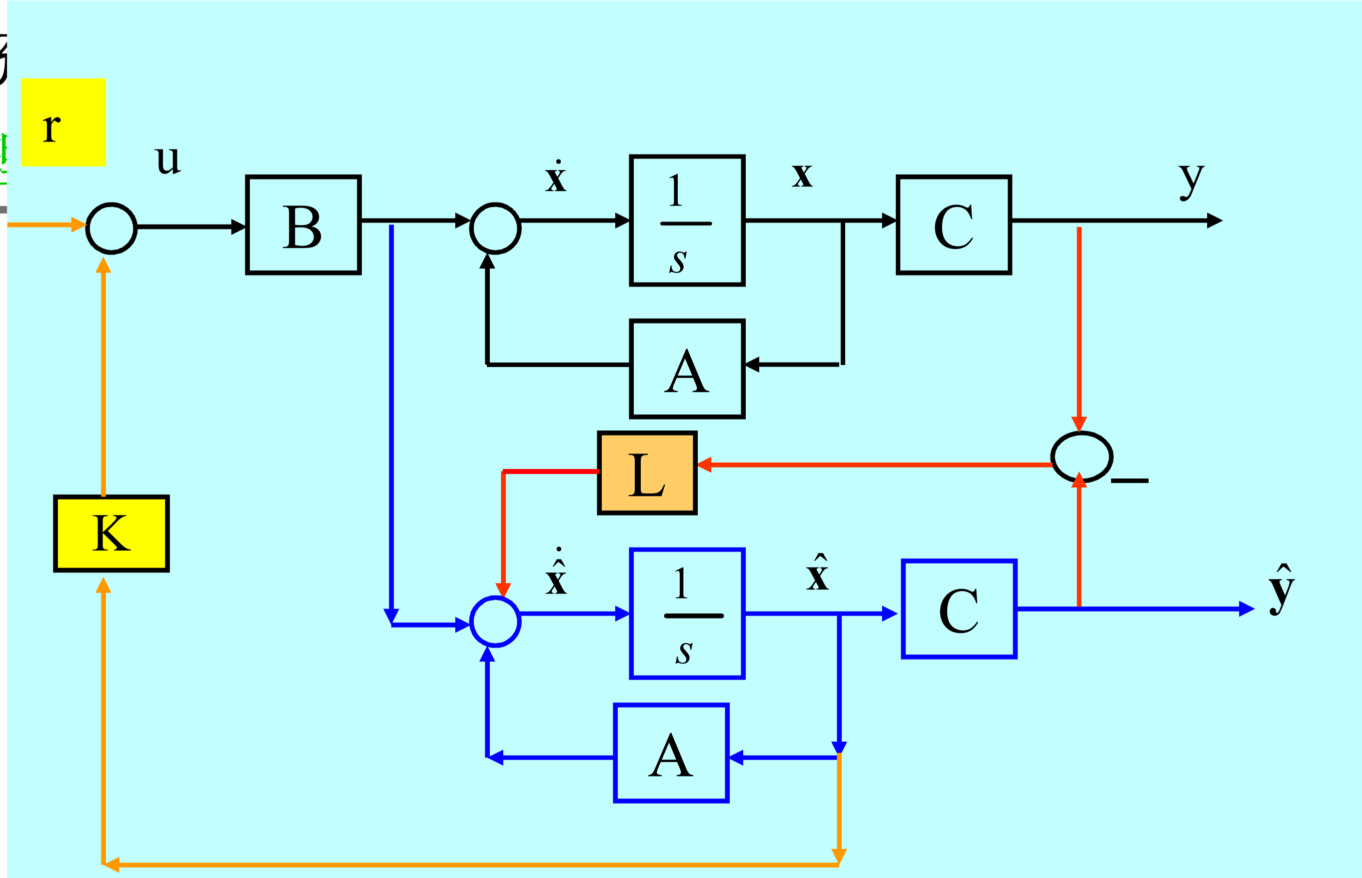
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A-LC+BK \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & BK \\ A-LC & -A+LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}$$

