

第2章 空间描述和变换

1. 外积

① 计算方法

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{bmatrix} \text{ 或 } P \times Q = \begin{bmatrix} p_x & q_x \\ p_y & q_y \\ p_z & q_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

② 性质 $a \times b = -(b \times a)$; $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$
 $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$

2. 旋转矩阵和齐次变换矩阵

① 定义: ${}^B R = [{}^A X_B \quad {}^A Y_B \quad {}^A Z_B] \in SO(3)$ (B坐标轴在A中的坐标)

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix} = [\hat{X}_A \quad \hat{Y}_A \quad \hat{Z}_A] {}^B R$$

② 性质: $R^{-1} = R^T, |R| = 1, {}^A R = {}^B R^{-1} = {}^B R^T, {}^B O_A = -{}^B R {}^A O_B$
 ${}^B T = \begin{bmatrix} {}^B R & {}^B O_A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R^T & -{}^B R^T {}^A O_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^A T^{-1} \quad {}^A P = {}^A O_B + {}^B R {}^B P$

3. 姿态的欧拉角和固定角表示

(欧拉角绕联体坐标系, 固定角绕参考坐标系)

① 基本旋转矩阵 (x横滚 roll y俯仰 pitch z偏摆 yaw)

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & -s \\ & s & c \end{bmatrix}, R_y = \begin{bmatrix} c & & s \\ & 1 & \\ -s & & c \end{bmatrix}, R_z = \begin{bmatrix} c & & s \\ s & & c \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

② 常用欧拉角表示 (6非对称+6对称)

$$R_{z'y'x'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}$$
$$R_{z'y'z'}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

③ 固定角 $R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) = R_{z'y'x'}(\alpha, \beta, \gamma)$

④ 性质: zyx 欧拉角 $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; zyz 欧拉角 $\beta \in [0, \pi]$

$$R_z(\pm\pi + \alpha)R_y(\pm\pi - \beta)R_x(\pm\pi + \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$$
$$R_z(\pm\pi + \alpha)R_y(-\beta)R_z(\pm\pi + \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

总有2姿态无法唯一表达(只能确定 $\alpha \pm \gamma$): 非对称 $\beta = \pm\pi/2$ 对称 $\beta = 0/\pi$

4. 姿态的等效轴角表示

(表示大范围旋转时, K会突变)

① 等效轴角旋转矩阵 ($k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1, v = 1 - c, R_K(\theta) = R_{-K}(-\theta)$)

$${}^A R = R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x^2 v + c & k_x k_y v - k_z s & k_x k_z v + k_y s \\ k_x k_y v + k_z s & k_y^2 v + c & k_y k_z v - k_x s \\ k_x k_z v - k_y s & k_y k_z v + k_x s & k_z^2 v + c \end{bmatrix}$$

例题: 已知{A}中的 ${}^A P(0)$, 求绕 ${}^A K$ 旋转 θ 后的 ${}^A P(1)$: 设{B}初始与{A}重合, 一起旋转, ${}^A P(1) = {}^A O_B + {}^B R {}^B P = R_K(\theta) {}^A P(0)$

② 计算: 令 $\theta \in [0, \pi]$, 有 $\theta = \arccos[(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)/2]$

若 $\theta \in (0, \pi)$, $\theta = \pi$, $\theta = 0$ (无旋转)

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} \sqrt{(r_{11} + 1)/2} \\ r_{12}/\sqrt{2(r_{11} + 1)} \\ r_{13}/\sqrt{2(r_{11} + 1)} \end{bmatrix}, \text{任意单位向量(无穷解)}$$

③ 绕 ${}^A K: {}^A R(1) = R_K(\theta) {}^A R(0)$ 绕 ${}^B K: {}^B R(1) = {}^B R(0) R_K(\theta)$

④ 齐次变换矩阵: (相对于参考坐标系{A}的旋转会引起{B}的位置变化)

$$T = \begin{bmatrix} R_K(\theta) & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_K(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 分解成 平移 + 旋转}$$

$T {}^A T^{-1} \rightarrow \{B\}$ 绕 ${}^A K$ 转 θ , 再平移 ${}^A P$ ${}^B T T^{-1} \rightarrow \{B\}$ 平移 ${}^B P$, 再绕 ${}^B K$ 转 θ

5. 姿态的单位四元数表示

(单位四元数的乘积仍是~)

① 四元数: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (乘法不满足交换律)

$$ij = k, jk = i, ki = j \quad kj = -i, ji = -k, ik = -j$$

$$(a + ib_1 + jb_2 + kb_3)(c + id_1 + jd_2 + kd_3) = (ac - b_1d_1 - b_2d_2 - b_3d_3) + i(ad_1 + b_1c + b_2d_3 - b_3d_2) + j(ad_2 - b_1d_3 + b_2c + b_3d_1) + k(ad_3 + b_1d_2 - b_2d_1 + b_3c)$$

② 旋转矩阵 \leftrightarrow 单位四元数 $a + ib_1 + jb_2 + kb_3 \in S^3$

$$R_b(a) = \begin{bmatrix} 2(a^2 + b_1^2) - 1 & 2(b_1b_2 - ab_3) & 2(b_1b_3 + ab_2) \\ 2(b_1b_2 + ab_3) & 2(a^2 + b_2^2) - 1 & 2(b_2b_3 - ab_1) \\ 2(b_1b_3 - ab_2) & 2(b_2b_3 + ab_1) & 2(a^2 + b_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

