



## 第五章 数字滤波器

---

浙江大学 电气工程学院

张健

[jian\\_zhang\\_zju@zju.edu.cn](mailto:jian_zhang_zju@zju.edu.cn)

# 大纲



## ➡ 概述

### □ 无限冲激响应 (IIR) 数字滤波器

- 冲激响应不变法
- 双线性变换法
- IIR数字滤波器的网络结构

### □ 有限冲激响应 (FIR) 数字滤波器

- 窗函数法
- FIR滤波器的网络结构

# 数字滤波器的概念



- ➔ 数字滤波器是具有一定传输特性的数字信号处理装置，其输入和输出都是数字信号，它借助于数字器件和一定的数值计算方法，对输入信号的波形或频谱进行加工、处理，改变输入信号，从而去掉信号中的无用成分而保留有用成分。

# 数字滤波器的优点



- ➔ **精度高**。模拟器件（如R、L、C等）的精度一般很难做高，而数字滤波器的精度则由字长决定。如果要增加精度，只需增加字长即可。
- ➔ **可靠性高**。模拟滤波器中各种参数都有一定的温度系数，会随着环境条件的变化而变化，容易出现感应、杂散效应甚至振荡等。数字滤波器一般不受外界环境（如温度、湿度等）的影响，没有模拟电路的元器件老化问题。
- ➔ **灵活性高**。通过编程可以随时修改滤波器特性的设计，灵活性较高。
- ➔ **便于大规模集成**。设计数字滤波器具有一定的规范性，便于大规模集成、生产。数字滤波器可工作于极低频率，也可比较容易地实现模拟滤波器难以实现的线性相位系统。

# 数字滤波器的种类



- ➡ 按照其**频率响应的通带特性**，可分为低通、高通、带通和带阻滤波器；
- ➡ 若根据其**冲激响应的时间特性**，可分为无限冲激响应(IIR)数字滤波器和有限冲激响应(FIR)数字滤波器；
- ➡ 若根据**数字滤波器的构成方式**，可分为递归型数字滤波器、非递归型数字滤波器以及用快速傅立叶变换实现的数字滤波器。

# 数字滤波器的原理



设输入序列为  $x(n)$ , 输出序列为  $y(n)$ , 则

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

## ■ 滤波器的脉冲传递函数

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \end{aligned}$$

# 数字滤波器的构成



若  $a_i = 0$  , 则有  $H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$

$$h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \cdots + b_M \delta(n-M)$$

- 系统函数是  $z^{-1}$  的多项式, 其相应的单位脉冲响应的时间长度是有限的, 最多有  $M+1$  项。因此, 把系统函数具有以上形式的数字滤波器称为**有限冲激响应FIR (Finite Impulse Response) 滤波器**。

# 数字滤波器的构成



若至少有一个  $a_i$  的值不为零，并且分母至少存在一个根不为分子所抵消，例如

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - z^{-1}} = b_0(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \quad |z| > 1$$

$$h(n) = b_0[\delta(n) + \delta(n-1) + \cdots] = b_0u(n)$$

- 说明该数字滤波器的单位脉冲响应有无限多个，时间长度持续到无限长。具有该形式的数字滤波器称为**无限冲激响应IIR (Infinite Impulse Response) 滤波器**。



# 无限冲激响应 (IIR) 数字滤波器



- ➔ **设计任务：**用具有无限多个单位冲激响应的有理函数逼近给定的滤波器幅频特性。
- ➔ **设计方法与思路：**
  - **直接法：**是一种计算机辅助设计方法。
  - **间接设计法：**是借助模拟滤波器的传递函数 $H(s)$ 求出相应的数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。就是根据给定技术指标的要求，先确定一个满足该指标的模拟滤波器 $H(s)$ ，再寻找一种变换关系把 $s$ 平面映射到 $z$ 平面，使 $H(s)$ 变换成所需的数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。

# 无限冲激响应 (IIR) 数字滤波器



➡ 为了使数字滤波器保持模拟滤波器的特性，这种由复变量  $s$  到复变量  $z$  之间的映射关系必须满足**两个基本条件**：

- $s$  平面的复频率轴必须映射到  $z$  平面的单位圆上。
- 为了保持模拟滤波器的稳定性，必须要求  $s$  平面的左半平面映射到  $z$  平面的单位圆以内。

**——保证稳定的模拟滤波器的传递函数，映射为对应的数字滤波器传递函数后，依然保持稳定。**

# 冲激响应不变法



## (1)冲激响应不变法遵循的准则

- ➔ 使数字滤波器的单位脉冲响应与所参照的模拟滤波器的冲激响应的采样值完全一样

$$h(n) = h(t) \Big|_{t=nT}$$

# 冲激响应不变法



## (2)冲激响应不变法的设计思路

冲激响应不变法的设计思路：

- ➡ 根据技术指标确定模拟滤波器 $H(s)$
- ➡ 对 $H(s)$ 取拉普拉斯反变换求冲激响应 $h(t)$
- ➡ 由冲激响应不变的原则，对 $h(t)$ 采样得到 $h(n)$
- ➡ 求 $h(n)$ 的 $z$ 变换，求出数字滤波器 $H(z)$

# 冲激响应不变法



设模拟滤波器的系统传递函数具有单极点

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s - p_i}$$

$$K_i = (s - p_i) H(s) \Big|_{s=p_i}$$

对 $H(s)$ 取逆变换

$$h(t) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} u(t)$$

对 $h(t)$ 进行采样

$$h(n) = h(t) \Big|_{t=nT} = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} u(n)$$

冲激响应不变法的原理就是把 $H(s)$ 部分分式展开式中的 $1/(s - p_i)$  代之以 $\frac{1}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$  即可直接得出数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} \right) z^{-n} = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$$

# 冲激响应不变法



## (3) $H(z)$ 和 $H(s)$ 的关系

取采样信号的拉氏变换并借助s域时移定理

$$L\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t)\delta(t-nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)e^{-nsT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{sT}} = H(z) \Big|_{z=e^{sT}}$$

将冲激序列展开为FS:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \Rightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$

■ 取采样信号的拉普拉斯变换并借助s域频移定理

$$L\left[h(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right] = L\left[h(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s - jn\frac{2\pi}{T})$$

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s - jn\frac{2\pi}{T})$$

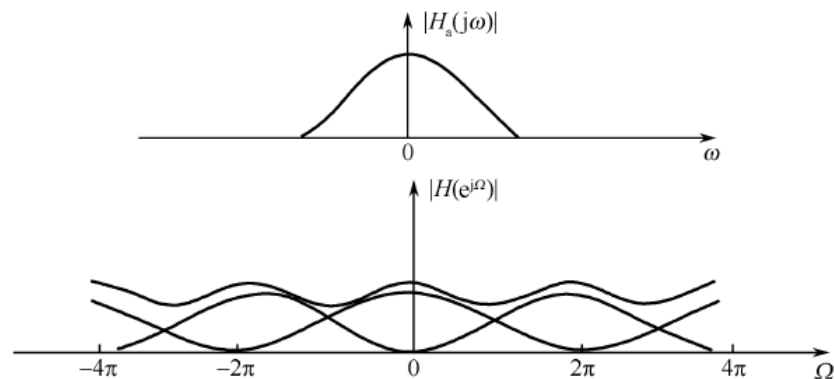
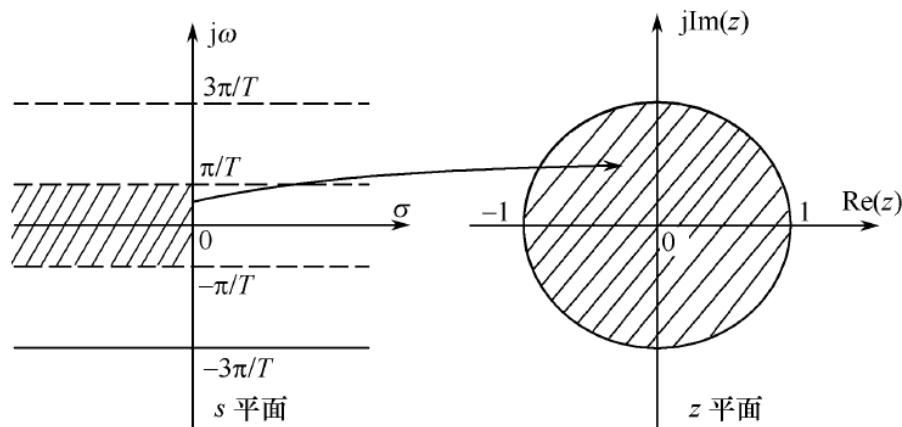
# 冲激响应不变法

当  $\sigma$  不变,  $\omega$  以  $2\pi/T$  整数倍改变时, 映射值不变, 也就是将  $s$  平面沿着  $j\omega$  轴分割成一条条宽度为  $2\pi/T$  的水平带, 然后再映射到  $z$  平面上。

## (4) 从 $S$ 平面到 $z$ 平面的映射

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T}n)T} = |z| e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T}n)T}$$

$S$ 平面与 $z$ 平面间映射的多值性  
容易造成频率混叠现象。不适合用于高通和带阻数字滤波器。



# 冲激响应不变法



- 当 $\sigma=0$  时,  $s$ 平面的虚轴映射为 $z$ 平面的单位圆;
- 当 $\sigma<0$  时,  $s$ 平面左半平面映射为 $z$ 平面的单位圆内;
- 当 $\sigma>0$  时,  $s$ 平面的右半平面映射为 $z$ 平面单位圆外;
- 当 $\sigma$ 不变,  $\omega$ 以  $2\pi/T$  整数倍改变时, 映射值不变, 也就是将 $s$ 平面沿着 $j\omega$  轴分割成一条条宽度为  $2\pi/T$  的水平带, 每条水平带都按照前面分析的关系重叠映射成整个 $z$ 平面。

**S平面到Z平面的  
映射具有多值性**



# 冲激响应不变法



➡ 例1 设模拟滤波器的传递函数为

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 3s + 2}$$

用冲激响应不变法求相应的数字滤波器的传递函数  $H(z)$ .

