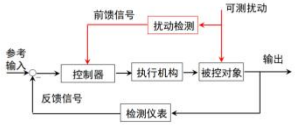
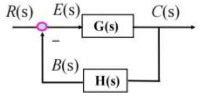
• 带前馈的闭环控制系统



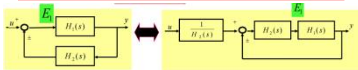


开环传递函数 $G_o(s)=\dfrac{B(s)}{E(s)}=G(s)H(s)$

闭环/整个系统传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\dfrac{G(s)}{1+G_o(s)}$

前向通路传递函数G(s)

反馈通路传递函数H(s)



• 等效单位反馈

• 简化方块图求总传递函数的要点：同名变量对间传递函数不变

• MIMO 系统，

$Y(s)=\Phi(s)U(s)=[I+G(s)]^{-1}G(s)U(s)=G(s)[I+G(s)]^{-1}U(s)$

•梅森公式

$T=\dfrac{1}{\Delta}\sum_i T_i\Delta_i$

$\sum L_1$：所有不同回路的回路增益之和

$\sum L_2$：每两个互不接触回路的回路增益乘积之和

$\sum L_3$：在Δ中，将与第i条前向通路相接触的回路的增益置0后所得到的结果，称为余子式

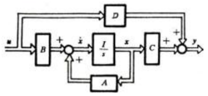
T_i 从源节点到阱节点的第i条前向通路的增益

$\Delta=1-\sum L_1+\sum L_2-\sum L_3+\cdots$

注意：当前向通道接触所有的回路时，Δ_i 等于1

•状态空间表达式 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 状态方程

•状态空间模型图 $y(t)=Cx(t)+Du(t)$ 输出方程

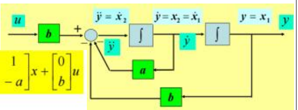


• 三种常用系统状态变量：物理状态变量（储能元件），相变量，正则变量

• 独立物理量：该物理量不能够由其他状态变量所构成的函数来表示，可以由其他状态变量的各阶导数所构成的函数表示。电容(电压)v、电感(电流)i、质量(传递速度)v、弹簧(位移)x、流体容量(高度)h、热容(温度)c、流体可压缩性(压力)PL

• 变量解释：x 状态向量(完全描述、数量最少)、y 输出向量、A 对象系数矩阵/系统矩阵、B 控制矩阵、C 输出矩阵、D 前馈矩阵

• 仿真图：状态变量(相)选择为各个积分器的输出



$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-b&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}u$

$y=x_1$

• 状态变量不唯一(物理和相)

->状态空间模型不同

• 微分方程（传递函数）->状态空间模型

输入无微分项：

$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=u$

$\dot{x}_n+a_{n-1}x_n+a_{n-2}x_{n-1}+\cdots a_1x_2+a_0x_1=u$

$\dot{x}_n+a_{n-1}x_n+a_{n-2}x_{n-1}+\cdots a_1x_2+a_0x_1=u$

$x_n=x_{n-1}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}[u]$$

$y=x_1=[1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0]x$

标准形式：$\dot{x}=A_cx+b_cu$，$y=cx$ 注意下标

Companion matrix 友矩阵，能控标准型(A_c, b_c)

输入有微分项：

微分方程 $(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0)y=(c_wD^w+c_{w-1}D^{w-1}+\cdots+c_1D+c_0)u$

相变量

状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}[u]$$

w=n $y=[(c_0-a_0c_n)\ \ (c_1-a_1c_n)\ \ \cdots\ \ (c_{n-1}-a_{n-1}c_n)]x+c_nu$

w<n $y=[c_0\ \ c_1\ \ \cdots\ \ c_w\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]x=cx$

• 微分方程（传递函数）->状态空间模型 对角标准型

$\dfrac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\dfrac{\beta_ns^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1s+\beta_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}=\beta_n+\sum_{i}^{n}G_i(s)$；$G_i(s)=\dfrac{f_iZ_i(s)}{U(s)}=\dfrac{f_i}{s-\lambda_i}$

$\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{s+4}$

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}u=\Lambda z+b_nu$$

$y=[f_1\ \ f_2\ \ \cdots\ \ f_n]z+\beta_nu=c_nz+d_nu$

型 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u$

$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{2}{3}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}x$

b_n全 0 .W=n,$d_n\neq0$，否则$d_n=0$

• 能控标准型：与状态空间模型，输入有微分项一样

• 能观标准型：

已知传递函数为：$G(s)=\dfrac{c_ns^n+c_{n-1}s^{n-1}+c_{n-2}s^{n-2}+\cdots+c_1s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0}$

