现代控制理论
Modern Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第七章 Chapter 7

线性离散系统的分析与校正

主要内容

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

离散系统的数学模型

- 线性差分方程
- 脉冲传递函数
- 离散系统的状态空间模型
- 各种离散模型的关系

线性差分方程

- 通常采用线性定常微分方程描述线性连续系统，采用线性定常差分方程描述线性离散系统。

- 前向差分方程描述线性定常离散控制系统

$$
\begin{aligned}
&a_n y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1 y(k+1)+a_0 y(k)\\
&=b_m r(k+m)+b_{m-1}r(k+m-1)+\cdots+b_1 r(k+1)+b_0 r(k)
\end{aligned}
$$

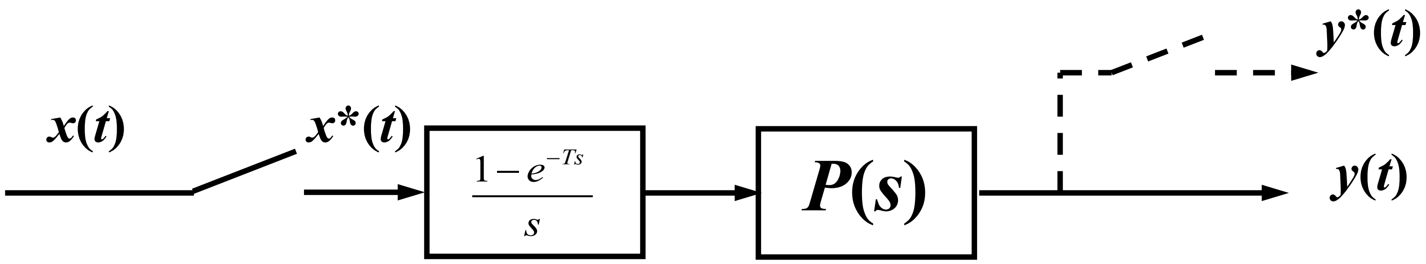
- 后向差分方程描述线性定常离散系统也可用

$$
\begin{aligned}
&a_n y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0 y(k-n)\\
&=b_m r(k)+b_{m-1}r(k-1)+\cdots+b_0 r(k-m)
\end{aligned}
$$

因果系统，$m \le n$，称n为差分方程的阶次

线性差分方程

➢ **从微分方程到差分方程（精确求解）**



一阶微分方程 $T_1\dfrac{dy}{dt}+y=Kx$ ，当$nT< t <(n+1)T$，输入恒为$x(nT)$，微分方程的解：

$$y(t)=ce^{-t/T_1}+Kx(nT)$$

将初始条件$y(nT)$代入，得$c=\dfrac{y(nT)-Kx(nT)}{e^{-nT/T_1}}$

将 c 及终止时间 $t=(n+1)T$代入方程解，得

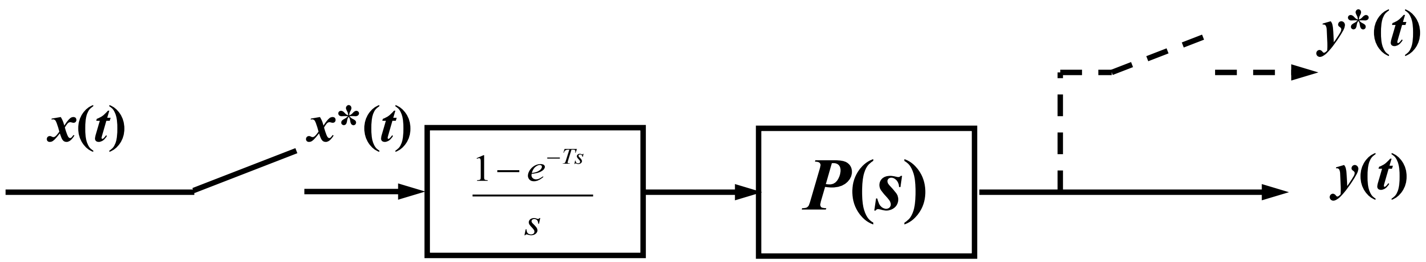
$$y[(n+1)T]=\frac{[y(nT)-Kx(nT)]e^{-(n+1)T/T_1}}{e^{-nT/T_1}}+Kx(nT)$$

$$y[(n+1)T]-ay(nT)=Kbx(nT)$$

其中$a=e^{-T/T_1},b=1-e^{-T/T_1}$

线性差分方程

➢ **从微分方程到差分方程（近似法）**



一阶微分方程

$$T_1\frac{dy}{dt}+y=Kx$$

$nT<t<(n+1)T$

$$T_1\frac{y[(n+1)T]-y(nT)}{T}+y(nT)=Kx(nT)$$

一阶差分方程表示

$$y[(n+1)T]-(1-\frac{T}{T_1})y(nT)=K\frac{T}{T_1}x(nT)$$

$$\boxed{y[(n+1)T]-ay(nT)=Kbx(nT)}$$

其中$a=1-\frac{T}{T_1},b=\frac{T}{T_1}$

线性差分方程

- 求解差分方程常用的有递推法和Z变换法

  - 递推法

线性定常差分方程（前差或后差）

输入序列、初始条件

$\xrightarrow{\text{递推关系}}$ 输出序列

已知差分方程$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=u(k)$，其输入序列$u(k)=1$，初始条件为$y(0)=0$，$y(1)=1$，请用递推法求$y(k)$。

解：$y(k+2)=5y(k+1)-6y(k)+u(k)$

$$y(2)=5y(1)-6y(0)+u(0)=6$$

$$y(3)=5y(2)-6y(1)+u(1)=25$$

$$y(4)=5y(3)-6y(2)+u(2)=90$$

$$\vdots$$

线性差分方程

- Z变换法

➢ **例7-3-1 已知离散系统的差分方程为** $y\left[(k+1)T\right]+2y(kT)=5kT$

且$y(0)$ = -1，求差分方程的解。（Z变换法）

解：对差分方程取Z变换，得

$$z\left[Y(z)-y(0)\right]+2Y(z)=5\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$Y(z)=\frac{5Tz}{(z-1)^2(z+2)}-\frac{z}{z+2}$$

$$\because \frac{1}{(z+2)(z-1)^2}=\frac{1}{9(z+2)}+\frac{1}{3(z-1)^2}-\frac{1}{9(z-1)}$$

$$\therefore Y(z)=\frac{5T}{9}\left[\frac{z}{z+2}+\frac{3z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}\right]-\frac{z}{z+2}$$

查Z变换表，有

$$y(kT)=\frac{5T}{9}\left[(-2)^k+3k-1\right]-(-2)^k$$

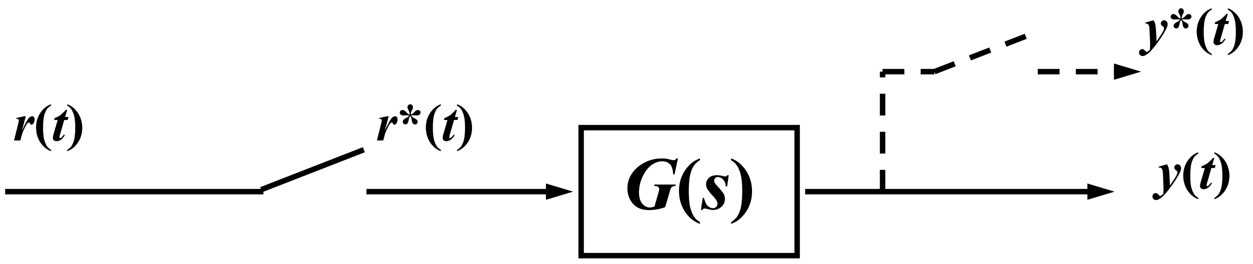
$$y^*(t)=\frac{5T}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(1-\frac{9}{5T}\right)(-2)^k+3k-1\right]\delta(t-kT)$$

离散系统的数学模型

- 线性差分方程
- 脉冲传递函数
- 离散系统的状态空间模型
- 各种离散模型的关系

脉冲传递函数

- 定义



脉冲传递函数：在零初始条件下，输出$y^*(t)$ 的z变换$Y(z)$与非零输入$r^*(t)$的z变换$R(z)$之比，$G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=\dfrac{b_m z^m+\cdots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}, m\le n$

等价定义：在零初始条件下，系统的单位脉冲响应序列的z 变换

$$G(z)=Z\left[y^*(t)\right]\Big|_{r^*(t)=\delta(t)}$$

输入输出关系 $Y(z)=G(z)R(z)$

若没有对$r(t)$的采样，则无$G(z)$!!

