自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大
用自己的浙大通行证账号登录

第五章 Chapter 5

根轨迹分析法 (Root Locus)

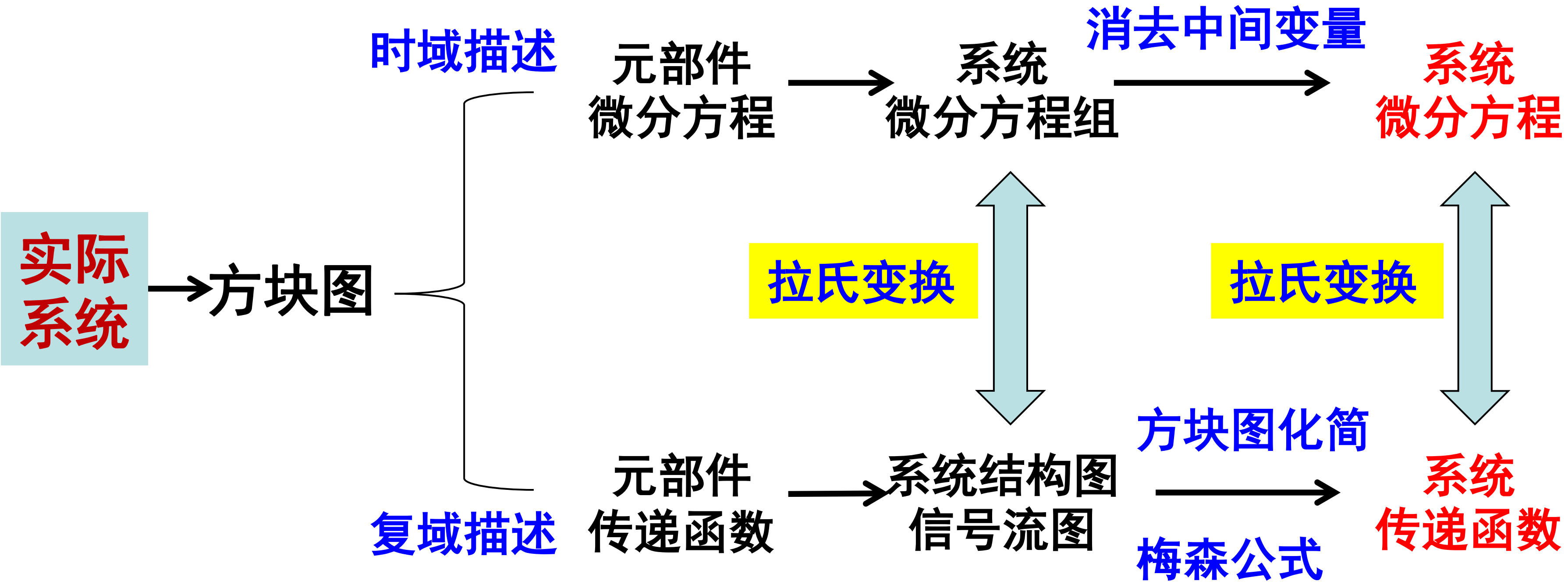
内容回顾

- 自动控制系统的基本概念
- 连续时间控制系统的数学模型及表示
  - 列写动态系统的微分方程（机理建模）
  - 传递函数与方块图
  - 状态空间模型
  - 仿真图（状态变量图）、信号流图
  - 各种模型形式之间的关系
  - 非线性模型的线性化处理
- 连续时间控制系统的动态响应
  - 微分方程的求解、状态方程的求解 （直接求解与拉氏变换求解）
  - 时间响应与动态性能指标
- 连续时间控制系统的稳定性和稳态误差
  - 系统的稳定性（判别问题、设计问题）
  - 稳态误差、稳态误差系数的求取
  - 兼顾动态与稳态性能的设计问题

课程目的

- （1）系统分析：控制系统结构参数已知，在系统数学模型已建立的条件下，判定系统的稳定性，计算系统的动态、稳态性能指标，研究系统性能与系统结构、参数之间的关系。
- （2）系统设计（校正）：在给出被控对象及其技术指标要求的情况下，寻求一个能完成控制任务、满足技术指标要求的控制系统。在系统主要元件和结构形式确定的前提下，系统校正的任务往往是需要改变系统的某些参数，有时还需要改变系统的结构，选择合适的校正装置，计算、确定其参数，加入到系统中，使其满足预定的性能指标要求。
- ——校正的问题往往更加复杂：1）答案并不惟一；2）选择时可能有矛盾的地方，需要折中考虑；3）要考虑可实现性及经济成本等等

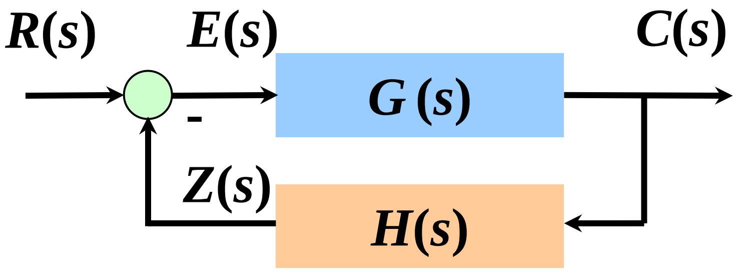
第一、二章



实际系统
方块图
时域描述
复域描述
元部件
微分方程
系统
微分方程组
消去中间变量
系统
微分方程
拉氏变换
拉氏变换
元部件
传递函数
系统结构图
信号流图
方块图化简
梅森公式
系统
传递函数

第三章

分析： 模型 ⟶ 指标



$$G_o(s)=G(s)H(s)$$

$$\Phi(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

一阶系统动态特性

二阶系统动态特性

高阶系统

动态要求（快）

动态指标定义 T_p， $\sigma\%$， T_s

一阶系统 $T_s=3T$

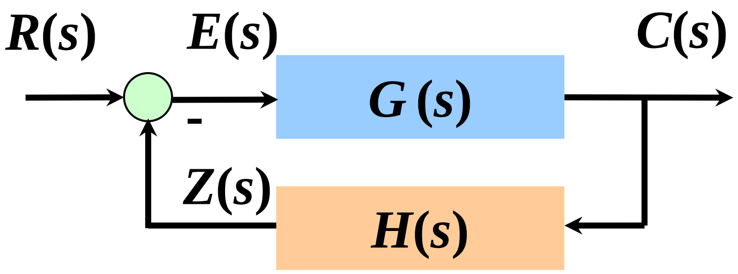
二阶系统

$$0\le\zeta<1\begin{cases} T_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ \sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\% \\ T_s=\dfrac{3.5}{\zeta\omega_n} \end{cases}$$

