机器人建模与控制

第2章 空间描述和变换

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

- 旋转矩阵的自由度

$$\mathrm{SO}(3)=\left\{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}=1, \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=1, \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=0, \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}\right\}$$

9个矩阵元素有6个约束：

$$r_{11}^2+r_{21}^2+r_{31}^2=1$$

$$r_{12}^2+r_{22}^2+r_{32}^2=1$$

$$r_{11}r_{12}+r_{21}r_{22}+r_{31}r_{32}=0$$

$$r_{13}=r_{21}r_{32}-r_{31}r_{22}$$

$$r_{23}=r_{31}r_{12}-r_{11}r_{32}$$

$$r_{33}=r_{11}r_{22}-r_{21}r_{12}$$

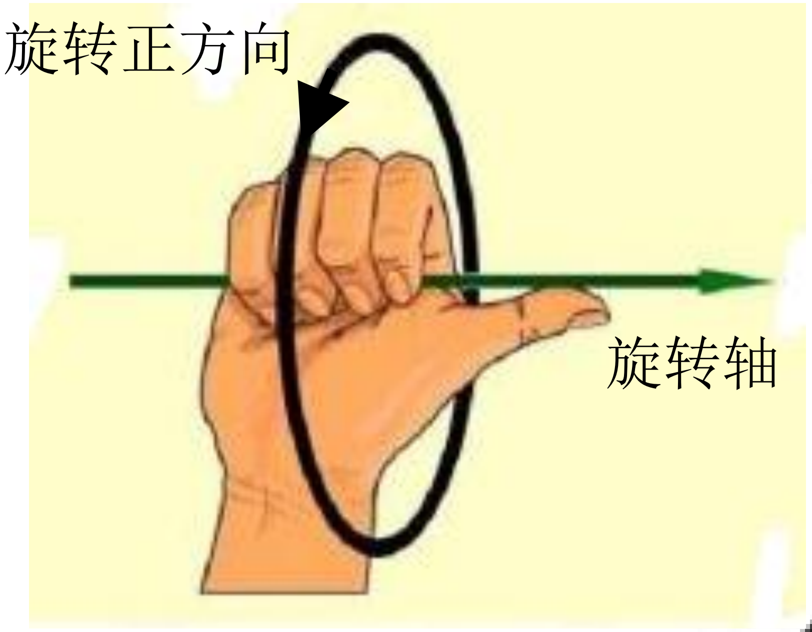
$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

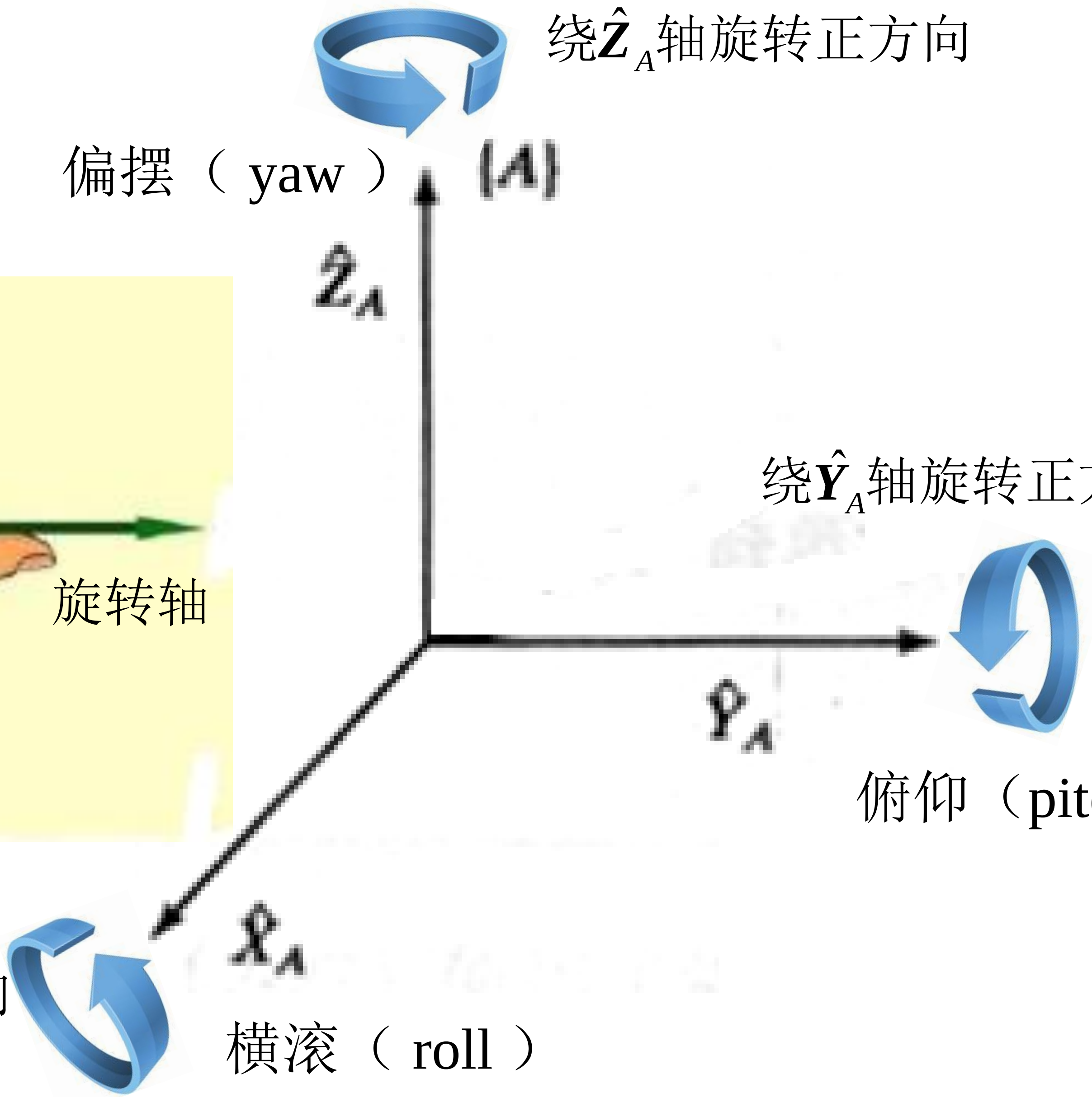
$$\begin{cases} w_x=p_yq_z-p_zq_y \\ w_y=p_zq_x-p_xq_z \\ w_z=p_xq_y-p_yq_x \end{cases}$$

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

2.4.1 基本旋转矩阵

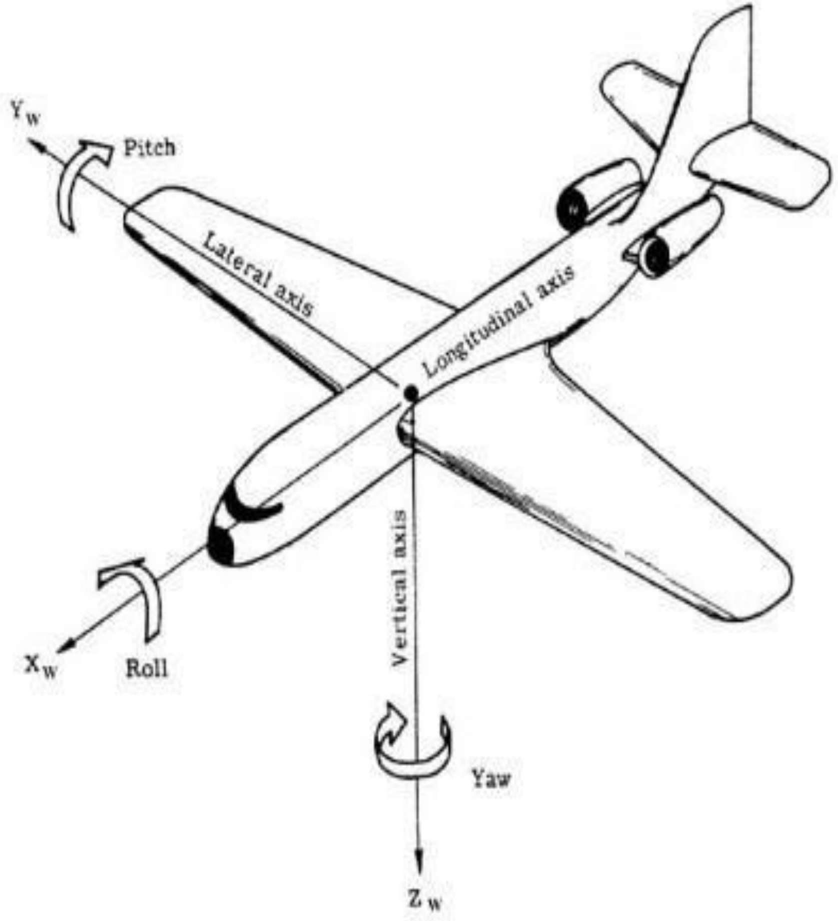
- 用右手定则确定旋转正方向





2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

- 飞机常用的联体坐标系

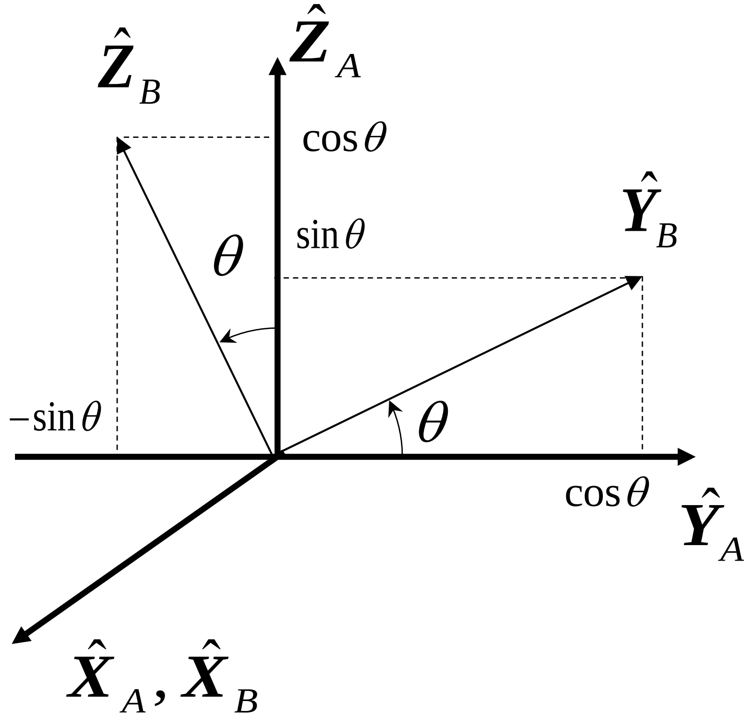


- 初始的$\{B\}$与$\{A\}$重合，$\{B\}$绕$\hat{\boldsymbol{X}}_A$旋转θ角，求旋转后的${}_B^A\boldsymbol{R}$