脉冲传递函数

- **采样函数拉氏变换的两个重要性质（证明见后）**
  - 采样函数$e^*(t)$ 的拉氏变换 $E^*(s)$具有周期性

$$E^*(s - jk\omega_s) = E^*(s)$$

  - 若$E^*(s)$与连续函数的拉氏变换$G(s)$相乘后再离散化，则$E^*(s)$可以从离散符号中提取出来

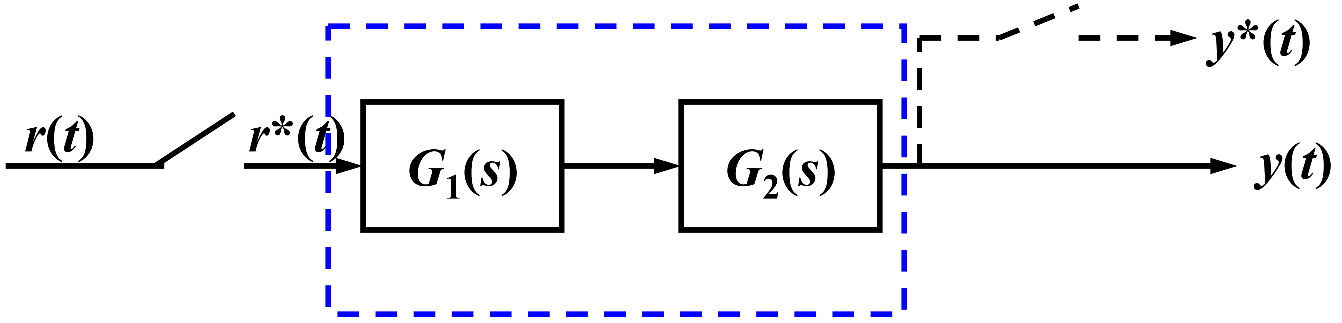
$$[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$$

- 上述命题为处理采样器提供了一种有效的方法。

脉冲传递函数

- 开环串联系统的脉冲传递函数

1) 两个串联环节间没有采样器的连接



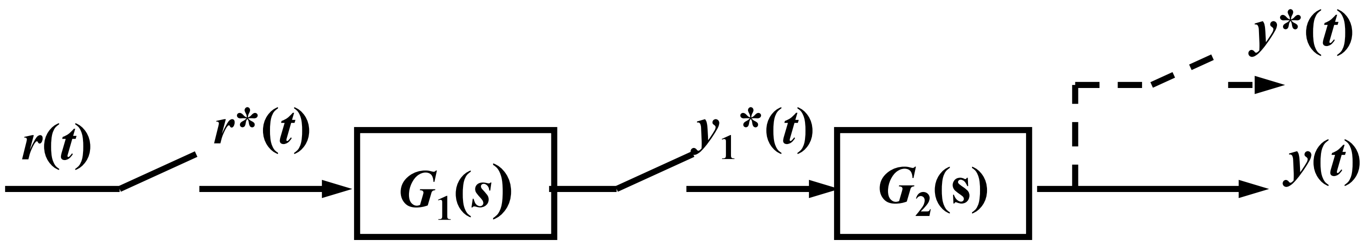
$$G(Z)=\frac{Y(Z)}{R(Z)}=Z[G_2(s)G_1(s)]$$

也记 $G_2G_1(z)=Z\left[G_2(s)G_1(s)\right]=G_2G_1^*(s)$

注意：一般地 $G_2G_1^*(s)\neq G_2^*(s)G_1^*(s)$

脉冲传递函数

2) 两个串联环节间有采样器的连接，且采样器同步工作



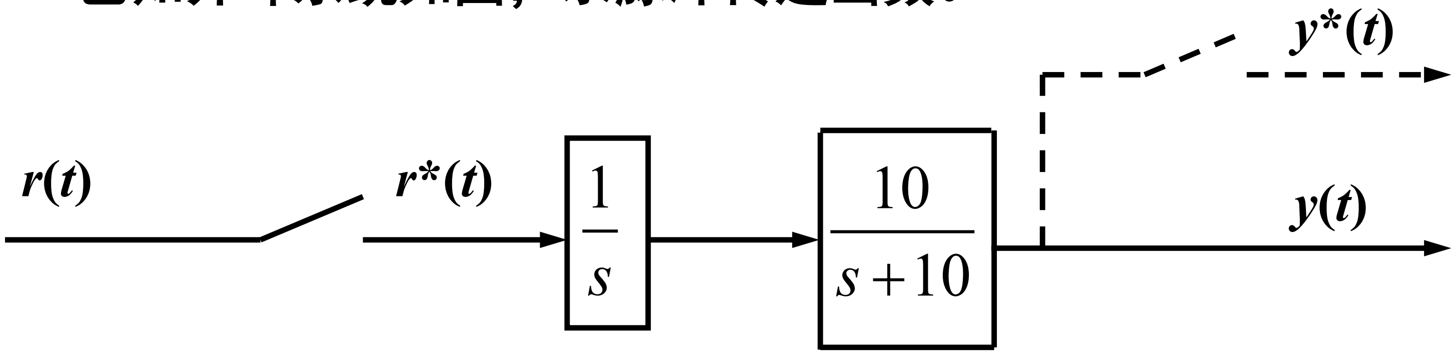
$$G_1(z)=\frac{Y_1(z)}{R(z)}=Z[G_1(s)]$$

$$G_2(z)=\frac{Y(z)}{Y_1(z)}=Z[G_2(s)]$$

$$\Rightarrow \quad G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_2(z)G_1(z)$$

脉冲传递函数

例7-3-2 已知开环系统如图，求脉冲传递函数。



解：

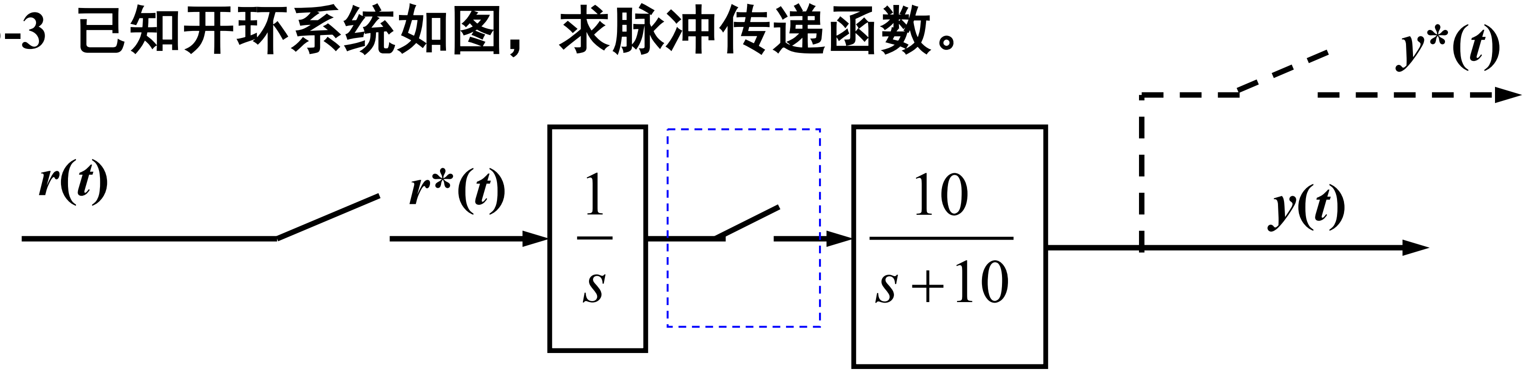
$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=Z[G_2(s)G_1(s)]$$

$$G(z)=Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right]=Z\left[\frac{1}{s}\right]-Z\left[\frac{1}{s+10}\right]$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-10T}}=\frac{(1-e^{-10T})z}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