相似变换不改变矩阵的特征值

SISO 系统

3. 分离原理



稳定的$\lambda(A+BK)$和稳定的$\lambda(A-LC)$能保证复合系统稳定吗？ **能！**

前面我们学的状态反馈设计方法和观测器设计方法还能用于复合系统设计吗？

对于能控能观的(A,B,C)，用观测器设计方法设计L

用状态反馈设计方法设计K

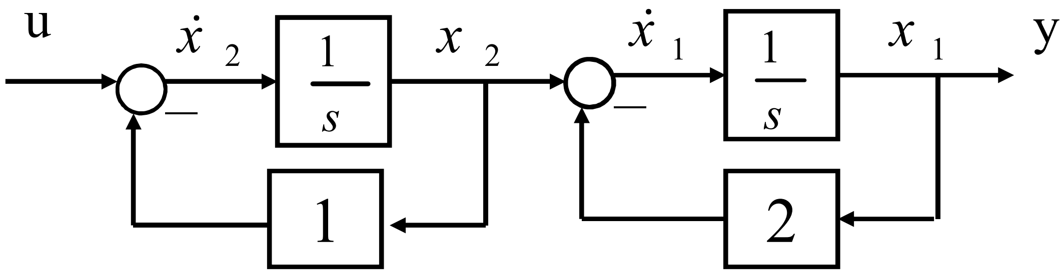
是否需要针对复合系统，研究新的设计方法？ **不需要！**

SISO 系统状态观测器

3. 分离原理

Example 8-7-3： 某系统的传递函数如下，其状态不可测。试设计观测器（极点均为－3）进行状态重构以实现状态反馈，使系统的闭环极点为－1±j 。并画出状态结构图。

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



解：step 1: 因系统传递函数无相消的因子，故一定能控能观。

如图，系统的状态方程实现：

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{cx}=[1\quad 0]\mathbf{x}$$

step 2: 先设计状态观测器(状态观测器与状态反馈可以分别设计）：

(1)期望观测器特征方程：$\Delta_o^*(s)=(s+3)^2=s^2+6s+9$

SISO 系统状态观测器

3. 分离原理

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{cx}=[1\quad 0]\mathbf{x}$$

Example 8-7-3： 某系统的传递函数已知，其状态不可测。试设计观测器（极点均为 - 3）以实现状态反馈，使系统的闭环极点为 - 1±j 。并画出结构图。

解：step 2: (2) 状态观测器特征方程

$$\Delta_o(s)=\left|s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\right|=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}[1\quad 0]\right)\right|$$

$$=s^2+(3+l_1)s+(2+l_1+l_2) \Longleftrightarrow \Delta^*(s)=(s+3)^2=s^2+6s+9$$

(3) 求解观测器增益矩阵

$$\Delta^*{}_o(s)=\Delta_o(s)\Rightarrow \mathbf{L}=\begin{cases}l_1=3\\ l_2=4\end{cases}$$

step 3：求状态反馈矩阵

(1)期望的闭环特征方程： $\Delta^*(s)=(s+1+j)(s+1-j)=s^2+2s+2$

(2) 状态反馈后的闭环特征方程： $\Delta_{cl}(s)=\left|sI-(A+bK)\right|=s^2+(3-k_2)s+(2-2k_2-k_1)$

SISO 系统状态观测器

3. 分离原理

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{cx}=[1\quad 0]\mathbf{x}$$

Example 8-7-3： **某系统的传递函数已知，其状态不可测。试设计观测器（极点均为－3）以实现状态反馈，使系统的闭环极点为－1±j 。并画出结构图。**

解：step 3: (3) 求解状态反馈矩阵K

$$\Delta^*(s)=(s+1+j)(s+1-j)=s^2+2s+2$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta_{cl}(s)=|sI-(A+bK)|=s^2+(3-k_2)s+(2-2k_2-k_1)$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{K}=\begin{cases}k_1=-2\\ k_2=1\end{cases}$$