$A_o=(A_c)^T$

$C_o=(B_c)^T$

$B_o=(C_c)^T$

能控标准型 $\dot{x}=A_cx+B_cu$，$y=c_cx+Du$

能观标准型 $\dot{x}=A_ox+B_ou$，$y=c_ox+Du$

• 从状态空间模型到传递函数

$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=[C(sI-A)^{-1}B+D]$

$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=[C(sI-A)^{-1}B+D]=\dfrac{C[adj(sI-A)]B}{\det(sI-A)}+D$

adj(sI-A)伴随矩阵

$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-3\end{bmatrix}$，

$sI-A=\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s&-1\\1&s+3\end{bmatrix}$

$\Phi(S)=(sI-A)^{-1}=\dfrac{1}{s(s+3)+1}\begin{bmatrix}s+3&1\\-1&s\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-8&-9\end{bmatrix}$ $adj(sI-A)=\begin{bmatrix}s(s+9)+8&s+9&1\\0&s(s+9)&s\\0&-8s&s^2\end{bmatrix}$

• 机械平移系统、机械旋转系统

$T_J=Ja=JD\omega=JD^2\theta$

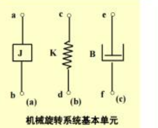
$T_K=K(\theta_c-\theta_d)$

$T_B=B(\omega_e-\omega_f)=B(D\theta_e-D\theta_f)$

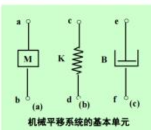
$f_M=Ma=MDv=MD^2x$

$f_K=K(x_c-x_d)$

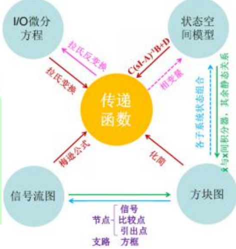
$f_B=B(v_e-v_f)=B(Dx_e-Dx_f)$



机械旋转系统基本单元



机械平移系统的基本单元



• 热力系统

热量 $Q=\dfrac{q}{D}=C(\theta_2-\theta_1)$ 热流率 $q=CD(\theta_2-\theta_1)$ 热流率为 $q=\dfrac{\theta_3-\theta_4}{R}$

• 非线性环节的线性化：以平衡点附近的直线代替平衡点附近的曲线

• 液位系统

水槽：$q_{in}-q_{out}=dV/dt=Ad\Delta h/dt$，阀：$q$=(h1-h2)/R，终阀$q_{out}$=h/R+$q_f$

• 纯滞后环节 $q_f(t)=q_{in}(t-\tau)$ $G(s)=\dfrac{Q_f(s)}{Q_{in}(s)}=e^{-\tau s}$

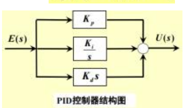
• 直接蒸汽加热器模型

• PID 控制器的模型：

微分环节T_ds是非因果的

工程中实现之一：$\dfrac{T_ds}{\tau s+1}\approx T_ds,\tau\ll1$

工程中实现之二：$T_d\left(\dfrac{e(t)-e(t-T)}{T}\right)\approx T_d\dfrac{de(t)}{dt}$



PID控制器结构图

$u=K(e+\dfrac{1}{T_i}\int e(t)dt+T_d\dfrac{de}{dt})=K_pe+K_i\int e(t)dt+K_d\dfrac{de}{dt}$

• 传递函数的各种形式：

传递函数$G(s)=\dfrac{\beta_ms^m+\beta_{m-1}s^{m-1}+\cdots+\beta_1s+\beta_0}{\alpha_ns^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1s+\alpha_0}$ ($\alpha_n\neq0,\beta_m\neq0,n\geq m$)

特征多项式 $=d+\dfrac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$ 特征方程 $s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$

零极点型 $\dfrac{K_r(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$

根轨迹增益K_r，零点$z_1,\cdots,z_m$是分子方程的根，极点$p_1,\cdots,p_n$是特征方程的特征根

零极点在复平面上，虚部非零的零点共轭出现，虚部非零的极点共轭出现

增益 $\dfrac{K\prod(T_is+1)\prod(T_l^2s^2+2\zeta T_ls+1)}{s^v\prod(T_js+1)\prod(T_k^2s^2+2\zeta T_ks+1)}$ 比例环节：K ($K\neq0$)

