

# 现代控制理论

## Modern Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大



## 第七章 Chapter 7

### 线性离散系统的分析与校正



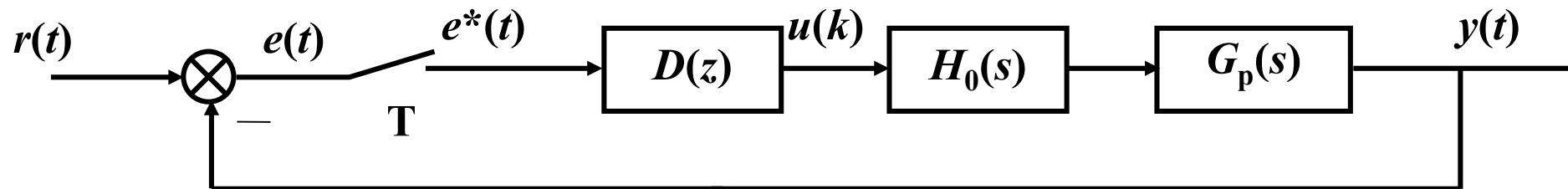
# 主要内容

---

- 基本概念
- 信号的采样与保持
- Z变换
- 离散系统的数学模型
- 离散系统的稳定性与稳态误差
- 离散系统的动态性能分析
- 离散系统的数字校正

# 数字控制系统设计

## ➤ 采样控制系统的常用结构



其中 $D(z)$ 表示数字控制器， $u(k)$ 是离散时间信号， $H_0(s)$ 是零阶保持器。

## ➤ 数字控制器的设计方法通常分为：模拟化设计方法和数字化设计方法。



# 数字控制系统

---

- 模拟化设计方法
- 数字化设计方法



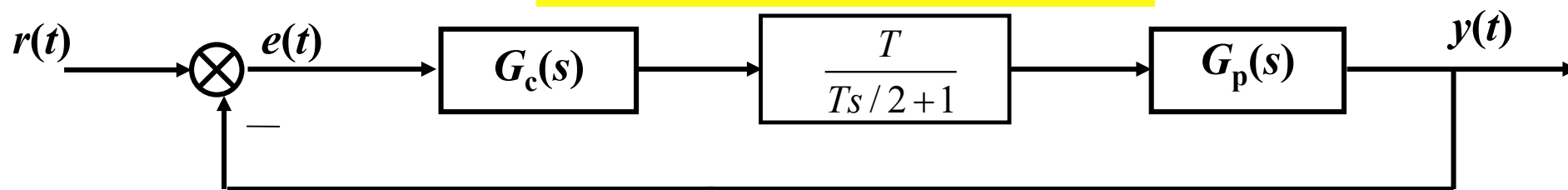
# 模拟化设计方法

- 一种离散系统的等效设计方法
- 先按连续时间系统的设计方法设计一个模拟的控制器  $G_c(s)$ ，再将其离散化得到数字控制器  $D(z)$
- 设数字控制系统中采用零阶保持器。则由  $\exp(-Ts)$  的Pade近似

$$e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{T}{2}s}}{e^{\frac{T}{2}s}} \approx \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s} = -\frac{s - \frac{2}{T}}{s + \frac{2}{T}}$$

将零阶保持器近似表示为：

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1} = \frac{2T}{Ts + 2}$$



- 设计出模拟  $G_c(s)$  后，对其进行**离散化**。

# 模拟化设计方法

## (1) 后向差分法离散化

➤ **例：**在工业控制中，最常用的是PID控制器。一般教材上即是以数字PID控制器为例。  
标准的模拟PID公式

$$u(t) = K_c \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

在控制器的采样时刻  $t=kT$ 、 $t=(k-1)T$  时，离散化（后向差分）的数字PID为

$$u(k) = K_c \left\{ e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^k e(j) + \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\}$$

$$u(k-1) = K_c \left\{ e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^{k-1} e(j) + \frac{T_d}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right\}$$

**PID的增量公式**

$$\Delta u(k) = K_c \left\{ e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right\}$$

# 模拟化设计方法

**(2) 极点—零点匹配映射法。**先对 $G_c(s)$ 的分子分母多项式进行因式分解。 $G_c(s)$ 中的有限极点与零点  $s=-a$  映射为 $D(z)$ 中的极点或零点 $z=\exp(-aT)$ ，而 $G_c(s)$ 中的无穷远处的零点则映射为 $D(z)$ 中位于-1的零点。最后确定 $D(z)$ 的增益，使 $D(z)$ 的增益在某一主频处与 $G_c(s)$ 的增益匹配。如： $G_c(s)$ 具有低通特性，则  $G_c(0) = D(1)$  。

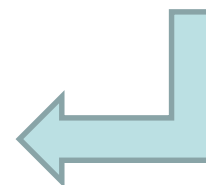
**一阶补偿器：**

$$G_C(s) = K \frac{s+a}{s+b} \quad \longrightarrow \quad D(z) = C \frac{z-A}{z-B}$$

$$A = e^{-aT}$$

$$B = e^{-bT}$$

$$C \frac{1-A}{1-B} = K \frac{a}{b}$$







# 模拟化设计方法

➤ 例：采样周期 $T=0.003s$ ，超前补偿器为  $G_C(s) = \frac{5(s+50)}{s+275}$

则离散化

$$A = e^{-0.15} = 0.86$$

$$B = e^{-0.825} = 0.44$$

$$C = 3.66$$



$$D(z) = \frac{3.66(z - 0.86)}{z - 0.44}$$

得到稳定的离散控制器。如果采样周期改变，则相应的零极点位置和放大倍数改变。

# 模拟化设计方法

## (3) Tustin法

➤ 由于

$$s \equiv (1/T) \ln z$$

$\ln z$ 可展开为:

$$\ln z = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right)$$

其中

$$x = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



$$s \approx \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

# 模拟化设计方法

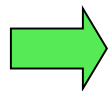
(3) Tustin法 (梯形积分法) 几何上, 后向差分法代表的积分是矩形积分, 而这种为梯形积分。

$$p(k) - p(k-1) = \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx \frac{1}{2} [x(kT) + x((k-1)T)] \cdot T$$

$$p(k) \approx p(k-1) + \frac{x(kT) + x((k-1)T)}{2} \cdot T$$

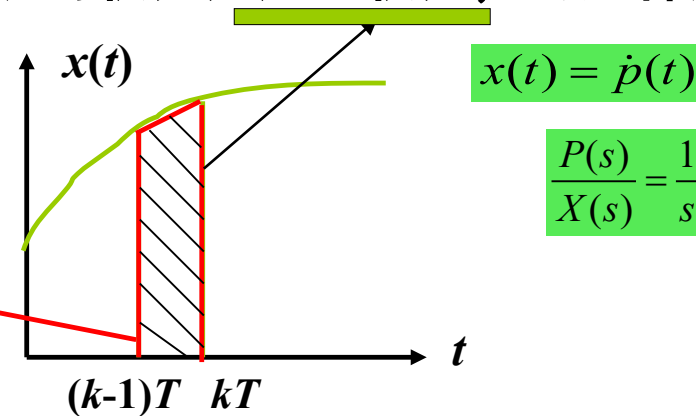
$$p(z) \approx z^{-1} p(z) + \frac{x(z) + z^{-1} x(z)}{2} \cdot T \Rightarrow \frac{P(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{T}{2}$$

以  $\frac{P(z)}{X(z)}$  近似替代  $\frac{P(s)}{X(s)}$



$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$



该映射也是一种双线性变换。它将s左半平面映射到z平面单位圆内, 所以也能由稳定的连续控制器产生稳定的离散控制器。但瞬态响应和频率响应均有畸变。

# 模拟化设计方法

**例7-5-1** 用Tustin法离散化控制器  $G_C(s) = \frac{20.25(s+2)}{s+6.66}$ ，采样周期  $T = 0.2s$ 。

解：将  $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 10 \frac{z-1}{z+1}$  代入  $\frac{20.25(s+2)}{s+6.66}$ ，得

$$\text{离散控制器 } D(z) = \frac{20.25(12z-8)}{16.66z-3.34} = \frac{14.5858(z-0.6667)}{z-0.2005}$$

