自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第六章 Chapter 6

频率特性分析法(Frequency Response)

第六章关键词

- 频率、频率响应、频率特性
- 幅频特性、相频特性
- 对数频率特性（BODE图）
- 极坐标图（奈奎斯特图）
- 奈奎斯特稳定判据
- 稳定裕度（幅值裕度、相位裕度）
- 频域性能

第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性

极坐标图

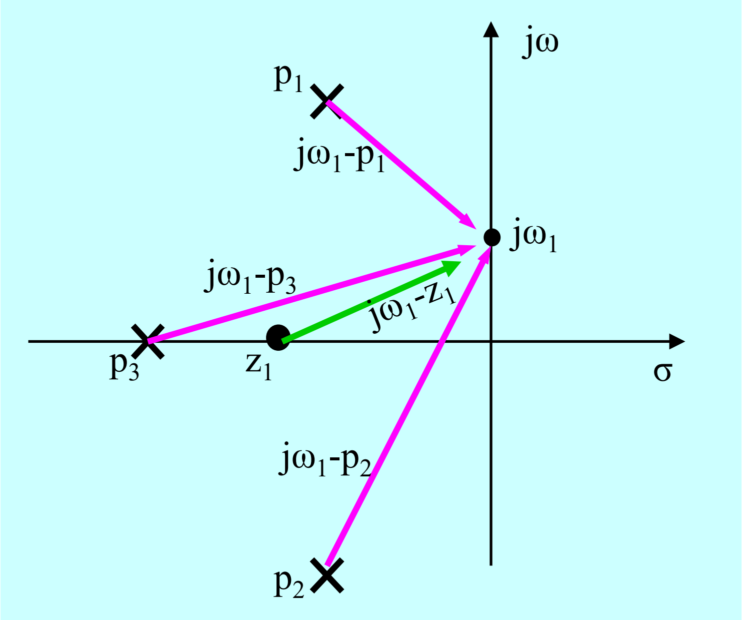
$G(s)$的极坐标图 (幅相曲线) 可以采用下述3种方法绘制：

- 变$G(s)$为$G(j\omega)$，在$[0,+\infty)$内取足够多个ω，计算每个ω对应的复数$G(j\omega)$，在复平面上标出相应的点。依ω增大方向将所有的点用光滑曲线连接。
- 从对数幅频曲线和相频曲线中，获取足够多的幅值$|G(j\omega)|$和相角，利用幅值和相角在复平面上标出相应的点。依ω增大方向光滑连接所有的点。
- 从零极点图中获得绘制幅相曲线的数据。

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

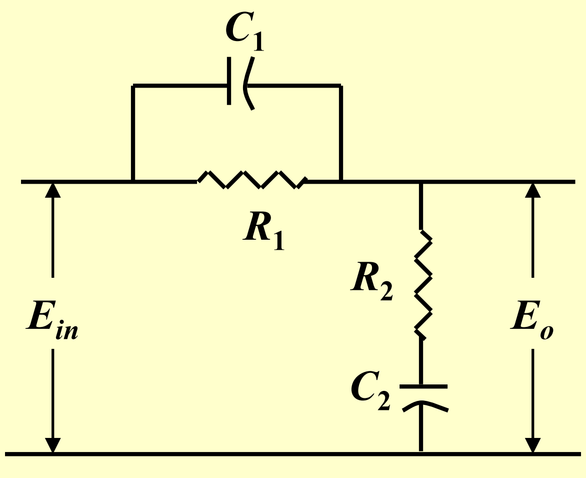
$$|G(j\omega)|=\frac{|K||j\omega-z_1|\cdots|j\omega-z_w|}{|j\omega-p_1|\cdots|j\omega-p_n|}$$

$$\angle G(j\omega)$$
$$=\angle K+\angle(j\omega-z_1)+\cdots\angle(j\omega-z_w)-\angle(j\omega-p_1)-\cdots-\angle(j\omega-p_n)$$



极坐标图——RC复合网络

对如图所示系统进行建模。给出传递函数 $G(s)=\dfrac{E_o(s)}{E_{in}(s)}$ ，然后确定系统的频率特性。



RC电路（滞后-超前补偿器）

$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_{in}(s)}=\frac{1+(T_1+T_2)s+T_1T_2s^2}{1+(T_1+T_2+T_{12})s+T_1T_2s^2}$$

$T_1=R_1C_1$ $T_2=R_2C_2$ $T_{12}=R_1C_2$

$$G(j\omega)=\frac{E_o(j\omega)}{E_{in}(j\omega)}=\frac{\left(1-\omega^2T_1T_2\right)+j\omega\left(T_1+T_2\right)}{\left(1-\omega^2T_1T_2\right)+j\omega\left(T_1+T_2+T_{12}\right)}$$

通过选择合适的时间常数，该电路可以作为滞后网络（在低频段 0 到 ω_x ）和超前网络（在高频段 ω_x 到 ∞）。

极坐标图——RC复合网络

$$G(j\omega)=\frac{E_o(j\omega)}{E_{in}(j\omega)}=\frac{\left(1-\omega^2T_1T_2\right)+j\omega\left(T_1+T_2\right)}{\left(1-\omega^2T_1T_2\right)+j\omega\left(T_1+T_2+T_{12}\right)}$$

令：$a=1-\omega^2T_1T_2$

$b=T_1+T_2+T_{12}$

$$G(j\omega)=1-\frac{\omega^2T_{12}b}{a^2+\omega^2b^2}-\mathrm{j}\frac{\omega T_{12}a}{a^2+\omega^2b^2}$$

$$\left(1-\frac{\omega^2T_{12}b}{a^2+\omega^2b^2}-\frac{b-0.5T_{12}}{b}\right)^2+\left(\frac{\omega T_{12}a}{a^2+\omega^2b^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-\omega^2T_{12}b^2+0.5T_{12}a^2+0.5\omega^2T_{12}b^2}{\left(a^2+\omega^2b^2\right)b}\right)^2+\left(\frac{\omega T_{12}ab}{\left(a^2+\omega^2b^2\right)b}\right)^2$$

$$=\left(\frac{0.5T_{12}}{b}\right)^2\frac{\left(a^2-\omega^2b^2\right)^2+\left(2\omega ab\right)^2}{\left(a^2+\omega^2b^2\right)^2}$$

$$=\left(\frac{0.5T_{12}}{b}\right)^2$$

幅相曲线在一个圆上，圆心$\frac{b-0.5T_{12}}{b}=\frac{T_1+T_2+0.5T_{12}}{T_1+T_2+T_{12}}$，半径$\frac{0.5T_{12}}{T_1+T_2+T_{12}}$