高阶系统：闭环主导极点

第四章

分析： 模型 ⟶ 指标



$$G_o(s)=G(s)H(s)$$

$$\Phi(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$D(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

基本要求（稳）

- 稳定的概念
- 稳定的充要条件 $\mathrm{Re}[\lambda_i]<0,\quad i=1,2,\cdots,n$
- 稳定判据
  - 必要条件 a_i同号 $i=0,1,\cdots,n-1$
  - 劳斯判据
    - 劳斯表
    - 特殊情况
    - 应用

稳态要求（准）

- 误差概念、定义
- 误差计算
  - 一般计算（终值定理）
  - 稳态误差系数法

第五章主要内容

- 根轨迹概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

根轨迹概述

对设计者来说，最重要的两件事情：

1) **稳定性**——由特征方程$1+G(s)H(s)=0$的根来决定（求解方程或者对特征方程应用Routh判据）

2) **动态性能**——例如超调量，调节时间（回复时间）（2%，5%）

两个问题：

➢如何通过**闭环系统特征根**的**分布**来全面了解闭环系统的**动态特性**；

➢如何通过对闭环系统的**动态特性**要求来决定**闭环特征根**的合理分布，进而确定控制器的结构和参数

通过图解方法回答：

根轨迹法——本章；**频率响应法**——下一章

根轨迹概述

- **根轨迹的概念**
  - 什么是根轨迹?
  - 为什么要用根轨迹?
- **根轨迹的绘制**
  - 如何简单方便地绘制根轨迹?
- **系统性能分析**
  - 如何使用根轨迹分析系统性能指标?

根轨迹概述

根轨迹定义：

当系统某一参数（如开环增益）变化时，闭环系统特征方程的根在S平面上变化的轨迹。

该方法是1948年Evans提出的，并广泛应用于控制工程中

根轨迹方法和劳斯判据方法的区别：

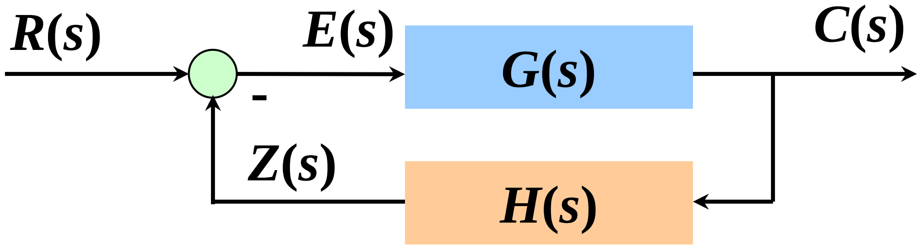
劳斯判据—— 只能确定*S*平面上闭环极点位于给定垂线左侧时的控制器参数范围

根轨迹法—— 可以得知每个控制参数取值时所对应的闭环极点位置

根轨迹概述——基本概念

如下控制系统： 假设闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}$$



$C(s)/R(s)$的极点(瞬态响应的模态) 与开环传递函数$G(s)H(s)$的零点 (z_i) 和极点 (p_j) 以及增益有关

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

开环传递函数？

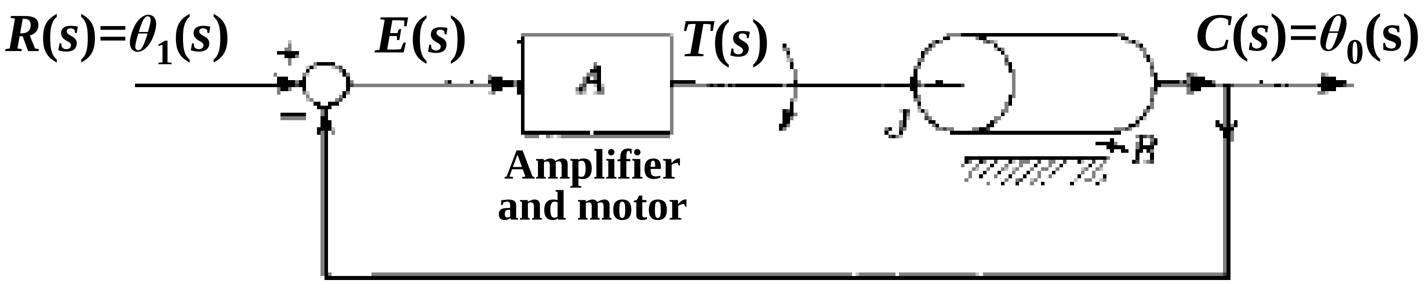
$$G(s)H(s)=\frac{Z(s)}{E(s)}=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

系统特征方程？

$$1+G(s)H(s)=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)+K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)=0$$

根轨迹概述——特征方程的根

例5-1



A position-control system.

T：转矩；J：转动惯量；B：粘性摩擦力

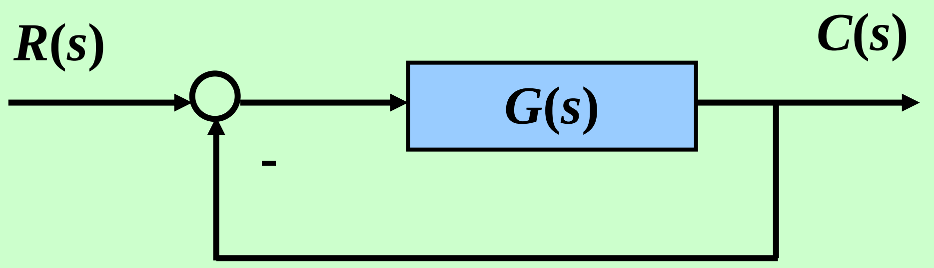
建模： $T = JD^2\theta_0 + BD\theta_0$

$$\frac{\theta_0}{T} = \frac{1}{D(JD+B)} = \frac{1/J}{D(D+B/J)}$$

开环传递函数: $G(s) = \dfrac{\theta_0}{E} = \dfrac{A/J}{s(s+B/J)} = \dfrac{K}{s(s+a)}$

根轨迹概述——特征方程的根

例5-1



$$G(s)=\frac{\theta_0}{E}=\frac{A/J}{s(s+B/J)}=\frac{K}{s(s+a)}$$

T：转矩；J：转动惯量；B：粘性摩擦力

设a=2；K是变量

开环传递函数： $$G(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

闭环传递函数： $$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s+2)+K}=\frac{K}{s^2+2s+K}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

特征方程的根： $$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K}$$

根轨迹概述——特征方程的根

开环传递函数
根轨迹增益

分析：

$$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K}$$ ，闭环根是参数K的函数

当 $K=0$—— $s_1=0$ 和 $s_2=-2$ (也是开环传递函数的极点)

