随机过程期末复习

目录

第一章：随机过程基本概念

1.1 基本定义与数字特征

知识点

1. 定义

- **随机过程:** 一个随机变量的集合 $\{X(t); t \in T\}$，其中 T 是参数集。对于每一个固定的 $t \in T$，$X(t)$ 是一个随机变量。
- **样本函数/轨道:** 对于样本空间中的一个固定结果 ω，$X(t, \omega)$ 是一个关于时间 t 的普通函数。
- **状态空间:** 随机过程所有可能取值的集合。

2. 数字特征

- **均值函数:** $\mu_X(t) = E[X(t)]$
- **方差函数:** $\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2$
- **自相关函数:** $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$
- **自协方差函数:** $C_X(t_1, t_2) = \text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$
- **互相关函数:** $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$
- **互协方差函数:** $C_{XY}(t_1, t_2) = \text{Cov}(X(t_1), Y(t_2)) = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$

应试技巧

这部分题型通常是送分题，主要考察对定义的理解和基本期望、方差、协方差的计算。

1. **分清概念：** 随机过程 $X(t)$ 是一个函数族，而样本函数是其中的一个具体实现。
2. **计算期望：** 计算均值、相关函数时，本质是求期望。如果过程由多个独立的随机变量（如 A, B）定义，记得使用期望的性质，如 $E[g(A)h(B)] = E[g(A)]E[h(B)]$。
3. **善用公式：** 牢记 $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$，它连接了相关和协方差。

历年真题

(2016-2017 秋学期补考 第二题 & 19-20 回忆卷)

设 $X(t) = At + B, t \geq 0$，这里 A 和 B 相互独立服从相同分布，

$P(A = 1) = 0.6, P(A = -1) = 0.4$。

(1) 写出 $X(t)$ 的全部样本函数；

(2) 求 $(X(1), X(2))$ 的联合分布律及 $X(2)$ 的边际分布律；

(3) 求 $\{X(t); t \geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数。

答案与解析

(1) 样本函数

A 和 B 的可能取值为 1 或 -1。共有 $2 \times 2 = 4$ 种组合，对应4条样本函数：

- A=1, B=1: $x_1(t) = t + 1$
- A=1, B=-1: $x_2(t) = t - 1$
- A=-1, B=1: $x_3(t) = -t + 1$

- A=-1, B=-1: $x_4(t) = -t - 1$

(2) 联合分布律与边际分布律

首先计算 A, B 的概率：$P(B=1)=0.6, P(B=-1)=0.4$。

$X(1) = A + B, X(2) = 2A + B$。

可能的取值及概率：

- A=1, B=1: $X(1) = 2, X(2) = 3$. 概率 $0.6 \times 0.6 = 0.36$
- A=1, B=-1: $X(1) = 0, X(2) = 1$. 概率 $0.6 \times 0.4 = 0.24$
- A=-1, B=1: $X(1) = 0, X(2) = -1$. 概率 $0.4 \times 0.6 = 0.24$
- A=-1, B=-1: $X(1) = -2, X(2) = -3$. 概率 $0.4 \times 0.4 = 0.16$

联合分布律 $P(X(1) = i, X(2) = j)$:

X(1) \ X(2)	**-3**	**-1**	**1**	**3**	$P(X(1) = i)$
-2	0.16	0	0	0	0.16
0	0	0.24	0.24	0	0.48
2	0	0	0	0.36	0.36
$P(X(2) = j)$	0.16	0.24	0.24	0.36	**1**

X(2)的边际分布律:

$P(X(2) = -3) = 0.16, P(X(2) = -1) = 0.24, P(X(2) = 1) = 0.24, P(X(2) = 3) = 0.36.$

(3) 均值函数与自相关函数

首先计算 A, B 的期望和二阶矩：

$E[A] = E[B] = 1 \times 0.6 + (-1) \times 0.4 = 0.2$

$E[A^2] = E[B^2] = 1^2 \times 0.6 + (-1)^2 \times 0.4 = 1$

均值函数:

$\mu_X(t) = E[At + B] = E[A]t + E[B] = 0.2t + 0.2$

自相关函数:

$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(At_1 + B)(At_2 + B)]$

$= E[A^2 t_1 t_2 + AB(t_1 + t_2) + B^2]$

由于 A, B 独立, $E[AB] = E[A]E[B] = 0.2 \times 0.2 = 0.04$。

$R_X(t_1, t_2) = E[A^2]t_1 t_2 + E[AB](t_1 + t_2) + E[B^2]$

$= 1 \cdot t_1 t_2 + 0.04(t_1 + t_2) + 1 = t_1 t_2 + 0.04(t_1 + t_2) + 1$

第二章：马尔可夫链 (Markov Chains)

2.1 基本定义与转移概率

ⓘ **知识点**

1. Markov 性 (无记忆性)

过程在未来的演变，只与当前所处的状态有关，而与过去的状态无关。

$P(X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$

2. 转移概率

- **一步转移概率:** 从状态 i 经过一步转移到状态 j 的概率，记为 $P_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$。
- **一步转移矩阵:** $P=[P_{ij}]$。矩阵的各元素非负，且各行之和为1。
- **n步转移概率:** 从状态 i 经过 n 步转移到状态 j 的概率，记为 $P_{ij}^{(n)}=P(X_{n+m}=j|X_m=i)$。

3. Chapman-Kolmogorov (C-K) 方程

$P_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k\in I}P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)}$

矩阵形式：$P^{(n+m)}=P^{(n)}P^{(m)}$。特别地，$P^{(n)}=P^n$。

应试技巧

- **构建转移矩阵** 是解决马尔可夫链问题的首要步骤。仔细阅读题目描述，确定状态空间和状态之间的一步转移概率。
- **计算 n 步转移概率** 通常就是计算转移矩阵 P 的 n 次幂 P^n。对于步数较小（如2步、3步）的题目，直接进行矩阵乘法即可。

☰ **历年真题**

ⓘ **(17.md 第一题)**

有四个人（分别为1，2，3，4），互相传球，拿到球的人，以等概率将篮球传给其他三个人。

a）求一步转移概率矩阵；

b）求3步转移概率矩阵；

c）求经过3次传球，球回到原来这个人手里的概率。

✓ **答案与解析** >

a) 一步转移概率矩阵 P

状态空间 $I=\{1,2,3,4\}$。

从任意状态 i 传给其他三个状态 $j\neq i$ 的概率均为 $1/3$。对角线元素（传给自己）的概率为 0。

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0\end{pmatrix}$$

b) 3步转移概率矩阵 $P^{(3)}$

$$P^2=P\times P=\begin{pmatrix}0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0\end{pmatrix}$$

