浙江大学 20 20 – 20 21 学年 秋 学期

《矩阵论》课程期末考试试卷

课程号： 67190080（本科生），开课学院： 信电学院

考试试卷：A 卷 √、B 卷（请在选定项上打 √）

考试形式：闭 √、开卷（请在选定项上打 √），允许带 一张手写 A4 纸 入场

考试日期： 2020 年 11 月 18 日,考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名：____________学号：____________所属院系（专业）：____________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得分									
评卷人									

一、（14 分）线性方程组

$$\alpha x_1 + \alpha x_3 = 3 - 2\alpha$$

$$2x_1 + x_2 + (\alpha + 3)x_3 = \alpha$$

$$3x_1 + \alpha x_2 + (2\alpha + 3)x_3 = 2\alpha$$

（1）是否存在唯一解的情况？若存在，则α取何值？

（2）是否存在无解的情况？若存在，则α为何值？

（3）是否存在无穷多解的情况？若存在，则α为何值？

二、（16 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零奇异值；（提示：利用奇异值分解与特征分解的关联性）

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右奇异向量；

（3）试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零奇异值对应的左奇异向量。

三、（8 分）已知矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为方阵，证明$\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{BA}\right)^{-1}$，设所有逆矩阵均存在。

四、（12 分）在¡^{4}中，已知$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,1,-4,-5]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[1,-3,6,7]^{\mathrm{T}}$，

（1）设$W=\mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，求 W 的一组基；

（2）$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，求 $\ker(\boldsymbol{A})$或者 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A})$的一组基；

（3）求 $\mathrm{Range}(\boldsymbol{A})$的一组基。

五、（12 分）矩阵求导

（1）设 $f(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_F^2$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是矩阵变量，求 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}}$；

（2）设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是矩阵变量，且 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，令 $f(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A})$，证明：

$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}}=\det(\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$。

六、（12 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（1）试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式；

（2）利用 Caley –Hamilton 定理计算 $e^{\boldsymbol{A}}$。

七、（14 分）考虑线性方程$\boldsymbol{Ac}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{y}$，其中$\boldsymbol{e}$为零均值加性有色噪声向量。使用加权误差二次函数$Q(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{e}^H\boldsymbol{We}$作为向量$\boldsymbol{c}$最优估计$\hat{\boldsymbol{c}}_o$的代价函数，其中矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{W}$均为 Hermitian 正定矩阵。

（1）求上述无约束优化问题的最优解$\hat{\boldsymbol{c}}_o$。

（2）若向量$\boldsymbol{c}$须满足约束条件$\boldsymbol{c}^H\boldsymbol{y}=1$，求该约束优化问题的最优解。

八、简答题（12 分）

（1）简述外罚函数法和内罚函数法的区别。（3 分）

（2）请给出普通最小二乘、数据最小二乘、总体最小二乘的目标函数表达式，并简要说明总体最小二乘的最优解如何得到。（5 分）

（3）对于线性方程，简述条件数的物理意义及与矩阵奇异值的关系。（4 分）