# 自动控制理论

# Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

# 第三章 CHAPTER 3

## 连续时间控制系统的时域分析

# 第三章关键词

- 全解（Complete solution）—— 时间响应
- 稳态响应（ Steady-State Response ）
- 暂态响应（ Transient Response ）
- 系统动态特性（Dynamics of System）
  - 一阶系统（First-order System）
  - 二阶系统（Second-order System）
- 时域性能指标（Time-response specifications）
- 状态转移矩阵（State transition matrix, STM）

# 第三章主要内容

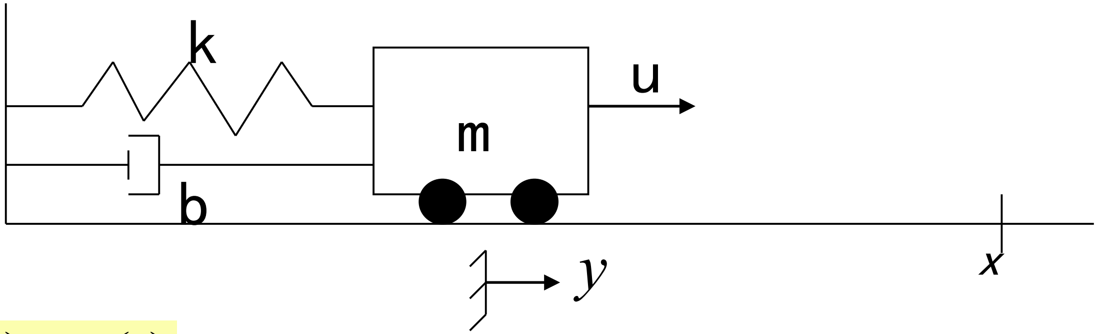
- 概述
- 微分方程求解
- 控制系统时域性能指标与时域分析
- 高阶系统的暂态响应
- 状态方程的求解与分析

# 主要内容

- 具有零点的二阶系统
- 高阶系统的暂态响应

# 具有零点的二阶系统

- **例：质量-弹簧-阻尼系统**




$$m\ddot{y}(t)+b\dot{y}(t)+ky(t)=u(t)$$

LT

$$m[s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)]+b[sY(s)-y(0)]+kY(s)=U(s)$$

假设 $u(t)=0, \dot{y}(0)=0, y(0)\neq 0$

$$Y(s)=\frac{\left(s+\frac{b}{m}\right)y(0)}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}=\frac{(s+2\zeta\omega_n)y(0)}{\boxed{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}$$

特征方程

# 具有零点的二阶系统

$$Y(s)=\frac{\left(s+2\zeta\omega_n\right)y(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- 其中，$\zeta$ 是无量纲的**阻尼比**，$\omega_n$ 是系统的**自然频率**。
- 零点在 $s=-2\zeta\omega_n$
- 系统极点即特征方程的根为

$$s_1,\ s_2=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

与无零点情况相同

- 在这种情况下，$\zeta=\frac{b}{2\sqrt{km}}$ 及 $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$

阻尼比

自然频率

# 具有零点的二阶系统

- 质量-弹簧-阻尼系统

$$M\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+Ky(t)=f(t)$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{K}\frac{\frac{K}{M}}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{K}{M}}=\frac{1}{K}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

其中， 自然频率 $\omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}}$

阻尼比 $\zeta=\frac{B}{2\sqrt{KM}}$

- 特征方程的根为

$$s_1,s_2=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

# 具有零点的二阶系统

共轭复数极点 $\zeta < 1$

- 由于系统具有复数共轭极点，部分分式展开式的拉普拉斯变换为

$$Y(s)=\frac{C_1}{s-s_1}+\frac{C_1^*}{s-s_1^*},\quad s_1, s_1^*=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- 这种情况下 $\zeta=\dfrac{b}{2\sqrt{km}}<1$ ——欠阻尼

$$Y(s)=\frac{(s+2\zeta\omega_n)y(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- 特征方程根处的留数为

$$C_1=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)Y(s)=\frac{y(0)\omega_n e^{j\cos^{-1}(\zeta)}}{2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}e^{j\frac{\pi}{2}}}=\frac{y(0)}{2\sqrt{1-\zeta^2}}e^{j\left(\cos^{-1}(\zeta)-\frac{\pi}{2}\right)}$$

# 具有零点的二阶系统

共轭复数极点 $\zeta < 1$

• 系统动态响应为

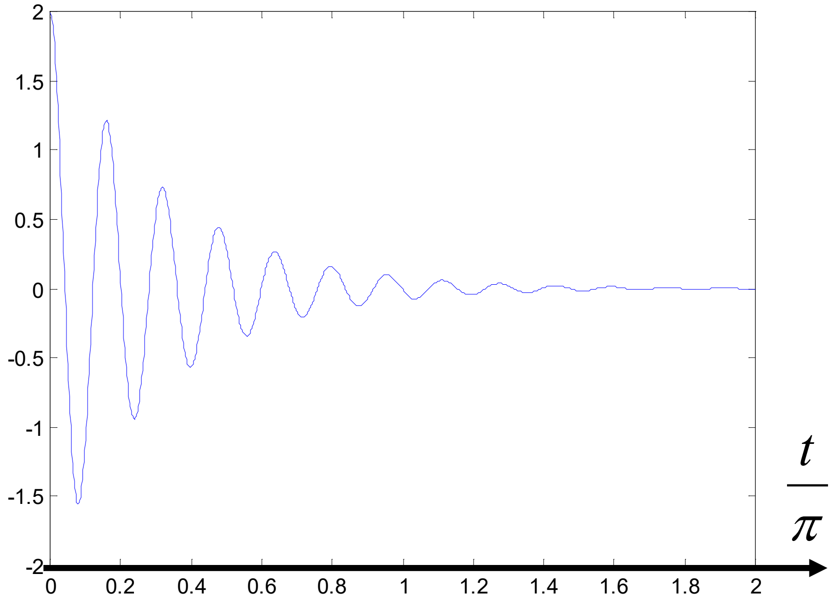
$$y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \cos^{-1}(\zeta) - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \cos^{-1}(\zeta)\right)$$