# 冲激响应不变法



解：对模拟滤波器的传递函数进行因式分解

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2s}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = \frac{2s}{s+2} \Big|_{s=-1} = -2$$

$$K_2 = \frac{2s}{s+1} \Big|_{s=-2} = 4$$

$$H(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

$$H(z) = \frac{-2}{1 - e^{-T} z^{-1}} + \frac{4}{1 - e^{-2T} z^{-1}} = \frac{2 + (2e^{-2T} - 4e^{-T}) z^{-1}}{1 - (e^{-T} + e^{-2T}) z^{-1} + e^{-3T} z^{-2}}$$

# 冲激响应不变法



**例2** 利用冲激响应不变法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，满足下列技术指标：

- (1) 3dB带宽的数字截止频率  $\Omega_c = 0.2\pi rad$
- (2) 阻带大于30dB的数字边界频率  $\Omega_s = 0.5\pi rad$
- (3) 采样周期  $T = 10\pi\mu s$  。

# 冲激响应不变法



解：

**第一步：**将给定的指标转换为相应的模拟低通滤波器的技术指标。

按照  $\Omega = \omega T$  , 可得

$$\omega_c = 0.2\pi / (10\pi \times 10^{-6}) = 20 \times 10^3 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\omega_s = 0.5\pi / (10\pi \times 10^{-6}) = 50 \times 10^3 \text{ rad} / \text{s}$$

# 冲激响应不变法



## 第二步：设计归一化模拟低通滤波器。

根据巴特沃思模拟低通滤波器的设计方法，求出该滤波器的阶数

$$n = \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg \left( \frac{\omega_s}{\omega_c} \right)} = \lg 31.61 / \lg(50 / 20) = 3.769$$

- 取  $n=4$ ，四阶归一化巴特沃思模拟低通滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned} H(\bar{s}) &= \frac{1}{(\bar{s} - s_1)(\bar{s} - s_2)(\bar{s} - s_3)(\bar{s} - s_4)} \\ &= -\frac{0.92388\bar{s} + 0.70711}{\bar{s}^2 + 0.76537\bar{s} + 1} + \frac{0.92388\bar{s} + 1.70711}{\bar{s}^2 + 1.84776\bar{s} + 1} \end{aligned}$$

# 冲激响应不变法



**第三步：**利用频率变换求出满足给定指标的实际模拟低通滤波器。

对巴特沃思模拟低通滤波器进行反归一化处理，有

$$H(s) = H(\bar{s} \omega_c)$$
$$= -\frac{\omega_c^2 (0.92388s + 0.70711)}{s^2 + 0.76537\omega_c s + \omega_c^2} + \frac{\omega_c^2 (0.92388s + 1.70711)}{s^2 + 1.84776\omega_c s + \omega_c^2}$$

# 冲激响应不变法



**第四步：**按照冲激响应不变法求满足给定技术指标的数字滤波器。

求得  $H(s)$  的  $z$  变换式为

$$H(z) = \frac{10^4(-1.84776 + 0.88482z^{-1})}{1 - 1.31495z^{-1} + 0.61823z^{-2}} + \frac{10^4(1.84776 - 0.40981z^{-1})}{1 - 1.08704z^{-1} + 0.31317z^{-2}}$$

# 冲激响应不变法特点



- 1、模拟滤波器与数字滤波器的频率变换是**线性关系**，即 $\Omega = \omega T$ ，如果模拟滤波器是线性相位，变换后的数字滤波器也是线性相位；
- 2、具有较好的时域逼近特性；
- 3、s平面与z平面间的映射的**多值性**容易造成频谱混叠现象，不适用于高通和带阻滤波器。



# 双线性变换法

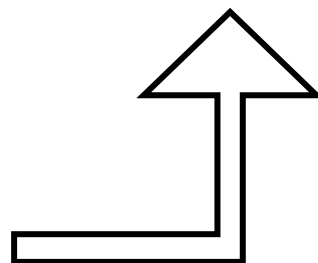
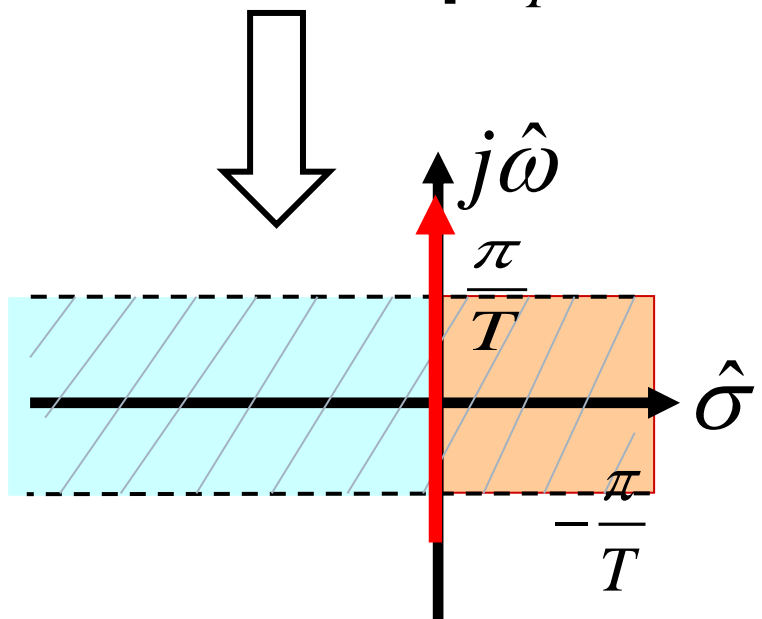
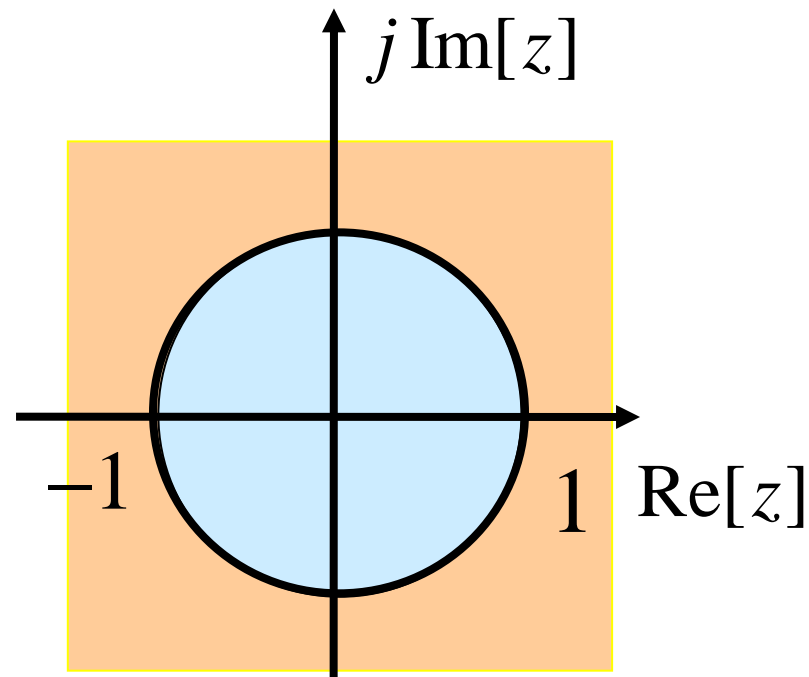
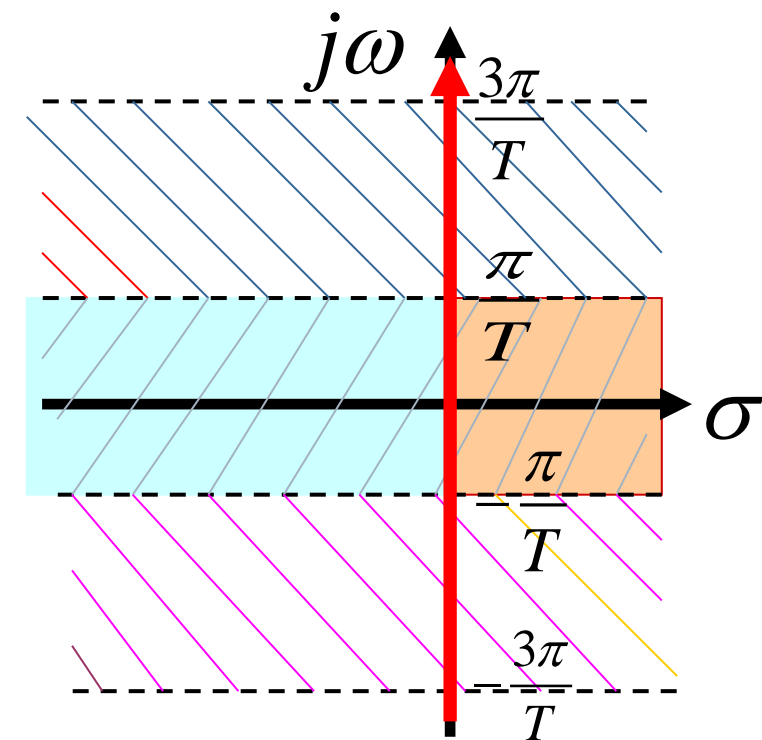


由于从 $s$ 平面到 $z$ 平面的映射关系不是一一对应的，冲激响应不变法造成数字滤波器频率响应特性的混叠。必须找出一种**频率特性有一一对应关系**的变换，双线性变换法就是其中的一种。