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

$K=1$—— $s_1=s_2=-1$

$0<K<1$—— $s_{1,2}$ 为实数，且分别位于S平面（-2，-1）和（-1，0）的负实轴上

$K>1$—— 根为复数，即

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-1\pm j\sqrt{K-1}$$

根轨迹概述——特征方程的根

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

K=0—— s_1=0 和 s_2= -2 (也是开环传递函数的极点)

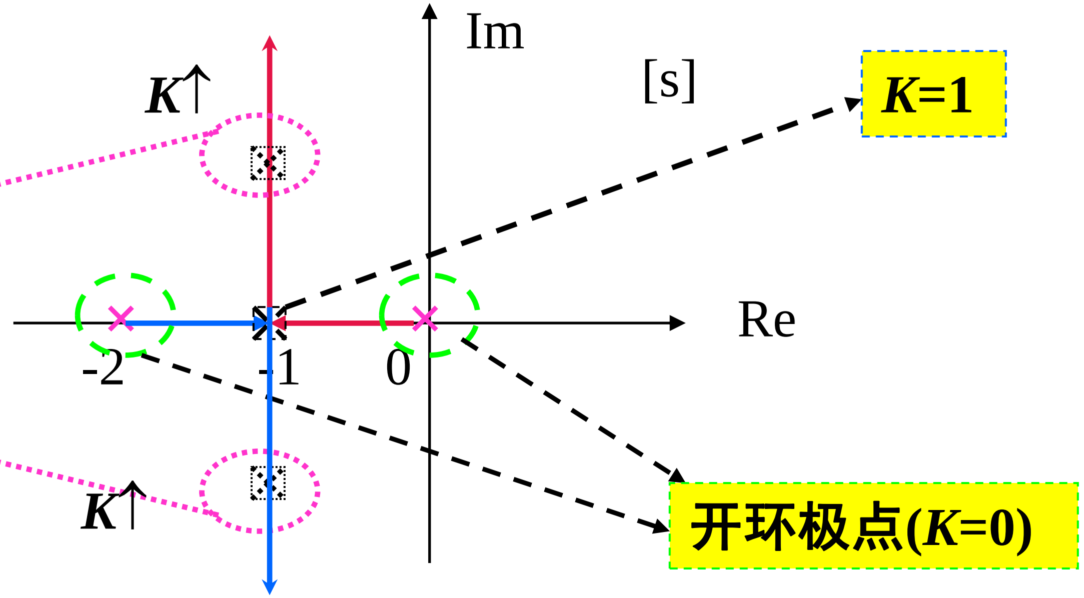
0<K<1—— $s_{1,2}$ 为实数，且分别位于S平面（-2，-1）和（-1，0）的负实轴上

K=1——s_1= s_2= -1

K>1——根为复数

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-1\pm j\sqrt{K-1}$$

绘制上述特征根随K变化的轨迹



注意：轨线上的每一点代表闭环系统的根，因此该轨线称为**根轨迹**。

根轨迹概述——特征方程的根

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

分析闭环系统特征根的位置

特征根由一系列不同的K确定：如

$$s_{1,2}=-1\pm j\sqrt{K-1}$$

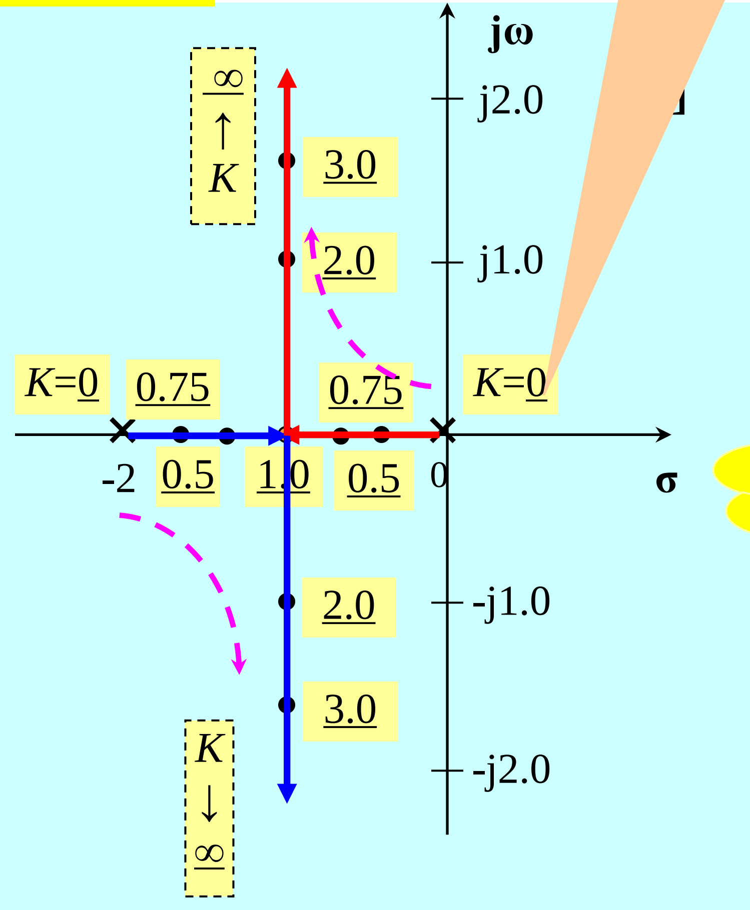
K	s_1	s_2
0	-0+j0	-2.0-j0
0.5	-0.293+j0	-1.707-j0
0.75	-0.5+j0	-1.5-j0
1.0	-1.0+j0	-1.0-j0
2	-1.0+j1.0	-1.0-j1.0
3	-1.0+j1.414	-1.0-j1.414
50.0	-1.0+j7.0	-1.0-j7.0
:	:	:

根轨迹概述——根轨迹

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

下划线表示K的值

K	s_1	s_2
0	-0+j0	-2.0-j0
0.5	-0.293+j0	-1.707-j0
0.75	-0.5+j0	-1.5-j0
1.0	-1.0+j0	-1.0-j0
2	-1.0+j1.0	-1.0-j1.0
3	-1.0+j1.414	-1.0-j1.414
50.0	-1.0+j7.0	-1.0-j7.0
:	:	:



根轨迹图

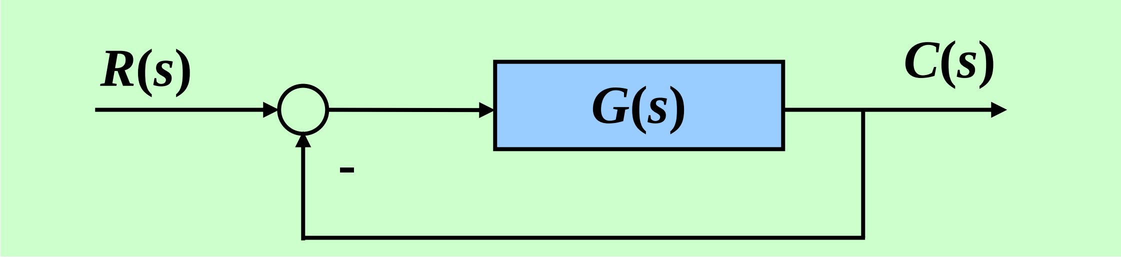
包含两条分支
(以K为参数)

表明了当K从0到∞变化时，特征方程的所有特征根 (K>=0)

K↑↓←→特征根↑↓ ←→时间响应 ↑↓

根轨迹概述——根轨迹

例5-2



开环传递函数：$G(s)=\frac{K(s+2)}{s^2}$

闭环传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K(s+2)}{s^2+K(s+2)}=\frac{2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2};$$

系统稳定？

当 K>0，系统稳定。

特征方程的根：$s_{1,2}=-\frac{K}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{K^2-8K}$

根轨迹概述——根轨迹

分析： $s_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{K^2 - 8K}$ 显然是*K*的函数

当 *K*=0 —— 特征根s_1=s_2=0 (等于开环传递函数的极点)

K=8 —— 特征根s_1= s_2= -4

$$G_{open}(s) = \frac{K(s+2)}{s^2}$$

K>8 —— 特征根位于S平面的负实轴上，其中$s_1 \to -\infty$，$s_2 \to -2$

0<*K*<8 —— 特征根$s_{1,2}$ 为共轭极点，位于S平面的左半平面

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\frac{K}{2} \pm \frac{1}{2} j\sqrt{8K - K^2}$$

特征方程： $$1 + G(s) = 1 + \frac{K(s+2)}{s^2} = 0$$

$$K = -\frac{s^2}{s+2}$$

根轨迹概述——根轨迹

$$G_{open}(s)=\frac{K(s+2)}{s^2}$$

K=0 —— 特征根$s_1=s_2=0$ (等于开环极点)

K=8 —— 特征根$s_1= s_2= -4$

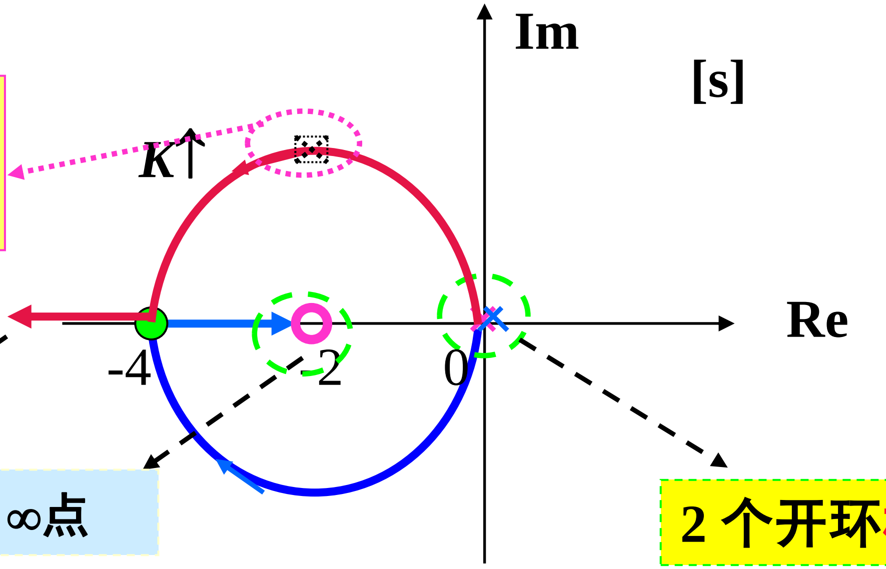
K>8 —— 特征根为实数，位于S平面负实轴上，且$s_1\to -\infty$, $s_2\to -2$

0<K<8 —— 特征根$s_{1,2}$ 是一对共轭复根，位于S左半平面

$$s_{1,2}=-\frac{K}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{K^2-8K}$$