• $y(t)$ 的图示 —— 欠阻尼响应

当 $y(0) = \dfrac{8\pi}{\sqrt{16\pi^2+1}}$,

$$\omega_n = \sqrt{16\pi^2+1}, \zeta = \frac{1}{\omega_n}$$

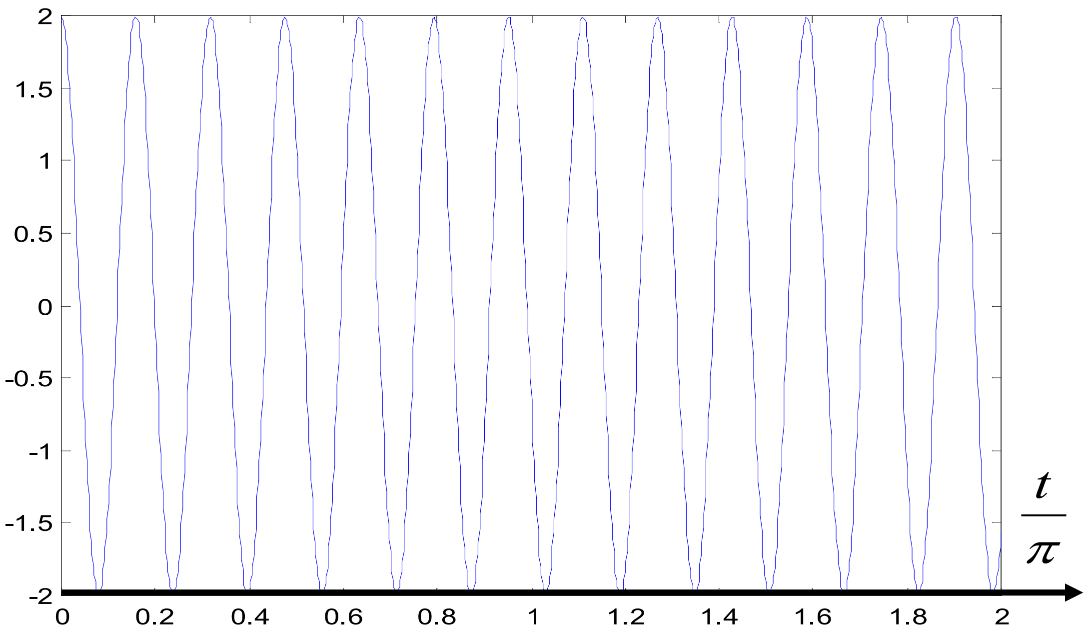


# 具有零点的二阶系统

纯虚数极点　　$\zeta = 0$

- 复数共轭极点的特殊情况。在 $y(t)$ 中代入 $\zeta = 0$ (b=0, 无阻尼)，得到等幅振荡响应

$$y(t) = y(0)\cos(\omega_n t)$$



# 具有零点的二阶系统

实极点 $\zeta > 1$

- 这种情况下，$\zeta = \dfrac{b}{2\sqrt{km}} > 1$ —— 过阻尼

$$Y(s) = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2}, \quad s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- 相应的常数为

$$Y(s) = \frac{(s+2\zeta\omega_n)y(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$C_1 = \lim_{s\to s_1}(s-s_1)Y(s) = \frac{\sqrt{\zeta^2-1}+\zeta}{2\sqrt{\zeta^2-1}}y(0)$$

$$C_2 = \lim_{s\to s_2}(s-s_2)Y(s) = \frac{\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta}{2\sqrt{\zeta^2-1}}y(0)$$

