第四章 整数规划

- 整数规划问题及数学模型
- 整数规划问题的特点与解法
  - 割平面法
  - 分枝定界法
- **0-1**型整数规划
  - 隐枚举法
  - 指派问题
- 应用举例

整数(线性)规划的一般形式

$$\max(\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, \cdots, m)$$

$\boldsymbol{x_j}$ 中部分或全部取整数

整数规划的分类

1. 纯整数规划：x_j 全部取整数的线性规划。

2. 混合整数规划：x_j 部分取整数的线性规划。

3. 0-1型整数规划：x_j 只能取**0**或**1**的线性规划。

整数变量的原因

1. 物理原因：人数

2. 建模原因：逻辑变量

例1：背包问题

背包可再装入8单位重量，10单位体积物品

物品	名称	重量	体积	价值
1	书	5	2	20
2	摄像机	3	1	30
3	枕头	1	4	10
4	休闲食品	2	3	18
5	衣服	4	5	15

例2数学模型

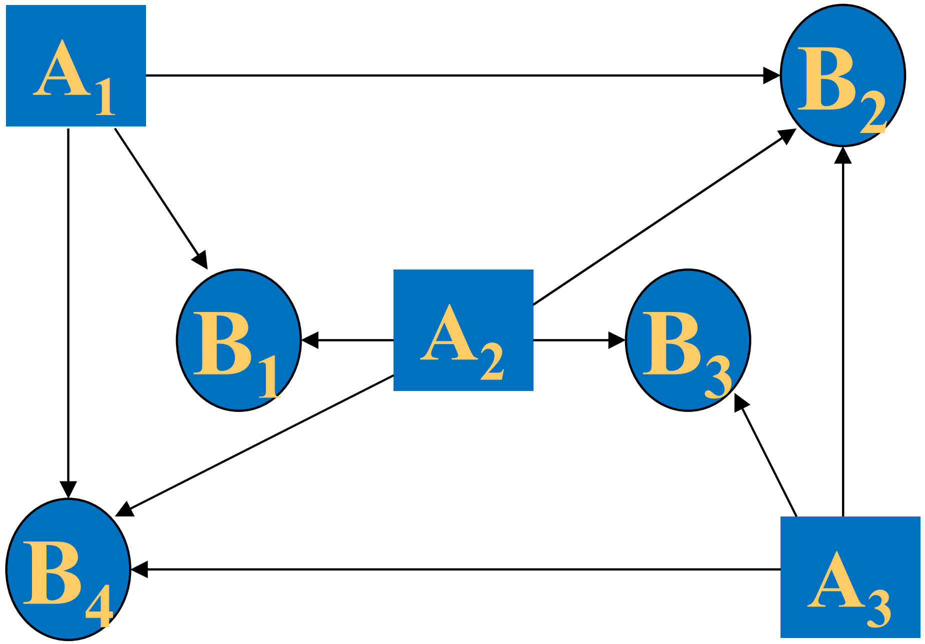
解：x_i为是否带第 i 种物品

$$\max z=20x_1+30x_2+10x_3+18x_4+15x_5$$

$$s.t.\quad \begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+4x_5 \le 8 \\ 2x_1+x_2+4x_3+3x_4+5x_5 \le 10 \end{cases}$$

x_i为$0, 1$

例2：选址问题



A_i: 可建仓库地点，容量 a_i ,投资费用 b_i ，建2个

B_j: 商店，需求 d_j $(j=1\ldots4)$

c_{ij}: 仓库 i 到商店 j 的单位运费

问：选择适当地点建仓库，在满足商店需求条件下，总费用最小。

$$\min z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{3}b_i y_i$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & y_1+y_2+y_3=2 \\
& x_{11}+x_{21}=d_1 \\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}=d_2 \\
& x_{23}+x_{33}=d_3 \\
& x_{14}+x_{24}+x_{34}=d_4 \\
& x_{11}+x_{12}+x_{14}\le a_1 y_1 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le a_2 y_2 \\
& x_{32}+x_{33}+x_{34}\le a_3 y_3 \\
& y_i=0\text{或}1,\quad x_{ij}\ge 0
\end{aligned}
$$

需求

供应

例3：互斥约束问题

货物	体积(米^3/箱)		重量(百公斤/箱)		利润(千元/箱)
甲	**5**	**6**	**2**	**3**	**20**
乙	**4**	**5**	**5**	**6**	**10**
运输限制	**24**	**45**	**13**	**10**	

火车、轮船

例3：原来的模型

解：设x_1 ，x_2为甲、乙两货物各托运箱数

$$\max Z = 20x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2 \le 24 \\ 2x_1+5X_2 \le 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1+4x_2 \le 45 \\ 2x_1+5x_2 \le 10 \end{cases}$$

x_1 , $x_2 \ge 0$　　　　x_1 , $x_2 \ge 0$

x_1 , x_2为整数　　　　x_1 , x_2为整数

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2 \le 24+M(1-y) \\ 2x_1+5x_2 \le 13+M(1-y) \end{cases}$$ 火车

$$\begin{cases} 6x_1+5x_2 \le 45+My \\ 3x_1+6x_2 \le 10+My \end{cases}$$ 轮船

$x_1, x_2 \ge 0$ 整数

y为0或1　　$M>0$（充分大）

$y=1$　:火车

$y=0$　:船

一般情况

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \le b_i \quad (i=1,\ldots,p)$$