绘制根轨迹

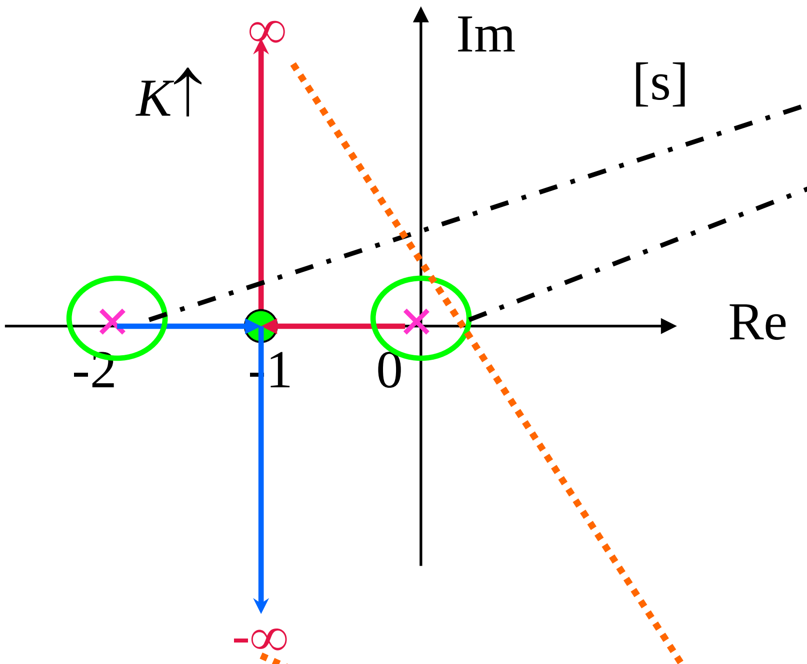
注意：轨迹上的每一点都是闭环特征根。



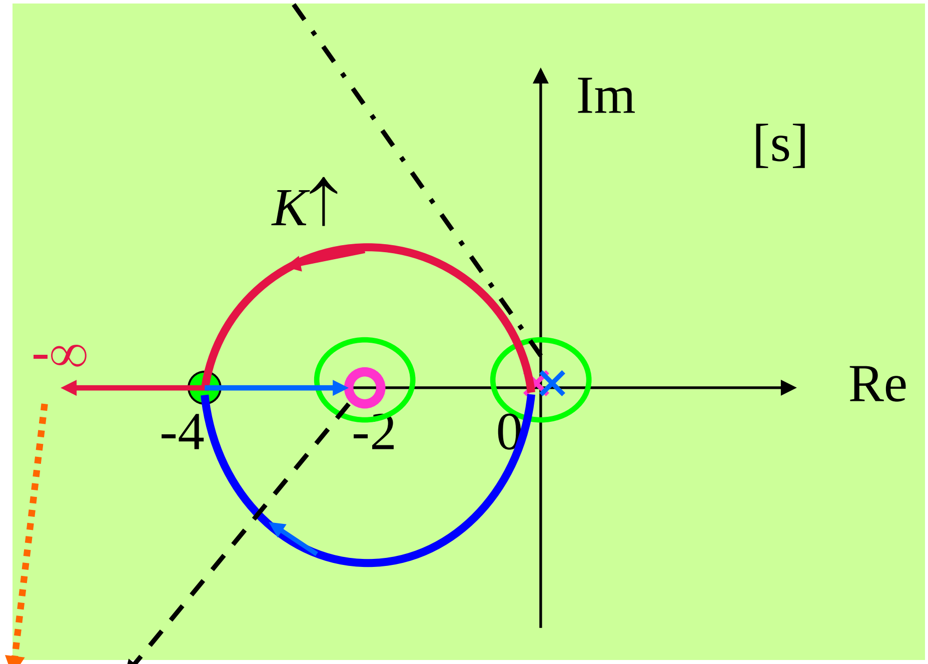
开环零点：-2 和 ∞点

2 个开环极点(K=0)

根轨迹概述——绘制特征方程根的轨迹



起始点：开环极点(K=0)



2条根轨迹分支

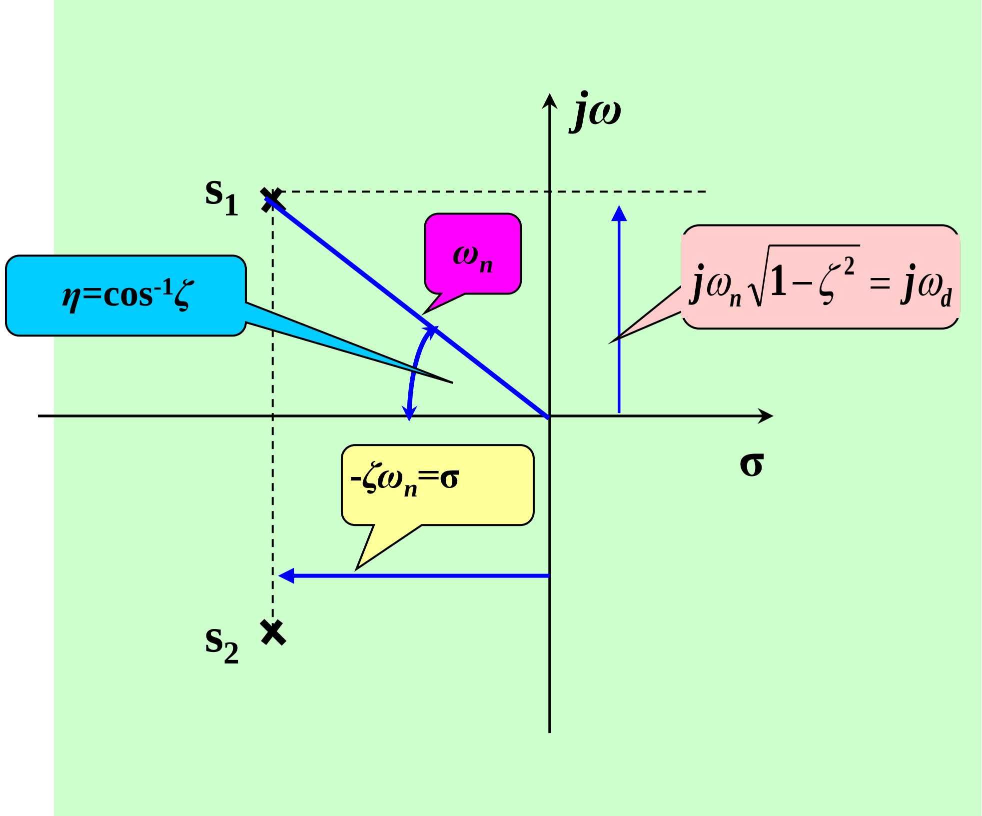
(2个闭环特征根)

终点：开环零点或无穷远零点(K=∞)

根轨迹概述——根轨迹定性分析

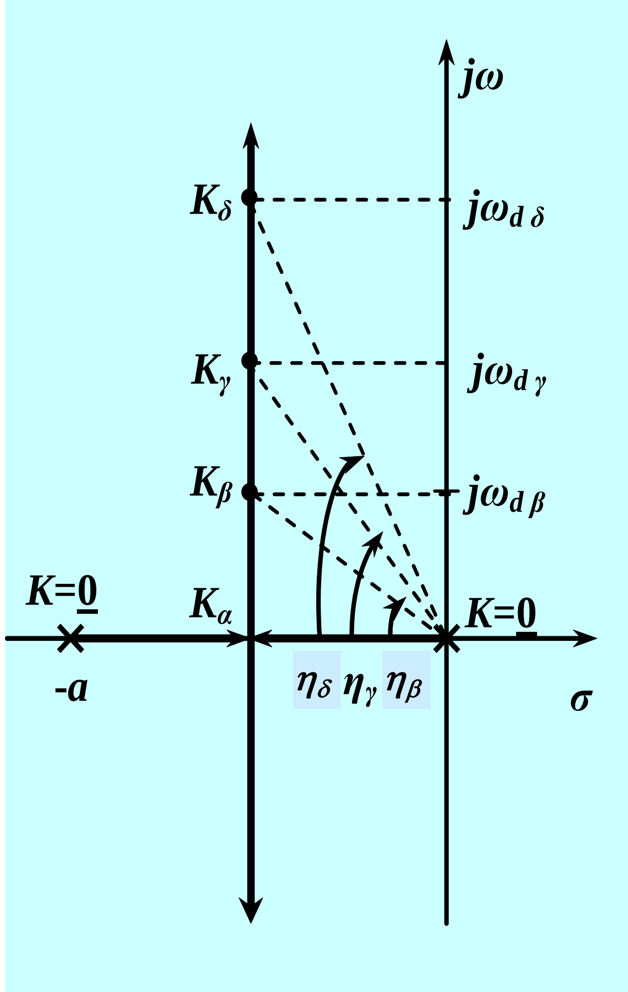
复共轭极点：

$$-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma + j\omega_d$$



具有阻尼比ζ的特征根位于一条直线上，该直线与负实轴的夹角满足 $\eta=\cos^{-1}\zeta$

根轨迹概述——根轨迹定性分析



例5-1根轨迹分析（当 K↑）

1) 阻尼比ζ降低， 超调增大 。$\zeta\downarrow\rightarrow M_p\uparrow$

2) 无阻尼自然频率ω_n增大 （ω_n即为原点到复根的距离 ）$\omega_n\uparrow$

3) 阻尼振荡频率ω_d增大（ ω_d是复根的虚部），等效于瞬态响应频率 $\omega_d\uparrow$

4) $K >= K_\alpha$，$\sigma = -\zeta\omega_n$ 是常数，也就是说对所有大于K_α的参数K的变化，σ均为常数，调节时间没有影响