# 双线性变换法

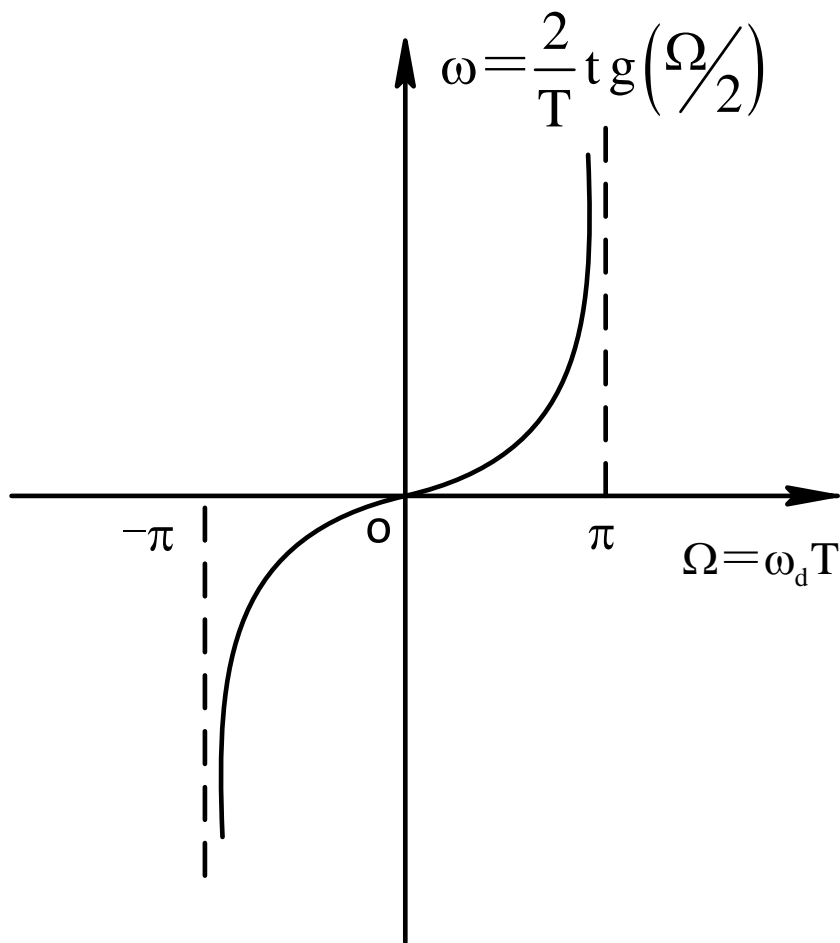


脉冲响应不变法的主要缺点是产生频率响应的混叠失真。这是因为从 $s$ 平面到 $z$ 平面是多值的映射关系所造成的。为了克服这一缺点，可以采用**非线性频率**压缩方法，将整个频率轴上的频率范围压缩到 $-\pi/T_s \sim \pi/T_s$ 之间，再用 $z=e^{sT_s}$ 转换到 $z$ 平面上。也就是说，第一步将整个 $s$ 平面压缩映射到 $s_D$ 平面的 $-\pi/T_s \sim \pi/T_s$ 一条横带里；第二步通过标准变换关系 $z=e^{s_D T_s}$ 将此横带变换到整个 $z$ 平面上去。这样就使 $s$ 平面与 $z$ 平面建立了一一对应的单值关系，消除了多值变换性，也就消除了频谱混叠现象。



为了将s平面的整个虚轴 $j\omega$ 压缩到 $s_D$ 平面 $j\omega_D$ 轴上的 $-\pi/T \sim \pi/T$ 段上，可以通过以下的正切变换实现：

$$\omega = K \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_D T}{2}\right)$$



在零频率附近， $\omega$ 与 $\Omega$ 之间的变换关系接近于线性关系；但当 $\omega$ 进一步增加时， $\Omega$ 增长得越来越慢，最后当 $\omega \rightarrow \infty$ 时， $\Omega$ 终止在折叠频率 $\Omega = \pi$ 处，因而双线性变换就不会出现由于高频部分超过折叠频率而混淆到低频部分去的现象，从而消除了频率混叠现象。

# 双线性变换法



当 $\omega_D$ 由 $-\pi/T$ 经过0变化到 $\pi/T$ 时,  $\omega$ 由 $-\infty$ 经过0变化到 $+\infty$ , 也即映射了整个 $j\omega$ 轴。将上式写成:

$$j\omega = jK \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_D T}{2}\right) = K \cdot \frac{e^{j\omega_D T/2} - e^{-j\omega_D T/2}}{e^{j\omega_D T/2} + e^{-j\omega_D T/2}}$$

将此关系**解析延拓**到整个 $s$ 平面和 $s_D$ 平面, 令 $j\omega=s$ ,  $j\omega_D=s_D$ , 则得:

$$s = K \cdot \frac{e^{s_D T/2} - e^{-s_D T/2}}{e^{s_D T/2} + e^{-s_D T/2}} = K \cdot \frac{1 - e^{-s_D T}}{1 + e^{-s_D T}}$$

# 双线性变换法



$$s = K \frac{1 - e^{-s_D T}}{1 + e^{-s_D T}}$$

令  $z = e^{s_D T}$  代入得

$$s = K \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

或：

$$z = \frac{1 + \frac{1}{K}s}{1 - \frac{1}{K}s} = \frac{K + s}{K - s}$$

上两式描述了s平面与z平面之间的单值映射关系，这种变换都是两个线性函数之比，因此称为**双线性变换**。

# 双线性变换法



## \*逼近关系分析:

(1) 把  $z=e^{j\Omega}$  代入  $s = K \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  , 可得:

$$s = \sigma + j\omega = K \frac{1-e^{-j\Omega}}{1+e^{-j\Omega}} = jK \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right) = j\omega$$

即s平面的虚轴映射到z平面的单位圆。

(2) 将  $s=\sigma+j\omega$  代入  $z = \frac{K+s}{K-s}$  , 得:

$$z = \frac{K + \sigma + j\omega}{K - \sigma - j\omega} \longrightarrow |z| = \frac{\sqrt{(K + \sigma)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(K - \sigma)^2 + \omega^2}}$$

$\sigma < 0$  时,  $|z| < 1$ ;  $\sigma > 0$  时,  $|z| > 1$ 。

所以：s平面的左半平面映射到z平面的单位圆内；s平面的右半平面映射到z平面的单位圆外；s平面的虚轴映射到z平面的单位圆上。因此，稳定的模拟滤波器经双线性变换后所得的数字滤波器也一定是稳定的。

$$\omega = K \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_D T_s}{2}\right) = K \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad \text{一般取 } K = 2/T$$

$$\omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

所以，模拟频率和数字频率之间呈非线性关系。

在设计数字滤波器时，当设计模拟滤波器时所使用的指标不应该进行线性转换（ $\omega = \Omega/T_s$ ），而应采用如上公式进行非线性转换（预畸变）。



# 双线性变换法的特性



- ➡ 双线性变换是 $s$ 平面到 $z$ 平面——一对对应映射关系
- ➡ 双线性变换将 $s$ 平面虚轴唯一地映射到 $z$ 平面的单位圆，保证了 $H(z)$ 的频率响应能模仿 $H(s)$ 的频率响应，避免了频率响应混叠现象。
- ➡ 双线性变换将 $s$ 左平面全部映射到 $z$ 平面单位圆内，将 $s$ 右半平面全部映射到 $z$ 平面的单位圆外，保证了 $H(z)$ 和 $H(s)$ 相比，其稳定性不发生变化。

# 双线性变换法的频率预畸变



- ◆ 在冲激响应不变法中，数字频率 $\Omega$ 与模拟频率 $\omega$ 之间的关系是线性关系： $\Omega = \omega T$
- ◆ 在双线性变换法中，模拟频率与数字频率之间的关系为非线性关系，即

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2}$$

- ◆ 模拟频率与数字频率间的非线性关系是双线性变换的缺点，它会使数字滤波器与模拟滤波器在频率响应与频率的对应关系上发生畸变。
- ◆ **注意两个线性相位的区别！！！！**

# 双线性变换法的步骤



- ➡ 双线性变换法的频率**预畸变**：先对模拟滤波器的临界频率加以畸变，使其通过双线性变换后正好映射为需要的频率。
- ➡ 设所求的数字滤波器的通带和阻带的截止频率分别为  $\Omega_p$  和  $\Omega_s$
- ➡ 按照式  $\omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2}$  求出对应的模拟滤波器的临界频率  $\omega_p$  和  $\omega_s$ ，然后模拟滤波器就按照这两个预畸变的频率  $\omega_p$  和  $\omega_s$  来设计。

# 双线性变换法的基本设计思想



由于在数字化以前已经对频带进行了压缩，所以数字化以后的频率响应可做到无混叠效应。

- ➔ 按给定的技术指标设计模拟滤波器
- ➔ 将这个模拟滤波器的系统传递函数  $H(s)$ ，通过适当的变换，把无限宽的频带，变换成频带受限的系统函数  $H(\hat{s})$
- ➔ 将  $H(\hat{s})$  进行常规z变换，求得数字滤波器的传递函数  $H(z)$ 。

# 双线性变换法的基本设计思想



➔ **例3** 用双线性变换法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，采样周期 $T = 1\text{s}$ ，巴特沃思数字低通滤波器的技术指标为：

(1) 在通带截止频率 $\Omega_p = 0.5\pi$  时，衰减不大于3dB；

(2) 在阻带截止频率 $\Omega_s = 0.75\pi$  时，衰减不小于15dB。

# 双线性变换法的基本设计思想



解：(1) 将频率进行预畸变处理。则有

$$\omega_c = \omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_p}{2} = 2 \tan \frac{0.5\pi}{2} = 2 \text{ rad/s}, \alpha_p = 3\text{dB}$$

$$\omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_s}{2} = 2 \tan \frac{0.75\pi}{2} = 4.828 \text{ rad/s}, \alpha_s = 15\text{dB}$$

