2 空间描述和变换

• **向量**：$r_{O_AD}=(\hat{X}_A\quad \hat{Y}_A\quad \hat{Z}_A)(d_x\ d_y\ d_z)^T$，简洁表达为 $^AD=(d_x\ d_y\ d_z)^T$
• **向量的内积（数量积）**：$^AP\cdot {}^AQ={}^AP^{\mathrm T}\,{}^AQ=p_xq_x+p_yq_y+p_zq_z$

• **外积（向量积）**：$P\times Q=\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{bmatrix}^\wedge\begin{bmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-p_z&p_y\\p_z&0&-p_x\\-p_y&p_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}i&j&k\\p_x&p_y&p_z\\q_x&q_y&q_z\end{bmatrix}$

性质：$a\times b=-(b\times a)$；$a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)=c\cdot(a\times b)$；
$a\times(b\times c)=b(a\cdot c)-c(a\cdot b)$

• **旋转矩阵**：全体旋转矩阵的集合（6 个约束）$SO(3)=$

$$\left\{\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\r_{21}&r_{22}&r_{23}\\r_{31}&r_{32}&r_{33}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}\middle|\begin{pmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{pmatrix}^{\mathrm T}\begin{pmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{pmatrix}=1,\begin{pmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{pmatrix}^{\mathrm T}\begin{pmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{pmatrix}=1,\begin{pmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{pmatrix}^{\mathrm T}\begin{pmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{pmatrix}=0,\begin{pmatrix}r_{11}\\r_{21}\\r_{31}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}r_{12}\\r_{22}\\r_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_{13}\\r_{23}\\r_{33}\end{pmatrix}\right\}$$

对于任何$R\in SO(3),P\in\mathbb{R}^3,Q\in\mathbb{R}^3$，有$R(P\times Q)=RP\times RQ$
$^A_BR=[^AX_B\quad ^AY_B\quad ^AZ_B]$，$[\hat{X}_B\quad \hat{Y}_B\quad \hat{Z}_B]=[\hat{X}_A\quad \hat{Y}_A\quad \hat{Z}_A]^A_BR$
性质：$R^{-1}=R^T$，$^B_AR={}^A_BR^{-1}={}^A_BR^T$，$^BO_A=-^B_AR\,^AO_B$

• **齐次变换矩阵**：$^B_AT=\begin{bmatrix}^B_AR&^BO_A\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}^A_BR^T&-^A_BR^T\,^AO_B\\0&1\end{bmatrix}={}^A_BT^{-1}$

点在两参考系中的描述：$^AP={}^AO_B+{}^A_BR\,^BP$，$\begin{bmatrix}^AP\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}^A_BR&^AO_B\\0\,0\,0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}^BP\\1\end{bmatrix}={}^A_BT\begin{bmatrix}^BP\\1\end{bmatrix}$

链乘法则：$^1_nR={}^1_2R\,^2_3R\cdots{}^{n-1}_nR$，$^1_nT={}^1_2T\,^2_3T\cdots{}^{n-1}_nT$

• **欧拉角（右乘联体）**：$R_x=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c&-s\\0&s&c\end{bmatrix},R_y=\begin{bmatrix}c&0&s\\0&1&0\\-s&0&c\end{bmatrix},R_z=\begin{bmatrix}c&-s&0\\s&c&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

共有 12 种表示法，6 种对称型+6 种非对称型，常用的两种如下

$$R_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)=\begin{bmatrix}c_\alpha c_\beta&c_\alpha s_\beta s_\gamma-s_\alpha c_\gamma&c_\alpha s_\beta c_\gamma+s_\alpha s_\gamma\\s_\alpha c_\beta&s_\alpha s_\beta s_\gamma+c_\alpha c_\gamma&s_\alpha s_\beta c_\gamma-c_\alpha s_\gamma\\-s_\beta&c_\beta s_\gamma&c_\beta c_\gamma\end{bmatrix}$$

$$R_{z'y'z'}(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)=\begin{bmatrix}c_\alpha c_\beta c_\gamma-s_\alpha s_\gamma&-c_\alpha c_\beta s_\gamma-s_\alpha c_\gamma&c_\alpha s_\beta\\s_\alpha c_\beta c_\gamma+c_\alpha s_\gamma&-s_\alpha c_\beta s_\gamma+c_\alpha c_\gamma&s_\alpha s_\beta\\-s_\beta c_\gamma&s_\beta s_\gamma&c_\beta\end{bmatrix}$$

• **固定角（左乘基）**：同 12 种，$R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha)=R_{z'y'x'}(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$
• **旋转矩阵→zyx 欧拉角或 xyz 固定角**：
规定 z-y-x 欧拉角或 x-y-z 固定角的$(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times(-\pi,\pi]$

$\beta=arctan2(-r_{31},\sqrt{r_{32}^2+r_{33}^2})$（$arctan2(y,x)=\arctan(y/x)$）		
$cos\beta>0$	$\beta=\pi/2$	$\beta=-\pi/2$
$\alpha=arctan2(r_{21},r_{11})$ $\gamma=arctan2(r_{32},r_{33})$	$\alpha-\gamma=arctan2(r_{23},r_{22})$	$\alpha+\gamma=arctan2(-r_{23},r_{22})$

非对称型欧拉角或固定角的β可限$[-\pi/2,\pi/2]$，对称型的β可限$[0,\pi]$
【例】$R_z(\pm\pi+\alpha)R_y(\pm\pi-\beta)R_x(\pm\pi+\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$
$R_z(\pm\pi+\alpha)R_y(-\beta)R_z(\pm\pi+\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$

• **等效轴角描述**：$\begin{pmatrix}k_x^2v\theta+c\theta&k_xk_yv\theta-k_zs\theta&k_xk_zv\theta+k_ys\theta\\k_xk_yv\theta+k_zs\theta&k_y^2v\theta+c\theta&k_yk_zv\theta-k_xs\theta\\k_xk_zv\theta-k_ys\theta&k_yk_zv\theta+k_xs\theta&k_z^2v\theta+c\theta\end{pmatrix}=R_K(\theta)$

$R_K(\theta)=R_{-K}(-\theta)$，所以规定$\theta\in[0,\pi]$，$\theta=\arccos((r_{11}+r_{22}+r_{33}-1)/2)$

$\theta\in(0,\pi)$	$\theta=\pi$	$\theta=0$
$\begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix}r_{32}-r_{23}\\r_{13}-r_{31}\\r_{21}-r_{12}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\sqrt{(r_{11}+1)/2}\\r_{12}/\sqrt{2(r_{11}+1)}\\r_{13}/\sqrt{2(r_{11}+1)}\end{pmatrix}$	任意单位向量

$\{B\}$绕 ^AK 转 θ：$^A_BR(1)=R_K(\theta)^A_BR(0)$　$\{B\}$绕 ^BK 转 θ：$^A_BR(1)={}^A_BR(0)R_K(\theta)$
• 右乘T是先平移后旋转，左乘T是先旋转后平移，左乘旋转可能会产生平移
• **四元数**：$i^2=j^2=k^2=ijk=-1,ij=k,ji=-k,jk=i,kj=-i,ki=j,ik=-j$
乘法：$(\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3)(\xi+\mathrm{i}\delta_1+\mathrm{j}\delta_2+\mathrm{k}\delta_3)=(\eta\xi-\varepsilon_1\delta_1-\varepsilon_2\delta_2-\varepsilon_3\delta_3)+\mathrm{i}(\eta\delta_1+\varepsilon_1\xi+\varepsilon_2\delta_3-\varepsilon_3\delta_2)+\mathrm{j}(\eta\delta_2-\varepsilon_1\delta_3+\varepsilon_2\xi+\varepsilon_3\delta_1)+\mathrm{k}(\eta\delta_3+\varepsilon_1\delta_2-\varepsilon_2\delta_1+\varepsilon_3\xi)$　如果相乘等于$\zeta+\mathrm{i}\rho_1+\mathrm{j}\rho_2+\mathrm{k}\rho_3$，可证得$R_\varepsilon(\eta)R_\delta(\xi)=R_\rho(\zeta)$
共轭：$(\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3)^*=\eta-\mathrm{i}\varepsilon_1-\mathrm{j}\varepsilon_2-\mathrm{k}\varepsilon_3$　$^AO_B=0$时$^AP={}^A_BR\,^BP$，可写为 $\mathrm{ix_2+jy_2+kz_2}=(\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_1)(\mathrm{ix_1+jy_1+kz_1})(\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_1)^*$
模长：$|\eta+\mathrm{i}\varepsilon_1+\mathrm{j}\varepsilon_2+\mathrm{k}\varepsilon_3|=\sqrt{\eta^2+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}$，为 1 即为单位四元数
单位四元数的乘积仍旧是单位四元数；单位四元数的逆是其共轭

• **单位四元数↔姿态**：$R_\varepsilon(\eta)=\begin{pmatrix}2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1&2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3)&2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2)\\2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3)&2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1&2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1)\\2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2)&2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1)&2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1\end{pmatrix}$

当$r_{11}+r_{22}+r_{33}>-1$时，$\begin{pmatrix}\eta\\\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1}\\\mathrm{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1}\end{pmatrix}$

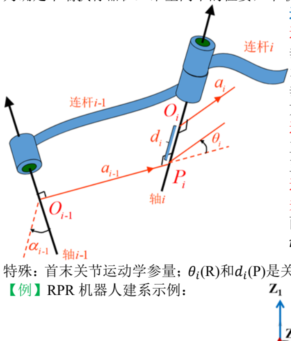
• **欧拉参数**$(\eta\quad\varepsilon_1\quad\varepsilon_2\quad\varepsilon_3)^T$：等效轴角→：$\eta=\cos\frac{\theta}{2},\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_x\sin\frac{\theta}{2}\\k_y\sin\frac{\theta}{2}\\k_x\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$

格拉斯曼积：$\begin{bmatrix}\eta\\\varepsilon\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\xi\\\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta\xi-\varepsilon^{\mathrm T}\delta\\\eta\delta+\xi\varepsilon+\varepsilon\times\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta&-\varepsilon_1&-\varepsilon_2&-\varepsilon_3\\\varepsilon_1&\eta&-\varepsilon_3&\varepsilon_2\\\varepsilon_2&\varepsilon_3&\eta&-\varepsilon_1\\\varepsilon_3&-\varepsilon_2&\varepsilon_1&\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\xi\\\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\end{bmatrix}$

如果是单位四元数则$A^TA=I$；H 中的乘法相当于 R⁴ 中的 Grassmann 积；U 中任意两个向量的 Grassmann 积仍是 U 中的向量；U 中的 Grassmann 积相当于 SO(3)中的乘法；欧拉参数可用其在 U 中直接描述 3 维姿态和坐标系旋转