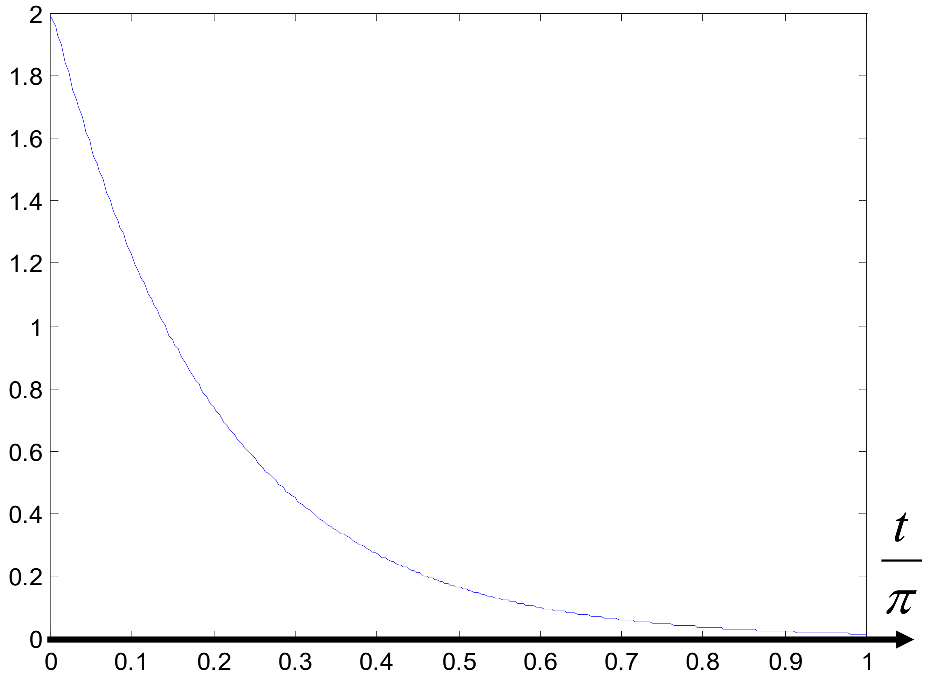
- 系统时间响应为

$$y(t) = \frac{y(0)e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\left(\sqrt{\zeta^2-1}+\zeta\right)e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} + \left(\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta\right)e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\right]$$

# 具有零点的二阶系统

实极点 $\zeta > 1$

- 对于不同实极点情况， $y(0) = \dfrac{8\pi}{\sqrt{16\pi^2 + 1}}, \omega_n = \sqrt{16\pi^2 + 1}, \zeta = 4$
- 可以得到过阻尼响应



# 具有零点的二阶系统

重实极点 $\zeta=1$

- 这种情况下，$\zeta=\dfrac{b}{2\sqrt{km}}=1$ ——临界阻尼

$$Y(s)=\frac{C_1}{s-s_1}+\frac{C_2}{(s-s_1)^2},\quad s_1=-\zeta\omega_n=-\omega_n$$

$$Y(s)=\frac{(s+2\zeta\omega_n)y(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- 相应的常数为

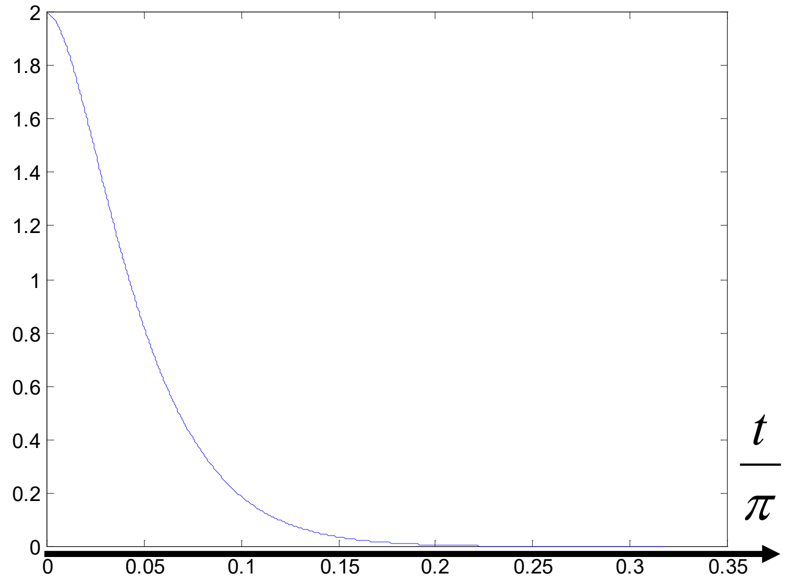
$$C_1=\lim_{s\to s_1}\frac{d}{ds}(s-s_1)^2Y(s)=y(0)$$

$$C_2=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)^2Y(s)=\omega_n y(0)$$

- 系统时间响应为

$$y(t)=y(0)e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

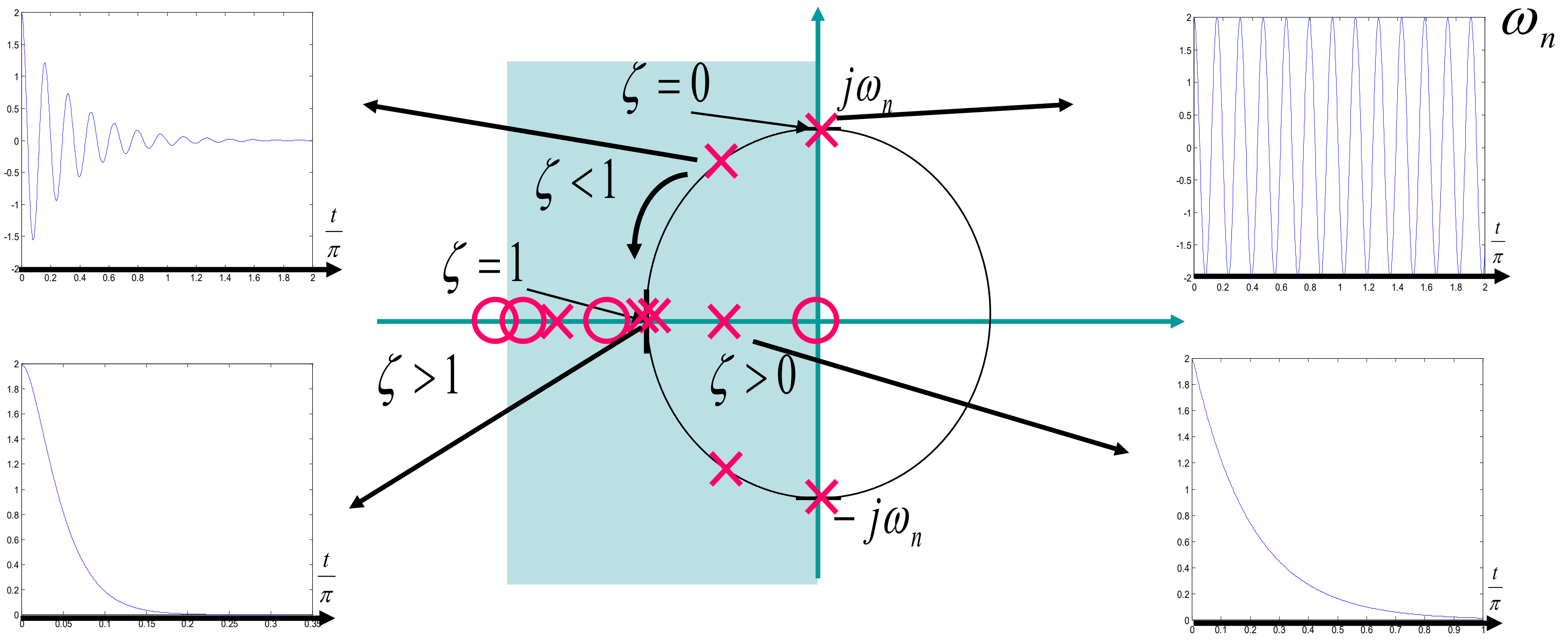
$$y(0)=\frac{8\pi}{\sqrt{16\pi^2+1}},\ \omega_n=\sqrt{16\pi^2+1},$$