- 除了上述方法外，还有前向差分法、脉冲响应不变法等等。
- 但需要注意的是，哪一种方法都没有绝对的优势，只有当计算机数字仿真结果满意时，才能认定哪种方法比较适用。



# 数字控制系统

---

- 模拟化设计方法
- 数字化设计方法



# 数字化设计方法

➤ **数字控制器的设计任务**是根据未校正的脉冲传递函数  $G(z)=G_pH_0(z)$  选择合适的  $D(z)$ ，使开环脉冲传递函数  $G(z)D(z)$  符合要求。

## 常用的数字化设计方法

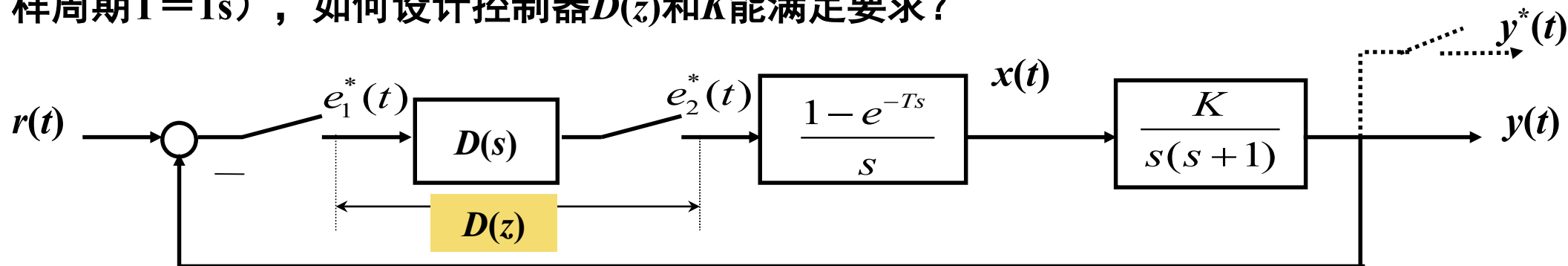
(1) **z域的根轨迹设计方法**。根据期望的闭环极点位置，可以用z平面的根轨迹方法进行设计。一般不在z域采用频率响应方法。因为包含  $z=\exp(j\omega T)$ ，无法利用s域中简明的对数作图法。

(2) **w域的设计方法**。在w平面可以采用所有的频域设计方法。注意是伪频。

(3) **z域解析设计的方法**。由性能指标和  $G(z)$  提出闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$  或闭环误差脉冲传递函数  $\Phi_e(z)$  应有的形式，再推算出  $D(z)$ ，必须满足物理可实现条件。例如最少拍系统、无纹波最少拍系统、最小均方差系统等。

# z域根轨迹设计方法

**例7-5-2** 如图所示系统，若要求（期望）**阻尼比  $\zeta=0.707$**  以及**调节时间  $t_s=4s$** ，（已知采样周期  $T=1s$ ），如何设计控制器  $D(z)$  和  $K$  能满足要求？



串接了数字控制器  $D(z)$  的采样控制系统

$$t_s = \frac{4}{|\sigma|} = 4 \Rightarrow \sigma = -1 \quad \longrightarrow \quad e^{\sigma T} = e^{-T} \Big|_{T=1} = 0.368$$

$$\omega_n = \frac{|\sigma|}{\zeta} = \frac{1}{0.707} = 1.414$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 1.414 \sqrt{1 - 0.707^2} = 1$$

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -1 \pm j1$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{(\sigma \pm j\omega_d)T} \Big|_{T=1} \\ &= 0.368(\cos 1 \pm j \sin 1) \\ &= 0.199 \pm j0.310 \end{aligned}$$

# z域根轨迹设计方法

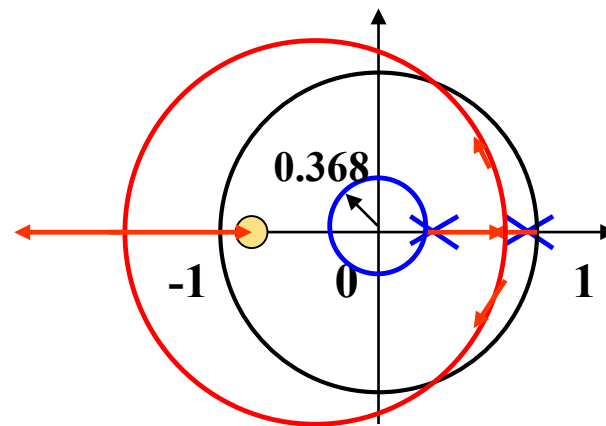
$$G(z) = \frac{Y(z)}{E_2(z)} = Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(s+1)} \right] = \frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

- 系统的根轨迹如图所示。
- 很显然，根轨迹与半径为0.368的圆没有交点，因此调节时间无法满足。
- 采用串接数字控制器  $D(z)$  来提高系统的性能。

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E_2(z)} = \frac{0.368K(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

- 设计控制器  $D(z)$  使得根轨迹与半径为0.368的圆相交。  
可将控制器设计为

$$D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{z - 0.368}{z - z_d}$$





# z域根轨迹设计方法

$$D(z) = \frac{z - 0.368}{z - z_d}$$

$$\text{则 } G(z)D(z) = \frac{0.368K(z + 0.717)}{(z - 1)(z - z_d)}$$

期望极点

$$z_{1,2} = 0.199 \pm j0.310$$

$$1 + G(z_1)D(z_1) = 0$$

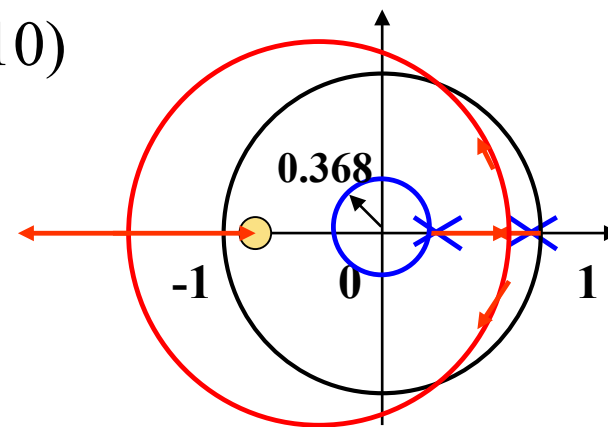
$$1 + \frac{0.368K(0.199 + j0.310 + 0.717)}{(0.199 + j0.310 - 1)(0.199 + j0.310 - z_d)} = 0$$

$$0.368K(0.906 + j0.310) = (0.801 - j0.310)(0.199 - z_d + j0.310)$$

$$0.333K + j0.114K = 0.255 - 0.801z_d + j(0.187 + 0.310z_d)$$

$$\begin{cases} 0.333K = 0.255 - 0.801z_d \\ 0.114K = 0.187 + 0.310z_d \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 1.175 \\ z_d = -0.171 \end{cases}$$



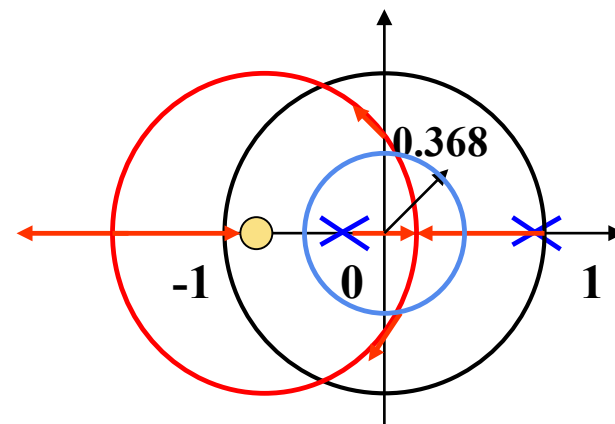
# z域根轨迹设计方法

因此，前向通道传递函数为：

$$D(z)G(z) = \frac{0.432(z + 0.717)}{(z - 1)(z + 0.171)}$$

新的根轨迹如图所示。闭环传递函数为

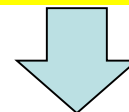
$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{R(z)} &= \frac{0.432(z + 0.717)}{z^2 - 0.397z + 0.139} \\ &= \frac{0.432(z + 0.717)}{(z - 0.198 + j0.316)(z - 0.198 - j0.316)} \end{aligned}$$