极坐标图——RC复合网络

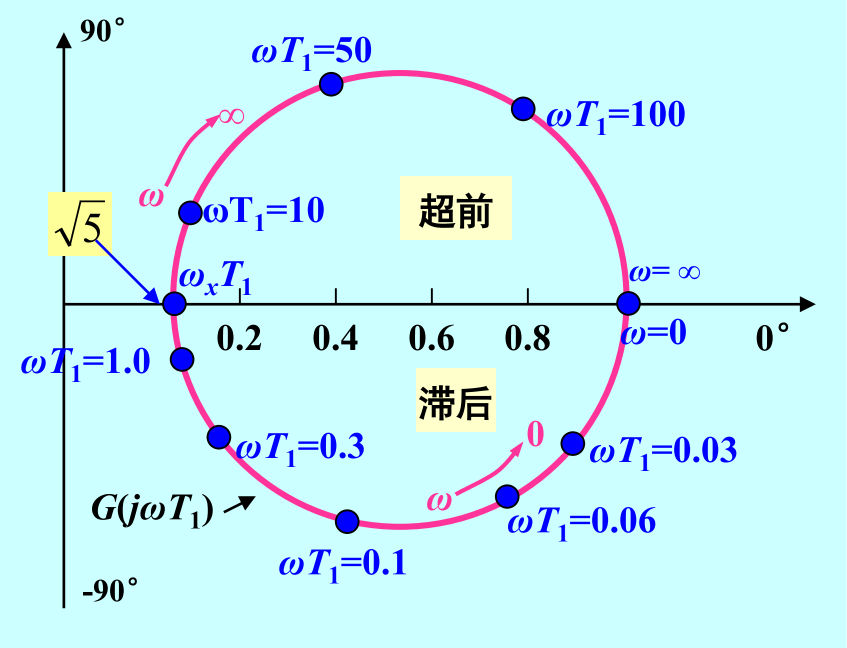
$$G(j\omega)=1-\frac{\omega^2T_{12}b}{a^2+\omega^2b^2}-\mathrm{j}\frac{\omega T_{12}a}{a^2+\omega^2b^2}$$

例如，令

$T_2=0.2T_1$

$T_{12}=10T_1$

$$G(j\omega)=\frac{1+(T_1+T_2)(j\omega)+T_1T_2(j\omega)^2}{1+(T_1+T_2+T_{12})(j\omega)+T_1T_2(j\omega)^2}$$
$$=\frac{(1+j\omega T_1)(1+j0.2\omega T_1)}{(1+j11.1\omega T_1)(1+j0.0179\omega T_1)}$$



根据ω 是小于或大于 ω_x，稳态正弦输出E_o 滞后或超前正弦输入E_{in}

传递函数的极坐标图是圆心在实轴上的圆，且位于第一、四象限。

极坐标图——RC复合网络

$$G(j\omega)=1-\frac{\omega^2T_{12}b}{a^2+\omega^2b^2}-\mathrm{j}\frac{\omega T_{12}a}{a^2+\omega^2b^2}$$

1) $\lim\limits_{\omega\to 0} G(j\omega T_1)\to 1\angle 0°$

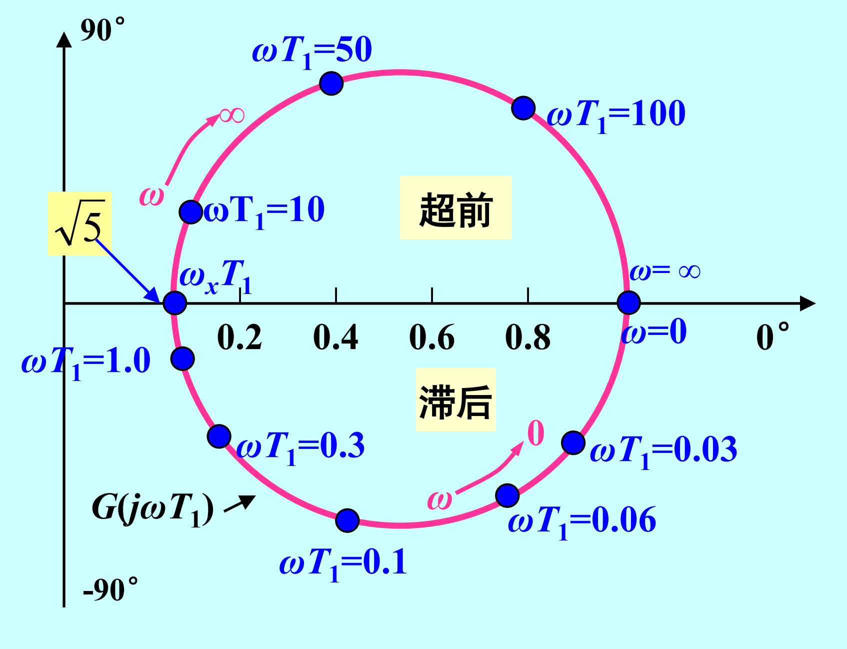
2) $\lim\limits_{\omega\to \infty} G(j\omega T_1)\to 1\angle 0°$

3）当$\omega=\omega_x$ 时，相角也为零

$$G(j\omega)=1-\frac{\omega^2T_{12}b}{a^2+\omega^2b^2}-\mathrm{j}\frac{\omega T_{12}a}{a^2+\omega^2b^2}$$

当$\omega=0,\omega=+\infty$或$a=0$时，虚部为零

$$\omega_x^2T_1T_2=1 \qquad G(j\omega_xT_1)=\frac{T_1+T_2}{T_1+T_2+T_{12}}$$



当频率小于ω_x 时，传递函数（频率响应）相角为负或具有滞后角.

当频率大于ω_x 时，传递函数（频率响应）相角为正或具有超前角.