对任何R都只有2组解。若 $r_{11} + r_{22} + r_{33} > -1$, 可解得:

$$\begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \\ sgn(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ sgn(r_{13} - r_{31})\sqrt{-r_{11} + r_{22} - r_{33} + 1} \\ sgn(r_{21} - r_{12})\sqrt{-r_{11} - r_{22} + r_{33} + 1} \end{bmatrix}$$

(1) 若单位四元数 a, b, c 满足 $ab = c$, 则 $R(a)R(b) = R(c)$

(2) ${}^A P = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T, {}^B P = [x_2 \ y_2 \ z_2]^T, q = a + ib_1 + jb_2 + kb_3$ 原点不动时, 有 ${}^A P = {}^A R {}^B P = R_b(a) {}^B P$, 则向量转换公式为:

$$ix_1 + jy_1 + kz_1 = q(ix_2 + jy_2 + kz_2)q^*$$

③ 等效轴角 $R_K(\theta) \leftrightarrow$ 四元数 $R_b(a)$

$$a = \cos(\theta/2), \quad \vec{b} = \vec{K} \sin(\theta/2)$$

④ 欧拉参数: 定义四维向量 $[a \ b_1 \ b_2 \ b_3]^T \in R^4$, 与四元数 $a + ib_1 + jb_2 + kb_3 \in \mathbb{H}$ 一一对应。定义格拉斯曼积:

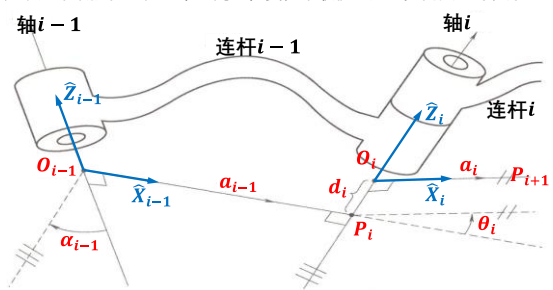
$$\begin{bmatrix} a \\ \vec{b} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c \\ \vec{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - \vec{b}^T \vec{d} \\ a\vec{d} + c\vec{b} + \vec{b} \times \vec{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & a & -b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & a & -b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} c \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

若是单位四元数则 $A^T A = I$; 内积、夹角和长度定义同普通向量

第3章 机器人运动学

1. 定义

① 串联机构: 多个连杆通过关节以串联形式连成首尾不封闭的结构 为确定末端执行器在3维空间的位姿, 串联机器人至少需要6个关节



② 几何连杆 $r_{O_{i-1}P_i}$, 连杆转角 α_{i-1} , 连杆长度 a_{i-1} , 连杆偏距 d_i , 关节角 θ_i

③ 非标准 D-H 方法: (若转动1接平动2, \hat{X}_1 垂直于两轴平面, 将 \hat{Y}_1 沿 d_2)

(1) 轴i和i+1相交: O_i -两轴交点 \hat{X}_i -垂直于两轴平面

(2) 不相交: O_i -垂线垂足 \hat{X}_i -沿垂线

2. 相邻连杆联体坐标系的变换

① $\{i-1\}$ 变换到 $\{i\}$: \hat{X}_i 转 $\alpha_{i-1} \rightarrow \hat{X}_i$ 转 $\alpha_{i-1} \rightarrow \hat{Z}_i$ 移 $d_i \rightarrow \hat{Z}_i$ 转 θ_i

$${}^{i-1}T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & & \\ & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & & & \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i & \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

第4章 机器人逆运动学

1. 定义

工作空间: 机器人末端工具联体坐标系原点所能到达的范围

灵巧工作空间: 机器人末端工具能够以任何姿态到达的区域

可达工作空间: 机器人末端工具以至少一种姿态到达的区域

① 灵巧工作空间是可达工作空间的子集;

② 若目标在灵巧工作空间内, 则逆运动学问题的解存在;

③ 若目标不在可达工作空间内, 则逆运动学问题的解不存在;

④ 操作臂自由度少于6时, 三维空间内不能达到全部位姿

2. 逆运动学求解

(计算最短行程要加权, 侧重于移动小连杆)

① 含转动/移动关节的串联6自由度臂可解(一般是数值解)

② 6自由度有解析解的特性: 有多个正交关节轴或多个 $\alpha_i = 0/\pm 90^\circ$

③ 6转动关节有封闭解的充分条件: 有相邻3个关节轴线平行/交于一点

④ 求解 $k_1 c_\theta + k_2 s_\theta = l$: 令 $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \gamma = \arctan 2(k_2, k_1)$

有 $k_1 = r \cos \gamma, k_2 = r \sin \gamma$ 故 $c_\gamma c_\theta + s_\gamma s_\theta = \cos(\gamma - \theta) = \frac{l}{r}$

第5章 微分运动学与静力学

1. 定义

① ${}^B V_Q = d {}^B Q / dt, {}^A ({}^B V_Q) = {}^A R {}^B V_Q$ 是 ${}^B V_Q$ 在{A}中的描述

$v_C = {}^U V_{CORG}$, 表示{C}的 原点 相对于世界坐标系{U}的速度,

${}^A v_C = {}^A R {}^U v_C = {}^A R {}^U V_{CORG} \neq {}^A V_{CORG} \quad {}^C v_C = {}^C R {}^U v_C = {}^C R {}^U V_{CORG}$

② {B}在{A}中的定点转动 \rightarrow 绕瞬时转动轴的转动, 用角速度向量 ${}^A \Omega_B$ 表示, 其方向=瞬轴在{A}中的方向, 大小=旋转角速度

${}^C ({}^A \Omega_B) = {}^C R {}^A \Omega_B \quad \omega_C = {}^U \Omega_C \quad {}^A \omega_C = {}^A R \omega_C \quad {}^C \omega_C = {}^C R \omega_C$