互相排斥p个约束，只有q个起作用

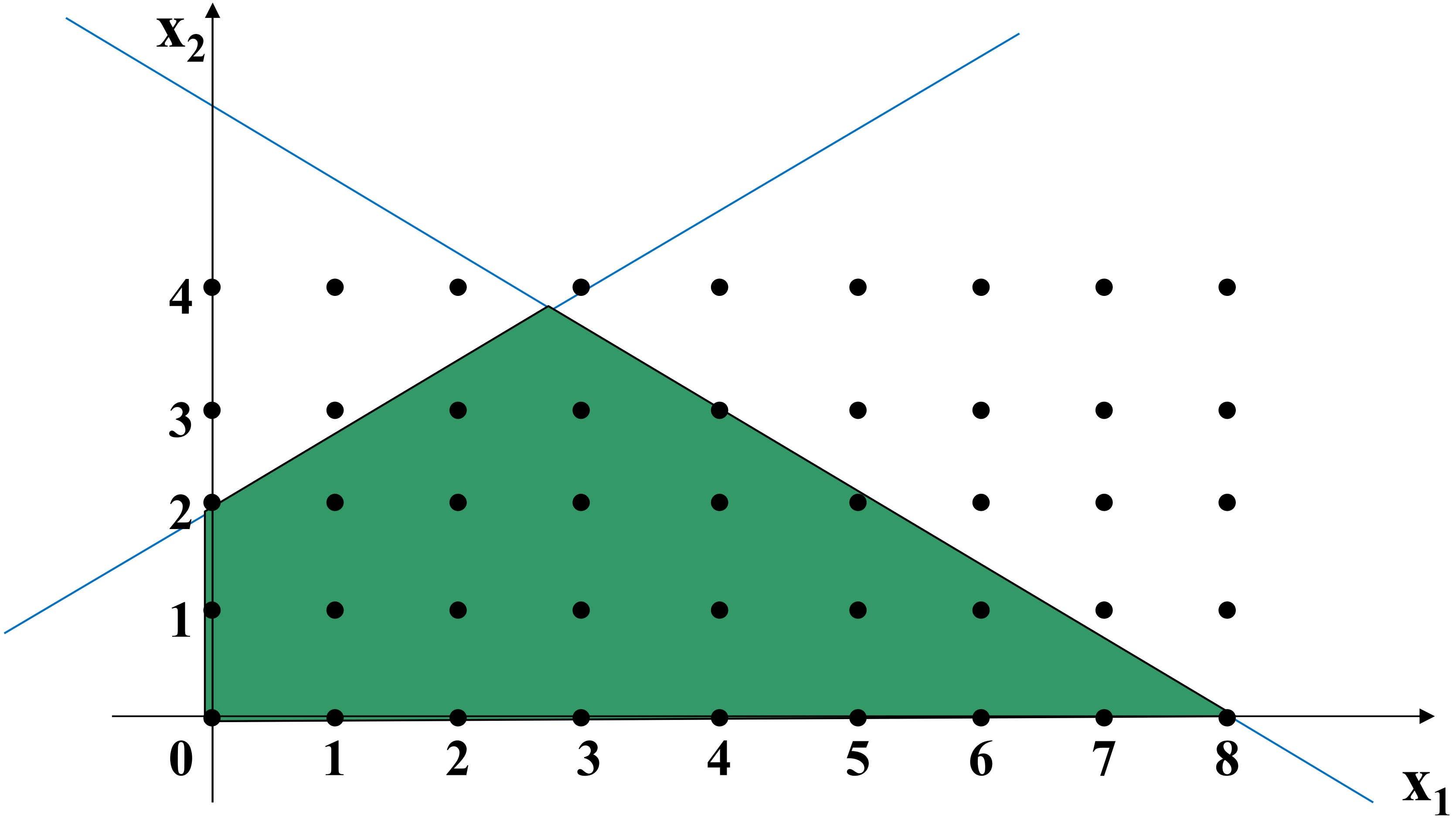
$$\begin{cases} a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \le b_i+y_iM \quad (i=1,\ldots,p) \\ y_1+\ldots+y_p=p-q \end{cases}$$

y_i为0或1　　　　M>0，充分大

第四章 整数规划

- 整数规划问题及数学模型
- 整数规划问题的特点与解法
  - 割平面法
  - 分枝定界法
- **0-1**型整数规划
  - 隐枚举法
  - 指派问题
- 应用举例

