

# 2025夏随机过程回忆卷 (1.5学分)

## 小题 (一问3分, 共39分)

1.  $X(t) = ABt + A + B$ . 其中A、B独立同分布.  $A \sim N(0, 2)$ 。求：
  1.  $X(t)$ 是否为正态过程
  2.  $P\{X(0) \leq 1\}$
  3.  $C_X(s, t)$
2.  $N_1(t)$ 为强度 $\lambda=2$ 的泊松过程.  $N_2(t)$ 为强度 $\lambda=2t$ 的泊松过程。求：
  1.  $P\{N_1(3) = 4 | N_1(1) = 2\}$
  2.  $P\{N_1(1) = 2 | N_1(3) = 4\}$
  3.  $EN_1(2)N_2(2)$  【不确定】
  4.  $P\{N_2(2) = 1 | N_1(1) + N_1(1) = 1\}$
  5.  $P\{N_1(1) = 1 | N_1(2) + N_2(2) = 1\}$  【不确定】
3.  $\{B(t); t \geq 0\}$ 为标准布朗运动, 求：
  1. 【不记得】
  2.  $2B(1) - B(2)$ 的分布
  3.  $P\{B(0.5) < -0.5 | B(1) = 1, B(4) = 1\}$  【不确定】
  4.  $P\{\min_{0 < t < 1} B(t) - B(1) < -1\}$
  5.  $Cov(B(1)B(2), B(2)B(3))$

## 大题

1. 已知一时齐马尔可夫链, 状态空间为 $I = \{0, 1, 2\}$ , 一步转移矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

并且有 $P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = P\{X_0 = 2\} = \frac{1}{3}$ 。求:

1.  $f_{22}^{(3)}$
  2.  $P\{X_2 = 2\}$
  3.  $P\{X_1 = 2, X_3 = 1, X_5 = 1\}$
  4. 设 $T_i = \min\{n \geq 0; X_n = i\}$ , 求 $P\{T_1 < T_0\}$
2. 某人在钓鱼, 假设只钓到鲫鱼和鳊鱼, 其中钓到鲫鱼为强度 $\lambda = 2$ 条/h的泊松过程, 钓到鳊鱼为强度 $\lambda = 3$ 条/h的泊松过程, 两个过程相互独立。试求:
    1. 1h内一共钓了2条以上鱼的概率。
    2. 1h后才钓到鲫鱼的概率。
    3. 已知1h内钓到了两条鱼, 两条都是鲫鱼的概率。
    4. 第一小时和第二小时各钓了一条鱼且都是鲫鱼的概率。

5. 先钓到鲫鱼的概率是多少?

3. 已知一个时齐马尔可夫链  $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  并且

$$p_{11} = p_{12} = p_{14} = p_{15} = \frac{1}{4} \quad p_{22} = p_{23} = p_{25} = p_{34} = \frac{1}{3}, \quad p_{33} = \frac{2}{3}, p_{43} = p_{56} = 1 \quad p_{66} = p_{65} = \frac{1}{2}, \\ P\{X_0 = 1\} = P\{X_0 = 2\} = P\{X_0 = 3\} = P\{X_0 = 5\} = \frac{1}{4}. \text{求:}$$

1. 写出所有的互达条件类, 判断哪些闭的。
2. 判断所有状态的常返性和周期。
3. 对于所有正常返的状态, 求平均回转时间。
4. 求:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{34}^{(n)}$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = 2\}$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = 6\}$

4.  $X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ ;  $Y(t) = B(t+2) - B(t)$ . 其中  $X$  与  $Y$  相互独立,  $A, B$  独立同分布并且满足  $P(A=1) = P(A=-1) = \frac{1}{2}$ ;  $B(t)$  为标准布朗运动

1. 证明  $X(t)$  与  $Y(t)$  是平稳过程。
2. 求  $\langle X(t) \rangle$  与  $\langle X(t)X(t+\tau) \rangle$  并判断  $X(t)$  是否为各态历经过程。
3. 判断  $Y(t)$  的均值是否具有各态历经性, 并给出理由。
4. 计算  $Z(t) = X(t) + Y(t)$  的谱密度函数。