第五章　目标规划

- 目标规划问题及数学模型
- 目标规划的集中求解算法
- 目标规划的序贯求解算法

线性规划在应用中的问题（1）

1、线性规划的目标是一个刚性的目标.
但实际应用中，目标常常是模糊的。

解决方法：

将目标化作一种软目标/软约束。

线性规划在应用中的问题（2）

2、线性规划要求有解时各个约束条件相容，可行域非空。而实际情况并非总能满足。

思路：

正视现实，将原来要求寻找最优解的目标，改为寻找满意解。

解决方法：

1）将矛盾的普通约束改为目标约束，即将硬约束改为软约束。

2）将多个约束分为不同的优先级。

线性规划在应用中的问题（3）

3、线性规划是一个单目标规划的问题，但实际应用中，常常存在多个目标。

解决方法：

1）分清主次，设置优先级（绝对优先级和相对优先级）

2）将各个目标函数按优先级加权，构成一个新的单目标函数

目标规划的思想和方法

思想：
将定量技术和定性技术结合，

承认矛盾、冲突的合理性，

强调通过协调，达到总体和谐

方法：
软约束＋优先级

例1 软约束的设计

例1、

	甲	乙	有效工时
金工	**4**	**2**	**400**
装配	**2**	**4**	**500**
收益	**100**	**80**	

例1的线性规划模型

LP： $\max z=100x_1+80x_2$

s.t.
$$\begin{cases} 2x_1+4x_2 \le 500 \\ 4x_1+2x_2 \le 400 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$x^* =(50,100) \qquad z^* =13000$$

目标约束

GP：去年总收益***9000***，增长要求***11.1%***

即：今年希望总收益不低于***10000***

该目标实质上是一个约束，希望：

$$100x_1+80x_2 \geq 10000$$

决策值和目标值的关系

设$100x_1+80x_2$ 为决策值，10000为目标值

决策值与目标值之间存在着多种可能：

1）决策值小于目标值 $100x_1+80x_2<10000$

2）决策值等于目标值 $100x_1+80x_2=10000$

3）决策值大于目标值 $100x_1+80x_2>10000$

软约束

$$100x_1+80x_2+d^- - d^+ = 10000$$

引入偏差变量：

d^+：决策值超过目标值部分(正偏差变量)

d^-：决策值不足目标值部分(负偏差变量)

满足　$d^+ \geq 0$，$d^- \geq 0$，$d^+ \cdot d^- = 0$

例1的目标规划模型

$$\min z = d^-$$

s.t.

$$\begin{cases} 100x_1+80x_2 - d^+ + d^- = 10000 \\ 4x_1+2x_2 \le 400 \\ 2x_1+4x_2 \le 500 \\ x_1, x_2, d^-, d^+ \ge 0 \end{cases}$$

$$d^+ . d^- = 0$$

典型目标函数

(1)、恰好达到目标：

$$\min Z = d^- + d^+$$

(2)、超过目标：

$$\min Z = d^-$$

(3)、不超过目标：

$$\min Z = d^+$$

例2 多目标、多约束情况

例2

	Ⅰ	Ⅱ	资源拥有量
原材料(公斤)	2	1	11
设备(小时)	1	2	10
利润(千元/件)	8	10	

规划目标

(1)、原材料价格上涨，超计划要高价购买，所以要严格控制。

(2)、市场情况，产品Ⅰ销售量下降，希望产品Ⅰ的产量不大于产品Ⅱ的产量。

(3)、充分利用设备，不希望加班。

(4)、尽可能达到并超过利润计划指标**56**千元。

建模步骤

建模：

(1)、设定约束条件。**(**目标约束、绝对约束**)**

(2)、规定目标约束优先级。

(3)、建立模型

例2—设定约束条件

设x_1，x_2为产品Ⅰ，产品Ⅱ产量。

$$
\begin{cases}
2x_1+x_2 \le 11 & \text{严格控制原材料} \\
x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & x_1\text{产量不大于}x_2 \\
x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & \text{充分利用设备，不加班} \\
8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & \text{利润要求} \\
x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, \quad i=1,2,3 & \\
d_i^- \cdot d_i^+ = 0 &
\end{cases}
$$

