部分思考题、习题参考答案

第 2 章

思考题二

1. 不对.
2. 不一定.
3. 对.
4. 不对.
5. 对.
6. 不相关不能推出相互独立; 相互独立并且都是二阶矩过程时, 一定不相关.
7. 不对.

习题二

1. (1) $P(Y_n = k) = \dfrac{k^n - (k-1)^n}{6^n}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; (2) $\dfrac{1}{324}$.

2. (1) 四个样本函数: $x_1(t) = t + 1$, $x_2(t) = t - 1$, $x_3(t) = -t + 1$, $x_4(t) = -t - 1$;

(2) $P(X(1) = 0,\ X(2) = 1) = P(X(1) = 0,\ X(2) = -1) = P(X(1) = 2, X(2) = 3) = P(X(1) = -2, X(2) = -3) = \dfrac{1}{4}$, $P(X(1) = 0) = \dfrac{1}{2}$, $P(X(1) = 2) = P(X(1) = -2) = \dfrac{1}{4}$, $P(X(2) = 1) = P(X(2) = -1) = P(X(2) = 3) = P(X(2) = -3) = \dfrac{1}{4}$.

3. (1) 五个样本函数: $x_1(t) = 0, x_2(t) = 1$, $x_3(t) = -1$, $x_4(t) = t, x_5(t) = -t$;

(2) $\dfrac{4}{9}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{9}$.

4. (1) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}$; (2) $\dfrac{t+1}{2}, \dfrac{1}{2} + st$.

5. (1) $\dfrac{25}{6^6}$; (2) 0.977 2; (3) 0.013 9.

6. $\dfrac{7}{16}, \dfrac{3}{8}$.

7. (B), (F), (H), (D).

8. $N(0,1)$, $N(0, 2 + 2\cos(t - s))$.

9. (1) $\mu_X(t) = \mu(t+1)$, $R_X(s,t) = \sigma^2(ts+1) + \mu^2(t+1)(s+1)$, $C_X(s,t) = \sigma^2(ts+1)$;

(2) $X(t) \sim N(0, t^2+1)$, $X(t) - X(s) \sim N(0, (t-s)^2)$, $X(t) + X(s) \sim N(0, (t+s)^2 + 4)$.

10. (1) $P(Y_n = i) = \mathrm{C}_3^i p^i (1-p)^{3-i}$, $i = 0, 1, 2, 3$;

(2) $P(Y_1 = 1 \mid Y_0 = 2) = \dfrac{2}{3}(1-p)$, $P(Y_1 = 2 \mid Y_0 = 2) = \dfrac{1+p}{3}$, $P(Y_1 = 3 \mid Y_0 = 2) =$

$\frac{p}{3}$;

(3) $p^2(1-p)^3$;

(4) $\mu_Y(n)=3p,\ C_Y(m,n)=\begin{cases}(3-|n-m|)p(1-p), & |n-m|<3,\\ 0, & |n-m|\geqslant 3.\end{cases}$

11. $\mu_X(t)=F(t)$, 对 $t\geqslant s$ 有 $C_X(s,t)=\frac{1}{n}F(s)(1-F(t))$.

12. $\mu_X(n)=0,\ C_X(m,n)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{r-|n-m|}\alpha_i\alpha_{i+|n-m|}, & |n-m|\leqslant r,\\ 0, & |n-m|>r.\end{cases}$

13. $\mu_Z(t)=\mu_X(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mu_{X_i}(t)$,

$C_Z(t,s)=C_X(t,s)+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2C_{X_i}(t,s)$,

$C_{ZX}(t,s)=C_X(t,s)$.

14. $\mu_Z(t)=a(t)\mu_X(t)+b(t)\mu_Y(t)+c(t)$,

$C_Z(s,t)=a(t)a(s)C_X(s,t)+b(t)b(s)C_Y(s,t)$.

15. $\mu_Y(t)=\mu_X(t)+\mu_X(t+1)$,

$R_Y(s,t)=R_X(s,t)+R_X(s,t+1)+R_X(s+1,t)+R_X(s+1,t+1)$,

$R_{XY}(s,t)=R_X(s,t)+R_X(s,t+1)$.