3 机器人正运动学（关节空间 to 笛卡尔空间）

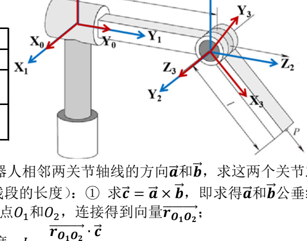
• **串联机构**：多个连杆通过关节以**串联**形式连成**首尾不封闭**的结构
固定基座为连杆 0；连杆 N-1 与连杆 N 通过关节 N 连接
为确定末端执行器在三维空间中的位姿，串联机器人至少需要 6 个关节



运动学参量：
连杆长度a_{i-1}：轴$i-1$和轴i的一条公垂线段$rO_{i-1}P_i$（几何连杆）的长度。当$a_{i-1}=0$时，在与轴$i-1$和轴i同时垂直的方向中选一个作为$rO_{i-1}P_i$的方向
连杆转角α_{i-1}：过轴$i-1$作一平面垂直于$rO_{i-1}P_i$，轴$i-1$绕$rO_{i-1}P_i$旋转至轴i投影
连杆偏距d_i：P_i到O_i的有向距离
关节角θ_i：过几何连杆$rO_{i-1}P_i$作一平面垂直于轴i，$rO_{i-1}P_i$绕轴i旋转至rO_iP_{i+1}投影

特殊：首末关节运动学参量；θ_i(R)和d_i(P)是关节变量，其他是连杆参数(固定不变)
【例】RPR 机器人建系示例：

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$-\frac{\pi}{2}$	0	d_2	$-\frac{\pi}{2}$
3	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	θ_3



公垂线段长度的求法：已知机器人相邻两关节轴线的方向$\vec{a}$和$\vec{b}$，求这两个关节之间连杆的长度L（即$\vec{a}$和$\vec{b}$公垂线段的长度）：① 求$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，即求得$\vec{a}$和$\vec{b}$公垂线所在方向；② 两轴线上各取一点$O_1$和$O_2$，连接得到向量$\overrightarrow{r_{O_1O_2}}$；
③ 求$\overrightarrow{r_{O_1O_2}}$在$\vec{c}$方向上的投影长度：$L=\frac{\overrightarrow{r_{O_1O_2}}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}$
• **相邻连杆连体坐标系的变换**：（非标准 D-H 方法的运动学参量表不唯一）
$\{i-1\}$变换到$\{i\}$：沿$\hat{X}_i$移$a_{i-1}\to$绕$\hat{X}_i$转$\alpha_{i-1}\to$沿$\hat{Z}_i$移$d_i\to$绕$\hat{Z}_i$转θ_i

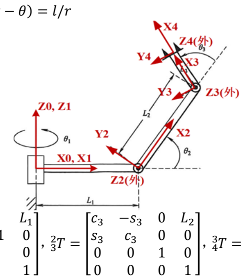
$$^{i-1}_iT(\Phi_i)=\begin{pmatrix}1&0&0&a_{i-1}\\0&c\alpha_{i-1}&-s\alpha_{i-1}&0\\0&s\alpha_{i-1}&c\alpha_{i-1}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\theta_i&-s\theta_i&0&0\\s\theta_i&c\theta_i&0&0\\0&0&1&d_i\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_i&-\sin\theta_i&0&a_{i-1}\\\sin\theta_i\cos\alpha_{i-1}&\cos\theta_i\cos\alpha_{i-1}&-\sin\alpha_{i-1}&-\sin\alpha_{i-1}d_i\\\sin\theta_i\sin\alpha_{i-1}&\cos\theta_i\sin\alpha_{i-1}&\cos\alpha_{i-1}&\cos\alpha_{i-1}d_i\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

两系平行时，可以用和角公式处理

4 机器人逆运动学（笛卡尔空间 to 关节空间）

• **工作空间**：灵巧工作空间（能以任何姿态）；可达工作空间（能以至少一姿态）
灵巧是可达的子集；操作臂自由度少于 6 时，三维空间内不能达到全部位姿；
若目标在灵巧内，则 IK 解存在；若不在可达内，则 IK 解不存在
• **IK 求解**：封闭解(解析解)，含代数解和几何解；数值解是迭代求解，速度较慢
6 自由度操作臂存在封闭解的特性：存在几个正交关节轴或有多个α_i为0或±90°
6 旋转关节操作臂存在封闭解的充分条件：相邻的三个关节轴线相交于一点
• **三轴相交的 PIEPER 解法**：PIEPER 研究了 3 个相邻的轴交于一点的 6 自由度操作臂（包括 3 个相邻的轴平行的情况）。PIEPER 的方法主要针对 6 个关节均为旋转关节的操作臂，且后面 3 个轴正交。
求解$k_1c_\theta+k_2s_\theta=l$的方法：令$r=\sqrt{a^2+b^2},\gamma=\arctan2(k_2,k_1)$，有$k_1=r\cos\gamma,k_2=r\sin\gamma$，故$c_\gamma c_\theta+s_\gamma s_\theta=\cos(\gamma-\theta)=l/r$
【例】逆运动学求解（立体 RRR）

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$\frac{\pi}{2}$	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3
4	0	L_3	0	0



$$^0_1T=\begin{bmatrix}c_1&-s_1&0&0\\s_1&c_1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ ^1_2T=\begin{bmatrix}c_2&-s_2&0&L_1\\0&0&-1&0\\s_2&c_2&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ ^2_3T=\begin{bmatrix}c_3&-s_3&0&L_2\\s_3&c_3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ ^3_4T=\begin{bmatrix}1&0&0&L_3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$
$^1_4T={}^1_2T\,^2_3T\,^3_4T$；$^0_4T={}^0_1T\,^1_4T\Rightarrow(^0_1T)^{-1}\,^0_4T={}^1_4T\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}c_1&s_1&0&0\\-s_1&c_1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}&p_x\\r_{21}&r_{22}&r_{23}&p_y\\r_{31}&r_{32}&r_{33}&p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{23}&-s_{23}&0&L_2c_2+L_1+L_3c_{23}\\0&0&-1&0\\s_{23}&c_{23}&0&L_2s_2+L_3s_{23}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

等式两边(2,4)元素相等⇒$-s_1p_x+c_1p_y=0\Rightarrow\theta_1=arctan2(p_y,p_x)$
(1,4),(3,4)元素相等⇒$\begin{cases}c_1p_x+s_1p_y=L_1+L_2c_2+L_3c_{23}\\p_z=L_2s_2+L_3s_{23}\end{cases}\Rightarrow(c_1p_x+s_1p_y-L_1)^2+p_z^2=(L_2c_2+L_3c_{23})^2+(L_2s_2+L_3s_{23})^2=L_2^2+L_3^2+2L_2L_3c_3\Rightarrow c_3=\left[(c_1p_x+s_1p_y-L_1)^2+p_z^2-L_2^2-L_3^2\right]/(2L_2L_3)$，$s_3=\pm\sqrt{1-c_3^2}$，$\theta_3=arctan2(s_3,c_3)$
$\theta_2+\theta_3=arctan2(s_{23},c_{23})=arctan2(r_{31},r_{32})\Rightarrow\theta_2=arctan2(r_{31},r_{32})-\theta_3$

5 微分运动学与静力学

• $^BV_Q=\frac{d}{dt}{}^BQ$，$^A(^BV_Q)={}^A_BR\,^BV_Q\neq{}^AV_Q$
$v_C={}^UV_{CORG}$，$^Av_C={}^A_URv_C={}^A_UR\,^UV_{CORG}\neq{}^AV_{CORG}$，$^Cv_C={}^C_UR\,^UV_{CORG}$；$\omega_C$同理
• **刚体纯平移时线速度变化**：坐标系间仅有线速度，$^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BR\,^BV_Q$
• R为正交阵$(RR^T=I_n)\Rightarrow$ 求导得$S+S^T=0_n$，其中$S=\dot{R}R^T$，$^A_BSP={}^A\Omega_B\times P$
• **刚体一般运动时的线速度变化**：$^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BR\,^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,^BQ$

• $\boldsymbol{P}^\wedge=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix}^\wedge=\begin{pmatrix}0&-p_z&p_y\\p_z&0&-p_x\\-p_y&p_x&0\end{pmatrix}$　$(P^\wedge)^\vee=P$　$P\times Q=P^\wedge Q$　$(P+Q)^\wedge=P^\wedge+Q^\wedge$

• **运动坐标系之间的角速度向量关系**：$^A\Omega_C={}^A\Omega_B+{}^A_BR\,^B\Omega_C$
• **连杆间的速度传递**：

关节$i+1$	转动型	平动型
$^{i+1}\omega_{i+1}$	$^{i+1}_iR\,^i\omega_i+\dot{\theta}_{i+1}\,^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$	$^{i+1}_iR\,^i\omega_i$
$^{i+1}v_{i+1}$	$^{i+1}_iR(^iv_i+{}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})$	$^{i+1}_iR(^iv_i+{}^i\omega_i\times{}^iP_{i+1})+\dot{d}_{i+1}\,^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$

• **连杆间的静力传递**：f_i =连杆 i-1 施加在连杆 i 上的力，n_i =连杆 i-1 施加在连杆 i 上的力矩，$^i\boldsymbol{f}_i={}^i_{i+1}\boldsymbol{R}\,^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1}$，$^i\boldsymbol{n}_i={}^i_{i+1}\boldsymbol{R}\,^{i+1}\boldsymbol{n}_{i+1}+{}^i\boldsymbol{P}_{i+1}\times{}^i\boldsymbol{f}_i$
对旋转关节 i，由旋转驱动器提供主动力矩$\boldsymbol{\tau}_i\,^i\hat{\boldsymbol{Z}}_i$，其中$\boldsymbol{\tau}_i={}^i\boldsymbol{n}_i^T\,^i\hat{\boldsymbol{Z}}_i$；对移动关节 i，由直线驱动器提供主动力$\boldsymbol{\tau}_i\,^i\hat{\boldsymbol{Z}}_i$，其中$\boldsymbol{\tau}_i={}^i\boldsymbol{f}_i^T\,^i\hat{\boldsymbol{Z}}_i$
• **几何雅可比矩阵**：关节速度→末端速度，$\boldsymbol{\nu}=(\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{\omega})^T=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Phi})\dot{\boldsymbol{\Phi}}$
1) 向外迭代法：$^0\omega_0=0,{}^0v_0=0\longrightarrow{}^N\omega_N,{}^Nv_N\longrightarrow v_N={}^0_NR\,^Nv_N,\omega_N={}^0_NR\,^N\omega_N$
2) 向量积构造法：所有关节均为转动型时（否则参考下表），