整数规划的解的特点



整数规划求解的直接思路

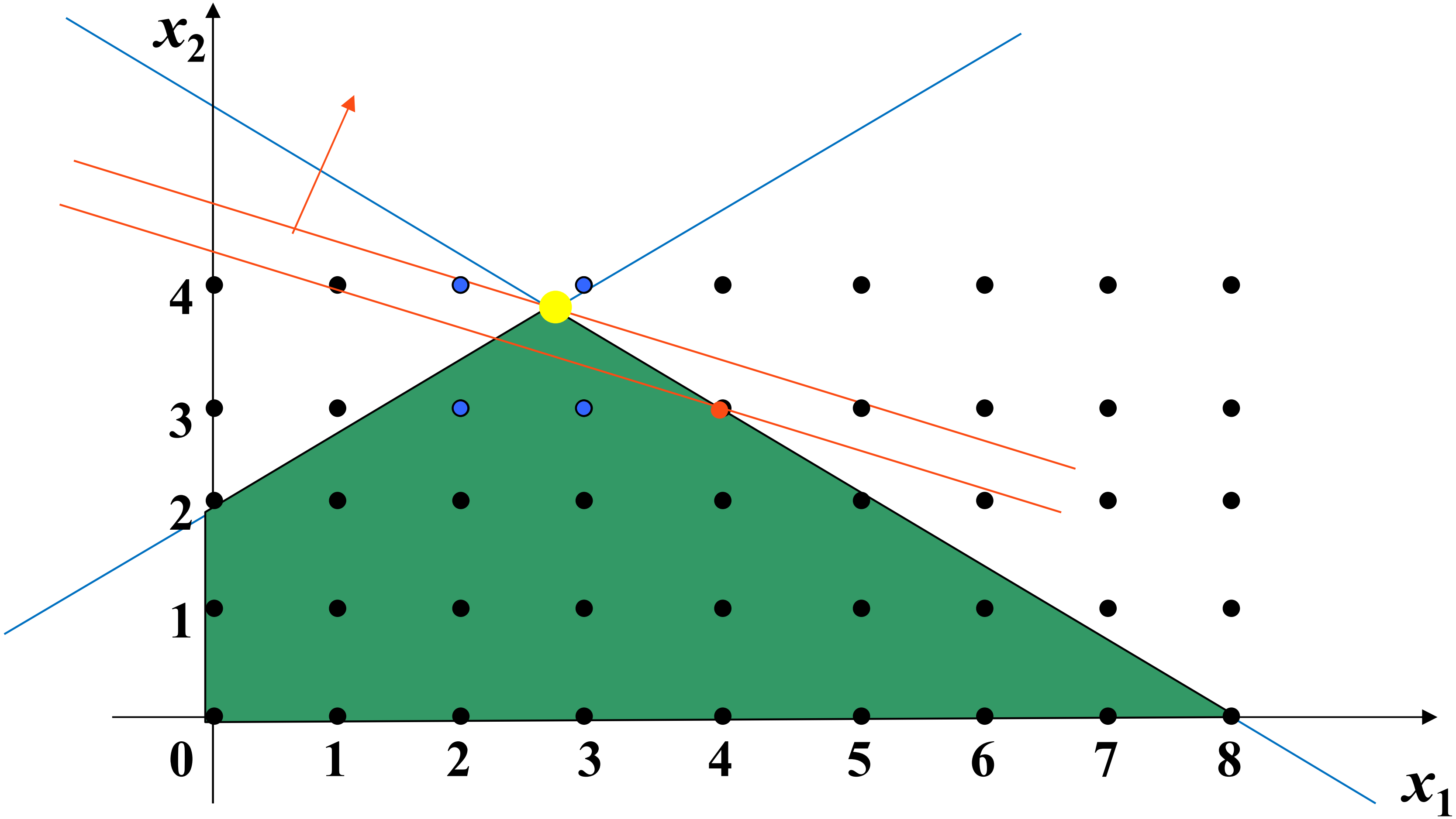
1. 穷举法：

枚举范围太大，**0-1**型问题有2^n种组合

2. 松弛法：

松弛问题：放松原规划问题的整数条件所得到的新规划问题。

整数规划的解的特点



整数规划的思路

思路：

1. 缩小枚举法的寻优范围。

2. 缩小松弛问题的寻优范围。

第四章 整数规划

- 整数规划问题及数学模型
- 整数规划问题的特点与解法
  - 割平面法
  - 分枝定界法
- **0-1**型整数规划
  - 隐枚举法
  - 指派问题
- 应用举例