step 4: 写出状态反馈控制系统与状态观测器

该例应用了分离原理分别设计了状态反馈矩阵K与状态观测器L阵。

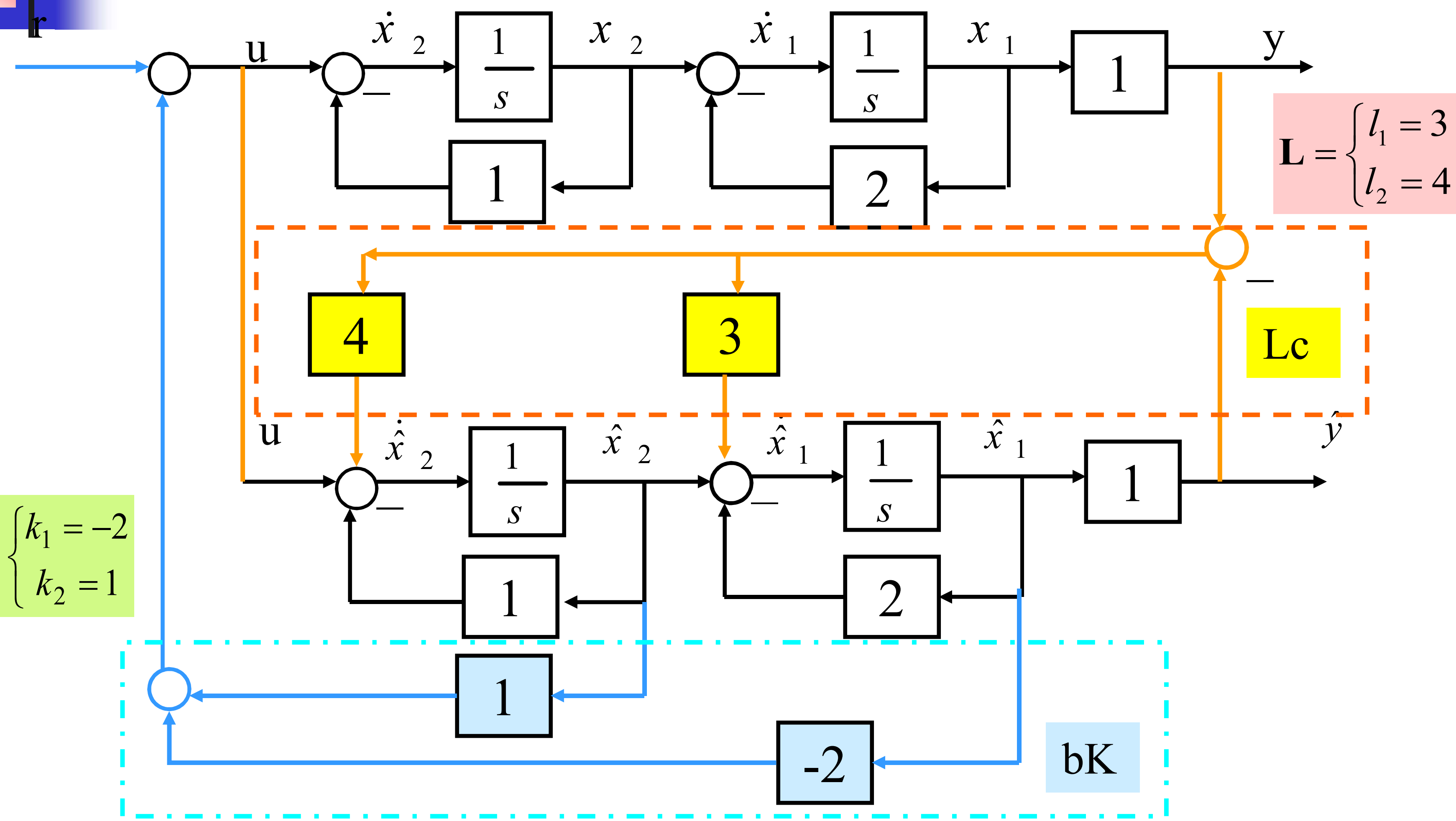
状态反馈矩阵K与状态观测阵L的实现见结构图。

SISO 系统状态观测器

3. 分离原理

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{cx}=[1\quad 0]\mathbf{x}$$



问题：能否利用可以测量到的状态而不是估计出全部状态?

SISO 系统状态观测器

4. 降维观测器

基本概念

- **设计状态观测器的目的**

由可以得到的输入输出估计出状态，用以分析与设计控制系统

考虑线性系统 Σ:
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

系统中的状态多少总会有一些是可测的，或可用y的线性组合直接计算得到，

问题：可否充分利用这些信息?