脉冲传递函数

例7-3-3 已知开环系统如图，求脉冲传递函数。



解：

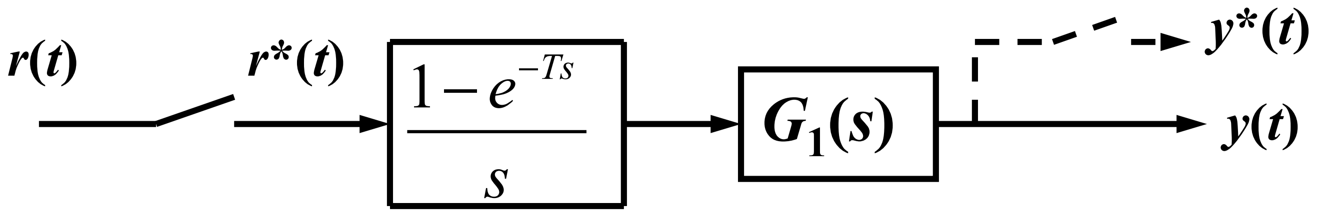
$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_2(z)\cdot G_1(z)$$

$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s}\right]\cdot Z\left[\frac{10}{s+10}\right]=\frac{10z^2}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

$$\neq Z\left[\frac{10}{s(s+10)}\right]=\frac{(1-e^{-10T})z}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

脉冲传递函数

3) 带零阶保持器的开环系统的脉冲传递函数



$$G(z)=Z\left[G_1(s)\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right]=Z\left[G_1(s)\frac{1}{s}\right]-Z\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]$$

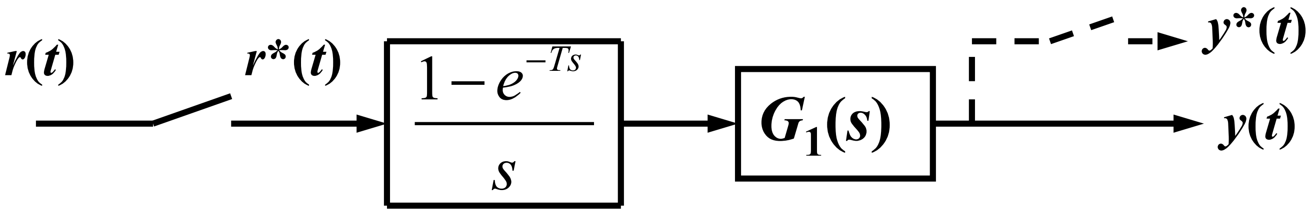
令$G_2(s)=G_1(s)\frac{1}{s}$，其单位脉冲响应为$g_2(t)$

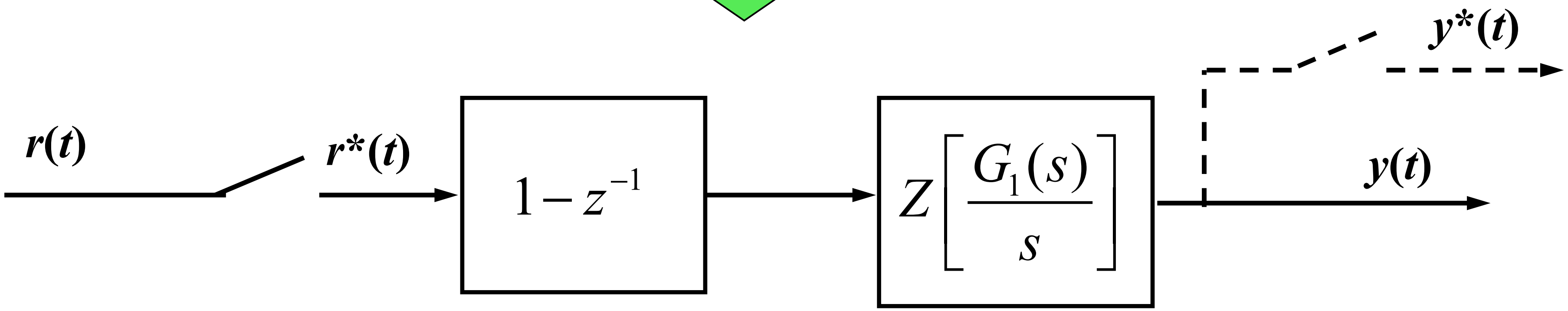
则$L^{-1}\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]=g_2(t-T)$ Laplace变换的时移特性

于是$Z\left[G_1(s)\frac{e^{-Ts}}{s}\right]=Z\left[g_2(t-T)\right]=z^{-1}G_2(z)$ Z变换的移位特性

故 $G(z)=(1-z^{-1})G_2(z)$

脉冲传递函数



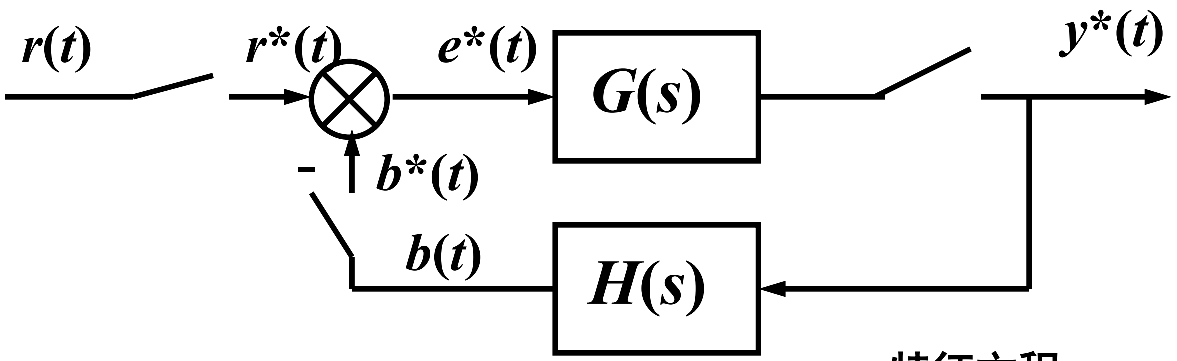


$$G(z) = Z\left[G_1(s)\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G_1(s)}{s}\right]$$

脉冲传递函数

➢ 闭环反馈系统的脉冲传递函数

1) 反馈回路(1)



$$Y(z)=G(z)E(z)$$

$$E(z)=R(z)-H(z)Y(z)$$

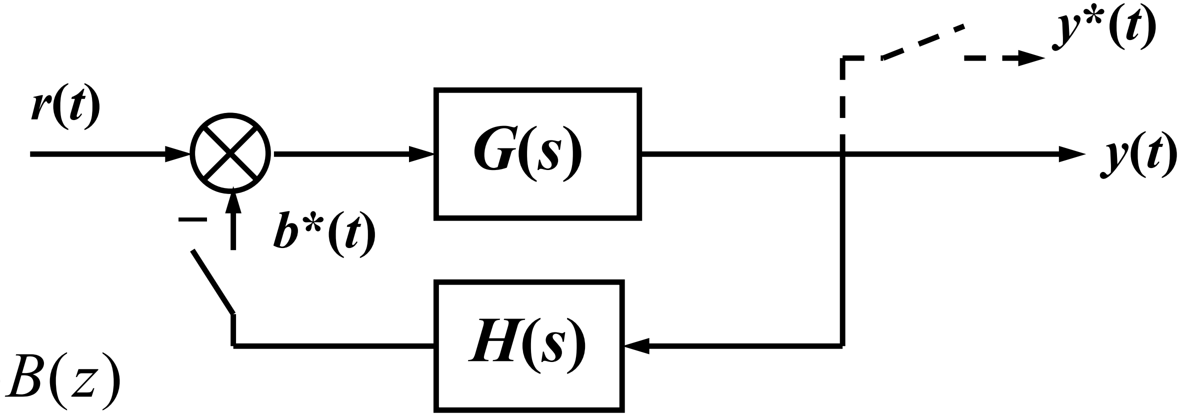
$$Y(z)=G(z)R(z)-G(z)H(z)Y(z)$$

$$[1+G(z)H(z)]Y(z)=G(z)R(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{\boxed{1+G(z)H(z)}}$$