积分/微分环节：$s^{\pm1}$

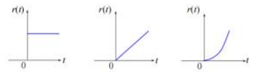
振荡环节：$\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$ ($T>0,-1\leq\zeta<1$) 惯性环节：$\dfrac{1}{Ts+1}$ ($T\neq0$)

二阶微分环节：$T^2s^2+2\zeta Ts+1$ ($T>0,-1\leq\zeta<1$) 一阶微分环节：$Ts+1$ ($T\neq0$)

• 单位脉冲及响应

系统的单位脉冲响应（零初始条件下） 拉氏变换 / 拉氏反变换 系统的传递函数

• 典型输入



正弦函数 $r(t)=k\sin\omega_0t\cdot u_{-1}(t)$ LT $R(s)=L[r(t)]=\dfrac{k\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

➢ 单位阶跃 $u_{-1}(t)=\begin{cases}1,t\geq0\\0,t<0\end{cases}$

➢ 阶跃 $r(t)=ku_{-1}(t)$，$R(s)=L[r(t)]=\dfrac{k}{s}$

➢ 斜坡 $r(t)=ktu_{-1}(t)$，$R(s)=L[r(t)]=\dfrac{k}{s^2}$

➢ 抛物线 $r(t)=\dfrac{k}{2}t^2u_{-1}(t)$，$R(s)=L[r(t)]=\dfrac{k}{s^3}$

当k=1时，相应的有单位斜坡、单位抛物线

1) $u(t)=k\sin\omega_0t\cdot u_{-1}(t)$，G(s)不含$\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}$

2) u(t)为阶跃、斜坡或抛物线输入，G(s)不含$\dfrac{1}{s}$

• 模态不重叠条件：

全响应=自由响应(G(s))+强迫响应(非 G(s))

• 非正弦输入强迫响应的一种求法：时域

构造方法，假设强迫响应与 r(t)有相同的形式

$r(t)=R_0+R_1t+\dfrac{R_2t^2}{2!}$ $y(t)_{ss}=c_0+c_1t+\dfrac{c_2t^2}{2!}$

• 稳定系统：对任意典型输入的自由响应收敛到 0,所有系统特征根<0

• 稳定单实根的时间常数： $T=\dfrac{1}{|\sigma|}$

• 系统的动态性能指标

超调量 $\sigma\%$

调节时间T_s、峰值时间T_p、上升时间T_r、延迟时间T_d、衰减比 n

• 一阶系统的响应分析：加单位负反馈 $\dfrac{K_0}{T_0s+1}$ $K=\dfrac{K_0}{1+K_0}$，$T=\dfrac{T_0}{1+K_0}$

$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=K-Ke^{-\frac{t}{T}}$

不存在峰值时间T_p、超调量σ与衰减比n；

$T_d=0.69T$

$T_r=2.20T$

$T_s=\begin{cases}3T; & \delta=5\%y(\infty)\\4T; & \delta=2\%y(\infty)\end{cases}$

◆ 线性系统对输入信号导数（积分）的响应，可通过系统对输入信号的响应进行微分（积分--积分常数则由初始条件决定）求得。

• 二阶系统的响应分析： $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$，$T>0$ $=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$

不稳定->稳定

$\Phi(s)=\dfrac{\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}$

原系统 $\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$ 不稳定

– ζ<0，特征方程有2个正实部根，系统响应发散(不稳定)

– ζ=0，特征方程有1对共轭虚根，系统响应为等幅振荡(临界稳定)响应

– 0<ζ<1，特征方程有1对共轭负实部根，系统响应为欠阻尼响应

– ζ=1，特征方程有相等负实根，系统响应为临界阻尼响应

– ζ>1，特征方程有不等负实根，系统响应为过阻尼响应

• 欠阻尼二阶系统的动态性能指标

上升时间(10%->90%)：$T_r=\dfrac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ 其中，$\phi=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

峰值时间：$T_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ 衰减（阻尼）震荡频率$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

超调量： 调节时间： $T_s\approx\dfrac{3}{\zeta\omega_n}$ 对于 5% 误差

$\sigma=\dfrac{y(T_p)-y_{ss}}{y_{ss}}=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ $T_s\approx\dfrac{4}{\zeta\omega_n}$ 对于 2% 误差

衰减比 $n=e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ 通常还用：$T_s\approx\dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$