(2) 设计满足技术指标的巴特沃思模拟低通滤波器。其阶数为

$$n = \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg \left( \frac{\omega_s}{\omega_c} \right)} \approx 1.941$$

# 双线性变换法的基本设计思想



取  $n=2$ , 归一化巴特沃思模拟低通滤波器的传递函数为

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + 1.414\bar{s} + 1}$$

(3) 对上式进行反归一化处理。巴特沃思模拟低通滤波器的实际传递函数为

$$H(s) = H(\bar{s}\omega_c) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 1.414\omega_c s + \omega_c^2} = \frac{4}{s^2 + 2.828s + 4}$$

# 双线性变换法的基本设计思想



(4) 利用双线性变换法求出数字滤波器的传递函数  $H(z)$ 。

$$H(z) = H(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1 + 2z + z^2}{0.586 + 3.414z^2}$$



**例** 设计一个一阶数字低通滤波器，3dB截止频率为  $\Omega_c=0.25\pi$ ，将双线性变换应用于模拟巴特沃兹滤波器。

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + (s / \omega_c)}$$

**解** 数字低通滤波器的截止频率为  $\Omega_c=0.25\pi$ ，相应的巴特沃兹模拟滤波器的3dB截止频率是  $\omega_c$ ，就有

$$\omega_c = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{0.25\pi}{2}\right) = \frac{0.828}{T_s}$$

模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + (s / \omega_c)} = \frac{1}{1 + (sT_s / 0.828)}$$

# 双线性变换法的基本设计思想



$$H_a(s) = \frac{1}{1 + (s / \omega_c)} = \frac{1}{1 + (sT_s / 0.828)}$$

应用双线性变换法：

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{1 + (2 / 0.828)[(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1})]} \\ &= 0.2920 \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.4159z^{-1}} \end{aligned}$$

# 双线性变换法的基本设计思想



**例** 用双线性变换法设计一个三阶巴特沃兹数字低通滤波器，采样频率为  $f_s=4$  kHz（即采样周期为  $T_s=250\mu s$ ），其3dB截止频率为  $f_c=1$  kHz。三阶模拟巴特沃思滤波器为

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2(s / \omega_c) + 2(s / \omega_c)^2 + (s / \omega_c)^3}$$

**解** 首先，确定数字域截止频率  $\Omega_c = 2\pi f_c T_s = 0.5\pi$ 。

第二步，确定预畸变的模拟滤波器的截止频率：

$$\omega_c = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{0.5\pi}{2}\right) = \frac{2}{T_s}$$

第三步，将 $\omega_c$ 代入三阶模拟巴特沃思滤波器 $H_a(s)$ ，得：

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2(sT_s / 2) + 2(sT_s / 2)^2 + (sT_s / 2)^3}$$

最后，将双线性变换关系代入得到滤波器的系统函数：

$$\begin{aligned} H(z) = H_a(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} &= \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^3} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{3 + z^{-2}} \end{aligned}$$

# 双线性变换法设计IIR滤波器的总结：



**双线性变换法与脉冲响应不变法相比，优点是避免了频率响应的混叠现象。**这是因为S平面与Z平面是单值的一一对应关系。S平面整个 $j\omega$ 轴单值地对应于Z平面单位圆一周，即频率轴是单值变换关系。

但是**双线性变换的这个特点是靠频率的严重非线性关系而得到的**。首先，一个线性相位的模拟滤波器经双线性变换后得到非线性相位的数字滤波器，不再保持原有的线性相位了；其次，各个分段边缘的临界频率点产生了畸变，这种频率的畸变，可以通过频率的预畸来加以校正，也就是将临界模拟频率事先加以畸变，然后经变换后正好映射到所需要的数字频率上。

# FIR数字滤波器的设计



$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} = \sum_{i=0}^M h(i) z^{-i}$$

$h(n)$ 长度为  $M+1$

**例：**求系统的频率特性：设某离散系统的输出为输入的加权和： $y(n)=0.5x(n)+x(n-1)+0.5x(n-2)$

系统函数为： $H(z)=0.5 + z^{-1}+0.5z^{-2}$

偶对称

单位响应为： $h(n)=0.5\delta(n) + \delta(n-1) + 0.5\delta(n-2)$

其频率特性为：

严格的线性相位

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= 0.5 + e^{-j\Omega} + 0.5e^{-j2\Omega} = e^{-j\Omega} (0.5e^{j\Omega} + 1 + 0.5e^{-j\Omega}) \\ &= e^{-j\Omega} (1 + \cos \Omega) \end{aligned}$$

# FIR数字滤波器设计的特点



- 很容易的获得严格的线性相频特性;
- 一定是稳定的 (只有零极点) ;
- 任何非因果有限长序列可以通过一定延时转变为因果序列, 所以满足因果性要求;
- 可以用FFT实现, 可以大大提高运算效率;
- 当充分逼近锐截止滤波器时, 要求较长的脉冲响应序列 $h(n)$ ,  $N$ 取值很大, 运算量大大增加;
- 无法借用模拟滤波器的设计结果, 无解析设计公式。

# FIR数字滤波器的设计



\*FIR滤波器的一个重要特征：

如果FIR数字滤波器的单位脉冲响应 $h(k)$ （设长度为N点）是实数序列，而且满足偶对称或奇对称的条件，即

$$h(n)=h(N-1-n)$$

或

$$h(n)= -h(N-1-n)$$

则滤波器就具有严格的线性相位特点。



$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) z^{-i} = \sum_{i=0}^{N-1} h(N-1-i) z^{-i}$$

$$h(n) = h(N-1-n)$$

$$m = N-1-i$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-(N-1-m)} = z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^m$$

$$= z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

偶对称情况

$$H(z) = \frac{1}{2} H(z) + \frac{1}{2} [z^{-(N-1)} H(z^{-1})]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1)} z^n]$$

$$= z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{z^{-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + z^{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}}{2} \right]$$

$$H(z) = z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{z^{-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + z^{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow H(\Omega) &= H(z) \big|_{z=e^{j\Omega}} \\ &= e^{-j\Omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[ \Omega \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right] \end{aligned}$$

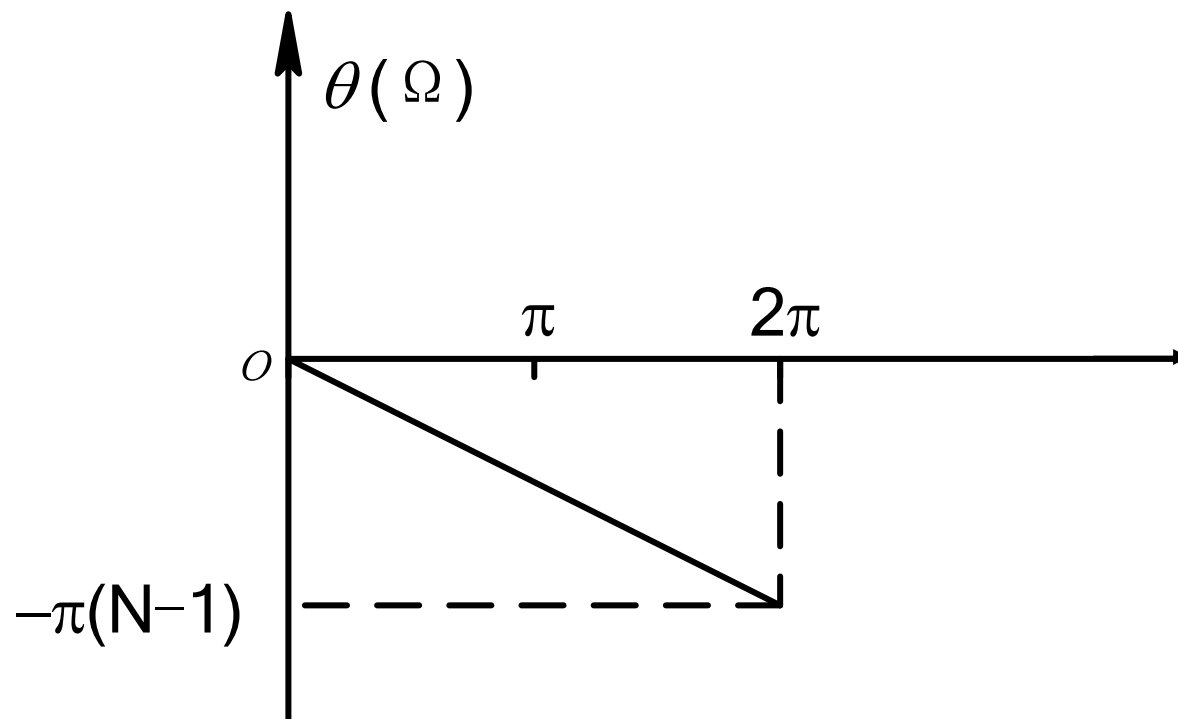
$$\text{令 } H(\Omega) = H_A(\Omega) e^{j\theta(\Omega)}$$

$$H_A(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[ \Omega \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right]$$