特征方程

脉冲传递函数

2) 反馈回路(2)



$$Y(z)=GR(z)-G(z)B(z)$$

$$B(z)=HGR(z)-HG(z)B(z)$$

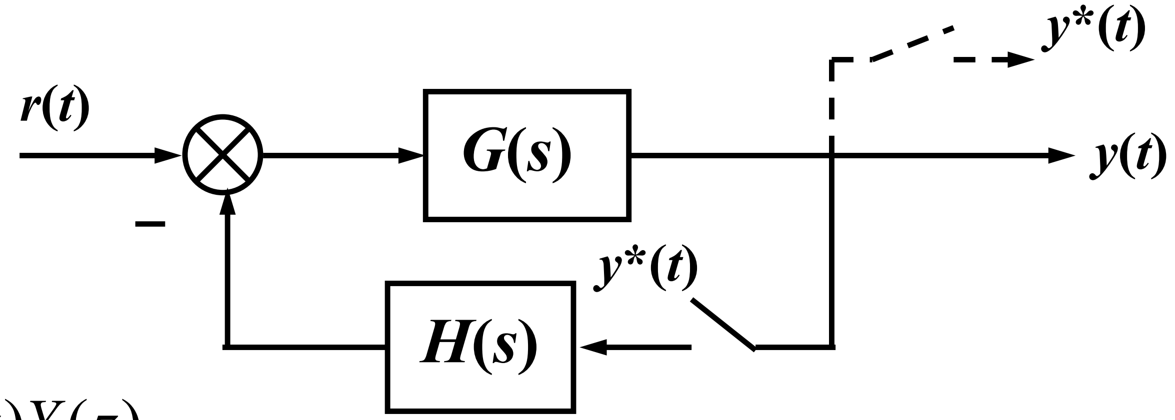
$$B(z)=\frac{HGR(z)}{1+HG(z)}$$

$$Y(z)=GR(z)-\frac{G(z)HGR(z)}{1+HG(z)}$$

注意：无 $G_{\text{closed}}(z)$

脉冲传递函数

3) 反馈回路(3)



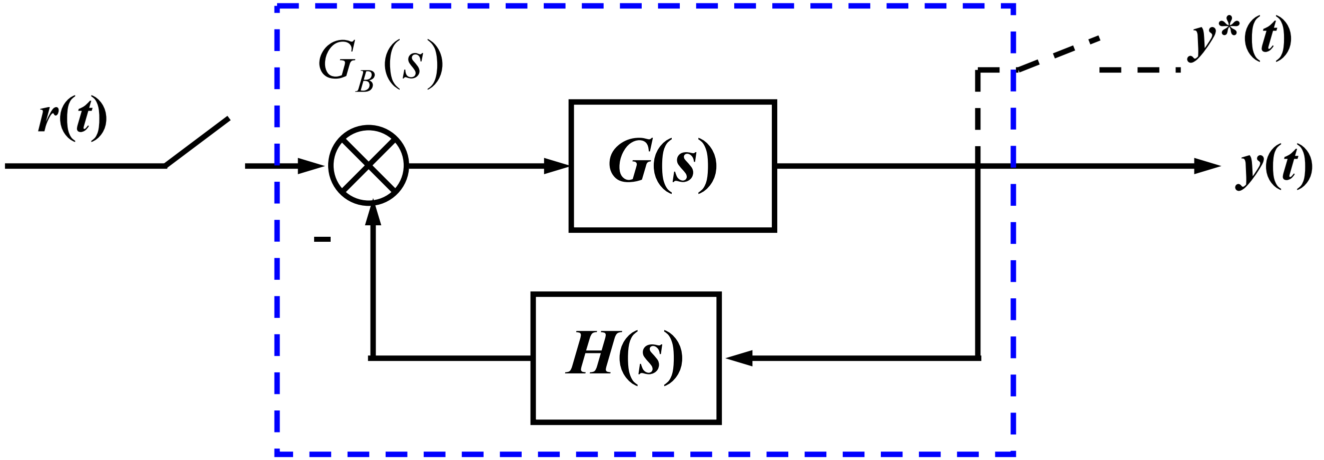
$$Y(z) = GR(z) - GH(z)Y(z)$$

$$Y(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}$$

注意：无 $G_{closed}(z)$

脉冲传递函数

4) 反馈回路(4)



$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

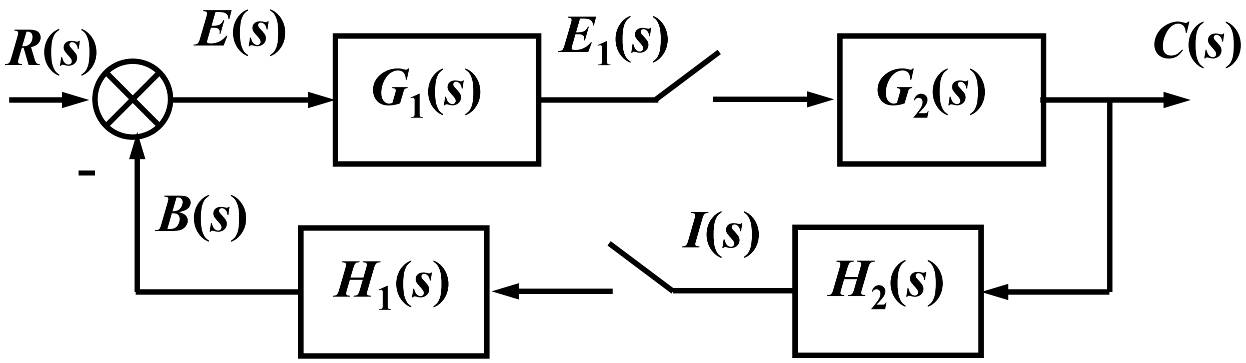
$$Y(z) = G_B(z)R(z)$$

$$Y(z) = \frac{G}{1+GH}(z)R(z)$$

$$G_{closed}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G}{1+GH}(z)$$

脉冲传递函数

例7-3-4a



解：从某一采样开关处开始列写表达式（一般从与输出最近的采样开关开始）

$$C(z) = G_2(z)E_1(z)$$

$$\left.\begin{aligned} E_1(z) &= G_1R(z) - G_1H_1(z)I(z) \\ I(z) &= H_2G_2(z)E_1(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_1(z) = \frac{G_1R(z)}{1 + G_1H_1(z)H_2G_2(z)}$$

$$C(z) = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_1H_1(z)H_2G_2(z)}$$

脉冲传递函数

- **比较连续系统的传递函数$G(s)$与离散系统的脉冲传递函数$G(z)$**
  - 相同
    - 线性定常系统
    - 零初始条件
    - 只与系统的结构参数有关
  - 差异
    - $G(s)$一定存在；$G(z)$则不一定，取决于输入端$R(z)$存在否（即输入端是否有采样器）；故很多时候是求输出Y的Z变换式
    - 当系统具有相同环节时，$G(z)$或$Y(z)$与采样器的位置相关，可用逐步推导法来求