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_N\\\boldsymbol{\omega}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Z}}_1\times(\boldsymbol{O}_N-\boldsymbol{O}_1)&\hat{\boldsymbol{Z}}_2\times(\boldsymbol{O}_N-\boldsymbol{O}_2)&\cdots&\hat{\boldsymbol{Z}}_{N-1}\times(\boldsymbol{O}_N-\boldsymbol{O}_{N-1})&\boldsymbol{0}\\\hat{\boldsymbol{Z}}_1&\hat{\boldsymbol{Z}}_2&\cdots&\hat{\boldsymbol{Z}}_{N-1}&\hat{\boldsymbol{Z}}_N\end{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

关节i	转动型	平动型
$v_N^{(i)}$	$\dot{\theta}_i\hat{Z}_i\times(O_N-O_i)$	$\dot{d}_i\hat{Z}_i$
$\omega_N^{(i)}$	$\dot{\theta}_i\hat{Z}_i$	0

【例】对第 4 章例中的 RRR 机器人，用向量积构造法求雅可比矩阵。
$\hat{Z}_1={}^0_1R\,^1\hat{Z}_1=(0\,0\,1)^T$，$\hat{Z}_2={}^0_2R\,^2\hat{Z}_2=(s_1\ -c_1\ 1)^T$，$\hat{Z}_3={}^0_3R\,^3\hat{Z}_3=(s_1\ -c_1\ 1)^T$，$\hat{Z}_4={}^0_4R\,^4\hat{Z}_4=(s_1\ -c_1\ 1)^T$；$O_1=(0\,0\,0)^T$，$O_2={}^0O_1+{}^0_1R\,^1O_2=(L_1c_1\ L_1s_1\ 0)^T$，

$O_3={}^0O_2+{}^0_2R\,^2O_3=\begin{bmatrix}L_1c_1+L_2c_1c_2\\L_1s_1+L_2s_1c_2\\L_2s_2\end{bmatrix}$，$O_4={}^0O_3+{}^0_3R\,^3O_4=\begin{bmatrix}L_1c_1+L_2c_1c_2+L_3c_1c_{23}\\L_1s_1+L_2s_1c_2+L_3s_1c_{23}\\L_2s_2+L_3s_{23}\end{bmatrix}$

计算$\hat{Z}_1\times(O_4-O_1)$，$\hat{Z}_2\times(O_4-O_2)$，$\hat{Z}_3\times(O_4-O_3)\Rightarrow$
$\begin{bmatrix}v_4\\\omega_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{Z}_1\times(O_4-O_1)&\hat{Z}_2\times(O_4-O_2)&\hat{Z}_3\times(O_4-O_3)&0\\\hat{Z}_1&\hat{Z}_2&\hat{Z}_3&\hat{Z}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\\dot{\theta}_4\end{bmatrix}$（本题$\dot{\theta}_4=0$）
3) 向内迭代法：$^Nf_N=(f_x\quad f_y\quad f_z)^T$，$^Nn_N=(0\quad 0\quad 0)^T\longrightarrow{}^if_i$，$^in_i\longrightarrow\boldsymbol{\tau}=(\boldsymbol{\tau}_1\quad\boldsymbol{\tau}_2\quad\cdots)^T=\boldsymbol{J}_u^T(\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{f}_x\quad\boldsymbol{f}_y\quad\boldsymbol{f}_z)^T$，其中$\boldsymbol{J}_u(\boldsymbol{\Phi})$为速度雅可比，有$^N\boldsymbol{v}_N=(\boldsymbol{u}_x\quad\boldsymbol{u}_y\quad\boldsymbol{u}_z)^T=\boldsymbol{J}_u(\boldsymbol{\Phi})\dot{\boldsymbol{\Phi}}\longrightarrow\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Phi})$的前 3 行$\boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{\Phi})={}^0_N\boldsymbol{R}\boldsymbol{J}_u(\boldsymbol{\Phi})$
4) 对运动学方程微分：$^0\boldsymbol{v}_N={}^0\dot{\boldsymbol{P}}_N=\boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{\Phi})\dot{\boldsymbol{\Phi}}$，其中$\boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{\Phi})$为$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Phi})$的前 3 行
5) $R\longrightarrow\omega$：$\dot{R}R^T=\omega^\wedge\rightarrow\begin{cases}\omega_x=\dot{r}_{31}r_{21}+\dot{r}_{32}r_{22}+\dot{r}_{33}r_{23}\\\omega_y=\dot{r}_{11}r_{31}+\dot{r}_{12}r_{32}+\dot{r}_{13}r_{33}\\\omega_z=\dot{r}_{21}r_{11}+\dot{r}_{22}r_{12}+\dot{r}_{23}r_{13}\end{cases}\longrightarrow\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Phi})$的后 3 行$\boldsymbol{J}_O(\boldsymbol{\Phi})$

• **$\{i\}$中笛卡尔速度**：$\begin{pmatrix}^i\boldsymbol{v}_N\\^i\boldsymbol{\omega}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}^i_0\boldsymbol{R}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&^i_0\boldsymbol{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_N\\\boldsymbol{\omega}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}^i_0\boldsymbol{R}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&^i_0\boldsymbol{R}\end{pmatrix}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}={}^i\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta})\dot{\boldsymbol{\Theta}}$

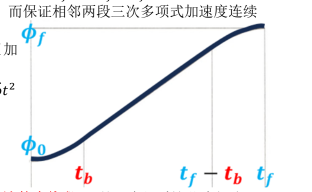
• **奇异性**：各关节转速唯一解$\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{v}_N$，使$\boldsymbol{J}$不可逆的$\boldsymbol{\Phi}$对应的位姿称为奇异位形。所有操作臂在工作空间边界均存在奇异位形，大多数在工作空间也有奇异位形（内点奇异性通常是由于两个或以上的关节轴线共线引起的）。
当处于奇异位形时，操作臂末端在笛卡尔空间中会失去一或多个自由度，此时无论选择多大的关节速度，末端在笛卡尔空间的某个方向上都不能运动。

• **分析雅可比矩阵**：$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{P}}\\\dot{\boldsymbol{\Psi}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{\Phi})\dot{\boldsymbol{\Phi}}$，其中$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Phi})$为基座坐标系原点到末端执行器坐标系原点的一般向量，$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi})$为末端执行器坐标系相对于基座坐标系姿态的最小表示（例如固定角表示或欧拉角表示）。
• **欧拉角速率→刚体角速度**：以 z-y-x 欧拉角为例，$\omega=(\omega_x\quad\omega_y\quad\omega_z)^T=\dot{\alpha}^Uz'+\dot{\beta}^Uy'+\dot{\gamma}^Ux'=\dot{\alpha}\hat{Z}+\dot{\beta}R_z(\alpha)\hat{Y}+\dot{\gamma}R_z(\alpha)R_y(\beta)\hat{X}=B(\Psi)\dot{\Psi}$
• **J_a和J的关系**：$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Phi})\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\\\boldsymbol{\omega}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&0\\0&\boldsymbol{B}_a(\boldsymbol{\Psi})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{P}}\\\dot{\boldsymbol{\Psi}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&0\\0&\boldsymbol{B}_a(\boldsymbol{\Psi})\end{pmatrix}\boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{\Phi})\dot{\boldsymbol{\Phi}}\Rightarrow$
$\boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{\Phi})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&0\\0&\boldsymbol{B}_a^{-1}(\boldsymbol{\Psi})\end{pmatrix}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{T}_a\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Phi})$，要求$\boldsymbol{B}_a(\boldsymbol{\Psi})$可逆
• **力偶**：两个大小相等、方向相反且不共线的平行力组成的力系。力偶作用只改变刚体转动状态，其转动效应可用力偶矩度量，$(f,-f)$对点O的矩为$r_{OA}\times f+r_{OB}\times(-f)=r_{BA}\times f$，对刚体上任何点$r_{BA}\times f$不变，可在刚体上任意转移。
$r_{BA}\times f$ =作用于A的f对B的矩；作用于A的力 ↔ 作用于B点的力 附加$r_{BA}\times f$

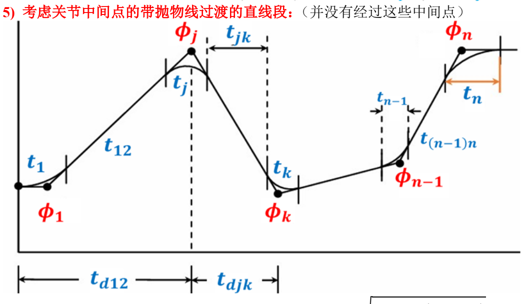
6 机器人轨迹规划

• **路径与轨迹**：**路径**是位姿的一个特定序列，纯几何描述，与时间无关；**轨迹**与时间有关，包含速度和加速度信息
• **关节空间规划方法**：工具坐标系相对于工作台坐标系的期望位姿→路径点；每个路径点通过 IK→一组期望的关节变量→一系列光滑函数→各个关节同步驱动

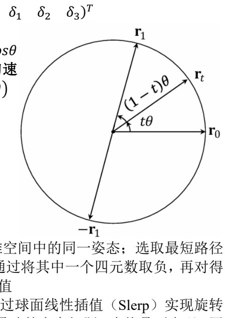
1) 三次多项式：（可指定角度、速度）$\phi(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，$a_0=\phi_0,a_1=\dot{\phi}_0,a_2=-[3\phi_0-3\phi_f+(2\dot{\phi}_0+\dot{\phi}_f)t_f]/t_f^2,a_3=[2\phi_0-2\phi_f+(\dot{\phi}_0+\dot{\phi}_f)t_f]/t_f^3$
2) 五次多项式：（加速度也可指定）$\phi(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5$
3) 考虑关节中间点的三次多项式轨迹：根据工具坐标系的笛卡尔期望速度确定中间点的期望关节速度：通常可利用在中间点上计算出的操作臂雅克比逆矩阵，把中间点的笛卡尔期望速度“映射”为期望的关节速度。
没给出笛卡尔期望速度时确定中间点的期望关节速度方法 1：连直线算斜率$\dot{\phi}_{ij},\dot{\phi}_{jk}$，若$\dot{\phi}_{ij}$与$\dot{\phi}_{jk}$异号则取$\dot{\phi}_j=0$，若同号则取$\dot{\phi}_j=(\dot{\phi}_{ij}+\dot{\phi}_{jk})/2$
方法 2：不直接指定中间点速度，而保证相邻两段三次多项式加速度连续
4) 带抛物线过渡的直线段：
中间段为直线，过渡段为抛物线（加速度恒定），起点终点速度为零
过渡段方程$\phi(t)=a_0+a_1t+\frac{1}{2}\ddot{\phi}t^2$
$t_b=\frac{t_f}{2}-\frac{\sqrt{\ddot{\phi}^2t_f^2-4\ddot{\phi}(\phi_f-\phi_0)}}{2\ddot{\phi}}$
有解条件：$\ddot{\phi}\geq4(\phi_f-\phi_0)/t_f^2$