# z域根轨迹设计方法

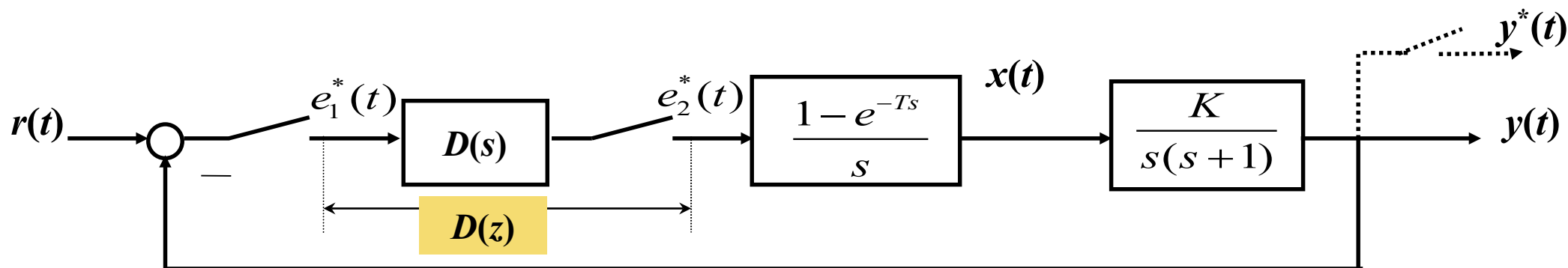
- 数字控制器 $D(z)$ 在时域的表达式为差分方程

$$D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{z - 0.368}{z + 0.171}$$



$$e_2(kT) = e_1(kT) - 0.368e_1[(k-1)T] - 0.171e_2[(k-1)T]$$

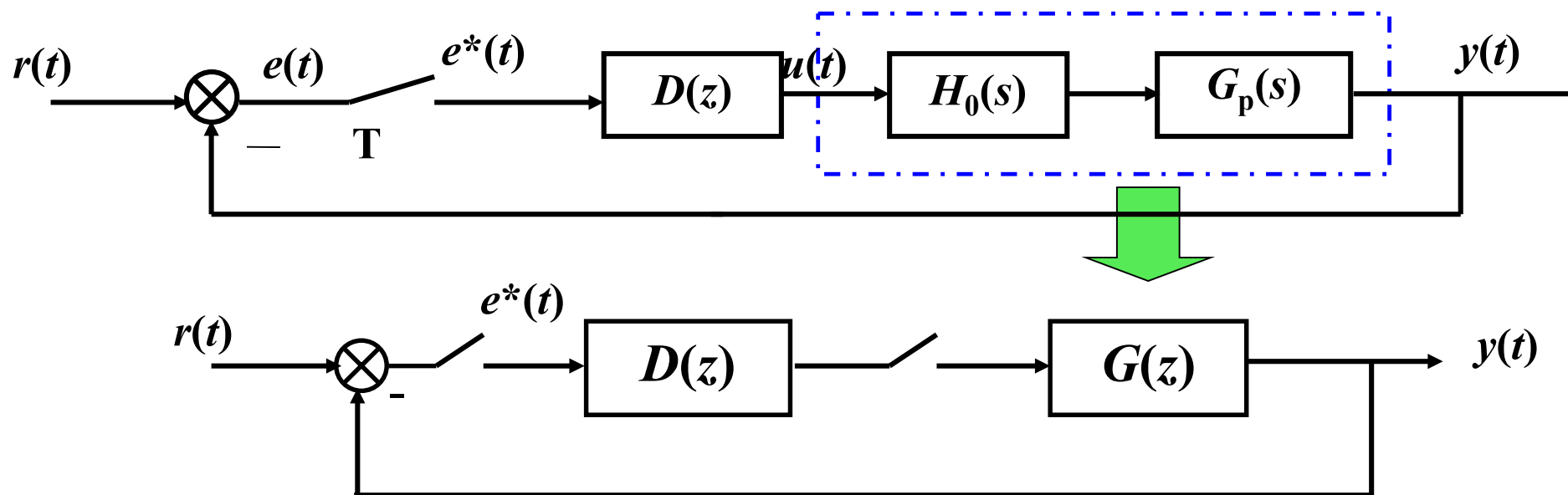
- 显然，该方程很容易由计算机实现。补偿前后的单位阶跃响应曲线可以自己用MATLAB实现一下试试。



串接了数字控制器 $D(z)$ 的采样控制系统

# z域解析设计的方法

- 设如图所示的数字系统，其等效的结构框图为



数字控制系统框图

# z域解析设计的方法

- 对于如图所示的数字系统可求得其闭环脉冲传递函数为

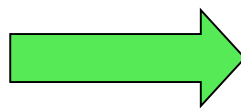
$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

待求的数字控制器为

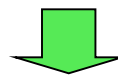
$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)[1 - \Phi(z)]}$$

- 又如图所示的数字系统的闭环误差脉冲传递函数为

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + D(z)G(z)}$$

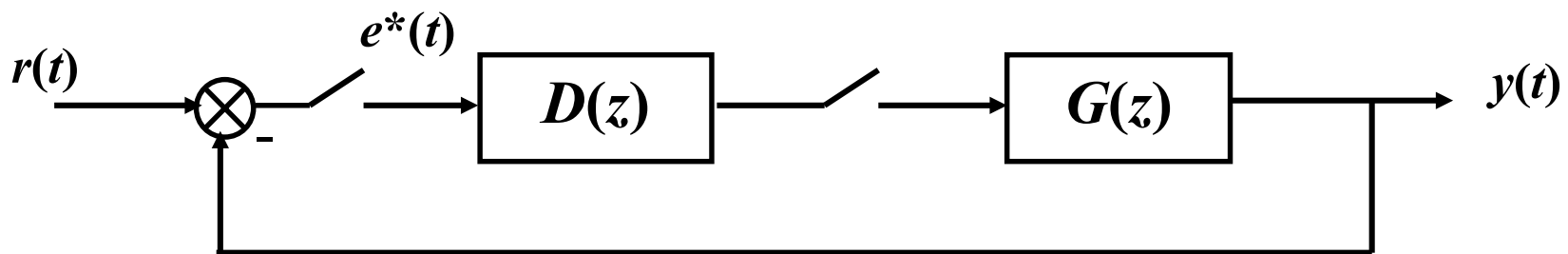


$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$



$$\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$$

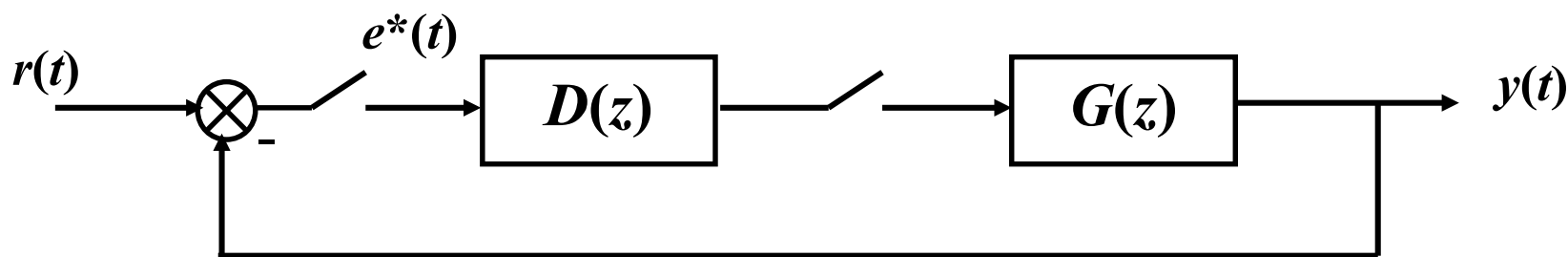
$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$$



数字控制系统框图

# z域解析设计的方法

- 可见，z域解析设计的方法关键是根据性能指标的需要选择合适的闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$  或闭环误差脉冲传递函数  $\Phi_e(z)$ 。
- 设计出的数字控制器  $D(z)$ ，必须满足物理可实现条件：数字控制器  $D(z)$  分子多项式的阶次不得大于分母多项式的阶次； $D(z)$  没有单位圆上（一个  $z=1$  的极点除外）和单位圆外的极点。