# 具有零点的二阶系统

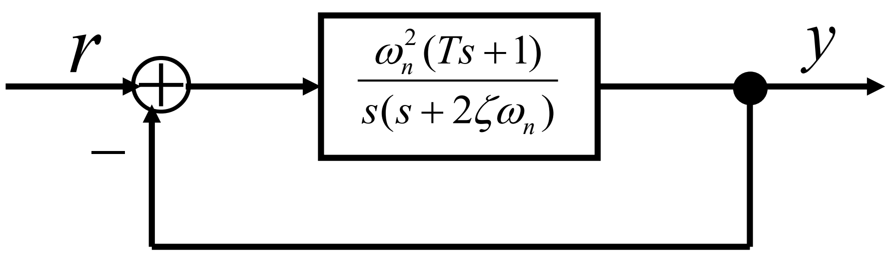
$$Y(s)=\frac{(s+2\zeta\omega_n)\,y(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- $Y(s)$ 零极点在 S 平面的分布图




- $\zeta$=0，特征方程有纯虚根，系统响应为**等幅振荡**响应
- $\zeta$<1，特征方程有共轭复根，系统响应为**欠阻尼**响应
- $\zeta$=1，特征方程有相等实根，系统响应为**临界阻尼**响应
- $\zeta$>1，特征方程有不等实根，系统响应为**过阻尼**响应

# 具有零点的二阶系统




$$G(s)=\frac{\omega_n^2\left(s+z\right)}{z\left(s^2+2\zeta'\omega_n s+\omega_n^2\right)}$$

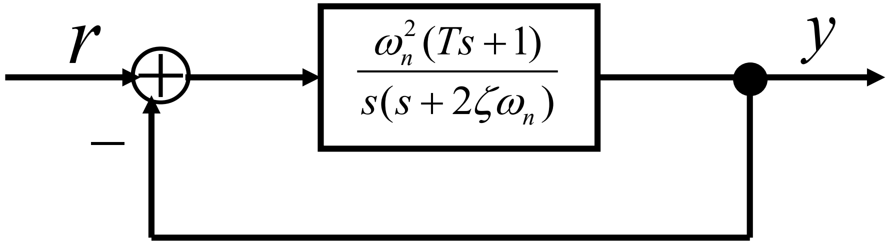
注意： $z=\frac{1}{T}$ $\zeta'=\zeta+\frac{\omega_n}{2z}$

- **输入为单位阶跃函数**

$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2\left(s+z\right)}{z\left(s^2+2\zeta'\omega_n s+\omega_n^2\right)}\right]$$