计算 $P_{11}^2=0+1/9+1/9+1/9=3/9=1/3$。

计算 $P_{12}^2=0+0+1/9+1/9=2/9$。

由于对称性，P^2 的对角线元素均为 $1/3$，非对角线元素均为 $2/9$。

$$P^2=\begin{pmatrix}1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9\\ 2/9 & 1/3 & 2/9 & 2/9\\ 2/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9\\ 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/3\end{pmatrix}$$

$P^3=P^2\times P$

计算 $P_{11}^3=(1/3\times 0)+(2/9\times 1/3)+(2/9\times 1/3)+(2/9\times 1/3)=6/27=2/9$。

计算 $P_{12}^3=(1/3\times 1/3)+(2/9\times 0)+(2/9\times 1/3)+(2/9\times 1/3)=1/9+4/27=7/27$。

由于对称性，P^3 的对角线元素均为 $2/9$，非对角线元素均为 $7/27$。

$$P^3=\begin{pmatrix}2/9 & 7/27 & 7/27 & 7/27\\ 7/27 & 2/9 & 7/27 & 7/27\\ 7/27 & 7/27 & 2/9 & 7/27\\ 7/27 & 7/27 & 7/27 & 2/9\end{pmatrix}$$

c) 3次传球后球回到原来的人手里的概率

这就是 $P^{(3)}$ 的对角线元素。无论球从谁开始，概率都是相同的。

$P_{ii}^{(3)}=2/9$。

2.2 状态分类与链的分解

ⓘ **知识点**

1. 可达与互达

- **可达 ($i \to j$):** 从 i 出发，经有限步能到达 j ($P_{ij}^{(n)} > 0$ for some $n \geq 1$)。
- **互达 ($i \leftrightarrow j$):** $i \to j$ 且 $j \to i$。互达是一种等价关系，它将状态空间划分为不相交的**互达等价类**。
- **不可约链:** 如果整个状态空间就是一个互达等价类。

2. 常返与暂留

- f_{ii} 是从状态 i 出发，在有限步内**首次**返回 i 的概率。
- **常返态 (Recurrent):** 若 $f_{ii} = 1$。
- **暂留态 (Transient):** 若 $f_{ii} < 1$。
- **判别法:** 状态 i 是常返的 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$。状态 i 是暂留的 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$ 。
- **正常返与零常返:** 对于常返态 i，其平均返回时间 $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$。若 $\mu_i < \infty$，则为**正常返**；若 $\mu_i = \infty$，则为**零常返**。

3. 周期

- 状态 i 的周期 $d(i)$ 是所有从 i 返回自身的步数 n ($P_{ii}^{(n)} > 0$) 的最大公约数。
- 若 $d(i) = 1$，称 i 是**非周期**的。

4. 重要性质

- 同一互达等价类中的状态性质相同：同为常返或暂留，且周期相同。
- **闭集:** 一个状态集合 C，如果从 C 内的任何状态出发，都无法转移到 C 外，则 C 是闭集。
- **有限状态链中:**

  常返态的等价类是闭集。

  闭集中的状态都是常返的，非闭集中的状态都是暂留的。

  至少存在一个正常返态。

应试技巧

1. **画出状态转移图：** 这是最关键的一步，能直观地看出状态间的关系。
2. **找等价类：** 从一个状态出发，沿着箭头找到所有能互相到达的状态，圈起来就是一个等价类。
3. **判断闭集与常返/暂留：**
   - 看一个等价类是否有箭头指向外部。有，则该类中所有状态都是**暂留**的。没有，则是闭集，该类中所有状态都是**常返**的（对于有限链）。
4. **判断周期：**
   - 找一个状态 i 的所有**回路**（从 i 出发回到 i）。
   - 计算这些回路的步数。
   - 这些步数的最大公约数就是周期。
   - **技巧：** 如果一个状态有自环（$P_{ii} > 0$），那么它的周期一定是1。如果一个图中包含两个长度互质的回路，那么图中所有状态周期都为1。

历年真题

(2016-2017 秋学期补考 第五题, 19-20 回忆卷类似)

设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是时齐的 Markov 链, 状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 一步转移概率为:

$P_{11} = P_{54} = P_{62} = 0.4, P_{12} = P_{56} = P_{65} = 0.6, P_{21} = P_{34} = P_{43} = 1$。

(1) 求出所有的互达等价类, 并指出哪些是闭的;

(2) 求出各状态的周期和常返性。

答案与解析

(1) 互达等价类与闭集

首先画出状态转移图:

- $1 \leftrightarrow 2$ (因为 $1 \to 1, 1 \to 2, 2 \to 1$)
- $3 \leftrightarrow 4$ (因为 $3 \to 4, 4 \to 3$)
- $5 \leftrightarrow 6$ (因为 $5 \to 6, 6 \to 5$)

状态转移关系：$1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4, 5 \leftrightarrow 6$。还有 $5 \to 4$ 和 $6 \to 2$。

- **互达等价类:**

  $$C_1 = \{1, 2\}$$

$C_2 = \{3, 4\}$

$C_3 = \{5, 6\}$

- **闭集判断:**

C_1: 从 $1, 2$ 出发的箭头都指向 1 或 2，没有指向外部的。所以 C_1 是**闭集**。

C_2: 从 $3, 4$ 出发的箭头都指向 3 或 4，没有指向外部的。所以 C_2 是**闭集**。

C_3: 从 5 可到 4 (在 C_2 中)，从 6 可到 2 (在 C_1 中)。有指向外部的箭头。所以 C_3 **不是闭集**。

(2) 周期和常返性

- **常返/暂留性:**

C_1 和 C_2 是有限状态链的闭集，因此状态 $\{1, 2, 3, 4\}$ 都是**正常返**的。

C_3 不是闭集，因此状态 $\{5, 6\}$ 都是**暂留**的。

- **周期:**

状态 1: 有自环 $1 \to 1$ (1步)。所以 $d(1) = 1$。因此 $d(2) = 1$。C_1 中状态是**非周期**的。

状态 3: 回路只有 $3 \to 4 \to 3$ (2步)。所有回路步长都是2的倍数。所以 $d(3) = 2$。因此 $d(4) = 2$。

状态 5: 回路只有 $5 \to 6 \to 5$ (2步)。所有回路步长都是2的倍数。所以 $d(5) = 2$。因此 $d(6) = 2$。

(17.md 第二题)

一个马尔可夫链的转移概率矩阵为：(从状态 $n \geq 1$ 以概率 p_n 转移到 $n+1$，以概率 $1 - p_n$ 转移到 0；从状态 0 以概率 p_0 转移到 1，以概率 $1 - p_0$ 停在 0)。

a) 求其为常返链的充要条件；

b) 当 $p_n = e^{-1/(n+1)}$ 和 $p_n = e^{-(1/(n+1))^2}$ 时，判断常返性。

答案与解析

a) 常返链的充要条件

这是一个不可约链（所有状态都能到达0，从0能到达1，再到任意状态）。因此，所有状态同为常返或同为暂留。我们只需判断状态0的常返性。

状态0是常返的 $\iff$ 从0出发最终能返回0的概率 $f_{00} = 1$。

$f_{00} = P(\text{返回}0 \mid \text{从}0\text{出发}) = (1-p_0)\cdot 1 + p_0 \cdot f_{10}$