——称为滞后-超前补偿器

极坐标图

绘制系统开环频率特性极坐标图的步骤：

1. 将系统开环传递函数分解成若干典型环节的串联形式；
2. 典型环节幅频特性相乘得到系统开环幅频特性；
3. 典型环节相频特性相加得到系统开环相频特性；
4. 如幅频特性有渐近线，则根据开环频率特性表达式的实部和虚部，求出渐近线；
5. 最后在$G(j\omega)H(j\omega)$平面上绘制出系统开环频率特性的极坐标图。

极坐标图—— 0型反馈控制系统

0 型反馈控制系统

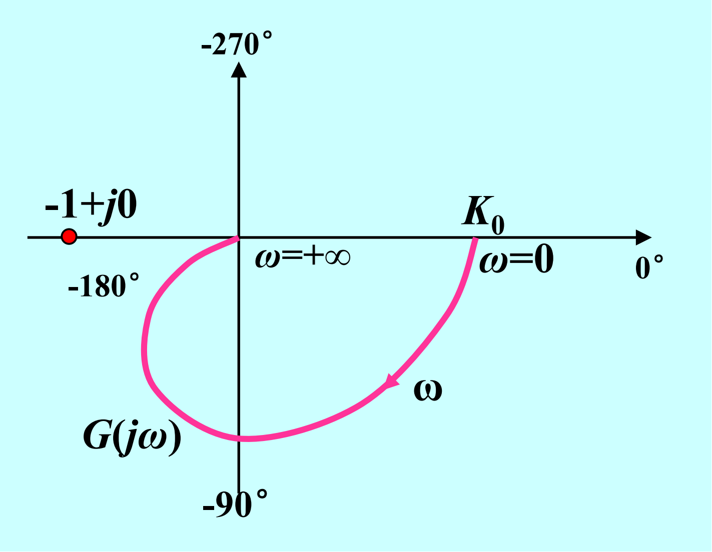
$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_0}{(1+j\omega T_f)(1+j\omega T_m)}$$

$$\begin{cases} K_0\angle 0^\circ & \omega\to 0^+ \\ 0\angle -180^\circ & \omega\to\infty \end{cases}$$

每一典型环节当ω从0到∞变化时，相角变化 0 到 -90°

$G(j\omega)$的极坐标图起始于$G(j\omega)=K_0\angle 0^\circ$ （$\omega=0$），首先穿过第四象限，然后穿过第三象限，当频率接近无穷大时，达到 $\lim_{\omega\to\infty}=0\angle -180^\circ$ 。

$G(j\omega)$ 的相角持续减小，顺时针方向从0°变化到 -180° 。



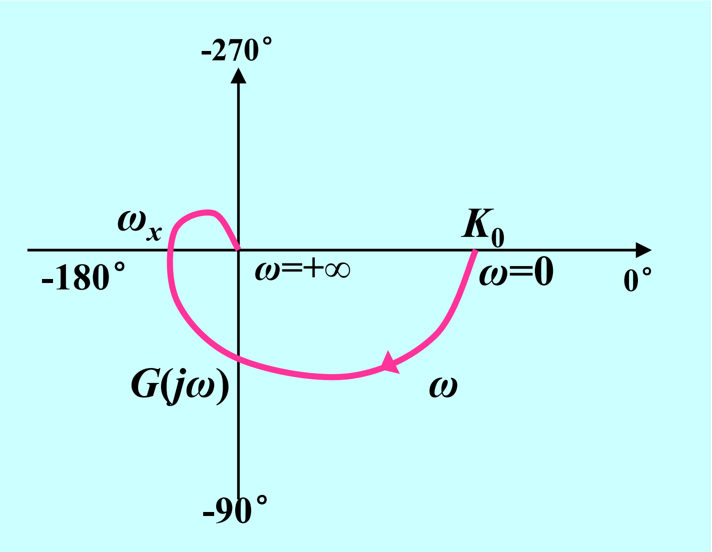
极坐标图—— 0型反馈控制系统

若上述系统分母上还存在一个$1+j\omega T$环节，则传递函数

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_0}{(1+j\omega T_f)(1+j\omega T_m)(1+j\omega T)}$$

$G(j\omega)|_{\omega=\infty}$ 顺时针旋转增加90°。

当 $\omega\to\infty$， $G(j\omega)\to 0\angle -270^\circ$。这种情况下，系统在$\omega=\omega_x$时穿越实轴（虚部为零）。