数字控制系统框图

# 回顾:

## ➤ 有限时间响应系统

当闭环脉冲传递函数所有极点**都分布在原点**时，此时的系统具有一个很特别的响应，即在有限时间结束过渡过程，达到稳态，此时的闭环脉冲传递函数具有如下形式

$$G_B(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n} = \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \dots + \frac{b_0}{a_n} z^{-n}$$

其单位脉冲响应

$$h^*(t) = \frac{b_n}{a_n} \delta(t) + \frac{b_{n-1}}{a_n} \delta(t - T) + \dots + \frac{b_0}{a_n} \delta(t - nT)$$

即在单位脉冲作用下，该系统的瞬态响应能在 $nT$ 内结束，即 $n$ 拍可结束过渡过程，这个特点是连续系统所不具备的。

# 无稳态误差最少拍系统的设计

## ➤ 无稳态误差最少拍系统

离散系统的误差信号Z变换式：

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)z^{-k}$$

最少拍系统的含义是设计 $D(z)$ ，使得当 $k > N$ ， $e(k) \equiv 0$ 且 $N$ 最少

即：

$$E(z) = \sum_{k=0}^N e(k)z^{-k}, \quad N \text{ 为满足要求的最小整数}$$

## ➤ 设计目标：

- (1) 对典型输入信号的稳态偏差为零（在采样时刻上）；
- (2) 对典型输入信号的过渡过程最短（一个 $T$ 称为一拍）；
- (3) 控制器是物理可实现的。



# 无稳态误差最少拍系统的设计

► 设典型输入信号:  $r(t) = R_i t^i, i = 0, 1, 2 \dots$

则其 $z$ 变换表达式为

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

式中 $m=i+1$ ，且 $A(z^{-1})$ 为 $z^{-1}$ 的多项式，没有 $z=1$ 的零点，即不含 $(1 - z^{-1})$ 因子的 $z^{-1}$ 多项式

典型输入 $r(t)$	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
$Z[r(t)]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$\frac{T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3}$
$A(z^{-1})$	$m = 1$ $A(z^{-1}) = 1$	$m = 2$ $A(z^{-1}) = Tz^{-1}$	$m = 3$ $A(z^{-1}) = [(Tz^{-1})^2 + z^{-1}] / 2$

# 无稳态误差最少拍系统的设计

➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(1) 对典型输入信号的稳态偏差为零

根据终值定理

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) R(z) \Phi_e(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m} \Phi_e(z) \end{aligned}$$

为使系统的稳态误差为零，可令

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

上式中  $F(z)$  在  $z=1$  处无零点，即不含  $(1 - z^{-1})$  因子。

# 无稳态误差最少拍系统的设计

➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(2) 对典型输入信号的过渡过程最短

由前推导，系统的闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 1 - (1 - z^{-1})^m F(z) = \sum_{k=0}^N \varphi(k) z^{-k}$$

当 $\Phi(z)$ 展开为  $z^{-1}$  的多项式时，显然项数越少(N越小)，响应速度越快。不妨取 $F(z)$ 为1——物理意义是使 $\Phi(z)$ 所有极点位于 $z$ 平面的原点。

下面分别分析不同典型输入下的系统设计。

# 无稳态误差最少拍系统的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0  
最少拍

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$
$$F(z) = 1$$

➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(2) 对典型输入信号的过渡过程最短

1) 当典型输入为阶跃

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$m = 1, A(z^{-1}) = 1$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z) = 1 - z^{-1}$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = z^{-1}$$

由前，控制器：

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{z^{-1}}{G(z)(1 - z^{-1})}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot z^{-1} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1 - z^{-1}) \frac{1}{(1 - z^{-1})} = 1$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = 0$$

$$e(0) = 1, e(1) = e(2) = \dots = 0$$

设计的系统在一拍后即已经无偏差。

# 无稳态误差最少拍系统的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^m}$$

误差为0  
最少拍

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z)$$
$$F(z) = 1$$

➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

(2) 对典型输入信号的过渡过程最短

2) 当典型输入为斜坡

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = Tz^{-1} + \underline{2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \cdots}$$

$$m = 2, A(z^{-1}) = Tz^{-1}$$

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z) = (1-z^{-1})^2$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

由前，控制器：

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{G(z)(1-z^{-1})^2}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{(2z^{-1} - z^{-2})Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \underline{2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \cdots}$$

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1-z^{-1})^2 \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = Tz^{-1}$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})E(z) = 0$$

$$e(0) = 0, e(1) = T, e(2) = e(3) = \cdots = 0$$

设计的系统在2拍后即已经无偏差。

# 无稳态误差最少拍系统的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^m}$$

误差为0  
最少拍

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z)$$
$$F(z) = 1$$

3) 当典型输入为抛物线

$$m = 3, A(z^{-1}) = [(Tz^{-1})^2 + z^{-1}] / 2$$

$$R(z) = \frac{T^2 z^{-1} (1+z^{-1}) / 2}{(1-z^{-1})^3} = \frac{T^2}{2} z^{-1} + 2T^2 z^{-2} + \frac{9T^2}{2} z^{-3} + 8T^2 z^{-4} + \dots$$

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z) = (1-z^{-1})^3$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$$

由前，控制器：

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}}{G(z)(1-z^{-1})^3}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{(3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3})T^2 z^{-1} (1+z^{-1}) / 2}{(1-z^{-1})^3} = \frac{3T^2}{2} z^{-2} + \frac{9T^2}{2} z^{-3} + 8T^2 z^{-4} + \dots$$

$$E(z) = R(z) - Y(z) = \frac{T^2}{2} z^{-1} + \frac{T^2}{2} z^{-2}$$

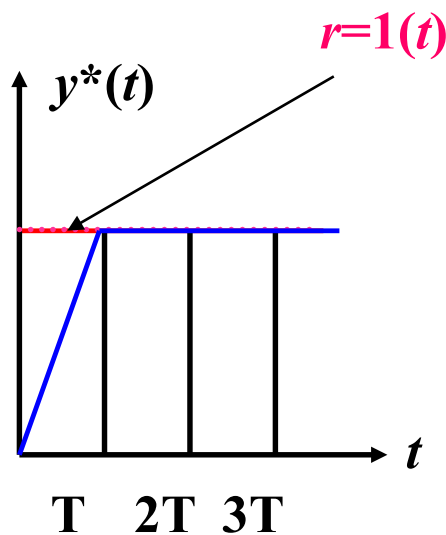
$$e(0) = 0, e(1) = \frac{T^2}{2}, e(2) = \frac{T^2}{2}, e(3) = e(4) = \dots = 0$$