其中 f_{10} 是从状态1出发，最终能到达0的概率。

从状态1出发，不返回0的唯一路径是 $1 \to 2 \to 3 \to \dots$，永不访问0。

其概率为 $P(\text{永不返回}0 \mid \text{从}1\text{出发}) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} p_k$。

因此，$f_{10} = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} p_k$。

代入 f_{00} 的表达式：

$f_{00} = 1 - p_0 + p_0(1 - \prod_{k=1}^{\infty} p_k) = 1 - p_0 \prod_{k=1}^{\infty} p_k$

要使 $f_{00} = 1$，必须有 $p_0 \prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0$。

假设 $p_0 > 0$，则充要条件为 $\prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0$。

对于正项级数，$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0 \iff \sum_{k=1}^{\infty}(1-p_k) = \infty$。

所以，该链为常返链的充要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p_k) = \infty$。

b) 判断常返性

1. **当 $p_n = e^{-1/(n+1)}$ 时:**
   $1 - p_n = 1 - e^{-1/(n+1)}$。
   当 $n \to \infty$，$x = \frac{1}{n+1} \to 0$。利用泰勒展开 $e^{-x} \approx 1 - x$，我们有 $1 - p_n \approx \frac{1}{n+1}$。
   级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 是发散的（调和级数）。
   因此，当 $p_n = e^{-1/(n+1)}$ 时，链是**常返**的。
2. **当 $p_n = e^{-(1/(n+1))^2}$ 时:**
   $1 - p_n = 1 - e^{-(1/(n+1))^2}$。
   当 $n \to \infty$，$x = (\frac{1}{n+1})^2 \to 0$。利用泰勒展开 $e^{-x} \approx 1 - x$，我们有 $1 - p_n \approx (\frac{1}{n+1})^2$。
   级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1})^2$ 是收敛的（p-级数，p=2>1）。
   因此，当 $p_n = e^{-(1/(n+1))^2}$ 时，链是**暂留**的。

2.3 平稳分布与极限分布

ⓘ **知识点**

1. 平稳分布 (Stationary Distribution)

- 一个概率分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ 称为平稳分布，如果它满足：
  1. $\pi_j \geq 0$ 且 $\sum_j \pi_j = 1$

2. $\pi = \pi P$ (即 $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$ for all j)

- **物理意义：** 如果初始分布是平稳分布，那么经过任意多步转移后，系统的状态分布保持不变。

2. 极限分布 (Limiting Distribution)

- 如果对于任意初始状态 i，当 $n \to \infty$ 时，$P_{ij}^{(n)}$ 收敛到一个与 i 无关的值 π_j，即 $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$，则称 $\pi = (\pi_j)$ 为极限分布。

3. 定理

- 对于一个**不可约、正常返**的马尔可夫链，**存在唯一**的平稳分布 π。
- 该平稳分布为 $\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$，其中 μ_j 是状态 j 的平均返回时间。
- 如果该链还是**非周期**的（即遍历的），则极限分布存在且等于平稳分布。
- 如果链是暂留或零常返的，则 $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$。

应试技巧

1. **判断存在性：** 首先判断链是否不可约、正常返。对于有限状态不可约链，平稳分布一定唯一存在。
2. **求解平稳分布 π：**
    - 列出方程组 $\pi = \pi P$。
    - 加上约束条件 $\sum \pi_j = 1$。
    - 解这个线性方程组即可得到 π。
3. **求解极限概率：**
    - 如果链是遍历的（不可约、正常返、非周期），极限概率就是平稳分布 π_j。
    - 如果链是可约的，需要分情况讨论：

        如果最终会进入某个吸收态或闭的等价类，极限概率只在这些类中非零。

        如果从状态 i 出发，最终会进入暂留态 j，则 $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$。
4. **计算平均返回时间：** 求出平稳分布后，$\mu_j = 1/\pi_j$。

历年真题

(2016-2017 秋学期补考 第五题 后续)

对于上题中的马尔可夫链:

(3) 计算所有正常返态的平均回转时;

(4) 计算 $\lim_{n\to\infty} P_{12}^{(n)}$ 和 $\lim_{n\to\infty} P_{53}^{(n)}$。

✓ **答案与解析** >

(3) 平均回转时

正常返态为 $\{1,2,3,4\}$，分布在两个闭的等价类 $C_1=\{1,2\}$ 和 $C_2=\{3,4\}$。我们需要分别计算在这两个子链上的平稳分布。

- **对于 $C_1=\{1,2\}$:**

  转移矩阵为 $P_1=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。

  设平稳分布为 (π_1,π_2)。

  $\begin{cases}\pi_1=0.4\pi_1+1\pi_2\\ \pi_2=0.6\pi_1+0\pi_2\\ \pi_1+\pi_2=1\end{cases}\implies\begin{cases}0.6\pi_1=\pi_2\\ \pi_1+\pi_2=1\end{cases}$

  解得 $\pi_1=5/8,\pi_2=3/8$。

  平均回转时: $\mu_1=1/\pi_1=8/5$, $\mu_2=1/\pi_2=8/3$。

- **对于 $C_2=\{3,4\}$:**

  转移矩阵为 $P_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。

  设平稳分布为 (π_3,π_4)。

  $\begin{cases}\pi_3=\pi_4\\ \pi_4=\pi_3\\ \pi_3+\pi_4=1\end{cases}$

  解得 $\pi_3=1/2,\pi_4=1/2$。

  平均回转时: $\mu_3=1/\pi_3=2$, $\mu_4=1/\pi_4=2$。

(4) 极限概率

- **求 $\lim_{n\to\infty} P_{12}^{(n)}$:**

  状态 1 和 2 属于闭的等价类 $C_1=\{1,2\}$。这个子链是不可约、正常返的。

  周期 $d(1)=d(2)=1$，所以是非周期的。

  因此，极限分布存在且等于平稳分布。

  $\lim_{n\to\infty} P_{12}^{(n)}=\pi_2=3/8$。

- **求 $\lim_{n\to\infty} P_{53}^{(n)}$:**

  状态 5 是暂留态。从暂留态出发，经过无限步后停留在任意一个特定状态的概率为0。

$\lim_{n\to\infty} P_{5j}^{(n)} = 0$ 对所有 j 成立。

因此，$\lim_{n\to\infty} P_{53}^{(n)} = 0$。

2.4 吸收概率与平均吸收时间

知识点

吸收态: 如果一个状态 i 满足 $P_{ii} = 1$，则称 i 为吸收态。

吸收概率: 从暂留态 i 出发，最终被吸收态（或吸收集）A 吸收的概率，记为 h_i。

平均吸收时间: 从暂留态 i 出发，首次到达吸收集 A 的平均步数，记为 m_i。

先走一步法 (First-Step Analysis):

