自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第六章 Chapter 6

频率特性分析法(Frequency Response)

第六章关键词

- 频率、频率响应、频率特性
- 幅频特性、相频特性
- 对数频率特性（BODE图）
- 极坐标图（奈奎斯特图）
- 奈奎斯特稳定判据
- 稳定裕度（幅值裕度、相位裕度）
- 频域性能

第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性

Bode图（对数坐标图）

对数坐标图的优点

1) 将乘积和除法的数学操作转化为加法和减法；
2) 用渐近线表示幅频特性，作图方便；
3) 半对数坐标扩展了低频段。

首先运用直线近似的方法来获得系统的近似特性，然后修正直线，提高精度。

对数坐标图 $\xrightarrow{\text{足够多的数据}}$ 极坐标图

Bode图（对数坐标图）

对数坐标图的定义：

缩写“log” 表示以10为底的对数

对数幅频： 频率特性 $G(j\omega)$ 幅值（幅频特性）的对数，以分贝来表示

$$20\log|G(j\omega)| \quad \mathrm{dB}$$

称为**对数幅频**，缩写为**Lm**。因此

$$\mathrm{Lm}G(j\omega) = 20\log|G(j\omega)| \quad \mathrm{dB}$$

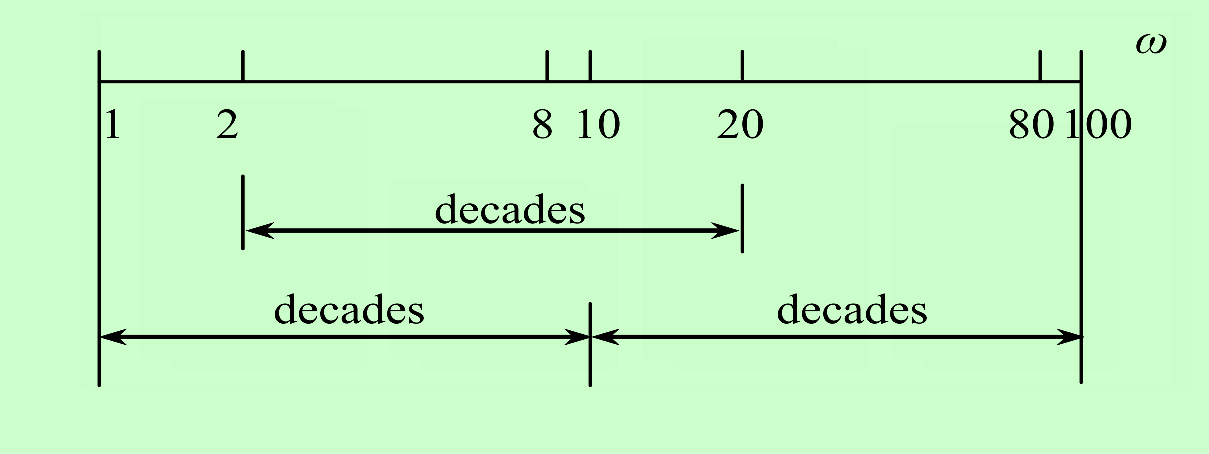
由于频率特性 $G(j\omega)$是频率的函数，因此 Lm 也是频率的函数。

Bode图（对数坐标图）

倍频概念

Octave (倍频)：倍频是f_1到f_2的频带，其中 $f_2/f_1=2$。 例如：频带 1~2Hz 是 1个倍频宽度，频带17.4~34.8Hz 也是一个倍频宽度。

Decade(十倍频)：当$f_2/f_1=10$时，则频带f_1到f_2称为一个十倍频。频带1~10 Hz或者 2.5~25 Hz 称为一个十倍频宽度。



Bode图（对数坐标图）

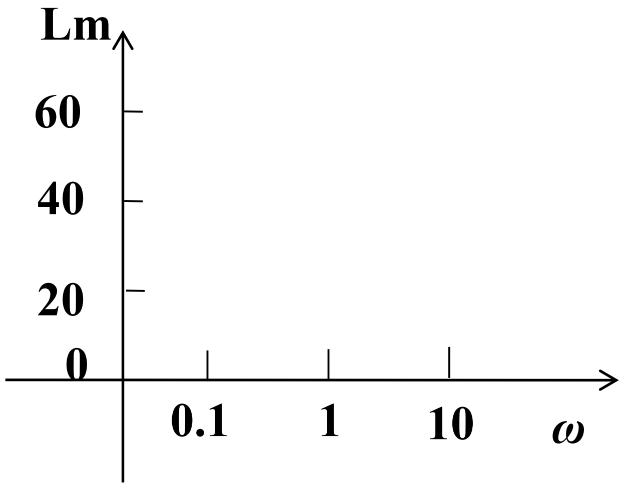
Bode图（对数频率特性曲线）：

对数频率特性曲线由对数幅频曲线和对数相频曲线组成

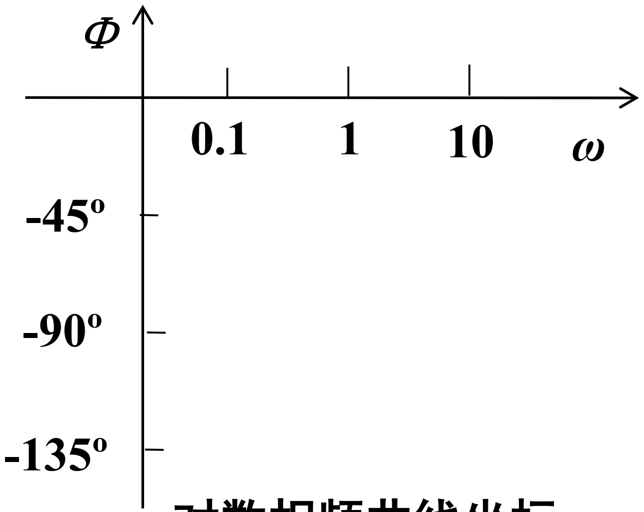
对数频率特性曲线的横坐标：按logω分度，单位为弧度/秒（rad/s）

对数幅频曲线的纵坐标：按Lm$G(j\omega)$=20log$|G(j\omega)|$线性分度，单位是分贝

对数相频曲线的纵坐标：按$\Phi(\omega)$线性分度，单位为度



对数幅频曲线坐标



对数相频曲线坐标

Bode图（对数坐标图）

$$\mathrm{Lm}G(j\omega)=20\log\left|G(j\omega)\right| \quad \mathrm{dB}$$

频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)^r\cdots}{(j\omega)^m(1+j\omega T_a)[1+(2\zeta/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2]\cdots}$$

对数幅值：

$$LmG(j\omega)=LmK_m+Lm(1+j\omega T_1)+rLm(1+j\omega T_2)+\cdots-mLm(j\omega)$$
$$-Lm(1+j\omega T_a)-Lm\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]-\cdots$$

相角方程：

$$\angle G(j\omega)=\underbrace{\angle K_m}_{0^\circ/-180^\circ}+\angle\underbrace{(1+j\omega T_1)}_{\tan^{-1}\omega T_1}+r\angle(1+j\omega T_2)+\cdots-\underbrace{m\angle(j\omega)}_{m90^\circ}$$
$$-\angle(1+j\omega T_a)-\angle\underbrace{\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]}_{\tan^{-1}\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}}-\cdots$$

绘制Bode图

一般形式的传递函数

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)^r\cdots}{(j\omega)^m(1+j\omega T_a)[1+(2\zeta/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2]\cdots}$$

典型环节：

$$K_m \qquad (j\omega)^{\pm m} \qquad (1+j\omega T)^{\pm r} \qquad \left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm p}$$

$$K_m \qquad (j\omega)^{\pm 1} \qquad (1+j\omega T)^{\pm 1} \qquad \left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm 1}$$