• 稳定高阶系统的近似

➢ 高阶系统自由响应各分量的衰减快慢由系统极点的位置决定

– 极点在S平面左半部离虚轴越远，相应的分量衰减越快，对系统的影响越小

➢ 各分量所对应的系数取决于系数的零、极点分布。

– 若一对零极点互相很接近，则在输出$y(t)$中与该极点对应的分量就几乎被抵消。

– 当某极点靠近零点而远离其他极点和原点，则相应的系数越小，该自由分量的影响就小。

– 若某极点远离零点和其他极点，越接近原点，则相应的系数就越大，该自由分量的影响也就越大。

➢ 系统的零、极点共同决定了系统自由响应曲线的形状。

对于系数很小（影响很小）的分量、远离虚轴衰减很快的分量常常可以忽略，此时高阶系统就可用低阶系统来近似估计。

主导极点：附近无其它零极点、距虚轴较近（1/5）

新增零点：使超调量加大，调节时间增加；

新增极点：使超调量减小，调节时间增加

• 状态空间模型的解算问题 $\dot{x}(t)=ax(t)$ ➡ $x(t)=e^{at}x(0)$

• 状态转移矩阵的计算 $\dot{x}(t)=Ax(t)$ ➡ $x(t)=e^{At}x(0)$

1）直接计算 $\Phi(t)=e^{At}=\exp[At]$

2）拉氏变换 $\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

3）矩阵对角化 $A=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$ ⟺ $e^{At}=diag[e^{\lambda_1t},e^{\lambda_2t},\cdots,e^{\lambda_nt}]$

$\Lambda=T^{-1}AT$ $e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}$

4）Cayley-Hamilton 定理 $e^{At}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k$ $\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1t}\\e^{\lambda_2t}\\ \vdots\\e^{\lambda_nt}\end{bmatrix}$

• 状态空间模型的解算

1）直接求解方程（时域） $x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(\beta)Bu(t-\beta)d\beta$

$x_{zi}(t)$ $x_{zs}(t)$

$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$

LT

$X(s)=[sI-A]^{-1}x(0)+[sI-A]^{-1}BU(s)=\Phi(s)x(0)+\Phi(s)BU(s)$

LT^{-1}

$x(t)=\Phi(t)x(0)+L^{-1}[\Phi(s)BU(s)]$

连续运算，直到所有的d式都计算完成，余下的各行都按照类似的方法计算，直到s^0行

2）利用拉普拉斯变换（S 域）

• 劳斯稳定性判据：第一列元素必须没有符号变化。

符号变化次数=正实部的根的个数

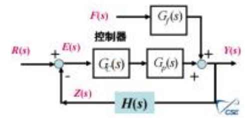
二阶系统：所有系数都具有相同的符号

三阶系统 a_0,a_1,a_2,a_3同号,$a_2a_1-a_0a_3>0$

• 3 种情况

-首列无零元素（普通情况）

-首列有零元素，但在零元素所在的行中具有非零的其他元素



$E(s)=R(s)-H(s)Y(s)=R(s)-H(s)Y_r(s)-H(s)Y_f(s)=E_r(s)+E_f(s)$

S=1/x 代入原方程。 原特征多项式乘（s+1）

$E_r(s)=R(s)-H(s)Y_r(s)=R(s)-H(s)\dfrac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s)=\dfrac{1}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s)$

$E_f(s)=-H(s)Y_f(s)=\dfrac{-G_p(s)H(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}F(s)$

-劳斯阵列的某一行元素均为零

零行 用一个很小的正数ε代替 0元素。上一非

$U(s)=\beta_1s^{i+1}+\beta_2s^{i-1}+\beta_3s^{i-3}+\cdots$

$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}[r(t)-z(t)]$

构造辅助多项式，辅助多项式的根就是对称特征根

• 稳定裕量：令 $s=z-\sigma$

• 稳态误差

• 终值定理

• 单位负反馈系统的型别

m=几，几型系统

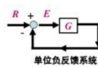
• 型别-误差系数方法

稳态位置(阶跃)误差系数 $K_p=\lim_{s\to0}G(s)H(s)$

稳态速度(斜坡)误差系数 $K_v=\lim_{s\to0}sG(s)H(s)$

稳态加速度(抛物线)误差系数 $K_a=\lim_{s\to0}s^2G(s)H(s)$

减小/消除稳态误差：提高型别 增大稳态误差系数 改变结构



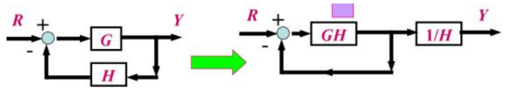
单位负反馈系统

$G(s)=\dfrac{K\beta(s)}{s^m\alpha(s)}$

系统型别	误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	阶跃输入 $R_0(t)$	斜坡输入 Rt	抛物线输入 $\frac{R_2}{2}t^2$
0	K_0	0	0	$\frac{R_0}{1+K_p}$	∞	∞
1	∞	K_1	0	0	$\frac{R_1}{K_v}$	∞
2	∞	∞	K_2	0	0	$\frac{R_2}{K_a}$