脉冲传递函数

- 输出变量的Z变换式$Y(z)$的计算——单回路梅逊公式的推广：

若前向通道（环内）中有一实际的采样器存在，就可用“视察法”直接求$Y(z)$。

$$Y(z)=\frac{G_f(z)}{1-G_0(z)}$$

注意：此式的结果是$Y(z)$而非$G(z)$

此式针对正反馈

其中：$G_0(z)$ 为开环脉冲传递函数（环可以从任一采样器断开，沿信号方向走一周而构成）；

$G_f(z)$ 为前向通路中输出量的Z变换，将$R(s)$视为前向通路中的一个环节，$G_f(z)$ 是包括输入在内的由输入到输出的前向通路的Z变换函数。

脉冲传递函数

➢ 方块图运算时对采样开关的处理技巧

单回路梅逊公式的推广：若前向通道(环内)中有一实际的采样开关存在，就可用“视察法”直接求$Y(z)$。

1）用代数法在采样开关出口处按连续系统处理（暂时对采样开关“视而不见”）（——特别注意采样开关的位置）；

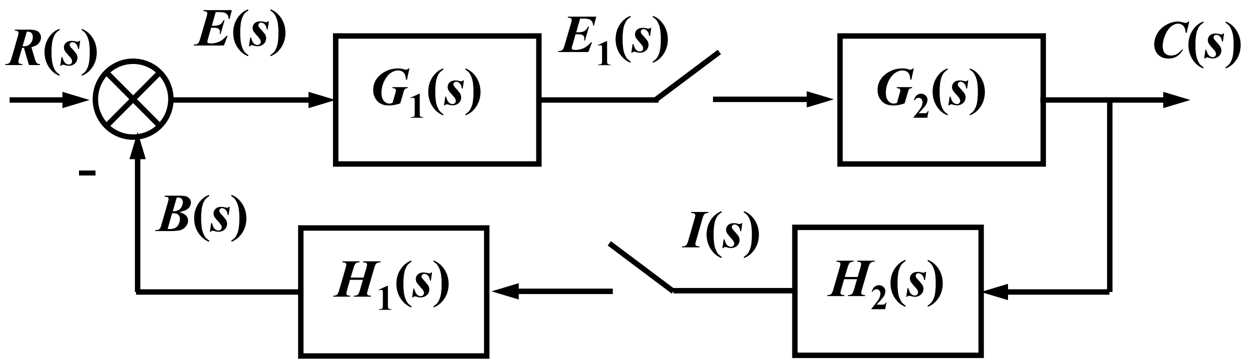
2）在采样开关隔开的环节处加上“*”号（或直接用z变换式表示）；

3）对输出$y(t)$虚拟采样并消去中间变量；

4）方块图的等效变换与连续系统完全相同，其原则是变换前后对应的输入输出信息不变。

脉冲传递函数

例7-3-4b



解：采用“视察法”直接求$C(z)$

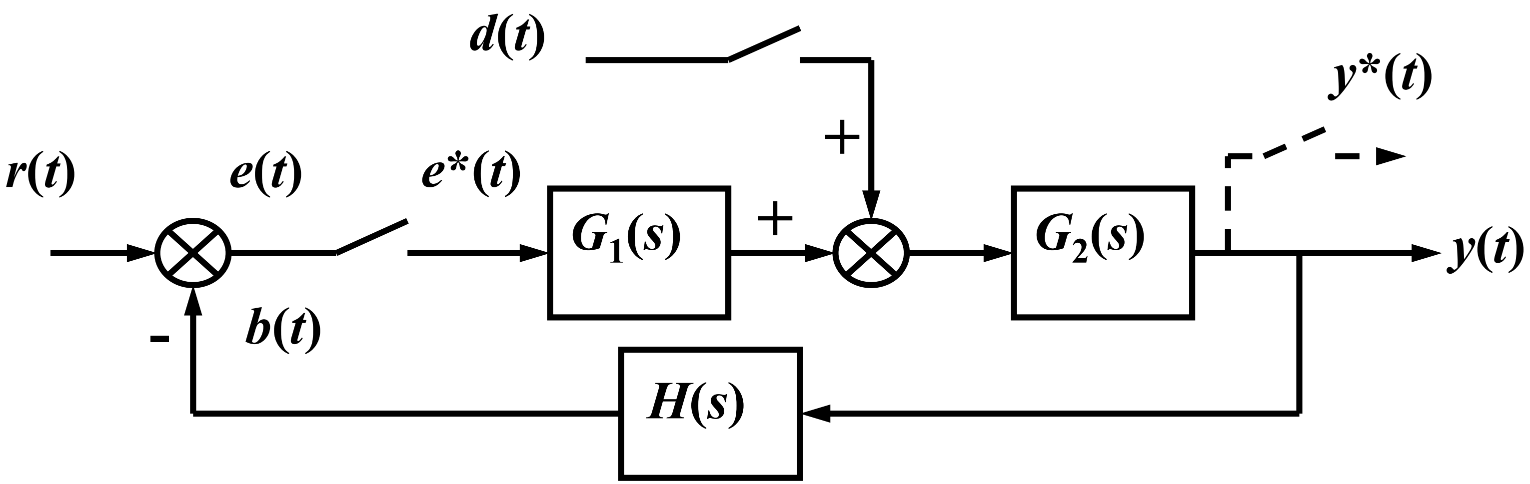
$$G_f(z) = G_2(z)G_1R(z)$$

$$G_0(z) = -G_1H_1(z)H_2G_2(z)$$

$$\boxed{C(z) = \frac{G_f(z)}{1-G_0(z)} = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1+G_1H_1(z)H_2G_2(z)}}$$ 与逐步推导法的结果相同

脉冲传递函数

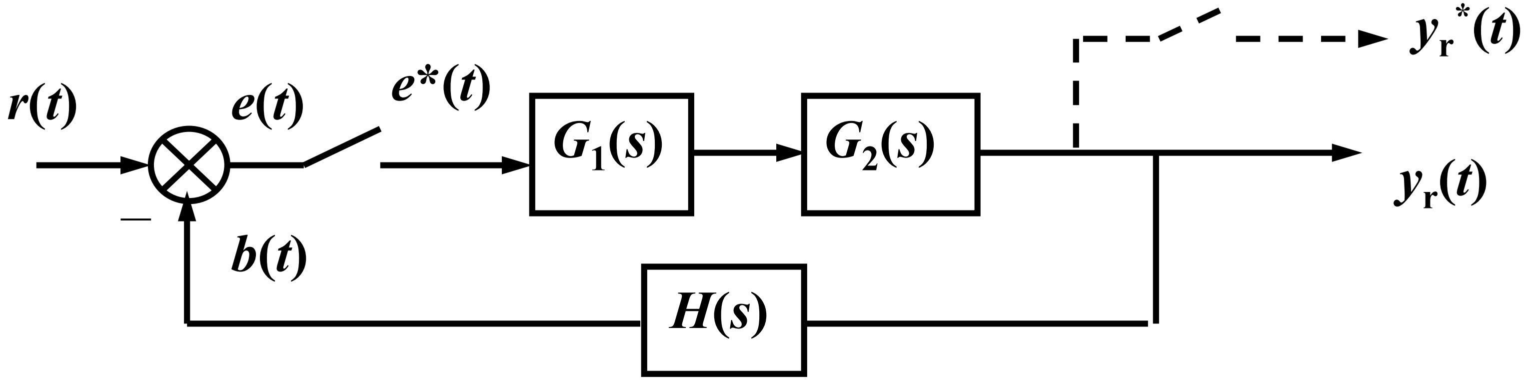
例7-3-5 已知带闭环控制系统如图，求脉冲传递函数及输出Z变换式。



带干扰的闭环控制系统

脉冲传递函数

解：先假定$d(t)=0$，得到如图所示的结构图



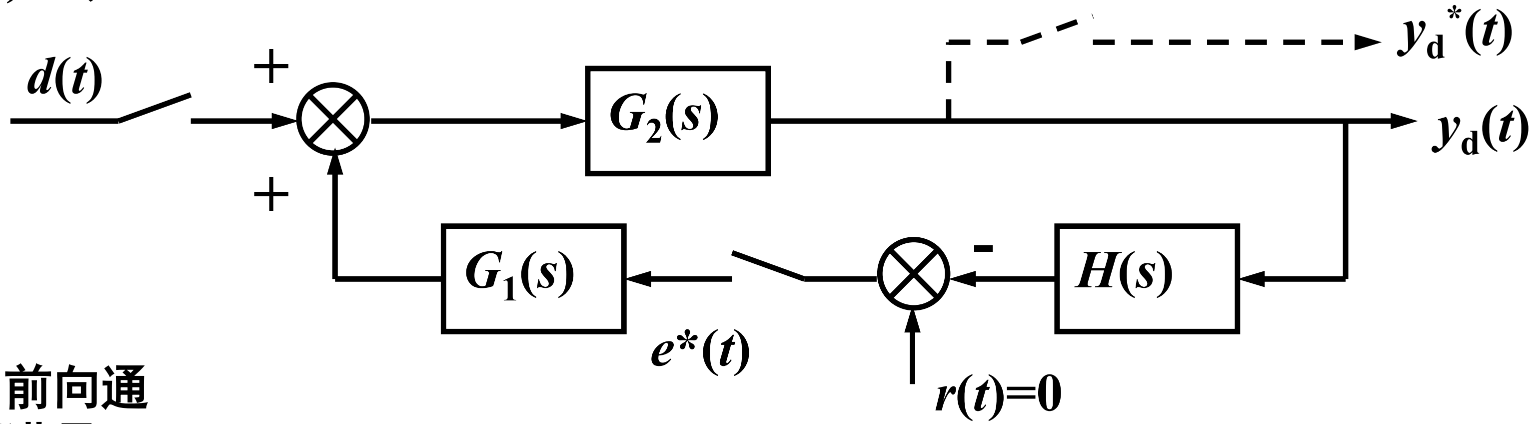
满足“视察法”直接求$Y(z)$条件，试求$Y(z)$!!