5) 考虑关节中间点的带抛物线过渡的直线段：（并没有经过这些中间点）



①第一个路径段：$\ddot{\phi}_1=SGN(\phi_2-\phi_1)|\ddot{\phi}_1|$，$t_1=t_{d12}-\sqrt{t_{d12}^2-\frac{2(\phi_2-\phi_1)}{\ddot{\phi}_1}}$，
$\dot{\phi}_{12}=\frac{\phi_2-\phi_1}{t_{d12}-\frac{1}{2}t_1}$，$t_{12}=t_{d12}-t_1-\frac{1}{2}t_2$；②中间：$\ddot{\phi}_j=SGN(\dot{\phi}_{jk}-\dot{\phi}_{ij})|\ddot{\phi}_j|$，
$t_j=\frac{\dot{\phi}_{jk}-\dot{\phi}_{ij}}{\ddot{\phi}_j}$，$\dot{\phi}_{jk}=\frac{\phi_k-\phi_j}{t_{djk}}$，$t_{jk}=t_{djk}-\frac{t_j+t_k}{2}$；③最后一个路径段：
$\ddot{\phi}_n=SGN(\phi_{n-1}-\phi_n)|\ddot{\phi}_n|$，$t_n=t_{d(n-1)n}-\sqrt{t_{d(n-1)n}^2-\frac{2(\phi_{n-1}-\phi_n)}{\ddot{\phi}_n}}$，
$\dot{\phi}_{(n-1)n}=\frac{\phi_n-\phi_{n-1}}{t_{d(n-1)n}-\frac{1}{2}t_n}$，$t_{(n-1)n}=t_{d(n-1)n}-t_n-\frac{1}{2}t_{n-1}$
伪关节中间点法：若希望操作臂精确经过某中间点，将该点替换为位于其两侧的两个伪中间点，该点在连接两个伪中间点的直线段上
【例】指定关节路径点：30，45，55，30（单位：度）。各路径段的持续时间分别为 3，1，2（单位：秒）。过渡段加速度幅值为$50°/s^2$。
①过渡段 1、直线段 12：过渡段加速度$\ddot{\phi}_1=SGN(45-30)\times50=50°/s^2$，过渡段持续时间$t_1=3-\sqrt{9-2\times(45-30)/50}=0.101s$，直线段速度$\dot{\phi}_{12}=(45-30)/(3-0.5\times0.101)=5.09°/s$，直线段时间间隔$t_{12}=3-0.101-0.5t_2=2.8499s$（$t_2$来源于下面计算）
②过渡段 2、直线段 23、过渡段 3：$\dot{\phi}_{23}=(55-45)/1=10°/s$，$\ddot{\phi}_2=SGN(10-5.09)\times50=50°/s^2,t_2=(10-5.09)/50=0.0982s,\ddot{\phi}_3=SGN(\dot{\phi}_{34}-10)\times50=-50°/s^2$，$t_3=(\dot{\phi}_{34}-10)/(-50)=0.468s$，$t_{23}=1-0.5\times0.0982-0.5\times0.468=0.7169s$
③直线段 34、过渡段 4：$\ddot{\phi}_4=SGN(30-55)\times50=-50°/s^2$，$t_4=2-\sqrt{4-2\times(30-55)/(-50)}=0.268s$，$\dot{\phi}_{34}=(30-55)/(2-0.5\times0.268)=-13.398°/s$，$t_{34}=2-0.268-0.5\times0.468=1.498s$
• **笛卡儿空间轨迹规划**：**1) 笛卡儿直线运动**：末端位置轨迹$P(t)$可运用多项式或带抛物线过渡直线段的插值方法获得；$R(t)$不能直接用这种方法插值，解决方法是用等效轴角表示姿态$K=[k_x\,k_y\,k_z]^T=\theta[\hat{k}_x\,\hat{k}_y\,\hat{k}_z]^T$，对这三个数运用前面的插值方法来获得其轨迹
2) 姿态的四元数插值：目的是找出$r_t,t\in[0,1]$，使得欧拉参数（等价于单位四元数）$r_0=(\eta\quad\varepsilon_1\quad\varepsilon_2\quad\varepsilon_3)^T$平滑过渡到$r_1=(\xi\quad\delta_1\quad\delta_2\quad\delta_3)^T$
四元数球面线性插值（Slerp）：
两欧拉参数内积为它们夹角余弦值：$r_0\cdot r_1=cos\theta$
将中间姿态r_t限制在r_1,r_2确定的平面中并设**匀速**转动，$r_t=k_0r_0+k_1r_1\Rightarrow\begin{matrix}r_t\cdot r_1=\cos((1-t)\theta)\\r_0\cdot r_t=\cos(t\theta)\end{matrix}$
$\Rightarrow\begin{cases}k_0+k_1cos\theta=\cos(t\theta)\\k_0cos\theta+k_1=\cos((1-t)\theta)\end{cases}\Rightarrow$
$k_0=\frac{sin((1-t)\theta)}{sin\theta},k_1=\frac{sin(t\theta)}{sin\theta}$，
$\theta=cos^{-1}(r_0\cdot r_1)$



Slerp 的钝角处理：单位四元数$\boldsymbol{r}$和$-\boldsymbol{r}$表示三维空间中的同一姿态；选取最短路径进行插值：如果两四元数的夹角为钝角，则可通过将其中一个四元数取负，再对得到的两个夹角为锐角的四元数进行球面线性插值
四元数插值和欧拉角插值的优劣势：四元数通过球面线性插值（Slerp）实现旋转的平滑过渡，避免了欧拉角插值中因万向节锁导致的突变问题；劣势是不直观，四元数的四个分量缺乏直接的物理意义，调试时难以通过数值快速理解旋转状态。欧拉角直观易用，但存在万向锁问题，可能会导致抖动或不自然。
【例】若单位四元数插值时，要求在初始姿态r_0和最终姿态r_1时的角速度均为 0，且转动过程中角速度连续，结合 Slerp 公式给出姿态轨迹规划方法。
引入一个平滑的时间标度函数$s(t),t\in[0,1]$，满足$s(0)=0,s(1)=1,\dot{s}(0)=0,\dot{s}(1)=0$，例如$s(t)=3t^2-2t^3$，令姿态规划轨迹为
$r_t=\frac{\sin[(1-s(t))\theta]}{\sin\theta}r_0+\frac{\sin[s(t)\theta]}{\sin\theta}r_1$，$\theta=cos^{-1}(r_0,r_1)$，角速度近似为$\theta\dot{s}(t)$

7 机器人动力学

• **速度和加速度的传递**：线速度和角速度的传递：$^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BR\,^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,^BQ$；$^A\Omega_C={}^A\Omega_B+{}^A_BR\,^B\Omega_C$（同第 5 章）　求导↓
线加速度的传递：$^A\dot{V}_Q={}^A\dot{V}_{BORG}+{}^A_BR\,^B\dot{V}_Q+2\,^A\Omega_B\times{}^A_BR\,^BV_Q+{}^A\dot{\Omega}_B\times{}^A_BR\,^BQ+{}^A\Omega_B\times(^A\Omega_B\times{}^A_BR\,^BQ)$，如果$^BQ$不动，则$^BV_Q={}^B\dot{V}_Q=0$
角加速度的传递：$^A\dot{\Omega}_C={}^A\dot{\Omega}_B+{}^A_BR\,^B\dot{\Omega}_C+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,^B\Omega_C$
• **欧拉方程**：$^CN={}^CI\,^C\dot{\omega}_c+{}^C\omega_c\times{}^CI\,^C\omega_c$（$\omega_c={}^U\Omega_c$，$C$为刚体联体质心坐标系）
刚体的惯性张量（旋转惯性矩阵）：$^CI=\sum_i-m_i(^CP_i^\wedge)^2$

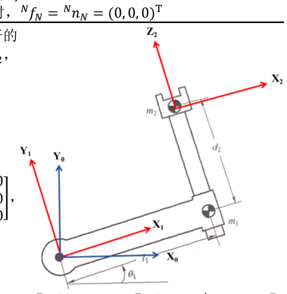
$$=\sum\begin{bmatrix}m_i(y_i^2+z_i^2)&-m_ix_iy_i&-m_ix_iz_i\\-m_ix_iy_i&m_i(x_i^2+z_i^2)&-m_iy_iz_i\\-m_ix_iz_i&-m_iy_iz_i&m_i(x_i^2+y_i^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{xx}&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{xy}&I_{yy}&-I_{yz}\\-I_{xz}&-I_{yz}&I_{zz}\end{bmatrix}$$

（$(P_i^\wedge)^2=PP^T-P^TPI_3=PP^T-|P|^2I_3$）；惯性张量也可定义在非质心坐标系中
对角元素I_{xx},I_{yy},I_{zz}为惯性矩，非对角元素I_{xy},I_{xz},I_{yz}为惯性积
考虑质量连续分布的刚体，$I_{xx}=\int_B(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$，$I_{yy}=\int_B(x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$，$I_{zz}=\int_B(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV$，$I_{xy}=\int_Bxy\,\rho(x,y,z)dV$，$I_{xz}=\int_Bxz\,\rho(x,y,z)dV$，$I_{yz}=\int_Byz\,\rho(x,y,z)dV$
• **牛顿-欧拉迭代动力学方程**：（基于动力学方程,分析连杆间约束力/力矩）
1) 向外迭代：连杆0开始，计算从连杆1~N联体坐标系的**角速度、角+线加速度**→连杆i**质心线加速度**→最后求作用在连杆上的**力和力矩**（牛顿方程、欧拉方程）
2) 向内迭代：连杆N开始，根据力和力矩平衡方程，计算连杆$(N-1)$~1上的**力和力矩**→同时计算产生它们所需的关节**力矩**（转动型关节）/**力**（平动型关节）