$$\theta(\Omega) = -\Omega \left( \frac{N-1}{2} \right) = -\Omega K_0$$

相位函数具有严格的  
线性相位

$$\theta(\Omega) = -\Omega \left( \frac{N-1}{2} \right) = -\Omega K_0$$



图：偶对称  $[h(n)=h(N-1-n)]$  时线性相位特性

同理可以得到：当 $h(n)$ 奇对称时 [ $h(n)=-h(N-1-n)$ ] 时：

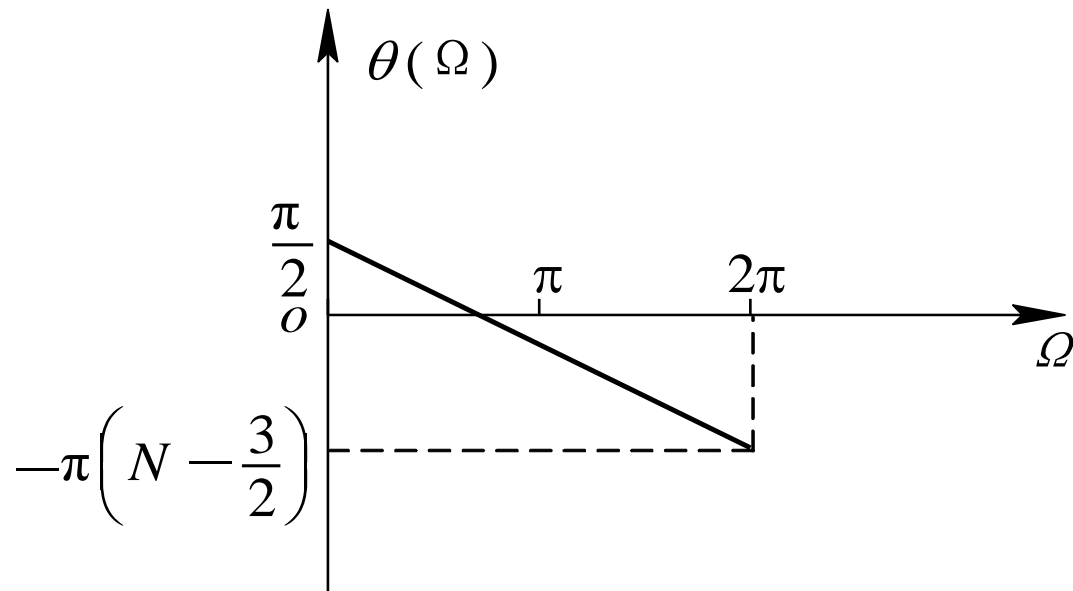
$$H(z) = z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{z^{-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} - z^{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}}{2} \right]$$

$$H(\Omega) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega + j\pi/2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[ \Omega \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right]$$

$$H_A(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[ \Omega \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right]$$

$$\theta(\Omega) = -\Omega \left( \frac{N-1}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = -\Omega K_0 + \frac{\pi}{2}$$

相位函数既有线性相位特性同时又有90度的相移。



图：奇对称  $[h(n)=-h(N-1-n)]$  时线性相位特性  
因此，**FIR滤波器可以设计成严格的线性相位。**

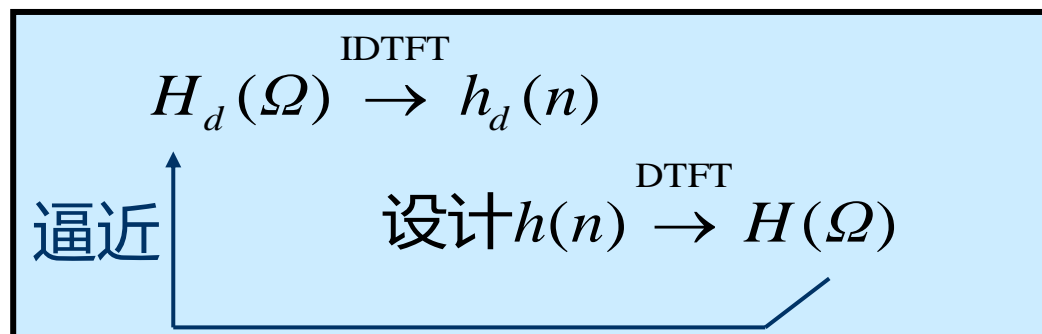
$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} = \sum_{i=0}^M h(i) z^{-i}$$

**FIR滤波器系统函数的极点只有在 $z = 0$ ，在单位圆内，故FIR滤波器总是稳定的。**

# 窗函数法设计FIR数字滤波器



设所期望的理想滤波器的频率特性为 $H_d(\Omega)$ ，设计FIR数字滤波器，其频率特性为 $H(\Omega)$ ，使其逼近 $H_d(\Omega)$ 。



- a. 窗函数法设计FIR数字滤波器在**时域**内进行。
- b. 窗函数法**不需借助原型模拟滤波器**。
- c. 窗函数法是用一个因果性的、有限长的序列 $h(n)$ 的频率特性去**逼近**非因果的、无限长的序列 $h_d(n)$ 的频率特性 $H_d(\Omega)$ （理想滤波器的频率特性）。

$$Q: \text{已知 } H_d(\Omega) \xrightarrow{\text{IDTFT}} h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega,$$

如何寻找  $h(n)$ , 使  $h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} H(\Omega)$  逼近  $H_d(\Omega)$ 。

选择一有限长度的因果序列  $h(n)$  (设长度为  $N$ ) , 使它们之间的频率特性均方误差为最小。

可取:  $h(n) = h_N(n) = h_d(n)w_N(n)$

$w_N(n)$  为窗函数, 要使频率特性均方误差为最小,

为截取无限长序列  $h_d(n)$  的一段来作为 FIR 滤波器的单位脉冲响应, 只要乘以一窗函数为  $w_N(n)$ 。不同的窗函数会给设计的滤波器带来不同的特性。

# 两个问题



(1) 如果FIR滤波器要求线性相位，由 $h_d(n)$ 得到 $h(n)$ ，除了要求 $h(n)$ 必须是因果、有限长序列外还需注意什么？

$h(n)$ 必须是偶对称或奇对称

(2) 由 $h(n)$ 得到 $H(\Omega)$ ，和 $H_d(\Omega)$ 如何进行逼近分析。

$$\begin{aligned} h(n) = h_d(n)w_N(n) &\rightarrow H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} H_d(\Omega) * W_N(\Omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_d(\Omega) W_N(\Omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$



**例：** 设理想低通滤波器的频率特性为：

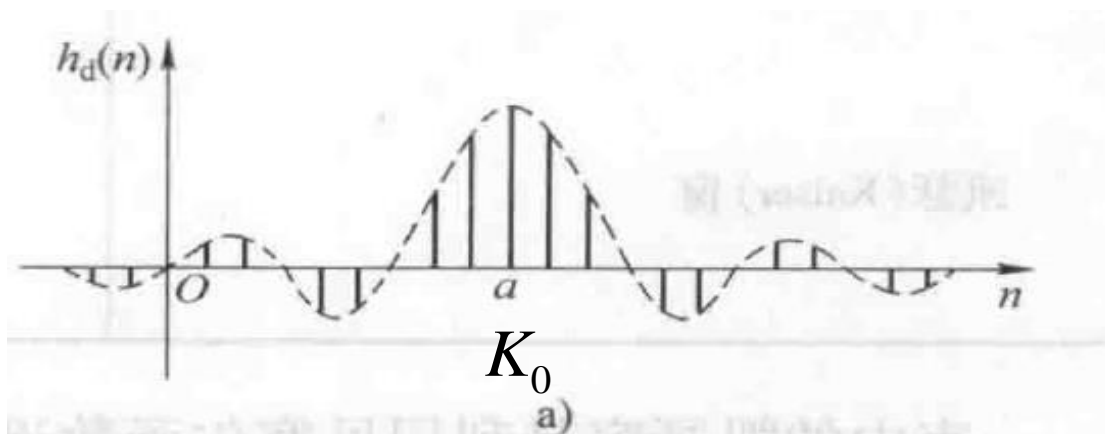
$$H_d(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega K_0} & (|\Omega| \leq \Omega_c) \\ 0 & (\Omega_c < |\Omega| < \pi) \end{cases}$$

$K_0$ 为常数。试设计线性相位FIR滤波器。

相应的单位脉冲响应  $h_d(n)$  为

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{-j\Omega K_0} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin[\Omega_c(n - K_0)]}{\pi(n - K_0)}$$

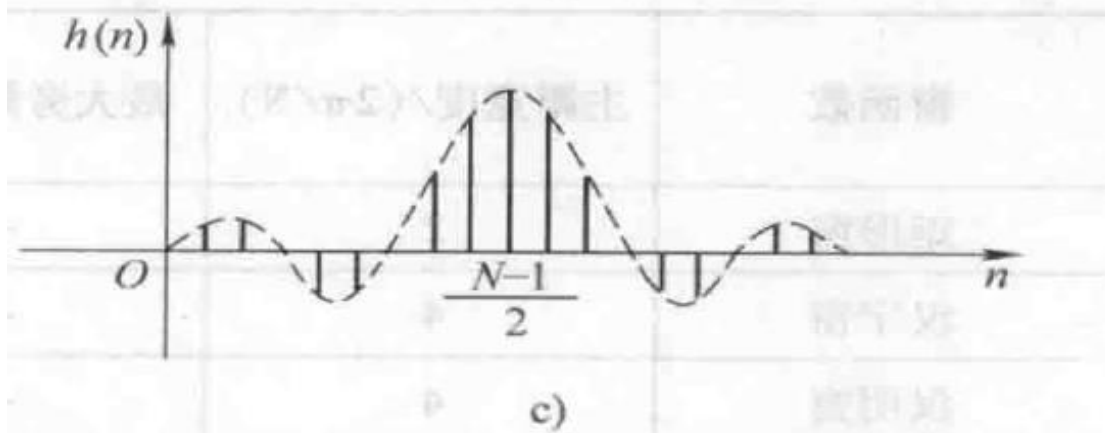
这是一个中心点在 $K_0$ 的**偶对称**、无限长、非因果序列。为了构造一个长度为 $N$ 的线性相位滤波器，只有将 $h_d(n)$ 截取一段，并保证截取的一段对 $(N-1)/2$ 对称，故中心点必须取 **$n=K_0=(N-1)/2$** 。