例2的目标函数

多个目标函数：

$\mathbf{min}Z_1 = d_1^+$ 　　　x_1产量不大于x_2

$\mathbf{min}Z_2 = d_2^- + d_2^+$ 　　　充分利用设备

$\mathbf{min}Z_3 = d_3^-$ 　　　利润要求

优先因子

则原目标函数为：

$$\min\{P_1 d_1^+,\ P_2(d_2^- + d_2^+),\ P_3(d_3^-)\}$$

$$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 (d_3^-)$$

为了说明目标的优先性，定义了优先因子P_l：

$P_l >> P_{l+1} > 0$

即目标l 比目标 l+1具有绝对的优先权

例3 同等优先级的情况

例3、电视机厂装配25寸和21寸两种彩电，每台电视机需装备时间1小时，每周装配线计划开动40小时，预计每周25寸彩电销售24台，每台可获利80元，每周21寸彩电销售30台，每台可获利40元。

该厂目标：

1、避免开工不足。

2、允许装配线加班，但尽量不超过10小时。

3、尽量满足市场需求，尤其是25寸彩电。

例3的目标规划模型

解：设x_1 , x_2 分别表示25寸，21寸彩电产量

$$\min Z=P_1d_1^-+P_2d_2^++P_3(\mathrm{W}_{33}^-\, d_3^-+\mathrm{W}_{34}^-\, d_4^-)$$

$\mathrm{W}_{33}^- > \mathrm{W}_{34}^-$

s.t.

$$\begin{cases} x_1+x_2+d_1^- -d_1^+=40 & \text{上班时间} \\ x_1+x_2+d_2^- -d_2^+=50 & \text{加班情况} \\ x_1+d_3^- -d_3^+=24 & \\ x2+d_4^- -d_4^+=30 & \text{市场需求} \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+\geq 0 \quad d_i^- . d_i^+= 0\ (i=1,2,3,4) & \end{cases}$$

权系数

为了对优先级同为P_l的目标实现重要性的微调，可以对第k个目标的分量d_k^-加权W_{lk}^-，d_k^+加权W_{lk}^+。

可以看到，W_{lk}越大，第k个目标的重要性越大。

目标规划(Goal Programming)一般模型

$$\min\left\{P_l\left(\sum_{k=1}^{K}W_{lk}^{-}d_k^{-}+W_{lk}^{+}d_k^{+}\right),l=1,2,\ldots,L\right\}$$

Objective function

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le (=,\ge) b_i \qquad i=1,2,\ldots,m$$

Target value

$$\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k \qquad k=1,2,\ldots,K$$

Goal constraints

$$x_j, d_k^{-}, d_k^{+} \ge 0 \qquad d_k^{-}\cdot d_k^{+} = 0$$

$$j=1,2,\ldots,n \qquad k=1,2,\ldots,K$$

目标规划的目的和特点

目标规划的目的：求一组决策变量的满意值，使决策结果与给定目标总偏差最小。

特点：

① 目标函数中只有偏差变量。

② 目标函数总是求偏差变量最小。

③ $Z=0$：各级目标均已达到

$Z>0$：部分目标未达到。

第五章 目标规划

- 目标规划问题及数学模型
- 目标规划的集中求解算法
- 目标规划的序贯求解算法

目标规划单纯形解法

$$\min z = \sum_{l=1}^{L} P_l \left(\sum_{k=1}^{K} W_{lk}^{-} d_k^{-} + W_{lk}^{+} d_k^{+} \right)$$

s.t. $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge) b_i \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k \qquad k = 1, \cdots, K$$

$$x_j, d_k^{-}, d_k^{+} \ge 0 \qquad d_k^{-} \cdot d_k^{+} = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, n \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

集中单纯形法的特点

(1)只有**1**个目标

(2)含优先因子 $\boldsymbol{P_l >> P_{l+1}}$，有：

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = \sum_{l=1}^{L} a_{lj} P_l$$

因此，σ_j的符号看$\boldsymbol{a_{lj} \neq 0}$中***l***最小一项的符号

例2的目标规划模型

$$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3(d_3^-)$$

s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, d_i^- \cdot d_i^+ = 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