2. 线速度与角速度

① 旋转矩阵的导数 (${}^B S = {}^A \dot{\Omega}_B = {}^A \dot{R} {}^B R^T$)

$${}^B \dot{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_y & \Omega_z \\ \Omega_y & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_z & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} {}^A R = {}^B S {}^A R = {}^A \dot{\Omega}_B {}^A R = {}^A \Omega_B \times {}^A R$$

② 线速度变换 ${}^B V_Q \rightarrow {}^A V_Q$

$${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A R {}^B V_Q + {}^A \dot{R} {}^B Q$$
$$= {}^A V_{BORG} + {}^A R {}^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R {}^B Q$$

{B}原点线速度+Q在{B}中的线速度+{B}对{A}旋转形成的切向线速度

③ 角速度变换: ${}^A \Omega_C = {}^A \Omega_B + {}^A ({}^B \Omega_C) = {}^A \Omega_B + {}^A R {}^B \Omega_C$

④ 连杆间速度传递 (注意不是 ${}^A_i R$, 要从 ${}^{i+1}T$ 转置得到)

	转动型关节	平动型关节
${}^{i+1}\omega_{i+1}$	${}^{i+1}R {}^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$	${}^{i+1}R {}^i \omega_i$
${}^{i+1}v_{i+1}$	${}^{i+1}R ({}^i v_i + \omega_i \times {}^i P_{i+1})$	(同左) $+ \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$

⑤ 向外迭代法 (N为连杆数(关节数+1), {N}为末端辅助坐标系)

求 ${}^i T \sim {}^N T \rightarrow {}^0 \omega_0 = {}^0 v_0 = \dot{N}/d_N = 0 \rightarrow$ 求 $[{}^1 \omega_1 \quad {}^1 v_1] \sim [{}^N \omega_N \quad {}^N v_N]$

\rightarrow 求 ${}^N T$, 则 $[{}^0 \omega_0 \quad {}^0 v_0] = {}^N R [{}^N \omega_N \quad {}^N v_N]$

3. 几何雅可比矩阵

① 定义: $\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(\phi) \dot{\phi}$ (不能直接对运动学方程求导得到 ω)

② 向量积构造法 (\hat{Z}_i 是{0}中的坐标, 从 ${}^i T$ 中得到)

	转动型关节	平动型关节
$v_N^{(i)}$	$\hat{Z}_i \times (O_N - O_i) \theta_i$	$\hat{Z}_i d_i$
$\omega_N^{(i)}$	$\hat{Z}_i \theta_i$	0

③ 参考系变换

$$\begin{bmatrix} {}^i v_N \\ {}^i \omega_N \end{bmatrix} = {}^i J(\phi) \dot{\phi} \quad {}^j J(\phi) = \begin{bmatrix} {}^i R & 0 \\ 0 & {}^i R \end{bmatrix} J(\phi)$$

4. 逆微分运动学与奇异性

① 定义: 对于6x6的J和某个 ϕ , 若J(ϕ)可逆, 则对于笛卡尔速度向量 v_N , 由 $\phi = J^{-1}(\phi) v_N$ 可计算产生 v_N 的各关节转速。

② 奇异形: 使6x6的J不可逆(不满秩), 或末端在笛卡尔空间中失去自由度(如只能沿垂直连杆的方向运动的 ϕ , 分为边界/内点奇异性)

5. 分析雅可比矩阵

① 定义: 将最小表示的运动学方程对关节变量微分得到($\dot{P} = v$)

$\dot{X} = [\dot{P}(\phi) \quad \Psi(\phi)]^T = J_a(\phi) \dot{\phi}$ 其中 $\Psi(\phi)$ 为固定角/欧拉角表示

② 旋转矩阵R \rightarrow 刚体角速度 ω (可用于计算几何雅可比):

$$\dot{R} R^T = \omega^\wedge \rightarrow \begin{cases} \omega_x = \dot{r}_{31} r_{21} + \dot{r}_{32} r_{22} + \dot{r}_{33} r_{23} \\ \omega_y = \dot{r}_{11} r_{31} + \dot{r}_{12} r_{32} + \dot{r}_{13} r_{33} \\ \omega_z = \dot{r}_{21} r_{11} + \dot{r}_{22} r_{12} + \dot{r}_{23} r_{13} \end{cases}$$

③ zyz 欧拉角速率 $\Psi(\Phi) \rightarrow$ 刚体角速度 ω :

$$R = R_{z'} y' z' \rightarrow \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ 1 & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \Psi = B_\alpha(\Psi) \Psi$$

④ 分析雅可比 \leftrightarrow 几何雅可比:

$$J(\Phi) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B_\alpha(\Psi) \end{bmatrix} J_\alpha(\Phi) \leftrightarrow J_\alpha(\Phi) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B_\alpha^{-1}(\Psi) \end{bmatrix} J(\Phi) = T_\alpha J(\Phi)$$

6. 静力

① 力偶: 两个大小相等、方向相反且不共线的平行力组成的力系, ($f, -f$)

对点O的力矩为 $r_{OA} \times f + r_{OB} \times (-f) = r_{BA} \times f$, 对刚体上的任何点力偶矩不变, 可在刚体上任意转移, 有刚体上A点的力 = B点的力 + $r_{BA} \times f$

② 连杆静力传递: $\begin{cases} f_i = {}^{i+1}R {}^{i+1} f_{i+1} \\ n_i = {}^{i+1}R {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i \end{cases}$