典型环节的Bode图叠加在一起就可以得到整个频率特性的Bode图，特别是采用对数幅频渐近特性曲线的时候。

Bode图

- 典型环节
- 对数频率渐近特性曲线
- 系统型别、增益与对数幅频曲线的关系
- 传递函数的实验确定方法

比例环节

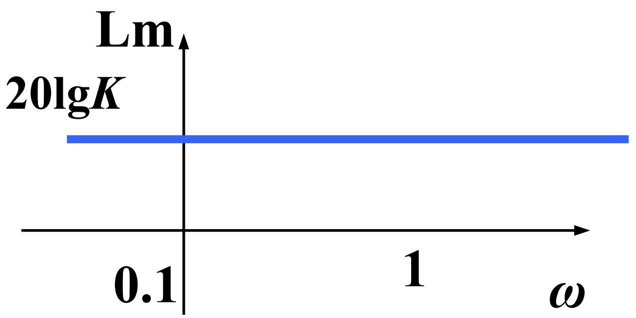
比例环节：*K*>0

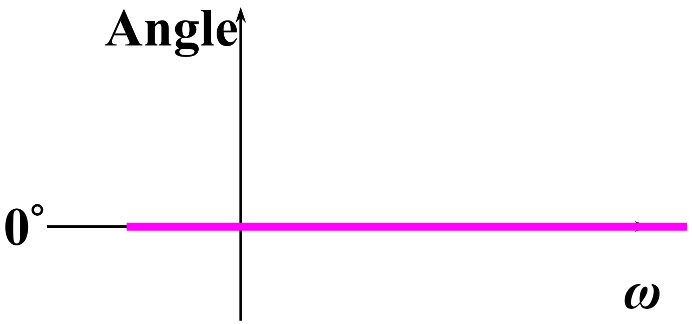
$$G(s)=G(\mathrm{j}\omega)=K$$

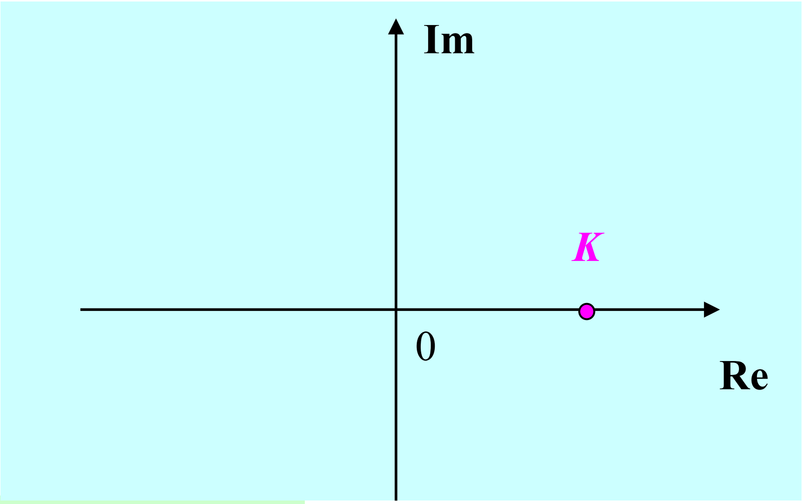
$$\mathrm{Lm}K=20\lg|K|$$

- 对数幅频曲线是一条水平线
- 相角恒为零

➢K增大或减小，对数幅频曲线上下移动







➢Nyquist图是一个点*K*

比例环节

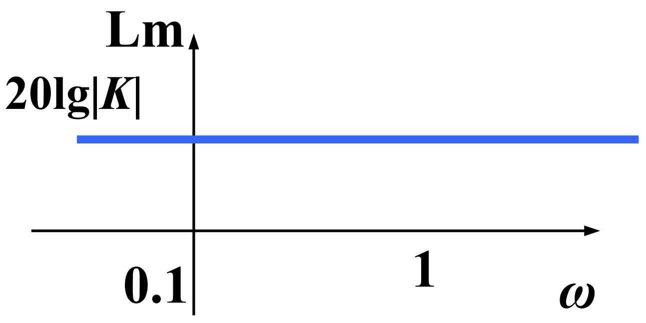
比例环节：K<0

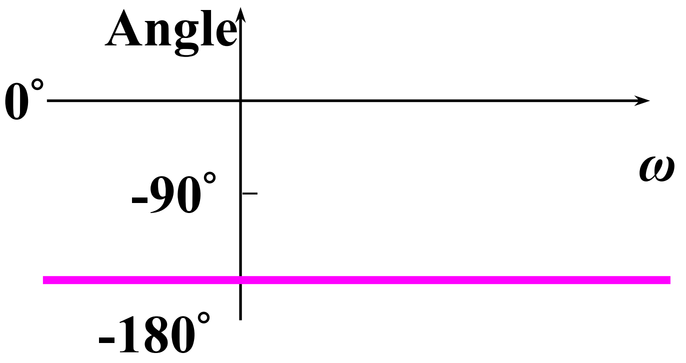
$$G(s) = G(j\omega) = K$$

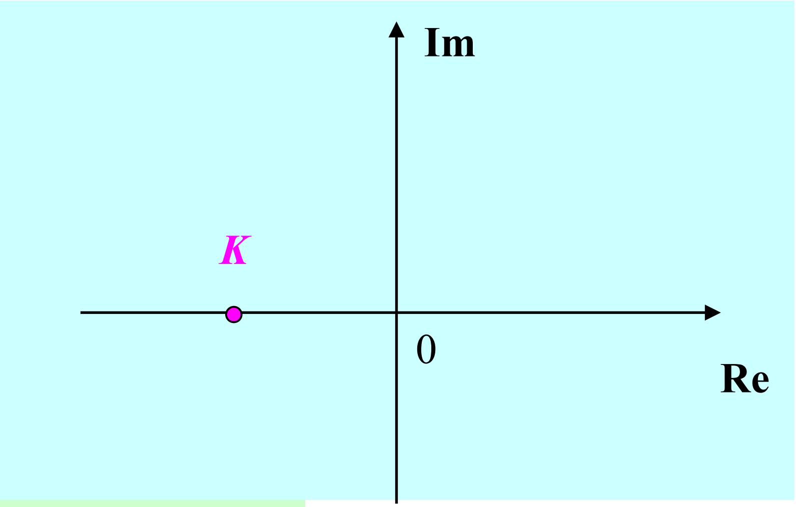
$$\mathrm{Lm}K = 20\lg|K|$$

- ➢ 对数幅频曲线是一条水平线
- ➢相角恒为-180度

➢K增大或减小，对数幅频曲线上下移动







➢Nyquist图是一个点K

微分/积分环节

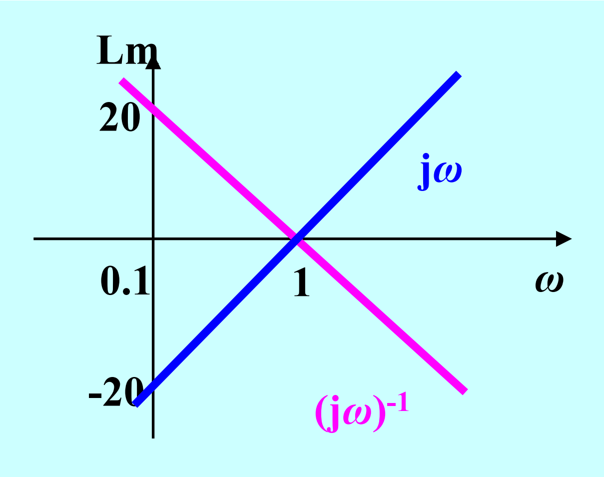
两种形式：$(j\omega)^{\pm1}$

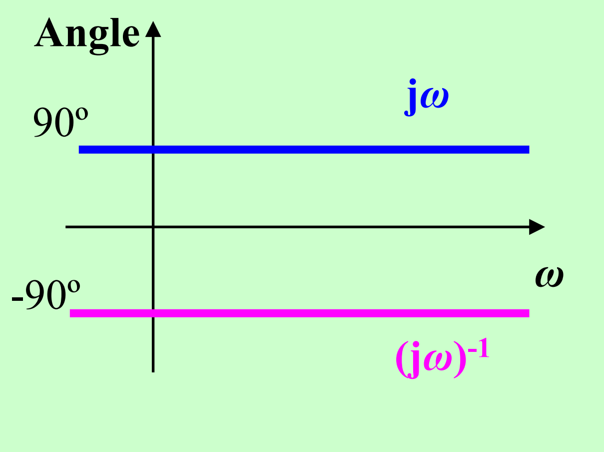
$$\mathrm{Lm}(j\omega)^{-1}=20\lg\left|(j\omega)^{-1}\right|=-20\lg\omega$$

- 对数幅频曲线为一条过（1，0）的斜线，其斜率为 -20分贝/十倍频（dB/dec）
- 相角恒等于 -90º（相位滞后）

$$\mathrm{Lm}(j\omega)=20\lg|j\omega|=20\lg\omega$$

- 对数幅频曲线为一条过（1，0）的斜线，其斜率为 20dB/dec
- 相角恒等于 +90º（相位超前）





微分/积分环节

积分环节：1/jω

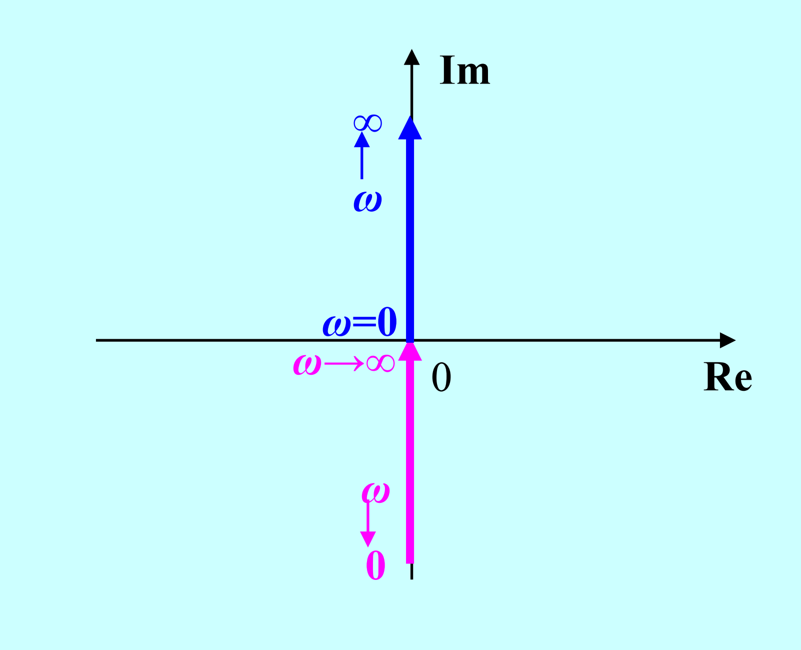
频率特性 $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$

$G(j\omega)$ 在负虚轴上

微分环节：jω

频率特性 $G(j\omega)=j\omega$

$G(j\omega)$ 在正虚轴上



惯性环节

惯性环节：$(1+j\omega T)^{-1}$ $T>0$

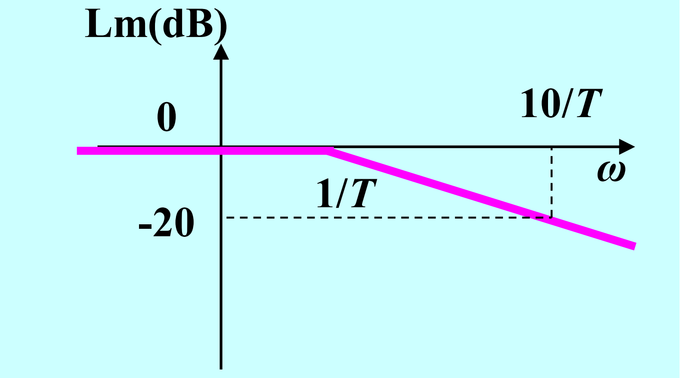
$$Lm(1+j\omega T)^{-1}=20\lg|1+j\omega T|^{-1}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

手工一般绘制其对数幅频渐近特性曲线（低、高频段的渐近线组成的折线）

当 ω很小时，即 $\omega T<<1$ $Lm(1+j\omega T)^{-1}\approx 20\lg 1=0$ 渐近线在低频段为 0 dB线

当 ω很大时，即 $\omega T>>1$ $Lm(1+j\omega T)^{-1}\approx 20\lg|j\omega T|^{-1}=-20\lg\omega-20\lg T$

渐近线在高频段是斜率为–20dB/dec 的斜线



- 转折频率ω_{cf}(交接频率)：渐近线转折的频率
  - 本例的转折频率为 $\omega_{cf}=1/T$

$$\angle(1+j\omega T)^{-1}=-\tan^{-1}\omega T$$

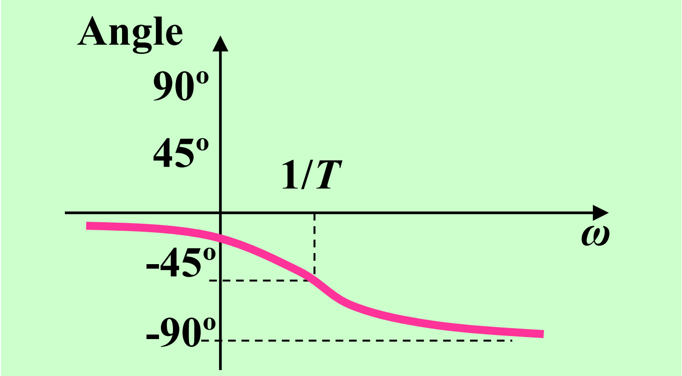
对数相频曲线特点：

频率为0时，相角为 0º

转折频率处 $\omega=\omega_{cf}$，相角为 -45º

频率为∞时，相角为 -90º

相位滞后

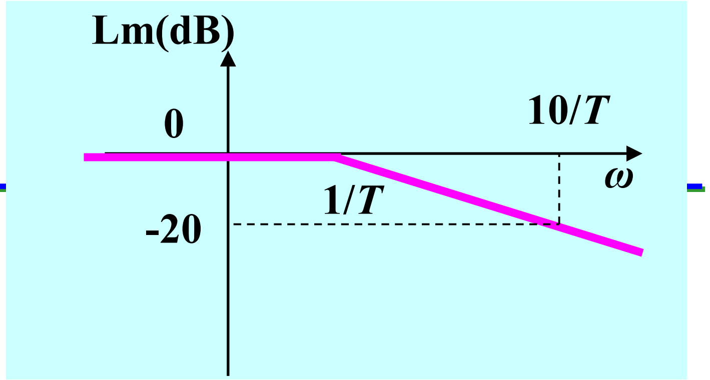


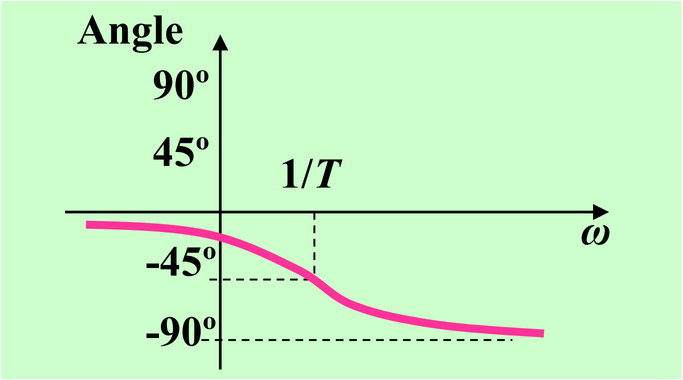
惯性环节

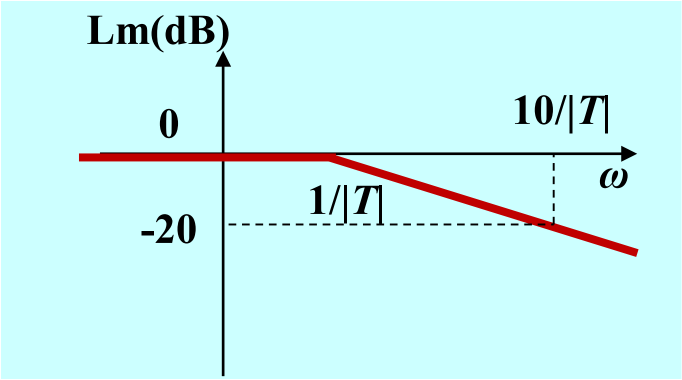
惯性环节：$(1+j\omega T)^{-1}$　　　$T>0$

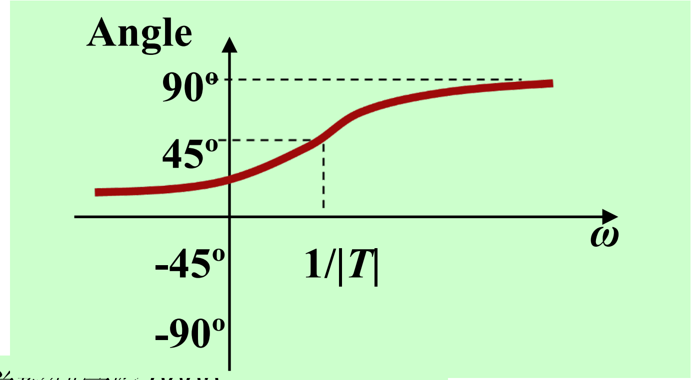
$$Lm(1+j\omega T)^{-1}=20\lg|1+j\omega T|^{-1}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\angle(1+j\omega T)^{-1}=-\tan^{-1}\omega T$$









惯性环节：$(1+j\omega T)^{-1}$　　　$T<0$

$$Lm(1+j\omega T)^{-1}=20\lg|1+j\omega T|^{-1}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