  绕x轴旋转θ

$$\hat{\boldsymbol{X}}_B = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{Y}}_B = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_B = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{X}}_A & \hat{\boldsymbol{Y}}_A & \hat{\boldsymbol{Z}}_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



$${}_B^A\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{R}_x(\theta)$$ 基本旋转矩阵

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

绕z轴旋转θ

$$\boldsymbol{R}_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta & -s\theta & 0\\ s\theta & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

如：${}_B^A\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_z(\theta)$ 表示$\{B\}$ 的姿态是相对$\{A\}$ 绕$\hat{\boldsymbol{Z}}_A$ 轴旋转θ

绕y轴旋转θ

$$\boldsymbol{R}_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta & 0 & s\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}$$

如：${}_B^A\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_y(\theta)$ 表示$\{B\}$ 的姿态是相对$\{A\}$ 绕$\hat{\boldsymbol{Y}}_A$ 轴旋转θ

绕x轴旋转θ

$$\boldsymbol{R}_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}$$

如：${}_B^A\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_x(\theta)$ 表示$\{B\}$ 的姿态是相对$\{A\}$ 绕$\hat{\boldsymbol{X}}_A$ 轴旋转θ

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

2.4.2 姿态的欧拉角表示

设$\{A\}$的$\hat{X}_A$和$\hat{Y}_A$在水平面上，$\hat{Z}_A$ 垂直于水平面并指向下方

以飞机为例（其联体坐标系$\{B\}$ 的$\hat{X}_B$ 轴方向为机身向前方向、$\hat{Y}_B$ 轴方向为右机翼向右方向）

如何将飞机从一个任意初始姿态旋转为基准姿态（即${}^A_B\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$ 的姿态）？

可分3步

第1步：飞机横滚$-\gamma$ 角度（绕$\hat{X}_B$ 旋转，旋转角度为$-\gamma$ ），使得左、右机翼呈水平（即$\hat{Y}_B$ 正交于$\hat{Z}_A$ ）

第2步：飞机俯仰$-\beta$ 角度（绕$\hat{Y}_B$ 旋转，旋转角度为$-\beta$ ），使得机头、尾呈水平（即$\hat{Z}_B$ 与$\hat{Z}_A$ 相等）

第3步：飞机偏摆$-\alpha$ 角度（绕$\hat{Z}_B$ 旋转，旋转角度为$-\alpha$ ），使得$\hat{X}_B$ 和$\hat{Y}_B$ 分别与$\hat{X}_A$ 和$\hat{Y}_A$ 相等

飞机如何从基准姿态恢复到初始姿态？

以带时间t的$\{B\}(t)$描述随时间变化的飞机联体坐标系，对于基准姿态$\{B\}(0)$，有 ${}^A_{B(0)}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$

第1步：在时段[0,1]内，飞机偏摆α 角度，即$\{B\}(t)$ 绕$\hat{Z}_{B(0)}$ （也是$\hat{Z}_A$ ）旋转α 角度，变成$\{B\}(1)$，则 ${}^A_{B(1)}\boldsymbol{R}={}^{B(0)}_{B(1)}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_z(\alpha)$

第2步：在时段[1,2]内，飞机俯仰β 角度，即$\{B\}(t)$ 绕$\hat{Y}_{B(1)}$ 旋转β 角度，变成$\{B\}(2)$，则 ${}^{B(1)}_{B(2)}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_y(\beta)$

第3步：在时段[2,3]内，飞机偏摆γ 角度，即$\{B\}(t)$ 绕$\hat{X}_{B(2)}$ 旋转γ 角度，变成$\{B\}(3)$，则 ${}^{B(2)}_{B(3)}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_z(\gamma)$

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

z-y-x欧拉角：${}^{A}_{B(3)}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B(1)}\boldsymbol{R}\,{}^{B(1)}_{B(2)}\boldsymbol{R}\,{}^{B(2)}_{B(3)}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma)$

物体的姿态由3个独立的角度α 、β 和γ 来确定

$$\boldsymbol{R}_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix}$$

任何$\boldsymbol{R} \in \mathrm{SO}(3)$可用$\boldsymbol{R}_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示出来

任何$\boldsymbol{R}_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathrm{SO}(3)$

同理，还存在x-y-z 欧拉角、x-z-y 欧拉角、y-x-z 欧拉角、y-z-x 欧拉角和z-x-y 欧拉角

上述6种欧拉角合称为非对称型欧拉角

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

还有其它形式的欧拉角吗？

将飞机从一个任意初始姿态旋转为基准姿态

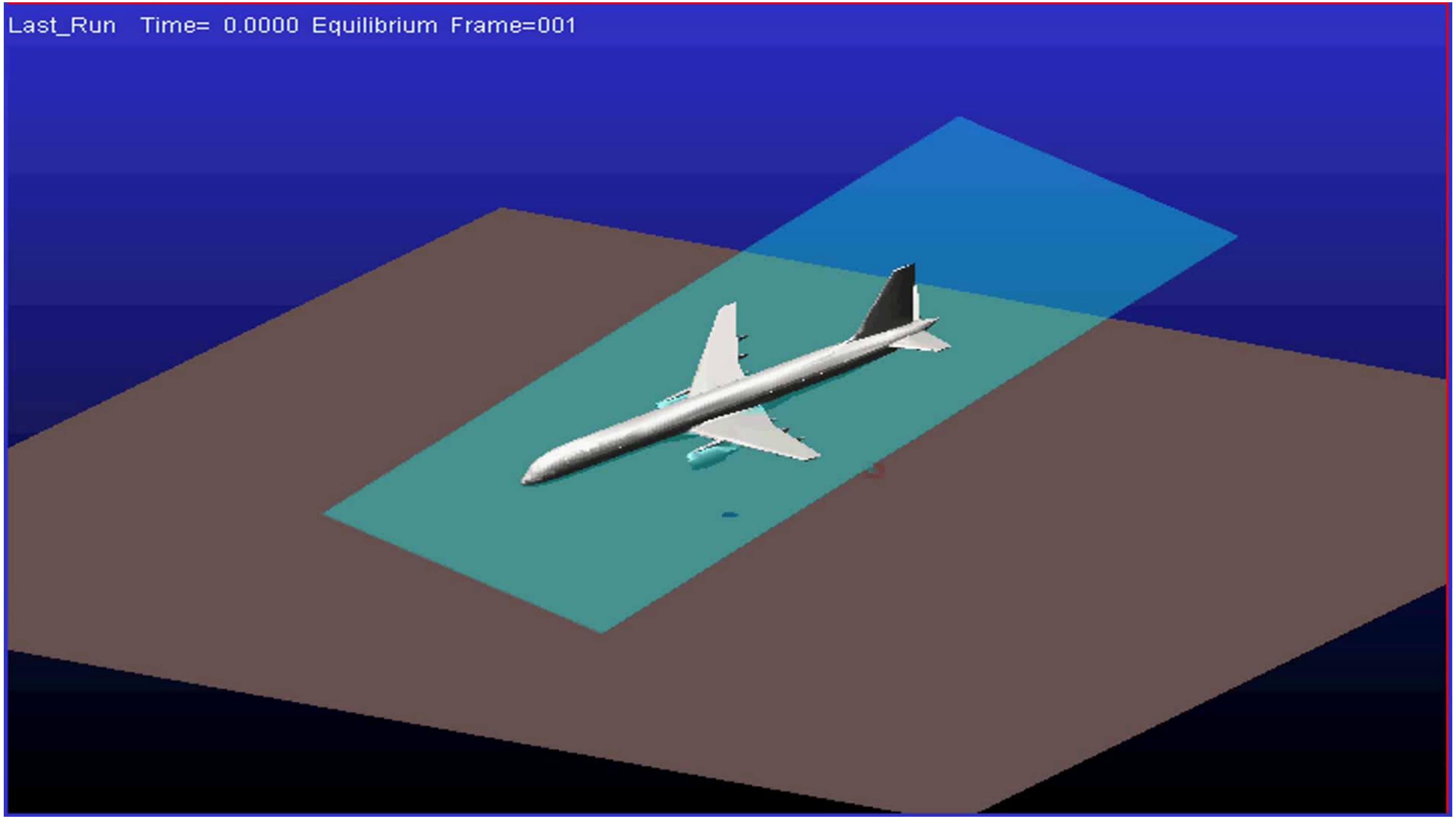
第1步：飞机横滚$-\gamma$ 角度（绕$\hat{\boldsymbol{X}}_B$ 旋转，旋转角度为$-\gamma$ ），使得左、右机翼呈水平（即$\hat{\boldsymbol{Y}}_B$ 正交于$\hat{\boldsymbol{Z}}_A$ ）