16. $\mu_Z(t)=\mu_X(t)\mu_Y(t)$,

$R_Z(s,t)=R_X(s,t)R_Y(s,t)$,

$R_{XZ}(s,t)=\mu_Y(t)R_X(s,t)$.

第 3 章

思考题三

1. 不对. 马尔可夫性是指在知道现在状态的条件下, 过去与将来相互独立. 过去和将来不一定独立, 第三章习题的 6(1) 就给出了一个反例.

2. $\boldsymbol{P}^{(m)}=\boldsymbol{P}^m$

3. 首先计算多步转移概率, 然后对任何 $n_1<n_2<\cdots<n_k$,

$$\begin{aligned}&P(X_{n_1}=i_1,X_{n_2}=i_2,\cdots,X_{n_k}=i_k)\\ =&\sum_i P(X_0=i)p_{ii_1}^{(n_1)}p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}\cdots p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})}.\end{aligned}$$

4. 方法一: 计算 f_{ii}, 若 $f_{ii}=1$, 则 i 常返, 否则暂留;

方法二: 计算 $\sum\limits_n p_{ii}^{(n)}$, 若 $\sum\limits_n p_{ii}^{(n)}=\infty$, 则 i 常返, 否则暂留;

方法三: 考虑状态 i 的互达等价类, 若互达等价类不是闭的, 则 i 暂留; 若互达等价类是闭的且是有限集, 则 i 正常返; 若互达等价类是闭的且是可数集, 则在此互达等价类中找一个容易判断常返性的状态, i 的常返性与这个状态的常返性相同.

5. 方法一: 若 $f_{ii}=\sum\limits_n f_{ii}^{(n)}=1$ 且 $\mu_i=\sum\limits_n nf_{ii}^{(n)}<\infty$, 则 i 正常返, 否则不是正常返的;

方法二: 与上题中方法三相同;

方法三: 若 i 的互达等价类是闭的且是可数集, 我们可以将马尔可夫链限制在这个互达等价类上考虑, 此时 i 正常返当且仅当存在平稳分布.

6. 方法一: $\mu_i=\sum\limits_n nf_{ii}^{(n)}$;

方法二: 将马尔可夫链限制在 i 的互达等价类上考虑, 计算出平稳分布, 则 $\mu_i=\frac{1}{\pi_i}$.

7. 不一定. 如果一个状态的互达等价类是闭的且是有限集, 则它一定是正常返态. 如果一个状态的互达等价类是闭的且是可数集, 则它可能暂留, 可能零常返, 也有可能正常返, 爬梯子模型就是这样的例子.

8. 对.

9. 不对, 取决于过程的常返性. 对于不可约非周期马尔可夫链, 若正常返, 则对任何 i,j, $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j>0$, 否则对任何 i,j, $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$.

10. 不对. 如果状态 i 的周期为 d, 则 $p_{ii}^{(n)}>0$ 推出 n 是 d 的整数倍; 反之, 不一定对. 例如在爬梯子模型中, 对任何 $n\geqslant 2$, $p_{11}^{(n)}\geqslant p_{10}p_{00}^{n-2}p_{01}>0$, 所以状态 1 的周期为 1, 但是 $p_{11}=0$.

11. 根据一步转移来分析并利用马尔可夫性建立方程组来解决.

12. 可逆分布 $\boldsymbol{\pi}$ 是满足 $\pi_ip_{ij}=\pi_jp_{ji}$, $\forall i,j\in I$ 的分布律. 可逆分布一定是平稳分布, 平稳分布则不一定是可逆分布. 当马尔可夫链不可约时, 若存在可逆分布, 则它是唯一的平稳分布.

习题三

1. $I=\{0,1,\cdots,m\}, p_{i,i+1}=\frac{(m-i)^2}{m^2}, p_{ii}=\frac{2i(m-i)}{m^2}, p_{i,i-1}=\frac{i^2}{m^2}, \forall i\in I$.

2. $I=\{0,1,2,\cdots\}$, 当 $j\geqslant i\geqslant 0$ 时, $p_{ij}=p_{j-i}$, 当 $0\leqslant j<i$ 时, $p_{ij}=0$.

3. $I=\{0,1,2,\cdots\}$, $p_{i,i+1}=p$, $p_{i0}=1-p$, $\forall i\in I$.