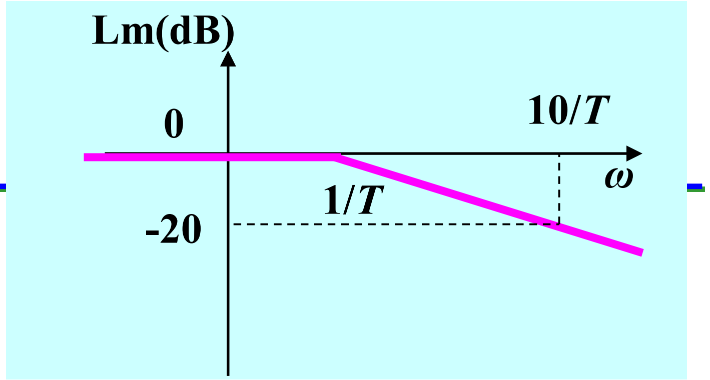
幅频特性同$T>0$

$$\angle(1+j\omega T)^{-1}=-\tan^{-1}\omega T$$

相频特性与$T>0$反号（关于0度线对称）

相位超前

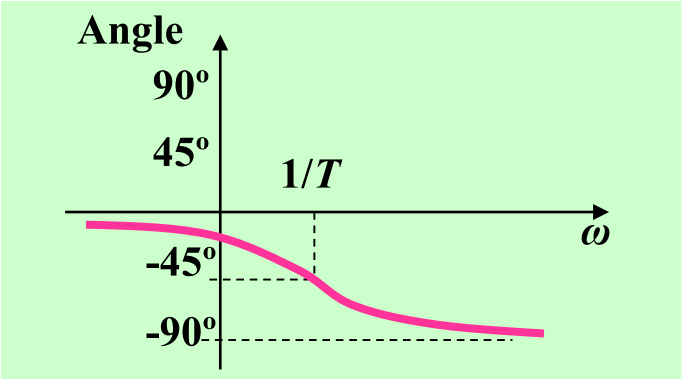
一阶微分环节

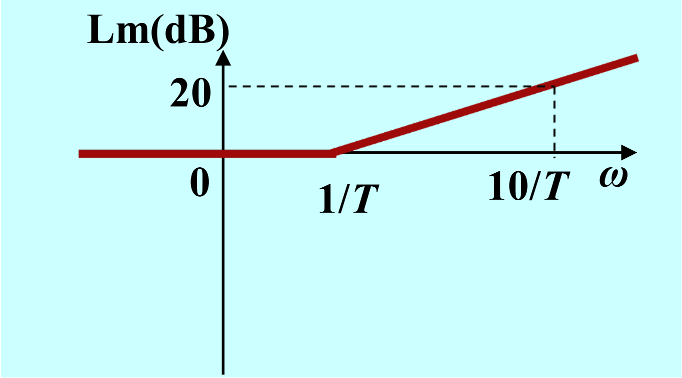


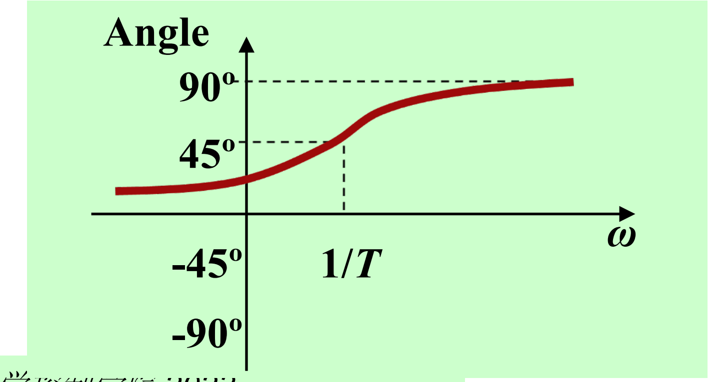
惯性环节：(1+jωT)$^{-1}$　　　T>0

$$Lm(1+j\omega T)^{-1}=20\lg|1+j\omega T|^{-1}=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\angle(1+j\omega T)^{-1}=-\tan^{-1}\omega T$$







一阶微分环节：(1+jωT)　　　T>0

$$Lm(1+j\omega T)=20\lg|1+j\omega T|=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

幅频特性与惯性环节反号（关于0dB线对称）

$$\angle(1+j\omega T)=\tan^{-1}\omega T$$

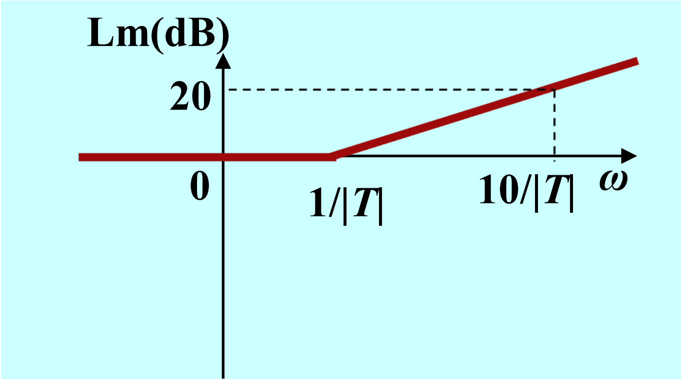
相频特性与惯性环节反号（关于0度线对称）

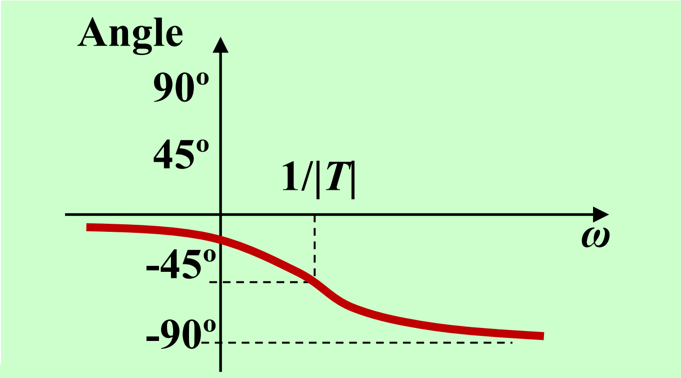
一阶微分环节

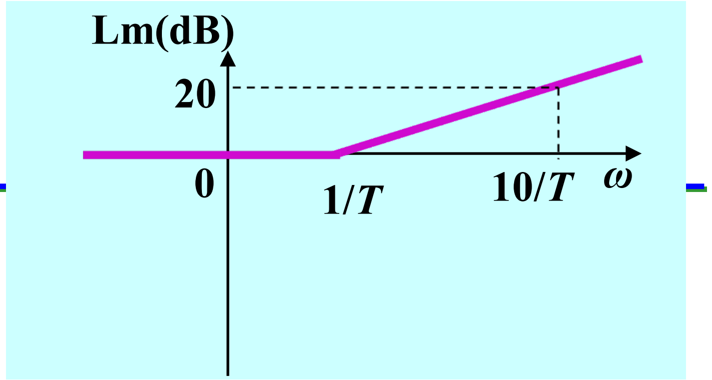
一阶微分环节：(1+jωT)　　T>0

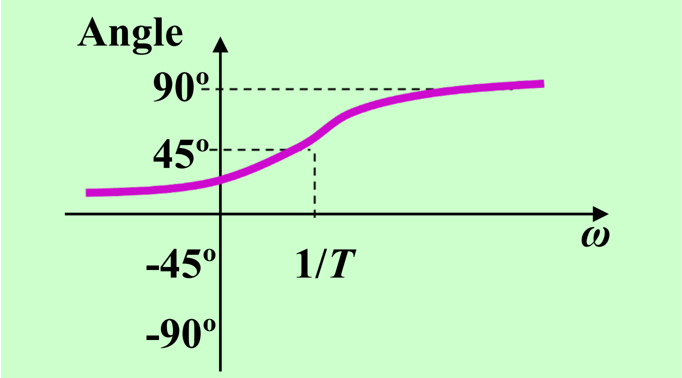
$$Lm(1+j\omega T)=20\lg|1+j\omega T|=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

$$\angle(1+j\omega T)=\tan^{-1}\omega T$$









一阶微分环节：(1+jωT)　　T<0

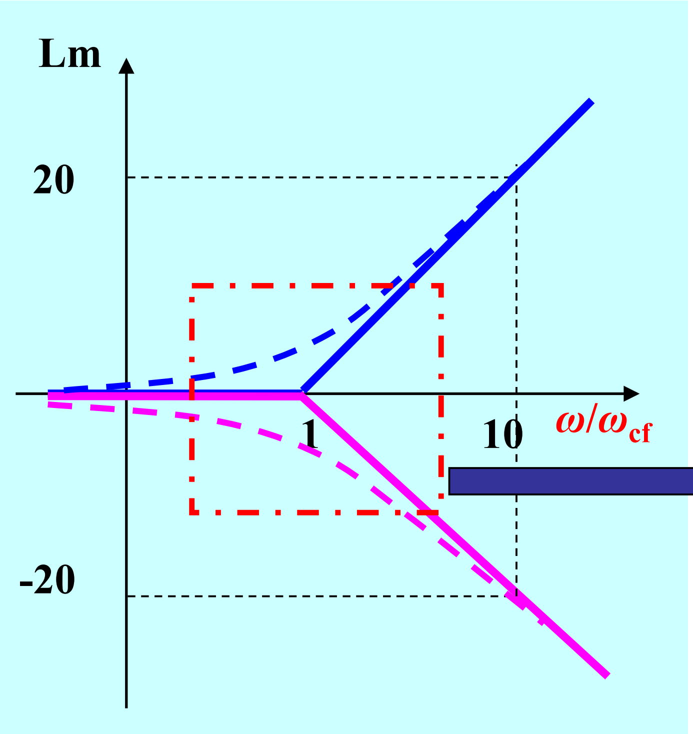
$$Lm(1+j\omega T)=20\lg|1+j\omega T|=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

幅频特性同T>0

$$\angle(1+j\omega T)=\tan^{-1}\omega T$$

相频特性与T>0反号（关于0度线对称）

惯性/一阶微分环节



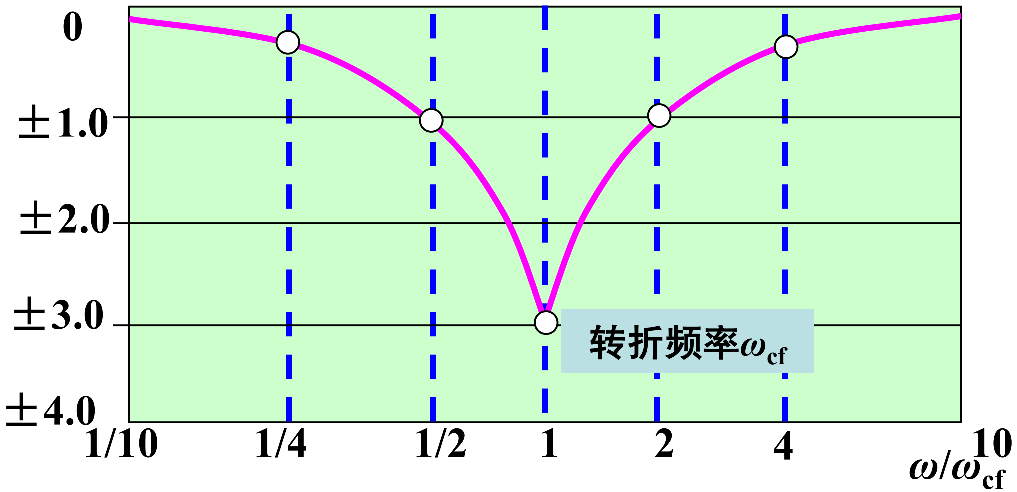
精确曲线与渐近特性曲线

精确曲线与渐近特性曲线的偏差如下

✓在转折频率处：3dB $Lm(1+j\omega T)\big|_{\omega=\frac{1}{T}} = 20\log\sqrt{2} = 3\ \ \text{dB}$

✓距转折频率1个倍频(octave)处：1dB

✓距转折频率2个倍频(octave)处：0.26dB



$$Lm(1+j\omega T)\big|_{\omega=\frac{1}{|T|}} = 20\log\sqrt{2} = 3\ \ \text{dB}$$

✓在转折频率处有最大误差3dB

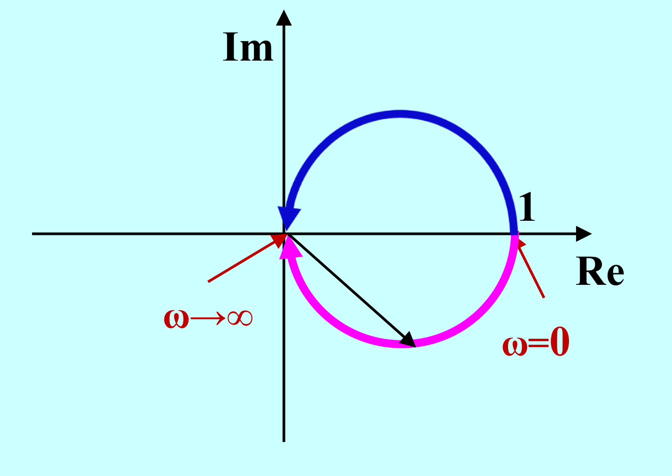
惯性环节

惯性环节：1/(jω*T*+1)　*T*>0

频率特性 $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}=\dfrac{1-j\omega T}{1+\omega^2T^2}=U(\omega)+jV(\omega)$

$$U(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2T^2},V(\omega)=\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

$$\left(U(\omega)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(V(\omega)\right)^2$$
$$=\left(\frac{2-\left(1+\omega^2T^2\right)}{2\left(1+\omega^2T^2\right)}\right)^2+\left(\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2$$
$$=\frac{1-2\omega^2T^2+\omega^4T^4+4\omega^2T^2}{4\left(1+\omega^2T^2\right)^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$