初始单纯形表

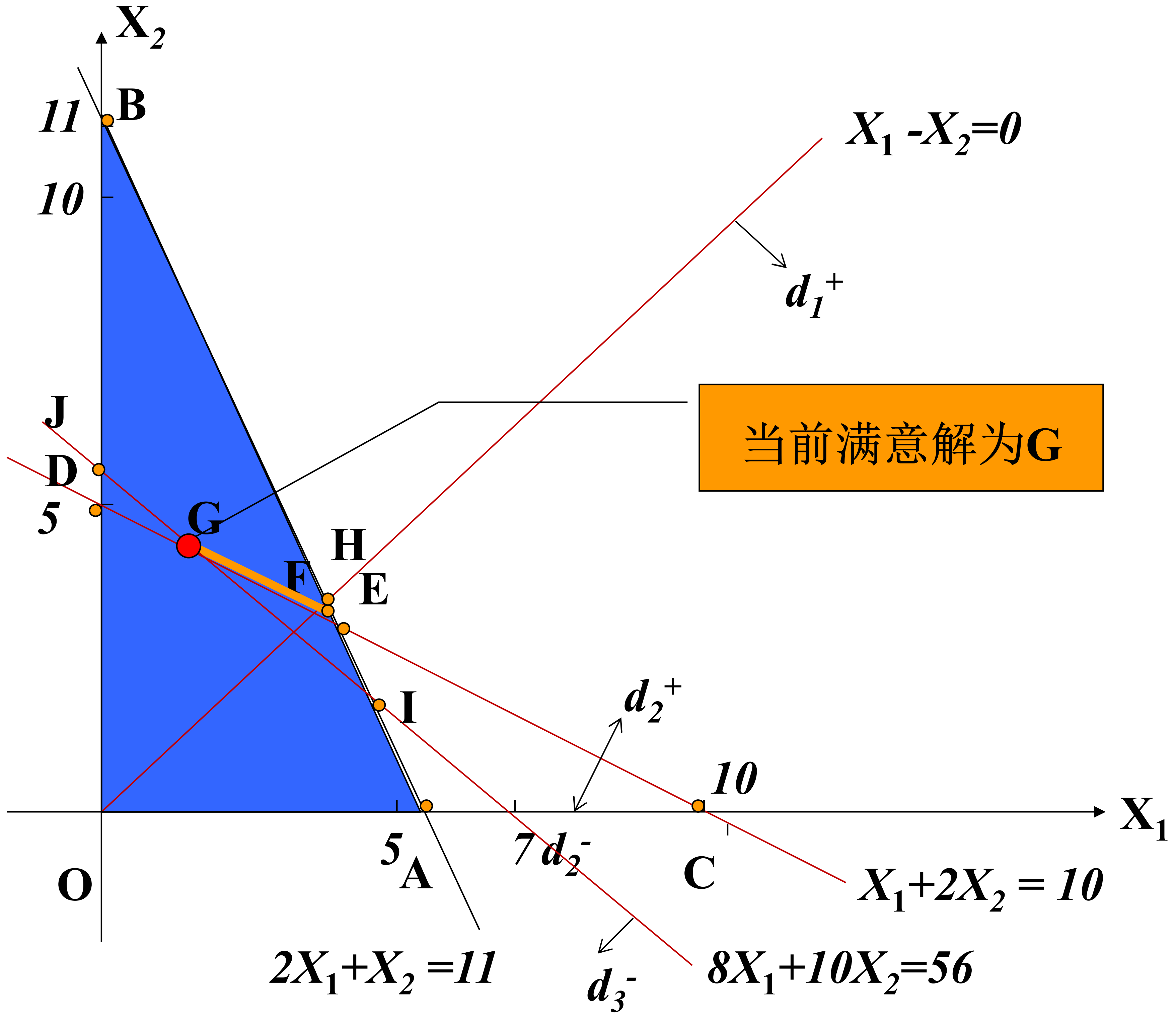
c_j			0	0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_3	11	2	1	1	0	0	0	0	0	0
0	d_1^-	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	0
P_2	d_2^-	10	1	2	0	0	0	1	-1	0	0
P_3	d_3^-	56	8	10	0	0	0	0	0	1	-1
σ_j		P_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
		P_2	-1	-2	0	0	0	0	2	0	0
		P_3	-8	-10	0	0	0	0	0	0	1

迭代后的单纯形表

	c_j		0	0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_3	6	3/2	0	1	0	0	-1/2	1/2	0	0
0	d_1^-	5	3/2	0	0	1	-1	1/2	-1/2	0	0
0	x_2	5	1/2	1	0	0	0	1/2	-1/2	0	0
P_3	d_3^-	6	3	0	0	0	0	-5	5	1	-1
σ_j		P_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	0	1	1	0	0
		P_3	-3	0	0	0	0	5	-5	0	1