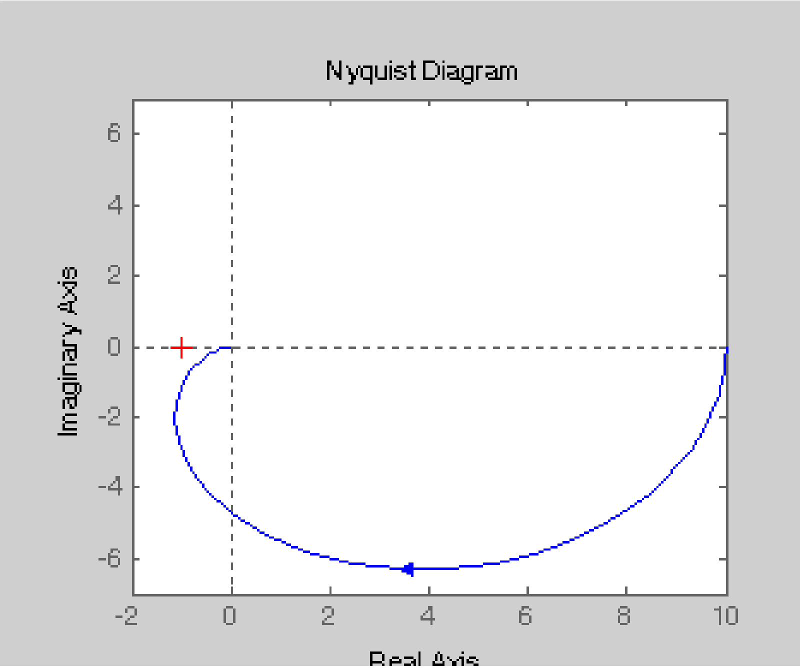


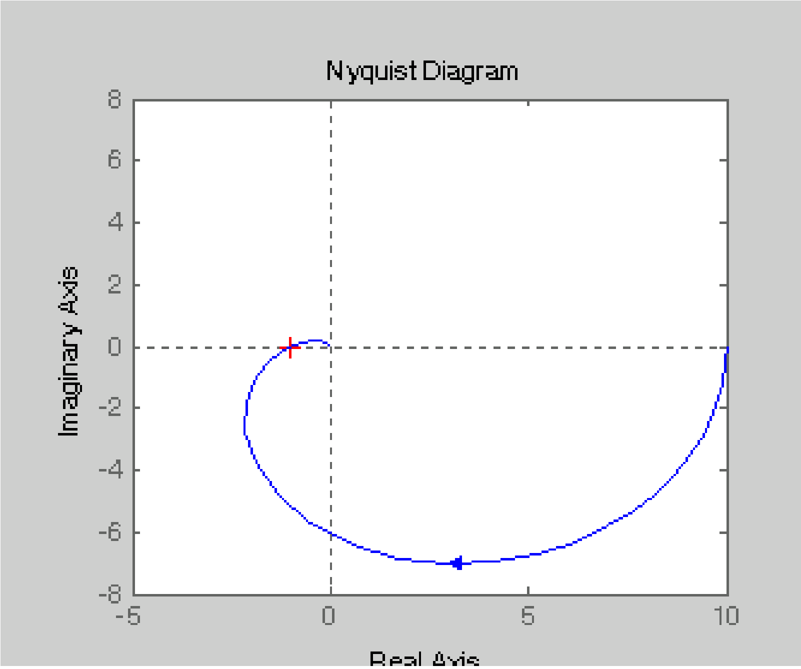
极坐标图—— 0型反馈控制系统

例6-13

$$G_1(j\omega)=\frac{10}{(1+j5\omega)(1+j10\omega)}$$

$$G_2(j\omega)=\frac{10}{(1+j5\omega)(1+j10\omega)(1+j15\omega)}$$





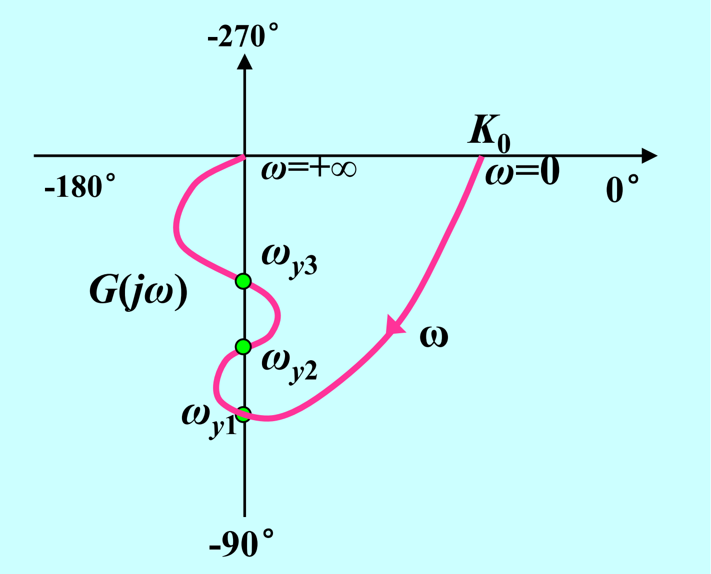
极坐标图—— 0型反馈控制系统

当分子出现$1+j\omega T$时，频率从0变化到∞，频率响应增加0到90°的相角变化（逆时针旋转）。

随着频率的增加，$G(j\omega)$的相角将不再单调变化。例如，传递函数

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_0(1+j\omega T_1)^2}{(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)(1+j\omega T_4)^2}$$

➢ 当时间常数T_2 和 T_3 大于 T_1，且T_1 大于 T_4时，极坐标图有“dent(凹痕，齿)”



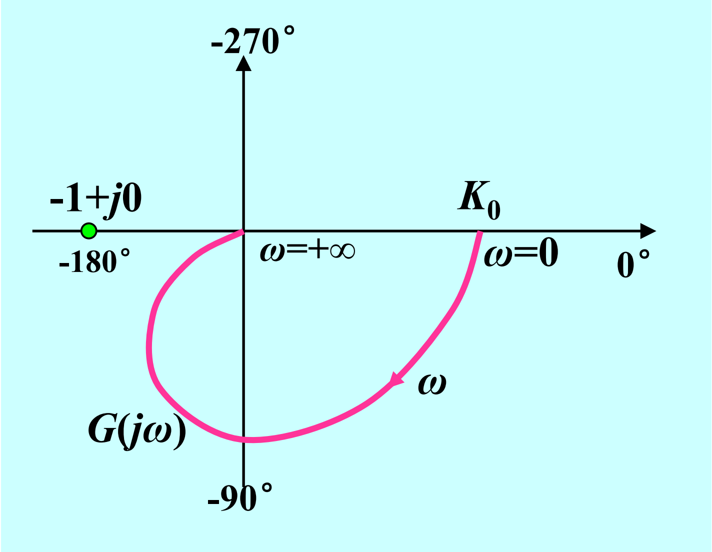
极坐标图—— 0型反馈控制系统

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_0(1+j\omega T_1)^2}{(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)(1+j\omega T_4)^2}$$

➢ 当T_1 小于其他时间常数时，极坐标图与下列系统的比较相似

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_0}{(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$$

传递函数分子或分母的二次项式将产生0 到 ±180° 的相角变化，$G(j\omega)$的极坐标图也相应发生变化。



结论：

0 型系统的极坐标图总是起始（$\omega=0$）于正实轴K_0 (阶跃误差系数)，终止（$\omega=\infty$）于原点(当$n>w$，幅值为0) 且与某一坐标轴成切线方向。终止角是 -90° 乘以$G(j\omega)$的分母阶次与分子阶次的差（$n-w$）。极坐标图上的箭头表示频率增加的方向。

极坐标图—— I型反馈控制系统

I 型反馈控制系统

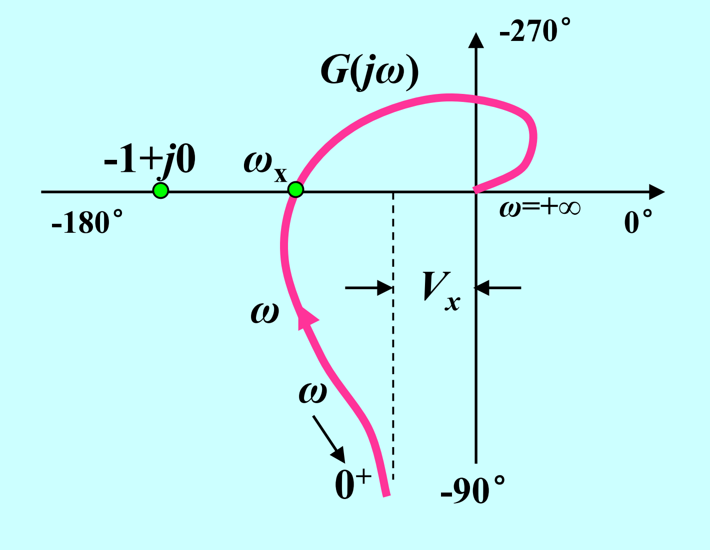
$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_1}{j\omega(1+j\omega T_m)(1+j\omega T_c)(1+j\omega T_q)}$$

$$G(j\omega)\to\begin{cases}\infty\angle-90^\circ & \omega\to 0^+\\ 0\angle-360^\circ & \omega\to\infty\end{cases}$$