- m 型系统可以以零稳态误差跟踪具有 t^{m-1} 及更低次形式的输入
- m 型系统可以可以跟踪具有 t^m 形式的输入，但存在常数稳态误差
- m 型系统不能跟踪具有 t^{m+1} 及更高次形式的输入，因为稳态误差趋向于无穷值

• 非单位负反馈系统：转化为等价的单位负反馈系统



• 根轨迹：当闭环系统某一参数（如开环根轨迹增益）变化时，闭环极点在 S 平面上变化的轨迹

• 增加开环零点，拉左，稳定，过渡加快；加极点，拉右，不稳定，慢

• 判断一点是否在根轨迹上：相角条件。赋值条件求 K

• 根轨迹绘制方法：

开环传递函数（零极点形式）

$$G(s)H(s)=\frac{Z(s)}{E(s)}=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

1、分支数=max(w,n)，实轴对称、连续曲线

2、起于开环极点，终于开环零点

3、渐近线

4、实轴：右奇

$$\sigma_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{w}z_j}{n-w}\quad \gamma=\frac{(1+2k)180°}{n-w}\quad k\in\{0,1,\cdots,n-w-1\}$$

5、分离点分离角

6、出射角入射角

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{r-z_j}\quad \frac{(2h+1)180°}{l}$$

$r\in C$

其中 l 表示有 l 条根轨迹在该分离点分离.

7、虚轴交点

$$1+G(j\omega)H(j\omega)=0$$

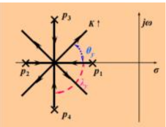
结论1：根轨迹离开 q 重开环极点 p_d 的出射角（起始角）

$$\phi_{p_d}=\frac{(1+2k)180°+\sum_{j=1}^{w}\angle(p_d-z_j)-\sum_{\substack{i=1\\p_i\ne p_d}}^{n}\angle(p_d-p_i)}{q}\quad k\in\{0,1,\cdots,q-1\}$$

8、根轨迹交叉点

W(s)的 y-1 阶导数=0

有 y 条根轨迹分支



结论2：根轨迹到达 q 重开环零点 z_d 的入射角（终止角）

$$\psi_{z_d}=\frac{(1+2k)180°+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_d-p_i)-\sum_{\substack{j=1\\z_j\ne z_d}}^{w}\angle(z_d-z_j)}{q}\quad k\in\{0,1,\cdots,q-1\}$$

$$\lambda_y=\pm\frac{360°}{y}\qquad \theta_y=\pm\frac{180°}{y}$$

9、系统根之和守恒（n-2>=w 时）

$$1+G(s)H(s)=0$$

等效变换

$$A\frac{P(s)}{Q(s)}=-1$$

A是除K外任意的其他变化参数
P(s)和Q(s)是与A无关的首一多项式

• 广义根轨迹

1、参数根轨迹

2、正反馈根轨迹/K<0 规则 3、4、6 改

$$\gamma=\frac{2k\pi}{n-w}$$ 、偶数、

出射角 $\phi_{p_k}=0°+\sum_{j=1}^{w}\angle(p_k-z_j)-\sum_{\substack{i=1\\i\ne k}}^{n}\angle(p_k-p_i)$

入射角 $\psi_{z_k}=0°+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_k-p_i)-\sum_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{w}\angle(z_k-z_j)$

• 含纯滞后环节系统的根轨迹

$$e^{-\tau s}=\frac{e^{-\frac{\tau}{2}s}}{e^{\frac{\tau}{2}s}}\approx\frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s}=-\frac{s-\frac{2}{\tau}}{s+\frac{2}{\tau}}$$

• 基于根轨迹的系统补偿器设计

1、积分器、微分控制、PID 控制器、超前/滞后控制器

$$K(s)=K\frac{s+z}{s+p}$$

控制器	瞬态响应	稳态（对阶跃响应的误差）
比例 (P)	加大反馈	通常非零
微分 (D)	增大阻尼和稳定性	通常非零
积分 (I)	降低稳定性	零稳态误差
PI	P，I结合	结合P, I
PD	P, D结合	结合P, D
PID	P, I, D结合	结合P, I, D
Lead	降低上升时间，加大阻尼	通常非零
Lag	降低稳定性	减小误差