$$e(\infty) = 0$$

设计的系统在3拍后即已经无偏差。

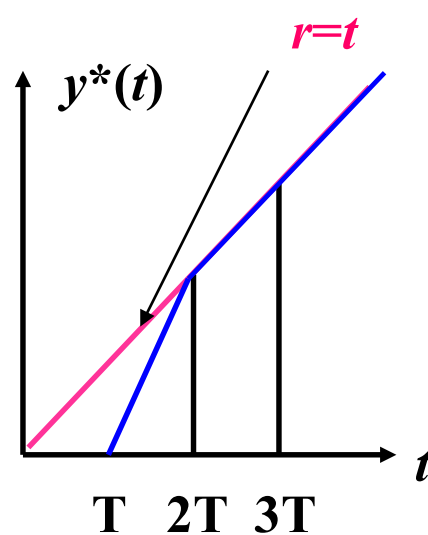
# 无稳态误差最少拍系统的设计

下图绘制的曲线分别是单位阶跃、单位斜坡、抛物线输入时，其输出响应为无稳态误差的最少拍系统。



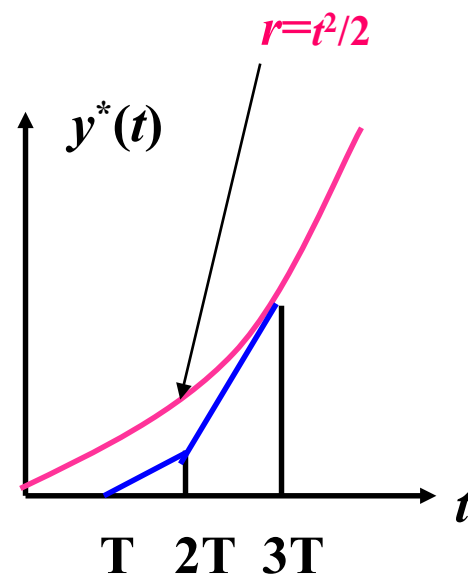
(a) 单位阶跃输入

$$Y(z) = z^{-1} + z^{-2} + \dots$$



(b) 斜坡输入

$$Y(z) = 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots$$



(c) 抛物线输入

$$Y(z) = \frac{3T^2}{2} z^{-2} + \frac{9T^2}{2} z^{-3} + 8T^2 z^{-4} + \dots$$

# 无稳态误差最少拍系统的设计

➤ 无稳态误差最少拍系统的设计分析步骤（根据性能指标要求）：

## （3）数字控制器的物理可实现问题

待求的数字控制器为

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{1 - (1 - z^{-1})^m}{G(z)(1 - z^{-1})^m} = \frac{z^m - (z - 1)^m}{G(z)(z - 1)^m} \\ &= \frac{B(z)}{G(z)[z^m - B(z)]} = \frac{B(z)}{\frac{M(z)}{N(z)}[z^m - B(z)]} = \frac{N(z)B(z)}{M(z)[z^m - B(z)]} \end{aligned}$$

- 从上式看，当 $F(z)=1$ 时，控制器物理可实现（ $D(z)$ 的分子阶次 $\leq$ 分母的阶次），要求 $G(z)$ 的极点最多只能比其零点多一个
- 当 $F(z)=1$ ， $m \leq 3$ 时，若 $G(z)$ 有单位圆上或单位圆外零点，则 $D(z)$ 必有相同极点
- 当 $F(z)=1$ 时，若 $G(z)$ 在被 $(z-1)^m$ 抵消后还有单位圆上或单位圆外极点，则 $D(z)$ 必有相同零点
- 通过选择 $F(z)$ 解决

$$F(z) = \frac{1 - \Phi(z)}{(1 - z^{-1})^m} = \frac{\Phi_e(z)}{(1 - z^{-1})^m} = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$z$  的 $(m-1)$ 次多项式

会出现不稳定零极点抵消，工程上不容许  
 $G(z)D(z)$ 出现不稳定零极点对消



# 无稳态误差最少拍系统的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0  
最小拍

$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$   
 $F(z) = 1$

无稳态误差最少拍系统设计结果如下表所示

典型输入		闭环脉冲传递函数	数字控制器 $D(z)$	最少拍（T）
$1(t)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$z^{-1}$	$\frac{z^{-1}}{G(z)(1 - z^{-1})}$	1T
$t$	$\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$2z^{-1} - z^{-2}$	$\frac{z^{-1}(2 - z^{-1})}{G(z)(1 - z^{-1})^2}$	2T
$t^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$	$\frac{3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}}{G(z)(1 - z^{-1})^3}$	3T



# 无稳态误差最少拍系统的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

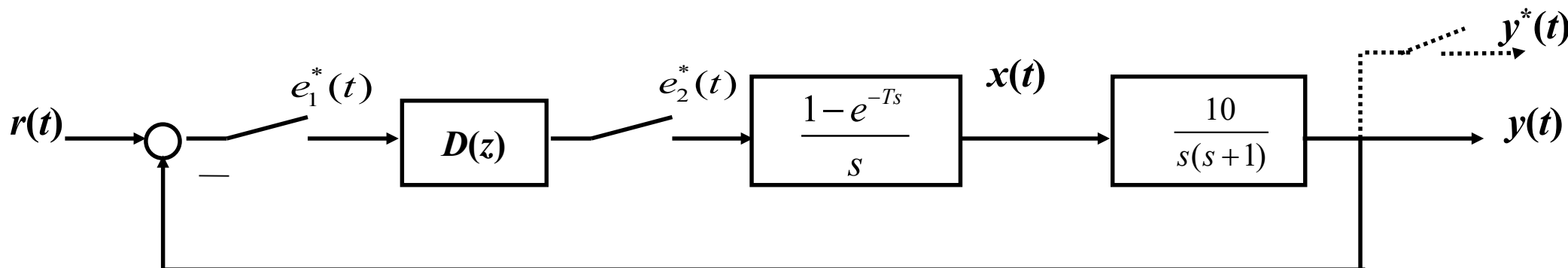
误差为0

最少拍

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

$$F(z) = 1$$

**例7-5-3** 已知离散控制系统结构如图所示。采样周期 $T=1$ 秒。设计一数字控制器 $D(z)$ 使系统对单位斜坡输入为无稳态误差的最少拍响应系统。并绘制 $r(t)$ 、 $e_1^*(t)$ 、 $e_2^*(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y^*(t)$ 。



**解：1)** 求开环传递函数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{10}{s^2(s+1)}$$

# 无稳态误差最少拍系统的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0  
最少拍

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$
$$F(z) = 1$$

解：2) 求开环脉冲传递函数 $G(z)$

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[ \frac{10}{s^2(s+1)} \right] = \frac{3.68(z + 0.717)}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

3) 求闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$  ( $T=1s$ )

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$m = 2$$

$$A(z) = Tz^{-1} = z^{-1}$$

为使系统的稳态误差为零

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

令 $F(z)=1$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

4) 求数字控制器 $D(z)$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{G(z)(1 - z^{-1})^2} = \frac{0.543(z - 0.5)(z - 0.368)}{(z - 1)(z + 0.717)}$$

# 无稳态误差最少拍系统的设计

解：5) 求系统输出  $Y(z)$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = (2z^{-1} - z^{-2}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots$$

$$y^*(t) = 2\delta(t-2) + 3\delta(t-3) + \dots$$

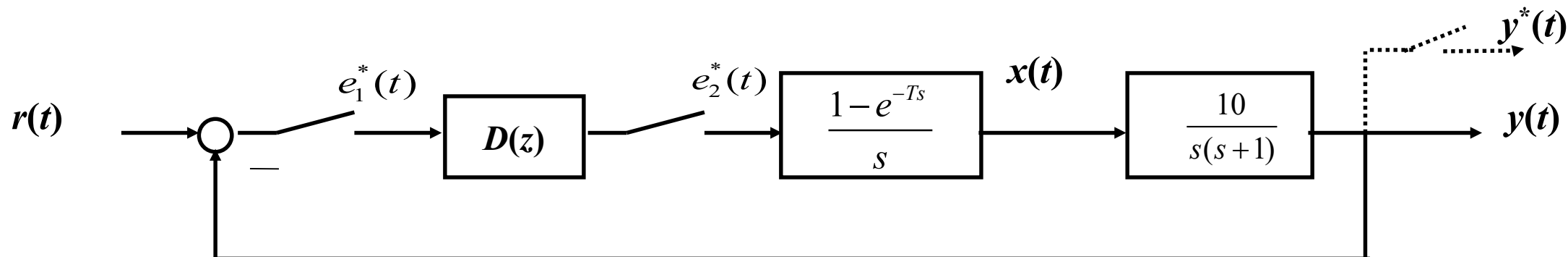
6) 求系统偏差

$$E_1(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1 - z^{-1})^2 \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = z^{-1}$$

$$e_1^*(t) = \delta(t-1)$$

$$\begin{aligned} E_2(z) &= D(z)E_1(z) = \frac{0.543(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.717z^{-1})} z^{-1} \\ &= 0.543z^{-1} - 0.319z^{-2} + 0.39z^{-3} - 0.119z^{-4} + \dots \end{aligned}$$

$$e_2^*(t) = 0.543\delta(t-1) - 0.319\delta(t-2) + 0.39\delta(t-3) - 0.119\delta(t-4) + \dots$$



解： 7)