最终单纯形法表

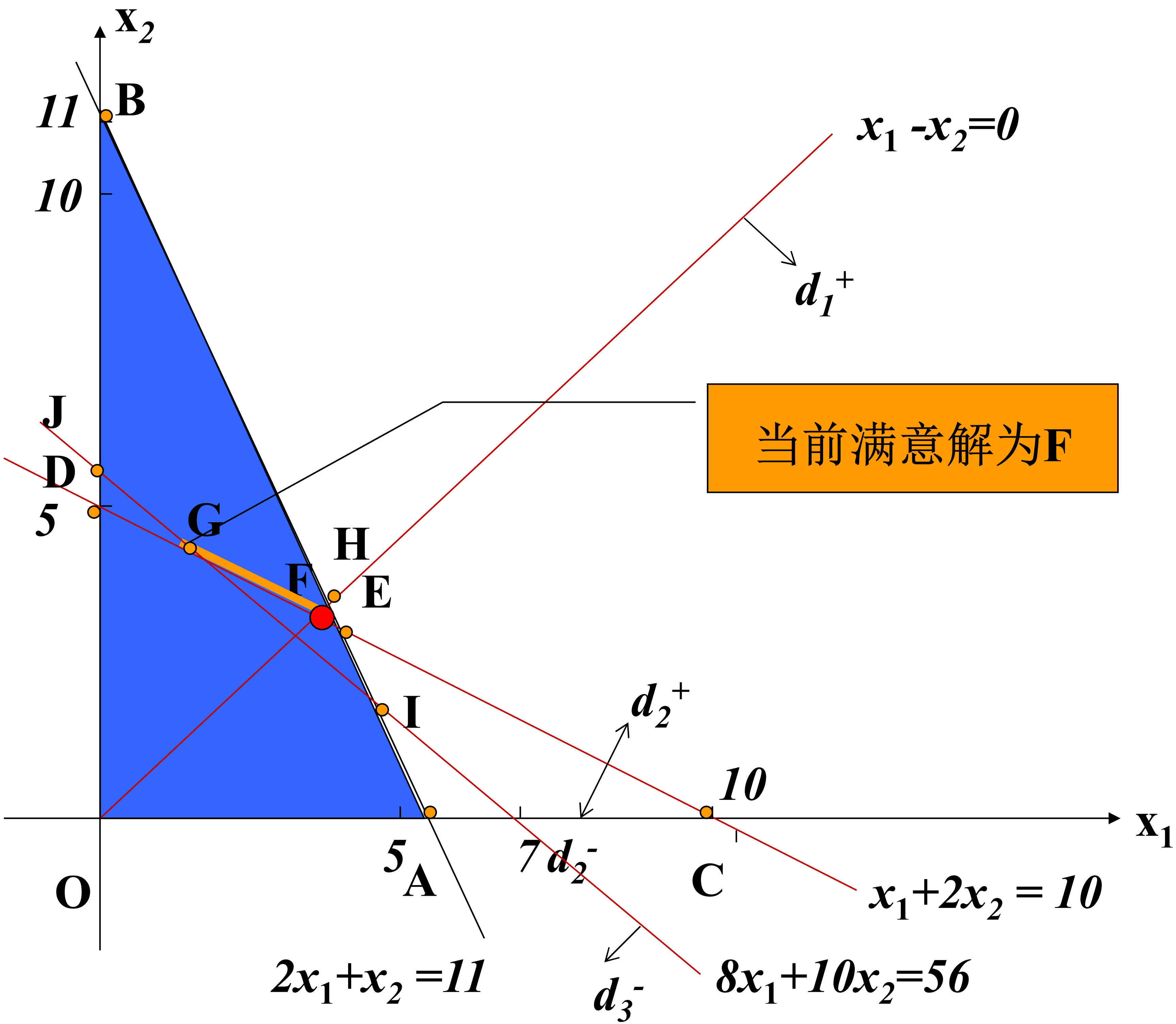
c_j			0	0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_3	3	0	0	1	0	0	2	-2	-1/2	1/2
0	d_1^-	2	0	0	0	1	-1	3	-3	-1/2	1/2
0	x_2	4	0	1	0	0	0	4/3	-4/3	-1/6	1/6
0	x_1	2	1	0	0	0	0	-5/3	5/3	1/3	-1/3
σ_j		P_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	0	1	1	0	0
		P_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0