向外迭代	转动型关节	平动型关节
角速度${}^{i+1}\omega_{i+1}$	${}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i+\dot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}$	${}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i$
角加速度${}^{i+1}\dot\omega_{i+1}$	${}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot\omega_i+{}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i\times\dot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}+\ddot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}$	${}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot\omega_i$
线加速度${}^{i+1}\dot v_{i+1}$	${}^{i+1}_{i}R[{}^{i}\dot v_i+{}^{i}\dot\omega_i\times{}^{i}O_{i+1}+{}^{i}\omega_i\times({}^{i}\omega_i\times{}^{i}O_{i+1})]$	${}^{i+1}_{i}R[{}^{i}\dot v_i+{}^{i}\dot\omega_i\times{}^{i}O_{i+1}+{}^{i}\omega_i\times({}^{i}\omega_i\times{}^{i}O_{i+1})]+2\,{}^{i+1}\omega_{i+1}\times\dot d_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}+\ddot d_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}$
质心加速度${}^{i}\dot v_{C_i}$	${}^{i}\dot v_i+{}^{i}\dot\omega_i\times{}^{i}P_{C_i}+{}^{i}\omega_i\times({}^{i}\omega_i\times{}^{i}P_{C_i})$	
(质心)力 ${}^{i}F_i$	$m_i\,{}^{i}\dot v_{C_i}$	
(质心)力矩 ${}^{i}N_i$	${}^{C_i}I_i\,{}^{i}\dot\omega_i+{}^{i}\omega_i\times{}^{C_i}I_i\,{}^{i}\omega_i\ \ ({}^{i}N_i={}^{i}({}^{C_i}N_i))$	
向内迭代	转动型关节	平动型关节
(连杆)力 ${}^{i}f_i$	${}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}+{}^{i}F_i$	
(连杆)力矩 ${}^{i}n_i$	${}^{i}N_i+{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1}+{}^{i}P_{C_i}\times{}^{i}F_i+{}^{i}O_{i+1}\times{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}$	
(关节)力矩/力τ_i	${}^{i}n_i^T\,{}^{i}\hat Z_i$	${}^{i}f_i^T\,{}^{i}\hat Z_i$

注：一般情况下，基座不转，${}^{0}\omega_0=(0,0,0)^T$，${}^{0}\dot\omega_0=(0,0,0)^T$；
考虑重力时，${}^{0}\dot v_0=(0,g,0)^T$，与重力加速度等大反向；
无力作用于末端时，${}^{N}f_N={}^{N}n_N=(0,0,0)^T$

【例】考虑平面 RP 机器人，每个连杆的质量集中在连杆末端，分别为m_1,m_2，用牛顿-欧拉法推导动力学方程。



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$-\frac{\pi}{2}$	l_1	d_2	0

${}^{1}P_{C_1}=l_1\,{}^{1}\hat X_1=\begin{bmatrix}l_1\\0\\0\end{bmatrix}$，${}^{C_1}I_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，

${}^{2}P_{C_2}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，${}^{C_2}I_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

${}^{3}f_3=(0\,0\,0)^T$，${}^{3}n_3=(0\,0\,0)^T$，${}^{0}\omega_0=(0\,0\,0)^T$，${}^{0}\dot\omega_0=(0\,0\,0)^T$，${}^{0}\dot v_0=g\hat Y_0=(0\,g\,0)^T$

向外迭代：${}^{1}\omega_1={}^{1}_{0}R\,{}^{0}\omega_0+\dot\theta_1\,{}^{1}\hat Z_1$，${}^{1}\dot\omega_1={}^{1}_{0}R\,{}^{0}\dot\omega_0+{}^{1}_{0}R\,{}^{0}\omega_0\times\dot\theta_1\,{}^{1}\hat Z_1+\ddot\theta_1\,{}^{1}\hat Z_1$，${}^{1}\dot v_1={}^{1}_{0}R[{}^{0}\dot v_0+{}^{0}\dot\omega_0\times{}^{0}O_1+{}^{0}\omega_0\times({}^{0}\omega_0\times{}^{0}O_1)]$，${}^{1}\dot v_{C_1}={}^{1}\dot v_1+{}^{1}\dot\omega_1\times{}^{1}P_{C_1}+{}^{1}\omega_1\times({}^{1}\omega_1\times{}^{1}P_{C_1})$，${}^{1}F_1=m_1\,{}^{1}\dot v_{C_1}$，${}^{1}N_1={}^{C_1}I_1\,{}^{1}\dot\omega_1+{}^{1}\omega_1\times{}^{C_1}I_1\,{}^{1}\omega_1$；${}^{2}\omega_2={}^{2}_{1}R\,{}^{1}\omega_1$，${}^{2}\dot\omega_2={}^{2}_{1}R\,{}^{1}\dot\omega_1$，${}^{2}\dot v_2={}^{2}_{1}R[{}^{1}\dot v_1+{}^{1}\dot\omega_1\times{}^{1}O_2+{}^{1}\omega_1\times({}^{1}\omega_1\times{}^{1}O_2)]+2\,{}^{2}\omega_2\times\dot d_2\,{}^{2}\hat Z_2+\ddot d_2\,{}^{2}\hat Z_2$，${}^{2}\dot v_{C_2}={}^{2}\dot v_2+{}^{2}\dot\omega_2\times{}^{2}P_{C_2}+{}^{2}\omega_2\times({}^{2}\omega_2\times{}^{2}P_{C_2})$，${}^{2}F_2=m_2\,{}^{2}\dot v_{C_2}$，${}^{2}N_2={}^{C_2}I_2\,{}^{2}\dot\omega_2+{}^{2}\omega_2\times{}^{C_2}I_2\,{}^{2}\omega_2$；

向内迭代：${}^{2}f_2={}^{2}_{3}R\,{}^{3}f_3+{}^{2}F_2$，${}^{2}n_2={}^{2}N_2+{}^{2}_{3}R\,{}^{3}n_3+{}^{2}P_{C_2}\times{}^{2}F_2+{}^{2}O_3\times{}^{2}_{3}R\,{}^{3}f_3$，$\tau_2={}^{2}f_2^T\,{}^{2}\hat Z_2$；${}^{1}f_1={}^{1}_{2}R\,{}^{2}f_2+{}^{1}F_1$，${}^{1}n_1={}^{1}N_1+{}^{1}_{2}R\,{}^{2}n_2+{}^{1}P_{C_1}\times{}^{1}F_1+{}^{1}O_2\times{}^{1}_{2}R\,{}^{2}f_2$，$\tau_1={}^{1}n_1^T\,{}^{1}\hat Z_1$

- **机器人动力学方程的拉格朗日方法**：**牛顿-欧拉方法**基于基本动力学式（牛顿方程、欧拉方程）以及连杆之间的约束力和力矩分析；**拉格朗日方法**则基于能量项对系统变量以及时间的微分；对于同一机器人，二者得到的运动方程是相同的

1) 拉格朗日函数：$\mathcal{L}(\Phi,\dot\Phi)=k(\Phi,\dot\Phi)-u(\Phi)$，$k(\Phi,\dot\Phi)$为系统动能，$u(\Phi)$为势能

2) 机器人动力学方程：$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Phi}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}=\xi$，其中$\xi$是非保守力/力矩向量，包括：关节力/力矩向量$\tau=[\tau_1\ \cdots\ \tau_N]^T$、摩擦力/力矩向量$B\dot\Phi$、末端执行器与环境接触而引起的关节负荷力/力矩向量$J^T(\Phi)F$

若与环境无接触则$F=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial\dot\Phi}-\frac{\partial k}{\partial\Phi}+\frac{\partial u}{\partial\Phi}=\tau-B\dot\Phi$，

其中$B=diag(b_1,\cdots,b_n)$，b_i是折算到关节i的粘滞摩擦参数，若光滑则为 0

3) 动能计算：$k_i=\frac{1}{2}m_iv_{C_i}^Tv_{C_i}+\frac{1}{2}{}^{i}\omega_i^T\,{}^{C_i}I_i\,{}^{i}\omega_i=\frac{1}{2}m_iv_{C_i}^Tv_{C_i}+\frac{1}{2}\omega_i^T\,{}^{0}_{i}R\,{}^{C_i}I_i\,{}^{0}_{i}R^T\omega_i$（${}^{i}\omega_i={}^{i}_{0}R\omega_i={}^{0}_{i}R^T\omega_i$），整个机器人的动能$k=\sum_{i=1}^{n}k_i$

$v_{C_i}=J_P^{(i)}\dot\Phi$，$\omega_i=J_O^{(i)}\dot\Phi$（$\begin{bmatrix}J_P^{(i)}\\J_O^{(i)}\end{bmatrix}$表示第$i$个质心坐标系的雅可比矩阵）→

总动能$k(\Phi,\dot\Phi)=\frac{1}{2}\dot\Phi^TM(\Phi)\dot\Phi$（$M$为惯性矩阵，为一对称正定矩阵）

$$M=\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\left(J_P^{(i)}\right)^TJ_P^{(i)}+\left(J_O^{(i)}\right)^T\,{}^{0}_{i}R\,{}^{C_i}I_i\,{}^{0}_{i}R^TJ_O^{(i)}\right]$$

4) 势能计算：${}^{0}g=[0,-g,0]^T$（世界坐标系中的重力加速度向量），机器人总势能

$$u(\Phi)=\sum_{i=1}^{N}u_i=-\sum_{i=1}^{N}m_i\,{}^{0}g^T\,{}^{0}P_{C_i}$$

$$g_i(\Phi)=\frac{\partial u}{\partial\Phi_i}=-\sum_{j=1}^{N}m_j\,{}^{0}g^T\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_j}}{\partial\Phi_i},\quad G(\Phi)=[g_1(\Phi)\ g_2(\Phi)\ \cdots]^T$$

5) 利用（第一类）Christoffel 符号，可写出完整的拉格朗日动力学方程：

$M(\Phi)\ddot\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+B\dot\Phi+G(\Phi)=\tau$，矩阵 C 第(i,j)项为$c_{ij}=\sum_{k=1}^{N}c_{kji}\dot\phi_k$

（第一类）Christoffel 符号：$c_{kji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial\phi_k}+\frac{\partial m_{ik}}{\partial\phi_j}-\frac{\partial m_{jk}}{\partial\phi_i}\right)=c_{jki}$

$\dot m_{ij}-2c_{ij}=-(\dot m_{ji}-2c_{ji})\Rightarrow$ 矩阵$\dot M(\Phi)-2C(\Phi,\dot\Phi)$是反对称的

采用拉格朗日方法计算机器人动力学方程的基本步骤

① 建系，确定各旋转矩阵；确定各连杆的雅可比矩阵$J_P^{(i)}$和$J_O^{(i)}$（采用连杆速度的向外迭代法等）；确定各惯性张量${}^{C_i}I_i$

② 根据 $M=\sum\left[m_i\left(J_P^{(i)}\right)^TJ_P^{(i)}+\left(J_O^{(i)}\right)^T\,{}^{0}_{i}R\,{}^{C_i}I_i\,{}^{0}_{i}R^TJ_O^{(i)}\right]$ 计算惯性矩阵M