5) K>0，系统稳定

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1 \pm j\sqrt{K-1}$$

根轨迹概述——根轨迹定性分析

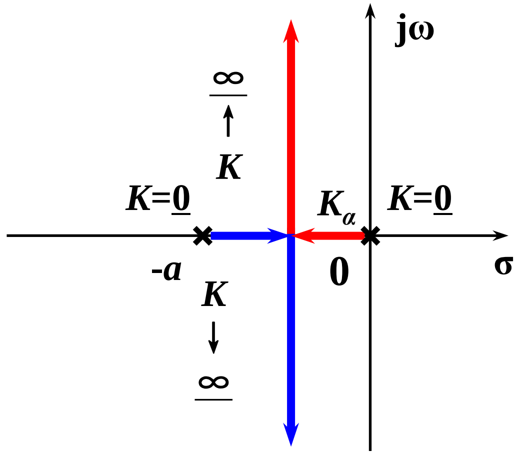
(1) 给二阶系统增加一个零点

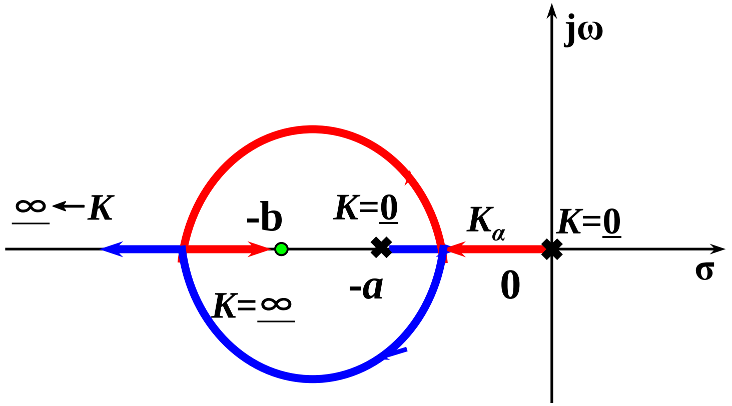
$$G(s)=\frac{K}{s(s+a)} \Rightarrow G(s)=\frac{K(s+b)}{s(s+a)}$$