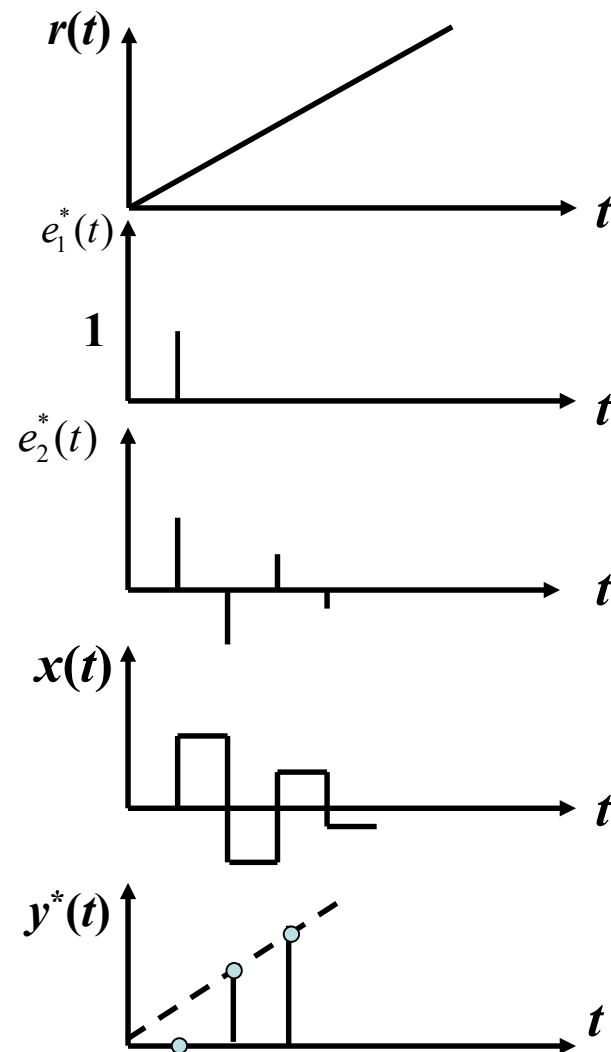
根据上述所求各式，可绘制它们的波形如图所示：

$$e_1^*(t) = \delta(t-1)$$

$$e_2^*(t) = 0.543\delta(t-1) - 0.319\delta(t-2) + 0.39\delta(t-3) - 0.119\delta(t-4) + \dots$$

$$y^*(t) = 2\delta(t-2) + 3\delta(t-3) + \dots$$

该系统是针对斜坡输入来设计  $D(z)$  的，假定输入为单位阶跃与抛物线，系统输出？系统适应能力如何？



# 无稳态误差最少拍系统的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0  
最少拍

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$
$$F(z) = 1$$

- 当 $r(t)=1(t)$ 时, 其输出

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = (2z^{-1} - z^{-2}) \frac{1}{1 - z^{-1}} = 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

比较

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

- 当 $r(t)=t^2/2$ 时, 系统输出

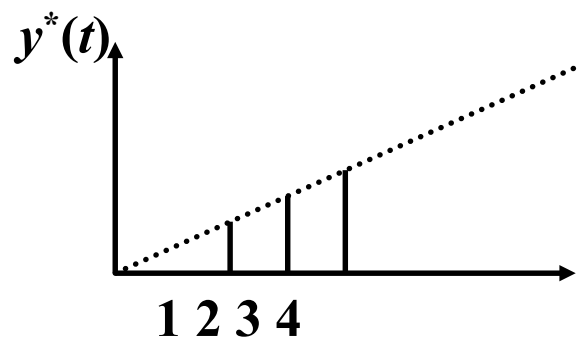
$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = (2z^{-1} - z^{-2}) \frac{T^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3} = z^{-2} + 3.5z^{-3} + 7z^{-4} + 11.5z^{-5} + \dots$$

比较

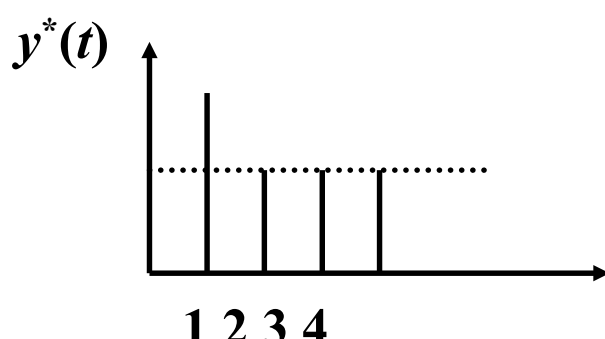
$$R(z) = \frac{z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3} = 0.5z^{-1} + 2z^{-2} + 4.5z^{-3} + 8z^{-4} + 12.5z^{-5} + \dots$$

- 可见, 对单位阶跃和单位斜坡输入, 2拍后均达到稳态(对单位阶跃出现100%超调); 但对单位抛物线输入, 稳态偏差为1。

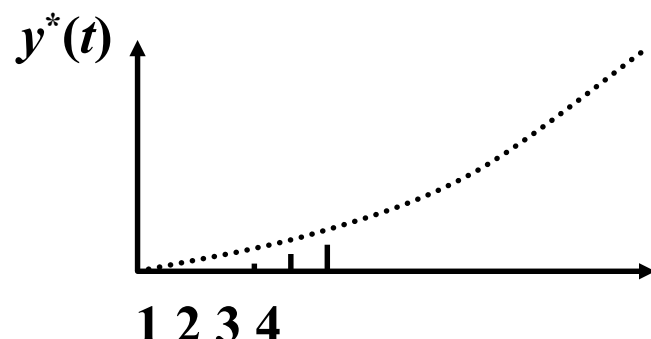
# 无稳态误差最少拍系统的设计



斜坡输入



阶跃输入



抛物线输入

- 1) **快速性方面**：按单位斜坡输入设计的最少拍系统，在各种典型输入作用下，其动态过程均为二拍；
- 2) **准确性方面**：系统对单位阶跃和单位斜坡输入，在采样时刻均无稳态误差，但对单位加速度输入，采样时刻的稳态误差为常量 $T^2$ ；
- 3) **动态性能方面**：单位斜坡输入下的响应性能较好，单位阶跃输入响应性能较差，有100%的超调，故按某种典型输入设计的最少拍系统，适应性较差；
- 4) **平稳性**：系统进入稳态后，非采样时刻一般均**存在纹波**，此设计方法不实用。

# 无稳态误差最少拍系统的设计

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0  
最小拍

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$
$$F(z) = 1$$

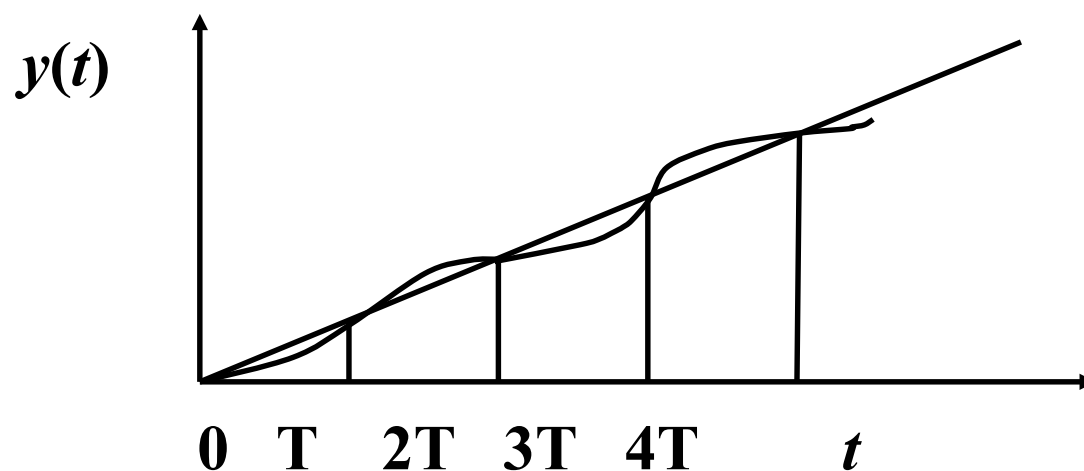
## 小结

- 最小拍系统的调节时间只与选择的闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 的形式有关，而与典型输入信号无关；（上例说明了这个问题）
- 这类数字控制器对输入信号的适应能力差；
- 输出响应具有纹波：即最少拍系统是在最少的几个采样周期后，系统输出在采样时刻无偏差，但在其间还是有纹波的——即稳态偏差不为零。解决方法：设计无纹波的最少拍系统。