③ 根据 $c_{kji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial\phi_k}+\frac{\partial m_{ik}}{\partial\phi_j}-\frac{\partial m_{jk}}{\partial\phi_i}\right)=c_{jki}$ 计算出 Christoffel 符号，进而根据$c_{ij}=\sum_{k=1}^{N}c_{kji}\dot\phi_k$计算得到矩阵$C$

④ 根据$g_i(\Phi)=\frac{\partial u}{\partial\Phi_i}=-\sum_{j=1}^{N}m_j\,{}^{0}g^T\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_j}}{\partial\Phi_i}$得重力矢量$G(\Phi)=[g_1(\Phi)\ g_2(\Phi)\cdots]^T$

⑤ 代入$M(\Phi)\ddot\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+B\dot\Phi+G(\Phi)=\tau$整合，得到$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_N$

【例】考虑平面 RR 机器人，两连杆质心到各自关节轴的距离分别为l_1,l_2，两连杆对穿过各自质心并指向纸外的轴线的转动惯量分别为I_1,I_2。

M：由速度的向外迭代法得${}^{1}\omega_1,{}^{1}v_1,{}^{2}\omega_2,{}^{2}v_2$；$v_{C_1}={}^{0}_{1}R({}^{1}v_1+{}^{1}\omega_1\times{}^{1}P_{C_1})=\begin{bmatrix}-l_1s_1\dot\theta_1\\l_1c_1\dot\theta_1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow J_P^{(1)}=\begin{bmatrix}-l_1s_1&0\\l_1c_1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\omega_1={}^{0}_{1}R\,{}^{1}\omega_1\Rightarrow J_O^{(1)}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$，$v_{C_2}={}^{0}_{2}R({}^{2}v_2+{}^{2}\omega_2\times{}^{2}P_{C_2})\Rightarrow J_P^{(2)}$，$\omega_2={}^{0}_{2}R\,{}^{2}\omega_2\Rightarrow J_O^{(2)}$，${}^{C_1}I_1=\begin{bmatrix}*&0&0\\0&*&0\\0&0&I_1\end{bmatrix}$，${}^{C_2}I_2=\begin{bmatrix}*&0&0\\0&*&0\\0&0&I_2\end{bmatrix}$

计算$m_1\left(J_P^{(1)}\right)^TJ_P^{(1)}$，$\left(J_O^{(1)}\right)^T\,{}^{0}_{1}R\,{}^{C_1}I_1\,{}^{0}_{1}R^TJ_O^{(1)}$，$m_2\left(J_P^{(2)}\right)^TJ_P^{(2)}$，$\left(J_O^{(2)}\right)^T\,{}^{0}_{2}R\,{}^{C_2}I_2\,{}^{0}_{2}R^TJ_O^{(2)}$，

求和得$M(\Phi)=\begin{bmatrix}I_1+m_1l_1^2+I_2+m_2(a_1^2+l_2^2+2a_1l_2c_2)&I_2+m_2(l_2^2+a_1l_2c_2)\\I_2+m_2(l_2^2+a_1l_2c_2)&I_2+m_2l_2^2\end{bmatrix}$

C：算c_{111}，c_{112}，$c_{121}=c_{211}$，$c_{122}=c_{212}$，c_{221}，c_{222}；$c_{11}=c_{111}\dot\theta_1+c_{211}\dot\theta_2$，$c_{12}=c_{121}\dot\theta_1+c_{221}\dot\theta_2$，$c_{21}=c_{112}\dot\theta_1+c_{212}\dot\theta_2$，$c_{22}=c_{122}\dot\theta_1+c_{222}\dot\theta_2\Rightarrow C(\Phi,\dot\Phi)$

G：${}^{0}P_{C_1}={}^{0}_{1}R\,{}^{1}P_{C_1}$，${}^{0}P_{C_2}={}^{0}O_2+{}^{0}_{2}R\,{}^{2}P_{C_2}={}^{0}_{1}R\,{}^{1}O_2+{}^{0}_{2}R\,{}^{2}P_{C_2}$；$\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_1}}{\partial\theta_1},\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_2}}{\partial\theta_1},\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_1}}{\partial\theta_2},\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_2}}{\partial\theta_2}$；

$g_1(\Phi)=-m_1\,{}^{0}g^T\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_1}}{\partial\theta_1}-m_2\,{}^{0}g^T\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_2}}{\partial\theta_1}$，$g_2(\Phi)=-m_1\,{}^{0}g^T\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_1}}{\partial\theta_2}-m_2\,{}^{0}g^T\frac{\partial\,{}^{0}P_{C_2}}{\partial\theta_2}\Rightarrow G$

τ：代入$M(\Phi)\ddot\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+B\dot\Phi+G(\Phi)=\tau$，得到$\tau_1,\tau_2$

8 机器人运动控制

- **独立关节控制**：视各关节电机为运动部件，重点关注转速ω_i，由转速积分为θ_i进而形成机器人运动完成要求的作业；各关节电机控制的目标是让转角跟踪期望曲线；不使用电流反馈，因为引入电流反馈会削弱关节的抗干扰能力

0) 电机及驱动器：电枢电路方程$U_{mi}=k_{ui}U_{ci}=R_{mi}I_{mi}+E_{mi}=R_{mi}I_{mi}+k_{ei}\omega_{mi}$

转矩公式$T_{ei}=C_{Ti}I_{mi}$ → 转速公式$\omega_{mi}=(k_{ui}/k_{ei})U_{ci}-(R_{mi}/k_{ei})I_{mi}$

摩擦：分为静摩擦和动摩擦，动摩擦分为干摩擦、边界摩擦和流体（粘性）摩擦

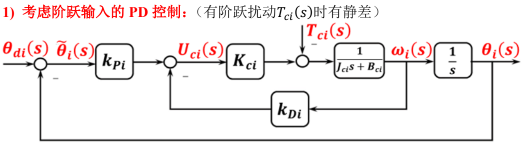
干摩擦力 = 法向力 × 干摩擦系数；粘性摩擦力 = 相对速度 × 粘性摩擦系数

减速器：电机转角$\theta_{mi}=\eta_i\theta_i$；关节力矩$T_{ai}=\eta_iT_{li}$；电机转子侧的动力学方程$J_{mi}\dot\omega_{mi}=T_{ei}-T_{li}-b_{mi}\omega_{mi}$；关节侧的动力学方程$J_{ai}\dot\omega_i=T_{ai}-T_{ci}-b_{ai}\omega_i$

关节模型：$J_{ci}\ddot\theta+B_{ci}\dot\theta=K_{ci}U_{ci}-T_{ci}$（$J_{ci}$为总等效惯量，$B_{ci}$为等效阻尼）→

$$\theta_i(s)=\frac{K_{ci}}{s(J_{ci}s+B_{ci})}U_{ci}(s)-\frac{1}{s(J_{ci}s+B_{ci})}T_{ci}(s)$$

1) 考虑阶跃输入的 PD 控制：（有阶跃扰动$T_{ci}(s)$时有静差）



闭环系统模型$\theta_i(s)=\frac{k_{Pi}K_{ci}\theta_{di}(s)-T_{ci}(s)}{J_{ci}s^2+(B_{ci}+k_{Di}K_{ci})s+k_{Pi}K_{ci}}$

闭环特征多项式$s^2+(B_{ci}+k_{Di}K_{ci})/J_{ci}\cdot s+k_{Pi}K_{ci}/J_{ci}=s^2+2\zeta\omega_0s+\omega_0^2$

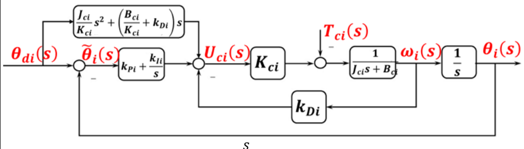
ω_0越高快速性越好，但过高会使U_{ci}饱和而呈现非线性

2) 考虑阶跃输入的 PID 控制：（将上图k_{Pi}改成$k_{Pi}+k_{Ii}/s$，有阶跃扰动也无静差）

闭环系统模型$\theta_i(s)=\frac{(k_{Pi}s+k_{Ii})K_{ci}\theta_{di}(s)-sT_{ci}(s)}{J_{ci}s^3+(B_{ci}+k_{Di}K_{ci})s^2+k_{Pi}K_{ci}s+k_{Ii}K_{ci}}$

闭环稳定的充要条件（劳斯判据）：$k_{Pi},k_{Ii},k_{Di}>0$且$(B_{ci}+k_{Di}K_{ci})k_{Pi}>J_{ci}k_{Ii}$

3) 考虑二阶可导输入的 PID 控制：（通过前馈引入期望轨迹的 1、2 阶导数信息）



$$\theta_i(s)=\theta_{di}(s)-\frac{s}{J_{ci}s^3+(B_{ci}+k_{Di}K_{ci})s^2+k_{Pi}K_{ci}s+k_{Ii}K_{ci}}T_{ci}(s)$$

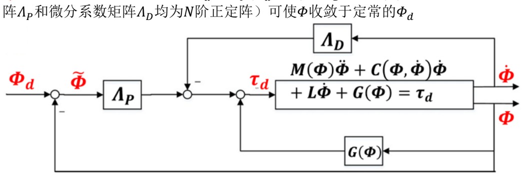
闭环特征多项式与无前馈的 PID 闭环系统相同

完全消除参考输入对偏差$\tilde\theta_i$的影响，在阶跃扰动下无静差跟踪二阶可导期望轨迹

- **计算转矩前馈控制**：利用所有关节运动的期望指令信息推算干扰力矩$\hat T_{ci}(s)$，在带前馈的 PID 控制中引入（$U_{ci}(s)$处）计算转矩前馈$\hat T_{ci}(s)/K_{ci}$
- **集中控制**：视各关节电机为出力部件，关注转矩T_{ei}，由关节电机的转矩驱动机器人运动；各关节电机控制的目标是让电机电流跟踪期望电流，离不开电流反馈