- **求吸收概率 h_i:**
  1. **边界条件:**
     - 如果 $k \in A$ (在目标吸收集里)，$h_k = 1$。
     - 如果 k 在另一个吸收集里，无法到达 A，则 $h_k = 0$。
  2. **递推方程:** 对每个暂留态 i，

     $h_i = \sum_{j\in I} P_{ij}h_j$
  3. 解这个线性方程组。
- **求平均吸收时间 m_i:**
  1. **边界条件:**
     - 如果 $k \in A$ (在吸收集里)，$m_k = 0$。
  2. **递推方程:** 对每个暂留态 i，

     $m_i = 1 + \sum_{j\in I} P_{ij}m_j$
  3. 解这个线性方程组。

应试技巧

赌徒输光问题是吸收概率的经典应用。

1. **确定状态:** 状态通常是参与者的钱数。
2. **确定吸收态:** 输光（钱数为0）和赢光（钱数为总钱数）是吸收态。
3. **设未知数:** 设 h_i 为从持有 i 元钱开始，最终输光的概率。

4. **列方程:**
   - 边界条件：$h_0 = 1$ (已经输光)，$h_N = 0$ (已经赢光)。
   - 递推方程：$h_i = p \cdot h_{i+1} + q \cdot h_{i-1} + r \cdot h_i$ (其中p为赢1元的概率，q为输1元的概率，r为平局的概率)。
5. **解方程:** 这是一个二阶差分方程，可以解出通式。

☰ 历年真题

(2016-2017 秋学期补考 第四题)

甲乙两人玩游戏，每局甲赢一元的概率为 0.4，输一元的概率为 0.3，平局的概率为 0.3。假设一开始甲有1元，乙有2元，游戏直到某人输光为止。

(1) 建立一步转移矩阵P;

(2) 求甲输的概率。

✓ 答案与解析 >

(1) 一步转移矩阵

状态是甲拥有的钱数。总钱数为 $1+2=3$ 元。状态空间 $I = \{0,1,2,3\}$。

状态 0 (甲输光) 和 3 (乙输光) 是吸收态。

- $P_{00} = 1, P_{33} = 1$。
- 从状态 1: 赢1元到2 (概率0.4)，输1元到0 (概率0.3)，平局留1 (概率0.3)。
  $P_{10} = 0.3, P_{11} = 0.3, P_{12} = 0.4$。
- 从状态 2: 赢1元到3 (概率0.4)，输1元到1 (概率0.3)，平局留2 (概率0.3)。
  $P_{21} = 0.3, P_{22} = 0.3, P_{23} = 0.4$。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 甲输的概率

我们要求从状态 1 开始，最终被吸收态 0 吸收的概率。设 h_i 为甲有 i 元时，最终输光的概率。

- **边界条件:** $h_0 = 1, h_3 = 0$。
- **递推方程:**

$$h_1 = 0.3h_0 + 0.3h_1 + 0.4h_2 \implies h_1 = 0.3(1) + 0.3h_1 + 0.4h_2 \implies 0.7h_1 = 0.3 + 0$$

$$h_2 = 0.3h_1 + 0.3h_2 + 0.4h_3 \implies h_2 = 0.3h_1 + 0.3h_2 + 0.4(0) \implies 0.7h_2 = 0.3h_1$$

- **解方程:**

  从第二个方程得 $h_2 = \frac{3}{7}h_1$。

  代入第一个方程:

  $0.7h_1 = 0.3 + 0.4(\frac{3}{7}h_1)$

  $0.7h_1 = 0.3 + \frac{1.2}{7}h_1$

  $4.9h_1 = 2.1 + 1.2h_1$

  $3.7h_1 = 2.1$

  $h_1 = \frac{2.1}{3.7} = \frac{21}{37}$

甲一开始有1元，所以甲输的概率是 $h_1 = \frac{21}{37}$。

(17.md 第三题)

一个非均匀的硬币，出现head(H)的概率 P(H)=0.4。

a）求出现HH的平均等待时间;

b）求HH比TTT先出现的概率。

答案与解析

a) 出现HH的平均等待时间

设 m_0 为从初始状态开始的平均等待时间，m_H 为上一次是H的平均等待时间。

- $m_0 = 1 + P(H)m_H + P(T)m_0 = 1 + 0.4m_H + 0.6m_0$
- $m_H = 1 + P(H) \cdot 0 + P(T)m_0 = 1 + 0.6m_0$ (如果下一个是H，则成功，时间停止，贡献为0)

解方程组:

$0.4m_0 = 1 + 0.4(1 + 0.6m_0)$

$0.4m_0 = 1 + 0.4 + 0.24m_0$

$0.16m_0 = 1.4$

$m_0 = \frac{1.4}{0.16} = \frac{140}{16} = \frac{35}{4} = 8.75$

通用公式法: 对模式 S，其平均等待时间 $E[T_S] = \frac{1}{P(S)} + \sum_{k=1}^{L-1} \frac{I_k}{P(S_k)}$，其中 I_k 是指示函数，表示模式的前 k 个字符是否与后 k 个字符相同。

对于 HH，L=2, p=0.4。前1位(H)和后1位(H)相同，所以 $I_1 = 1$。

$E[T_{HH}] = \frac{1}{0.4^2} + \frac{1}{0.4} = \frac{1}{0.16} + 2.5 = 6.25 + 2.5 = 8.75$。

b) HH比TTT先出现的概率

设 P_i 为从状态 i 出发，HH先于TTT出现的概率。令 $p = P(H) = 0.4, q = P(T) = 0.6$。

状态：S_0 (初始), S_H (上一次H), S_{HH} (吸收,HH出现), S_T (上一次T), S_{TT} (上两次T), S_{TTT} (吸收,TTT出现)。

- 边界：$P_{HH} = 1, P_{TTT} = 0$。
- 方程：

$$P_0 = pP_H + qP_T$$

$$P_H = pP_{HH} + qP_T = p(1) + qP_T = 0.4 + 0.6P_T$$

$$P_T = pP_H + qP_{TT}$$

$$P_{TT} = pP_H + qP_{TTT} = pP_H + q(0) = 0.4P_H$$

- 解方程：

$$P_T = 0.4P_H + 0.6(0.4P_H) = 0.4P_H + 0.24P_H = 0.64P_H$$

$$P_H = 0.4 + 0.6(0.64P_H) = 0.4 + 0.384P_H$$

$$0.616P_H = 0.4 \implies P_H = \frac{0.4}{0.616} = \frac{400}{616} = \frac{50}{77}$$

$$P_0 = pP_H + qP_T = pP_H + q(0.64P_H) = P_H(p + 0.64q) = \frac{50}{77}(0.4 + 0.64 \times 0.6) = \frac{50}{77}$$

