

23-24 夏随机过程回忆卷

$$\phi(1) = 0.84, \phi(2) = 0.98$$

一、填空题 (3*13=39 分)

1. 一个过程为 $X(t) = ABt + A + B$, 其中 A 与 B 相互独立且同分布, $P(A=1) = P(A=-1) = \frac{1}{2}$, 其所有的样本函数为____, 其自协方差函数为____, $P(X(2) > 0) =$ _____。

2. $R_X(\tau) = 1 + \delta(\tau)$ 的谱密度函数是_____。

3. 已知 $B(t)$ 是标准正态函数, 则 $\sum_{k=1}^n B(k)$ 符合_____分布, $X(t) = e^{B(t)}$ 的均值函数是_____。

4. 有两个泊松过程, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 分别记为 $X(t), Y(t)$, 两者相互独立, 则

(1) $P(X(3)=4 | X(1) > 2) =$ _____; (2) $P(X(4) + Y(2) = 2) =$ _____。

5. 对于一个马尔可夫过程, 状态空间为 $\{1, 2, 3\}$, 其状态转移矩阵为 $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 初始状态

为 $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$ 。

(1) $P(X_2 = 2) =$ _____ ; (2) $P(X_0 = 2, X_1 = 2, X_3 = 3) =$ _____ ; (3) $P(X_3 = 3) =$ _____ ;

(4) $P(X_1 = 1 | X_2 = 2) =$ _____ ; (5) 记 T_3 为状态 3 的首中时, 求 $E(T_3) =$ _____。

二、已知 $B(t)$ 是一个标准布朗运动。(15 分)

(1) $2B(1) - B(2)$ 符合什么分布。

(2) 证明 $(t+1)B(\frac{1}{t+1}) - B(1)$ 也是标准布朗运动。

(3) 求 $\{B(1) > 1 | B(2) = 2, B(114) = 514\}$ 。

(4) 求 $\{\min_{1 \leq s \leq 2} B(t) \leq -2 | B(1) = -1\}$ 。

(5) 设 $X(t) = \{B(t), 0 < t < 1 | B(1) = 0\}$, 计算 $D_X(t)$ 。

三、已知 $X(t) = \cos(t + \Theta) + e^{-t}B(e^{2t})$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, $B(t)$ 为标准正态分布, 这两个分布相互独立。(15 分)

(1) 计算均值函数与自协方差函数, 并证明 $\{X(t) | -\infty < X(t) < +\infty\}$ 是平稳分布。

(2) 判断是否有均值的各态历经性。

(3) 求其功率谱函数。

四、涟水高师是一所著名的高等研究院，为我国数学事业发展做出了杰出贡献。其中，Jumpton 爵士早在 1624 年就于涟水高师开始了关于随机过程的研究。一天，Jumpton 爵士在苹果树下召集了 Gauss、Euler、RunAutumn、Yau、Riemann 等学生进行数学方面的研讨。在此期间，他观察到树叶落下与苹果落下的规律分别符合强度为 2（个/小时）与 3（个/小时）的泊松过程，并以此提出了著名的上帝均衡(Lord Equilibrium)。(15 分)

- (1) 第一个小时内掉落物总数符合什么分布。
- (2) 已知在 1h 内有四个物品掉落，求其中最多一个是树叶的可能性。
- (3) 第一个掉下的物品为苹果的概率。
- (4) 求第二个苹果在[1,2]时间范围内落下的概率。

五、在一个时齐马尔可夫链中，其状态空间为{1,2,3,4,5}。已知各状态转移的概率分别为 $p_{11}=p_{12}=p_{13}=p_{15}=\frac{1}{4}$, $p_{22}=1$, $p_{34}=p_{35}=\frac{1}{2}$, $p_{43}=p_{44}=\frac{1}{2}$, $p_{53}=p_{54}=p_{55}=\frac{1}{3}$ 。初始状态 $P(X_0 = 1)=P(X_0 = 3)=\frac{1}{2}$ 。(16 分)

- (1) 写出所有的互达等价类，并判断哪些是闭的。
- (2) 写出所有状态的周期与常返性。
- (3) 对于所有正常返的状态，写出其正常返的平均回转时。
- (4) 分别求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 2)$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 3)$ 。

参考答案（仅供参考，不保证正确性）：

一、

1.(1) $t+2, t-2, -t$ (2) $st+2$ (3) $3/4$

2. $2\pi\delta(\omega)+1$

3.(1) $N(0, \frac{k(k+1)(2k+1)}{6})$ (2) $e^{\frac{t}{2}}$

4.(1) $\frac{33}{24e^3 - 48e^2}$ (2) $32e^{-8}$

5.(1) $5/18$ (2) $5/54$ (3) $19/27$ (4) $2/5$ (5) $21/4$

二、

第四题是布朗桥过程，这部分容易被忽视

(1) $N(0,2)$ (2)书上两个定理结合下 (3) $1/2$ (4) 0.32 (5) $t(1-t)$

三、

这道题是两道历年卷的经典题融合而成的，要注意独立性化简计算

(1) $0 \frac{\cos \tau}{2} + e^{-|\tau|}$ (2)不具有 (3) $\frac{2}{\omega^2 + 1} + \pi(\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1))$

四、

第四题要考虑到所有情况，并从 0 开始算

$$(1)\pi(5) \quad (2)297/625 \quad (3)3/5 \quad (4)4e^{-3} - 7e^{-6}$$

五、

$$(1)\{1\} \text{开 } \{2\} \text{闭 } \{3,4,5\} \text{闭} \quad (2)1 \text{ 暂留, 其他常返 都没有周期} \quad (3)\mu_2 = 1, \mu_3 = 13/4, \mu_4$$

$$= 13/6, \mu_5 = 13/3 \quad (4)1/6 \quad 10/39$$