③ 向内迭代法: 设 ${}^N f_N = [f_x \ f_y \ f_z]^T, {}^N n_N = [n_x \ n_y \ n_z]^T$, 算 ${}^i f_i, {}^i n_i$

最后得到转动型的主动力矩 $\tau_i = {}^i n_i^T \hat{Z}_i$, 平动型的主动力 $\tau_i = {}^i f_i^T \hat{Z}_i$

④ 力域雅可比: $\tau = {}^N J^T {}^N F$ (6x1 笛卡尔力+力矩 \rightarrow 关节力矩, 注意 ${}^N F$ 要用第6章 机器人轨迹规划 ${}^N J^T$; 设 ${}^0 F$ 要用 ${}^0 J^T$; ${}^N F_N$ 是末端对环境的作用力)

1. 三次多项式 $\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, 系数解为

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \dot{\phi}_0 & -\frac{3\phi_0 - 3\dot{\phi}_0 t_f + (2\phi_0 + \dot{\phi}_0 t_f)}{t_f^2} & \frac{2\phi_0 - 2\dot{\phi}_0 t_f + (\phi_0 + \dot{\phi}_0 t_f)}{t_f^3} \end{bmatrix}$$

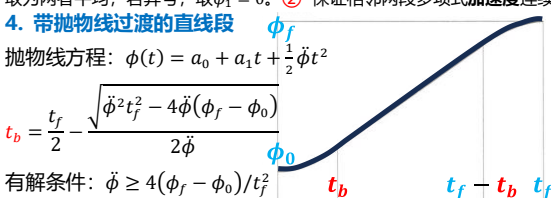
2. 五次多项式 $\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$

3. 考虑关节中间点的三次多项式

确定中间点的期望关节速度的方法:

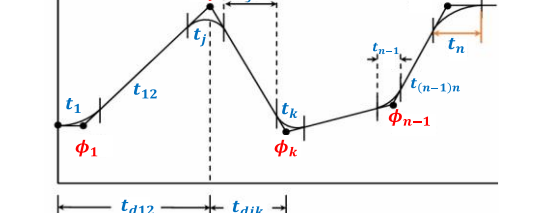
① 直接指定: 以 $\phi_{01} = \Delta\phi/\Delta t$ 为每段平均速度。若 ϕ_{01} 与 ϕ_{12} 同号, ϕ_1 取为两者平均; 若异号, 取 $\phi_1 = 0$ 。② 保证相邻两段多项式加速度连续

4. 带抛物线过渡的直线段



有解条件: $\phi \geq 4(\phi_f - \phi_0)/t_f^2$

5. 考虑关节中间点的带抛物线过渡的直线段



① 起始 $\dot{\phi}_1 = SGN(\phi_2 - \phi_1) |\dot{\phi}_1| \quad t_1 = t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\phi_2 - \phi_1)}{\phi_1}}$

$\dot{\phi}_{12} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_{d12} - t_1} \quad t_{12} = t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2} t_2$ ② 中间 $\dot{\phi}_j = SGN(\phi_{jk} - \phi_{ij}) |\dot{\phi}_j|$

$$t_j = \frac{\dot{\phi}_{jk} - \dot{\phi}_{ij}}{\ddot{\phi}_j} \quad \dot{\phi}_{jk} = \frac{\phi_k - \phi_j}{t_{djk}} \quad t_{jk} = t_{djk} - \frac{t_j + t_k}{2}$$

③ 末尾 $\dot{\phi}_n = SGN(\phi_{n-1} - \phi_n) |\dot{\phi}_n| \quad t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 - \frac{2(\phi_{n-1} - \phi_n)}{\$

第6章 卡尔直线运动

- ① **位置规划**: 设始末位置为 P_0 和 $P_1 \rightarrow P(k) = (1-k)P_0 + kP_1 (0 \leq k \leq 1)$
② **姿态规划**: 用等效轴角表示姿态 $K = [k_x \ k_y \ k_z]^T = \theta [\hat{k}_x \ \hat{k}_y \ \hat{k}_z]^T$ 即转动量 \times 单位转动轴, 选 $\|K_0 - (\theta - 360m)[\hat{k}_x \ \hat{k}_y \ \hat{k}_z]^T\|$ 最小的 n , 对三个 k 插值

7. 姿态的四元数(欧拉参数)插值

- ① **Slerp 公式**: 设 $p \in [0, 1], \theta = \cos^{-1}(r_0, r_1)$
有 $r_p = \frac{\sin((1-p)\theta)}{\sin \theta} r_0 + \frac{\sin(p\theta)}{\sin \theta} r_1$, 令 $p = P(t)$

- ② $r_0 \rightarrow r_1$ 等效于 $r_0 \rightarrow -r_1$, 选取夹角为锐角的进行插值

第7章 机器人动力学

1. 加速度的传递

- ① $\dot{V}_Q = \dot{A}_{BORG} + \dot{A}^R \dot{B}_Q + 2^A \dot{A}_B \times \dot{A}^R \dot{B}_Q + \dot{A}_B \times \dot{A}^R \dot{B}_Q + \dot{A}_B \times (\dot{A}_B \times \dot{A}^R \dot{B}_Q)$

- ② $\dot{A}_Q = \dot{A}_B + \dot{A}^R \dot{B}_Q + \dot{A}_B \times \dot{A}^R \dot{B}_Q$

2. 惯性张量(C是质心坐标系,若质量均匀则换成 $\iiint (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$)

$$C_I = \sum \begin{bmatrix} m_i(y_i^2 + z_i^2) & -m_i x_i y_i & -m_i x_i z_i \\ -m_i x_i y_i & m_i(x_i^2 + z_i^2) & -m_i y_i z_i \\ -m_i x_i z_i & -m_i y_i z_i & m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