第2步：飞机俯仰$-\beta$ 角度（绕$\hat{\boldsymbol{Y}}_B$ 旋转，旋转角度为$-\beta$ ），使得机头、尾呈水平（即$\hat{\boldsymbol{Z}}_B$ 与$\hat{\boldsymbol{Z}}_A$ 相等）

第3步：飞机偏摆$-\alpha$ 角度（绕$\hat{\boldsymbol{Z}}_B$ 旋转，旋转角度为$-\alpha$ ），使得$\hat{\boldsymbol{X}}_B$ 和$\hat{\boldsymbol{Y}}_B$ 分别与$\hat{\boldsymbol{X}}_A$ 和$\hat{\boldsymbol{Y}}_A$ 相等

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

还有其它形式的欧拉角吗？



2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

还有其它形式的欧拉角吗？

第1步：飞机偏摆一个合适角度（绕$\hat{Z}_B$ 旋转合适角度），使得左、右机翼呈水平（即$\hat{Y}_B$ 正交于$\hat{Z}_A$ ）

第2步：飞机俯仰一个合适角度（绕$\hat{Y}_B$ 旋转合适角度），使得机头、尾呈水平（即$\hat{Z}_B$ 与$\hat{Z}_A$ 相等）

第3步：飞机偏摆一个合适角度（绕$\hat{Z}_B$ 旋转合适角度），使得$\hat{X}_B$ 和$\hat{Y}_B$ 分别与$\hat{X}_A$ 和$\hat{Y}_A$ 相等

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

*z-y-z*欧拉角：

$$\boldsymbol{R}_{z'y'z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{pmatrix}$$

任何$\boldsymbol{R}\in SO(3)$可用$\boldsymbol{R}_{z'y'z'}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示出来

任何$\boldsymbol{R}_{z'y'z'}(\alpha,\beta,\gamma)\in SO(3)$

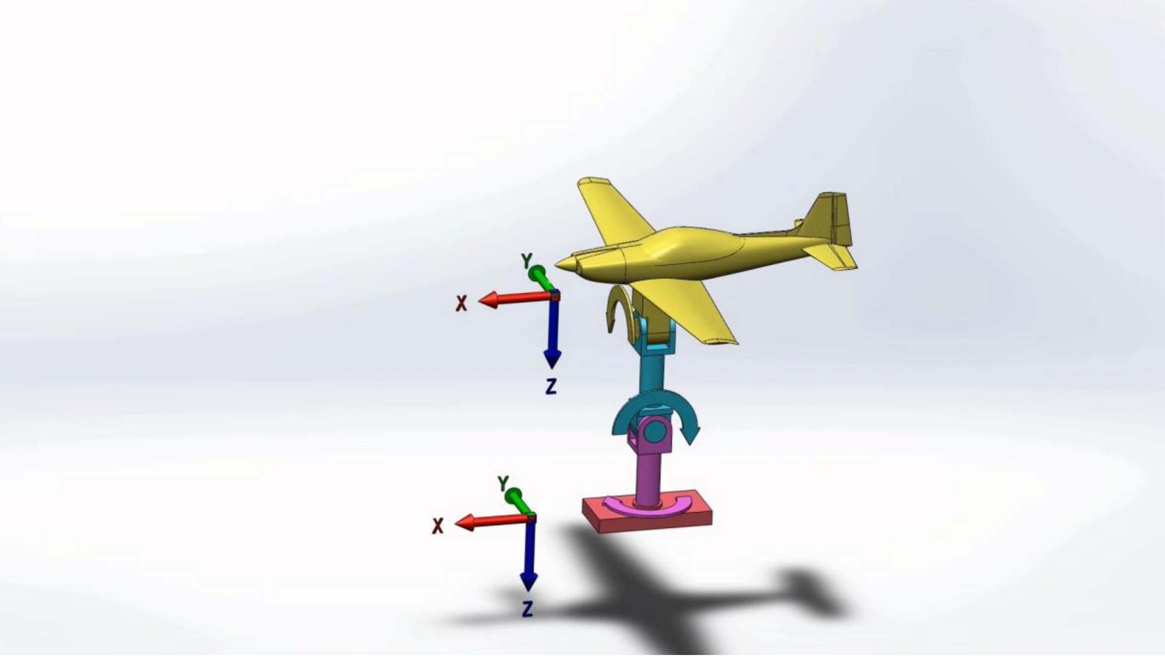
同理，还存在*x-y-x*欧拉角、 *x-z-x* 欧拉角、 *y-x-y*欧拉角、 *y-z-y*欧拉角和 *z-x-z*欧拉角
上述6种欧拉角合称为对称型欧拉角