HH比TTT先出现的概率为 $28/55 \approx 0.509$。

第三章：泊松过程与布朗运动

3.1 泊松过程 (Poisson Process)

ⓘ 知识点

1. 定义 (齐次泊松过程)

强度为 λ 的计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程，若：

- $N(0) = 0$。
- 具有**独立增量**：不重叠时间段内事件发生数相互独立。
- 具有**平稳增量**：在长度为 t 的时间段内，事件发生数 $N(s+t) - N(s)$ 的分布与 s 无关。

- $P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$。

2. 相关性质与分布

- **等待时间 W_n**: 第 n 个事件发生的时刻，服从 $\Gamma(n,\lambda)$ 分布。
- **到达间隔 $T_n=W_n-W_{n-1}$**: 相互独立，且服从参数为 λ 的**指数分布**，即 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ 。
- **条件分布**:

  已知在 $(0,t]$ 内发生了 n 个事件，这些事件的发生时刻，等价于 n 个在 $(0,t]$ 上独立的均匀分布随机变量的次序统计量。

  $P(N(s)=k|N(t)=n)=C_n^k(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k}$， for $s<t$ (二项分布)。

3. 泊松过程的合成与分解

- **合成 (Superposition):** 两个独立的泊松过程 $\{N_1(t)\}$ (强度 λ_1) 和 $\{N_2(t)\}$ (强度 λ_2) 之和 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 也是一个泊松过程，强度为 $\lambda_1+\lambda_2$。
- **分解 (Thinning):** 一个强度为 λ 的泊松过程，每个事件以概率 p 被归为类型1，以概率 $1-p$ 被归为类型2。那么类型1事件构成的过程 $\{N_1(t)\}$ 和类型2事件构成的过程 $\{N_2(t)\}$ 是两个**相互独立**的泊松过程，强度分别为 λp 和 $\lambda(1-p)$。

应试技巧

1. **识别过程:** 题目描述“单位时间平均发生…”、“事件到达速率为…”通常指泊松过程。
2. **合成与分解是核心考点:**
   - 多个独立来源的事件汇合，用**合成**。
   - 一种事件根据属性分为多种，用**分解**。分解后过程的独立性非常重要。
3. **计算概率:**
   - “在时间 t 内发生 k 次” $\to$ 直接用泊松分布公式 $P(N(t)=k)$。
   - 涉及多个时间段 $\to$ 利用独立增量性质，将 $P(N(t_1)=k_1,N(t_2)=k_2)$ 转化为 $P(N(t_1)=k_1,N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1)$。
   - 条件概率 $\to$ 常用 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$ 或二项分布公式。

历年真题

(17.md 第五题)

一个路口有三种汽车经过，红色，绿色，蓝色，速率分别为 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_B$，互相独立。

a）求到达汽车的时间间隔的概率密度；

b）在t0时刻一辆红车经过，分别求下一辆为红车，蓝车，非红车的概率；

c）在t0时刻一辆红车经过，求下三辆为红车，第四辆非红车的概率；

✓ 答案与解析 >

a) 到达汽车的时间间隔的概率密度

三种颜色的车流是独立的泊松过程。根据泊松过程的合成性质，总的车流 $\{N(t)\}$ 也是一个泊松过程，其总速率 $\lambda = \lambda_R + \lambda_G + \lambda_B$。

泊松过程的到达时间间隔服从指数分布，参数为总速率 λ。

所以时间间隔 T 的概率密度函数为:

$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} = (\lambda_R + \lambda_G + \lambda_B)e^{-(\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B)t}, \quad t > 0$

b) 下一辆车的颜色概率

这可以看作是泊松过程的分解。任意一辆到达的汽车，它是红色的概率为 $p_R = \frac{\lambda_R}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$，是蓝色的概率为 $p_B = \frac{\lambda_B}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$，是绿色的概率为 $p_G = \frac{\lambda_G}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$。

泊松过程的无记忆性意味着，不管上一辆是什么车，下一辆车的颜色分布都是一样的。

- 下一辆为红车的概率: $P(\text{红}) = \frac{\lambda_R}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$
- 下一辆为蓝车的概率: $P(\text{蓝}) = \frac{\lambda_B}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$
- 下一辆为非红车的概率: $1 - P(\text{红}) = \frac{\lambda_G+\lambda_B}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$

c) 下三辆红，第四辆非红的概率

由于每次到达的车辆颜色是独立的，这相当于一个伯努利试验。

$P(\text{红}, \text{红}, \text{红}, \text{非红}) = P(\text{红})^3 \cdot P(\text{非红})^1$

$= \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}\right)^3 \left(\frac{\lambda_G+\lambda_B}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}\right)$

(19-20 回忆卷 大题4 & 2016-2017补考 第三题 类似)

已知一人在t时刻钓到的鱼数量服从 $\lambda = 5$ 条/h的泊松过程，鱼的质量服从(0.1,0.6)的均匀分布，有 >0.3kg 和 ≤0.3kg 两种鱼之分。

(改编自原题)

(1) 求1小时内至少钓到1条鱼，且3小时内恰好钓到2条鱼的概率。

(2) 求1小时内钓到的>0.3kg的鱼的数量的分布。

(3) 已知1小时内至多钓到2条鱼，求至少有1条是>0.3kg的概率。

✓ 答案与解析 >

(1) 概率计算

设 $N(t)$ 为钓到鱼的数量。

事件 A: 1小时内至少钓到1条鱼 ($N(1) \geq 1$)。

事件 B: 3小时内恰好钓到2条鱼 ($N(3) = 2$)。

我们要求 $P(A \cap B) = P(N(1) \geq 1, N(3) = 2)$。

$P(N(1) \geq 1, N(3) = 2) = P(N(1) = 1, N(3) = 2) + P(N(1) = 2, N(3) = 2)$

$= P(N(1) = 1, N(3) - N(1) = 1) + P(N(1) = 2, N(3) - N(1) = 0)$

由于独立增量性:

$= P(N(1) = 1)P(N(2) = 1) + P(N(1) = 2)P(N(2) = 0)$

$\lambda = 5, \lambda t_1 = 5, \lambda t_2 = 10$。

$P(N(1) = 1) = \frac{5^1 e^{-5}}{1!} = 5e^{-5}$

$P(N(2) = 1) = \frac{10^1 e^{-10}}{1!} = 10e^{-10}$

$P(N(1) = 2) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 12.5e^{-5}$

$P(N(2) = 0) = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} = e^{-10}$

$P(A \cap B) = (5e^{-5})(10e^{-10}) + (12.5e^{-5})(e^{-10}) = 50e^{-15} + 12.5e^{-15} = 62.5e^{-15}$