旋转刚体的欧拉方程: ${}^C N = {}^C I {}^C \dot{\omega}_c + {}^C \omega_c \times {}^C I {}^C \omega_c$ ($\omega_c = {}^U \Omega_c$)

3. 牛顿-欧拉法迭代动力学方程

基于动力学分析连杆间约束力/力矩平衡

- ① **向外迭代**: 计算从连杆1~N的联体坐标系的角速度、角+线加速度、质心线加速度, 最后求作用在质心上的力和力矩 (以下用Z代替 ${}^{i+1}Z_{i+1}$)

角速度: 见5-2角加速度: ${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1}R^i \omega_i \times \hat{\theta}_{i+1} Z + \hat{\theta}_{i+1} Z$

平动速度: $\dot{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_{i+1} = 0$ 线加速度: ${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R^i [\dot{v}_i + \dot{\omega}_i \times {}^i O_{i+1} + \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i O_{i+1}) + 2^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} Z + \ddot{d}_{i+1} Z]$, 转动速度: $\dot{d}_{i+1} = \dot{d}_{i+1} = 0$

质心线加速度: ${}^i \dot{v}_{c_i} = {}^i \dot{v}_i + {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i P_{c_i} + \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{c_i})$

质心力+力矩: ${}^i F_i = m_i {}^i \dot{v}_{c_i}$ ${}^i N_i = {}^i C_i {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times {}^i C_i {}^i \dot{\omega}_i$ (${}^i N_i = {}^i ({}^i C_i N_i)$)

- ② **向内迭代**: 根据力和力矩平衡方程, 算连杆N~1上的力, 同时计算产生它们所需的关节力/力矩 ${}^i f_i = {}^{i+1}R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i$

${}^i n_i = {}^i N_i + {}^{i+1}R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{c_i} \times {}^i F_i + {}^i O_{i+1} \times ({}^{i+1}R^{i+1} f_{i+1})$

$\tau_i = {}^i n_i {}^i \hat{Z}_i$ (转动) $\tau_i = {}^i f_i {}^i \hat{Z}_i$ (平动)

- ③ **初始值**: 末端不对外界施加力时, ${}^N f_N = {}^N n_N = [0 \ 0 \ 0]^T$; 基座不转动, ${}^0 \omega_0 = {}^0 \dot{\omega}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$; 考虑重力时 ${}^0 \dot{v}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ 与重力方向相反

4. 拉格朗日方法

(基于能量项对系统变量及时间微分)

① **拉格朗日函数**: $L(\phi, \dot{\phi}) = k(\phi, \dot{\phi}) - u(\phi)$, k -动能 u -势能

② **动力学方程**: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \xi \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial k}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial \phi} = \tau - B\dot{\phi}$

③ **动能**: $k_i = \frac{1}{2} m_i v_{c_i}^T v_{c_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T C_i I_i \omega_i$ ($\omega_i = {}^i R \omega_i = {}^0 R^T \omega_i$)

由 $v_{c_i} = J_p^{(i)} \dot{\phi}$, $\omega_i = J_o^{(i)} \dot{\phi}$ ($J_p^{(i)} + J_o^{(i)}$ 表示第 i 个质心坐标系的雅可比矩阵)

有 $k = \frac{1}{2} \dot{\phi}^T M(\phi) \dot{\phi}$ (M 为惯性矩阵(对称正定))

$$M = \sum [m_i (J_p^{(i)})^T J_p^{(i)} + (J_o^{(i)})^T {}^0 R^T C_i I_i {}^0 R J_o^{(i)}]$$

- ④ **势能**: ${}^0 g = [0, -g, 0]^T$ (与重力方向相同), $u = -\sum_{i=1}^N m_i {}^0 g^T {}^0 P_{c_i}$

$g_i(\phi) = \frac{\partial u}{\partial \phi_i} = -\sum_{j=1}^N m_j {}^0 g^T \frac{\partial {}^0 P_{c_j}}{\partial \phi_i} \rightarrow G(\phi) = [g_1(\phi) \dots]^T$ 也可以直接用 $\frac{\partial u}{\partial \phi_i}$ 得到

- ⑤ **完整方程**: $M(\phi) \ddot{\phi} + C(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} + B\dot{\phi} + G(\phi) = \tau (\dot{M} - 2C \text{ 反对称})$

Christoffel 符号 $c_{kjl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial \phi_k} + \frac{\partial m_{jk}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial m_{kl}}{\partial \phi_j} \right) = c_{jki}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^N c_{kji} \dot{\phi}_k$

第8章 机器人运动控制

1. 电机及驱动器

转矩+转速公式 $T_{el} = C_{Ti} I_{mi}$ $\omega_{mi} = (k_{ui}/k_{ei}) U_{ci} - (R_{mi}/k_{ei}) I_{mi}$

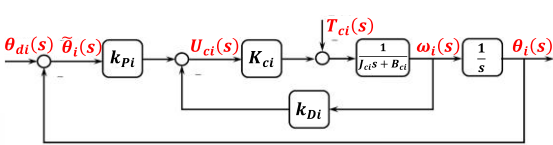
2. 减速器

$\theta_{mi} = \eta_i \theta_i$ $T_{ai} = \eta_i T_i$ $J_{ai} \dot{\omega}_i = T_{ai} - T_{ci} - b_{ai} \omega_i$

3. 关节模型

$J_{ci} \ddot{\theta} + B_{ci} \dot{\theta} = K_{ci} U_{ci} - T_{ci} \rightarrow \frac{K_{ci} U_{ci}(s) - T_{ci}(s)}{s(J_{ci}s + B_{ci})}$