# 无稳态误差最少拍系统的设计

➤纹波即系统输出在采样时刻已达到稳态，而在两个采样时刻间输出在变化。



# 数字化设计方法

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

误差为0  
最小拍

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$
$$F(z) = 1$$

当 $G(z)$ 具有单位圆上和单位圆外零极点的情况，数字控制器的设计

当开环脉冲传递函数 $G(z)$ 有单位圆上或单位圆外零点时，由式

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

令：

- 若 $G(z)$ 有 $d$ 个滞后环节 $z^{-1}$ ，即 $G(z)$ 的分母阶次比分子阶次高 $d$ 阶，则 $\Phi(z)$ 包含 $z^{-d}$ 因子；
- $\Phi(z)$ 的零点包含 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的零点；
- $\Phi_e(z)$ 的零点包含 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的极点；

设 $F(z)=1+a_1z^{-1}$ ，并在 $\Phi(z)$ 设待定系数，由关系式  $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$ ，求解有关待定系数，最后选定 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 。若无解，则 $F(z)$ 阶次加1。

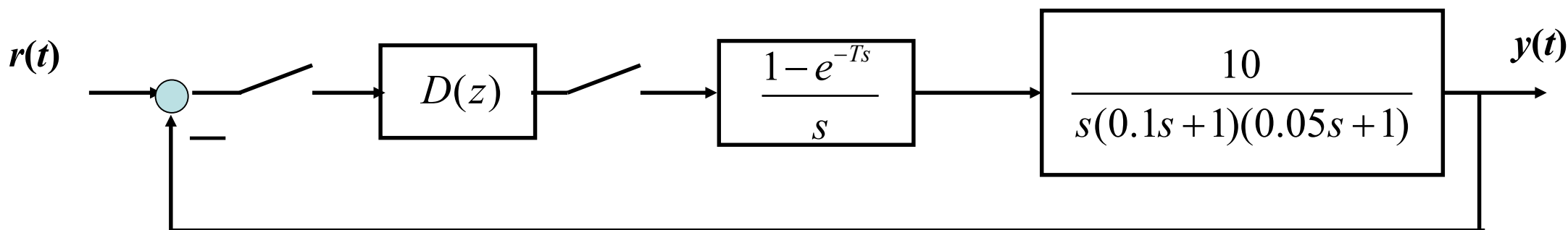
# 数字化设计方法

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^m}$$

$$\text{误差为0} \quad \Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z)$$

**例 7-5-4** 已知离散控制系统结构如图所示。采样周期 $T=0.2$  秒。求 $D(z)$ ，使系统对单位阶跃响应为最少拍响应系统。



**解：1)**求开环脉冲传递函数 $G(z)$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[ \frac{10}{s^2(1+0.1s)(1+0.05s)} \right] = \frac{0.76z^{-1}(1+0.05z^{-1})(1+1.065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.135z^{-1})(1-0.0185z^{-1})}$$

开环脉冲传递函数有一单位圆外的**零点**： $z=-1.065$

—单位圆上的极点： $z=1$

—滞后环节： $z^{-1}$

# 数字化设计方法

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

$$R(z) = \frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^m}$$

误差为0

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z)$$

$$G(z) = \frac{0.76z^{-1}(1+0.05z^{-1})(1+1.065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.135z^{-1})(1-0.0185z^{-1})}$$

为此，令

$$\Phi(z) = b_1 z^{-1} (1 + 1.065z^{-1})$$

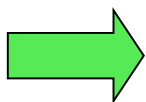
$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1})$$

由关系式

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$$



$$\begin{cases} a_1 = 1.065b_1 \\ 1 - a_1 = b_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_1 = 0.516 \\ b_1 = 0.484 \end{cases}$$

所以

$$\Phi(z) = 0.484z^{-1}(1 + 1.065z^{-1})$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + 0.516z^{-1})$$

# 数字化设计方法

$$G(z) = \frac{0.76z^{-1}(1+0.05z^{-1})(1+1.065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.135z^{-1})(1-0.0185z^{-1})}$$

$$\Phi(z) = 0.484z^{-1}(1+1.065z^{-1})$$

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})(1+0.516z^{-1})$$

于是，求得的数字控制器 $D(z)$ 为

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{0.636(1-0.0185z^{-1})(1-0.135z^{-1})}{(1+0.05z^{-1})(1+0.516z^{-1})}$$

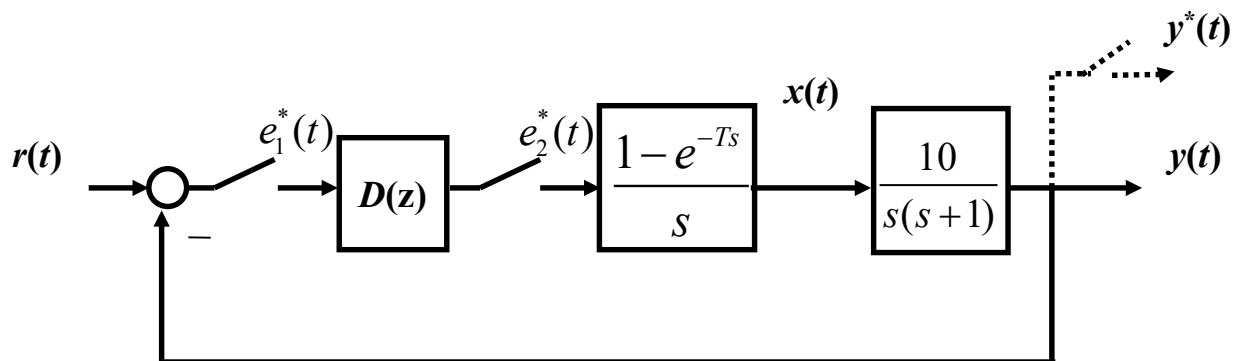
此时，数字控制器 $D(z)$ 在物理上可实现，且无不稳定零极点对消。

系统的单位阶跃响应输出为

$$Y(z) = \frac{0.484z^{-1}(1+1.065z^{-1})}{1-z^{-1}} = 0.484z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

系统输出从第二拍达到稳态，延长了一拍达到稳态。

# 回顾例7-5-3



$$G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

按斜坡输入设计

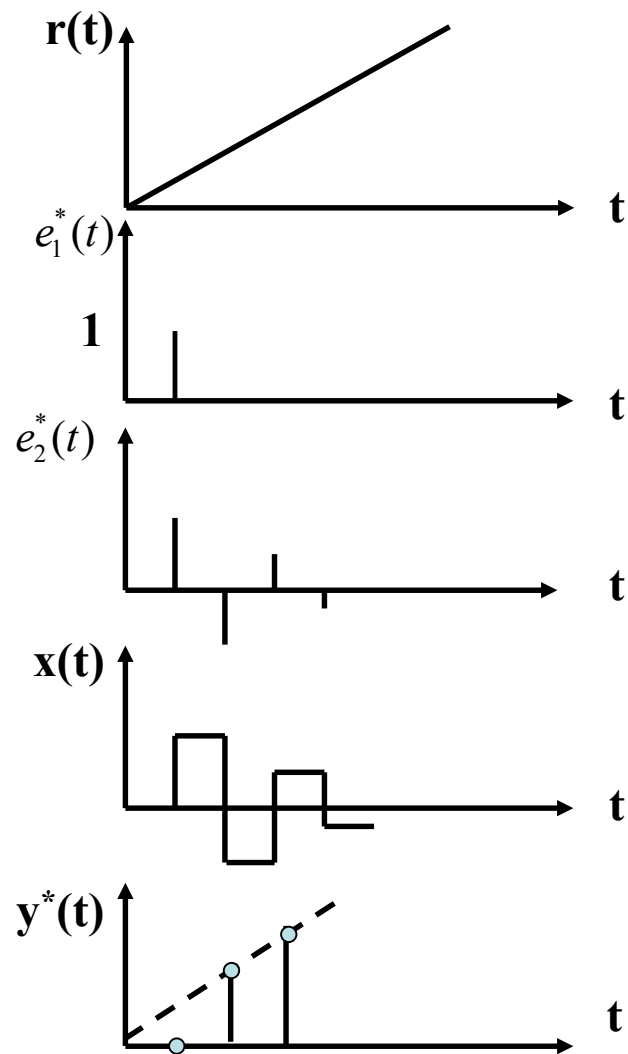
$$D(z) = \frac{0.543(1-0.5z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})}$$