(2) >0.3kg 鱼的数量分布

这是一个泊松过程的分解。

首先计算任意一条鱼质量 >0.3kg 的概率 p。

质量 $W \sim U(0.1, 0.6)$。

$p = P(W > 0.3) = \frac{0.6-0.3}{0.6-0.1} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$。

设 $N_L(t)$ 为钓到 >0.3kg 的鱼的数量。这是一个泊松过程，其强度为 $\lambda_L = \lambda \cdot p = 5 \times 0.6 = 3$ 条/h。

所以，1小时内钓到的>0.3kg的鱼的数量 $N_L(1)$ 服从参数为 $\lambda_L = 3$ 的泊松分布。

(3) 条件概率

设 $N_S(t)$ 为钓到 $\leq 0.3kg$ 的鱼的数量，其强度为 $\lambda_S = \lambda(1-p) = 5 \times 0.4 = 2$。

$N_L(t)$ 和 $N_S(t)$ 相互独立。总数 $N(t) = N_L(t) + N_S(t)$。

我们要求 $P(N_L(1) \geq 1 | N(1) \leq 2)$。

$P(N_L(1) \geq 1 | N(1) \leq 2) = \frac{P(N_L(1) \geq 1, N(1) \leq 2)}{P(N(1) \leq 2)}$

分母: $P(N(1) \leq 2) = P(N(1) = 0) + P(N(1) = 1) + P(N(1) = 2)$

$= e^{-5} + 5e^{-5} + \frac{5^2}{2}e^{-5} = (1 + 5 + 12.5)e^{-5} = 18.5e^{-5}$

分子: $P(N_L(1) \geq 1, N(1) \leq 2) = P(N_L(1) = 1, N(1) \leq 2) + P(N_L(1) = 2, N(1) \leq 2)$

- $P(N_L(1)=1, N_S(1)+N_L(1)\le 2) = P(N_L(1)=1, N_S(1)\le 1)$
  $= P(N_L(1)=1)\cdot P(N_S(1)\le 1)$
  $= (\frac{3^1e^{-3}}{1!})\cdot(e^{-2}+2e^{-2}) = 3e^{-3}\cdot 3e^{-2} = 9e^{-5}$
- $P(N_L(1)=2, N_S(1)+N_L(1)\le 2) = P(N_L(1)=2, N_S(1)\le 0)$
  $= P(N_L(1)=2)\cdot P(N_S(1)=0)$
  $= (\frac{3^2e^{-3}}{2!})\cdot(e^{-2}) = 4.5e^{-3}\cdot e^{-2} = 4.5e^{-5}$

分子 $= 9e^{-5}+4.5e^{-5} = 13.5e^{-5}$

最终概率 $= \frac{13.5e^{-5}}{18.5e^{-5}} = \frac{13.5}{18.5} = \frac{27}{37}$

3.2 布朗运动 (Brownian Motion)

知识点

1. 定义 (标准布朗运动)

一个随机过程 $\{B(t), t\ge 0\}$ 是标准布朗运动，如果:

- $B(0)=0$。
- 具有**独立增量**。
- 具有**平稳增量**: $B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)$ for $t>s$。
- 样本轨道几乎处处连续。

2. 重要性质

- **分布:** $B(t)\sim N(0,t)$。
- **协方差:** $\mathrm{Cov}(B(s),B(t)) = \min(s,t)$。
- **高斯过程:** 布朗运动是高斯过程，其任意有限维分布都是多元正态分布。
- **首次击中时间 $T_a = \inf\{t>0 : B(t)=a\}$:**

  $$P(T_a\le t) = P(\max_{0\le s\le t} B(s)\ge a) = 2P(B(t)\ge a) = 2(1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})) \text{ for } a>0。$$
- **布朗桥 $X(t)=B(t)-tB(1), 0\le t\le 1$:**

  $$X(0)=X(1)=0。$$

  $$\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) = s(1-t) \text{ for } s\le t。$$

应试技巧

1. **核心是正态分布：** 所有计算都围绕正态分布的性质展开。
2. **独立增量是关键：** 处理协方差和条件概率时，务必将表达式凑成独立增量的形式。例如，$\text{Cov}(B(3)-2B(1), B(2))$ 可以分解为 $\text{Cov}(B(3)-B(2)+B(2)-B(1)-B(1), B(2))$。
3. **记住公式：** $\text{Cov}(B(s), B(t)) = \min(s,t)$ 和首次击中时间的概率公式是高频考点。
4. **条件概率：** $P(B(t_2) > b | B(t_1) = a)$ (其中 $t_2 > t_1$) 等价于 $P(B(t_2) - B(t_1) > b-a)$，这是一个关于 $N(0, t_2 - t_1)$ 的无条件概率。

历年真题

(2016-2017 秋学期补考 第一题)

设 $\{B(t); t \geq 0\}$ 是标准布朗运动。

(1) $B(3) - 2B(1)$ 服从什么分布?

(2) 求 $\text{Cov}(B(3) - 2B(1), B(2))$。

(3) 求 $P(B(5.5) > 5 | B(1.1) = 3, B(1.5) = 1)$。

(4) 求 $P(\max_{0 \leq t \leq 6.25} B(t) < 2.5)$。

答案与解析

(1) 分布

$B(3) - 2B(1) = (B(3) - B(1)) - B(1)$。

这是一个正态随机变量的线性组合，所以它服从正态分布。

- **均值:** $E[B(3) - 2B(1)] = E[B(3)] - 2E[B(1)] = 0 - 0 = 0$。
- **方差:**
  $D(B(3) - 2B(1)) = D(B(3)) + 4D(B(1)) - 4\text{Cov}(B(3), B(1))$
  $= 3 + 4(1) - 4\min(3,1) = 3 + 4 - 4 = 3$。

所以，$B(3) - 2B(1) \sim N(0, 3)$。

(2) 协方差

$\text{Cov}(B(3) - 2B(1), B(2)) = \text{Cov}(B(3), B(2)) - 2\text{Cov}(B(1), B(2))$

$= \min(3,2) - 2\min(1,2) = 2 - 2(1) = 0$。

(3) 条件概率

由于马尔可夫性，未来的状态只与当前状态有关。

$P(B(5.5) > 5|B(1.1) = 3, B(1.5) = 1) = P(B(5.5) > 5|B(1.5) = 1)$

$= P(B(5.5) - B(1.5) > 5 - 1|B(1.5) = 1)$

$= P(B(4) > 4)$

$B(4) \sim N(0,4)$。令 $Z = B(4)/\sqrt{4} = B(4)/2 \sim N(0,1)$。

$P(B(4) > 4) = P(Z > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.98 = 0.02$。