2. 考虑阶跃输入的 PD 控制



阶跃响应无静差

$\theta_i(s) = \frac{k_{pi} K_{ci} \theta_d(s) - T_{ci}(s)}{J_{ci} s^2 + (B_{ci} + k_{pi} K_{ci}) s + k_{pi} K_{ci}}$ 有干扰则有静差, k_{pi} 大 \rightarrow 静差小快速性好

4. 考虑阶跃输入的 PID 控制

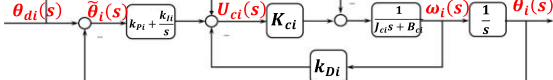
将 k_{pi} 改成 $k_{pi} + k_{ti}/s$, 有阶跃扰动也无静差

$$\theta_i(s) = \frac{(k_{pi} s + k_{ti}) K_{ci} \theta_d(s) - s T_{ci}(s)}{J_{ci} s^3 + (B_{ci} + k_{pi} K_{ci}) s^2 + k_{pi} K_{ci} s + k_{ti} K_{ci}}$$

劳斯判据: $k_{pi}, k_{ti}, k_{di} > 0$ 且 $(B_{ci} + k_{pi} K_{ci}) k_{pi} > J_{ci} k_{ti}$

5. 考虑二阶可导输入的 PID 控制

通过前馈引入 θ_{d1} 的一、二阶导数



$$\theta_i(s) = \theta_d(s) - \frac{s}{J_{ci} s^3 + (B_{ci} + k_{di} K_{ci}) s^2 + k_{pi} K_{ci} s + k_{ti} K_{ci}} T_{ci}(s)$$

完全消除参考输入对偏差 $\hat{\theta}_i = \theta_{di} - \theta_i$ 的影响, 在阶跃扰动下无静差跟踪二阶可导轨迹

6. 计算转矩前馈控制

估计 $\hat{T}_{ci}(s)$, 在 $U_{ci}(s)$ 加入 $T_{ci}(s)/K_{ci}$

7. 集中控制电机电流反馈

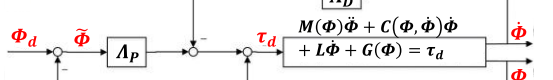
(将电机视为出力而非运动部件, 关注转矩 T_{ei} 而非转速)

- ① **模型**: $U_{ci} = \pi_{pi}(V_{ci} - I_{mi}) \rightarrow \eta_i T_{ei} = \tau_i = \eta_i C_{Ti} V_{ci} - \eta_i^2 \frac{C_{Ti} k_{ci}}{k_{ui} \pi_{pi} + R_{mi}} \dot{\theta}_i$

记为 $\tau = \tau_d - B_e \phi$ (B_e 为对角阵), 与动力学方程合并: ($L = B + B_e$)

$M(\phi) \ddot{\phi} + C(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} + L\dot{\phi} + G(\phi) = \tau_d$ 需设计计算 τ_d (即电流) 的算法

- ② **重力补偿 PD 控制** $\tau_d = A_p(\phi_d - \phi) - A_D \dot{\phi} + G(\phi)$ A_p 和 A_D 为 N 阶正定

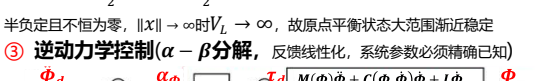


闭环系统方程 $M\ddot{\phi} = A_p \ddot{\phi} - (C + L + A_D) \dot{\phi} \rightarrow \ddot{x} = [\ddot{\phi}^T \dot{\phi}^T]^T$ 构造李雅普

诺夫函数 $V_L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^T M \dot{\phi} + \frac{1}{2} \ddot{\phi}^T A_p \ddot{\phi}$, 可证 V_L 正定, $\dot{V}_L = -\dot{\phi}^T (L + A_D) \dot{\phi}$

半负定且不恒为零, $\|x\| \rightarrow \infty$ 时 $V_L \rightarrow \infty$, 故原点平衡状态大范围渐近稳定

- ③ **逆动力学控制** ($\alpha - \beta$ 分解, 反馈线性化, 系统参数必须精确已知)



对①中模型取控制律 $\tau_d = M(\phi) \alpha_\phi + C(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} + L\dot{\phi} + G(\phi)$ 其中

$\alpha_\phi = \ddot{\phi}_d + K_D \dot{\phi} + K_P \phi$ (K 是对角阵), 得 $\ddot{\phi} + K_D \dot{\phi} + K_P \phi = \ddot{\phi}_d$ (二阶阻尼)

- ④ **鲁棒控制** (参数全用估计, 通过设计 B_r 来应对外不确定性)

$\tau_d = \hat{M}(\phi) \alpha_\phi + \hat{C}(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} + \hat{L}\dot{\phi} + \hat{G}(\phi)$, $\alpha_\phi = \ddot{\phi}_d + K_D \dot{\phi} + K_P \phi + B_r$

- ⑤ **自适应控制** (模型采用参数线性化形式, α_ϕ 同③, 参数估计同④)

$\tau_d = M(\phi) \ddot{\phi} + C(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} + L\dot{\phi} + G(\phi) = Y(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \Psi$

$\tau_d = \hat{M}(\phi) \alpha_\phi + \hat{C}(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} + \hat{L}\dot{\phi} + \hat{G}(\phi) = Y(\phi, \dot{\phi}, \alpha_\phi) \hat{\Psi}$