有12种欧拉角表示法（6种对称型、6种非对称型）

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

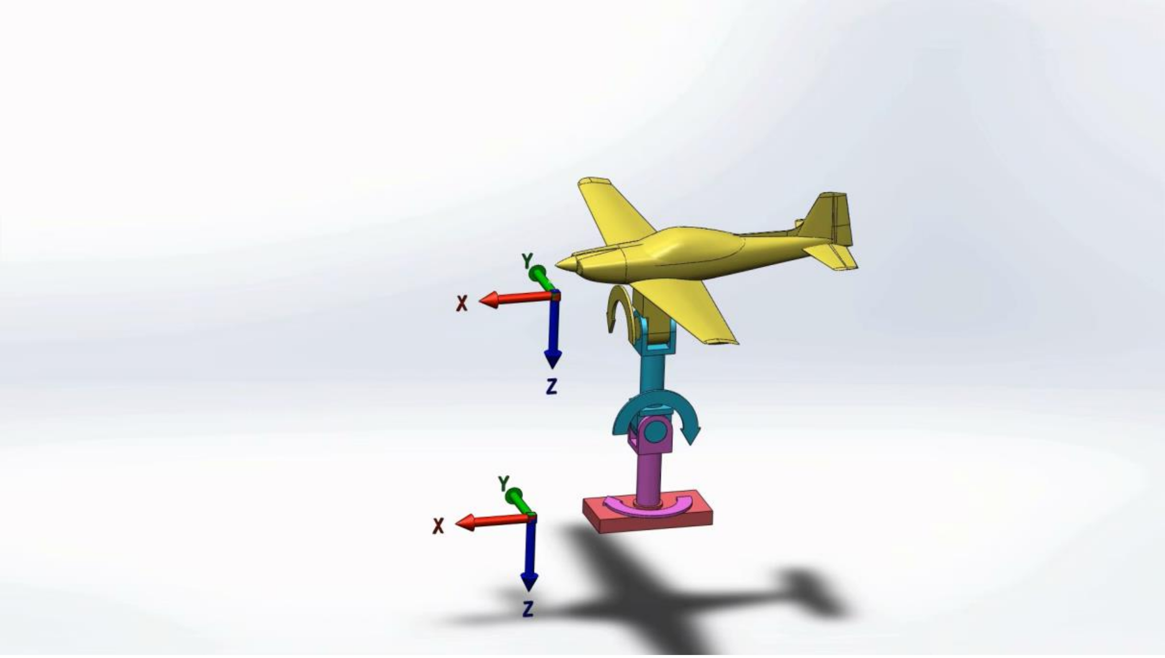
2.4.3 姿态的固定角表示

视频展示：按腰-肩-肘的顺序旋转



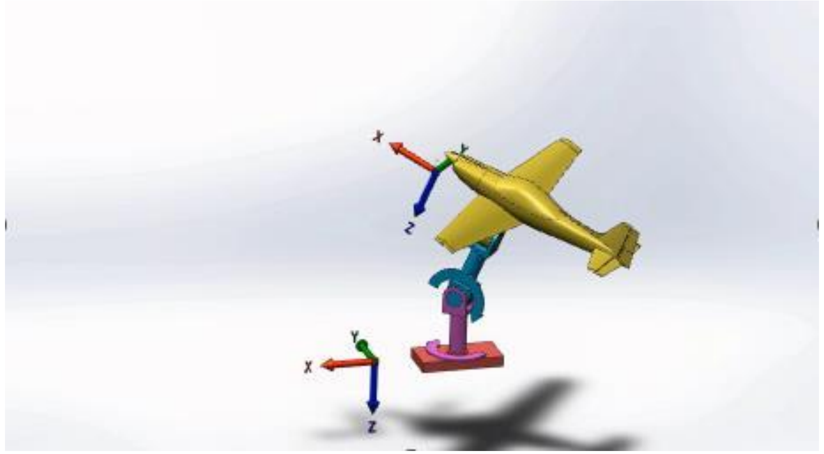
绕联体坐标系坐标轴旋转

视频展示：按肘－肩-腰的顺序旋转



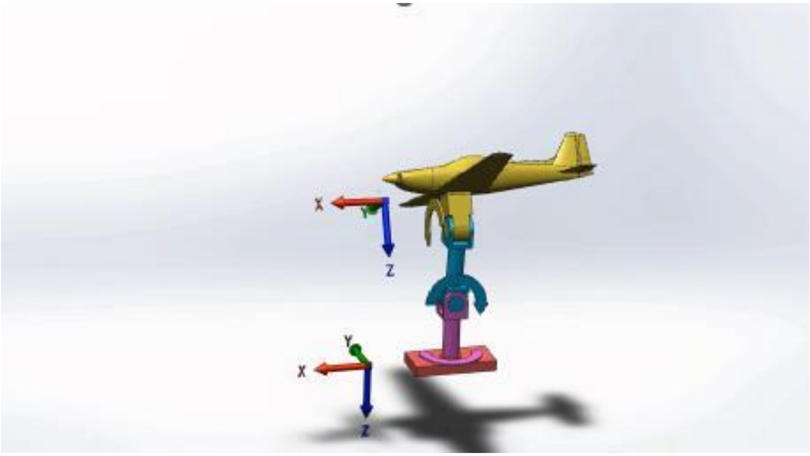
绕基础坐标系坐标轴转

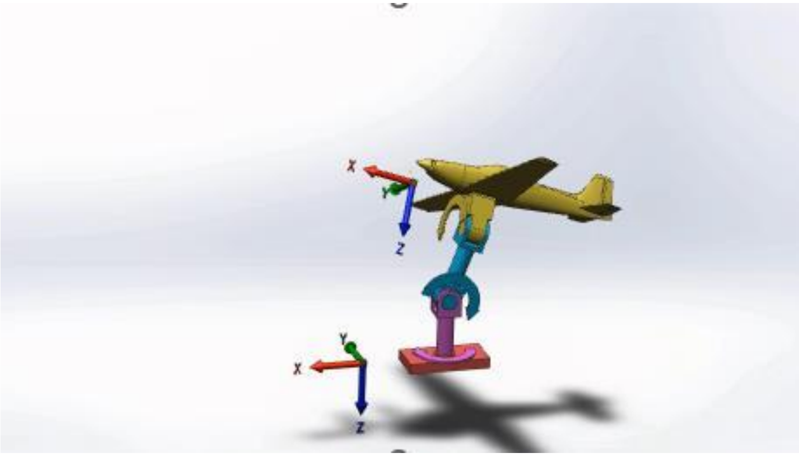
2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

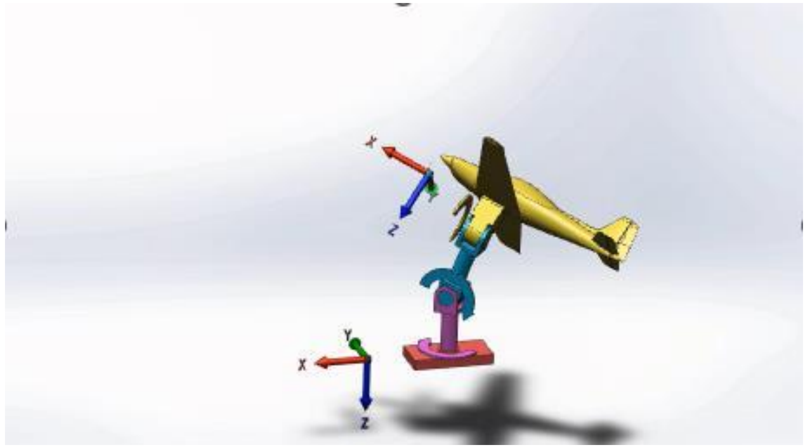


1. 绕联体坐标系Z轴转
2. 绕联体坐标系Y轴转
3. 绕联体坐标系X轴转

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

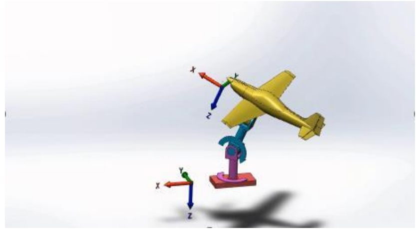






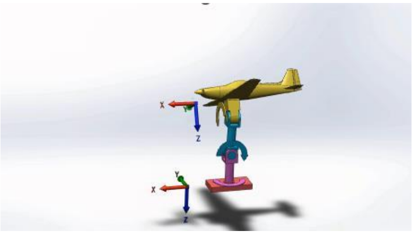
1. 绕基础坐标系X轴转
2. 绕基础坐标系Y轴转
3. 绕基础坐标系Z轴转

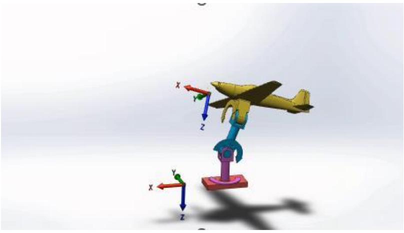
2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

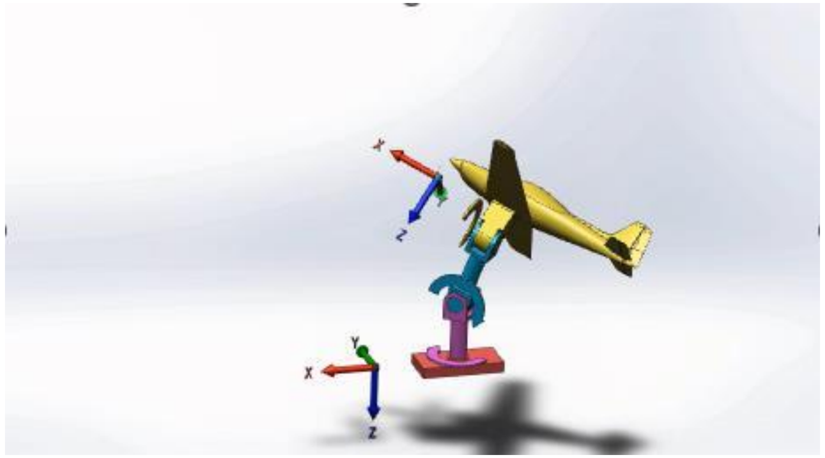


1. 绕联体坐标系Z轴转
2. 绕联体坐标系Y轴转
3. 绕联体坐标系X轴转

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$







1. 绕基础坐标系X轴转
2. 绕基础坐标系Y轴转
3. 绕基础坐标系Z轴转

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

x-y-z固定角：飞机如何从基准姿态旋转为目标姿态？

第1步：$\{B\}$ 绕$\hat{\boldsymbol{X}}_A$ 旋转γ 角，旋转后 ${}^A_B\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_x(\gamma)$

第2步：$\{B\}$ 绕$\hat{\boldsymbol{Y}}_A$ 旋转β 角，旋转后 ${}^A_B\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)$

第3步：$\{B\}$ 绕$\hat{\boldsymbol{Z}}_A$ 旋转α 角，旋转后 ${}^A_B\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma)$

$$\boldsymbol{R}_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix}$$

任何$\boldsymbol{R} \in \mathrm{SO}(3)$可用$\boldsymbol{R}_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha)$ 表示出来

任何$\boldsymbol{R}_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) \in \mathrm{SO}(3)$

三次绕固定轴旋转的最终姿态和以相反顺序三次绕运动坐标轴旋转的最终姿态相同

同理，还存在z-y-x固定角、 y-z-x固定角、 z-x-y固定角、 x-z-y固定角和y-x-z固定角、 z-y-z固定角、 x-y-x固定角、 x-z-x固定角、 y-x-y固定角、 y-z-y固定角和z-x-z固定角

有12种固定角表示法（6种对称型、6种非对称型）

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

教材附录A罗列了24种角坐标系的旋转矩阵定义，即12种欧拉角表示法和12种固定角表示法

根据所研究问题的具体特点，选择1个合适的欧拉角或固定角表示法，往往可以给姿态处理带来方便

任何姿态都可由3个基本旋转操作的相乘来表示，如：$_B^A\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma)$

矩阵乘法不满足交换律，如：$\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma)\neq\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_x(\gamma)$

欧拉角表示法与固定角表示法的对偶性源自操作顺序

从左到右的顺序（右乘）：先操作$\boldsymbol{R}_z(\alpha)$，再操作$\boldsymbol{R}_y(\beta)$，最后操作$\boldsymbol{R}_x(\gamma)$

则$_B^A\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma)$由$z$-$y$-$x$欧拉角表示，操作是相对于联体坐标系的

从右到左的顺序（左乘）：先操作$\boldsymbol{R}_x(\gamma)$，再操作$\boldsymbol{R}_y(\beta)$，最后操作$\boldsymbol{R}_z(\alpha)$

则$_B^A\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma)$由$x$-$y$-$z$固定角表示，操作是相对于固定坐标系（基础坐标系）的

右乘联体左乘基

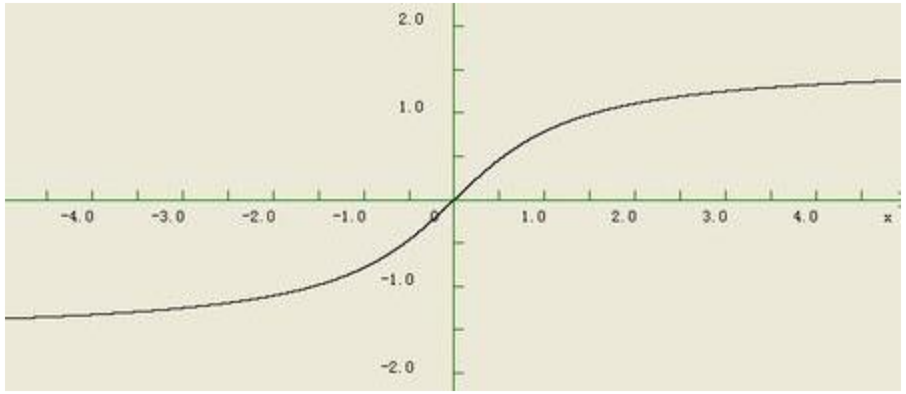
2.4.4 使用欧拉角表示和固定角表示要注意的问题

两种反正切函数

$\theta = \arctan(x)$

定义域：R

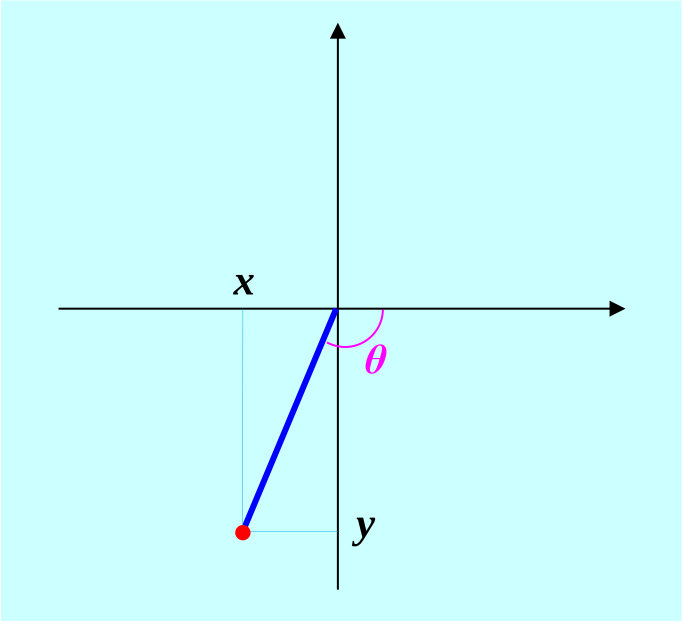
值域:$(-\pi/2, \pi/2)$



$\theta = \arctan2(y, x)$

定义域：$R^2 \backslash (0,0)$

值域:$(-\pi, \pi]$



2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

$$\mathbf{R}_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

已知$\boldsymbol{R}\in \mathrm{SO}(3)$，求$\alpha,\beta,\gamma\in(-\pi,\pi]$使得$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma)$