(4) 极值概率

$P(\max_{0\le t\le 6.25} B(t) < 2.5) = 1 - P(\max_{0\le t\le 6.25} B(t) \ge 2.5)$

使用首次击中时间公式:

$= 1 - 2P(B(6.25) \ge 2.5)$

$B(6.25) \sim N(0, 6.25)$。令 $Z = B(6.25)/\sqrt{6.25} = B(6.25)/2.5 \sim N(0,1)$。

$P(B(6.25) \ge 2.5) = P(Z \ge 1) = 1 - \Phi(1)$。

概率 $= 1 - 2(1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.84) - 1 = 1.68 - 1 = 0.68$。

第四章：平稳过程 (Stationary Processes)

4.1 平稳性与相关函数

知识点

1. 严平稳 (Strict-Sense Stationary, SSS)

过程的任意有限维分布不随时间推移而改变。即 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 与 $(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h))$ 同分布。

2. 宽平稳 (Wide-Sense Stationary, WSS)

过程的二阶矩存在，且:

- 均值函数为常数: $E[X(t)] = \mu_X$。
- 自相关函数只与时间差有关: $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau)$。

3. 关系

- 严平稳 $\implies$ 宽平稳 (如果二阶矩存在)。
- 宽平稳 + 高斯过程 $\implies$ 严平稳。
- 通常说的“平稳过程”指宽平稳过程。

4. 自相关函数 $R_X(\tau)$ 的性质

- $R_X(0) = E[X^2(t)]$ (平均功率)。
- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ (偶函数)。
- $|R_X(\tau)| \le R_X(0)$ (在0点取最大值)。
- $R_X(\tau)$ 是非负定的。

应试技巧

证明宽平稳的步骤:

1. **计算均值函数 $E[X(t)]$:** 看结果是否为与 t 无关的常数。通常需要计算定义中随机变量的期望。
2. **计算自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$:** 看结果是否只依赖于时间差 $\tau = t_2 - t_1$。
   - 对于三角函数形式的过程，大量使用三角恒等式，如 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$。
   - 如果随机变量是独立的，利用 $E[f(A)g(B)] = E[f(A)]E[g(B)]$。
   - 如果随机变量是均匀分布，积分求期望时要特别注意积分限和概率密度。

历年真题

(2016-2017 秋学期补考 第六题)

设 $X(t) = A\cos(t + 2\pi B), -\infty < t < \infty$，这里A,B相互独立同服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布。

(1) 计算 $\{X(t)\}$ 的均值函数和自相关函数，并证明它是一个宽平稳过程。

答案与解析

(1) 均值函数与自相关函数

首先计算 A, B 的期望和相关矩:

$A, B \sim U(0,1)$

- $E[A] = \int_0^1 a \cdot 1 da = \frac{1}{2}$
- $E[A^2] = \int_0^1 a^2 \cdot 1 da = \frac{1}{3}$
- $E[\cos(t + 2\pi B)] = \int_0^1 \cos(t + 2\pi b) db = \frac{1}{2\pi}[\sin(t + 2\pi b)]_0^1 = \frac{1}{2\pi}(\sin(t + 2\pi) - \sin(t)) = 0$

均值函数:

$\mu_X(t) = E[A\cos(t+2\pi B)] = E[A]E[\cos(t+2\pi B)]$ (因A,B独立)

$= \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$。

均值为常数，满足第一个条件。

自相关函数:

$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[A\cos(t_1+2\pi B)\cdot A\cos(t_2+2\pi B)]$

$= E[A^2]\cdot E[\cos(t_1+2\pi B)\cos(t_2+2\pi B)]$

利用积化和差公式：$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$E[\cos(t_1+2\pi B)\cos(t_2+2\pi B)] = E[\frac{1}{2}(\cos(t_1-t_2)+\cos(t_1+t_2+4\pi B))]$

$= \frac{1}{2}\cos(t_1-t_2) + \frac{1}{2}E[\cos(t_1+t_2+4\pi B)]$

计算 $E[\cos(t_1+t_2+4\pi B)] = \int_0^1 \cos(t_1+t_2+4\pi b)db = \frac{1}{4\pi}[\sin(t_1+t_2+4\pi b)]_0^1 = 0$。

所以，$E[\cos(t_1+2\pi B)\cos(t_2+2\pi B)] = \frac{1}{2}\cos(t_1-t_2)$。

$R_X(t_1,t_2) = E[A^2]\cdot\frac{1}{2}\cos(t_1-t_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cos(t_1-t_2) = \frac{1}{6}\cos(t_1-t_2)$

自相关函数只依赖于时间差 $\tau = t_2 - t_1$ (令 $t_1 = t, t_2 = t+\tau$, 则

$R_X(t,t+\tau) = \frac{1}{6}\cos(-\tau) = \frac{1}{6}\cos(\tau)$)。

结论:

由于均值为常数0，自相关函数只依赖于时间差，所以 $\{X(t)\}$ 是一个**宽平稳过程**。

4.2 各态历经性 (Ergodicity)

ⓘ **知识点**

1. 定义

各态历经性描述了随机过程的**时间平均**与**统计平均（集合平均）**之间的关系。

- **时间平均:** 对单个样本轨道在时间上求平均。

  均值: $\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$

  自相关: $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$

- **统计平均:** 对所有样本轨道在某个时刻求平均（即期望）。

  均值: $\mu_X = E[X(t)]$

  自相关: $R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$

2. 均值各态历经性

如果一个平稳过程的时间均值等于其统计均值（以概率1成立），即 $P(\langle X(t)\rangle = \mu_X) = 1$，则称该过程是均值各态历经的。

3. 判据

对于一个宽平稳过程 $\{X(t)\}$，其均值具有各态历经性的一个**充要条件**是：

$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T}(1-\frac{|\tau|}{2T})C_X(\tau)d\tau = 0$

一个更常用、更简单的推论（判据）：

如果 $\lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau) = 0$ (即自协方差函数在无穷远处趋于0)，则过程是**均值各态历经**的。等价地，如果 $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \mu_X^2$，则过程是均值各态历经的。

应试技巧

1. **判断各态历经性**通常是判断**均值各态历经性**。
2. **首选判据：** 计算自相关函数 $R_X(\tau)$，然后求其在 $\tau\to\infty$ 时的极限。
3. **计算 μ_X^2：** 计算均值 μ_X 并平方。
4. **比较：**
   - 如果 $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \mu_X^2$，则**具有**均值各态历经性。
   - 如果不等，则**不具有**均值各态历经性。
5. **注意：** 对于包含周期分量（如 $\cos(\omega_0\tau)$）的 $R_X(\tau)$，其极限通常不存在，因此一般不具有各态历经性。对于包含常数项的 $R_X(\tau)$，要特别小心。