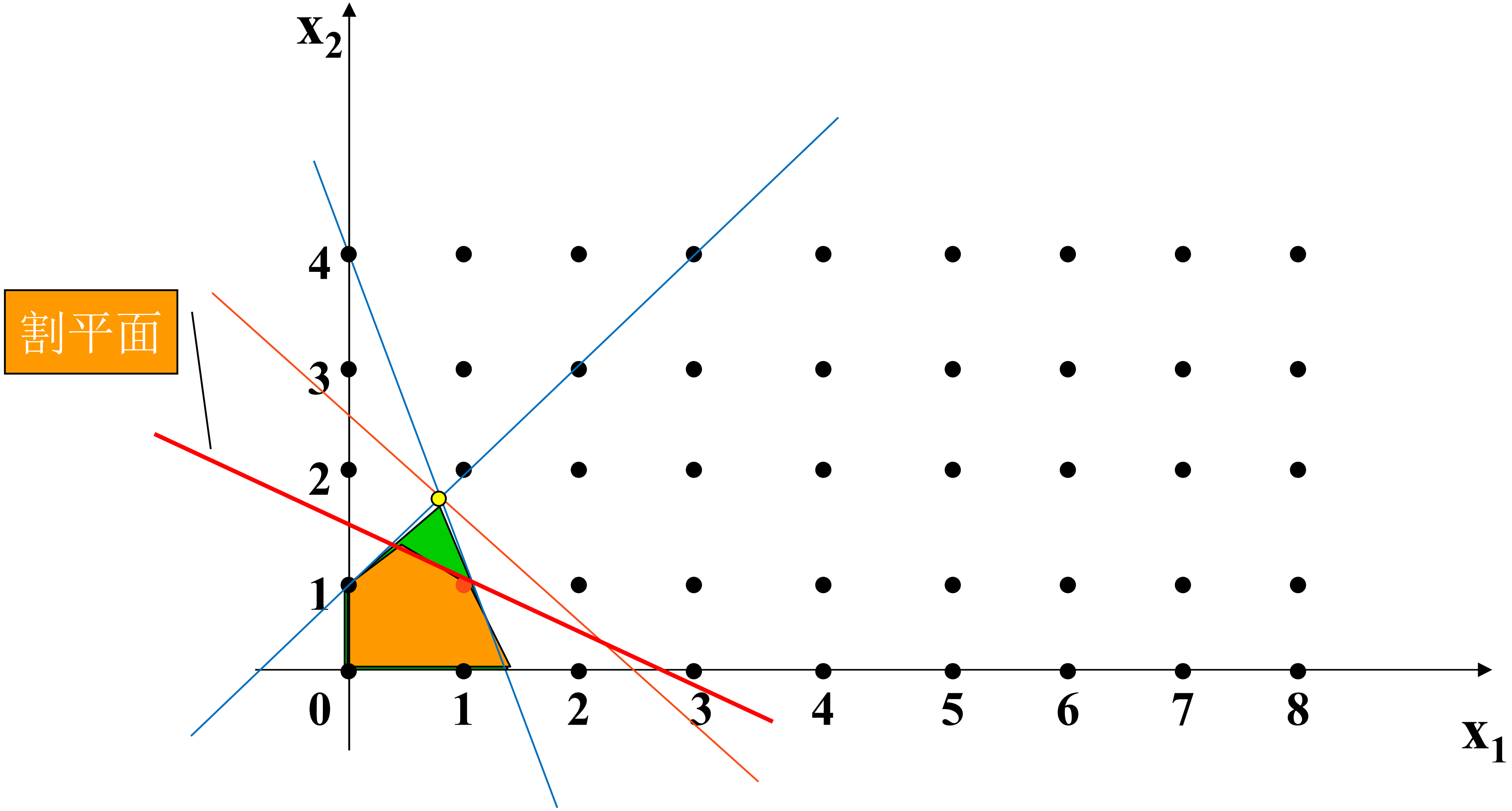
割平面法

- 思路：构造切割可行域问题的割平面，把整数最优解变为切割后松弛问题的顶点。

- 割平面的代数形式：有效不等式。

- 有效不等式：所有的整数可行解都满足的不等式

割平面思路图示



割平面法解题的标准形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$\boldsymbol{x_j}$ 、$\boldsymbol{a_{ij}}$、$\boldsymbol{b_i}$ 全部取整数