若 $\omega=0$，$G(j\omega)=1$

若 $\omega=1/T$，$G(j\omega)=\dfrac{1}{2}-j\dfrac{1}{2}$

若 $\omega=\infty$，$G(j\omega)=0$

圆心在$\dfrac{1}{2}$、半径$\dfrac{1}{2}$的半圆

惯性环节：1/(jω*T*+1)　*T*<0

幅频特性同、相频特性反号

模相同、相角反号→共轭

一阶微分环节

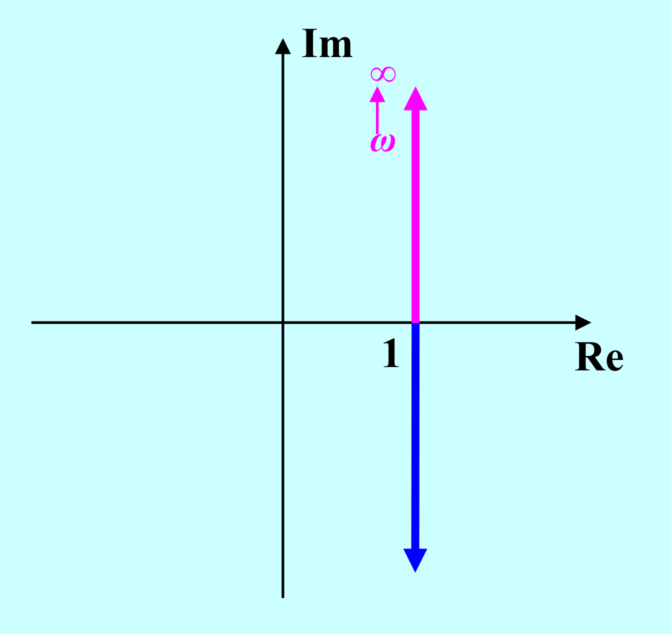
一阶微分环节：jω*T*+1　　*T*>0

频率特性　　$G(j\omega) = 1 + j\omega T$

实部恒为1，虚部非负且随ω变

一阶微分环节：jω*T*+1　　*T*<0

与*T*>0共轭

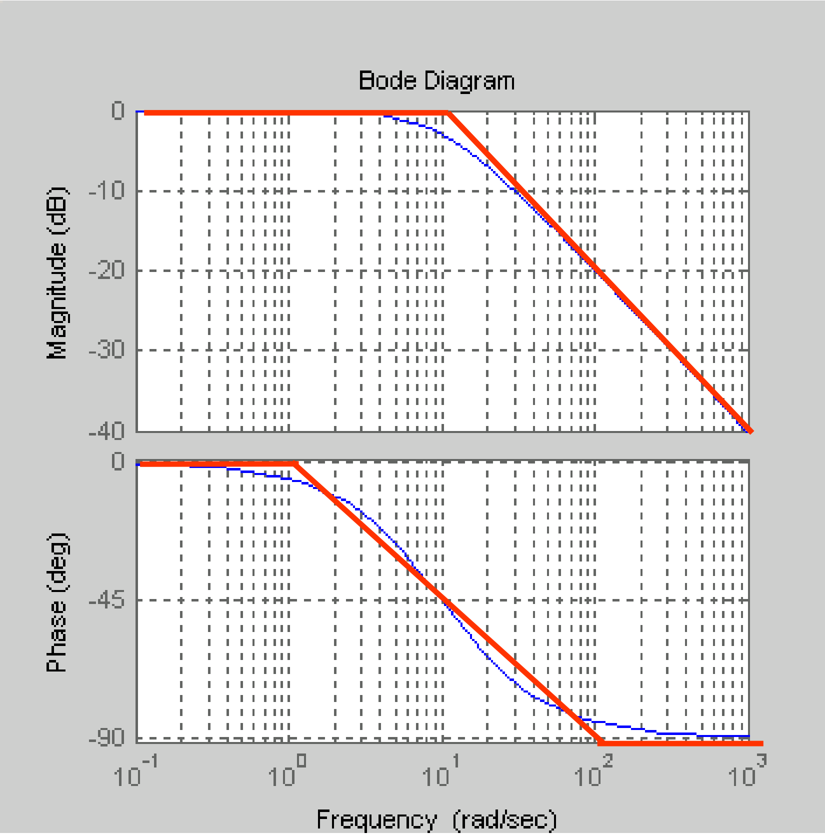


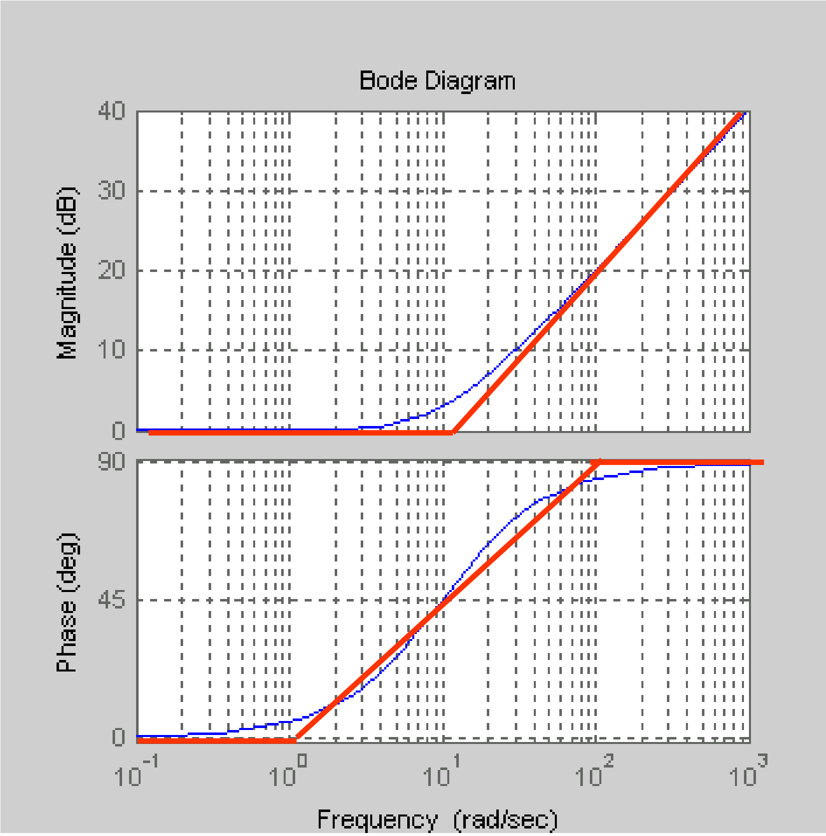
一阶微分/惯性环节

例6-3

$$G_1(s)=\frac{1}{1+0.1s}$$

$$G_2(s)=1+0.1s$$





振荡环节

$$\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}$$

振荡环节 $\dfrac{1}{T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1}$ $\quad 1>\zeta>0, T>0$

$$\omega_n=\frac{1}{T}$$

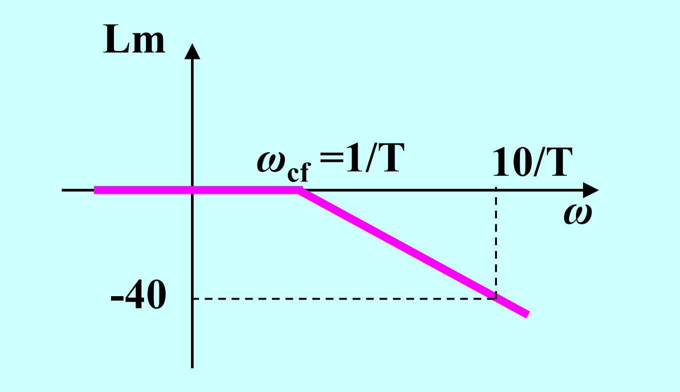
对数幅频曲线

$$Lm\left[1+2j\zeta\omega T+(j\omega T)^2\right]^{-1}=-20\lg\left[\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2\right]^{1/2}$$

手工绘制折线

- **当ω很小时，低频段渐近线可以用 0dB线来表示**
- **高频段，对数幅频曲线可以近似为**

$$-20\lg\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}$$
$$\approx -20\lg(\omega^2T^2)=-40\lg(\omega T)=-40\lg\omega-40\lg T$$



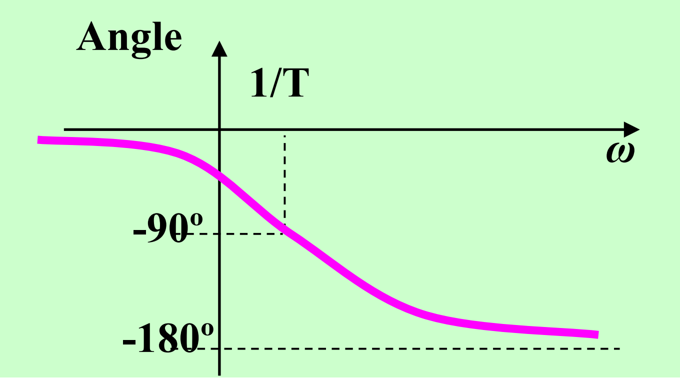
高频段的渐近线是一条经过转折频率ω_{cf} = 1/T，斜率为–40dB/dec的斜线

振荡环节

$$\angle\left[1+j2\zeta\omega T+(j\omega T)^2\right]^{-1}=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}=\begin{cases}-\tan^{-1}\dfrac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2} & \omega\le 1/T\\ -\left[180^\circ-\tan^{-1}\dfrac{2\zeta\omega T}{\omega^2T^2-1}\right] & \omega\ge 1/T\end{cases}$$

对数相频曲线：

- **频率为0时，相角为 0º** $\angle[1]^{-1}=0$
- **转折频率1/T处，相角为 –90º** $\angle[j2\zeta]^{-1}=-90^\circ$
- **频率为∞时，相角为-180º**



振荡环节

二阶环节：$\zeta<1$

由方程 $$\mathrm{Lm}\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}=-20\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left|G(j\omega)\right|=\frac{-\left[-\frac{2\omega}{\omega_n^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+4\zeta^2\frac{\omega}{\omega_n^2}\right]}{\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^{\frac{3}{2}}}=0$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}<\zeta<1$ $\quad$ $\frac{d}{d\omega}\left|G(j\omega)\right|<0$

$0<\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

$$M_r=\left|G(j\omega_m)\right|=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$\omega<\omega_r$ $\quad$ $\frac{d}{d\omega}\left|G(j\omega)\right|>0$

$\omega>\omega_r$ $\quad$ $\frac{d}{d\omega}\left|G(j\omega)\right|<0$

振荡环节

二阶环节：$\zeta<1$

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \qquad 0<\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad M_r=|G(j\omega_r)|=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

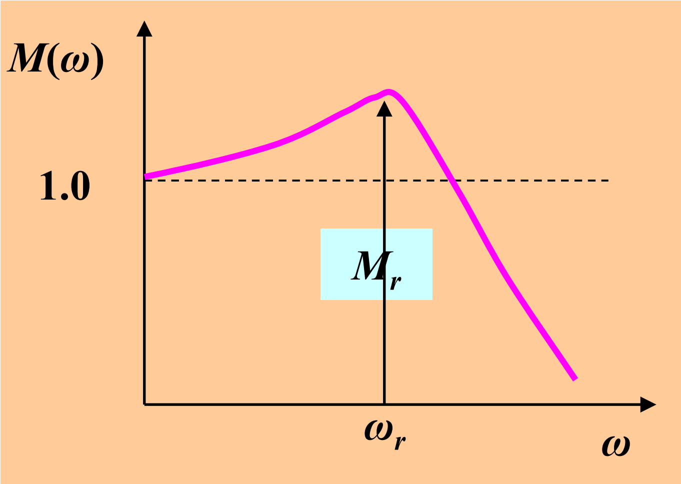
当$\zeta<0.707$，$Lm[1+j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ 将会出现峰值。峰值的幅度和该点处的频率为：