4. $I=\{0,1,\cdots,N\}$, $p_{i,i+1}=\frac{2i(N-i)p}{N(N-1)}$, $p_{ii}=1-\frac{2i(N-i)p}{N(N-1)}$, $\forall i\in I$.

5. (1) $0, \frac{1}{66}$; (2) $\frac{1}{6}, \frac{1}{36}$; (3) 不具有马尔可夫性.

6. (1) $\frac{p^2}{2}$, 0, 不独立; (2) $p, p^2+(1-p)^2$; (3) 不具有马尔可夫性.

7. (1) $I=\{0,1,2\}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\frac{2}{81}, \frac{5}{18}$.

8. (1) $\frac{5}{9}, \frac{5}{13}$; (2) $\frac{1}{3}, \frac{70}{729}$;

(3) $f_{11}^{(1)}=0,\ f_{11}^{(2)}=\frac{7}{9},\ f_{11}^{(n)}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2},\ n\geqslant 3,\ f_{11}=1,\ \mu_1=\frac{7}{3}$.

9. (1) 0.3; (2) 0.15; (3) $\frac{5}{6}$; (4) $\frac{1}{6}$.

10. (1) $\frac{7}{36}, \frac{11}{36}, \frac{1}{3\cdot 2^{10}}$; (2) 1, 2, 3 正常返, 0 暂留, $\mu_1=\frac{5}{2}, \mu_2=\frac{5}{3}, \mu_3=1$.

11. $f_{00}^{(1)}=\alpha,\ f_{00}^{(n)}=(1-\alpha)^2\alpha^{n-2},\ \forall n\geqslant 2;\ f_{01}^{(n)}=\alpha^{n-1}(1-\alpha),\ \forall n\geqslant 1$.

12. $\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

13. (1) $I=\{0,1,2,3\}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$; (2) $\frac{1}{4}$.

14. (1) $I=\{0,1,\cdots,N\}$, $p_{i,i+1}=\frac{p(N-i)}{N}$, $p_{ii}=\frac{ip+(1-p)(N-i)}{N}$, $p_{i,i-1}=\frac{(1-p)i}{N}$;

(2) $\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$, $\mu_0=8$.

15. (1) $I=\{0,1,2,3\}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 1-p & p & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{1-p}{4-p}, \frac{1}{4-p}, \frac{1}{4-p}, \frac{1}{4-p}\right);$$

(2) $\frac{p(1-p)}{4-p}$, 因为 $\frac{p(1-p)}{4-p}\leqslant\frac{1}{4(4-p)}\leqslant\frac{1}{12}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=0)=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=1)=\frac{4}{15},\ \lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=2)=\frac{2}{5},\ \lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=3)=\frac{1}{3}$.

17. (1) $\{0,1,2,3\}$ 是闭的, $\{6,7\}$ 是闭的, $\{4,5\}$ 不是闭的;

(2) 0, 1, 2, 3, 6, 7 正常返, 4, 5 暂留, 4, 5, 6, 7 非周期, 0, 1, 2, 3 周期为 2, $\mu_0=\mu_3=6$, $\mu_1=\mu_2=\mu_6=3$, $\mu_7=\frac{3}{2}$;

(3) $0, \frac{2}{3}$;

(4) 对 $i=4,5,6,7$, $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=i)$ 分别为 $0, 0, \frac{2}{36}, \frac{4}{36}$.

18. (1) $\{0,1,2\}$ 是闭的, 所有状态正常返周期为 2, $\mu_0=6$, $\mu_1=2$, $\mu_2=3$;

(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\{0,2\}$ 是闭的, $\{1\}$ 是闭的, 所有状态非周期正常返, $\mu_0=3$, $\mu_1=1$, $\mu_2=1.5$.

19. $\frac{4}{9}$.

20. $I=\{1,2,\cdots,9\}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

老鼠被猫吃掉的概率是 $\dfrac{3}{5}$.

21. (1) $I=\{(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)\}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0.1&0.4&0.4&0.1\\0.2&0.3&0.3&0.2\end{pmatrix}$; (2) $\dfrac{2}{9}$; (3) 2.

22. (1) $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数},\\ \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\dfrac{5}{12}, & n \text{ 为奇数};\end{cases}$ (2) $\dfrac{3}{10}$; (3) 2.2 元; (4) 1.7.