分母上的 $j\omega$ 对所有频率都产生-90°的相角

由于1+$j\omega T$ 环节均出现在分母，极坐标图没有凹点。

当ω由0到∞变化时，$G(j\omega)$的相角变化由–90到-360°单调减小。



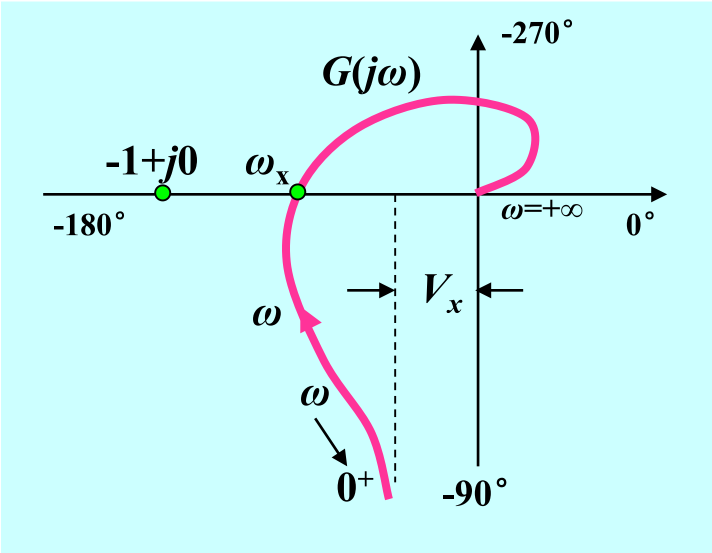
极坐标图—— I型反馈控制系统

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_1}{j\omega(1+j\omega T_m)(1+j\omega T_c)(1+j\omega T_q)}$$

任何出现在分子上的环节（含频率）对极坐标图的影响与0型系统类似。

当ω趋近于0时，$G(j\omega)$的幅值接近于无穷大。
在原点的左侧存在一条平行于-90°轴线的线，
满足$\omega\to 0$时$G(j\omega)$渐近趋于-90°。

$$V_x=\lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]$$



对于所给的传递函数：

$$\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]=\frac{-K_1\left[(1-\omega^2T_mT_c)T_q+(T_m+T_c)\right]}{(1+\omega^2T_m^2)(1+\omega^2T_c^2)(1+\omega^2T_q^2)} \Rightarrow V_x=-K_1\left(T_q+T_c+T_m\right)$$

极坐标图—— I型反馈控制系统

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_1}{j\omega\left(1+j\omega T_m\right)\left(1+j\omega T_c\right)\left(1+j\omega T_q\right)}$$

$G(j\omega)$负实轴穿越点的频率ω_x，该点处$G(j\omega)$的虚部为0

$$\boxed{\mathrm{Im}\left[G(j\omega_x)\right]=0}$$

对于本系统：

$$\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]=\frac{-K_1\left[(1-\omega^2T_mT_c)-(T_m+T_c)T_q\omega^2\right]}{\omega(1+\omega^2T_m^2)(1+\omega^2T_c^2)(1+\omega^2T_q^2)}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_x=\left(T_cT_q+T_qT_m+T_mT_c\right)^{-\frac{1}{2}}$$

决定了闭环稳定性！

极坐标图——I型反馈控制系统

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_1}{j\omega\left(1+j\omega T_m\right)\left(1+j\omega T_c\right)\left(1+j\omega T_q\right)}$$

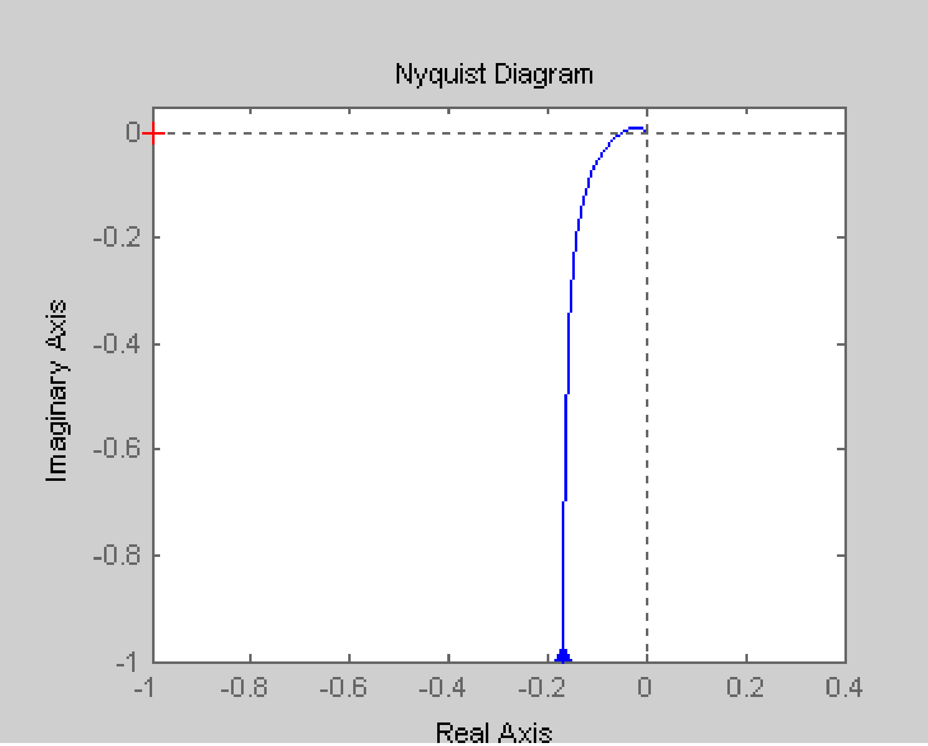
例6-14

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j0.02\omega)(1+j0.1\omega)(1+j0.05\omega)}$$

$$V_x=-K_1\left(T_q+T_c+T_m\right)$$
$$=-(0.02+0.1+0.05)$$
$$=-0.17$$

$$\omega_x=\left(T_cT_q+T_qT_m+T_mT_c\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\left(0.002+0.005+0.001\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=11.18$$