（1）全维状态观测器：未利用，需要估计出所有的状态（n维）

（2）降维观测器：若rank[C]=m, 则 y 与 m个 x 是线性相关的，可利用这m个状态信息，设计观测器就只需要估计 n-m 个状态

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{n-m} \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{--估计值，由观测器得到} \\ \text{--y的线性组合} \end{matrix}$$

4. 降维观测器

基本概念

如果: $\mathrm{rank}[\mathbf{C}]=n\Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}$ **不需要设计观测器**

一般: $\mathrm{rank}[\mathbf{C}]=m<n$

若 $\mathbf{y}=[0\quad \mathrm{I}]\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{array}{l}n-m\\ m\end{array}$ **由观测器估计**

如果 $\mathbf{C}\neq[0\quad \mathrm{I}]$ 形式

则需要构造变换矩阵T，使得 $\mathbf{CT}=[0\quad \mathrm{I}]$

设 $\mathrm{rank}[\mathrm{C}]=m<n$,为行满秩

$$\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}=T^{-1}T=\begin{bmatrix}R\\C\end{bmatrix}T=\begin{bmatrix}RT\\CT\end{bmatrix}$$

构造 $T^{-1}=\begin{bmatrix}R\\C\end{bmatrix}\begin{array}{l}n-m\\ m\end{array}$

$\mathrm{R}_{(n-m)\times n}$ 是使T^{-1} 满秩的任意 (n-m)×n 的实常量矩阵

$$CT=\begin{bmatrix}0&I\end{bmatrix}$$

SISO 系统状态观测器

4. 降维观测器

降维观测器设计思路

- **一般系统不满足 C=[0 I] 的条件，引入变换矩阵T，对原系统进行线性变换,**

令 $:x = Tz$

则 $:\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} z \end{cases}$

对系统进行分块：

$$\Sigma:\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + B_2u \\ y = z_2 \end{cases}$$

只需要估计（n-m)个状态

仅以z_1为状态，状态方程$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}y + B_1u$，以$y$和$u$为输入

其余的改造为输出方程$\dot{y} - A_{22}y - B_2u = A_{21}z_1$，以$\dot{y} - A_{22}y - B_2u$为输出

$n-m$阶系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + \begin{bmatrix} A_{12} & B_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \\ \dot{y} - A_{22}y - B_2u = A_{21}z_1 \end{cases}$$

(A_{11}, A_{21})能观时

仿全维观测器设计方法，构造$n-m$阶观测器

$$\dot{\hat{z}}_1 = (A_{11} - HA_{21})\hat{z}_1 + A_{12}y + B_1u + H(\dot{y} - A_{22}y - B_2u)$$

$H \in R^{(n-m)\times m}$

SISO 系统状态观测器

4. 降维观测器

$$\dot{\hat{z}}_1 = (A_{11} - HA_{21})\hat{z}_1 + A_{12}y + B_1u + H(\dot{y} - A_{22}y - B_2u)$$

需对y作纯微分，工程上一般不宜用

改造观测器，令：$\hat{w} = \hat{z}_1 - Hy$,即$\hat{z}_1 = \hat{w} + Hy$

则：$\dot{\hat{w}} = (A_{11} - HA_{21})(\hat{w} + Hy) + A_{12}y + B_1u + H(-A_{22}y - B_2u)$

$= (A_{11} - HA_{21})\hat{w} + (A_{12} - HA_{22} + A_{11}H - HA_{21}H)y + (B_1 - HB_2)u$

无需作纯微分，可实用

对原状态的估计

$$\hat{x} = T\hat{z} = T\begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} \hat{w} + Hy \\ y \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w} + T\begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix}y$$

故，降维观测器（$n-m$阶）

$$\begin{cases} \dot{\hat{w}} = (A_{11} - HA_{21})\hat{w} + (A_{12} - HA_{22} + A_{11}H - HA_{21}H)y + (B_1 - HB_2)u \\ \hat{x} = T\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w} + T\begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix}y \end{cases}$$

SISO 系统状态观测器

4. 降维观测器

定理：设$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, CT=\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$,其中$A\in R^{n\times n}, C\in R^{m\times n}, A_{11}\in R^{(n-m)\times(n-m)}$,