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

峰值M_r只与阻尼比ζ有关，是ζ的减函数。

仅当$\zeta<0.707$时，M vs. ω 会出现大于1的峰值。

峰值处的频率ω_r与阻尼比ζ和无阻尼振荡频率ω_n有关，是ζ的减函数。

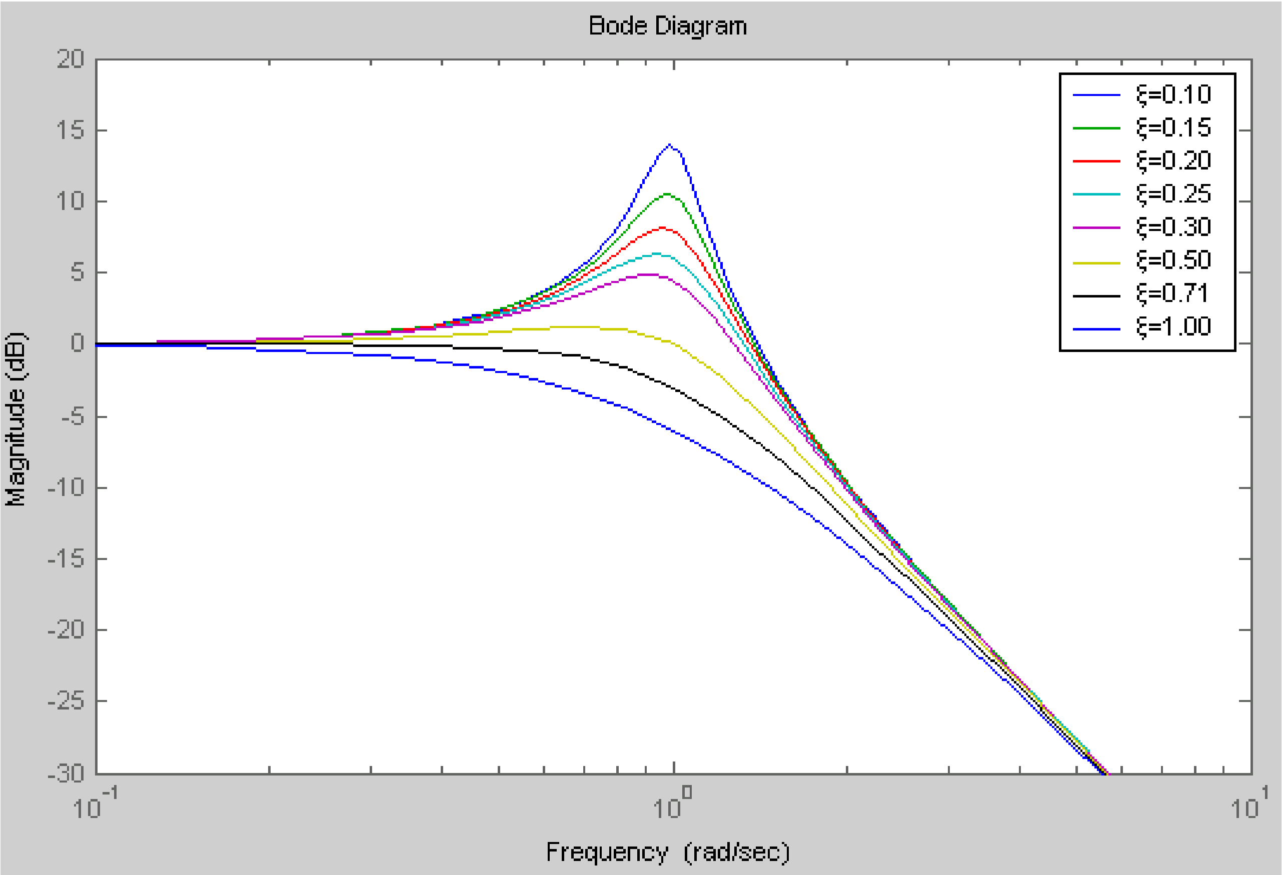


振荡环节

一组振荡环节（T=1，1>ζ>0）的对数幅频曲线

$$\left[1+j2\zeta\omega T+\left(j\omega T\right)^2\right]^{-1}$$

对数幅频曲线



当ζ小于某个值时，对数幅频曲线在ω= 1/T附近出现大于0dB的峰值

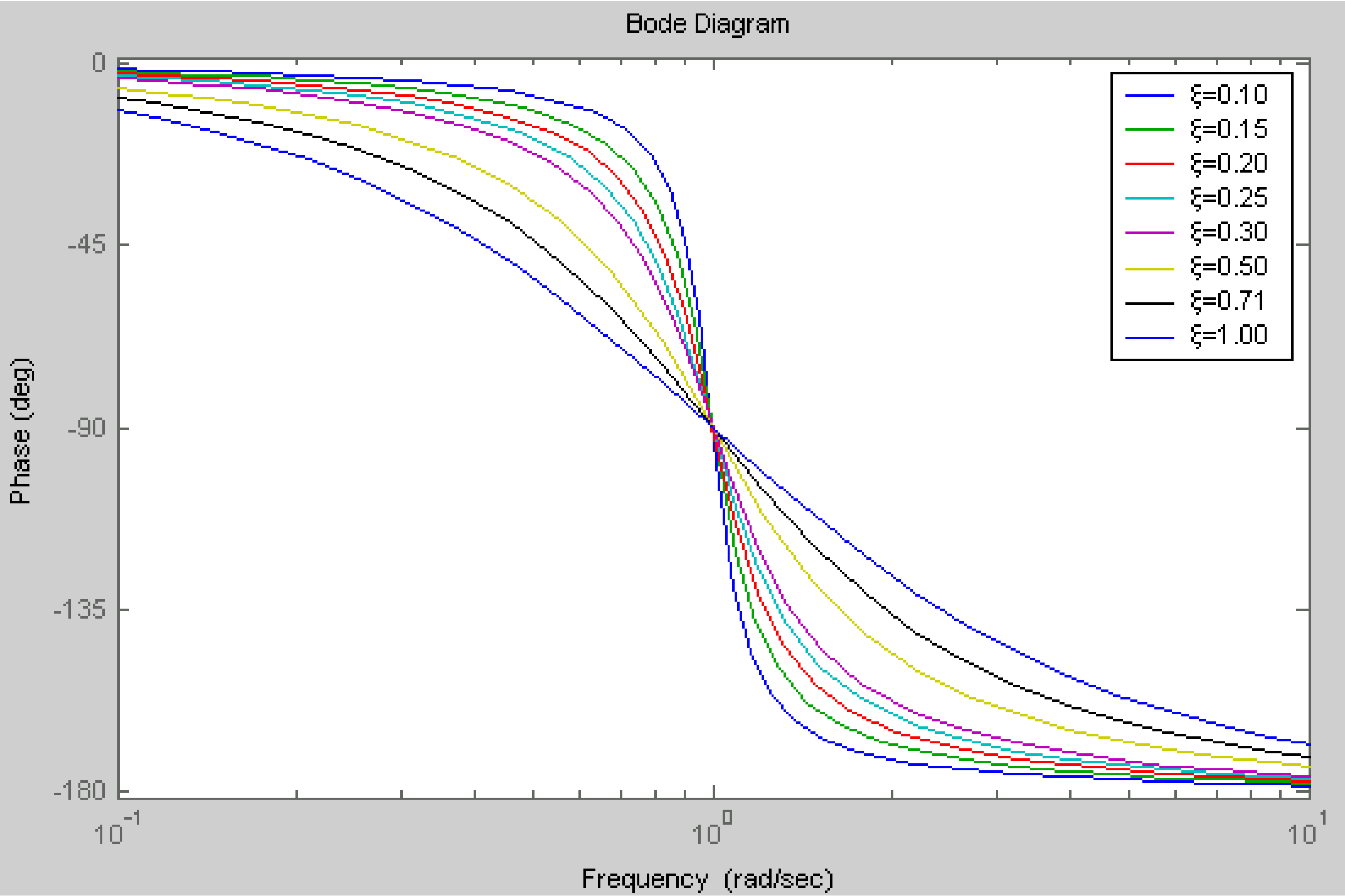
在ω=1/T附近出现**共振**的条件之一：对数幅频曲线峰值大于 0 dB

振荡环节

一组ζ<=1 的振荡环节曲线：

$$\left[1 + j2\zeta\omega T + \left(j\omega T\right)^2\right]^{-1}$$

相频曲线

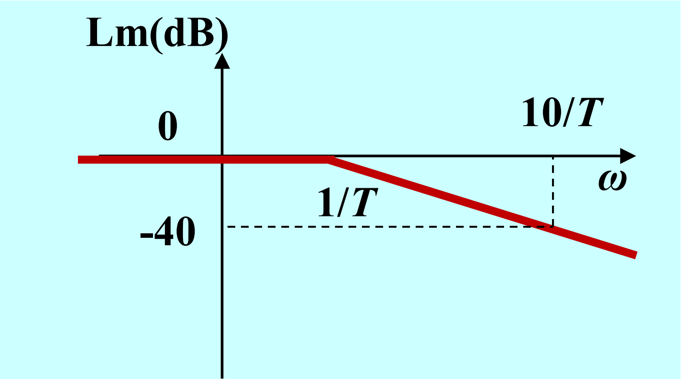


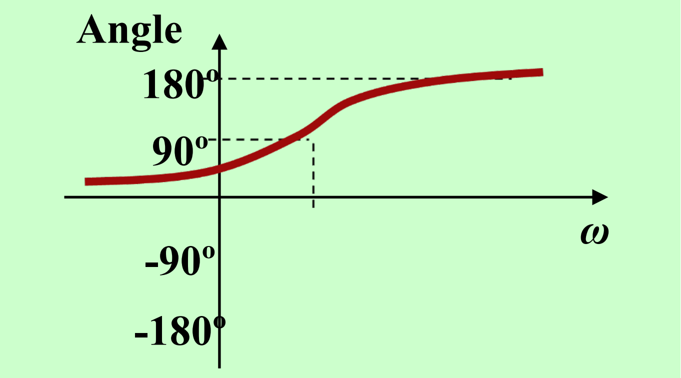
振荡环节

$$\text{振荡环节}\ \frac{1}{T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1} \qquad -1<\zeta<0, T>0$$

幅频特性同1>ζ>0

相频特性与1>ζ>0反号（关于0度线对称）





-1<ζ<0的振荡环节不稳定

谐振频率及谐振峰值无实际意义

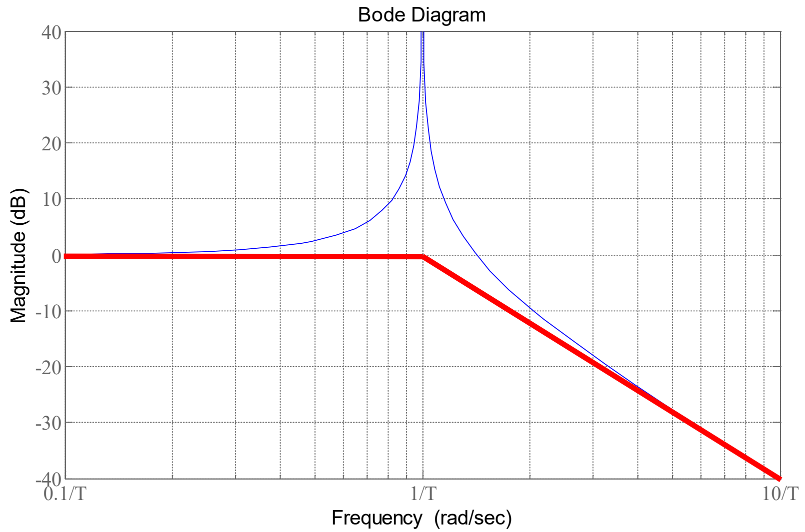
振荡环节

特殊的振荡环节 $\dfrac{1}{T^2(j\omega)^2+1}$　　$T>0$

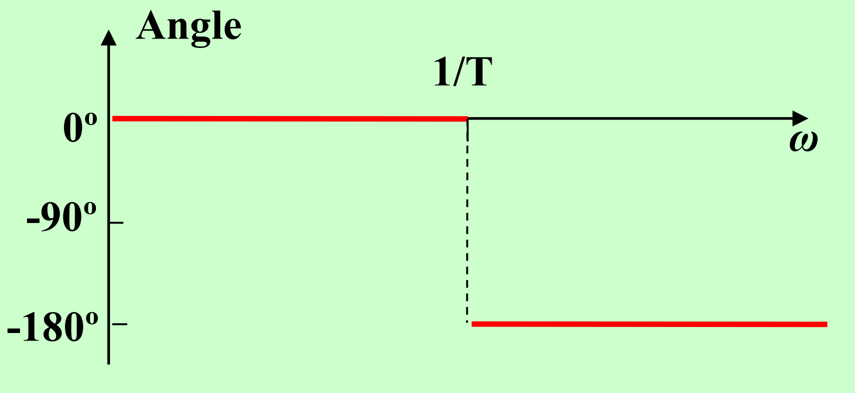
阻尼比$\zeta=0$

$$Lm\left[1+(j\omega T)^2\right]^{-1}=-20\lg\left|1-\omega^2T^2\right|$$

在转折频率$\omega_{cf}=\dfrac{1}{\mathrm{T}}$处，$Lm\left[1+(j\omega T)^2\right]^{-1}=+\infty$



$$\angle\left[1+(j\omega T)^2\right]^{-1}=\angle\left[1-\omega^2T^2\right]^{-1}$$
$$=\begin{cases}0^\circ & \omega\le 1/T\\ -180^\circ & \omega>1/T\end{cases}$$



相频特性在转折频率处有跳变

振荡环节

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -arctg\dfrac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2} & \omega \le 1/T \\ -\left[180° - arctg\dfrac{2\zeta\omega T}{\omega^2T^2-1}\right] & \omega \ge 1/T \end{cases}$$

振荡环节 $\dfrac{1}{T^2(j\omega)^2 + 2\zeta T(j\omega)+1}$ $\quad 1>\zeta \ge 0, T>0$

若 $\omega=0$， $|G(j0)|=1$ $\quad \angle G(j0)=0°$

若 $\omega=1/T=\omega_n$， $|G(j\omega_n)|=1/(2\zeta)$ $\quad \angle G(j\omega_n)=-90°$

若 $\omega=\infty$， $|G(j\infty)|=0$ $\quad \angle G(j\infty)=-180^0$

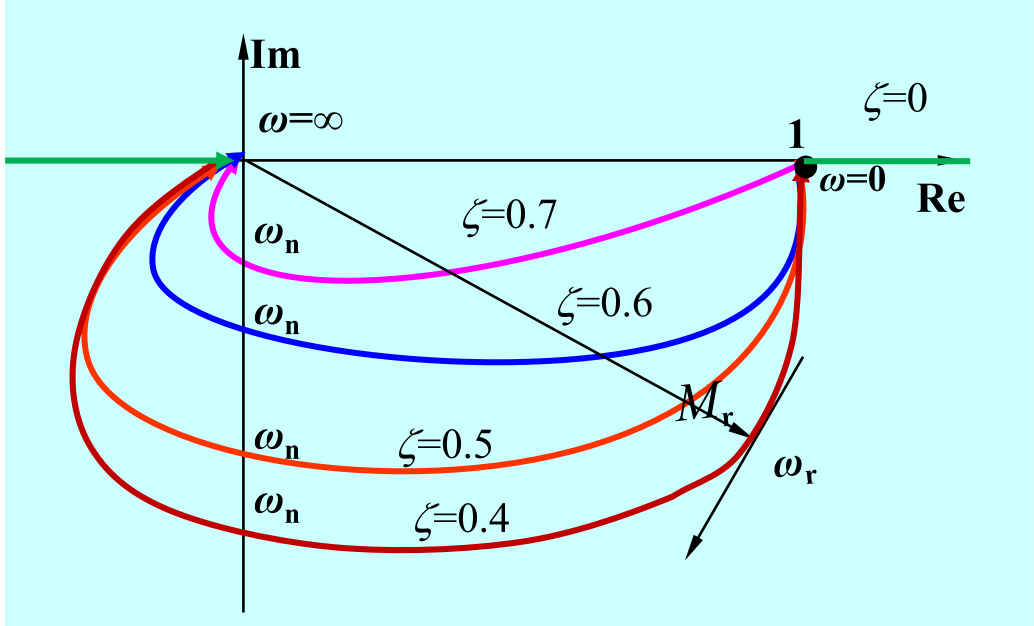
$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2};0<\zeta\le\sqrt{2}/2$ $\quad M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