结论：

根轨迹曲线“被拉向左边”，或远离虚轴。当静态回路增益大于K_a时，相比原系统，特征根更向左侧移动。

因此，系统更稳定、过渡过程更快。

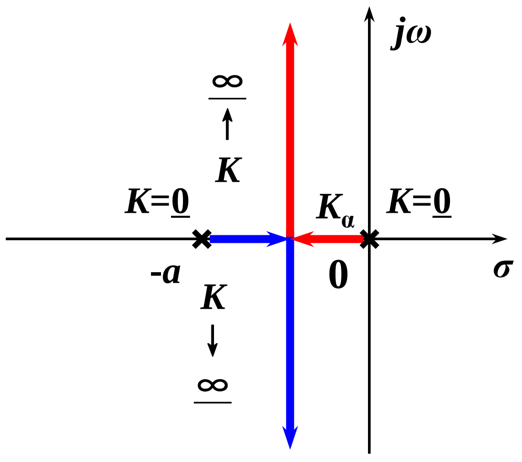


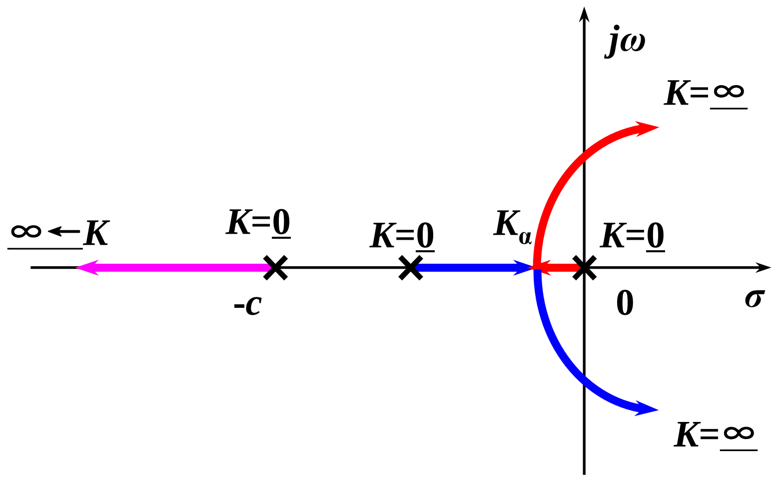


根轨迹概述——根轨迹定性分析

(2) 给二阶系统增加一个极点

$$G(s)=\frac{K}{s(s+a)} \Rightarrow G(s)=\frac{K}{s(s+a)(s+c)}$$





结论：

根轨迹“被拉向右侧”，或者接近于虚轴。当静态回路增益大于K_a时，相比原系统，特征根更接近虚轴。

因此，系统容易出现不稳定。

根轨迹概述——根轨迹定性分析

一般性结论：

- 给系统增加零点使根轨迹向左弯曲，系统更加稳定，过渡过程加快（调节时间T_s减少）。
- 给系统增加极点根轨迹向右弯曲，容易使系统不稳定，过渡过程变缓。

根轨迹方法的优点：

- 闭环系统特征方程的根可以直接获得。
- 系统的特性可以精确得到。
- 系统设计比较容易，例如采用MATLAB。

根轨迹概述——设计步骤

Step 1：确定系统的开环传递函数$G(s)H(s)$

Step 2：$G(s)H(s)$ 分子分母因式分解

Step 3：在S平面绘制$G(s)H(s)$ 的零点和极点

Step 4：根据根轨迹绘制法则绘制闭环系统根轨迹

Step 5：按照K(或其他的参数)校准根轨迹

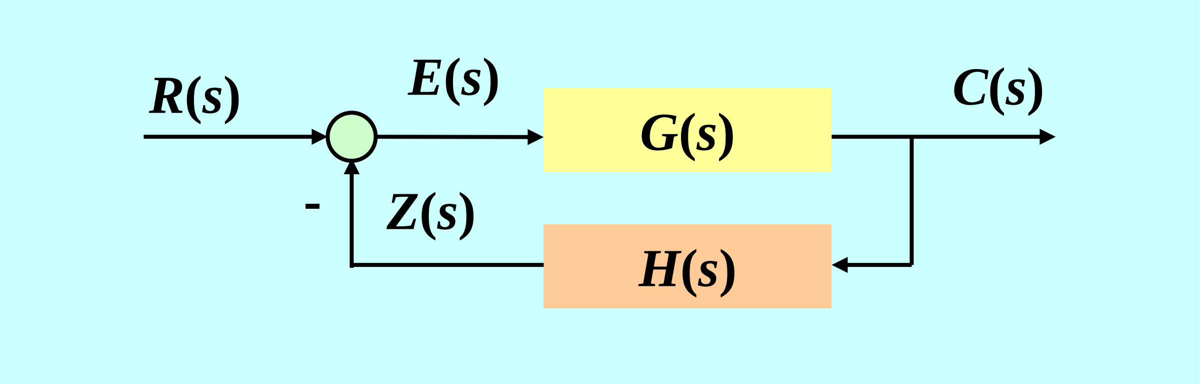
如果K已预先确定，则$1+G(s)H(s)$的精确根的位置就确定。如果特征根的位置确定，则K也可以确定

Step 6：一旦特征根确定，就可以获得时间响应

Step 7：时间响应是否满足要求？如果否，如何调整？如何补偿？

根轨迹概述

（1） 闭环传递函数零极点与开环传递函数零极点的关系：



开环传递函数为

$$G_o(s)=\frac{Z(s)}{E(s)}=G(s)H(s)$$

闭环传递函数为

$$G_B(s)=\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

根轨迹概述——开环传递函数

前向通道传递函数$G(s)$ 和反馈通道传递函数$H(s)$：

$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=K_1\frac{\prod_{j=1}^{f}(\tau_{1j}s+1)}{s^m\prod_{i=1}^{q}(T_{1i}s+1)}=K_{1r}\frac{\prod_{j=1}^{f}(s-z_{1j})}{s^m\prod_{i=1}^{q}(s-p_{1i})}$$

$$H(s)=\frac{Z(s)}{C(s)}=K_2\frac{\prod_{j=1}^{l}(\tau_{2j}s+1)}{\prod_{i=1}^{h}(T_{2i}s+1)}=K_{2r}\frac{\prod_{j=1}^{l}(s-z_{2j})}{\prod_{i=1}^{h}(s-p_{2i})}$$

其中：

K_1 ——前向通道增益，K_{1r} ——前向通道根轨迹增益

K_2 -——反馈通道增益，K_{2r} ——反馈通道根轨迹增益

根轨迹概述——开环传递函数

$$G(s)=K_1\frac{\prod_{j=1}^{f}(\tau_{1j}s+1)}{s^m\prod_{i=1}^{q}(T_{1i}s+1)}=K_{1r}\frac{\prod_{j=1}^{f}(s-z_{1j})}{s^m\prod_{i=1}^{q}(s-p_{1i})}$$

$$H(s)=K_2\frac{\prod_{j=1}^{l}(\tau_{2j}s+1)}{\prod_{i=1}^{h}(T_{2i}s+1)}=K_{2r}\frac{\prod_{j=1}^{l}(s-z_{2j})}{\prod_{i=1}^{h}(s-p_{2i})}$$

开环传递函数$G(s)H(s)$：

$$G(s)H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{w}(\tau_j s+1)}{s^m\prod_{i=1}^{n-m}(T_i s+1)}=K_r\frac{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{s^m\prod_{i=1}^{n-m}(s-p_i)}=K_r\frac{\prod_{j=1}^{f}(s-z_{1j})\prod_{j=1}^{l}(s-z_{2j})}{s^m\prod_{i=1}^{q}(s-p_{1i})\prod_{i=1}^{h}(s-p_{2i})}$$

其中： $K=K_1\times K_2$ ——系统的开环增益

$K_r=K_{1r}\times K_{2r}$ ——开环系统根轨迹增益

$w=f+l$ ——开环系统零点数

$n=m+q+h$ ——开环系统极点数

根轨迹概述——开环传递函数

$$G(s)H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{w}(\tau_j s+1)}{s^m\prod_{i=1}^{n-m}(T_i s+1)}=K_r\frac{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{s^m\prod_{i=1}^{n-m}(s-p_i)}=K_r\frac{\prod_{j=1}^{f}(s-z_{1j})\prod_{j=1}^{l}(s-z_{2j})}{s^m\prod_{i=1}^{q}(s-p_{1i})\prod_{i=1}^{h}(s-p_{2i})}$$

更一般地，将系统的开环传递函数写成以下形式：

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+a_1)\cdots(s+a_w)}{s^m(s+b_1)\cdots(s+b_u)}=\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{s^m\prod_{i=m+1}^{n-m}(s-p_i)}=K[G(s)H(s)]_1$$

其中：

a_i 和 b_j ——实数或复数，可以位于S的左半平面或右半平面

K ——定义为根轨迹增益，可正/可负

z_j —— $G(s)H(s)$的零点， $z_1=-a_1, z_2=-a_2, \ldots, z_w=-a_w$

p_i —— $G(s)H(s)$的极点， $p_1=\ldots=p_m=0, p_{m+1}=-b_1, \ldots, p_{m+u}=-b_u$

根轨迹概述——闭环传递函数

$$G(s)H(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{w}(\tau_j s+1)}{s^m\prod_{i=1}^{n-m}(T_i s+1)}=K_r\frac{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{s^m\prod_{i=1}^{n-m}(s-p_i)}$$

$$G(s)=K_1\frac{\prod_{j=1}^{f}(\tau_{1j} s+1)}{s^m\prod_{i=1}^{q}(T_{1i} s+1)}=K_{1r}\frac{\prod_{j=1}^{f}(s-z_{1j})}{s^m\prod_{i=1}^{q}(s-p_{1i})}$$

$$H(s)=K_2\frac{\prod_{j=1}^{l}(\tau_{2j} s+1)}{\prod_{i=1}^{h}(T_{2i} s+1)}=K_{2r}\frac{\prod_{j=1}^{l}(s-z_{2j})}{\prod_{i=1}^{h}(s-p_{2i})}$$

闭环传递函数：

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{K_{1r}\prod_{i=1}^{f}(s-z_{1i})\prod_{j=1}^{h}(s-p_{2j})}{s^m\prod_{i=1}^{n-m}(s-p_i)+K_r\prod_{j=1}^{w}(s-z_i)}$$