**零点如何影响系统的时域性能？** **比例微分作用**

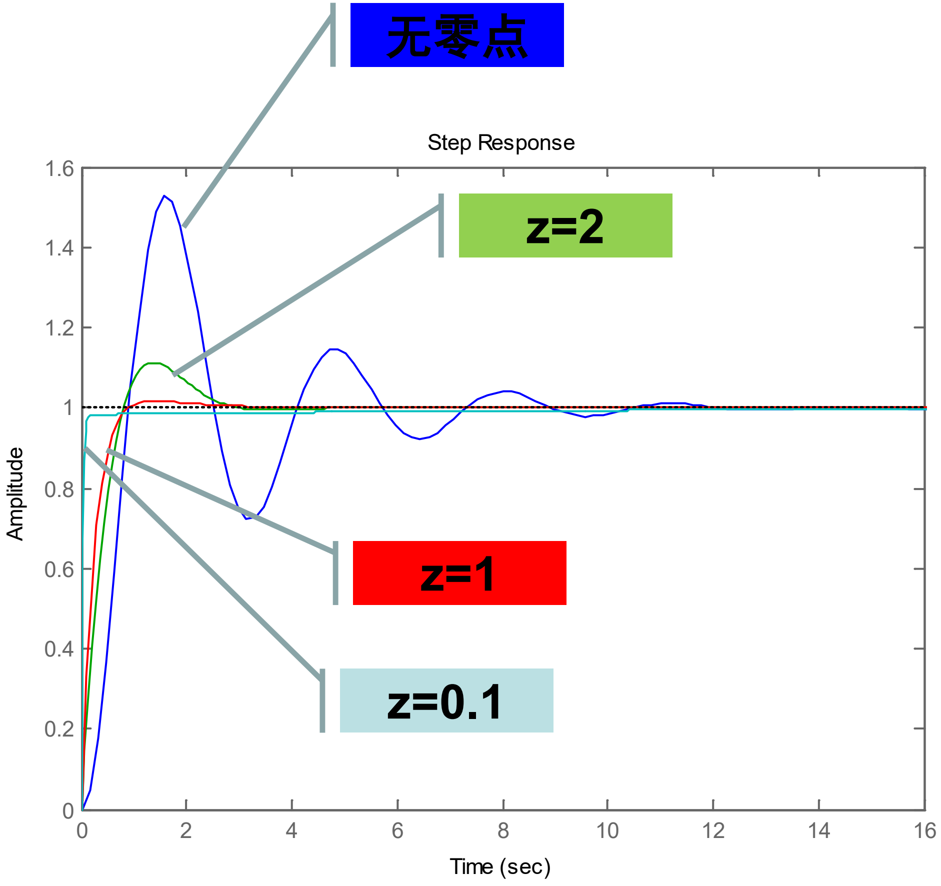
# 具有零点的二阶系统




$$\omega_n = 2 \qquad \zeta = 0.2$$

$$z = \frac{1}{T}$$

$$\zeta' = \zeta + \frac{\omega_n}{2z}$$



# 主要内容

- 具有零点的二阶系统
- 高阶系统的暂态响应

# 高阶系统动态

- 对于实际物理世界中更常见的高阶系统，如何得到它们的动态特性？

- 常用三种方法：
  - 列写 $n$ 阶微分方程，然后直接求取微分方程的解
  - 利用二阶系统近似高阶系统
  - 将 $n$ 阶系统转换为状态方程然后求解状态方程

# 高阶系统动态：时间响应

- 例 1：

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+12\frac{d^2y(t)}{dt^2}+35\frac{dy(t)}{dt}+24y(t)=120x$$

单位阶跃函数输入作用下系统的响应

LT

解：

$$Y(s)=\frac{120}{(s^3+12s^2+35s+24)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{5}{s}-\frac{8.57}{s+1}+\frac{4}{s+3}-\frac{0.43}{s+8}$$

$$y(t)=5-8.57e^{-t}+4e^{-3t}-0.43e^{-8t}$$

过阻尼响应

# 高阶系统动态：主导极点

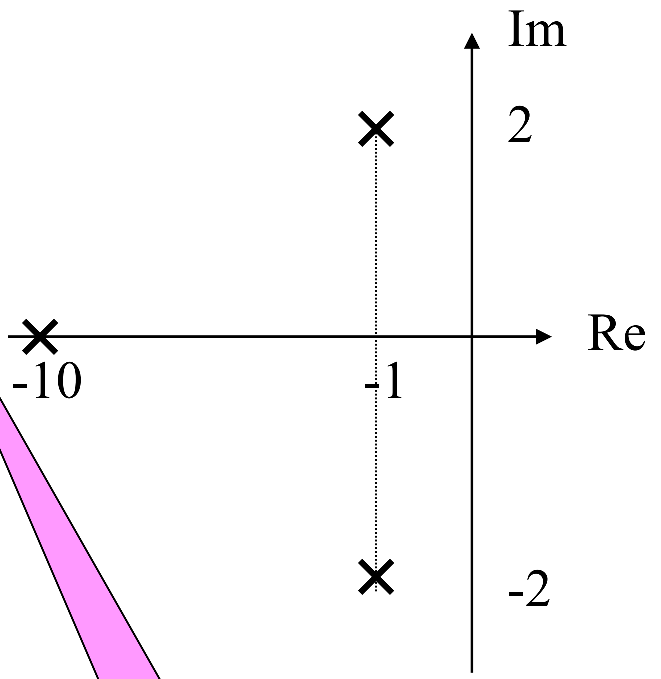
- 例 2

$$G(s)=\frac{K}{(s+10)(s^2+2s+5)}$$

单位阶跃函数输入作用下系统的响应

解：

- 特征方程根：$\because s_1=-10, s_{2,3}=-1\pm j2$




主导极点

$$Y(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s+10}+\frac{a_2}{s^2+2s+5}$$

LT$^{-1}$

$$y(t)=a_0+\cancel{a_1e^{-10t}}+b_1e^{-t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta)$$

$$y(t)\approx a_0+b_1e^{-t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\beta)$$

- 第三种方法将在后面课程中详细讨论

# 高阶系统动态(考虑稳定系统的拉氏反变换求系数)

- 高阶系统暂态响应各分量的衰减快慢由系统极点的位置决定
  - 极点在S平面左半部离虚轴越远，相应的分量衰减越快，对系统的影响越小。
- 各分量所对应的系数取决于系统的零、极点分布。
  - 当某极点靠近零点而远离其他极点和原点，则相应的系数越小，该暂态分量的影响就小。
  - 若一对零极点互相很接近，则在输出$y(t)$中与该极点对应的分量就几乎被抵消。
  - 若某极点远离零点，越接近其他极点与原点，则相应的系数就越大，该暂态分量的影响也就越大。
- 系统的零、极点共同决定了系统暂态响应曲线的形状。