当 $\omega<\omega_r$

$\dfrac{d|G(j\omega)|}{d\omega}>0$ $\quad$ **$|G(j\omega)|$单调增**

当 $\omega>\omega_r$

$\dfrac{d|G(j\omega)|}{d\omega}<0$ $\quad$ **$|G(j\omega)|$单调减**



$\sqrt{2}/2<\zeta$ $\quad$ **$|G(j\omega)|$单调减**

振荡环节

典型环节: $[1-2\zeta s/\omega_n+(s/\omega_n)^2]^{-1}$

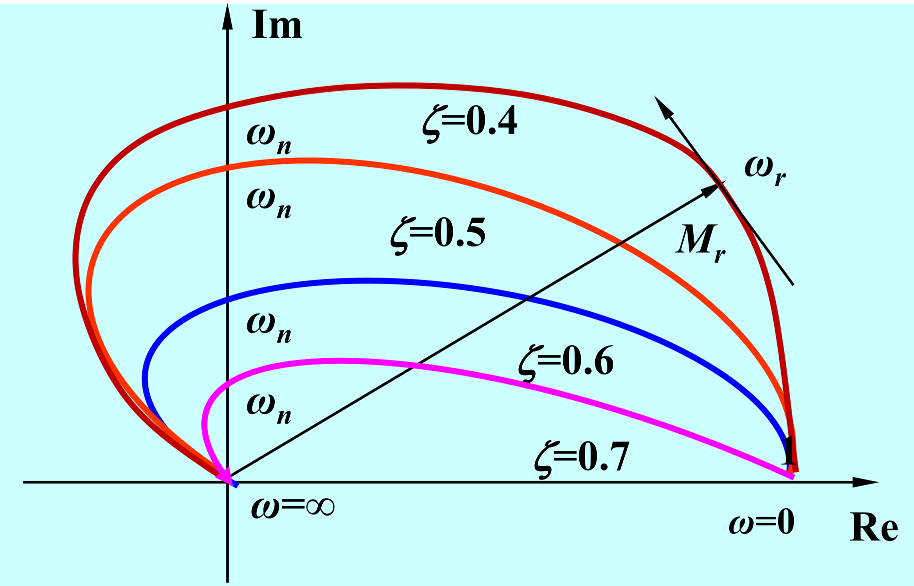
$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\angle G(j\omega)=\begin{cases}\text{arctg}\dfrac{2\zeta\,\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2} & \omega\le\omega_n\\[2mm] 180^\circ-arctg\dfrac{2\zeta\,\omega/\omega_n}{(\omega/\omega_n)^2-1} & \omega\ge\omega_n\end{cases}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)-j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega}=0\Rightarrow\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2};0<\zeta\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



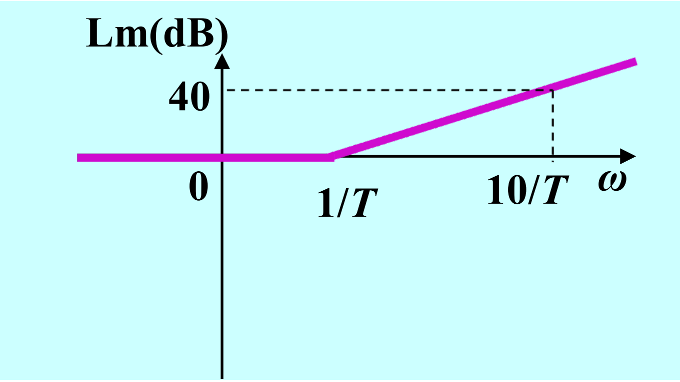
二阶微分环节

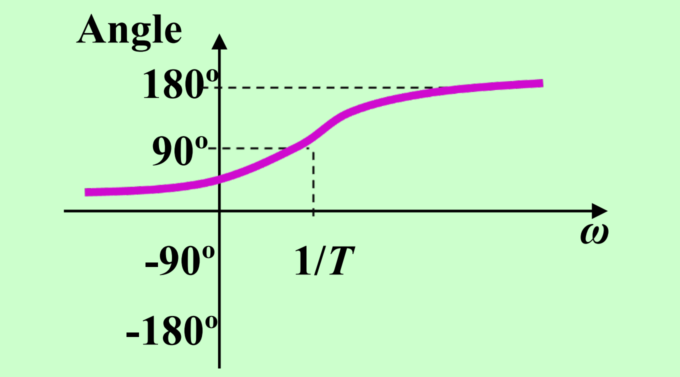
二阶微分环节$T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

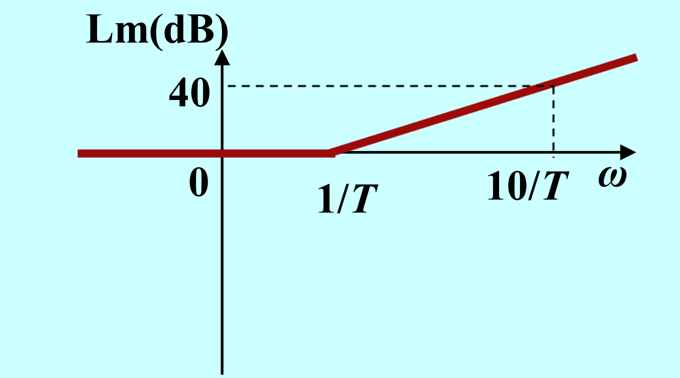
$1>\zeta>0, T>0$

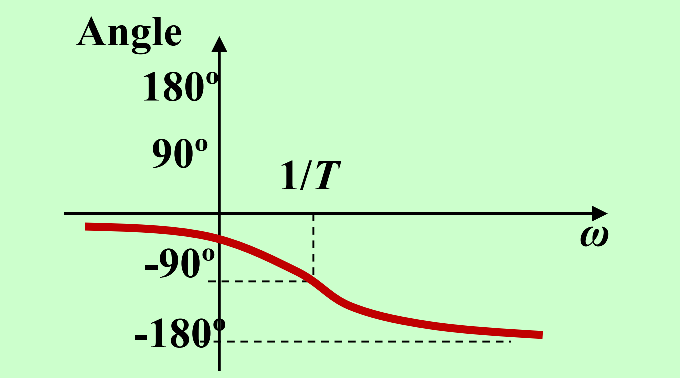
幅频特性与1>ζ>0的振荡环节反号

相频特性与1>ζ>0的振荡环节反号









二阶微分环节$T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

$-1<\zeta<0, T>0$

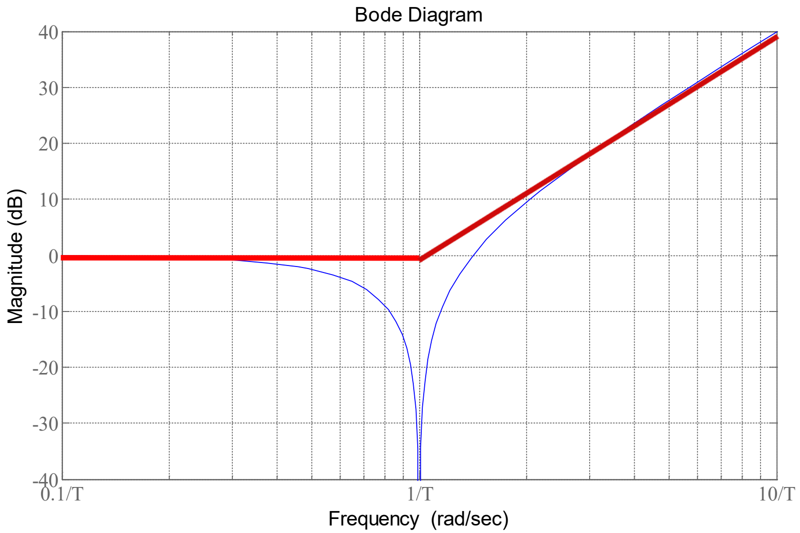
幅频特性同1>ζ>0的二阶微分环节

相频特性与1>ζ>0的二阶微分环节反号

二阶微分环节

特殊的二阶微分环节$T^2(j\omega)^2+1 \qquad T>0$

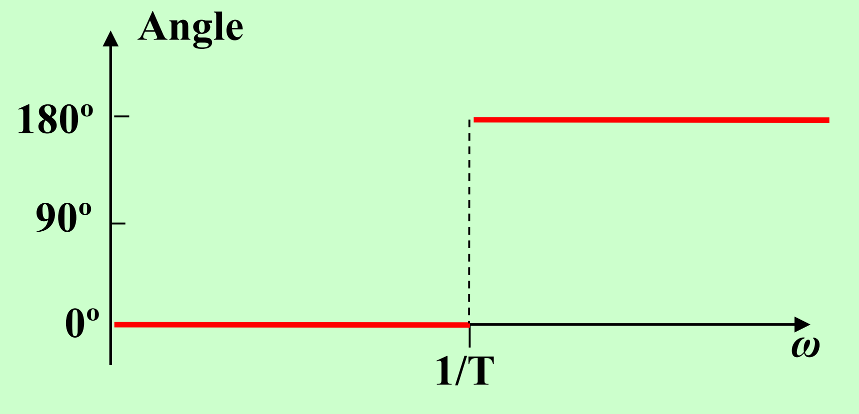
阻尼比$\zeta=0$



幅频特性与ζ=0的振荡环节反号

在转折频率$\omega_{cf}=\dfrac{1}{T}$处,$|G(j\omega_{cf})|=0$

相频特性与ζ=0的振荡环节反号



二阶微分环节

二阶微分环节$T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

$1>\zeta>0, T>0$

$$T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1=U(\omega)+jV(\omega)$$

$$U(\omega)=1-\omega^2T^2, V(\omega)=2\zeta\omega T$$

$$\frac{(V(\omega))^2}{4\zeta^2}=1-U(\omega)$$

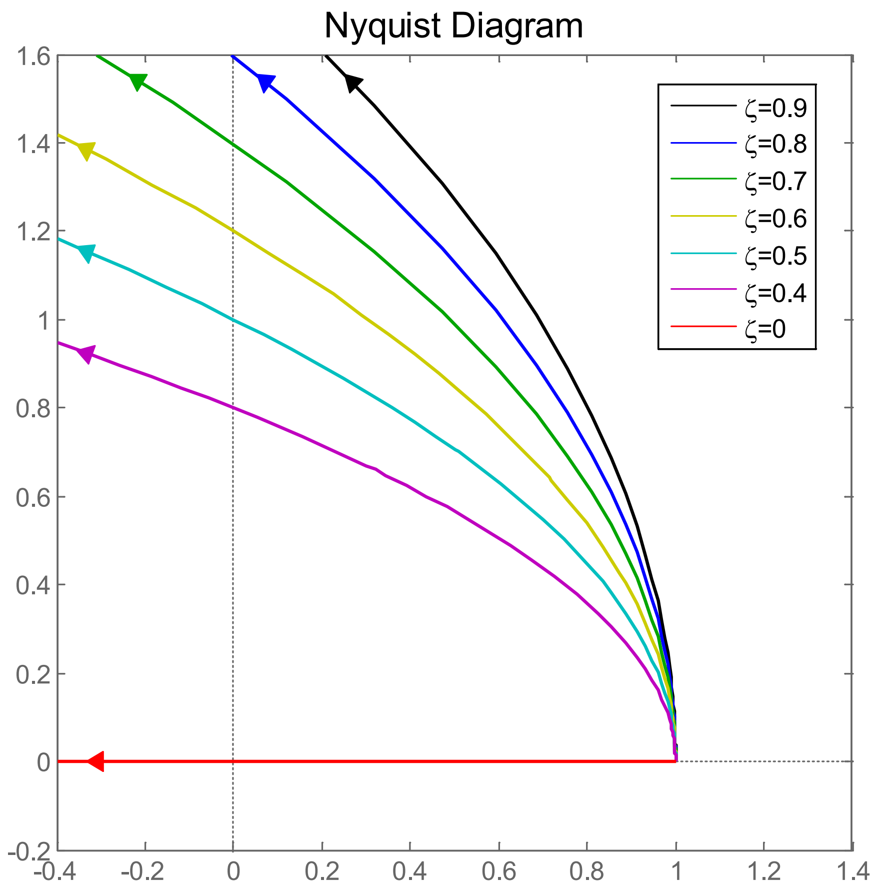
幅相曲线为抛物线(顶点位于(1,0))的上半支

特殊的二阶微分环节$T^2(j\omega)^2+1$，$T>0$

幅相曲线为自(1,0)出发的射线

◆ 当 $0<\zeta<\sqrt{2}/2$，且$\omega\in(0,\omega_r)$ **幅频特性从1单调减至** $M_r=2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$