• Bode 图：$\mathrm{Lm}G(j\omega)=20\lg|G(j\omega)|$，$\angle G(j\omega)$

• 典型环节

最小相位环节		非最小相位环节	
比例环节	$K(K>0)$	比例环节	$K(K<0)$
惯性环节	$\frac{1}{Ts+1}(T>0)$	惯性环节	$\frac{1}{-Ts+1}(T>0)$
一阶微分环节	$Ts+1(T>0)$	一阶微分环节	$-Ts+1(T>0)$
振荡环节	$\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}$	振荡环节	$\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}-\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}$
二阶微分环节	$\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1$	二阶微分环节	$\frac{s^2}{\omega_n^2}-\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1$
积分环节	$\frac{1}{s}$		
微分环节	s		

1、比例环节

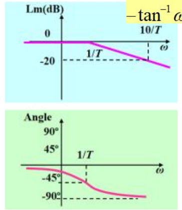
2、微分、积分环节

$\mathrm{Lm}(j\omega)^{-1}=20\lg|(j\omega)^{-1}|=-20\lg\omega$

$\mathrm{Lm}(j\omega)=20\lg|j\omega|=20\lg\omega$

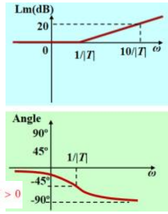
3、惯性环节：低频段 0dB,1/T 转折

$-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$　$-\tan^{-1}\omega T$



4、一阶微分环节

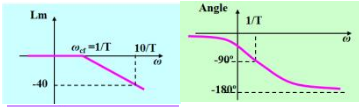
$20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$　$\tan^{-1}\omega T$



5、振荡环节

振荡环节 $\frac{1}{T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1}$　$1>\zeta>0, T>0$

$-20\lg\left[\left(1-\omega^2T^2\right)^2+\left(2\zeta\omega T\right)^2\right]^{1/2}$　$-40\lg\omega-40\lg T$

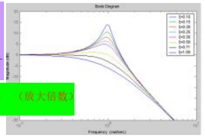


当 $0<\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$ 时

有 $\omega>0$ 的解，即

谐振频率 $\omega_r=\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{T}=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

谐振峰值 $M_r=|G(j\omega_n)|=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$（放大倍数）

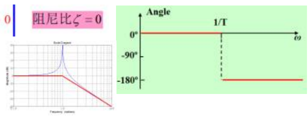


振荡环节 $\frac{1}{T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1}$　$-1<\zeta<0, T>0$

幅频同上，相频与上反号，幅相曲线与上共轭

特殊的振荡环节 $\frac{1}{T^2(j\omega)^2+1}$　$T>0$　阻尼比 $\zeta=0$

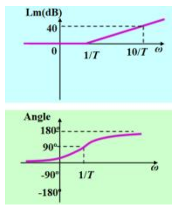
相频特性在转折频率处有跳变

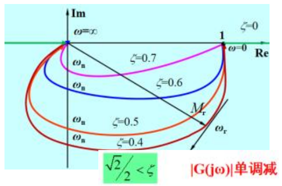


6、二阶微分环节

二阶微分环节 $T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

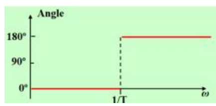
$1>\zeta>0, T>0$





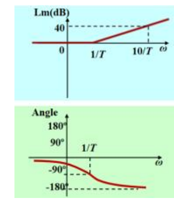
$\sqrt{2}/2<\zeta$　|G(jω)|单调减

特殊的二阶微分环节 $T^2(j\omega)^2+1$　$T>0$　阻尼比 $\zeta=0$



二阶微分环节 $T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

$-1<\zeta<0, T>0$



二阶微分环节 $T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

$1>\zeta>0, T>0$

$T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1=U(\omega)+jV(\omega)$

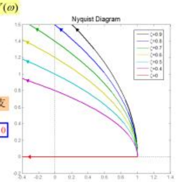
$U(\omega)=1-\omega^2T^2, V(\omega)=2\zeta\omega T$