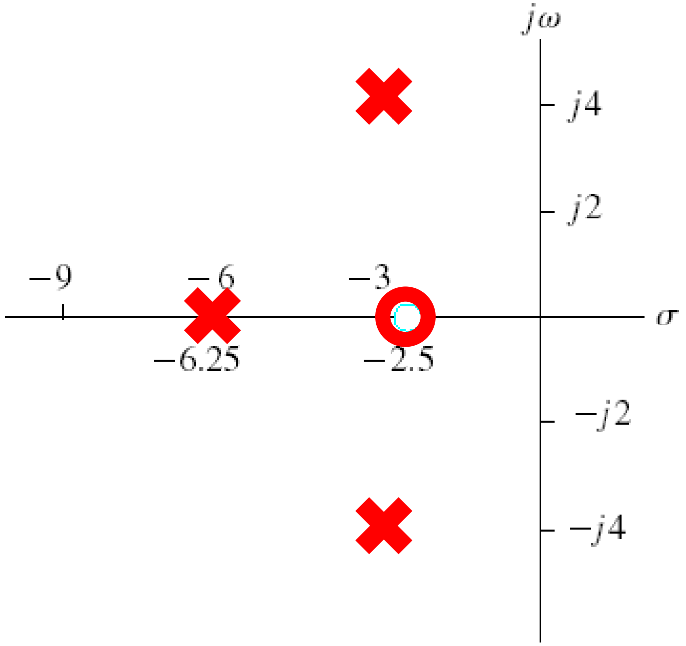
对于系数很小（影响很小）的分量、远离虚轴衰减很快的分量常常可以忽略，此时高阶系统就可用低阶系统来近似估计。

# 高阶系统：主导极点的概念

- **主导极点**
  - 若高阶系统中距离虚轴最近的极点，其实数部分为其他极点的五分之一（1/5）或更小，并且附近又没有其他零极点，则可认为系统的响应主要由该极点（或共轭复数极点）决定。
  - 这种对系统暂态响应起主要作用的极点称为系统的主导极点。
  - 一般情况下，高阶系统具有振荡性，故主导极点通常是共轭复数极点。所以，高阶系统常当作二阶系统来分析，相应的性能指标都可按二阶系统近似估计。
- **当不满足上述条件时，不能随意忽视零极点对系统动态性能的影响。**

# 高阶系统：主导极点的概念

➢ **例 3：第三个极点和零点对二阶系统的影响**




$$\Phi(s)=\frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s+a)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(1+\tau s)}$$

$\zeta\omega_n=3$　$\omega_n=5$　$\tau=0.16$　$a=2.5$

$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

**讨论分别忽略实极点、零点、零极点三种情况下的时域性能指标。**

**（注意增益不变！）**

# 高阶系统：主导极点的概念

(1) 忽略实极点-6.25

$$\Rightarrow \Phi(s)=\frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25}$$

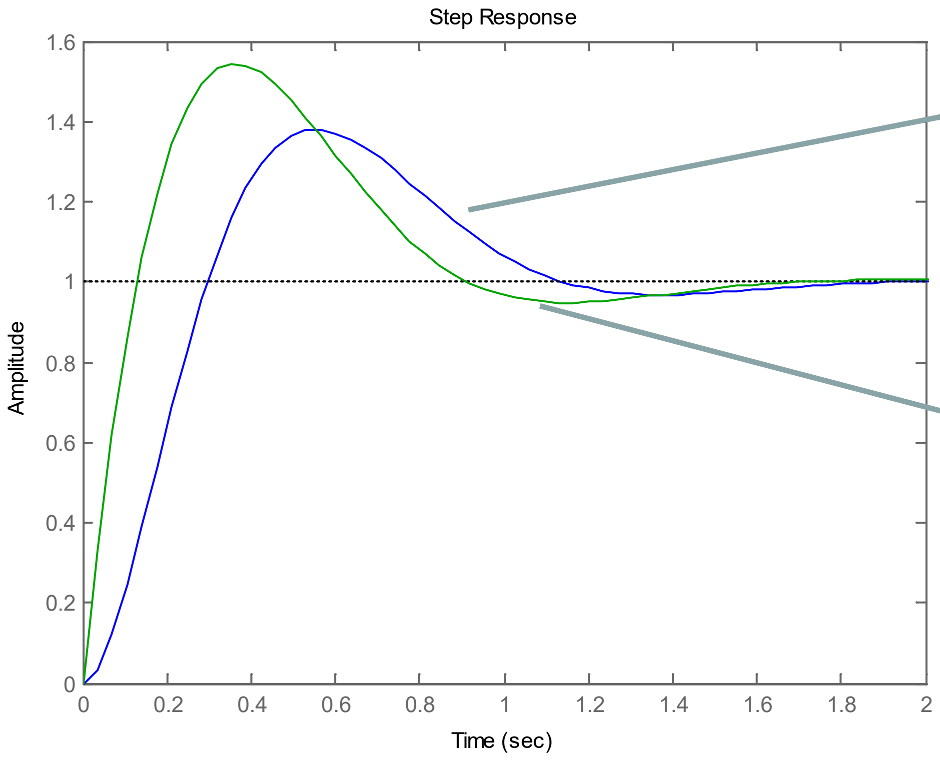
$$\zeta=0.6 \quad \Big\downarrow \quad \omega_n=5$$