$D(z)$ 的输出未能在 $y^*(t)$ 进入稳态的同时作常值输出

• 无纹波无稳态误差最少拍控制的必要条件:

$G(s)$ 至少含 $m-1$ 个积分环节

$D(z)$ 的输出在有限拍后作某个常值输出



# 无纹波无稳态误差最少拍系统的设计

➤ 为了使输出波纹消除，希望 $E_2(z)$ 在有限拍后作常值输出

即： $G_{e2}(z)$ 是 $z^{-1}$ 的有限次多项式

$$G_{e2}(z) = \frac{E_2(z)}{R(z)} = \frac{D(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \frac{1}{G(z)} = \frac{\Phi(z)}{G(z)} = \frac{\Phi(z)Q(z)}{K_G P(z)}$$

式中， $P(z) = (1 - p_1 z^{-1}) \cdots (1 - p_u z^{-1})$ 和 $Q(z) = (1 - q_1 z^{-1}) \cdots (1 - q_v z^{-1})$

分别是 $G(z)$ 的零点多项式和极点多项式

$K_G$ 是 $G(z)$ 的增益

若令 $\Phi(z) = P(z)K_\Phi(1 - f_1 z^{-1}) \cdots (1 - f_r z^{-1})$

$\Phi(z)$ 的零点包含 $G(z)$ 的全部零点

则 $G_{e2}(z) = \frac{Q(z)K_\Phi(1 - f_1 z^{-1}) \cdots (1 - f_r z^{-1})}{K_G}$ 是 $z^{-1}$ 的有限次多项式

# 无纹波无稳态误差最少拍系统的设计

无纹波无稳态误差最少拍系统的设计原则

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

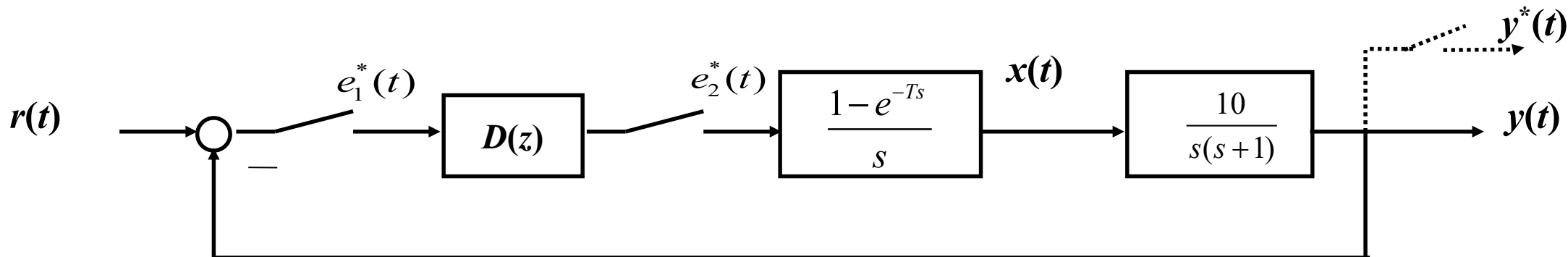
- $G(s)$ 至少含 $m-1$ 个积分环节
- 若 $G(z)$ 有 $d$ 个滞后环节 $z^{-1}$ ，则 $\Phi(z)$ 包含 $z^{-d}$
- $\Phi(z)$ 包含 $G(z)$ 的全部零点
- $\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z)$ 包含 $G(z)$ 在单位圆上或单位圆外的全部极点

设 $F(z)=1+a_1z^{-1}$ ，并在 $\Phi(z)$ 设待定系数，由关系式  $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$ ，求解有关待定系数，最后选定 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 。若无解，则 $F(z)$ 阶次加1。



# 无纹波无稳态误差最少拍系统的设计

**例 7-5-5** 已知离散控制系统结构如图所示。采样周期 $T=1$ 秒。设计一数字控制器 $D(z)$ 使系统对单位斜坡输入为无纹波无稳态误差的最少拍响应系统。



**解：1)** 求开环脉冲传递函数 $G(z)$

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{10}{s^2(s+1)}\right] = \frac{3.68z^{-1}(1 + 0.717z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}$$

# 无纹波无稳态误差最少拍系统的

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

$$G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1+0.717z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

无纹波附加条件

解：2) 选取 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ ，并求出

选取  $\Phi(z)$  为

$$\Phi(z) = z^{-1}(1+0.717z^{-1})(\beta_0 + \beta_1z^{-1})$$

选取  $\Phi_e(z)$  为

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^2(1+\alpha_1z^{-1})$$

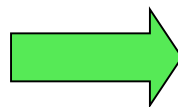
无纹波比有纹波增加一阶  
( $G(z)$ 一个单位圆内零点)

由关系式  $\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$

得：

$$\begin{aligned} & 1 - \beta_0z^{-1} - (0.717\beta_0 + \beta_1)z^{-2} - 0.717\beta_1z^{-3} \\ &= 1 - (2 - \alpha_1)z^{-1} - (2\alpha_1 - 1)z^{-2} + \alpha_1z^{-3} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -0.717\beta_1 \\ 2\alpha_1 - 1 = 0.717\beta_0 + \beta_1 \\ 2 - \alpha_1 = \beta_0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0.592 \\ \beta_0 = 1.408 \\ \beta_1 = -0.826 \end{array} \right.$$

# 无纹波无稳态误差最少拍系统的设计

于是

$$\Phi(z) = 1.408z^{-1}(1 + 0.717z^{-1})(1 - 0.586z^{-1})$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + 0.592z^{-1})$$

3) 求取 $D(z)$

所以

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{0.383(1 - 0.586z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.593z^{-1})}$$

此时可求

$$G_{e2}(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)} = 0.383(1 - z^{-1})(1 - 0.586z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})$$

$$\begin{aligned} E_2(z) &= G_{e2}(z)R(z) = \frac{0.383z^{-1}(1 - 0.368z^{-1})(1 - 0.586z^{-1})}{(1 - z^{-1})} \\ &= 0.383z^{-1} + 0.01z^{-2} + 0.09(z^{-3} + z^{-4} \dots) \end{aligned}$$

第三拍起达到稳态

# 数字化设计方法（小结）

## 无稳态误差最小拍系统设计

➤ 设典型输入信号： $r(t) = R_i t^i, i = 0, 1, 2 \dots$

可实现性：要求 $G(z)$ 分母的极点最多只能比其零点多一个

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m}$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z) = (1 - z^{-1})^m$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

当 $G(z)$ 具有单位圆上和单位圆外零极点的情况，数字控制器的设计

令：若 $G(z)$ 包含 $z^{-d}$ 因子，则 $\Phi(z)$ 包含 $z^{-d}$ 因子；

$\Phi(z)$ 包含开环脉冲传递函数 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的零点；

$\Phi_e(z)$ 包含开环脉冲传递函数 $G(z)$ 在单位圆上和单位圆外的极点。

由关系式 $\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$ ，求解有关待定系数，最后选定 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 。

## 无纹波无稳态误差最少拍系统的设计

在有纹波无稳态误差设计的基础上，附加条件： $\Phi(z)$ 包含 $G(z)$ 的零点多项式

$G(z)$ 在单位圆内的零点个数就是无纹波最少拍系统比有纹波最少拍系统增加的拍数

# 要点回顾

## ➤ 数字控制系统设计

### – 模拟化设计方法

- 将控制器先看成是连续的，设计好以后再离散化实现，如不满足性能指标则重新设计。如设计数字PID控制器。

### – 数字化设计方法

- 直接在  $z$  域设计离散的数字控制器，而将对象离散化后实现。如设计超前-滞后补偿器，最小拍数字控制器。

# 第七章主要内容

---

- 离散系统基本概念
- 信号的采样
- Z变换理论
- 离散系统的数学模型
- 离散系统分析
- **数字控制系统设计**

**模型：**差分方程、离散时间状态方程、脉冲传递函数

**分析与综合的问题：**稳定性分析、时间响应、稳态误差

**方法：**差分方程求解、根轨迹、Routh判据、特征方程求根.....

**注意：**重点掌握与连续时间系统的相似之处与区别

---

*The End*