习题 7.4

一个滤波器的抽头延迟线的输出为 $y(k)=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}(k)$，其中 $\boldsymbol{a}=[a_0,a_1,\dots,a_n]^T$，$\boldsymbol{x}(k)=[x(k),x(k-1),\dots,x(k-n)]^T$。令 $\boldsymbol{R_x}=E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{Q}^T$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$。如果输出序列 $\{y(k)\}$ 的均方值 $J_{\boldsymbol{a}}=\frac{1}{2}E\{y^2(k)\}$。证明以下结结果：

(1)在约束条件 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=1$ 下，使 $J_{\boldsymbol{a}}$ 最小化等价于 $J_{\boldsymbol{w}}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}w_i^2\lambda_i$的最小化，其中$\boldsymbol{w}=[w_0,w_1,\dots,w_n]^T$，$\sum_{i=0}^{n}w_i^2=1$，并且 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{a}$。

解答：

首先，根据定义，输出均方值 $J_{\boldsymbol{a}}$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} J_{\boldsymbol{a}} &= \frac{1}{2}E\{y^2(k)\} \\ &= \frac{1}{2}E\{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a}\} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\}\boldsymbol{a} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q\Sigma Q}^T$。将 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}$ 代入此表达式，我们有：

$$J_{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Q\Sigma Q}^T\boldsymbol{a}$$

由于 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{a}$，而 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵（即 $\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^{-1}$），则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{w}$ 代入后，$J_{\boldsymbol{a}}$ 转化为：

$$\begin{aligned} J_{\boldsymbol{a}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{w} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i^2\lambda_i \\ &= J_{\boldsymbol{w}} \end{aligned}$$

对于约束 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=1$ ，将$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{w}$ 代入：

$$\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{w}=1$$

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} w_i^2 = 1$$

(2)若取 $\boldsymbol{w} = [\pm 1, 0, \dots, 0]^T$，则使 $J_{\boldsymbol{a}}$ 最小化的最优向量为 $\boldsymbol{a} = \pm \boldsymbol{a_0}$，其中 $\boldsymbol{a_0}$ 是矩阵 $\boldsymbol{R_x}$ 相对于最小特征值 λ_0 的特征向量。

解答：

对于约束优化问题，

$$\min_{\boldsymbol{w}} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} w_i^2 \lambda_i$$

$$\text{Subject to } \sum_{i=0}^{n} w_i^2 = 1$$

由于λ_0是最小特征值，显然取 $\boldsymbol{w} = [\pm 1, 0, \ldots, 0]^T$，$J_{\boldsymbol{w}}$ 最小。

由（1）中证明的两个约束优化问题的等价性，当$\boldsymbol{w} = [\pm 1, 0, \ldots, 0]^T$时，对应的 $\boldsymbol{a}$ 可使得 $J_{\boldsymbol{a}}$ 取到最小值。

不妨将 $\boldsymbol{Q}$ 写成：

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{0}} \quad \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}]$$

其中$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{0}}$，$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1}}$，⋯，$\boldsymbol{a}_n$分别是 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}$ 相对于特征值$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$的特征向量。

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{0}} \quad \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{1}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{0}}$$