$$\boxed{\sigma=55\% \qquad T_s=\frac{4}{0.6\times 5}=1.33s}$$

利用计算机仿真可以得到，实际的$\sigma$=38%，*Ts*=1.6*s*

- 第三个极点的作用是减少超调量并增加调节时间

# 高阶系统：主导极点的概念

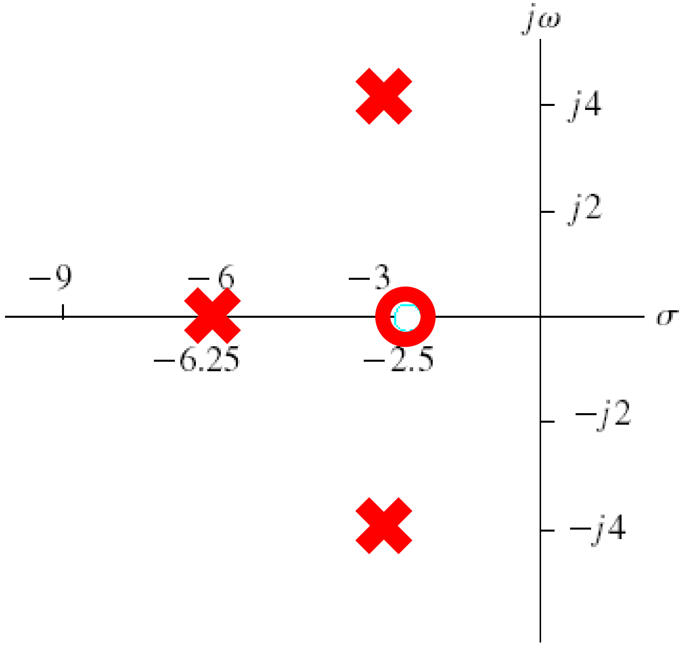



$$\Phi(s) = \frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\Phi(s) = \frac{10(s+2.5)}{(s^2+6s+25)}$$

# 高阶系统：主导极点的概念

## (2) 忽略实零点-2.5




$$\Phi(s) = \frac{156.25}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

超调量 $\sigma \approx 5.5\%$

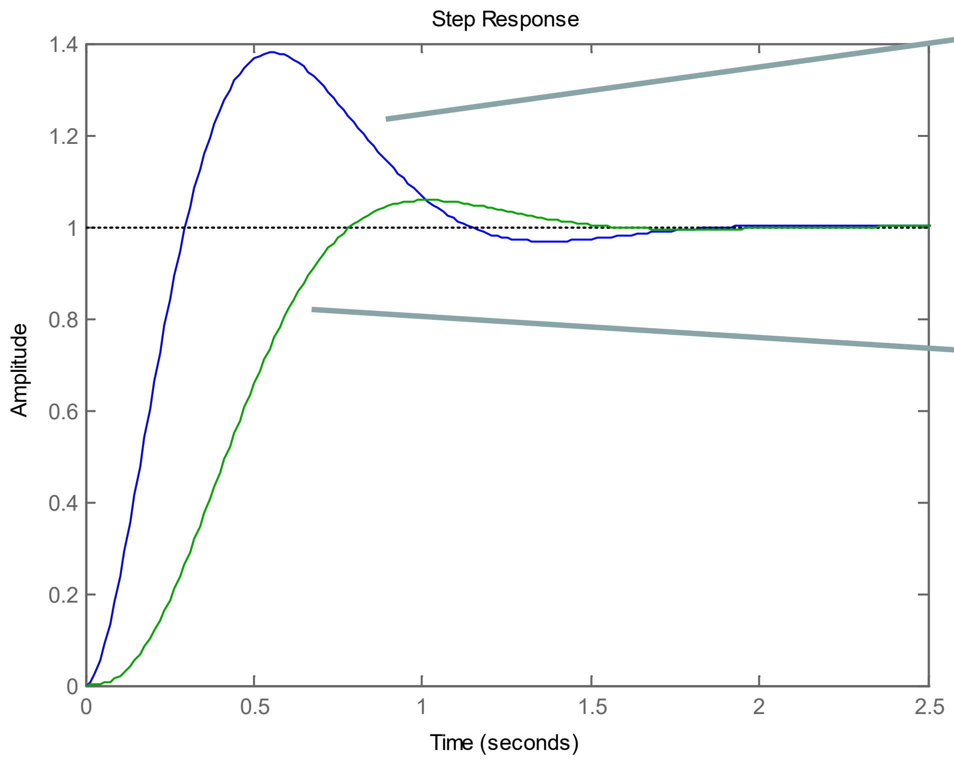
调节时间 $T_s \approx 1.4s$

实际情况

$\sigma = 38\%$ $T_s = 1.6s$

使超调量加大，响应速度加快

# 高阶系统：主导极点的概念

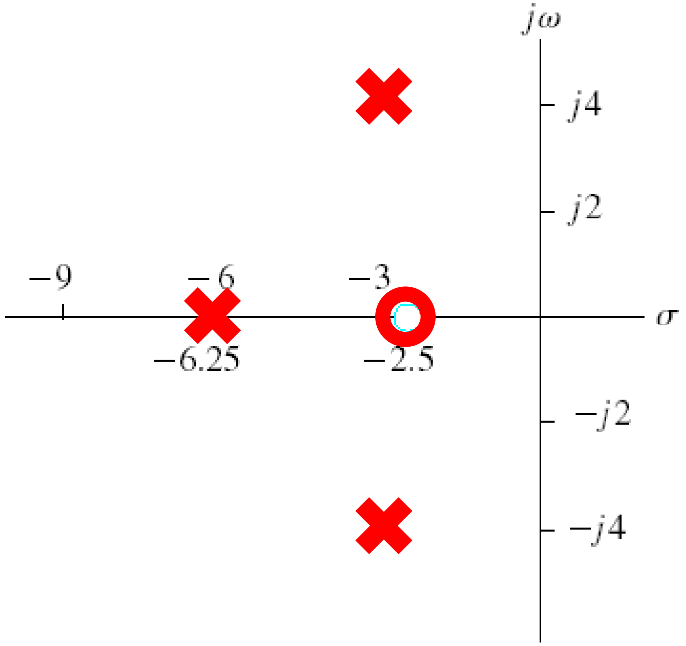



$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\Phi(s)=\frac{156.25}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