$$h_d(n) = \frac{\sin[\Omega_c(n - K_0)]}{\pi(n - K_0)}$$



$$w_N(n) = R_N(n)$$

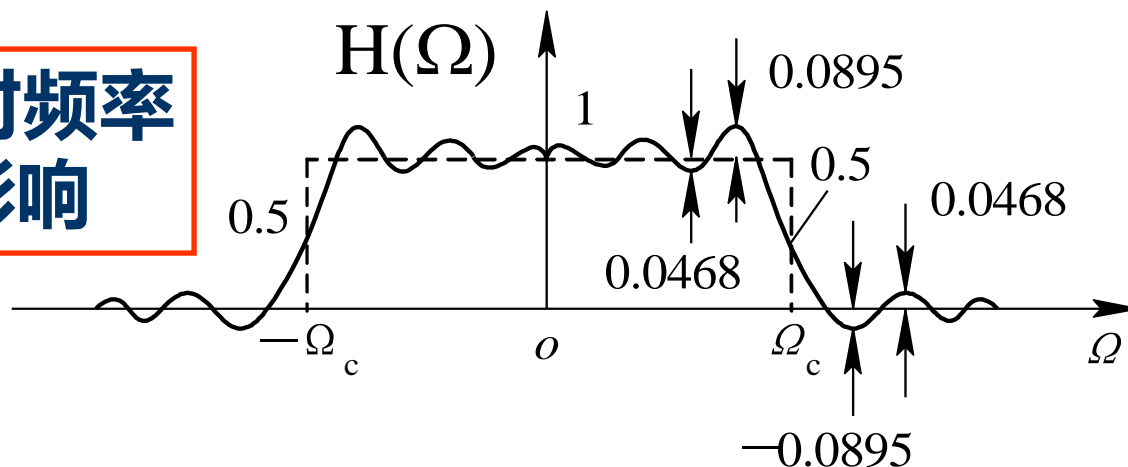


$$h(n) = h_d(n) \cdot W_N(n)$$

$$N = 2K_0 + 1$$

理想低通的单位脉冲响应及矩形窗

## 窗函数对频率特性的影响

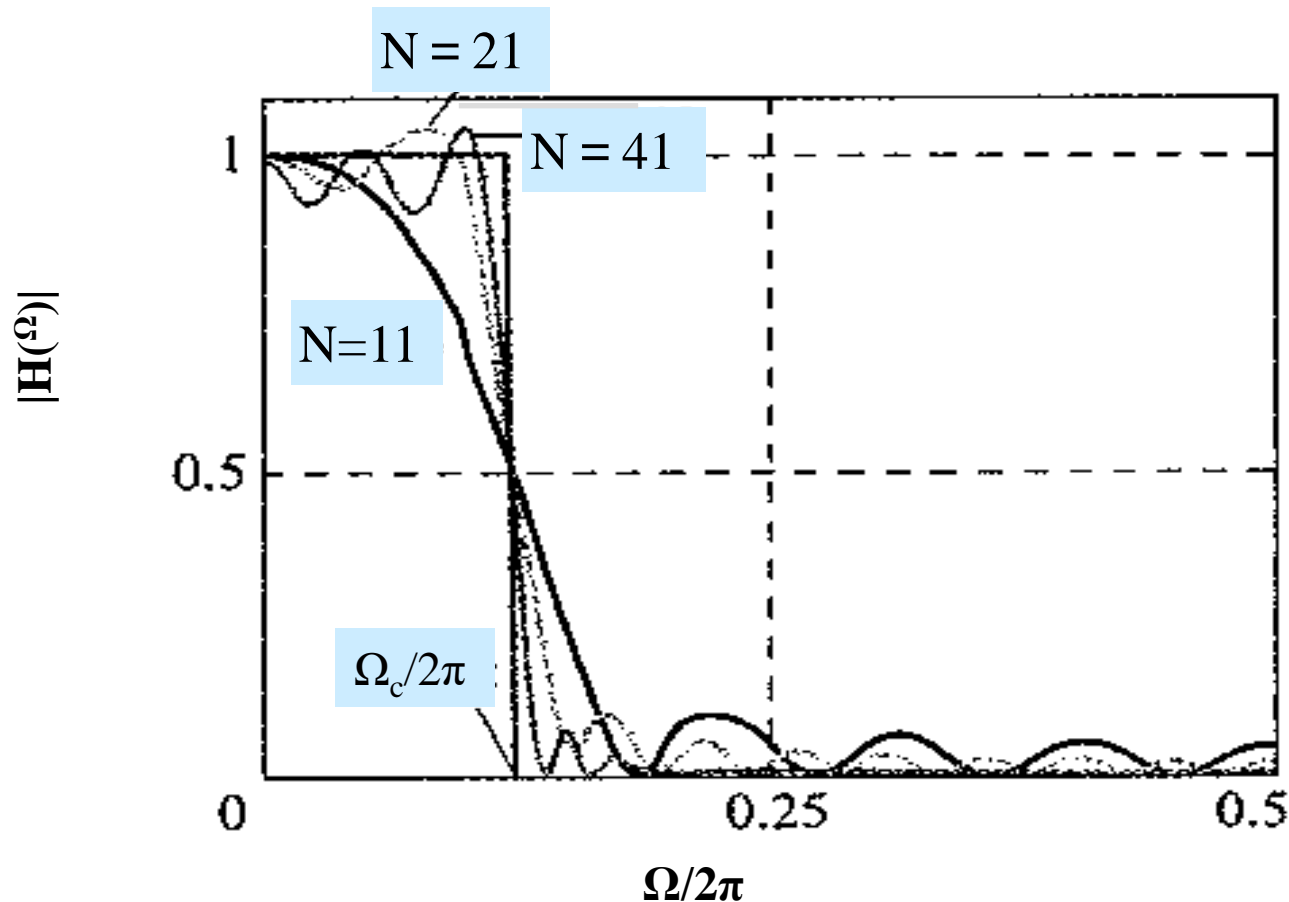


(a)  $H(\Omega)$ 将 $H_{dA}(\Omega)$ 在截止频率处的间断点变成了连续曲线，使理想频率特性不连续点处边沿加宽，形成一个过渡带，过渡带宽度等于窗的频率响应 $W_N(\Omega)$ 的主瓣宽度。**窗函数主瓣越宽，过渡带越宽。**

(b) 在截止频率 $\Omega_c$ 的两边即 $\Omega=\Omega_c \pm (2\pi/N)$ 的地方， $H(\Omega)$ 出现最大的过冲值，过冲的两侧形成起伏振荡，**其振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度，而振荡的多少，则取决于旁瓣的多少。**

(c) **增加窗函数的长度 $N$ 只能减少过渡带宽度，但不能改变主瓣和旁瓣的相对值，即不能改变过冲值。**

由于过冲值的大小直接影响通带特性和阻带衰减，所以对滤波器的性能影响较大。例如，在矩形窗情况下，最大相对过冲值为8.95%， $N$ 增加时， $2\pi/N$ 减小，起伏振荡变密，最大相对过冲值则总是8.95%，这种现象称为**吉布斯(Gibbs)现象**。



FIR低通滤波器  
，  $\Omega_c = 0.25\pi$ ，  
 $N$ 不同的幅频  
特性（矩形窗）

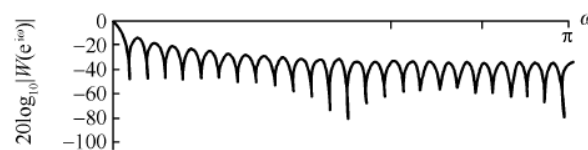
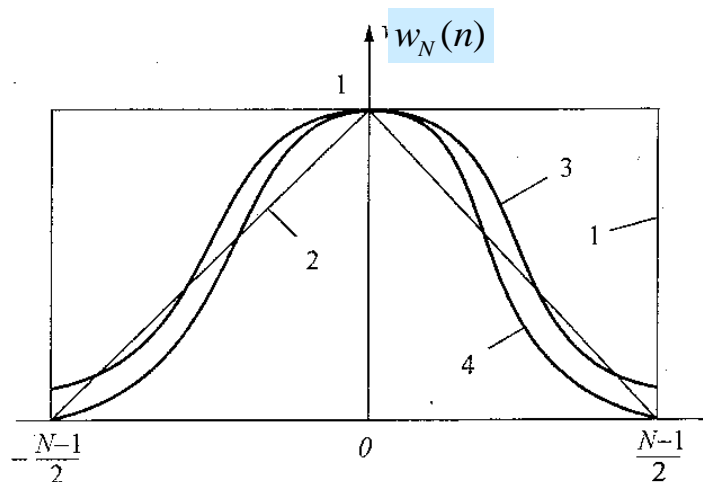
一般希望选取的窗函数应该满足以下要求：

(1) 窗函数频谱的**主瓣应该尽可能窄**，以获得较陡的过渡带；

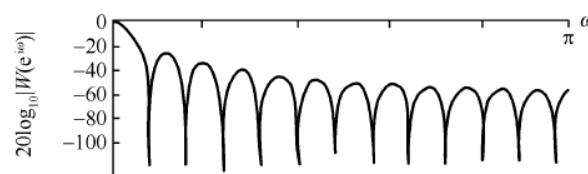
(2) **尽量减少窗函数频谱的（最大）旁瓣的相对幅度**，使能量尽量集中于主瓣，使过冲减少，平滑通带以及增大对阻带的衰减（得到较小的阻带纹波）。

**以上两项要求并不能同时得到满足**，如选用的窗函数  $w_N(n)$  在边沿处（ $n = 0$  和  $n = N-1$  附近）比矩形窗变化要平滑而缓慢，以减少由陡峭的边缘所引起的旁瓣分量。此时窗函数频谱的主瓣宽度比矩形窗的要宽，造成滤波器幅度函数过渡带的加宽。