◆ 当 $0<\zeta<\sqrt{2}/2$，且$\omega\in(\omega_r,\infty)$ **幅频特性从M_r单调增加**

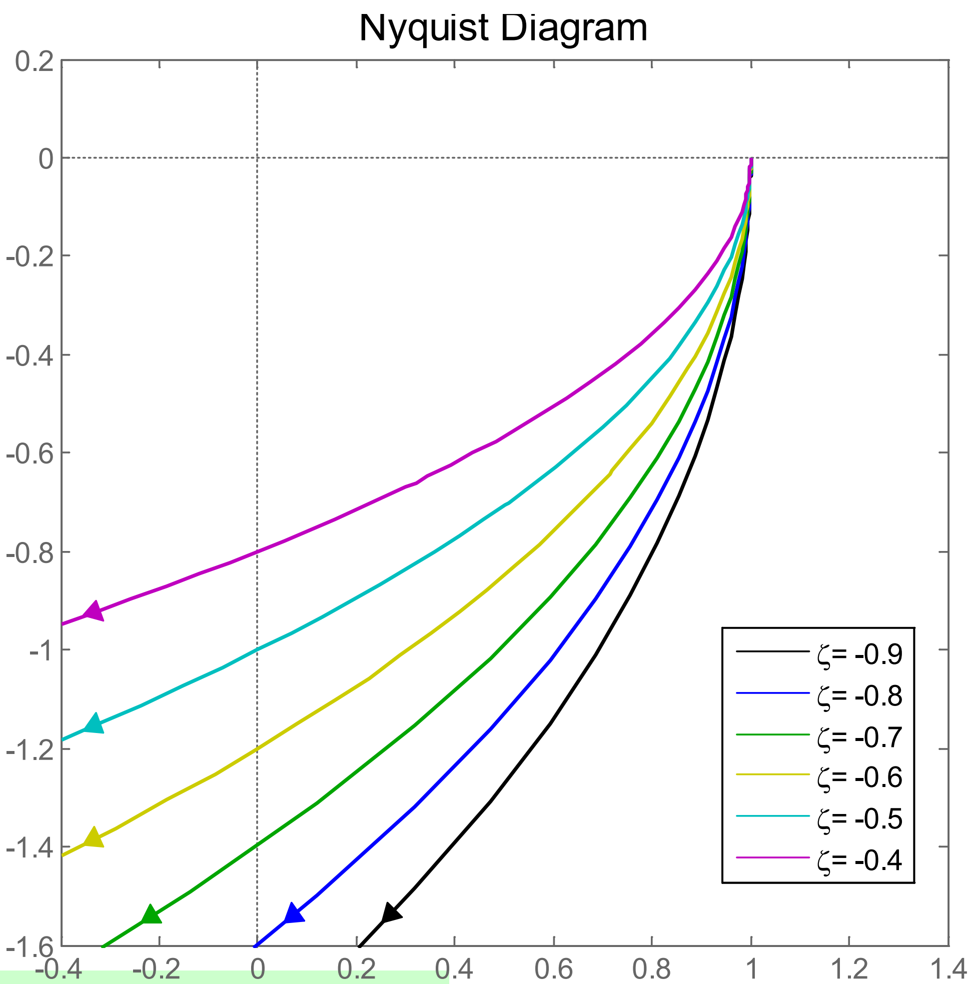


二阶微分环节

二阶微分环节$T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

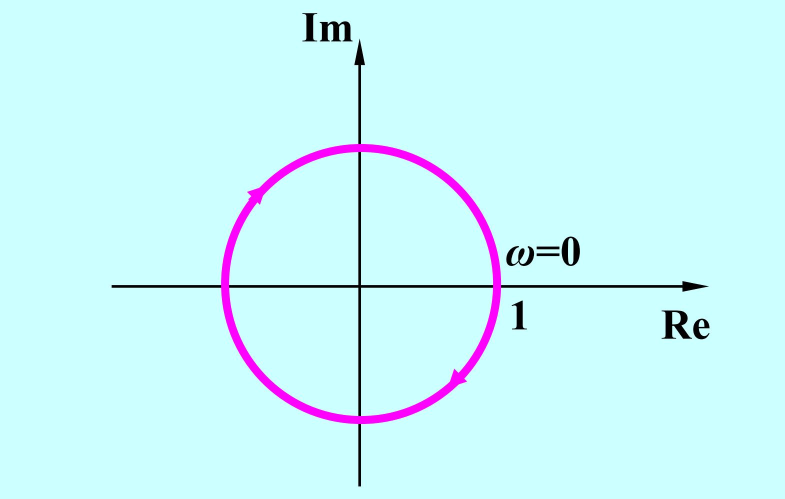
$-1<\zeta<0, T>0$

幅相曲线与1>ζ>0的二阶微分环节共轭



幅相曲线为抛物线(顶点位于(1,0))的下半支

纯滞后环节

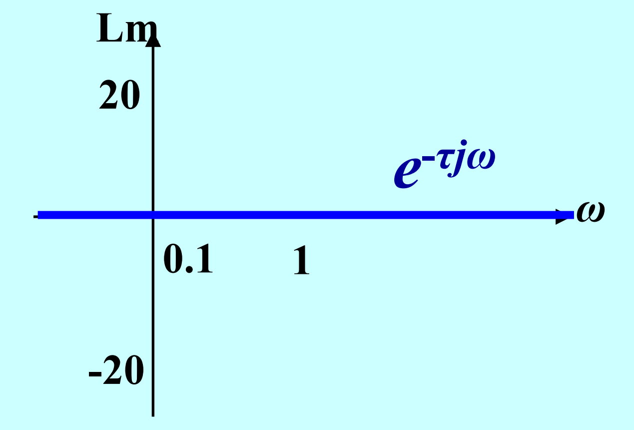


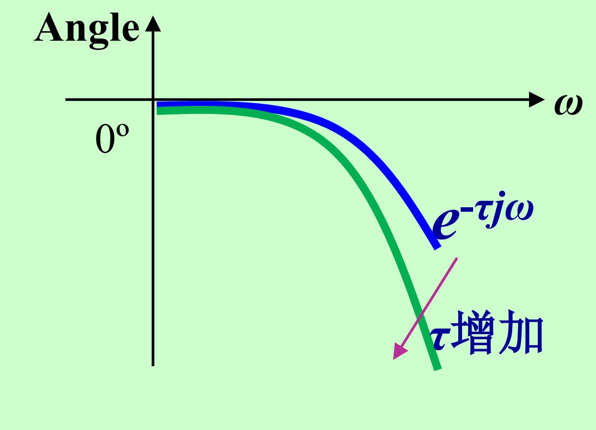
纯滞后环节：$e^{-j\tau\omega}$

$G(j\omega)$ 的幅值和相位

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\tau\omega(\text{radius}) = -57.3\tau\omega(\text{degree})$$





绘制Bode图

$$\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}$$

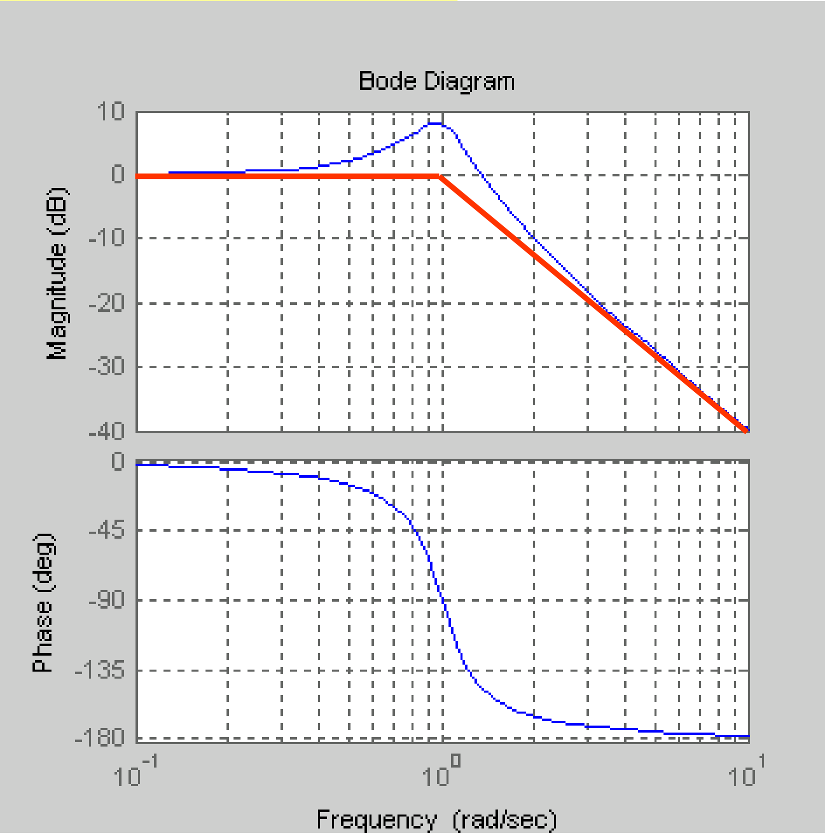
例6-4

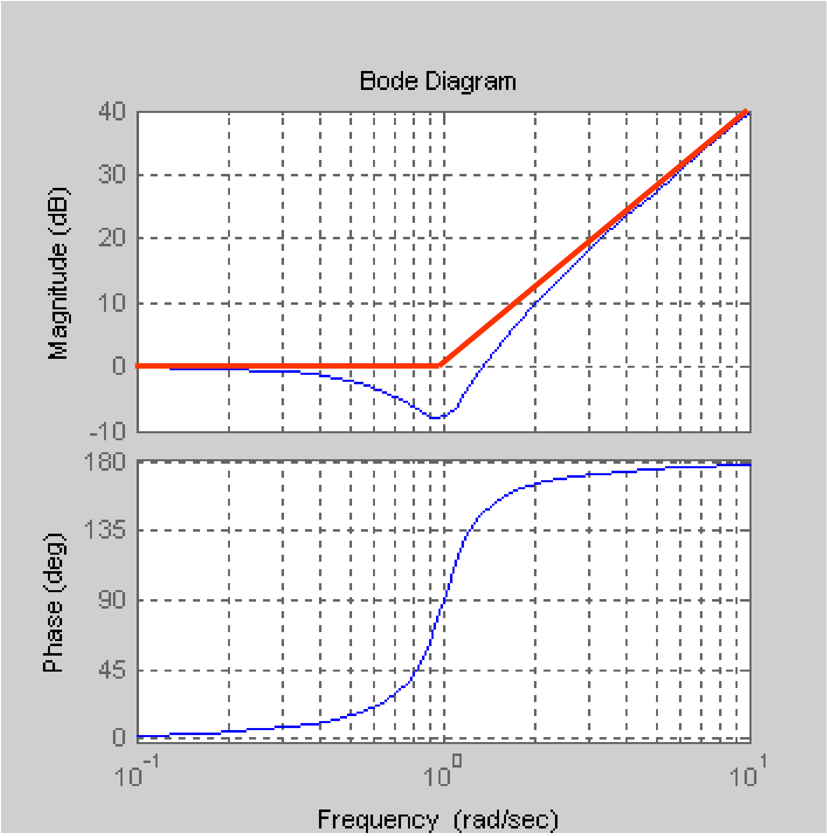
$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$M_r=|G(j\omega_r)|=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$G_1(s)=\frac{1}{1+0.4s+s^2}$$ $\zeta=0.2,\ \omega_n=1$