历年真题

(2016-2017 秋学期补考 第六题 后续)

对于上题中的过程 $X(t) = A\cos(t+2\pi B)$

(2) 计算 $\{X(t)\}$ 的时间均值 $\langle X(t)\rangle$ 和时间相关函数 $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$，判断 $\{X(t)\}$ 是否为各态历经过程，说明理由。

答案与解析

(2) 时间平均与各态历经性

时间均值:

$\langle X(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A\cos(t+2\pi B)dt$

$= A\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}[\sin(t+2\pi B)]_{-T}^{T}$

$= A\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}[\sin(T+2\pi B)-\sin(-T+2\pi B)]$

$= A\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}[2\cos(2\pi B)\sin(T)] = 0$

时间均值 $\langle X(t)\rangle = 0$。

统计均值 $\mu_X = 0$。

由于时间均值恒等于统计均值，所以该过程是**均值各态历经**的。

时间相关函数:

$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[A\cos(t+2\pi B)][A\cos(t+\tau+2\pi B)]dt$

$= A^2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}[\cos(-\tau)+\cos(2t+\tau+4\pi B)]dt$

$= \frac{A^2}{2}\cos(\tau) + \frac{A^2}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(2t+\tau+4\pi B)dt$

后面一项的积分为 $\frac{1}{2}[\sin(2t+\tau+4\pi B)]_{-T}^{T}$，当 $T\to\infty$ 时极限为0。

所以 $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \frac{A^2}{2}\cos(\tau)$。

这是一个随机变量，不等于统计相关函数 $R_X(\tau) = \frac{1}{6}\cos(\tau)$ (除非 $A^2 = 1/3$ 碰巧成立)。

结论:

因为时间相关函数不等于统计相关函数，所以该过程**不是相关函数各态历经的**。

综合来看，该过程**不是（完全的）各态历经过程**。

另：使用判据法判断均值各态历经性

$\mu_X = 0, \mu_X^2 = 0$。

$R_X(\tau) = \frac{1}{6}\cos(\tau)$。

$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau)$ 极限不存在。

此时判据 $\lim R_X(\tau) = \mu_X^2$ 不适用。必须回到定义。如上计算，时间均值恒为0，等于统计均值，所以是均值各态历经的。

4.3 功率谱密度 (Power Spectral Density)

ⓘ **知识点**

1. 定义 (Wiener-Khinchin 定理)

宽平稳过程的功率谱密度 (PSD) $S_X(\omega)$ 是其自相关函数 $R_X(\tau)$ 的**傅里叶变换**。

- $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$
- $R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

2. 性质

- $S_X(\omega)$ 是**实函数**且为**偶函数** ($S_X(\omega) = S_X(-\omega)$)。
- $S_X(\omega) \geq 0$ (非负性)。
- **平均功率:** $E[X^2(t)] = R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\omega$。

3. 常用傅里叶变换对

$R_X(\tau)$	$S_X(\omega)$
$\delta(\tau)$	1
A (常数)	$2\pi A\delta(\omega)$
$e^{-a\|\tau\|}$ $(a > 0)$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\cos(\omega_0\tau)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$A\cos(\omega_0\tau)+B$	$\pi A[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+2\pi B\delta(\omega)$
白噪声: $R_X(\tau) = N_0\delta(\tau)$	**白噪声:** $S_X(\omega) = N_0$ (常数)

应试技巧

1. **计算谱密度** 的问题就是**求傅里叶变换**。
2. **背熟常用变换对**，特别是常数、余弦函数和冲激函数的变换。
3. **线性性质：** $R_X(\tau)$ 是几项之和，其谱密度就是这几项分别傅里叶变换后的和。
4. **识别常数项：** 如果 $R_X(\tau)$ 包含一个常数项 C，那么 $S_X(\omega)$ 中一定包含一个冲激函数 $2\pi C\delta(\omega)$。
5. **识别均值：** 如果 $S_X(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处有一个冲激函数 $2\pi\mu_X^2\delta(\omega)$，则说明过程的均值 μ_X 不为0。

历年真题

(2022-2023 夏 回忆卷 第四题)

设 $X(t) = B\sin(t-A)$，其中 $P(B=1) = P(B=0) = 0.5$，$A \sim U(0,1)$，A, B 独立。

(1) 计算 $X(t)$ 的均值函数与自相关函数，证明它是一个宽平稳过程。

(2) 计算 $X(t)$ 的谱密度函数。

✓ 答案与解析 >

(1) 均值与自相关

- $E[B] = 1 \times 0.5 + 0 \times 0.5 = 0.5$
- $E[B^2] = 1^2 \times 0.5 + 0^2 \times 0.5 = 0.5$
- $E[\sin(t-A)] = \int_0^1 \sin(t-a)da = [-\cos(t-a)]_1^0 = \cos(t) - \cos(t-1)$

均值函数:

$\mu_X(t) = E[B]E[\sin(t-A)] = 0.5(\cos t - \cos(t-1))$。

均值**不是常数**，所以该过程**不是宽平稳的**。

（题目可能有误，通常这类题会设计成宽平稳。例如，如果 $A \sim U(0, 2\pi)$，均值会是0。我们按 $A \sim U(0, 2\pi)$ 修正题目并作答）

修正后： $A \sim U(0, 2\pi)$

- $E[\sin(t-A)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t-a)da = \frac{1}{2\pi}[\cos(t-a)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}[\cos(t-2\pi) - \cos t] = 0$
- $\mu_X(t) = E[B]E[\sin(t-A)] = 0.5 \times 0 = 0$ (常数)。

自相关函数 (修正后):

$R_X(t_1, t_2) = E[B^2 \sin(t_1 - A)\sin(t_2 - A)] = E[B^2]E[\sin(t_1 - A)\sin(t_2 - A)]$

$= 0.5E[\frac{1}{2}(\cos(t_1 - t_2) - \cos(t_1 + t_2 - 2A))]$

$= 0.25\cos(t_1 - t_2) - 0.25E[\cos(t_1 + t_2 - 2A)]$

$E[\cos(t_1 + t_2 - 2A)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t_1 + t_2 - 2a)da = 0$

$R_X(t_1, t_2) = 0.25\cos(t_1 - t_2)$。

自相关函数只与时间差 $\tau = t_2 - t_1$ 有关，$R_X(\tau) = 0.25\cos(\tau)$。

因此，修正后的过程是**宽平稳**的。

(2) 谱密度函数 (修正后)

$R_X(\tau) = 0.25\cos(\tau)$。

利用傅里叶变换对 $\cos(\omega_0\tau) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$，这里 $\omega_0 = 1$。

$S_X(\omega) = \mathcal{F}[0.25\cos(\tau)] = 0.25 \cdot \pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$

$S_X(\omega) = \frac{\pi}{4}[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$