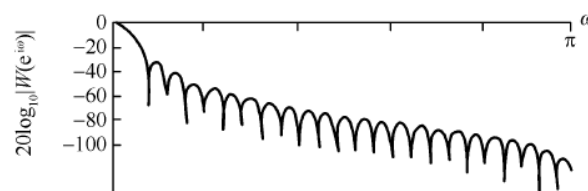
窗函数	时域表示式 $w_N(n)$ $n \leq k \leq N-1$	最小阻带衰减(dB)	精确过渡带宽 $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_c$ (rad) $r$	主瓣宽度 (近似过渡带宽)
矩形窗	$1(k)$	21	$1.8\pi/N$	$4\pi/N$
三角形窗	$1 - \frac{2(k - \frac{N-1}{2})}{N-1}$	25	$6.1\pi/N$	$8\pi/N$
哈明窗	$0.54 - 0.46\cos \frac{2\pi k}{N-1}$	53	$6.6\pi/N$	$8\pi/N$
布拉克曼窗	$0.42 - 0.5\cos \frac{2\pi k}{N-1} + 0.08\cos \frac{4\pi k}{N-1}$	74	$11\pi/N$	$12\pi/N$
凯塞窗	$\frac{I_0\left[\beta\sqrt{(\frac{N-1}{2})^2 - (k - \frac{N-1}{2})^2}\right]}{I_0\left[\beta(\frac{N-1}{2})\right]}$	$50(\beta = 4.538)$	$5.8\pi/N$	$12\pi/N$
海宁窗	$\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2\pi k}{N-1})$	44	$6.2\pi/N$	$8\pi/N$



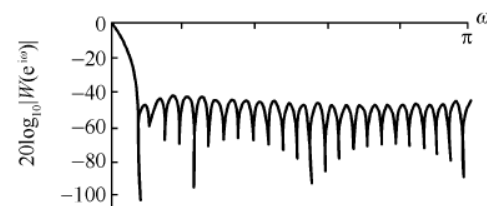
(a) 矩形窗



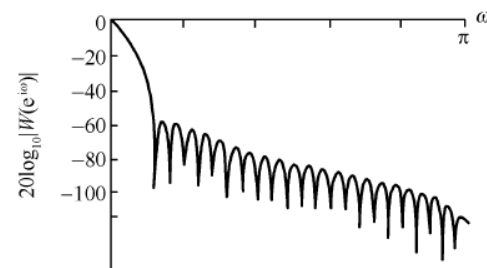
(b) 巴特列特窗 (三角形窗)



(c) 汉宁窗

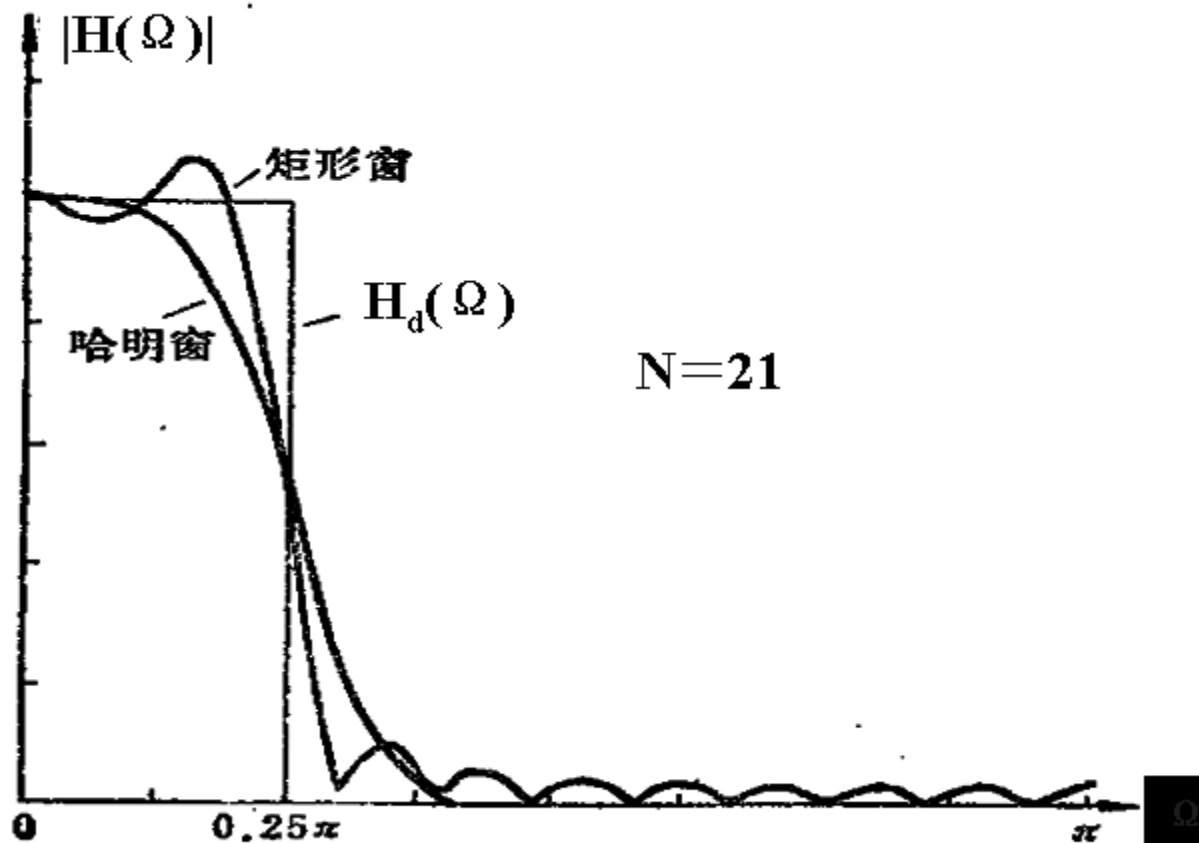


(d) 海明窗



(e) 布拉克曼窗

**常用窗函数形状（轮廓线）及其特性比较**



FIR低通滤波器  
 $\Omega_c = 0.25\pi$ ,  $N = 21$  时, 采用  
 不同窗函数的  
 幅频特性的比  
 较。

使用哈明窗后, 通带内的振荡基本消失, 阻带内的纹波也大大减小, 但这是以加宽过渡带为代价的。

## 窗函数法设计数字滤波器步骤：

1) 根据通带、阻带衰减及过渡带宽等设计指标选择窗函数 $w_N(n)$ ，并确定窗宽 $(N)$ 和截止频率 $\Omega_C$ 。

低通数字滤波器，精确过渡带宽 $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p$

$$\Omega_C \approx \frac{\Omega_s + \Omega_p}{2}$$

2) 根据设计要求的理想滤波器频率特性 $H_d(\Omega)$ 求出无限长单位响应 $h_d(n)$ 。

3) 用 $w_N(n)$ 截断 $h_d(n)$ 得到实际滤波器的 $h(n)$ 。

4) 求出所设计滤波器的系统函数和频率特性。



**例 设计一线性相位FIR低通滤波器。通带截止频率 $\Omega_p=0.2\pi$ ，通带允许波动 $A_p=0.25\text{dB}$ ；阻带截止频率 $\Omega_s=0.3\pi$ ，阻带衰减 $A_s=50\text{dB}$ 。**

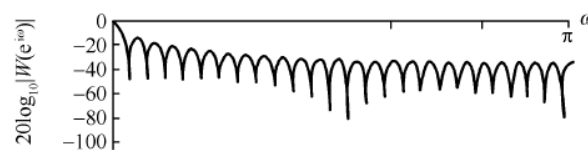
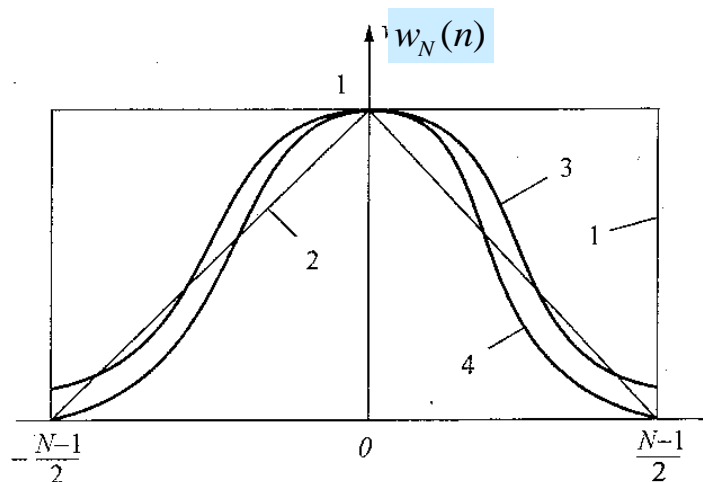
**解** 查表可知，哈明窗和布莱克曼窗均可提供大于50dB的衰减。但哈明窗具有较小的过渡带从而具有较小的长度 $N$ 。

根据题意，所要设计的滤波器的过渡带宽为：

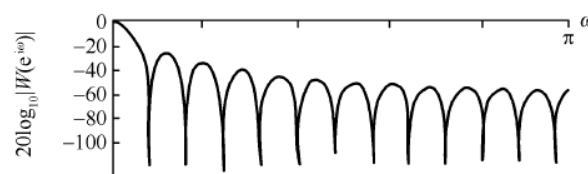
$$\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p = 0.3\pi - 0.2\pi = 0.1\pi$$

由表可知，利用哈明窗设计的滤波器的过渡带宽 $\Delta\Omega=8\pi/N$ （也可以令 $\Delta\Omega=6.6\pi/N$ ），所以低通滤波器单位脉冲响应的长度为：