问题：上述假设是否具有一般性？

注意问题

注意：

当a_{ij}不是整数时，可乘以某一个倍数化为整数。

目的：

使所有的松弛变量、人工变量均为整数。

例4

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

$x_1,\ x_2$均为整数

对应的标准松弛问题

$$\max z = x_1 + x_2$$

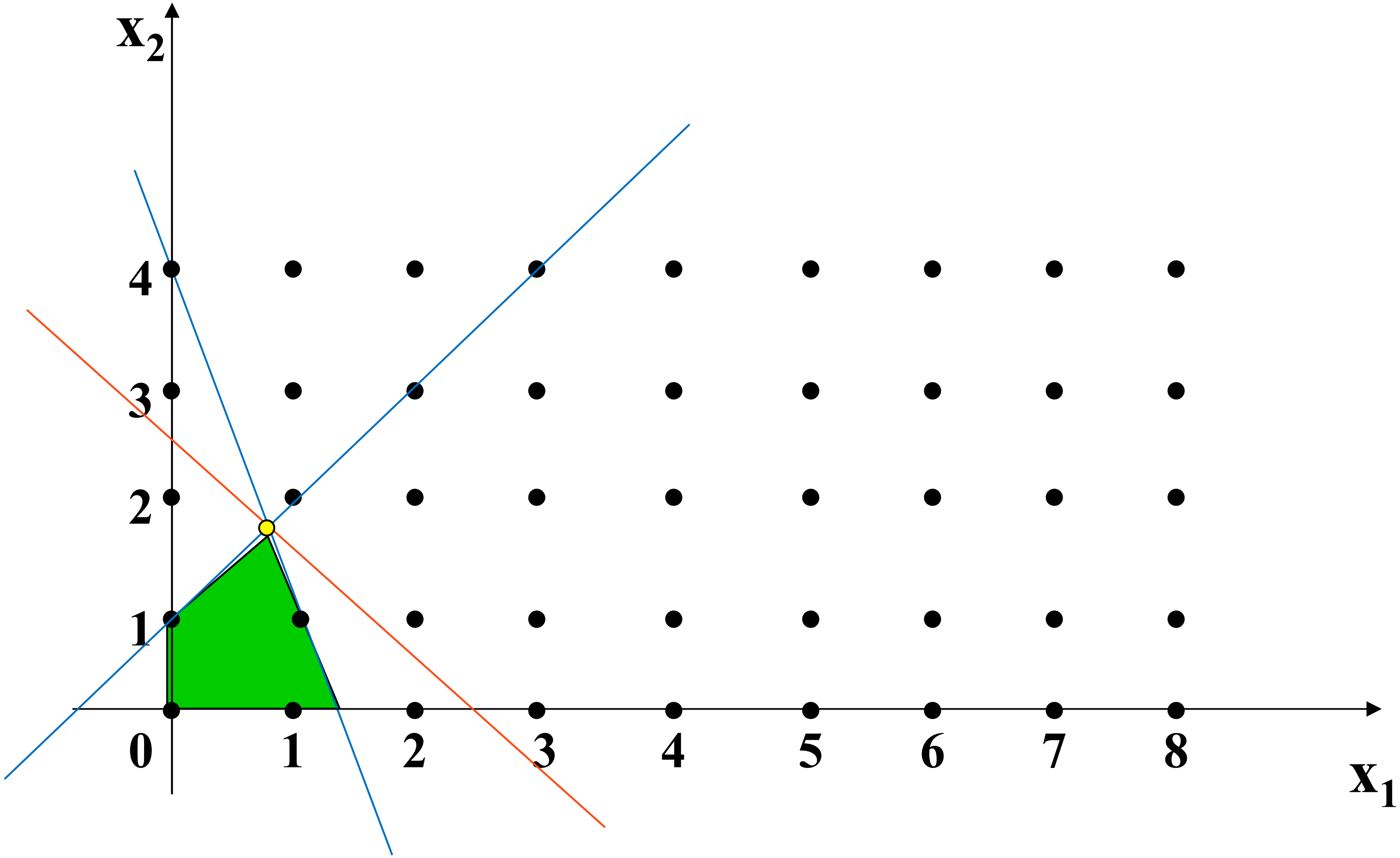
$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