# 高阶系统：主导极点的概念

## (3) 同时忽略实数零极点




$$\Phi(s)=\frac{25}{(s^2+6s+25)}$$

**超调量** $\sigma\approx 9.5\%$

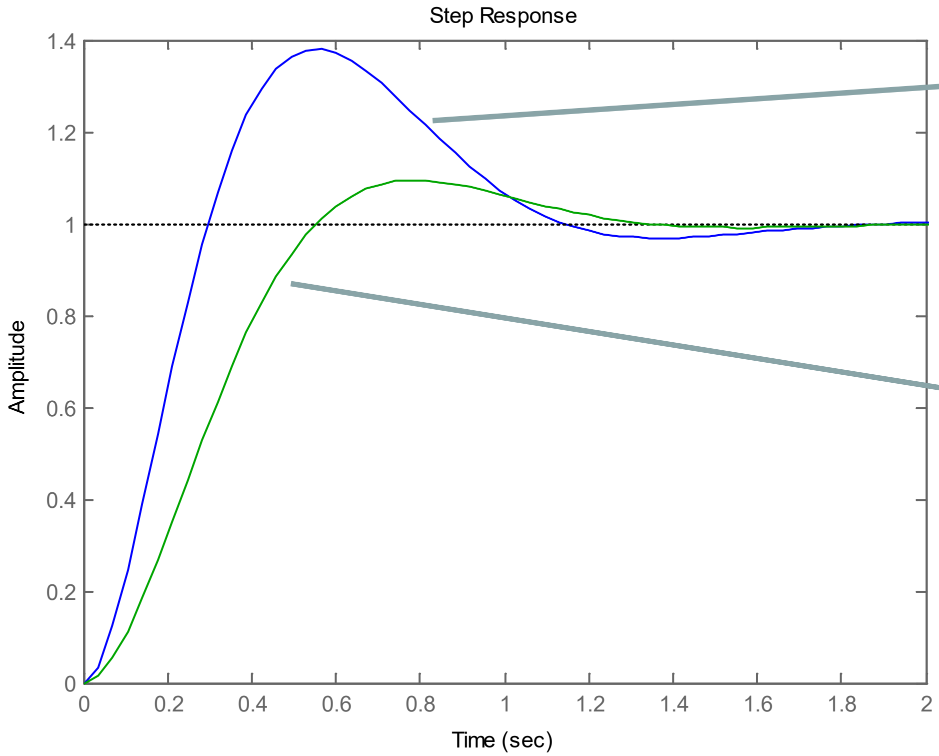
**调节时间** $T_s\approx 1.2s$

**实际情况**

$\sigma=38\%$ $T_s=1.6s$

使超调量加大，响应速度加快

# 高阶系统：主导极点的概念



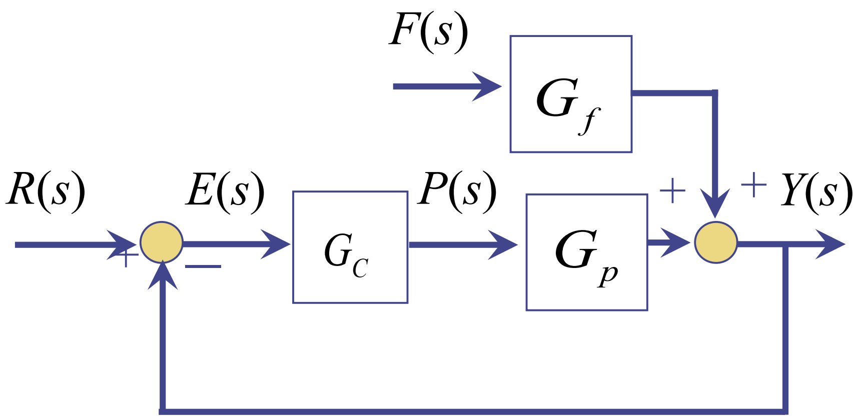

$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\Phi(s)=\frac{25}{(s^2+6s+25)}$$

# 高阶系统：主导极点的概念

- **此例不能应用主导极点概念分析，不能忽略距离较近的零、极点的影响**
  - 一个不能忽略的零点对系统的影响是响应速度加快，这是由于零点具有微分的作用。
  - 一个不能忽略的极点对系统的影响是调节时间增加，这是由于极点的滤波作用（或称阻尼作用）。

# 常规控制器：P/PI/PID




带控制器的闭环控制系统示意图

**P**

$$p(t)=K_c e(t)$$

$$G_c(s)=\frac{P(s)}{E(s)}=K_c$$

消除余差

**PI**

$$p(t)=K_c e(t)+\frac{K_c}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,d\tau$$

$$G_c(s)=\frac{P(s)}{E(s)}=K_c\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$$

超前作用

**PID**

$$p(t)=K_c e(t)+\frac{K_c}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,d\tau+K_c T_d\frac{de(t)}{dt}$$

$$G_c(s)=\frac{P(s)}{E(s)}=K_c\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$$

# The End