命题：$\boldsymbol{R}_z(\pm\pi+\alpha)\boldsymbol{R}_y(\pm\pi-\beta)\boldsymbol{R}_x(\pm\pi+\gamma)=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma)$

证明：$\mathbf{R}_z(\pm\pi+\alpha)\mathbf{R}_y(\pm\pi-\beta)\mathbf{R}_x(\pm\pi+\gamma)\ =$

$$\mathbf{R}_z(\alpha)\begin{pmatrix}\cos(\pm\pi) & -\sin(\pm\pi) & 0\\ \sin(\pm\pi) & \cos(\pm\pi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\pm\pi) & 0 & \sin(\pm\pi)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\pm\pi) & 0 & \cos(\pm\pi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\pm\pi) & -\sin(\pm\pi)\\ 0 & \sin(\pm\pi) & \cos(\pm\pi)\end{pmatrix}\mathbf{R}_x(\gamma)$$

$$=\mathbf{R}_z(\alpha)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{R}_x(\gamma)$$

$$=\mathbf{R}_z(\alpha)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{R}_x(\gamma)$$

$$=\mathbf{R}_z(\alpha)\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & -1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & -\cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{R}_x(\gamma)$$

$$=\mathbf{R}_z(\alpha)\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}\mathbf{R}_x(\gamma)$$

$$=\mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_x(\gamma)$$

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

命题： $\boldsymbol{R}_z(\pm\pi+\alpha)\boldsymbol{R}_y(\pm\pi-\beta)\boldsymbol{R}_x(\pm\pi+\gamma)=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma)$

记集合$\mathbb{Q}=\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$

令函数$f:\mathbb{Q}\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], f(\beta)=\begin{cases}-\pi-\beta, & \text{when } \beta\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\\ \pi-\beta, & \text{when } \beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$

$$g:(-\pi,\pi]\to(-\pi,\pi], g(\alpha)=\begin{cases}\pi+\alpha, & \text{when } \alpha\in(-\pi,0]\\ -\pi+\alpha, & \text{when } \alpha\in(0,\pi]\end{cases}$$

命题：对于任何$(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times\mathbb{Q}\times(-\pi,\pi]$，有

$$\mathbf{R}_z(g(\alpha))\mathbf{R}_y(f(\beta))\mathbf{R}_x(g(\gamma))=\mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_x(\gamma)$$

且$(g(\alpha),f(\beta),g(\gamma))\in(-\pi,\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times(-\pi,\pi]$

一个姿态若能被一组俯仰角绝对值大于90° 的z-y-x欧拉角或x-y-z固定角描述，那么也能被另一组俯仰角绝对值不大于90° 的z-y-x欧拉角或x-y-z固定角描述

因此可规定 $(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times(-\pi,\pi]$

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

已知$\boldsymbol{R}\in SO(3)$，求$(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times(-\pi,\pi]$使得$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\boldsymbol{R}_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma\\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma\end{pmatrix}$$

$\cos\beta\geq 0$ $\quad\cos\beta=\sqrt{r_{32}^2+r_{33}^2}$ $\quad\beta=\operatorname{arctan2}\left(-r_{31},\sqrt{r_{32}^2+r_{33}^2}\right)$

若$\cos\beta>0$ $\quad\alpha=\operatorname{arctan2}(r_{21},r_{11})$ $\quad\gamma=\operatorname{arctan2}(r_{32},r_{33})$

若$\cos\beta=0$:

$$\beta=\frac{\pi}{2}\text{时}\quad\begin{pmatrix}0 & r_{12} & r_{13}\\ 0 & r_{22} & r_{23}\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\ 0 & \sin\alpha\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\sin(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma)\\ 0 & \cos(\alpha-\gamma) & \sin(\alpha-\gamma)\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

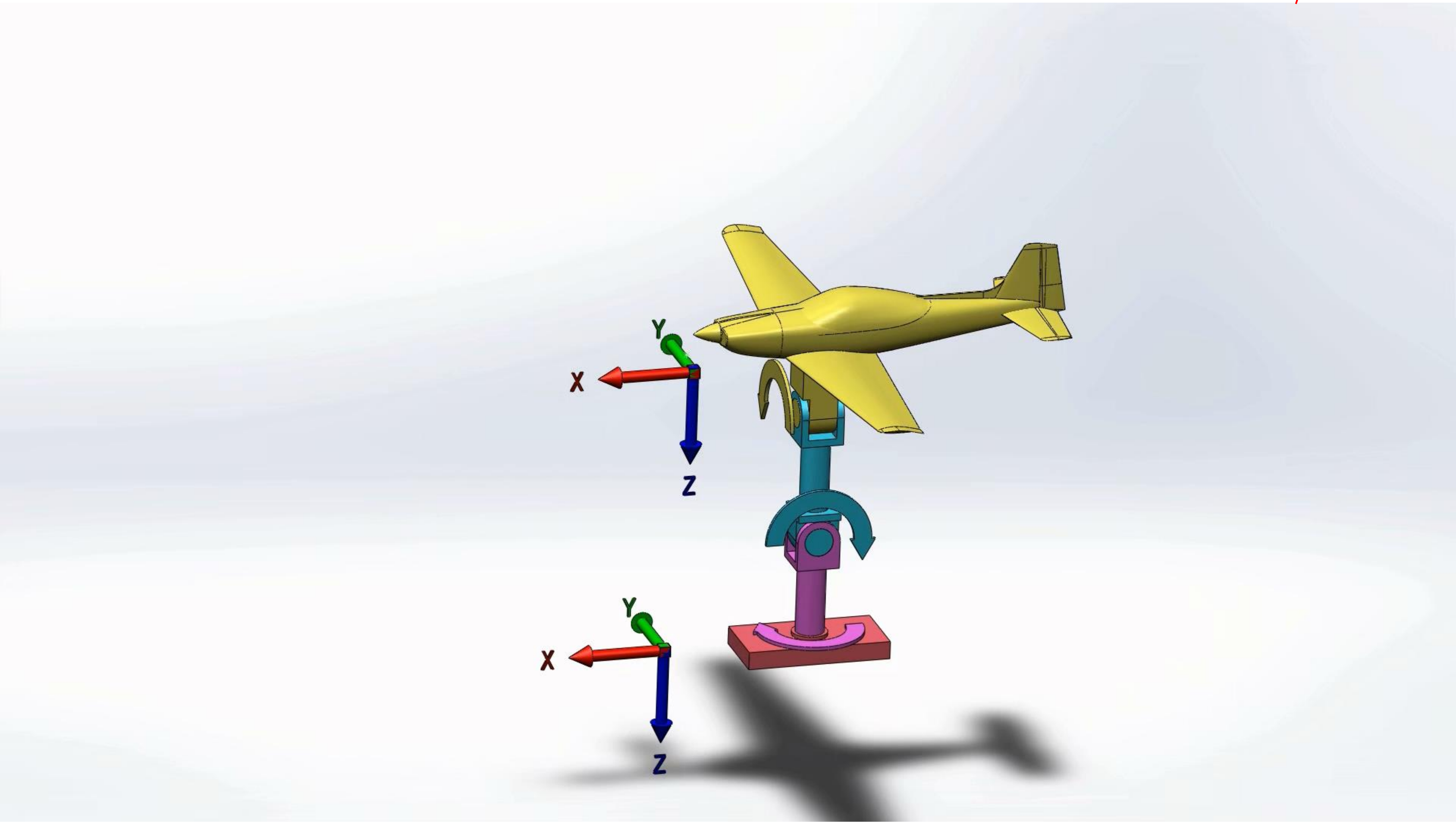
只能得到一个关于α与γ之差的结果 $\alpha-\gamma=\operatorname{arctan2}(r_{23},r_{22})$

对应这种姿态的z-y-x欧拉角或x-y-z固定角不唯一

$\beta=-\frac{\pi}{2}$时 $\quad\alpha+\gamma=\operatorname{arctan2}(-r_{23},r_{22})$