最终单纯形表

			1	1	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
	σ_j		0	0	-1/2	-1/2

图示



割平面构造的原理

割平面的构造方法很多，

最简单的是利用解的整数特点，例如

如果$\mathbf{x \leq b \Rightarrow x \leq [b]}$

Gormory割平面的构造

例如，上例中，有：

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

将系数和常数项分解为一个整数和一个非负的真分数之和。即：

$$-\frac{1}{4} = -1 + \frac{3}{4}$$

割平面的构造例

将所有的真分数系数项移到左边，常数项和整数系数项移到右边，可以得到：

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right) \le 0$$

$$-\left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \right) \le -\frac{3}{4}$$

标准化

将割平面化作标准形式，加入单纯形表中，构成新的松弛问题1：

$$-\frac{3}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4+x_5=-\frac{3}{4}$$

松弛问题1

			1	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	-1/4	0
0	x_5	-3/4	0	0	-3/4	-1/4	1
	σ_j		0	0	-1/2	-1/2	0

$b_3<0$ ，用对偶单纯形法解得：

			1	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	1	0	1	0	0	0
1	x_1	1	1	0	0	1/3	-1/3
0	x_3	1	0	0	1	1/3	-4/3
	σ_j		0	0	0	-1/3	-2/3

割平面约束

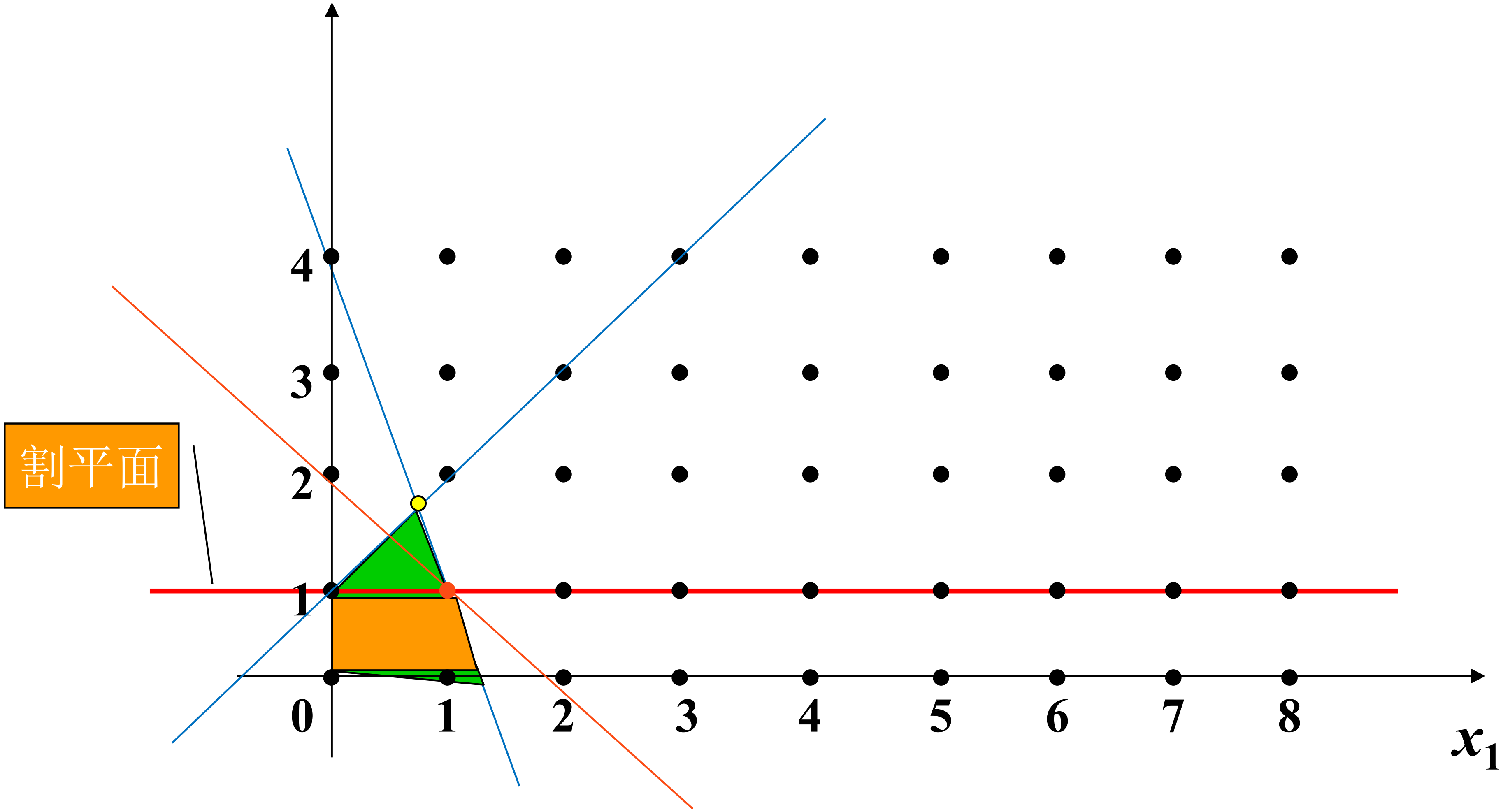
将 $x_3 = 1 + x_1 - x_2$　$x_4 = 4 - 3x_1 - x_2$

代入割平面: $-\left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) \le -\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(1 + x_1 - x_2) + \frac{1}{4}(4 - 3x_1 - x_2) \ge \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 \le 1$$

割平面图示



第四章 整数规划

- 整数规划问题及数学模型
- 整数规划问题的特点与解法
  - 割平面法
  - 分枝定界法
- 0-1型整数规划
  - 隐枚举法
  - 指派问题
- 应用举例

分枝定界法

思路：

1） 分枝：将原问题转化为子问题；

2） 定界：确定界限减少搜索范围。

例6

$$\max Z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 9x_1 + 7x_2 \le 56$$

$$7x_1 + 20x_2 \le 70$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

x_1, x_2为整数

分枝1

解：先解(1)的松弛问题

$$x^* = \begin{cases} 4.809 \\ 1.817 \end{cases} \qquad Z^* = 355.890，\quad 上界Z^*$$

选x_1分枝

问题(2) $\begin{cases} (1) \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$ 问题(3) $\begin{cases} (1) \\ x_1 \geq 5 \end{cases}$

分枝2

(2)的解为 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2.1 \end{cases}$ $Z=349.0$

(3)的解为 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1.571 \end{cases}$ $Z=341.39$

选(2)继续分枝

问题(4) $\begin{cases} (2) \\ x_2 \le 2 \end{cases}$

问题(5) $\begin{cases} (2) \\ x_2 \ge 3 \end{cases}$

解

(4)的解为 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ $Z=340$

(5)的解为 $\begin{cases} x_1 = 1.428 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ $Z=327.12$

是否找到最优解？

分枝3

*(3)*的解为 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1.571 \end{cases}$ $Z=341.39$