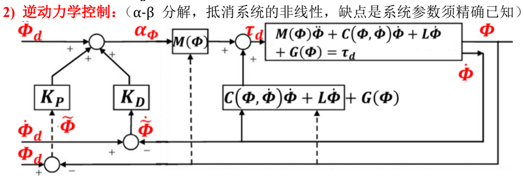
0) 被控对象模型：电流反馈律$U_{ci}=\pi_{pi}(V_{ci}-I_{mi})$（$V_{ci}$为期望电流）→ i关节电机对机器人的驱动转矩$\tau_i=\eta_iT_{ei}=\eta_iC_{Ti}V_{ci}-\eta_i^2C_{Ti}k_{ei}/(k_{ui}\pi_{pi}+R_{mi})\cdot\dot\theta_i$ → 对全部关节电机有$\tau=\tau_d-B_e\dot\Phi$（B_e为对角阵），与动力学方程$M(\Phi)\ddot\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+B\dot\Phi+G(\Phi)=\tau$合并 → 被控对象模型$M(\Phi)\ddot\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+L\dot\Phi+G(\Phi)=\tau_d$（$L=B+B_e$为正定对角阵），需设计计算$\tau_d$的算法使$\Phi$跟踪$\Phi_d$

1) 重力补偿 PD 控制：控制律$\tau_d=\Lambda_P(\Phi_d-\Phi)-\Lambda_D\dot\Phi+G(\Phi)$（控制比例系数矩阵$\Lambda_P$和微分系数矩阵$\Lambda_D$均为$N$阶正定阵）可使$\Phi$收敛于定常的$\Phi_d$



闭环系统方程$M(\Phi)\ddot\Phi=\Lambda_P\tilde\Phi-(C+L+\Lambda_D)\dot\Phi$，取其状态$(\tilde\Phi\quad\dot\Phi)^T$，构造李雅普诺夫函数$V_L=\frac{1}{2}\dot\Phi^TM\dot\Phi+\frac{1}{2}\tilde\Phi^T\Lambda_P\tilde\Phi$，可证$V_L$正定，$\dot V_L=-\dot\Phi^T(L+\Lambda_D)\dot\Phi$半负定，$\dot V_L$不恒为零，$\|x\|\to\infty$时$V_L\to\infty$，故该自治系统在原点平衡状态大范围渐近稳定

2) 逆动力学控制：（α-β 分解，抵消系统的非线性，缺点是系统参数须精确已知）



$M(\Phi)\ddot\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+L\dot\Phi+G(\Phi)=\tau_d$，内环控制律$\tau_d=M(\Phi)\alpha_\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+L\dot\Phi+G(\Phi)$ → 简化为N个独立的双积分系统$\ddot\Phi=\alpha_\Phi$；对每个双积分系统实施前馈+PD 控制→ 外环控制律$\alpha_\Phi=\ddot\Phi_d+K_D\dot{\tilde\Phi}+K_P\tilde\Phi$（$K_D,K_P$为对角阵）→ 闭环系统方程$\ddot{\tilde\Phi}+K_D\dot{\tilde\Phi}+K_P\tilde\Phi=0$（二阶系统）

【例】单旋转关节机器人的动力学方程为$2\ddot\theta+\dot\theta+7cos\theta-3sin\theta=\tau$，关节角期望轨迹及其 1、2 阶导为$\theta_d,\dot\theta_d,\ddot\theta_d$，设计控制器实现渐近跟踪，使闭环极点均为$-10$。

令内环控制律$\tau=2\tau'+\dot\theta+7cos\theta-3sin\theta$，则模型简化为$\ddot\theta=\tau'$

令外环控制律$\tau'=\ddot\theta_d+K_D(\dot\theta_d-\dot\theta)+K_P(\theta_d-\theta)$，代入得$\ddot{\tilde\theta}+K_D\dot{\tilde\theta}+K_P\tilde\theta=0$

闭环特征多项式为$s^2+K_Ds+K_P\Rightarrow K_P=100,K_D=20$

3) 鲁棒控制：$M(\Phi)\ddot\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+L\dot\Phi+G(\Phi)=\tau_d$，内环控制律$\tau_d=\hat M(\Phi)\alpha_\Phi+\hat C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+\hat L\dot\Phi+\hat G(\Phi)$ → 系统化为$\ddot\Phi=\alpha_\Phi-M^{-1}(\tilde M\alpha_\Phi+\tilde C\dot\Phi+\tilde L\dot\Phi+\tilde G)=\alpha_\Phi-\Delta$，其中$\tilde M=M-\hat M$，$\Delta$代表不确定性；外环控制律$\alpha_\Phi=\ddot\Phi_d+K_D\dot{\tilde\Phi}+K_P\tilde\Phi+\Xi$ → 闭环系统方程$\ddot{\tilde\Phi}=-K_P\tilde\Phi-K_D\dot{\tilde\Phi}+(\Delta-\Xi)$，需设计$\Xi=B_r(\tilde\Phi,\dot{\tilde\Phi})$以应对$\Delta$

4) 自适应控制：被控对象模型采用参数线性化形式$\tau_d=M(\Phi)\ddot\Phi+C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+L\dot\Phi+G(\Phi)=Y(\Phi,\dot\Phi,\ddot\Phi)\Psi$（提取出不变的参数构成$\Psi$，变量构成矩阵$Y(\Phi,\dot\Phi,\ddot\Phi)$），内环控制律$\tau_d=\hat M(\Phi)\alpha_\Phi+\hat C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+\hat L\dot\Phi+\hat G(\Phi)=Y(\Phi,\dot\Phi,\alpha_\Phi)\hat\Psi$，外环控制律$\alpha_\Phi=\ddot\Phi_d+K_D\dot{\tilde\Phi}+K_P\tilde\Phi$ → $\ddot{\tilde\Phi}=-K_D\dot{\tilde\Phi}-K_P\tilde\Phi+M^{-1}(\Phi)Y(\Phi,\dot\Phi,\ddot\Phi)\hat\Psi$

令$\varphi=\begin{bmatrix}\tilde\Phi\\\dot{\tilde\Phi}\end{bmatrix}$，得状态方程$\dot\varphi=\begin{bmatrix}0&I\\-K_P&-K_D\end{bmatrix}\varphi+\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix}\hat M^{-1}(\Phi)Y(\Phi,\dot\Phi,\ddot\Phi)\tilde\Psi=\bar A\varphi+\bar D\tilde\Psi$

需设计K_P,K_D使得$\bar A$的特征值具有负实部，给定 2 正定阵Q_L和Γ，则存在正定阵P_L满足李雅普诺夫方程$\bar A^TP_L+P_L\bar A=-Q_L$，设计参数更新律$\dot{\hat\Psi}=\Gamma^{-1}\bar D^TP_L\varphi$，构造正定的李雅普诺夫函数$V_L=\varphi^TP_L\varphi+\tilde\Psi^T\Gamma\tilde\Psi$，可计算得$\dot V_L=-\varphi^TQ_L\varphi$半负定 → Φ渐近跟踪Φ_d（$\lim\tilde\Phi=0$），参数估计误差$\tilde\Psi$有界

【例】对于$\begin{bmatrix}m_1l_1^2+m_2(a_1^2+l_2^2+2a_1l_2c_2)+I_1+I_2&m_2(l_2^2+a_1l_2c_2)+I_2\\m_2(l_2^2+a_1l_2c_2)+I_2&m_2l_2^2+I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot\theta_1\\\ddot\theta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-m_2a_1l_2s_2\dot\theta_2&-m_2a_1l_2s_2\dot\theta_1-m_2a_1l_2s_2\dot\theta_2\\m_2a_1l_2s_2\dot\theta_1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\\dot\theta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(m_1l_1+m_2a_1)gc_1+m_2l_2gc_{12}\\m_2l_2gc_{12}\end{bmatrix}$

令$\Psi_1=m_1l_1^2+m_2(a_1^2+l_2^2)+I_1+I_2$，$\Psi_2=m_2a_1l_2$，$\Psi_3=m_2l_2^2+I_2$，$\Psi_4=m_1l_1g+m_2a_1g$，$\Psi_5=m_2l_2g$，则上式

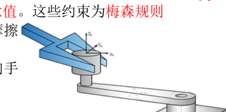
$$=\begin{bmatrix}\ddot\theta_1&c_2(2\ddot\theta_1+\ddot\theta_2)-s_2(2\dot\theta_1\dot\theta_2+\dot\theta_2^2)&\ddot\theta_2&c_1&c_{12}\\0&c_2\ddot\theta_1+s_2\dot\theta_1^2&\ddot\theta_1+\ddot\theta_2&0&c_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_1\\\vdots\\\Psi_5\end{bmatrix}=Y(\Phi,\dot\Phi,\ddot\Phi)\Psi$$

9 机器人力控

- **力位混合控制**：**1) 坐标系和约束**：可行运动空间V_a和约束空间V_c互为正交补空间，$V_c=V_a^{\perp}\subset\mathbb{R}^6$。无重力和摩擦力的准静态下，末端执行器所作的功$\delta W=F_a^T\delta p_a=0,\forall\delta p_a\in V_a$ → 静力学中自然约束$F_a=0,F_a\in V_a$；几何约束下工具末端在约束空间内不可运动$\delta p_c=0$ → 可在V_c施加任意大小力和力矩 → 静力学中人工约束$F_c\in V_c$可取任意值；将无穷小的位移转换为速度 → 运动学中自然约束$\dot p_c=0,\dot p_c\in V_c$，运动学中人工约束$\dot p_a\in V_a$可取任意值。这些约束为梅森规则

【例】旋转曲柄（准静态分析，忽略重力和摩擦力），考察对工具末端的约束。

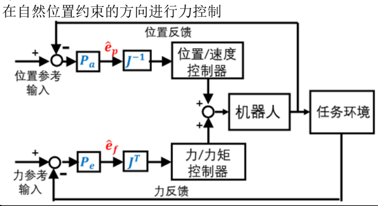
约束坐标系是手柄的联体坐标系，$\hat X$方向指向手柄轴心。



自然约束和人工约束如下：

	运动学（以速度形式表示）		静力学	
自然	约束 X\Z 平面的平动	$v_x=0,v_z=0$	约束沿 Y 轴的力	$f_y=0$
自然	约束 X\Y 轴的转动	$\omega_x=0,\omega_y=0$	约束绕 Z 轴的力矩	$\tau_z=0$
	运动学（以速度形式表示）		静力学	
人工	沿 Y 轴期望平动	$v_y=\alpha_1$	约束 X\Z 平面的力	$f_x=0,f_z=0$
人工	绕 Z 轴期望转动	$\omega_z=\alpha_2$	约束 X\Y 轴的力矩	$\tau_x=0,\tau_y=0$

2) 力位混合控制器设计：在存在自然力约束的方向进行操作臂的位置控制，在存在自然位置约束的方向进行力控制



位置参考输入为运动学中的人工约束，力参考输入为静力学中的人工约束

反馈信号可能含约束空间中的分量，为过滤信号，可将反馈误差投影到位置控制和力控制各自对应的子空间

滤波器用投影矩阵P_a和P_c表示，$\hat e_p=P_ae_p$（投影到V_a），$\hat e_f=P_ce_f$（投影到V_c）（当约束坐标系各轴与控制回路中的方向一致时，投影阵应是对角阵且仅含 0、1）