23. (1) $\dfrac{1}{18}$; (2) $\dfrac{1}{7}$; (3) $\begin{cases}0, & n \text{ 为偶数},\\ \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\dfrac{1}{3}, & n \text{ 为奇数};\end{cases}$ (4) $\dfrac{2}{5}$; (5) $\dfrac{5}{2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=0)=\dfrac{1}{C}$, 对 $1\leqslant i\leqslant M$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=i)=\frac{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}}{C(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_i)},$$

这里 $C=1+\sum\limits_{i=1}^{M}\dfrac{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_i)}$.

第 4 章

思考题四

1. (1), (3).
2. $\mathrm{Cov}(N(2), N(5)-N(1))=\mathrm{Cov}(N(2), N(5))-\mathrm{Cov}(N(2), N(1))=\lambda$.
3. (1) $\{N(t)<n\}=\{W_n>t\}$; (2) $\{N(t)>n\}\subset\{W_n<t\}$;
(3) $\{N(t)\leqslant n\}\supset\{W_n\geqslant t\}$; (4) $\{N(t)\geqslant n\}=\{W_n\leqslant t\}$.
4. (3) 不正确, 其余都正确.
5. 布朗运动是正态过程, 反之不一定.
6. 不成立, $\mathrm{Cov}(B(3),B(5)-B(2))=\mathrm{Cov}(B(3),B(5))-\mathrm{Cov}(B(3),B(2))=1$.
7. 不独立.

习题四

1. (1) 略; (2) 充要条件是 $\{X_n\}$ 为平稳增量过程.
2. (1) $N(0,2(t-s))$; (2) 是; (3) 是.
3. (1) $1-(1+2\lambda)\mathrm{e}^{-2\lambda}$; (2) $1-\mathrm{e}^{-2\lambda}$; (3) $\dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}(1-\mathrm{e}^{-2\lambda})}{1-(1+3\lambda)\mathrm{e}^{-3\lambda}}$.
4. $\mu_X(t)=\lambda$, $R_X(s,t)=\begin{cases}\lambda^2+\lambda(1-|t-s|), & |t-s|\leqslant 1,\\ \lambda^2, & |t-s|>1.\end{cases}$
5. $\mu_X(t)=0$, $R_X(s,t)=\begin{cases}\lambda t(1-s), & 0<t\leqslant s<1,\\ \lambda s(1-t), & 0<s<t<1.\end{cases}$
6. 略.
7. (1) $1-\left[1+3(\lambda_1+\lambda_2)+\dfrac{9(\lambda_1+\lambda_2)^2}{2}\right]\cdot\mathrm{e}^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}$;
(2) $1-[1+2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)]\mathrm{e}^{-2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}$.
8. $\mathrm{C}_n^k\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$.
9. (1) $\dfrac{(\lambda pt)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda pt}$; (2) $\lambda p\min\{s,t\}$.
10. (1) $\mathrm{C}_n^k\left(\dfrac{s}{t}\right)^k\left(1-\dfrac{s}{t}\right)^{n-k}$; (2) $1-\mathrm{e}^{-2\lambda}$; (3) $\sum\limits_{i=k}^{n}\mathrm{C}_n^i\left(\dfrac{s}{t}\right)^i\left(1-\dfrac{s}{t}\right)^{n-i}$.
11. (1) $\dfrac{(2\lambda)^3}{3!}\mathrm{e}^{-2\lambda}$; (2) $\left(1+\lambda+\dfrac{\lambda^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\lambda}-(1+2\lambda+2\lambda^2)\mathrm{e}^{-2\lambda}$.
12. (1) $1-\dfrac{17}{2}\mathrm{e}^{-3}$; (2) $1-179.8\mathrm{e}^{-6}$.
13. (1) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 1-\mathrm{e}^{-0.4x}, & x\geqslant 2;\end{cases}$ (2) $P(Y=i)=\begin{cases}1.8\mathrm{e}^{-0.8}, & i=1\\ \mathrm{e}^{-0.8}\dfrac{0.8^i}{i!}, & i\geqslant 2;\end{cases}$
(3) $0.8+\mathrm{e}^{-0.8}$; (4) $\mathrm{e}^{-0.4}$.
14. (1) $3\mathrm{e}^{-5}$; (2) $\dfrac{25}{2}\mathrm{e}^{-5}$; (3) $\dfrac{81}{2}\mathrm{e}^{-10}$; (4) $1.5\mathrm{e}^{-0.5}-2\mathrm{e}^{-1}$.
15. (1) $10\mathrm{e}^{-10}(1-\mathrm{e}^{-30})$; (2) $\mathrm{e}^{-10}-\mathrm{e}^{-20}$; (3) $1-\mathrm{e}^{-5t}$.
16. (1) $2\mathrm{e}^{-3}$; (2) $\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$; (3) $\dfrac{5}{16}$.
17. (1) $\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-3}$; (2) $\dfrac{81}{64}\mathrm{e}^{-3}$; (3) e^{-6}; (4) $\dfrac{1}{9}$.
18. (1) $\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-2}$; (2) $\dfrac{9}{64}\mathrm{e}^{-2}$; (3) $\dfrac{27}{128}$.
19. (1) $\mathrm{e}^{-1-\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}$; (2) $\dfrac{2}{27}\mathrm{e}^{-\pi-1}(1+\pi)^3$.

20. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{10\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{10}}, -\infty<x<\infty$.

21. (1) $\Phi(1)$; (2) 2; (3) 10.

22. 略.

23. (1) 略; (2) 不具有. 因为当 $t>s$ 时,

$$\mathrm{Cov}(X(s),X(t))=s\sqrt{st}\neq s^2=\mathrm{Cov}(Y(s),Y(t)),$$

所以 $(X(s),X(t))$ 与 $(Y(s),Y(t))$ 不服从同一分布.

24. $0,2,\Phi(\sqrt{3})$.

25. $3t, 13\min\{s,t\}, 2\min\{s,t\}$.

26. $\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}, \mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}$

27. (1) $1-\Phi(1.5)=0.066\,8$; (2) $N(1.2,0.04)$.

28. 略.

29. (1) $2\Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right)-1$; (2) $2\Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right)-1$.

第 5 章

思考题五

1. 不一定.

2. 都是.

3. $\{Y(t);-\infty<t<\infty\}$ 是平稳过程, $\{Z(t);-\infty<t<\infty\}$ 不是平稳过程.

4. 是.

5. 见定义 5.2.4. 对于各态历经过程, 可以通过记录一个样本函数来估计均值函数和相关函数.

6. 不一定存在, 如随机相位余弦波过程.

7. 见维纳–辛钦公式.

8. 略.

9. 对线性时不变系统, 频率响应函数 $H(\omega)$ 表示输入谐波信号时, 输出的同频率谐波的振幅和相位的变化.

习题五

1. (1) $0, \sigma^2\cos m\omega$; (2) $0, \sum\limits_{i=1}^{m}\sigma_i^2\cos\omega_i\tau$.

2. 是. $\mu_X(t)=0, R_X(t,t+\tau)=\dfrac{1}{6}\cos\tau$.

3. $\mu_Y(t)=0, R_Y(t,t+\tau)=1+\mathrm{e}^{-|\tau|}-\mathrm{e}^{-|t+\tau|}-\mathrm{e}^{-|t|}$, $\{Y(t)\}$ 不是平稳过程;
$\mu_Z(t)=0, R_Z(t,t+\tau)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|\tau|}$, $\{Z(t)\}$ 是平稳过程.

4. (1) $\mu_X(t)=\mu(\sin t-\cos t)$, $R_X(t,t+\tau)=\sigma^2\cos\tau-\mu^2\sin(2t+\tau)$;
(2) 0;
(3) $P(X(0)=\pm1)=0.5$,

$$P\left(X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pm\sqrt{2}\right)=\frac{1}{4},$$

$$P\left(X\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\right)=\frac{1}{2}, \{X(t)\}\text{ 不是严平稳过程}.$$

5. (1) 略; (2) 不是, 因为 $P(Y_2=4)>0=P(Y_1=4)$.

6. (1) 略; (2) 不是, 因为 $P(Y_1=-2)>0=P(Y_2=-2)$.

7. (1) $\mu_X(t)=0$, $R_X(s,t)=\begin{cases}1-|t-s|, & |t-s|<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2) 略.

8. 略.

9. $\mu_Y(t)=\sin t, R_{XY}(s,t)=4\sin t\cos s$.

10. ±1.

11. 均值都具有各态历经性.