X2
X1
11
B
10
5
J
D
G
H
F
E
I
10
O
5
A
7
C
X1 -X2=0
d1+
d2+
d2-
d3-
当前满意解为G
X1+2X2 = 10
2X1+X2 =11
8X1+10X2=56

其他满意解

c_jC			0	0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_3	1	0	0	1	-1	1	-1	1	0	0
0	d_3^+	4	0	0	0	2	-2	6	-6	-1	1
0	x_2	10/3	0	1	0	-1/3	1/3	1/3	-1/3	0	0
0	x_1	10/3	1	0	0	2/3	-2/3	1/3	-1/3	0	0
σ_j		P_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
		P_2	0	0	0	0	0	1	1	0	0
		P_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0



x_2
11
B
10
J
D
5
G
H
F
E
I
O
5
A
7
10
C
x_1
$x_1 - x_2 = 0$
d_1^+
当前满意解为F
d_2^+
d_2^-
d_3^-
$x_1 + 2x_2 = 10$
$2x_1 + x_2 = 11$
$8x_1 + 10x_2 = 56$

第五章 目标规划

- 目标规划问题及数学模型
- 目标规划的集中求解算法
- 目标规划的序贯求解算法

目标规划的序贯解法

$$\min\left\{P_l\left(\sum_{k=1}^{K} W_{lk}^{-} d_k^{-} + W_{lk}^{+} d_k^{+}\right)\right\}$$

s.t. $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=,\ge) b_i \qquad (i = 1,\cdots,m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k \qquad (k = 1,\cdots,K)$$

$$x_j, d_k^{-}, d_k^{+} \ge 0 \qquad d_k^{-} \cdot d_k^{+} = 0$$

目标规划的序贯式算法

基本思路：按优先级的顺序，从最高级开始，逐个满足目标。

具体方法：将已计算目标函数值，作为下一级目标的硬约束。

序贯式算法举例

$$\min Z = P_1(d_1^- + d_2^+) + P_2 d_3^- + P_3 d_4^+$$

s.t.

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 30 \quad ①$$

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15 \quad ②$$

$$8x_1 + 12x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000 \quad ③$$

$$x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 40 \quad ④$$

$$x_j,\ d_i^-, d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \cdot d_i^+ = 0,\ i=1,2,3,4,\ j=1,2$$

序贯式算法(1)

$$\min Z_1 = d_1^- + d_2^+$$

s.t. $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 30$ ①

$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15$ ②

$x_j,\ d_i^-, d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \cdot d_i^+ = 0,\ i=1,2,\ j=1,2$

解得：$x_1=30$，$x_2=15$，

$d_1^+=0$，$d_1^-=0$，$d_2^+=0$，$d_2^-=0$

序贯式算法(2)

$$\min Z_2 = d_3^-$$

s.t. $x_1+d_1^- - d_1^+ = 30$ ①

$x_2+d_2^- - d_2^+ = 15$ ②

$8x_1 + 12x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000$ ③

$d_1^- + d_2^+ = 0$ ④

$x_j,\ d_i^-, d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \cdot d_i^+ = 0,\ i=1,2,3\ \ j=1,2$

解得：$x_1=30$, $x_2=15$， $d_1^+=0$， $d_1^-=0$，

$d_2^+=0$， $d_2^-=0$， $d_3^+=0$， $d_3^-=580$，

$$\min Z_3 = d_4^+$$

s.t.

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 30 \quad ①$$

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15 \quad ②$$

$$8x_1 + 12x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000 \quad ③$$

$$x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 40 \quad ④$$

$$d_1^- + d_2^+ = 0 \quad ⑤$$

$$d_3^- = 580 \quad ⑥$$

$$x_j,\ d_i^-,d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \cdot d_i^+ = 0,\ i=1,2,3,4\ \ j=1,2$$

解得：$x_1=30$，$x_2=15$，$d_1^+=0$，$d_1^-=0$，$d_2^+=0$，$d_2^-=0$，$d_3^+=0$，$d_3^-=580$，$d_4^+=20$，$d_4^-=0$

序贯式算法的特点

(1) 可以直接使用普通的单纯形算法解决问题。

(2) 工作量大