若(A,C)能观，则(A_{11},A_{21})能观

证明：状态的非奇异变换不改变能观性，由(A,C)能观知$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\right)$能观

由PBH秩判据II知，对任意复数s，有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} s-A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & s-A_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix}=n,\text{列满秩}$$

PBH秩判据II：(A,C)完全能观的充要条件：

对任意复数s,有$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix}=n$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} s-A_{11} \\ -A_{21} \end{bmatrix}=n-m,\text{列满秩}$$

$(A_{11},-A_{21})$能观

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{21}A_{11} \\ \vdots \\ A_{21}A_{11}^{n-m-1} \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} -A_{21} \\ -A_{21}A_{11} \\ \vdots \\ -A_{21}A_{11}^{n-m-1} \end{bmatrix}=n-m$$

(A_{11},A_{21})能观

4. 降维观测器

(n-m)维观测器设计例子

Example 8-7-5：**已知系统｛A, b, c｝** $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ c=\begin{bmatrix}-1&1&1\end{bmatrix}$

问最小维状态观测器是几维系统？试设计极点均在 - 4的降维观测器

解：step 1: **计算能观矩阵，知系统一定能观。**

$\text{又}: rank[c]=1$ **故，最小维状态观测器是n-m=3-1=2维。**

step 2: **构造T^{-1} 阵**

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}R\\C\end{bmatrix}\begin{matrix}2\\1\end{matrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore CT=\begin{bmatrix}-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\vdots&1\end{bmatrix}$$

4. 降维观测器

(n-m)维观测器设计例子

Example 8-7-5：已知系统 {A, b, c}

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix};\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ c=\begin{bmatrix}-1&1&1\end{bmatrix}$$

问最小维状态观测器是几维系统？试设计极点均在 - 4的降维观测器

解：step 3: 计算变换后的系统

$$\bar{\Sigma}:\{\bar{A},\bar{b}\}$$

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\4&-2&1\\\hline 3&-2&1\end{array}\right]\qquad \bar{b}=T^{-1}b=\left[\begin{array}{c}0\\0\\\hline 1\end{array}\right]$$

step 4: 求变换后的观测器矩阵 H

(1)期望极点的观测器特征方程： $\Delta^*_o(s)=(s+4)^2=s^2+8s+16$

(2) 状态观测器特征方程

$$\Delta_o(s)=\left|s\mathbf{I}-(A_{11}-HA_{21})\right|=\left|\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}1&2\\4&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\end{bmatrix}\right)\right|$$

$$=s^2+(1+3h_1-2h_2)s-10+8h_2-2h_1$$

$$H=\begin{bmatrix}5.4\\4.6\end{bmatrix}$$

SISO 系

4. 降维观

$$
\begin{cases}
\dot{\hat{w}} = (A_{11} - HA_{21})\hat{w} + (A_{12} - HA_{22} + A_{11}H - HA_{21}H)y + (B_1 - HB_2)u \\
\hat{x} = T\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\hat{w} + T\begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix} y
\end{cases}
$$

(n-m)维观测器设计例子

Example 8-7-5：已知系统｛A, b, c｝

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

问最小维状态观测器是几维系统？试设计极点均在 - 4的降维观测器

解：step 5: 计算各矩阵，写出观测器

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ \hline 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad \bar{b} = T^{-1}b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] \quad H = \begin{bmatrix} 5.4 \\ 4.6 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{cases}
\dot{\hat{w}} = \begin{bmatrix} -15.2 & 12.8 \\ -9.8 & 7.2 \end{bmatrix}\hat{w} + \begin{bmatrix} -28.6 \\ -23.4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -5.4 \\ -4.6 \end{bmatrix} u \\
\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\hat{w} + \begin{bmatrix} 5.4 \\ 4.6 \\ 1.8 \end{bmatrix} y
\end{cases}
$$

回顾

- SISO 系统状态观测器
  - 基本思想
  - 全维观测器
  - 分离原理
  - 降维观测器

主要内容

- ✓ 回顾与简介
- ✓ 可控性与可观性
- ✓ 线性变换与标准型
- ✓ **SISO** 系统状态反馈
- ✓ 状态反馈：稳态误差分析
- ✓ **SISO** 系统状态观测器

Thanks！