浙江大学 20 22 －20 23 学年 秋 学期

《矩阵论》课程期末考试试卷

课程号： 67190080（本科生），开课学院： 信电学院

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带 一张手写 A4 纸 入场

考试日期： 2022 年 11 月 13 日,考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名：______________学号：______________所属院系（专业）：______________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、（10 分）

（1）已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的绝对值是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值之积；

（2）设 $\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}$，$\boldsymbol{U}\in C^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{V}\in C^{n\times n}$ 为酉矩阵，证明 $\|\boldsymbol{UA}\|_2=\|\boldsymbol{AV}\|_2=\|\boldsymbol{UAV}\|_2=\|\boldsymbol{A}\|_2$（其中下标 2 代表诱导 2 范数/谱范数）。

二、（12 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in R^{n\times n}$ 均为可逆矩阵，且齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，分别证明：

（1）$\lambda=-\mathbf{1}$ 为矩阵 $\boldsymbol{AB}^{-1}$ 的特征值。

（2）$\lambda=-\mathbf{1}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值。

三、（14 分）给定目标函数$\min\limits_{x\in R^n} f(\boldsymbol{x})$， $\boldsymbol{x}$为待求解的n维实向量。

（1）给出目标函数关于$\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$的泰勒级数展开式（写到二阶）。

（2）根据问题（1），论证函数$f(\boldsymbol{x})$极小点存在的充分必要条件。

（3）分别写出最陡下降法和牛顿法的迭代更新步骤。

四、（12 分）下列 Rayleigh 商问题，其中 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 Hermitian 正定矩阵。

（1）已知 Rayleigh 商 $R(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{x}}$，写出 $R(\boldsymbol{x})$ 的极大值及相应的 $\boldsymbol{x}$ 向量。

（2）举例说明 Rayleigh 商在实际案例中（任选）的应用，要求简要描述问题模型和物理意义。

注：可用矩阵的特征值及特征向量表示求解量。

五、（10 分）

（1）设 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots\ x_n\right)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$， $\boldsymbol{b}=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right)^{\mathrm{T}}$是 n 维实数常向量，c 为常数， $\boldsymbol{A}$是实对称矩阵（ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ ），求 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c$ 关于变量 $\boldsymbol{x}$ 的梯度向量；

（2）求实标量函数 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 和 $f\left(\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的 Hessian 矩阵， $\boldsymbol{x}$ 、$\boldsymbol{a}$ 为实向量，$\boldsymbol{A}$ 为实矩阵。

六、（14 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解；

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的伪逆 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$；

（3）求线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。

七、（14 分）考虑线性方程$\boldsymbol{Ac}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{y}$，其中$\boldsymbol{e}$为零均值加性有色噪声向量。使用加权误差二次函数$Q(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{e}^H\boldsymbol{We}$作为向量$\boldsymbol{c}$最优估计$\hat{\boldsymbol{c}}_o$的代价函数，其中矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{W}$均为 Hermitian 正定矩阵。

（1）求上述无约束优化问题的最优解$\hat{\boldsymbol{c}}_o$。

（2）若向量$\boldsymbol{c}$须满足约束条件$\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{y}=1$，求该约束优化问题的最优解。

八、简答题（14 分）

（1）考虑约束优化问题 $\min\ f_0(\boldsymbol{x})$ subject to $f_i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i=1,\cdots q;\ h_j(\boldsymbol{x})=0,\ j=1,\cdots m$，分别给出混合外罚函数和混合内罚函数（对数障碍）的目标函数表达式。（4 分）

（2）已知 $\boldsymbol{u}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与特征值 λ 对应的一个特征向量，给出矩阵 $\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}$ 的特征向量 $\boldsymbol{u}$ 对应的特征值。（4 分）

（3）对于线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$， 简述条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$ 的物理意义，并给出两种当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 奇异或者接近奇异时的解决方法。（6 分）