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

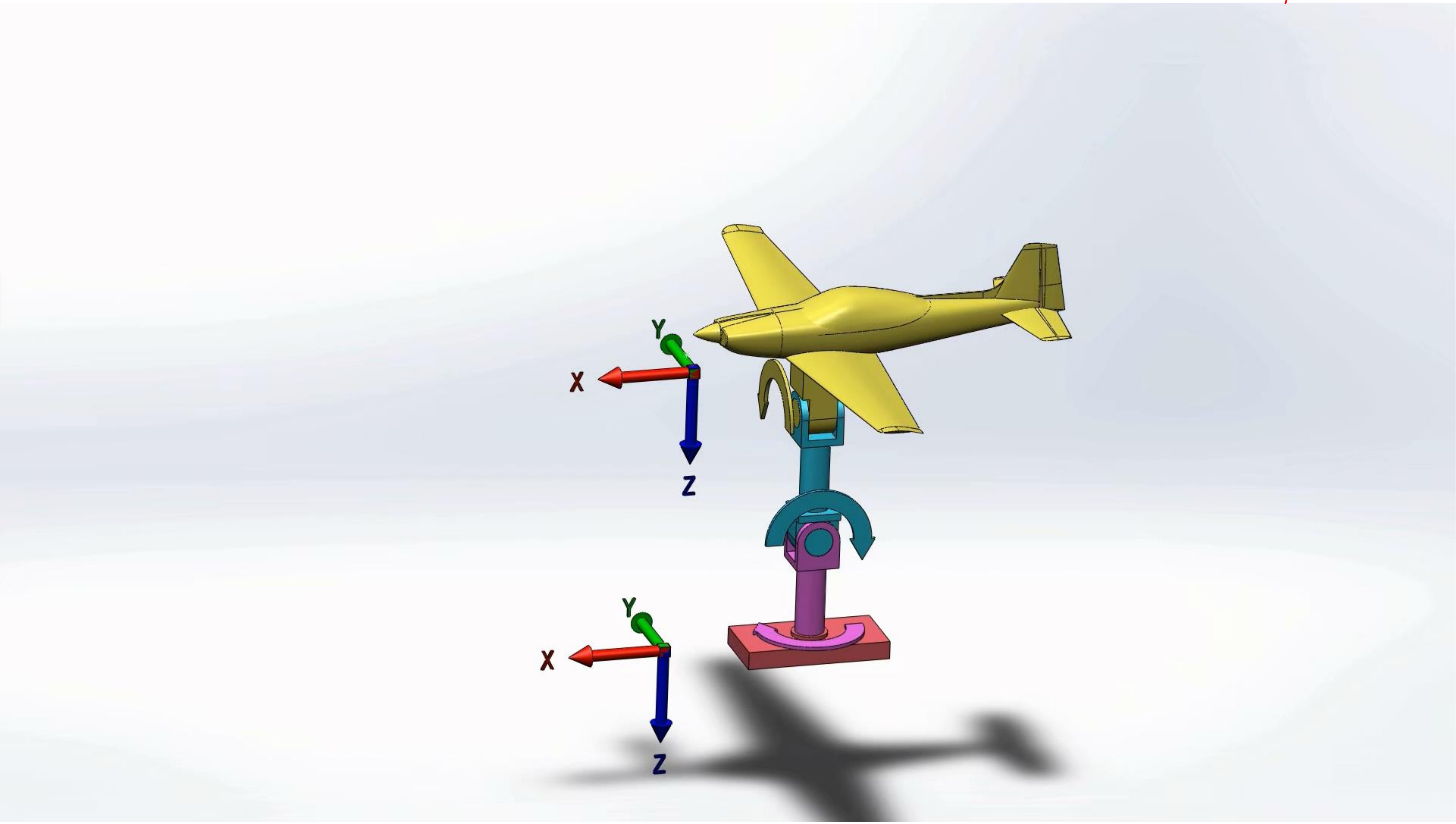
视频展示：肩关节旋转$-\pi/2$



某些情形下，同一姿态可以用无穷组欧拉角（固定角）表示

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

视频展示：肩关节旋转 $\pi/2$



某些情形下，同一姿态可以用无穷组欧拉角（固定角）表示

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

其他非对称型欧拉角和非对称型固定角

类似可证

$$\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_x(\beta)\boldsymbol{R}_y(\gamma),\boldsymbol{R}_y(\alpha)\boldsymbol{R}_x(\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma),\boldsymbol{R}_y(\alpha)\boldsymbol{R}_z(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma),$$

$$\boldsymbol{R}_x(\alpha)\boldsymbol{R}_z(\beta)\boldsymbol{R}_y(\gamma),\boldsymbol{R}_x(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma)$$

的β角度范围均可限为$[-\pi/2, \pi/2]$；

当 $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ 时，类似可得求取唯一欧拉角或固定角的公式；

若β等于$-\pi/2$或 $\pi/2$，有无穷组欧拉角解和固定角解，只能确定$\alpha+\gamma$或$\alpha-\gamma$的值，相应的公式可类似导出

2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

对称型欧拉角和对称型固定角

类似可证

$$\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_x(\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma), \boldsymbol{R}_y(\alpha)\boldsymbol{R}_x(\beta)\boldsymbol{R}_y(\gamma), \boldsymbol{R}_y(\alpha)\boldsymbol{R}_z(\beta)\boldsymbol{R}_y(\gamma),$$

$$\boldsymbol{R}_x(\alpha)\boldsymbol{R}_z(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma), \boldsymbol{R}_x(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\gamma), \boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma)$$

的β角度范围均可限为$[0, \pi]$；

当 $0<\beta<\pi$ 时，类似可得求取唯一欧拉角或固定角的公式；

若β等于0或π，有无穷组欧拉角解和固定角解，只能确定$\alpha+\gamma$或$\alpha-\gamma$的值，相应的公式可类似导出

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

2.5.1 姿态的等效轴角表示

飞机能否仅1次旋转从基准姿态运动到任意姿态?

定点转动：在三维空间里，运动刚体的内部或外延部分至少有一点固定不动，称此运动为定点转动

欧拉旋转定理：若刚体从初姿态作任意定点转动后呈终姿态，则必可找到一个过该点的轴$\boldsymbol{K}$及角度θ，刚体从初姿态绕$\boldsymbol{K}$作定轴转动θ后呈终姿态

以单位向量${}^{A}\boldsymbol{K}=(k_x\ \ k_y\ \ k_z)^{\mathrm{T}}$表示旋转轴，记旋转角度为$\theta$

旋转前$\{B\}$与$\{A\}$重合，即${}_{B(0)}^{\ \ A}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$，求$\{B\}$绕${}^{A}\boldsymbol{K}$旋转$\theta$后的${}_{B(1)}^{\ \ A}\boldsymbol{R}$

即分别求 ${}^{A}\boldsymbol{X}_{B(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, {}^{A}\boldsymbol{Y}_{B(0)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, {}^{A}\boldsymbol{Z}_{B(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 绕${}^{A}\boldsymbol{K}$旋转θ后所得到的${}^{A}\boldsymbol{X}_{B(1)}$, ${}^{A}\boldsymbol{Y}_{B(1)}$, ${}^{A}\boldsymbol{Z}_{B(1)}$

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

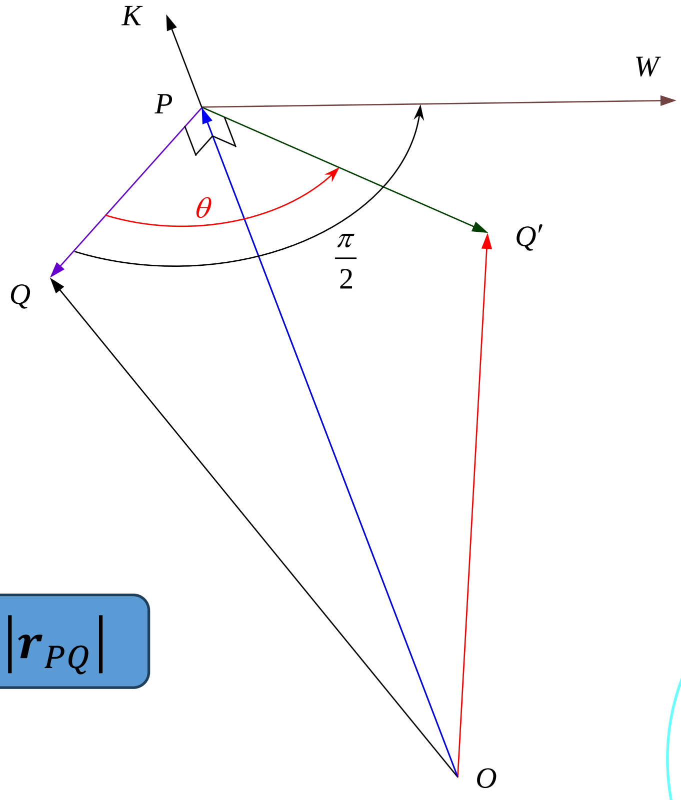
向量 $\boldsymbol{r}_{OQ}$ 绕单位向量 $\boldsymbol{r}_{OK}$ 旋转

$\boldsymbol{r}_{OQ}$ 向 $\boldsymbol{r}_{OK}$ 作投影，得投影向量 $\boldsymbol{r}_{OP}=(\boldsymbol{r}_{OQ}\cdot\boldsymbol{r}_{OK})\boldsymbol{r}_{OK}$