$$Y(z)=\frac{G_2G_1(z)R(z)}{1+HG_2G_1(z)}$$

$$G_{R\_closed}(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_2G_1(z)}{1+HG_2G_1(z)}$$

脉冲传递函数

再假定输入$r(t)$=0，得到按扰动输入的系统结构图



单回路，但环内前向通道无采样器，不满足"视察法"条件!!

$$\text{将} Y_D(z) \text{用} E(z) \text{表示}, \ Y_D(z) = G_2(z)D(z) + G_2G_1(z)E(z)$$

从$d(t)$至$e^*(t)$的环内前向通道有采样器，满足"视察法"条件!!

$$E(z) = -\frac{HG_2(z)D(z)}{1 + HG_2G_1(z)}$$

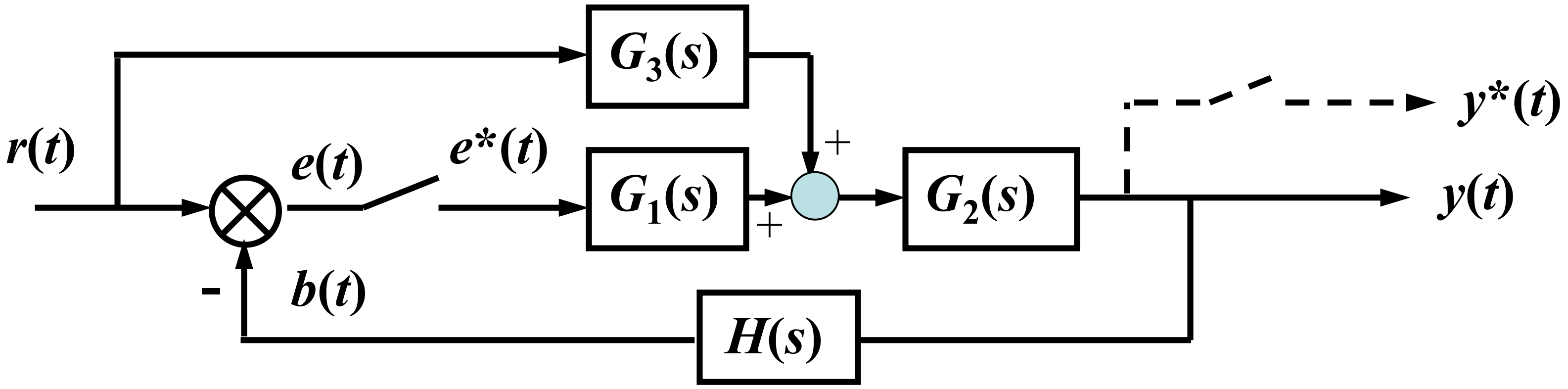
此处特别要留意符号!

$$Y_D(z) = G_2(z)D(z) - \frac{G_2G_1(z)HG_2(z)}{1 + HG_2G_1(z)}D(z)$$

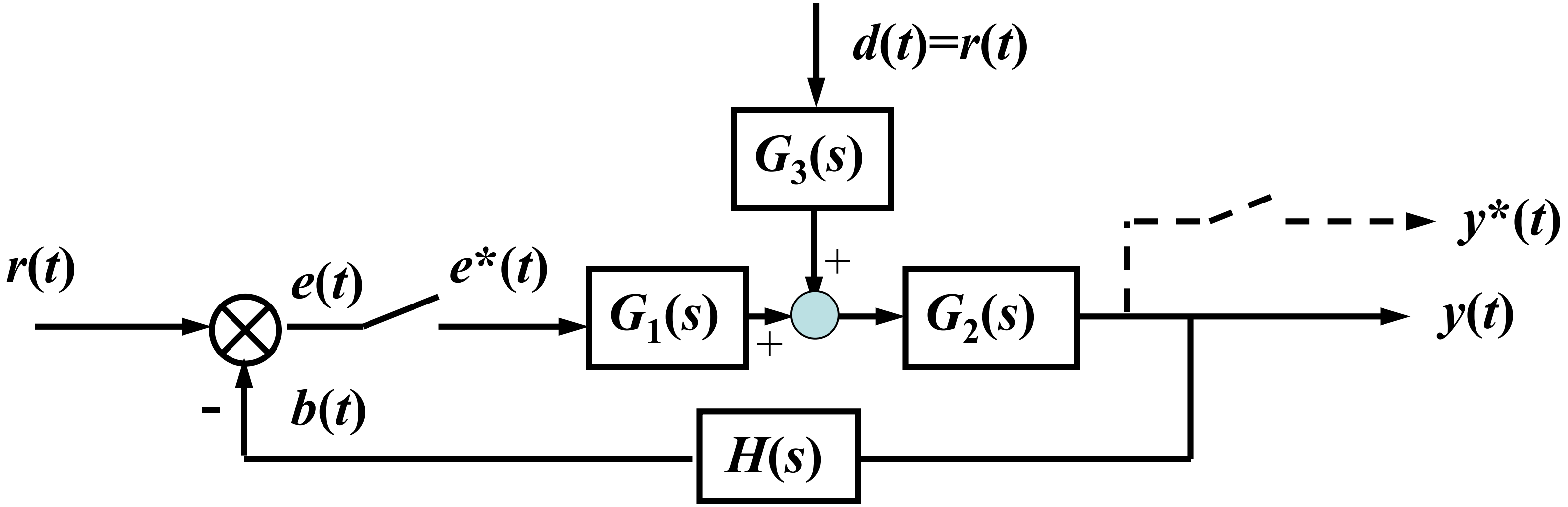
$$\text{合并得} \quad Y(z) = Y_R(z) + Y_D(z) = \frac{G_2G_1(z)}{1 + HG_2G_1(z)}R(z) + \left[G_2(z) - \frac{G_2G_1(z)HG_2(z)}{1 + HG_2G_1(z)}\right]D(z)$$

脉冲传递函数

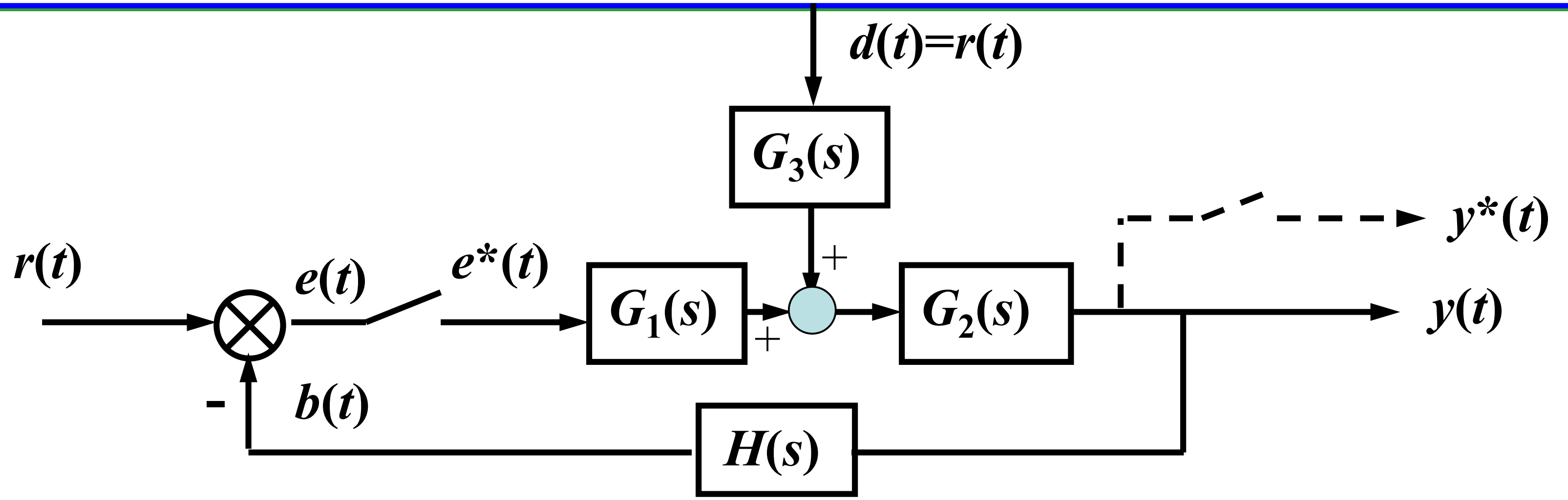
例7-3-6　求脉冲传递函数及输出的Z变换。



多条前向通路，依线性性质进行拆分



脉冲传递函数



视察法 $Y_R(z)=\dfrac{G_2G_1(z)R(z)}{1+HG_2G_1(z)}$

此处特别要留意符号！

$Y_D(z)=G_2G_3D(z)+G_2G_1(z)E(z)$　　再用视察法 $E(z)=-\dfrac{HG_2G_3D(z)}{1+HG_1G_2(z)}$

$$Y(z)=Y_R(z)+Y_D(z)=\frac{G_2G_1(z)}{1+HG_2G_1(z)}R(z)+G_2G_3D(z)-\frac{G_2G_1(z)HG_2G_3D(z)}{1+HG_1G_2(z)}$$