$$G(j\omega_x)=-0.0508$$



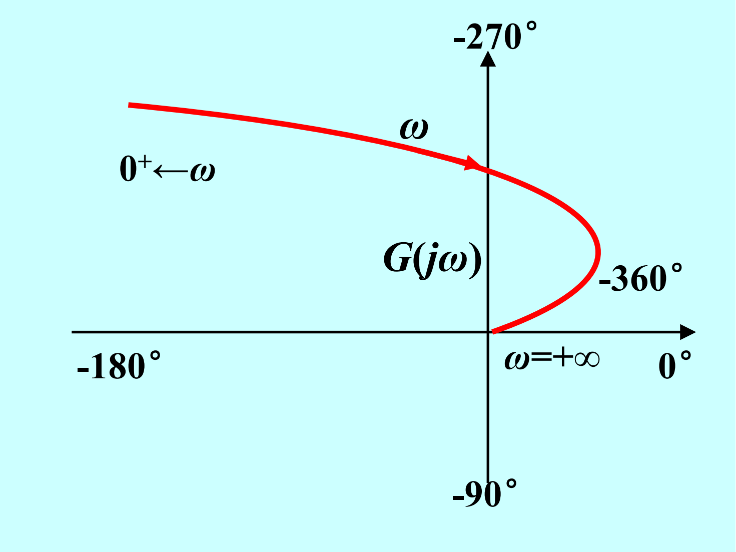
极坐标图—— II型反馈控制系统

II 型反馈控制系统

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_2}{(j\omega)^2(1+j\omega T_f)(1+j\omega T_m)}$$

$$G(j\omega)\to\begin{cases}\infty\angle-180^\circ & \omega\to0^+\\ 0\angle-360^\circ & \omega\to+\infty\end{cases}$$

分母上的 $(j\omega)^2$ 对所有频率都产生 -180° 的相角



极坐标图很光滑，当ω 从0 增加到 ∞时，相角$\Phi(\omega)$由–180连续减少到-360° 。

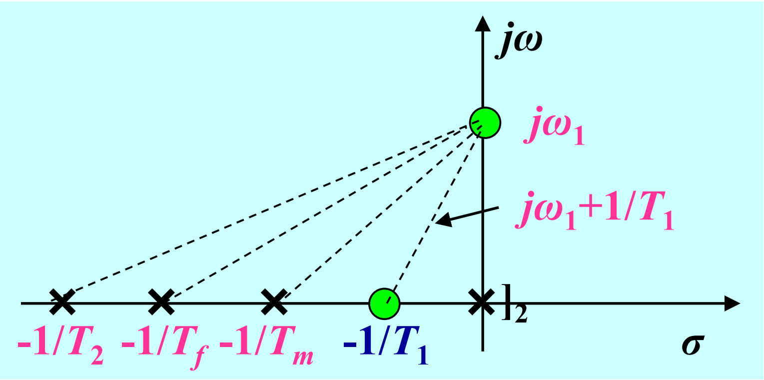
极坐标图—— II型反馈控制系统

附加零点和极点将改变极坐标图的形状。考虑传递函数

$$G_0(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_2'(1+j\omega T_1)}{(j\omega)^2(1+j\omega T_f)(1+j\omega T_m)(1+j\omega T_2)}$$

$$T_1>T_2+T_f+T_m$$

由零极点图可以得到极坐标图。



$$G_0(j\omega)=\frac{K_2'T_1}{T_fT_mT_2}\frac{(s+1/T_1)}{s^2(s+1/T_f)(s+1/T_m)(s+1/T_2)}$$

当 $s=j\omega=j0^+$，除了原点处的2个极点，其余每个环节的相角都为0。因此$\omega=0^+$时的相角为 -180°。

当 ω 从0开始增大，$j\omega+1/T_1$ 相角增大的比其他极点快。$G_0(j\omega)$的相角在低频段大于 -180°。

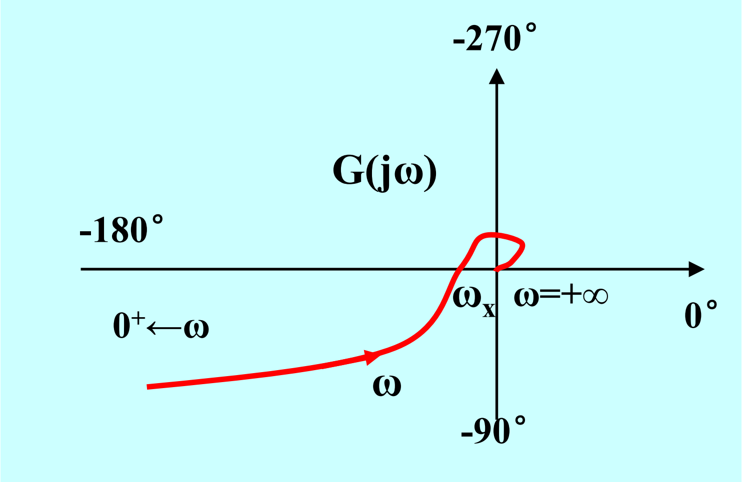
极坐标图—— II型反馈控制系统

$$G_0(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K_2'(1+j\omega T_1)}{(j\omega)^2(1+j\omega T_f)(1+j\omega T_m)(1+j\omega T_2)}$$

随着频率的增加达到ω_x，$G_0(j\omega)$ 各环节的相角和为 -180°，极坐标图穿越负实轴。

当ω进一步增加，$j\omega+1/T_1$ 的相角增大较慢，但是极点处的相角增加较快。

极限状态，当 $\omega\to\infty$，$j\omega+1/T_1$ 的相角和 $j\omega+1/T_i(i=f,m,2)$的相角相等，符号相反，因此$G(j\omega)$的相角接近于 -360°。



对于II 型系统，当$\omega\to0^+$，极坐标图接近 -180°，且当$\sum(T_{分子})-\sum(T_{分母})$ 为正时，极坐标图在实轴下方，当$\sum(T_{分子})-\sum(T_{分母})$ 为负时，极坐标图在实轴上方。当$\omega\to\infty$，相角接近于 -$(n-w)$90°。