12. (1) $\mu_X(t)=0, R_X(t,t+\tau)=\dfrac{1}{3}\cos\tau$; (2) 0, 是; (3) 不是.

13. (1) $\dfrac{A}{8}, \dfrac{A^2}{48}$; (2) $\dfrac{A}{8}$.

14. (1) $\mu_X(t)=\dfrac{1}{2}, R_X(s,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(2-|t-s|), & |t-s|<1,\\ \dfrac{1}{3}, & \text{其他};\end{cases}$
(2) 略;
(3) 不具有, 因为 $\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=\dfrac{1}{9}\neq\mu_X^2$.

15. (1) $\mu_X(n)=0, R_X(m,n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & m=n,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$
(2) 略;
(3) 是, 收敛到 $\mu_X=0$, 这是因为 $\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=0=\mu_X^2$.

16. (1) $\mu_Y(n)=\mu^3, R_Y(m,n)=\begin{cases}(\sigma^2+\mu^2)^{3-|n-m|}\mu^{2|n-m|}, & |n-m|\leqslant2,\\ \mu^6, & |n-m|\geqslant3,\end{cases}$ $\{Y_n\}$ 是平稳过程;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}C_Y(n)=0$, 所以均值具有各态历经性, 因此 $\langle Y_n\rangle=\mu_Y=\mu^3$.

17. (1) $\mu=0, \sigma^2=\dfrac{1}{1-\lambda^2}$;

(2) $\mu_X=0$, $R_X(m)=\dfrac{\lambda^{|m|}}{1-\lambda^2}$;

(3) 因为 $\lim\limits_{m\to\infty}C_X(m)=0$, 所以均值具有各态历经性.

18. (1) $aR_X(\tau-\tau_1)+R_{XN}(\tau)$; (2) $aR_X(\tau-\tau_1)$.

19. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}|\tau|}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|\tau|}$.

20. $\dfrac{2}{\omega^2+1}+\dfrac{1}{(\omega+\pi)^2+1}+\dfrac{1}{(\omega-\pi)^2+1}$.

21. (1) 略;

(2) $\langle X(t)\rangle=C$, $P(\langle X(t)\rangle=0)=0\neq 1$, 均值不具有各态历经性;

(3) $\dfrac{\pi}{3}[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)+2\delta(\omega)]$.

22. $\dfrac{1}{\pi}\left[1+\dfrac{2\sin^2(\tau/2)}{\tau^2}\right]$.

23. $R_X(\tau)=\dfrac{\sin\tau}{\pi\tau}$; 当 $\mu_X=0$ 时 $\{X(t)\}$ 的均值具有各态历经性.

24, 25. 略.

26. $\dfrac{\alpha\beta}{2}\cos\tau$, $\dfrac{\pi\alpha\beta}{2}[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]$.

27. $S_{XY}(\omega)=2\pi\mu_X\mu_Y\delta(\omega)$, $S_{XZ}(\omega)=S_X(\omega)+2\pi\mu_X\mu_Y\delta(\omega)$.

28. (1) 是; (2) 不是.

29. $H(\omega)=\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{a\omega^2-b}$.

30. $|H(\omega)-1|^2S_X(\omega)$.

31. (1) $H(\omega)=\dfrac{T(\sin T\omega/2)}{T\omega/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T\omega/2}$;

(2) $S_Y(\omega)=T^2\left[\dfrac{(\sin T\omega/2)}{T\omega/2}\right]^2$, $R_Y(\tau)=\begin{cases}T-|\tau|, & |\tau|\leqslant T,\\ 0, & |\tau|>T;\end{cases}$

(3) $S_{XY}(\omega)=\dfrac{T(\sin T\omega/2)}{T\omega/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}T\omega/2}$.

32. (1) $H(\omega)=\dfrac{a}{\mathrm{i}\omega+b}$;

(2) $S_Y(\omega)=\dfrac{2\beta a^2\sigma^2}{\beta^2-b^2}\left(\dfrac{1}{\omega^2+b^2}-\dfrac{1}{\omega^2+\beta^2}\right)$, $R_Y(\tau)=\dfrac{a^2\sigma^2}{\beta^2-b^2}\left(\dfrac{\beta}{b}\mathrm{e}^{-b|\tau|}-\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}\right)$.