$\frac{(V(\omega))^2}{4\zeta^2}=1-U(\omega)$

幅相曲线为抛物线（顶点位于(1,0)）的上半支

特殊的二阶微分环节 $T^2(j\omega)+1$，$T>0$

幅相曲线为自(1,0)出发的射线



7、纯滞后环节

纯滞后环节：$e^{-j\tau\omega}$

$|G(j\omega)|=1$　$\angle G(j\omega)=-\tau\omega(\text{radius})=-57.3\tau\omega(\text{degree})$

• 绘制低频段渐近特性线

方法一：在 $\omega<\omega_{\min}$ 范围内，任选一点 ω_0，计算 $Lm(\omega_0)=20\lg K-20m\lg\omega_0$

方法二：取频率为特定值 ω_0=1，则；$Lm(1)=20\lg K$

方法三：取 $\mathrm{Lm}(\omega_0)$=0，则有 $\omega_0=K^{\frac{1}{m}}\quad(m>0)$

对于环节：$\frac{1}{1+j2\zeta_1\frac{\omega}{\omega_1}+\left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)^2}$

$\omega=\omega_1$ 时，对数幅值

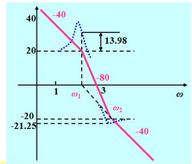
$20\lg\left|\frac{1}{j2\zeta_1}\right|=20\lg\frac{1}{2\zeta_1}=13.98$ → $\zeta_1=0.1$

对于环节：$1+j2\zeta_2\frac{\omega}{\omega_2}+\left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)^2$

峰值（放大倍数）为

$M_r=\frac{1}{2\zeta_2\sqrt{1-\zeta_2^2}}$ → $20\lg\frac{1}{2\zeta_2\sqrt{1-\zeta_2^2}}=-20-(-21.25)=1.25$

→ $\zeta_2=0.5$



传递函数

$$G(s)=\frac{28.4567\left[1+\frac{s}{5.3348}+\left(\frac{s}{5.3348}\right)^2\right]}{s^2\left[1+0.2\frac{s}{1.6870}+\left(\frac{s}{1.6870}\right)^2\right]}$$

14

•系统的开环幅相曲线绘制

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\cdots(1+j\omega T_w)}{(j\omega)^m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_u)}$$

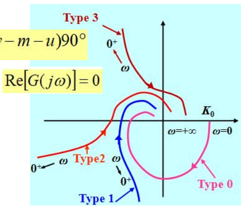
起点：型别 m，ω=0 相角=m×（-90 度）

终点：$\lim_{\omega\to+\infty}G(j\omega)=0\angle(w-m-u)90°$

渐近线取ω=0 的实部和虚部极限

$\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0$　$\mathrm{Re}[G(j\omega)]=0$

实轴和虚轴交点：



开环系统中含有特殊振荡环节(ζ=0)，当 ω 趋于 ω_n 时，｜$GH(j\omega_n)$｜趋于无穷大，而相频特性

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-K(T\omega+j)}{\omega(1+\omega^2T^2)(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})}$$

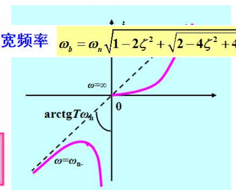
$\varphi(\omega_{n-})\approx-90°-tg^{-1}(T\omega_n)\in(-180°,-90°)$

$\omega_{n-}=\omega_n-\varepsilon,\ \varepsilon>0$　3rd 象限

$\varphi(\omega_{n+})\approx-90°-tg^{-1}(T\omega_n)-180°\in(-360°,-270°)$

$\omega_{n+}=\omega_n+\varepsilon,\ \varepsilon>0$　1st 象限

即 $\Phi(\omega)$ 在 $\omega=\omega_n$ 的附近，相角突变-180°
幅相曲线在 ω_n 处呈现不连续现象



带宽频率 $\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$

S 平面的右半平面有极点，非最小相位系统

设系统开环传递函数分子、分母多项式的阶次分别为 w 和 n，记除 K 外，分子多项式中最小相位环节的阶次和为 w_1，非最小相位环节的阶次和为 w_2，分母多项式中最小相位环节的阶次和为 n_1，非最小相位环节的阶次和为 n_2，则有

$w=w_1+w_2$

$n=n_1+n_2$

$$\phi(\infty)=\begin{cases}[(w_1-w_2)-(n_1-n_2)]\times90° & K>0\\ [(w_1-w_2)-(n_1-n_2)]\times90°-180° & K<0\end{cases}$$

3) 若开环系统存在特殊振荡环节，重数 l 为正整数，即开环传递函数具有下述形式

$$G(s)H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+1\right)^l}G_1(s)H_1(s)$$