则 $\boldsymbol{r}_{PQ}=\boldsymbol{r}_{OQ}-\boldsymbol{r}_{OP}$

将直角三角形*OPQ*绕 $\boldsymbol{r}_{OK}$ 旋转θ，得到直角三角形*OPQ’*

$\boldsymbol{r}_{OQ'}$即为旋转后的$\boldsymbol{r}_{OQ}$

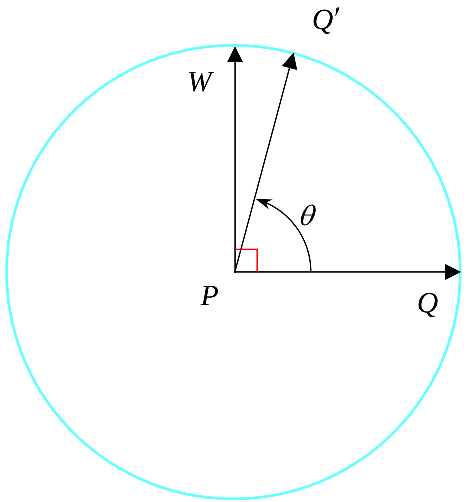


为了求得 $\boldsymbol{r}_{OQ'}$ ，构造向量 $\boldsymbol{r}_{PW}=\boldsymbol{r}_{OK}\times\boldsymbol{r}_{PQ}$

$$\boldsymbol{r}_{PW}\perp\boldsymbol{r}_{OK},\boldsymbol{r}_{PW}\perp\boldsymbol{r}_{PQ},|\boldsymbol{r}_{PW}|=|\boldsymbol{r}_{OK}||\boldsymbol{r}_{PQ}|\sin\frac{\pi}{2}=|\boldsymbol{r}_{PQ}|$$

$|\boldsymbol{r}_{PW}|=|\boldsymbol{r}_{PQ}|$

将 $\boldsymbol{r}_{PQ}$ 绕 $\boldsymbol{r}_{OK}$ 旋转90° ，即得到 $\boldsymbol{r}_{PW}$



显然，点*P,Q,W,Q’*在同一平面上

在该平面上，以点*P*为圆心，以$|\boldsymbol{r}_{PQ}|$为半径画圆，点*Q,W,Q’*在都在此圆上

且 $\boldsymbol{r}_{PQ'}=\boldsymbol{r}_{PQ}\cos\theta+\boldsymbol{r}_{PW}\sin\theta$

于是 $\boldsymbol{r}_{OQ'}=\boldsymbol{r}_{OP}+\boldsymbol{r}_{PQ'}=\boldsymbol{r}_{OP}+(\boldsymbol{r}_{OQ}-\boldsymbol{r}_{OP})\cos\theta+(\boldsymbol{r}_{OK}\times\boldsymbol{r}_{OQ})\sin\theta-(\boldsymbol{r}_{OK}\times\boldsymbol{r}_{OP})\sin\theta$

罗德里格斯公式

$=\boldsymbol{r}_{OQ}\cos\theta+(\boldsymbol{r}_{OQ}\cdot\boldsymbol{r}_{OK})\boldsymbol{r}_{OK}(1-\cos\theta)+(\boldsymbol{r}_{OK}\times\boldsymbol{r}_{OQ})\sin\theta$

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

$$\boldsymbol{r}_{OQ}\cos\theta + (\boldsymbol{r}_{OQ}\cdot\boldsymbol{r}_{OK})\boldsymbol{r}_{OK}(1-\cos\theta) + (\boldsymbol{r}_{OK}\times\boldsymbol{r}_{OQ})\sin\theta$$

$${}^{A}\boldsymbol{X}_{B(1)} = {}^{A}\boldsymbol{X}_{B(0)}\cos\theta + ({}^{A}\boldsymbol{X}_{B(0)}\cdot{}^{A}\boldsymbol{K})\,{}^{A}\boldsymbol{K}(1-\cos\theta) + ({}^{A}\boldsymbol{K}\times{}^{A}\boldsymbol{X}_{B(0)})\sin\theta$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k_x^2\\k_xk_y\\k_xk_z\end{pmatrix}(1-\cos\theta) + \begin{pmatrix}0\\k_z\\-k_y\end{pmatrix}\sin\theta = \begin{pmatrix}k_x^2v\theta+c\theta\\k_xk_yv\theta+k_zs\theta\\k_xk_zv\theta-k_ys\theta\end{pmatrix}$$

$${}^{A}\boldsymbol{X}_{B(0)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ {}^{A}\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{pmatrix}$$

式中， $v\theta = 1-\cos\theta, c\theta=\cos\theta, s\theta=\sin\theta$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}k_x^2v\theta+c\theta\\k_xk_yv\theta+k_zs\theta\\k_xk_zv\theta-k_ys\theta\end{pmatrix}$$

类似可得：

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}k_xk_yv\theta-k_zs\theta\\k_y^2v\theta+c\theta\\k_yk_zv\theta+k_xs\theta\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}k_xk_zv\theta+k_ys\theta\\k_yk_zv\theta-k_xs\theta\\k_z^2v\theta+c\theta\end{pmatrix}$$

那么

$${}_{B(0)}^{\ \ A}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}k_x^2v\theta+c\theta & k_xk_yv\theta-k_zs\theta & k_xk_zv\theta+k_ys\theta\\k_xk_yv\theta+k_zs\theta & k_y^2v\theta+c\theta & k_yk_zv\theta-k_xs\theta\\k_xk_zv\theta-k_ys\theta & k_yk_zv\theta+k_xs\theta & k_z^2v\theta+c\theta\end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_K(\theta)$$

上式以满足1个约束 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=1$的4个变量k_x, k_y, k_z, θ描述了姿态

这种描述方式称为等效轴角描述，简记上式为$\boldsymbol{R}_K(\theta)$

已知$\boldsymbol{R}\in \mathrm{SO}(3)$，求单位向量$\begin{pmatrix} k_x & k_y & k_z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$和旋转角$\theta \in (-\pi, \pi]$使得$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_K(\theta)$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{pmatrix} \qquad v\theta = 1 - c\theta$$

不难理解　$\boldsymbol{R}_K(\theta)=\boldsymbol{R}_{-K}(-\theta)$

因此规定　$\theta \in [0, \pi]$

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right)$$

若$\theta \in (0, \pi)$，

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{pmatrix} \qquad \text{唯一解}$$

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{pmatrix}$$

$v\theta = 1 - c\theta$

若 $\theta=\pi$,

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2k_x^2-1 & 2k_x k_y & 2k_x k_z \\ 2k_x k_y & 2k_y^2-1 & 2k_y k_z \\ 2k_x k_z & 2k_y k_z & 2k_z^2-1 \end{pmatrix}$$

由 $r_{11}+r_{22}+r_{33}=(2k_x^2-1)+(2k_y^2-1)+(2k_z^2-1)=-1$，知 r_{11}, r_{22}, r_{33} 不会同时等于–1

以 $r_{11}\neq -1$ 为例, $k_x=\pm\sqrt{(r_{11}+1)/2}$ 进而 $\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} \sqrt{(r_{11}+1)/2} \\ r_{12}\big/\sqrt{2(r_{11}+1)} \\ r_{13}\big/\sqrt{2(r_{11}+1)} \end{pmatrix}$ 两组解

若 $\theta=0$,

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

任何单位向量 $\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ 均可 无穷组解

2.5.2 旋转矩阵与坐标系旋转

旋转前$\{B\}$与$\{A\}$不重合，即 ${}_B^A\boldsymbol{R}(0) \neq \boldsymbol{I}$ ，求$\{B\}$绕${}^A\boldsymbol{K}$旋转θ后的 ${}_B^A\boldsymbol{R}(1)$

另设1个坐标系$\{C\}$，$\{C\}$始终与$\{B\}$固连，旋转前$\{C\}$与$\{A\}$重合

则 ${}_B^C\boldsymbol{R}$ 始终等于 ${}_B^A\boldsymbol{R}(0)$，即 ${}_B^C\boldsymbol{R} = {}_B^A\boldsymbol{R}(0)$

旋转前的 ${}_C^A\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{I}$， 旋转后的 ${}_C^A\boldsymbol{R}(1) = \boldsymbol{R}_K(\theta)$

旋转后的 ${}_B^A\boldsymbol{R}(1) = {}_C^A\boldsymbol{R}(1)\,{}_B^C\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_K(\theta)\,{}_B^A\boldsymbol{R}(0)$

$$
{}_B^A\boldsymbol{R}(1) = \boldsymbol{R}_K(\theta)\,{}_B^A\boldsymbol{R}(0)
$$

左乘基

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

旋转前$\{B\}$与$\{A\}$不重合，即 ${}_B^A\boldsymbol{R}(0)\neq\boldsymbol{I}$，求$\{B\}$绕${}^B\boldsymbol{K}$旋转$\theta$后的 ${}_B^A\boldsymbol{R}(1)$

另设1个坐标系$\{C\}$，$\{C\}$始终与$\{A\}$固连，旋转前$\{B\}$与$\{C\}$重合

则 ${}_C^A\boldsymbol{R}$ 始终等于 ${}_B^A\boldsymbol{R}(0)$，即 ${}_C^A\boldsymbol{R}={}_B^A\boldsymbol{R}(0)$

${}^C\boldsymbol{K}$ 始终等于 ${}^B\boldsymbol{K}$，即 ${}^C\boldsymbol{K}={}^B\boldsymbol{K}$

旋转前的 ${}_B^C\boldsymbol{R}(0)=\boldsymbol{I}$，旋转后的 ${}_B^C\boldsymbol{R}(1)=\boldsymbol{R}_K(\theta)$

旋转后的 ${}_B^A\boldsymbol{R}(1)={}_C^A\boldsymbol{R}\,{}_B^C\boldsymbol{R}(1)={}_B^A\boldsymbol{R}(0)\boldsymbol{R}_K(\theta)$

$${}_B^A\boldsymbol{R}(1)={}_B^A\boldsymbol{R}(0)\boldsymbol{R}_K(\theta)$$

右乘联体左乘基

不仅适用于基本旋转矩阵，也适用于$\boldsymbol{R}_K(\theta)$

由欧拉旋转定理，也适用于SO(3)中的旋转矩阵

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

在参考系$\{A\}$中，某向量在初始时的描述为${}^{A}\boldsymbol{P}(0)$，该向量先绕单位向量${}^{A}\boldsymbol{K}_1$旋转θ_1，再绕单位向量${}^{A}\boldsymbol{K}_2$旋转θ_2，最后绕单位向量${}^{A}\boldsymbol{K}_3$旋转θ_3，求上述旋转后的${}^{A}\boldsymbol{P}(1)$