关节空间位置反馈误差$e_q=J^{-1}\hat e_p$，关节空间力反馈误差$e_\tau=J^T\hat e_f$

【例】对于上例的旋转曲柄，$P_a=diag(0\,1\,0\,0\,0\,1)$，$P_c=diag(1\,0\,1\,1\,1\,0)$

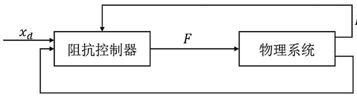
- **阻抗控制**：**1) 策略**：使交互力与机械臂位置之间呈现出期望的关系（即机械阻抗，一般用质量-弹簧-阻尼系统表示），从而实现柔顺控制，适用于要求接触力“保持比较小的状态”，但不要求跟踪力轨迹的任务

2) 阻抗控制器：机械阻抗：定义为$F(s)/\dot X(s)$（其倒数为机械导纳），质量-弹簧-阻尼系统$M\ddot x+B\dot x+Kx=F$ → 机械阻抗为$Z(s)=Ms+B+K/s$（低频时响应主要由弹性项K决定，高频时响应主要由惯性项M决定）。理想的位置控制器对应高阻抗（∞），抗外力干扰；理想的力控制器对应低阻抗（0），抗位置变化的干扰。

阻抗控制（广义）：考虑一自由度系统$m\ddot x=F+F_{ext}$（控制力+环境外力），跟踪误差$\tilde x(t)=x(t)-x_d(t)$，阻抗控制目标为$F_{ext}=M_d\ddot{\tilde x}+B_d\dot{\tilde x}+K_d\tilde x$（$M_d,B_d,K_d$分别为期望的惯量、阻尼、刚度，任一个较大时称为高阻抗，三个都很小称为低阻抗）。

阻抗控制（基于力的阻抗控制）：传感器测量$\tilde x$并调整F来达到预期阻抗关系

控制律：$F=m\ddot x_d+(m-M_d)\ddot{\tilde x}-(B_d\dot{\tilde x}+K_d\tilde x)$；含有二阶导可能引入严重噪声，若能测量环境力则可消去$\ddot{\tilde x}$：$F=m\ddot x_d-\frac{m}{M}(B_d\dot{\tilde x}+K_d\tilde x)+\left(\frac{m}{M}-1\right)F_{ext}$



阻抗控制器输入运动信号、输出力信号，表现出阻抗；

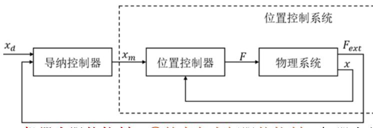
物理系统输入力、输出运动，表现出导纳

【例】动力学方程为$M\ddot P=F_c+\begin{bmatrix}0\\-m_2g\end{bmatrix}+F$（$F_c$为控制力，$F$为环境接触力）

阻抗控制目标为$F=M_d\ddot{\tilde P}+B_d\dot{\tilde P}+K_d\tilde P$ → 取控制律为$F_c=M\ddot P-F+\begin{bmatrix}0\\m_2g\end{bmatrix}=M\ddot P_d+(M-M_d)\ddot{\tilde P}-(B_d\dot{\tilde P}+K_d\tilde P)+\begin{bmatrix}0\\m_2g\end{bmatrix}$

导纳控制（基于位置）：物理系统接收位置输入，测量环境力并给出运动信号

由$M_d(\ddot x_m-\ddot x_d)+B_d\dot{\tilde x}+K_d\tilde x=F_{ext}$计算加速度$\ddot x_m=\ddot x_d+\frac{1}{M_d}(F_{ext}-B_d\dot{\tilde x}-K_d\tilde x)$

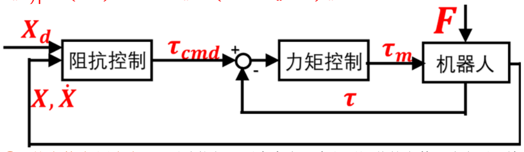


再对所求得的加速度$\ddot x_m$做两次积分，得到新的运动轨迹x_m并送入位置控制环，来完成最终的控制

3) 机器人阻抗控制：①笛卡尔空间阻抗控制：机器人关节空间动力学模型为$M(\Phi)\ddot\Phi+V(\Phi,\dot\Phi)+G(\Phi)=\tau+J^T(\Phi)F$（$V=C(\Phi,\dot\Phi)\dot\Phi+B\dot\Phi$），其中$J^T(\Phi)F$是末端执行器与环境接触引起的关节负荷力/力矩向量。要保持末端执行器位移与环境力的关系 → 利用$J_a(\Phi)$（$\dot\Phi=J_a^{-1}\dot X\Rightarrow\ddot\Phi=J_a^{-1}\ddot X-J_a^{-1}\dot J_aJ_a^{-1}\dot X=J_a^{-1}\ddot X-J_a^{-1}\dot J_a\dot\Phi$）→ 笛卡尔空间动力学模型：$M_X(\Phi)\ddot X+V_X(\Phi,\dot\Phi)+G_X(\Phi)=J_a^{-T}(\Phi)\tau+F_a$（$F_a=J_a^{-T}J^TF=T_a^{-T}F$，表示对$X$做功的广义力），其中$M_X(\Phi)=J_a^{-T}(\Phi)M(\Phi)J_a^{-1}(\Phi)=[J_a(\Phi)M^{-1}(\Phi)J_a^T(\Phi)]^{-1}$，$V_X=J_a^{-T}V-M_X\dot J_a\dot\Phi$，$G_X=J_a^{-T}G$。

为实现反馈线性化，取内环控制律：$\tau=J_a^T(\Phi)[M_X(\Phi)a_d+V_X(\Phi,\dot\Phi)+G_X(\Phi)-F_a]$，代入动力学方程 → 双积分系统：$\ddot X=a_d$；

期望的阻抗关系：$M_d\ddot{\tilde X}+B_d\dot{\tilde X}+K_d\tilde X=F_a$ → 取外环控制律：$a_d=\ddot X_d+M_d^{-1}(-B_d\dot{\tilde X}-K_d\tilde X+F_a)$（为将各分量解耦，通常将$M_d,B_d,K_d$都取为对角阵）→ 最终计算得关节空间阻抗控制律：$\tau=M(\Phi)J_a^{-1}(\Phi)\left[\ddot X_d-\dot J_a(\Phi)\dot\Phi+M_d^{-1}(-B_d\dot{\tilde X}-K_d\tilde X)\right]+V(\Phi,\dot\Phi)+G(\Phi)+J_a^T(\Phi)(M_X(\Phi)M_d^{-1}-I)F_a$



②阻抗参数选取原则：K_d反映执行器刚度大小，为主要调节的参数，决定了环境接触力大小；B_d变化一般不影响稳态，可调节与环境交互的动态过程，决定响应过程；M_d一般不需调节，根据实际情况进行选取。

以互补方式匹配环境动态特征：自由运动时快速、刚性；有限制环境中慢速、柔性。

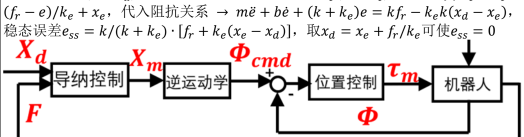
若无末端力/力矩传感器（无法获得F_a），取$M_d=M_X$（令$M_X(\Phi)M_d^{-1}-I=0$）。

③笛卡尔空间导纳控制：物理系统接收位置输入，表现出阻抗特性；控制器测量环境力并给出运动信号，视为导纳。必须有环境接触力反馈，需装备力/力矩传感器。

阻抗控制属于隐式力控制，无法跟踪特定力轨迹。

阻抗控制基于测量位置来控制外力，需直接控制关节力矩（很多机械臂不开放）；导纳控制基于测量外力来控制位置，只需发送位置/速度指令。

将期望阻抗模型中的接触力换为接触力误差：$F_e=F_r-F$ → 新的期望阻抗关系：$M_d\ddot{\tilde x}+B_d\dot{\tilde x}+K_d\tilde x=F_e$。简化为单一特定方向下参考位置为定值的恒定接触力任务：$m\ddot x+b\dot x+k(x-x_d)=e$。用弹簧对环境建模$F=K_e(X-X_e)$ → $x=f/k_e+x_e=(f_r-e)/k_e+x_e$，代入阻抗关系 → $m\ddot e+b\dot e+(k+k_e)e=kf_r-k_ek(x_d-x_e)$，稳态误差$e_{ss}=k/(k+k_e)\cdot[f_r+k_e(x_e-x_d)]$，取$x_d=x_e+f_r/k_e$可使$e_{ss}=0$



④控制方法对比：力位混合控制：与刚性环境的接触限制了机器人的运动自由度；机器人试图违反环境施加的几何约束，因此受到接触力；任务空间被划分为正交的子空间，分别在其中进行力控制和运动控制。

阻抗控制：将环境视为发生微小有限形变的机械系统；两个耦合动态系统（机器人和环境）之间的交互产生了接触力；控制器指定力与运动之间的动态关系。

- **关节力/力矩控制**：**1) 电流环控制**：使用直驱电机或减速比很小时，关节力矩$\tau=k_TI$(电流)。收到指定力矩信号后，电流传感器反馈实际电流，并调节电机电压以输出期望电流。实际需考虑摩擦力补偿等以提高控制精度。评价：该测量方式实现简单，成本较低，但只适用于减速比很小时，当电机串联复杂减速箱等环节时摩擦力建模难度大增，同时齿轮存在空程→较大的模型不确定性，仅用电流环很难准确控制输出力矩。直驱电机要输出足够力矩需做成很大尺寸→方案在实际中不常用。

2) 应变片式力矩传感器：带减速器电机常用谐波减速器，减速比较高，能基本消除空程，常在输出端设弹性体，以通过形变测量扭矩并保护减速箱。弹性体上装应变片，可测量减速箱输出端力矩，并经反馈回路调节电机电流，以产生期望力矩。评价：该测量方式精度较高，但工艺较复杂、成本较高，有温漂、零漂等，弹性体也会使动力学更复杂，增加高速运动时控制难度。

3) 串联弹性驱动器（SEA）：也包括电机、减速箱、弹性体（刚度k_ϕ远小于 2)）。弹性形变较明显，可用光学、电磁、电容等测量弹性体扭转$\Delta\phi$→输出力矩$k_\phi\Delta\phi$。实际输出力矩通过反馈控制器调节电机电流，产生期望力矩。评价：弹性体柔性较强→适于人机交互，但也会使关节构型更复杂，增加高频和高速运动的控制难度。