$G_1(s)H_1(s)$ 不含 $\pm j\omega_n$ 的极点，当 ω 趋于 ω_n 时，｜$GH(j\omega)$｜趋于无穷，而

$\phi(\omega_{n-})\approx\phi_1(\omega_n)=\angle G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)$

$\phi(\omega_{n+})\approx\phi_1(\omega_n)-l\times180°$

即 $\Phi(\omega)$ 在 $\omega=\omega_n$ 的附近，相角突变 $-l\times180°$。

• Nyquist 稳定性判据　$Z_R=P_R-N$

当 $G(j\omega)H(j\omega)$ 穿越 $-1+j0$ 点，Nyquist稳定判据不能用。

半径仍然是无穷大，但当 S平面的 θ 从 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$ 时，$G(s)H(s)$ 的相位则顺时针从 $0^-\to0^+$ 变化 m 个半圆。

从 $G(s)H(s)$ 的极坐标图上判别其包围点（$-1+j0$）的圈数 N，再由已知的开环不稳定极点数（在右半平面）P_R，可求出闭环特征方程 $B(s)$ 在右半平面的零点——即闭环系统的极点——的个数 Z_R。

半径仍然是无穷大，但当 S平面的 θ 从 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$ 时，$G(s)H(s)$ 的相位则顺时针从 $0^-\to0^+$ 变化 m 个半圆。

• 相位裕度（45-60 度）和幅值裕度

$G(j\omega)$ 幅相曲线在幅值为1 [Lm$G(j\omega)$=0dB] 的点处的频率称为截止频率 ω_c。

Phase margin angle（相位裕度）

相位裕度等于180° 加上截止频率处的负相位，用 γ 来表示，

γ=180° $+\Phi$，其中 $\angle G(j\omega_c)=\Phi$ 是负值。

对于闭环稳定系统，如果系统的开环幅频特性再增大幅值裕度 h 倍，则系统将处于临界稳定状态。可以用频率点 ω_x 处的传递函数来表示，即 $|G(j\omega_x)|\cdot h=1$

在 $G(j\omega)$ 极坐标图上，频率点 ω_x 对应的幅值 $|G(j\omega_x)|=\frac{1}{h}$

在对数幅频曲线上，$\mathrm{Lm}h=-\mathrm{Lm}|G(j\omega_x)|$

非最小相位系统不能用相位裕度和幅值裕度来判断系统稳定性

• 补偿器设计

二阶系统

截止频率 ω_c 与阻尼比 ζ、自然频率 ω_n 的关系　相位裕度γ与阻尼比ζ的关系

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)=\left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}\quad \gamma=\mathrm{arctg}\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c}=\mathrm{arctg}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}\right)$$

$$\zeta\approx0.01\gamma$$

Z<=0.7

谐振峰值 $M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$，$\zeta\le0.707$ ⇨ $\sigma=e^{-\pi\sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}}\times100\%$　$M_r\ge1$

谐振频率 $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$，$\zeta\le0.707$

调节时间 $T_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}$ 或 $\omega_nT_s=\frac{7}{tg\gamma}$

高阶系统

谐振峰值 $M_r=\frac{1}{|\sin\gamma|}$

超调量 $\sigma=0.16+0.4(M_r-1),\quad 1\le M_r\le1.8$

调节时间 $T_s=\frac{K_0\pi}{\omega_c}$

$K_0=2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2,\quad 1\le M_r\le1.8$

• 用开环频率特性进行系统设计

（1）稳 相位裕度>=45 度，幅值裕度>=6dB

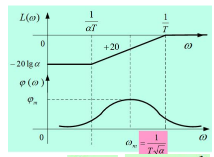
（2）快 相位裕度在 45 度到 60 度之间，尽可能大的开环截止频率 ω c

（3）准 开环幅频起始斜率为-20 或-40 ，低频段应有较高幅值

（4）抗干扰：开环高频段应有尽可能大的斜率。

• 串联超前　　• 串联滞后

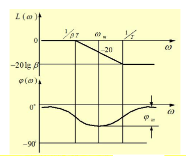
重新找到-10lga 作为新的 ω m　找到满足裕度的角（+5~12）得到 wc,



$\varphi_m=\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$

$\alpha=(1+sin\phi)/(1-sin\phi)$

算 20lgβ和 wc=(5~10)1/T



$\beta=\frac{1+\sin(-\varphi_m)}{1-\sin(-\varphi_m)}$　$\varphi_m=\arcsin\frac{1-\beta}{1+\beta}$