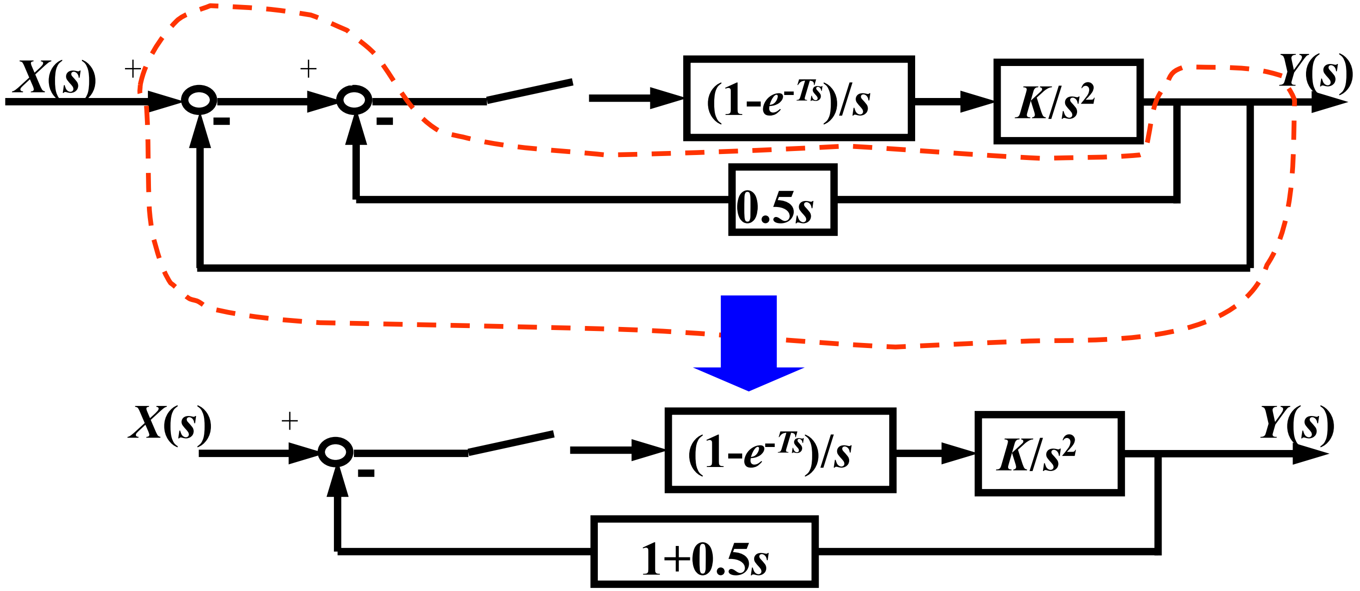
注意到$d(t)=r(t),Y(z)=G_2G_3R(z)+\dfrac{G_2G_1(z)R(z)-G_2G_1(z)HG_2G_3R(z)}{1+HG_1G_2(z)}$

注意：

无$G_{closed}(z)$

脉冲传递函数

例7-3-7　求脉冲传递函数及输出的*Z*变换。



多回路!!??

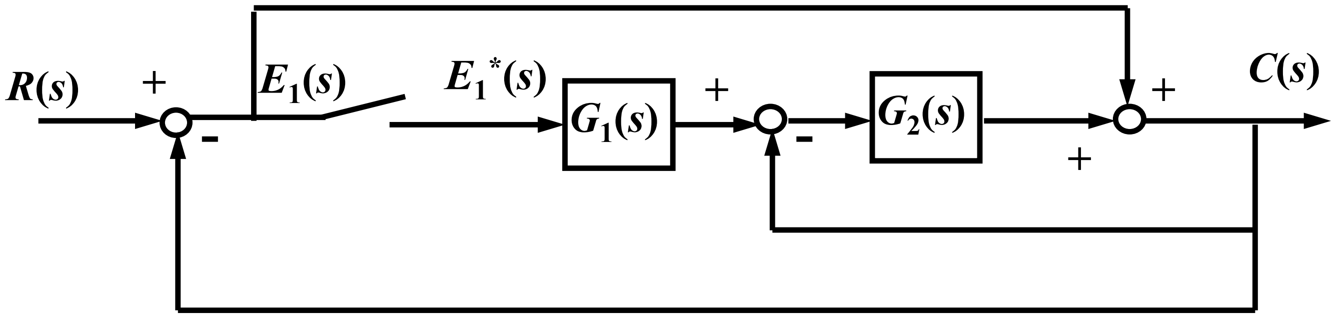
$$Y(z)=\frac{G_f(z)}{1-G_0(z)}$$

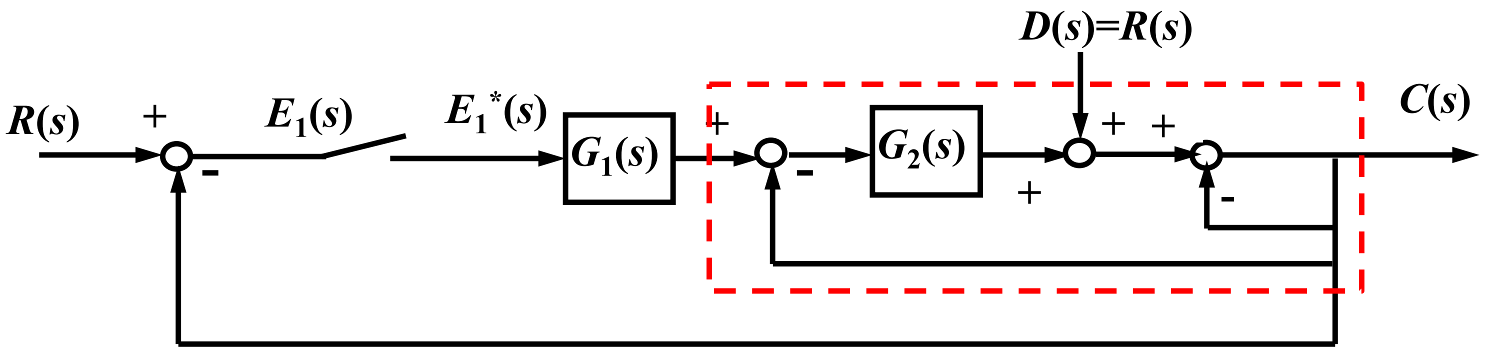
$$G_f(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s^2}\right]X(z)$$

$$G_0(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s^2}(-1-0.5s)\right]$$