基于对 Ψ 的估计 $\hat{\Psi}$ 改进控制, 令 $\hat{\Psi} = \Psi - \tilde{\Psi}$, $\phi = [\ddot{\phi}^T \dot{\phi}^T]^T$, 有

$$\dot{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_P & -K_D \end{bmatrix} \phi + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \hat{M}^{-1}(\phi) Y(\phi, \dot{\phi}, \hat{\Psi}) = \bar{A} \phi + \bar{D} \hat{\Psi}$$

设计 K_P 和 K_D 使 \bar{A} 特征值有负实部, 设正定阵 Q_L 和 Γ , 存在正定阵 P_L , 满足李-方程 $\bar{A}^T P_L + P_L \bar{A} = -Q_L$, 用更新律 $\dot{\hat{\Psi}} = \Gamma^{-1} \bar{D}^T P_L \phi$, 构造 $V_L = \frac{1}{2} \phi^T P_L \phi + \frac{1}{2} \hat{\Psi}^T \Gamma \hat{\Psi}$ 正定, $\dot{V}_L = -\phi^T Q_L \phi$ 半负定, 说明 $\lim \phi = 0$, $\hat{\Psi}$ 有界

第9章 机器人力控制

1. 力位混合控制

- ① **坐标系和约束**: 建立约束坐标系 (末端固连在工件上则建在目标上, 若相对移动则建在末端) \rightarrow 根据接触情况确定自然约束: 不能运动的方向

$v_c / \omega_c = 0$, 其余能运动方向 $F_a / n_a = 0$ (准静止) \rightarrow 根据自然约束确定人工约束: v_c / ω_c 取任意值, F_c / n_c 取任意值 (根据需要取 0/某值)。

	运动学	静力学
自然约束	约束空间 = 0	可行运动空间 = 0
人工约束	可行运动空间任意值	约束空间任意值

装配策略: 分解为多个子任务, 当自然约束变化时切换

- ② **力位混合控制器** 位置/力参考输入是人工约束, 位置反馈信号可能包含约束空间 (噪声或约束坐标系与实际控制模式不一致), 但不要求跟踪力轨迹的任务。

需要滤波 (投影矩阵) \hat{e}_p 投影到可行空间; 力反馈信号要投影到约束空间。当模式一致时, 投影矩阵是仅包含 0、1 的对角阵。

2. 阻抗控制

- ① **定义**: 设计控制器使交互力与机械臂位置之间呈现出质量-弹簧-阻尼关系, 实现柔顺控制, 适用于要求接触力“保持比较小的状态”, 但不要求跟踪力轨迹的任务。

- ② **机械阻抗**: $F(s)/\tilde{X}(s)$ (是导数) 倒数称为机械导纳, 对质量-弹簧-阻尼系统

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F \rightarrow Z(s) = Ms + B + K/s$$

低频响应主要由弹性项 K 决定, 高频响应主要由惯性项 M 决定

理想位置控制器高阻抗 (抵抗外力干扰) 理想力控制器低阻抗 (抵抗位置变化干扰)

- ③ **控制目标**: 考虑简单系统 $m\ddot{x} = F + F_{ext}$ (控制力+环境外力) 目标是设计 F 使得 $F_{ext} = M_d \ddot{x} + B_d \dot{x} + K_d \tilde{x}$, 让外力交互时像质-弹-阻尼系统一样

当 M_d, B_d, K_d 均小时为低阻抗, 任意一个大时为高阻抗

- ④ **阻抗控制** (基于力): 传感器测量 $x \rightarrow \tilde{x} = x - x_d$, 来调整控制力 F 的大小

$$F = m\ddot{x}_d + (m - M_d)\ddot{\tilde{x}} - (B_d \dot{\tilde{x}} + K_d \tilde{x})$$

为防止噪声, 消去 $\ddot{\tilde{x}}$

$$= m\ddot{x}_d - \frac{m}{M} (B_d \dot{\tilde{x}} + K_d \tilde{x}) + \left(\frac{m}{M} - 1\right) F_{ext}$$

控制器输入运动信号, 输出力信号, 表现出阻抗; 物理系统表现出导纳

- ⑤ **导纳控制** (基于位置): 物理系统接收位置输入, 表现出阻抗, 控制器接收环境力并给出新的运动轨迹 x_m (机械导纳), 根据下式计算加速度:

$$M_d(\ddot{x}_m - \ddot{x}_d) + B_d \dot{\tilde{x}} + K_d \tilde{x} = F_{ext} \rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_d + \frac{1}{M_d} (F_{ext} - B_d \dot{\tilde{x}} - K_d \tilde{x})$$

再对加速度做两次积分, 得到新的运动轨迹 x_m 并送入位置控制环

- ⑥ **机器人笛卡尔空间阻抗控制: 关节间动力学模型为**

$$M(\phi) \ddot{\phi} + V(\phi, \dot{\phi}) + G(\phi) = \tau + J^T(\phi) F$$

其中 $V = C(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} + B\dot{\phi}$, F 是外力+力矩

$$M(\phi) \ddot{\phi} + V(\phi, \dot{\phi}) + G(\phi) = \tau + J_a^T(\phi) F_a$$

换用分析雅可比, $F_a = T_a^{-T} F$

$$\text{由 } \dot{X} = J_a \dot{\phi} \rightarrow \ddot{X} = \dot{J}_a \dot{\phi} + J_a \ddot{\phi} \rightarrow \ddot{\phi} = J_a^{-1} (\ddot{X} - \dot{J}_a \dot{\phi})$$

得笛卡尔空间动力学模型:

$$M_X(\phi) \ddot{X} + V_X(\phi, \dot{\phi}) + G_X(\phi) = J_a^{-T}(\phi) \tau + F_a \text{ (左乘 } J_a^{-T}(\phi) \text{)}$$