问题*(6)* $\begin{cases} (3) \\ x_2 \le 1 \end{cases}$

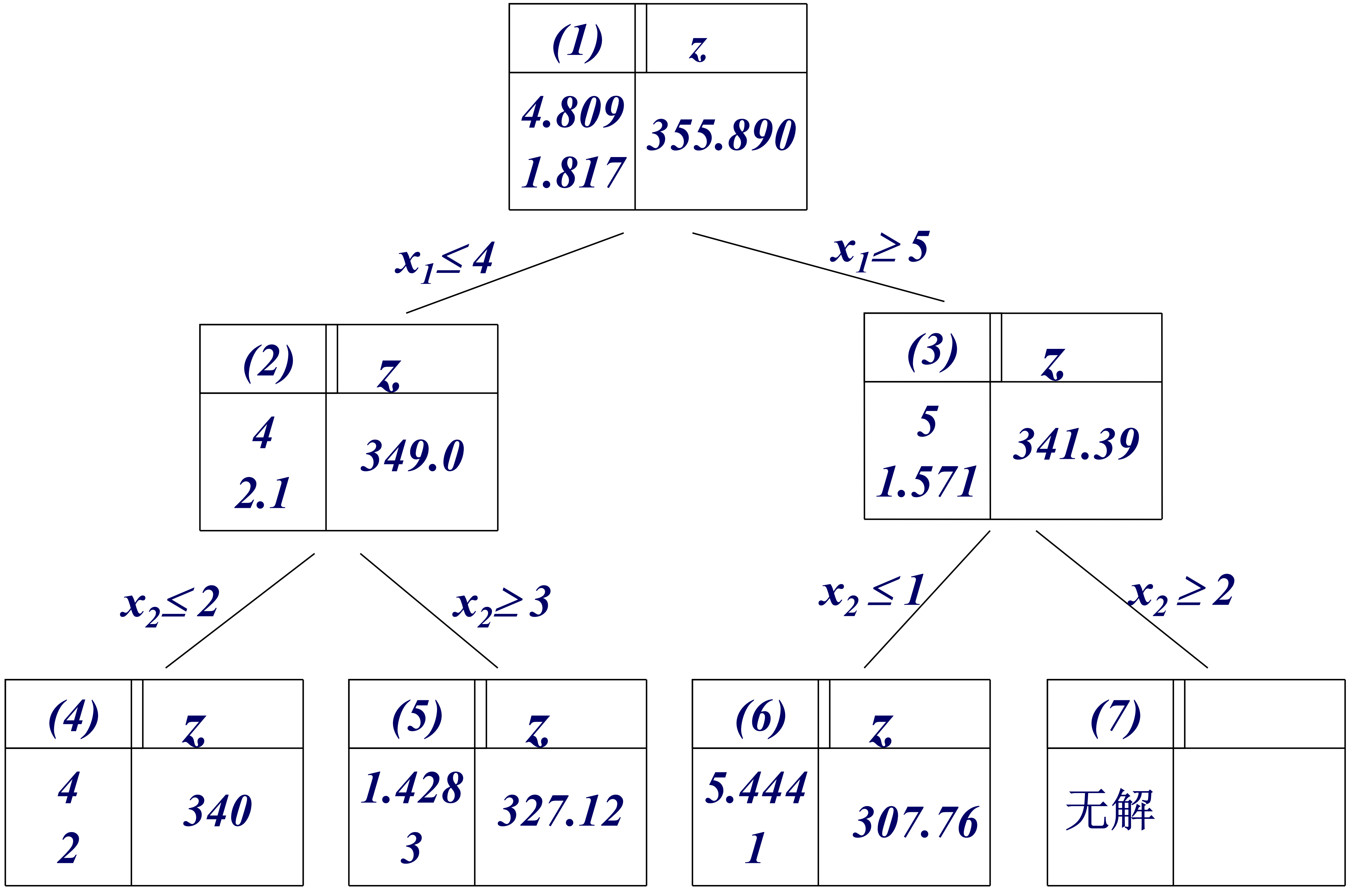
问题*(7)* $\begin{cases} (3) \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$

解

(6)的解为 $\begin{cases} x_1 = 5.44 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ $Z=307.8$

(7)的解为 $\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$ 无解

所以最优解为（4，2），z*=340


(1)
z
4.809
1.817
355.890
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
(2)
z
4
2.1
349.0
(3)
z
5
1.571
341.39
$x_2 \leq 2$
$x_2 \geq 3$
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
(4)
z
4
2
340
(5)
z
1.428
3
327.12
(6)
z
5.444
1
307.76
(7)
无解

分枝定界法的特点

优点：

(1)、可求解混合整数规划；

(2)、思路简单、灵活；

(3)、速度快；

(4)、适合上机。

第四章 整数规划

- 整数规划问题及数学模型
- 整数规划问题的特点与解法
  - 割平面法
  - 分枝定界法
- 0-1型整数规划
  - 隐枚举法
  - 指派问题
- 应用举例

0-1型整数规划

一般采用隐枚举法：

原则：

(1)、用试探法，求出一个可行解，以它的目标值作为当前最好值Z^0

(2)、增加过滤条件$Z \geq Z^0$

例6

$$\max Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & ① \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & ② \\ x_1 + x_2 \le 3 & ③ \\ -8x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 6 & ④ \\ x_1, x_2, x_3 \text{为0或1} \end{cases}$$

$(x_1\ x_2\ x_3)$	目标值	Z^0	①	②	③	④	当前最好值
(0 ,0 ,0)	0	=	✓	✓	✓	✓	0
(0 ,0 ,1)	5	>	✓	✓	✓	×	
(0 ,1 ,0)	-2	<					
(0 ,1 ,1)	3	>	✓	×			
(1 ,0 ,0)	3	>	✓	✓	✓	✓	3
(1 ,0 ,1)	8	>	✓	✓	✓	✓	8
(1 ,1 ,0)	1	<					
(1 ,1 ,1)	6	<					

最优解 $x^* = (1\ ,0\ ,1\ )^T$　　$Z=8$　　　是否还可更快？

第四章 整数规划

- 整数规划问题及数学模型
- 整数规划问题的特点与解法
  - 割平面法
  - 分枝定界法
- **0-1**型整数规划
  - 隐枚举法
  - 指派问题
- 应用举例

指派问题

Assignment Problem: 任务指派

作以下假设：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{指派第}\boldsymbol{i}\text{个人完成第}\boldsymbol{j}\text{项工作}\\ 0 & \text{不指派第}\boldsymbol{i}\text{个人作第}\boldsymbol{j}\text{项工作}\end{cases}$$

$\boldsymbol{c_{ij}>0}$: 指派第$\boldsymbol{i}$个人完成第$\boldsymbol{j}$项工作的代价，

如：费用、成本、时间等

指派问题标准形式

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.t. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ 每个人有且只有一项工作