另设1个坐标系$\{B\}$，$\{B\}$始终与${}^{A}\boldsymbol{P}$固连，旋转前$\{B\}$与$\{A\}$重合

则 ${}^{B}\boldsymbol{P}$始终等于${}^{A}\boldsymbol{P}(0)$

旋转前的 ${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}(0)=\boldsymbol{I}$，旋转后的 ${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}(1)=\boldsymbol{R}_{K3}(\theta_3)\boldsymbol{R}_{K2}(\theta_2)\boldsymbol{R}_{K1}(\theta_1)\boldsymbol{I}$

旋转后, ${}^{A}\boldsymbol{P}(1)={}^{A}_{B}\boldsymbol{R}(1)\,{}^{B}\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{R}_{K3}(\theta_3)\boldsymbol{R}_{K2}(\theta_2)\boldsymbol{R}_{K1}(\theta_1)\,{}^{A}\boldsymbol{P}(0)$

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

已知$\{A\}$和$\{B\}$在初始时的${}_B^A\boldsymbol{R}(0)$，已知与$\{B\}$固连的向量${}^B\boldsymbol{P}$，$\{B\}$先绕单位向量${}^A\boldsymbol{K}_1$旋转θ_1，再绕单位向量${}^B\boldsymbol{K}_2$旋转θ_2，最后绕单位向量${}^A\boldsymbol{K}_3$旋转θ_3，求上述旋转后${}^B\boldsymbol{P}$在$\{A\}$中的描述

旋转后的 ${}_B^A\boldsymbol{R}(1)=\boldsymbol{R}_{K3}(\theta_3)\boldsymbol{R}_{K1}(\theta_1)\,{}_B^A\boldsymbol{R}(0)\boldsymbol{R}_{K2}(\theta_2)$

${}^A\boldsymbol{P}$旋转后变为 ${}^A\boldsymbol{P}={}_B^A\boldsymbol{R}(1)\,{}^B\boldsymbol{P}$

${}^A\boldsymbol{P}={}_B^A\boldsymbol{R}(1)\,{}^B\boldsymbol{P}$

2.5.3 齐次变换矩阵与坐标系的旋转、平移

右乘联体左乘基　　适用于SE(3)中的齐次变换矩阵吗？

已知 ${}_B^A\boldsymbol{T}(0)=\left(\begin{array}{ccc:c} & {}_B^A\boldsymbol{R}(0) & & {}^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$，将 $\boldsymbol{T}_P=\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{I} & & \boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ 左乘 ${}_B^A\boldsymbol{T}(0)$，得

$$
{}_B^A\boldsymbol{T}(1)=\boldsymbol{T}_P\,{}_B^A\boldsymbol{T}(0)=\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{I} & & \boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc:c} & {}_B^A\boldsymbol{R}(0) & & {}^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
=\left(\begin{array}{ccc:c} & {}_B^A\boldsymbol{R}(0) & & {}^A\boldsymbol{O}_B(0)+\boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

左乘$\boldsymbol{T}_P$：$\{B\}$的姿态不变，$\{B\}$的原点在$\{A\}$中平移$\boldsymbol{P}$

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

已知 $_B^A\boldsymbol{T}(0)=\left(\begin{array}{ccc:c} & _B^A\boldsymbol{R}(0) & & ^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$，将 $\boldsymbol{T}_P=\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{I} & & \boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ 右乘 $_B^A\boldsymbol{T}(0)$ ，得

$$_B^A\boldsymbol{T}(1)={}_B^A\boldsymbol{T}(0)\boldsymbol{T}_P=\left(\begin{array}{ccc:c} & _B^A\boldsymbol{R}(0) & & ^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{I} & & \boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:c} & _B^A\boldsymbol{R}(0) & & ^A\boldsymbol{O}_B(0)+{}_B^A\boldsymbol{R}(0)\boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

引入一个辅助坐标系$\{C\}$，该坐标系满足两个条件：一是$\{C\}$与$\{A\}$固连；二是初始时的$\{C\}$与$\{B\}$重合

$$_B^C\boldsymbol{T}(0)=\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{I} & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$_B^C\boldsymbol{T}(1)={}_A^C\boldsymbol{T}(1)\,{}_B^A\boldsymbol{T}(1)={}_A^C\boldsymbol{T}(0)\,{}_B^A\boldsymbol{T}(0)\boldsymbol{T}_P={}_B^C\boldsymbol{T}(0)\boldsymbol{T}_P=\boldsymbol{T}_P=\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{I} & & \boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

右乘$\boldsymbol{T}_P$：相对于初始的$\{B\}$，姿态不变，平移的方向和距离由$\boldsymbol{P}$表征

右乘联体左乘基

适用于$\boldsymbol{T}_P$

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

已知 $${}_B^A\boldsymbol{T}(0)=\left(\begin{array}{ccc:c} & {}_B^A\boldsymbol{R}(0) & & {}^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

将 $\boldsymbol{T}_K(\theta)=\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{R}_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ 右乘 ${}_B^A\boldsymbol{T}(0)$，得

$${}_B^A\boldsymbol{T}(1)={}_B^A\boldsymbol{T}(0)\boldsymbol{T}_K(\theta)=\left(\begin{array}{ccc:c} & {}_B^A\boldsymbol{R}(0) & & {}^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{R}_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:c} & {}_B^A\boldsymbol{R}(0)\boldsymbol{R}_K(\theta) & & {}^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

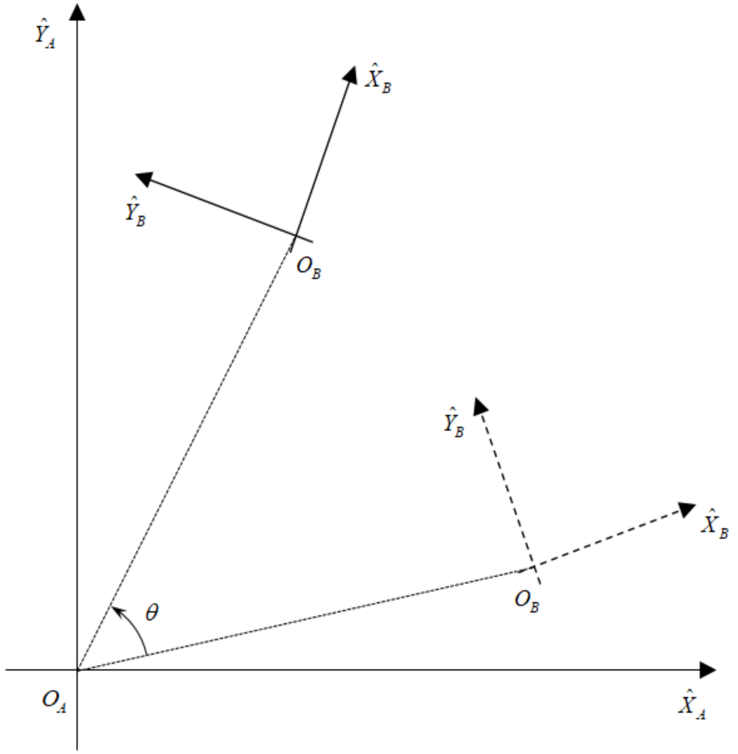
右乘$\boldsymbol{T}_K(\theta)$：$\{B\}$的原点不变，姿态绕${}^B\boldsymbol{K}$旋转θ

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

已知 ${}^A_B\boldsymbol{T}(0)=\left(\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B\boldsymbol{R}(0) & & {}^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$，将 $\boldsymbol{T}_K(\theta)=\left(\begin{array}{ccc|c} & \boldsymbol{R}_K(\theta) & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ 左乘 ${}^A_B\boldsymbol{T}(0)$，得

$$
{}^A_B\boldsymbol{T}(1)=\boldsymbol{T}_K(\theta)\,{}^A_B\boldsymbol{T}(0)=\left(\begin{array}{ccc|c} & \boldsymbol{R}_K(\theta) & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B\boldsymbol{R}(0) & & {}^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
$$

$$
=\left(\begin{array}{ccc|c} & \boldsymbol{R}_K(\theta)\,{}^A_B\boldsymbol{R}(0) & & \boldsymbol{R}_K(\theta)\,{}^A\boldsymbol{O}_B(0) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
$$



左乘$\boldsymbol{T}_K(\theta)$：姿态绕${}^A\boldsymbol{K}$旋转θ，$\{B\}$的原点在$\{A\}$中由 ${}^A\boldsymbol{O}_B(0)$ 平移到 $\boldsymbol{R}_K(\theta)\,{}^A\boldsymbol{O}_B(0)$

右乘联体左乘基　　适用于$\boldsymbol{T}_K(\theta)$

2.5 姿态的等效轴角表示和坐标系的旋转、平移变换

$$\text{齐次变换矩阵 } \boldsymbol{T} = \left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{R}_K(\theta) & & \boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{I} & & \boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{R}_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\neq \left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{R}_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{I} & & \boldsymbol{P} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{T}_1 {}_B^A\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{T}_{P1}\boldsymbol{T}_{K1}(\theta_1)\,{}_B^A\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}_{P2}\boldsymbol{T}_{K2}(\theta_2)$$

右乘联体左乘基　　适用于齐次变换矩阵

需要注意：
1）右乘是先平移、后旋转；
2）左乘是先旋转、后平移；
3）相对于基础坐标系的旋转（左乘旋转），可能会产生平移

Thanks !