极坐标图—— 总结

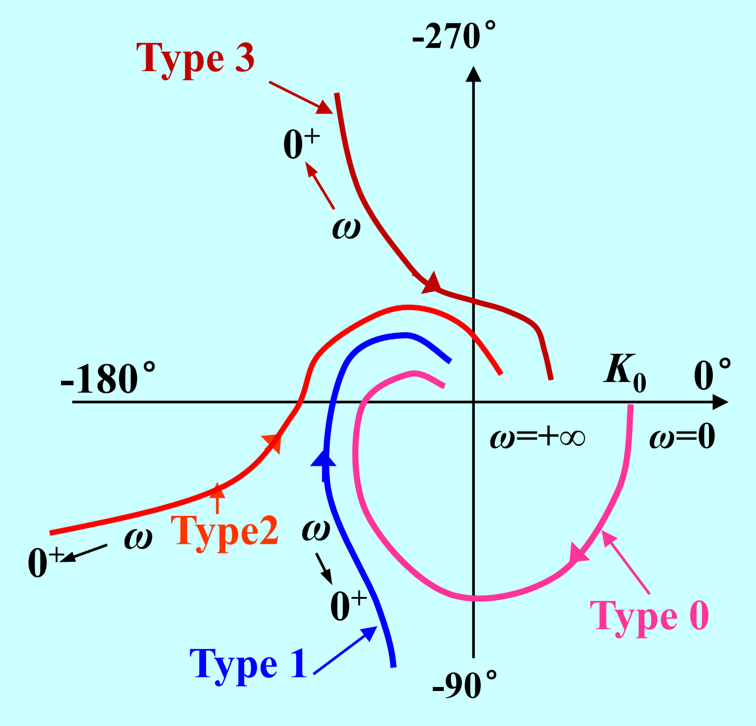
为了获得系统开环传递函数的极坐标图，经常采用下列方法来确定曲线的主要部分：

第一步：开环传递函数的一般形式与低频段特点

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\cdots(1+j\omega T_w)}{(j\omega)^m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_u)}$$

系统的型别为m，决定了系统极坐标图的起点$\lim_{\omega\to 0}G(j\omega)$。

不同型别系统的极坐标图(K_m>0，T_i>0）在低频段的特点 (当$\omega\to 0$) 如图所示。ω=0 时的相角为$m\times(-90^\circ)$。



极坐标图—— 总结

第二步：极坐标图的终点

$$\lim_{\omega\to+\infty} G(j\omega) = 0\angle(w-m-u)90^\circ$$

由于分母的阶次通常大于分子的阶次，极坐标图终止于原点，且原点的入射角由上式决定，高频点 ($\omega=\infty$) 是顺时针接近的（与坐标轴相切）。

第三步：I型系统的低频渐近线通过取$\omega\to0$时传递函数实部的极限来确定。

极坐标图—— 总结

第四步：极坐标图与负实轴和虚轴的交点处的频率可以分别用以下方法获得，即 $\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]=0$，$\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]=0$

第五步：若传递函数分子没有与$j\omega$相关的环节，则曲线光滑，且$G(j\omega)$的相角随ω由0变化到∞而连续减小。

若传递函数分子有与$j\omega$相关的环节，根据分子时间常数的大小，极坐标图的相角将不会单调变化，而会产生凹点“dents”。

第六步：了解$G(j\omega)$极坐标图在$-1+j0$点附近的形状以及与负实轴的交点非常重要——关系到系统的稳定性判别。

通过起点$(\omega=0)$、实轴交点$(\mathrm{Im}(G(j\omega)=0)$、虚轴交点$(\mathrm{Re}(G(j\omega)=0)$、终点$(\omega=\infty)$、相角变化$(\angle G(j\omega))$和幅值变化$(|G(j\omega)|)$等情况，综合判断幅相曲线会出现在哪些象限以及在不同象限间进出的情况

极坐标图—— 总结

概略开环幅相曲线应反映开环频率特性的三个重要要素：

1）开环幅相曲线的起点（ω=0）和终点（ω=∞）

2）开环幅相曲线和实轴的交点

设$\omega=\omega_x$时，$G(j\omega_x)H(j\omega_x)$的虚部为零，即

$$\mathrm{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0 \quad \text{或者} \quad \varphi(\omega_x)=\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x)=k\pi$$

称ω_x为穿越频率，而开环频率特性与实轴交点的坐标值为

$$\mathrm{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=G(j\omega_x)H(j\omega_x)$$

3）开环幅相曲线的变化范围（起始与结束的象限、随ω↑的单调性）

极坐标图——示例

例6-15 设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(Ts+1)(s^2/\omega_n^2+1)}\qquad K,T>0$$

试绘制系统开环概略幅相曲线（polar plot 极坐标图）。

解： 系统开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega T+1)((j\omega)^2/\omega_n^2+1)}=\frac{-K(T\omega+j)}{\omega(1+\omega^2T^2)(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})}$$

开环幅相曲线的起点： $G(j0)H(j0)=\infty\angle-90^\circ$

开环幅相曲线的终点： $G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-360^\circ$

由开环频率特性表达式知，$G(j\omega)H(j\omega)$的虚部不为零，故与实轴无交点。

极坐标图——示例

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega T+1)((j\omega)^2/\omega_n^2+1)}$$

开环系统中含有等幅振荡环节(ζ=0)，

当ω趋于ω_n时，$|GH(j\omega_n)|$趋于无穷大，而相频特性

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-K(T\omega+j)}{\omega(1+\omega^2T^2)(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-\angle j\omega-\angle(j\omega T+1)-\angle[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]$$

$$\varphi(\omega_{n-})\approx-90°-tg^{-1}(T\omega_n)-0°>-180°$$

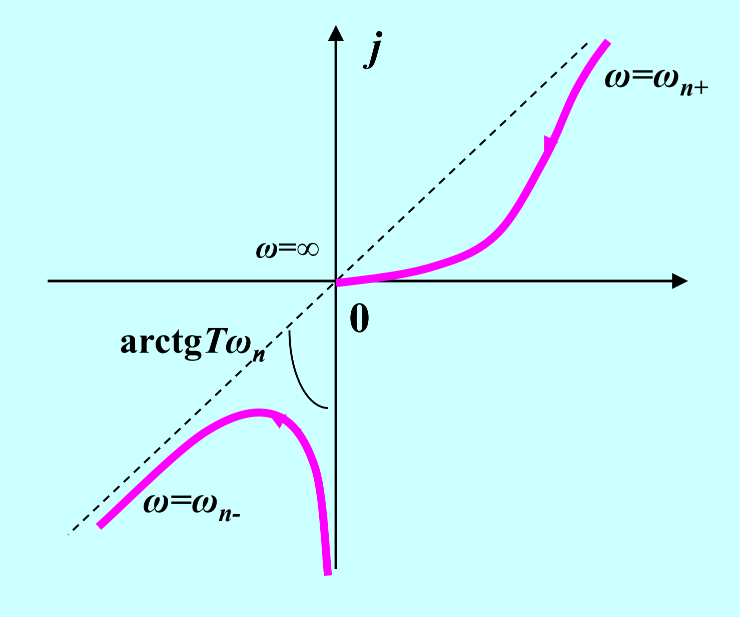
$$\omega_{n-}=\omega_n-\varepsilon,\quad \varepsilon>0$$