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ 每项工作有且只有一个人

$x_{ij} = 0或1 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n;$

是特殊的运输问题

匈牙利算法

指派问题最优解的性质：

若将指派问题的系数矩阵$\mathbf{C}=(c_{ij})_{n\times n}$的某行或某列减去一个常数，得到的新的系数矩阵$\mathbf{C}'$，则对应的两个指派问题具有相同的最优解。

方法：

变换系数矩阵$\mathbf{C}$，找到n个位于不同行、不同列的零元素，则对应的指派最优。

例7

$$C=\begin{bmatrix}12 & 7 & 9 & 7 & 9\\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6\\ 7 & 17 & 12 & 14 & 9\\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10\\ 4 & 10 & 7 & 10 & 9\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}5 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2\\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

例7

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

独立零元素

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

独立零元素

位于不同行、不同列的零元素，称为 独立零元素。

定理**(D.Konig)**：系数矩阵C中独立零元素的个数最多等于能覆盖所有零元素的最少直线数。

最少直线选取法

1）标记一组元素个数最多的独立零元素

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Step2

2）标记没有独立零元素所在行

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \checkmark \end{array}$$

Step3

3）标记打✓行中所有非独立零元素所在列

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\
9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 6 & 3 & 6 & 5
\end{bmatrix} & \checkmark \\
\checkmark\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad &
\end{array}$$

Step4

4）标记打✓列中所有独立零元素所在行

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\
9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 6 & 3 & 6 & 5
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{c}
\\
\\
\checkmark \\
\\
\checkmark
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccc}
\checkmark & & & &
\end{array}
&
\end{array}
$$

重复**3**）、**4**）直到不能再标记为止。

Step5

5）未打✓的行与打✓的列标上直线

$$\begin{array}{ll}
\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \checkmark\ (3) \\ \\ \checkmark\ (1) \end{array} \\
\quad \checkmark\ (2) &
\end{array}$$

独立零元素构建

4）将未被覆盖元素中的最小元素变换为**0**

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 7 & [2] \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{-2} \\ \\ \mathbf{-2} \end{array} & \\
 & \begin{array}{ccccc} \mathbf{+2} & & & & \end{array}
\end{array}
\xrightarrow{\text{行、列变换}}
\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 0 \\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}
$$

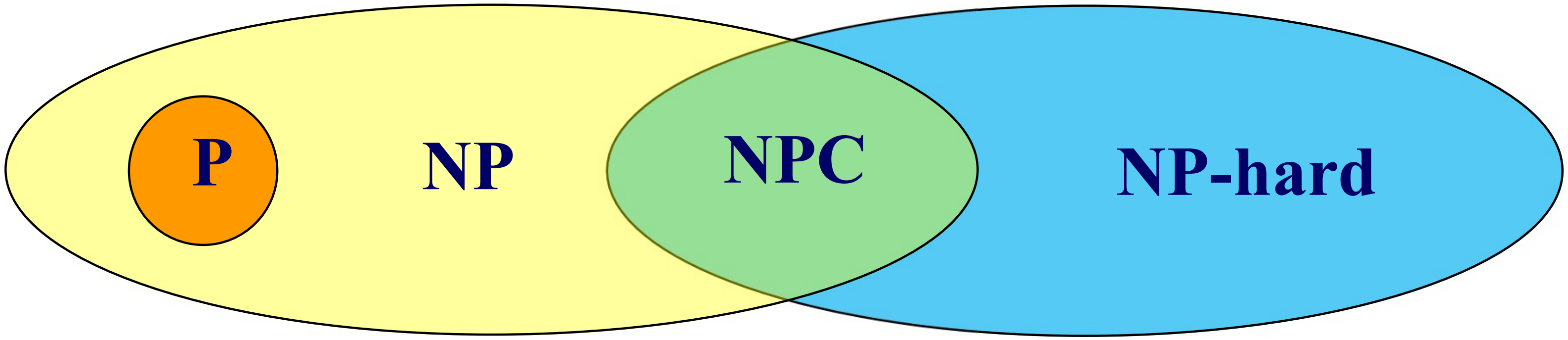
第四章 整数规划

- 整数规划问题及数学模型
- 整数规划问题的特点与解法
  - 割平面法
  - 分枝定界法
- **0-1**型整数规划
  - 隐枚举法
  - 指派问题
- 应用举例

典型的整数规划问题

- 旅行商问题（**Traveling Salesman Problem**）
- 生产调度问题（**Production Scheduling Problem**）
- **0-1**背包问题（**Knapsack Problem**）
- 装箱问题（**Bin Packing Problem**）
- 图着色问题（**Graph Coloring Problem**）
- 聚类问题（**Clustering Problem**）

计算复杂性理论



- **P**问题：可在多项式时间复杂度内得到最优解的问题。
- **NP(Non-deterministic Polynomial)**问题：可在不确定的多项式时间复杂度内验证一个解是否可行的问题。
- **NP-hard(NPH)**问题：所有**NP**问题的求解都可在多项式时间复杂度内归约成的问题，也更难求解。
- **NP-complete(NPC)**问题：**NP-hard**问题中为**NP**的问题。