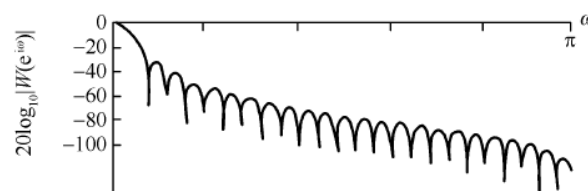
窗函数	时域表示式 $w_N(n)$ $n \leq k \leq N-1$	最小阻带衰减(dB)	精确过渡带宽 $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_c$ (rad) $r$	主瓣宽度 (近似过渡带宽)
矩形窗	$1(k)$	21	$1.8\pi/N$	$4\pi/N$
三角形窗	$1 - \frac{2(k - \frac{N-1}{2})}{N-1}$	25	$6.1\pi/N$	$8\pi/N$
哈明窗	$0.54 - 0.46\cos \frac{2\pi k}{N-1}$	53	$6.6\pi/N$	$8\pi/N$
布拉克曼窗	$0.42 - 0.5\cos \frac{2\pi k}{N-1} + 0.08\cos \frac{4\pi k}{N-1}$	74	$11\pi/N$	$12\pi/N$
凯塞窗	$\frac{I_0\left[\beta\sqrt{(\frac{N-1}{2})^2 - (k - \frac{N-1}{2})^2}\right]}{I_0\left[\beta(\frac{N-1}{2})\right]}$	$50(\beta = 4.538)$	$5.8\pi/N$	$12\pi/N$
海宁窗	$\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2\pi k}{N-1})$	44	$6.2\pi/N$	$8\pi/N$



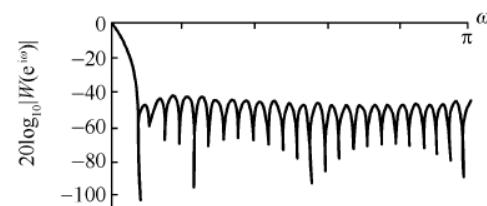
(a) 矩形窗



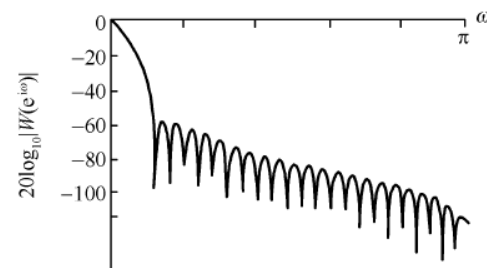
(b) 巴特列特窗 (三角形窗)



(c) 汉宁窗



(d) 海明窗



(e) 布拉克曼窗

**常用窗函数形状 (轮廓线) 及其特性比较**

$$N = \frac{8\pi}{\Delta\Omega} = \frac{8\pi}{0.1\pi} = 80$$

通带截止频率为:

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s + \Omega_p}{2} = 0.25\pi$$

理想低通滤波器的单位脉冲响应为:

$$h_d(n) = \frac{\sin[\Omega_c(n - K_0)]}{\pi(n - K_0)} \quad K_0 = \frac{N-1}{2}$$

哈明窗为

$$w_N(n) = \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

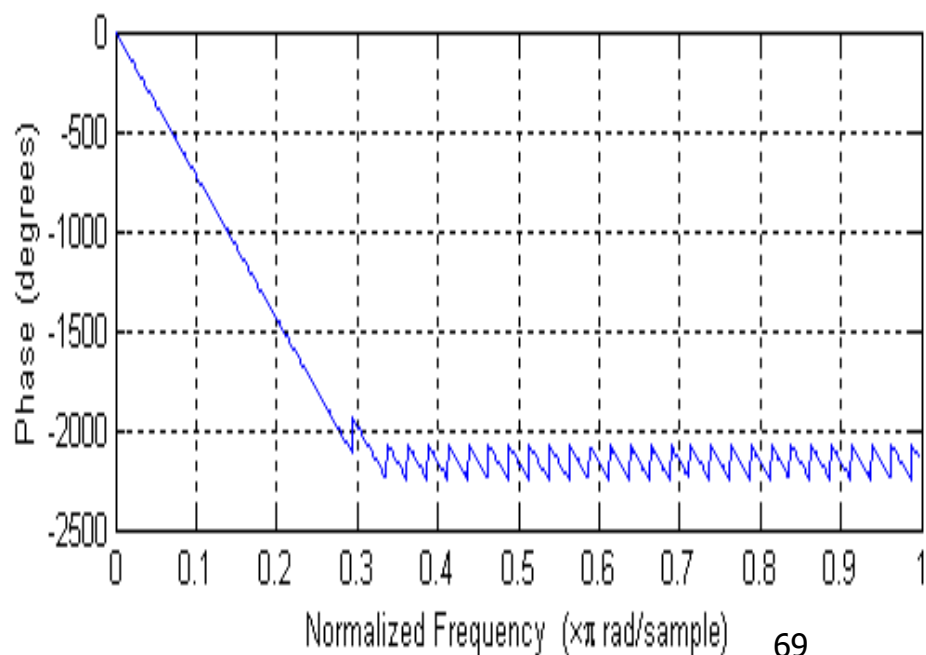
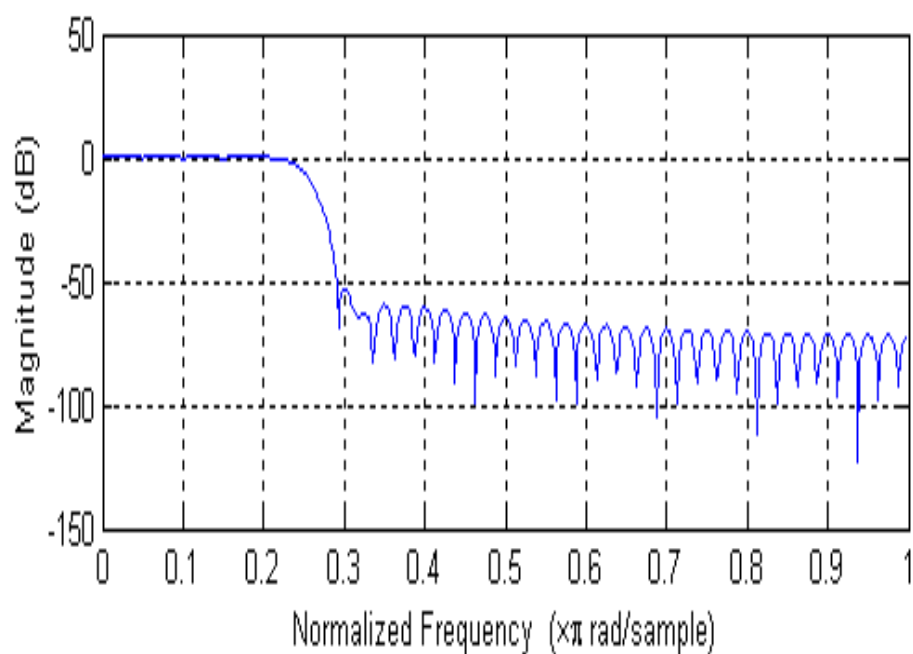
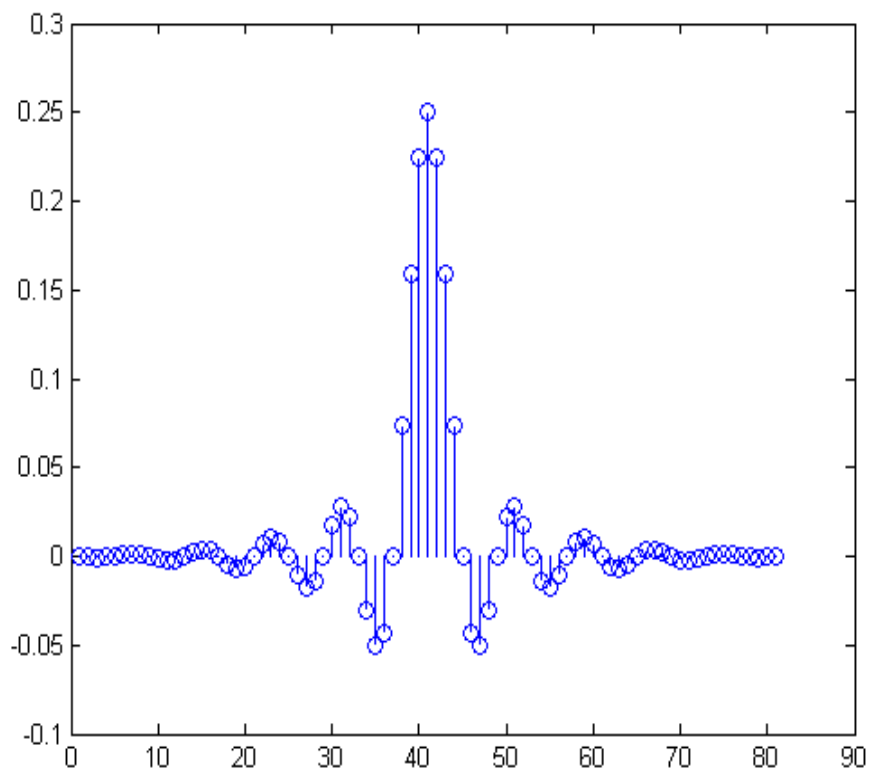
则所设计的滤波器的单位响应为:

$$h(n) = h_d(n)w_N(n) \\ = \frac{\sin[\Omega_c(n - K_0)]}{\pi(n - K_0)} \cdot \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(k)$$

所设计的滤波器的系统函数、频率响应为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\Omega n}$$

最终得到数字滤波器的指标为：  $N=80$ ，实际阻带衰减为  $A_r=53\text{dB}$ ，通带波动为  $A_p=0.0316 \text{ dB}$ ，均满足设计要求。



**所求线性相位FIR滤波器的单位响应及幅频特性和相频特性。**