其中 $M_X = J_a^{-T} M J_a^{-1}$, $V_X = J_a^{-T} V + M_X \dot{\phi}$, $G_X = J_a^{-T} G$

令笛卡尔控制律为 $\tau = J_a^T [M_X \ddot{a}_d + V_X + G_X - F_a]$, 有 $\ddot{X} = \ddot{a}_d$

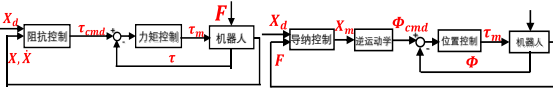
令 $\ddot{a}_d = \ddot{X}_d + \ddot{M}_d^{-1} (-B_d \dot{\tilde{X}} - K_d \tilde{X} + F_a)$, 得到理想的阻抗关系

$$M_d \ddot{X}_d + B_d \dot{\tilde{X}} + K_d \tilde{X} = F_a \text{ 得到关节空间控制律}$$

$$\tau = M_J^{-1} [\ddot{X}_d - \dot{J}_a \dot{\phi} - M_d^{-1} (B_d \dot{\tilde{X}} + K_d \tilde{X})] + V + G + J_a^T (M_X M_d^{-1} - I) F_a$$

若无力/力矩传感器, 取 $M_d = M_X = (J_a M^{-1} J_a^{-1})^{-1}$; K_d 反映末端执行器刚度, 为主要调节参数, 决定环境接触力大小; B_d 不影响稳态, 可以用来调节与环境交互的动态过程, 决

定响应过程; 需要机器人有关节力矩传感器, 选取较小的刚度和阻尼应对高刚度环境。



⑦ 机器人笛卡尔空间导纳控制: (1) 输出位置信号, 而机器人通常有位置控制模式, 故无需建其动力学模型, 但要求能测量环境力 (2) 需逆运动学, 将笛卡尔映射到关节空间 (3) 位置控制环增益大, 要求刚度 (大于环境) 和阻尼大 (4) 无接触时位置精度高, 环境刚度大时可能振荡 (5) 属于隐式力控制, 期望阻抗关系只保持力位关系, 不具体指定接触力, 无法跟踪特定力轨迹/直接限制接触力大小 (6) 若要跟踪 F, 设接触力误差 $F_e = F_r - F$, 阻抗关系换为 $M_d \ddot{x} + B_d \dot{x} + K_d x = F_e$, 简化为单一特定方向下参考位置 x_d 为定值的恒定接触力任务 $m\ddot{x} + b\dot{x} + k(x - x_d) = e$, 环境建模为弹簧 $F = K_e (X - X_e)$

得 $x = \frac{F_e}{k} + x_e = \frac{(F_r - F_e)}{k_e} + x_e$, 代入可得 $m\ddot{x} + b\dot{x} + (k + k_e)x = k F_r - k_e k (x_d - x_e)$, 稳态

误差 $e_{ss} = \frac{k}{k + k_e} [F_r + k_e (x_e - x_d)]$, 取参考位置 $x_d = x_e + \frac{F_r}{k_e}$ 可使 $e_{ss} = 0$

3. 控制方法对比

- ① **力位混合控制**: (1) 与刚性环境的接触限制机器人的运动自由度 (2) 机器人试图违反环境的几何约束, 因此受到接触力 (3) 任务空间划分为正交子空间, 分别在其中进行力/运动控制

- ② **阻抗控制**: (1) 环境看作发生微小有限变形的机械系统 (2) 两个耦合动态系统 (机器人和环境) 间交互产生接触力 (3) 控制器指定力/运动之间的动态关系

4. 关节力/力矩控制

- ① **电流环控制**: (1) 使用直驱电机/减速机很小时, $\tau = k_T I$, 电压-电流-输出力矩 (2) 简单且成本低, 但只用于减速机很小, 摩擦力建模难度+齿轮空程增加不确定性 (3) 直驱电机要输出足够的力矩需要做成很大的尺寸, 此方案在实际中不常用。

- ② **应变片式力矩传感器**: (1) 减速机常用谐波减速机, 有高减速比且消除空程, 在输出端设计弹性体并装应变片, 通过形变测量力矩, 经反馈回路调节电流 (2) 精度高但工艺复杂、成本高, 且有温/零漂, 使机器人动力学更复杂, 高速运动时控制难度高

- ③ **串联弹性驱动器 SEA**: (1) 包括电机、减速箱和输出端的弹性体, 但其刚度很小, 形变比应变片明显, 测量扭转 $\Delta\phi$ - 驱动器输出力矩 $K_d \Delta\phi$ - 电机电流 (2) 弹性体柔性强, 适用人机交互任务, 但使得关节构型更加复杂, 增加了高频高速运动控制难度

第0章 杂七杂八神金小知识

1. $\forall R \in SO(3)$ (一般方阵不行), $P \in \mathbb{R}^3$, $Q \in \mathbb{R}^3$, 有 $R(P \times Q) = RP \times RQ$

2. 求角度要用 $\theta = \arctan 2(y, x) = \arctan 2(\sin \theta, \cos \theta)$

$$3. R \rightarrow zyx \text{ 欧拉角 } [\alpha \beta \gamma] = \text{at2} \left[(r_{21}, r_{11}) \left(-r_{31}, \sqrt{\frac{r_{32}^2 + r_{33}^2}{2}} \right) (r_{32}, r_{33}) \right]$$

4. 静止/小范围旋转用欧拉/固定/轴角, 大范围用 R/单位四元数