脉冲传递函数

例7-3-8　求脉冲传递函数及输出的Z变换。

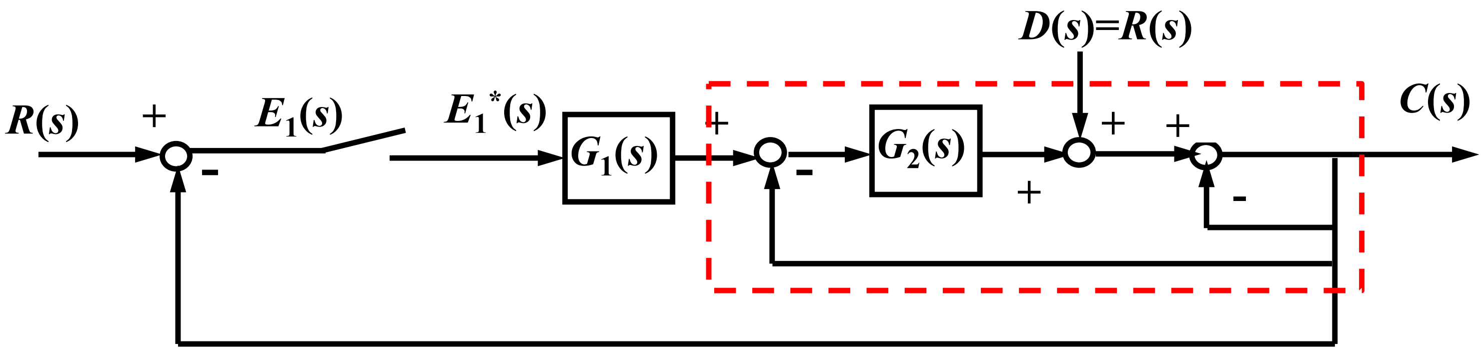




二条前向通道，拆分

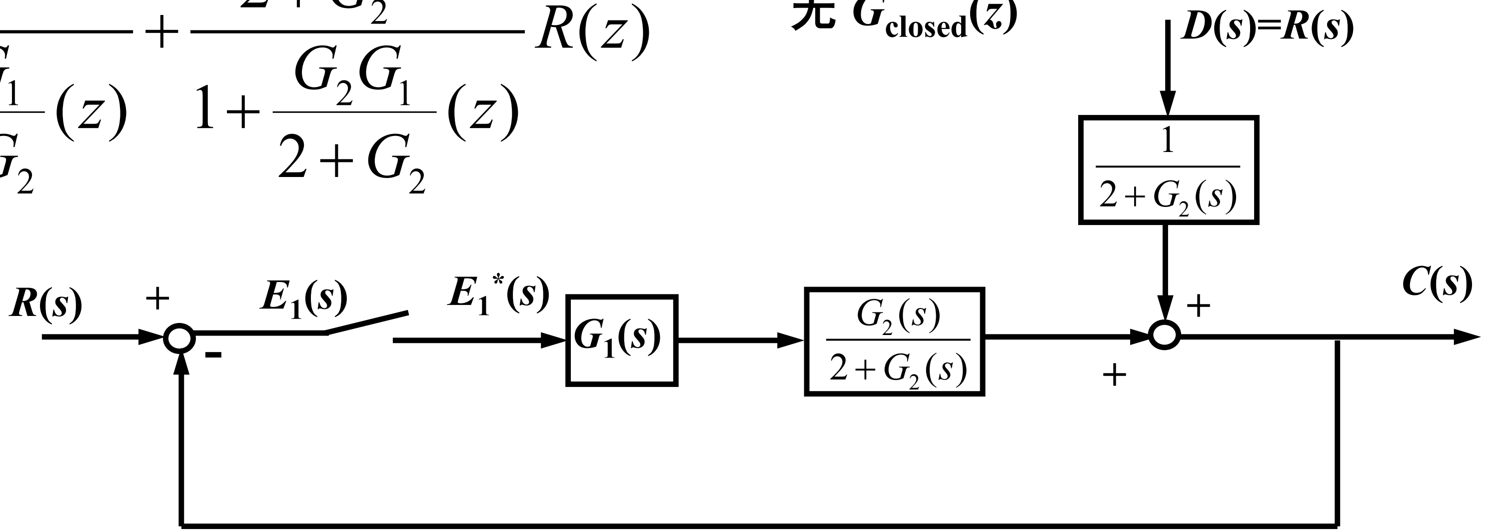
三条回路，有二条回路无采样器，设法消去

脉冲传递函数



$$C(z)=\frac{\frac{R}{2+G_2}(z)}{1+\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}+\frac{\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}{1+\frac{G_2G_1}{2+G_2}(z)}R(z)$$

无 $G_{\text{closed}}(z)$



脉冲传递函数

- 离散系统的脉冲传递函数

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{b_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$=\frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$$ 其中，$b_n, \cdots, b_{m+1}$ 等于0

- 单位脉冲响应（权序列）

$$\frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}=\frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}}$$

$$=h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \cdots$$

$$h(t)=h_0\delta(t)+h_1\delta(t-T)+h_2\delta(t-2T)+\cdots$$

脉冲传递函数——局限性

- **Z变换的推导**是建立在假定采样信号可以用理想脉冲序列来近似的基础上，这种假定只有当采样持续时间γ与系统最小时间常数及采样周期T_S相比很小时才能成立。
- **输出Z变换函数Y(z)**，只确定了时间函数$y(t)$在采样瞬时上的数值，不能反映$y(t)$在采样间隔中的信息。故$Y(z)$的Z反变换$y(nT)$只能代表采样瞬时$t=nT$时的数值。
- **用Z变换法分析**离散系统时，系统连续部分传递函数$G_p(s)$的极点至少要比其零点多两个，否则其脉冲响应在t=0处会跳变，用Z变换法得到的系统采样输出$y^*(t)$与实际连续输出$y(t)$差别较大，甚至完全不符。（实际中一般可满足此前提）

QUESTIONS?

脉冲传递函数的推导

假定动态环节的单位脉冲响应函数为$g(t)$。该环节的输入为$r^*(t)$

$$r^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)\delta(t-nT)$$

利用线性环节满足叠加原理，无穷多个脉冲信号作用在线性环节$G(s)$上，其输出$y(t)$为

$$y(t)=r(0)g(t)+r(T)g(t-T)+\cdots+r(nT)g(t-kT)+\cdots$$

将输出信号离散化，得到

?

nT以后的输入不会影响nT时的输出

$$\begin{aligned} y(nT)&=r(0)g(nT)+r(T)g[(n-1)T]+\cdots+r(kT)g[(n-k)T]+\cdots \\ &=\sum_{k=0}^{n} r(kT)g[(n-k)T]=\sum_{k=0}^{\infty} r(kT)g[(n-k)T] \end{aligned}$$

脉冲传递函数的推导

$$y(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}r(kT)g[(n-k)T]$$

z-变换

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)z^{-n}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{k=0}^{\infty}r(kT)g[(n-k)T]\}z^{-n}$$

令 ***m*=*n*-*k***

$$Y(z)=\sum_{m=-k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}r(kT)g[mT]z^{-(m+k)}$$

当 ***n*<*k*, g(*nT*-*kT*)=0 (*k*——输入; *n*——输出)**

$$Y(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}r(kT)g[mT]z^{-(m+k)}=\sum_{m=0}^{\infty}g(mT)z^{-m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}r(kT)z^{-k}=G(z)\cdot R(z)$$

$$Y(z)=G(z)\cdot R(z)\Rightarrow G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}$$

***G*(*z*)并不一定存在!!**

采样函数拉氏变换的两个重要性质——证明

Laplace变换的频移特性

若$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$

则$x(t)e^{at} \xleftrightarrow{L} X(s-a)$, a为复常数

引理: 对任意整数k, 有$H^*(s) = H^*(s - jk\omega_s)$

证明: $h^*(t) = h(t)\delta_T(t) = h(t)\dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} = \dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t)e^{jn\omega_s t}$

$$H^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s - \mathrm{j}n\omega_s)$$

$$h(t)e^{\mathrm{j}n\omega_s t} \xleftrightarrow{L} H(s - \mathrm{j}n\omega_s)$$

$$H^*(s - \mathrm{j}k\omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s - \mathrm{j}k\omega_s - \mathrm{j}n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s - \mathrm{j}(n+k)\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n+k=-\infty}^{\infty} H(s - \mathrm{j}(n+k)\omega_s) = H^*(s)$$

采样函数拉氏变换的两个重要性质——证明

- 命题: $[G(s)F^*(s)]^* = G^*(s)F^*(s)$

证： 由 $H^*(s) = \dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(s - jn\omega_s)$

$$[G(s)F^*(s)]^* = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[G(s - jn\omega_s)F^*(s - jn\omega_s)]$$

$F^*(s) = F^*(s - jn\omega_s)$

$$[G(s)F^*(s)]^* = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[G(s - jn\omega_s)F^*(s)]$$

$$= F^*(s)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(s - jn\omega_s)$$

$$= G^*(s)F^*(s)$$

上述命题为处理采样器提供了一种有效的方法。

The End