$$G_2(s)=1+0.4s+s^2$$ $\zeta=0.2,\ \omega_n=1$



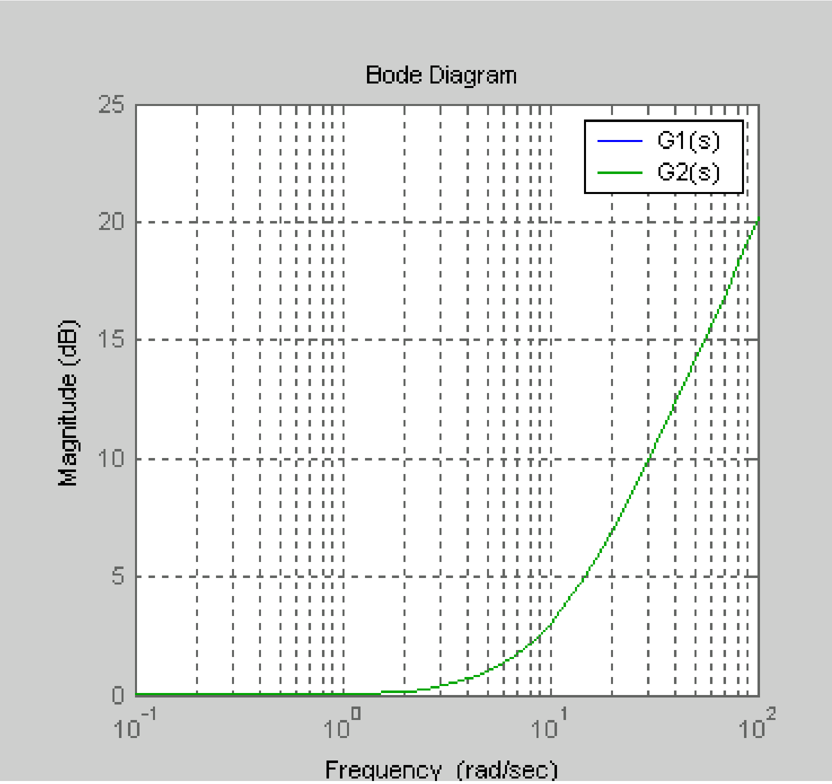


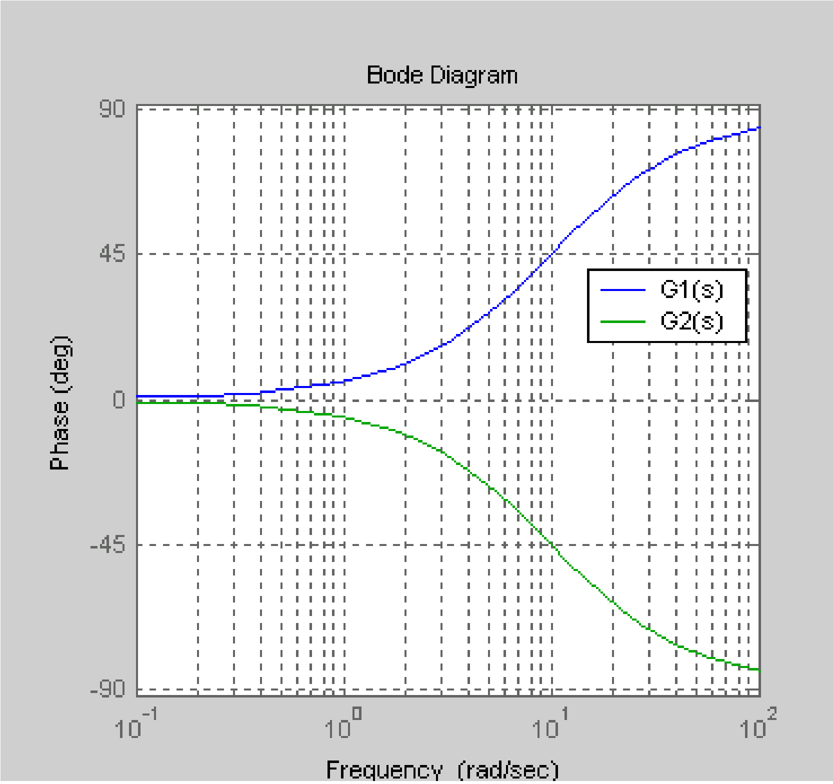
绘制Bode图

例6-5

$$G_1(s)=1+0.1s$$

$$G_2(s)=1-0.1s$$



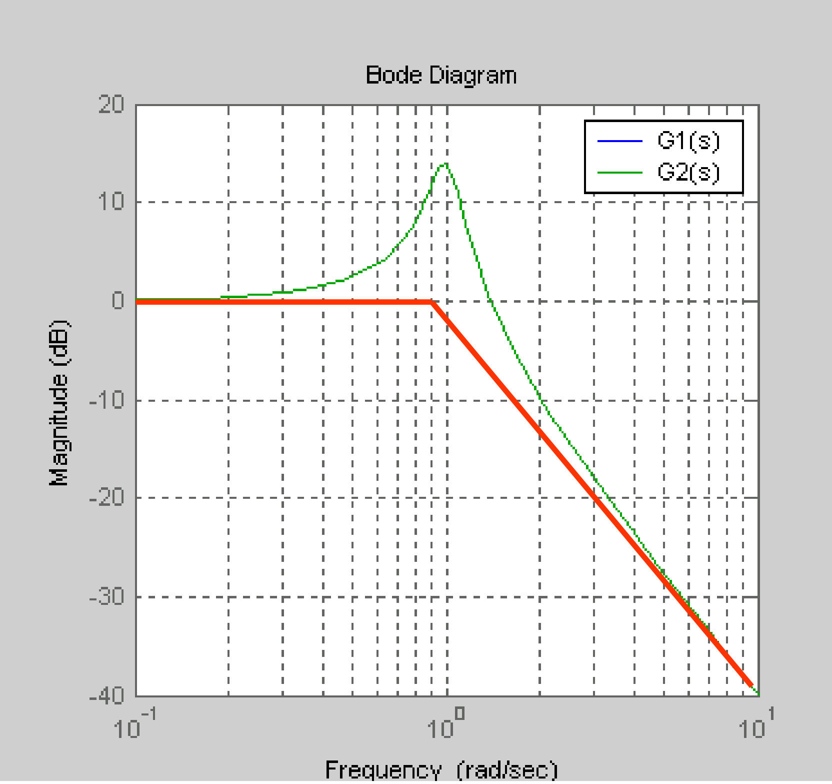


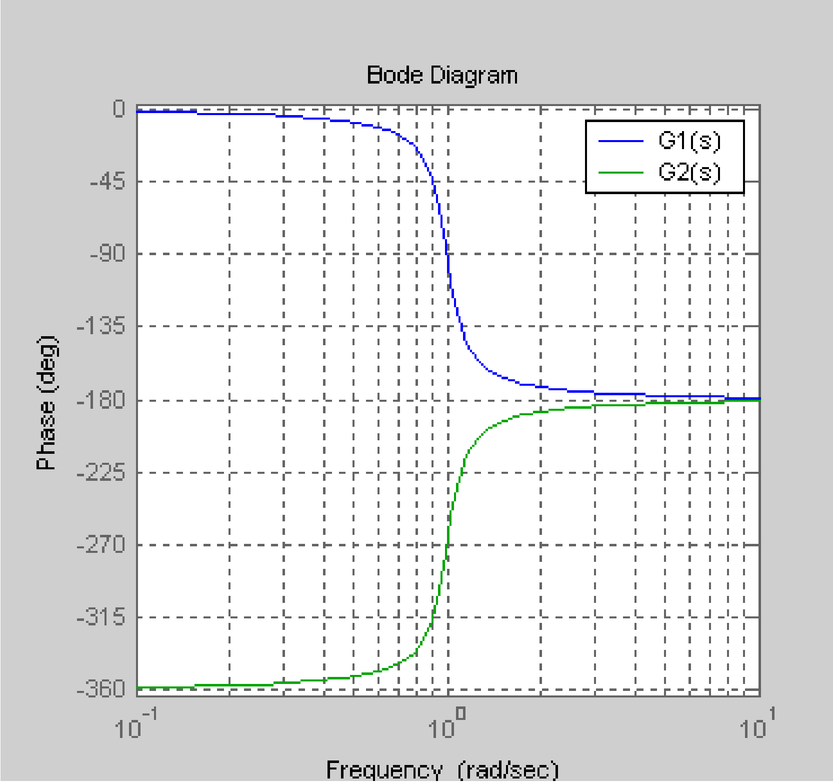
绘制Bode图

例6-6

$$G_1(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$ $\zeta=0.5,\ \omega_n=1$

$$G_2(s)=\frac{1}{s^2-s+1}$$ $\zeta=-0.5,\ \omega_n=1$





非最小相位系统

定义：

对于线性系统而言， 增益为正，在右半S平面上既无极点也无零点，同时无纯滞后环节的系统是**最小相位系统**，相应的传递函数称为最小相位传递函数；

反之，增益为负，或在右半S平面上具有极点或零点，或有纯滞后环节的系统是**非最小相位系统**，相应的传递函数称为非最小相位传递函数。

绘制Bode图

典型环节类别	最小相位	非最小相位
比例环节(K>0)	K	$-K$
一阶环节（T>0）	$1/(1+Ts)$	$1/(1-Ts)$
	$1+Ts$	$1-Ts$
二阶环节（ω_n>0, 1>ζ≥0）	$[1+j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$	$[1-j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$
	$[1+j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]$	$[1-j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]$

非最小相位系统

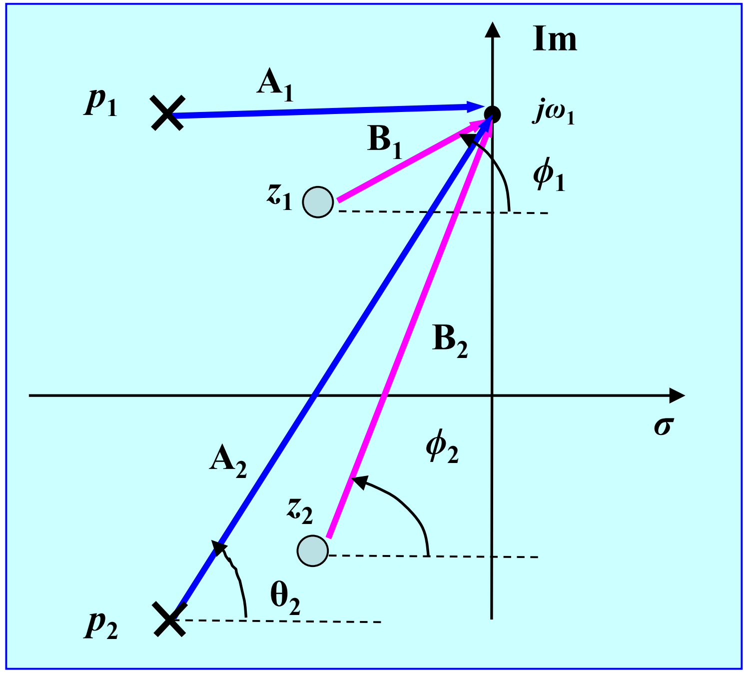
- 在具有相同幅频特性的系统中，最小相位系统的相角变化范围最小。
- 最小相位系统的幅频特性和相频特性存在严格确定的关系，因而，由对数幅频特性即可唯一地确定其相频特性。
- 对于最小相位系统，如果其对数幅频特性在某个频率附近相当宽的频率段内斜率约为20*k*dB/dec (*k*为整数)，则对应的相角约为$90k^{o}$。

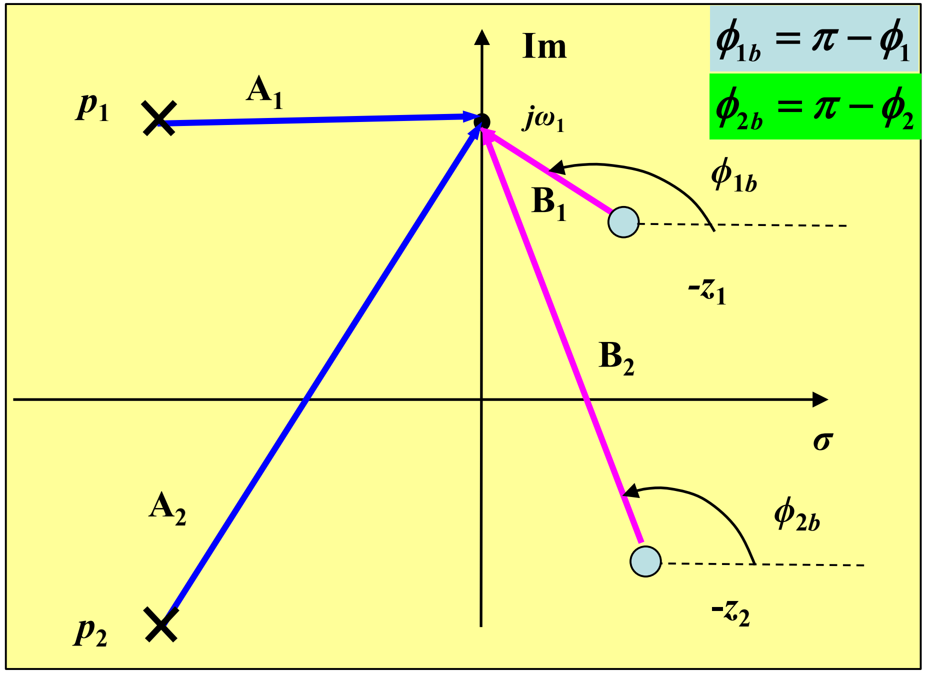
绘制Bode图——非最小相位系统

比较：最小相位系统&非最小相位系统

$$Sys.1: G_1(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$Sys.2: G_2(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$





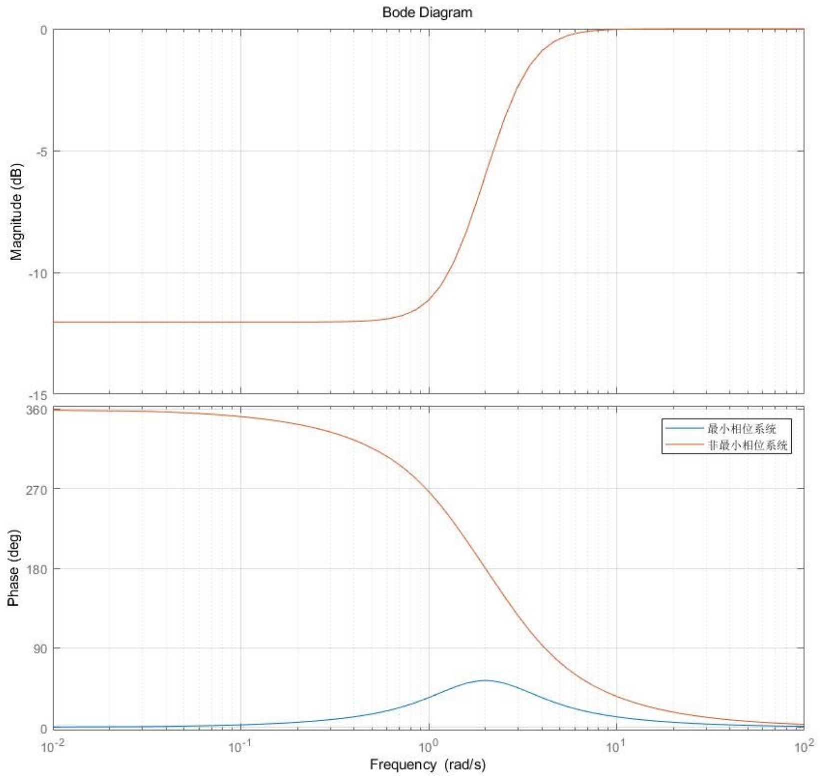
两个系统的区别仅在于第二个系统的零点在右半平面，镜像对称于第一个系统

绘制Bode图——非最小相位系统

$$Sys.1: G_1(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$Sys.2: G_2(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

两个系统的幅频率特性相同，区别在于相频特性。



The End