3rd 象限

$$\varphi(\omega_{n+})\approx-90°-tg^{-1}(T\omega_n)-180°>-360°$$

$$\omega_{n+}=\omega_n+\varepsilon,\quad \varepsilon>0$$

1st 象限



即$\Phi(\omega)$在$\omega=\omega_n$的附近，相角突变-180°，幅相曲线在ω_n处呈现不连续现象。

极坐标图——示例

例6-16　设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)},\quad K>0$ ⇨ $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)}=\dfrac{-K(s+4)}{s(1-s)}$

试绘制系统开环概略幅相曲线（极坐标图）。

解：系统开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(j\omega+4)}{j\omega(j\omega-1)}=\frac{-5K}{\omega^2+1}+j\frac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$$

幅频特性为

$$|G(j\omega)H(j\omega)|=\frac{K\sqrt{\omega^2+16}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$$

相频特性为

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-180^\circ-90^\circ+\mathrm{arctg}\frac{\omega}{4}-(-\mathrm{arctg}\omega)=-270^\circ+\mathrm{arctg}\frac{\omega}{4}+\mathrm{arctg}\omega$$

开环幅相曲线的起点：$G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle-270^\circ \Rightarrow V_x=\mathrm{Re}\,G(j0^+)H(j0^+)=-5K$

开环幅相曲线的终点：$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-90^\circ$

当K不为零，$G(j\omega)H(j\omega)$的实部不为零，故与虚轴无交点。

极坐标图——示例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+4)}{s(s-1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(j\omega+4)}{j\omega(j\omega-1)}=\frac{-5K}{\omega^2+1}+j\frac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$$

开环幅相曲线的起点：$G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle-270°\Rightarrow V_x=\mathrm{Re}\,G(j0^+)H(j0^+)=-5K$

开环幅相曲线的终点：$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-90°$

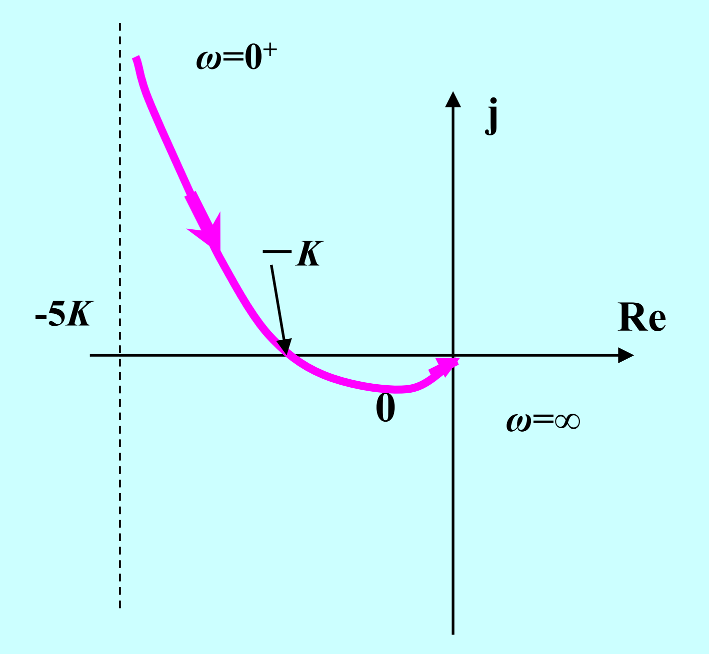
当K不为零，$G(j\omega)H(j\omega)$的实部不为零，故与虚轴无交点。

令虚部为零，可求出频率特性与实轴的交点时的频率值为

$$\mathrm{Im}\,G(j\omega)H(j\omega)=0\Rightarrow\frac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}=0\Rightarrow\omega=2rad/s$$

此时，实部的坐标：

$$\mathrm{Re}\,G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-5K}{\omega^2+1}=-K$$



问题？——I 型系统？

——S平面的右半平面有极点？

极坐标图

绘制开环概略幅相曲线的规律

1）开环幅相曲线的起点，取决于比例环节K和系统积分或微分环节的个数m（系统的型别），因为其他环节当ω=0时为1。

m<0，起点为原点；

m=0，起点为实轴上的点K处（K为系统开环增益，K有正负之分）；

m>0，K>0时，起点为m×(-90°)的无穷远处， K<0时，起点为 m×(-90°)-180°的无穷远处。

令虚部为零，可求出频率特性与实轴的交点；令实部为零，可求出频率特性与虚轴的交点。

注意——S平面的右半平面有零极点时的情况（有（s-a）项）！
——无阻尼环节或其逆！

极坐标图

2) 开环幅相曲线的终点，取决于开环传递函数分子、分母多项式中最小相位环节和非最小相位环节的阶次和。

设系统开环传递函数分子、分母多项式的阶次分别为w和n，记除K外，分子多项式中最小相位环节的阶次和为w_1，非最小相位环节的阶次和为w_2，分母多项式中最小相位环节的阶次和为n_1，非最小相位环节的阶次和为n_2，则有

$$w = w_1 + w_2$$

$$n = n_1 + n_2$$

$$\varphi(\infty) = \begin{cases} \left[(w_1 - w_2) - (n_1 - n_2)\right] \times 90^\circ & K > 0 \\ \left[(w_1 - w_2) - (n_1 - n_2)\right] \times 90^\circ - 180^\circ & K < 0 \end{cases}$$

特别地，当开环系统为最小相位系统时，

若 $n = w,$ $\quad G(j\infty)H(j\infty) = K^*$

$n > w,$ $\quad G(j\infty)H(j\infty) = 0\angle(n-w)\times(-90^\circ)$

其中K^*为系统开环根轨迹增益。

极坐标图

3）若开环系统存在等幅振荡环节，重数 l 为正整数，即开环传递函数具有下述形式

$$G(s)H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+1\right)^l}G_1(s)H_1(s)$$

$G_1(s)H_1(s)$不含$\pm j\omega_n$的极点，当ω趋于ω_n时，$|GH(j\omega)|$趋于无穷，而

$$\varphi(\omega_{n-})\approx\varphi_1(\omega_n)=\angle G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)$$

$$\varphi(\omega_{n+})\approx\varphi_1(\omega_n)-l\times180°$$

即$\Phi(\omega)$在$\omega=\omega_n$的附近，相角突变$-l\times180°$。

The End