1) 闭环系统根轨迹增益等于开环系统前向通道根轨迹增益K_{1r}

2) 闭环零点由开环前向通道传递函数零点和反馈通道传递函数极点组成

3) 闭环极点与开环零、极点和根轨迹增益有关

根轨迹概述——幅值条件与相角条件

(2) 系统的特征方程Δ(s)：

$$\Delta(s)=1+G(s)H(s)=0$$

设开环传递函数为$G(s)H(s)$，则由特征方程有

$$G(s)H(s)=\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)\cdots(s-p_u)}=K[G(s)H(s)]_1=-1$$

闭环传递函数Φ(s)的根轨迹：

当K 取0到+∞之间的任意值（$K>0$），S平面上满足上述方程的点还可表示为极坐标向量形式

$$\boxed{G(s)H(s)=Fe^{j\beta}=e^{j(1+2h)\pi}}$$

根轨迹概述——幅值条件与相角条件

$$G(s)H(s)=\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)\cdots(s-p_u)}=K[G(s)H(s)]_1=-1$$

当 $K>0$ $\boxed{G(s)H(s)=e^{j(1+2h)\pi}}$

幅值条件： $|G(s)H(s)|=1$ 180度根轨迹

相角条件： $\angle G(s)H(s)=(1+2h)180^\circ \qquad h=0,\pm1,\pm2,\ldots$

当 $K<0$ 相当于正反馈，有 $\boxed{G(s)H(s)=e^{j2h\pi}}$

幅值条件： $|G(s)H(s)|=1$ 0度根轨迹

相角条件： $\angle G(s)H(s)=h360^\circ \qquad h=0,\pm1,\pm2,\ldots$

注意：这两个条件是根轨迹的充分必要条件。

根轨迹概述——幅值条件与相角条件

$$G(s)H(s)=\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_w)}{s^m(s-p_1)\cdots(s-p_u)}=K[G(s)H(s)]_1=-1$$

若用零极点形式表示$G(s)H(s)$，特征方程$1+G(s)H(s)=0$ 的根必须满足两个条件：

幅值条件：

$$\frac{|K||s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_w|}{|s^m||s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_{n-m}|}=1$$

相角条件：

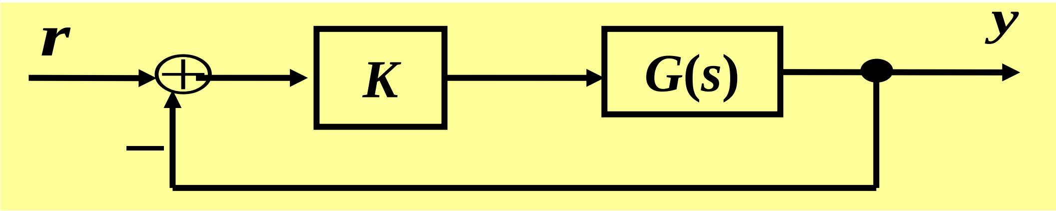
$$\angle G(s)H(s)=\angle(s-z_1)+\cdots+\angle(s-z_w)-m\angle s-\angle(s-p_1)-\cdots-\angle(s-p_{n-m})$$
$$=\begin{cases}(2h+1)180^\circ & for\quad K>0\\ h360^\circ & for\quad K<0\end{cases}$$

$$|K|=\frac{|s^m||s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_{n-m}|}{|s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_w|}=\text{根轨迹增益}$$

$$\angle G(s)H(s)=\sum(\text{分子的相角})-\sum(\text{分母的相角})$$
$$=\begin{cases}(2h+1)180^\circ & for\quad K>0\\ h360^\circ & for\quad K<0\end{cases}$$

根轨迹概述——幅值条件与相角条件

如以下单位反馈系统 (可变化参数 $K>0$)



特征方程$\Delta(s)$：　　$\Delta(s)=1+KG(s)=0 \Leftrightarrow KG(s)=-1$

$$|KG(s)|=1,\quad \angle\{KG(s)\}=(1+2h)\pi$$

结论：

S-平面上可能的闭环极点位置必须保证上述相角条件，*K*则可以应用幅值条件来获得。

一般地，从 s(满足相角条件的极点)→通过幅值条件求*K*。

根轨迹概述——幅值条件与相角条件

一旦开环传递函数$G(s)H(s)$确定，并转换为特定的形式，则开环零点和极点就可以在S平面绘制出来。例如：

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1/T_1)^2}{s(s+1/T_2)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{K(s-z_1)^2}{s(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

对于阻尼比$\zeta<1$的二次式$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2$

$$p_{2,3}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\sigma\pm j\omega_d$$

注意：1）复数的零极点总是共轭成对出现

2）σ是阻尼常数，ω_d是阻尼振荡频率

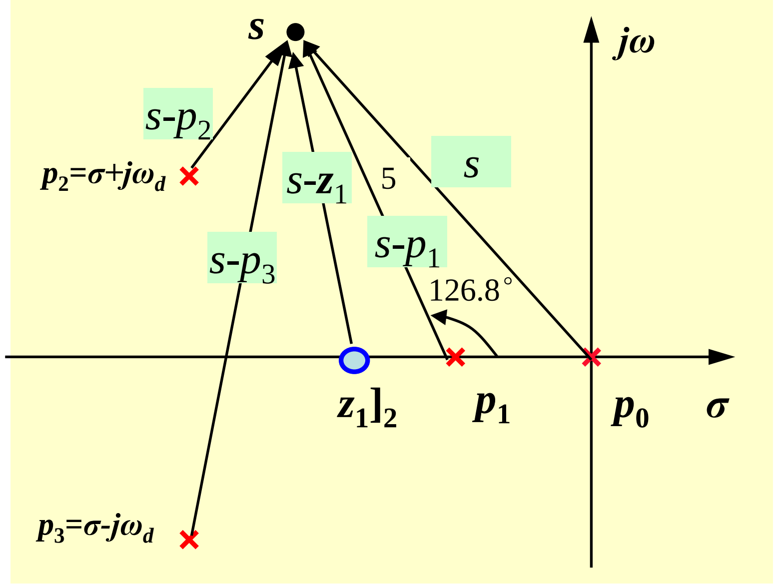
根轨迹概述——幅值条件与相角条件

例如

$$G(s)H(s)=\frac{K(s-z_1)^2}{s(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

有4个极点和2个零点

零极点图：



注意：

1) 图上的多重零极点用 ⊙]q 或×]q 表示，q 表示零极点的重数。

2) 所有的相角取正，即逆时针(CCW)测量

例如，试验点：

s = -4+j4， p_1= -1，那么

$$s-p_1=-3+j4 \qquad or$$

$$|s-p_1|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$$

$$\angle(s-p_1)=126.8^\circ$$

根轨迹概述——幅值条件与相角条件

例5-3

$$G(s)H(s)=\frac{K_0(1+0.25s)}{(1+s)(1+0.5s)(1+0.2s)}$$

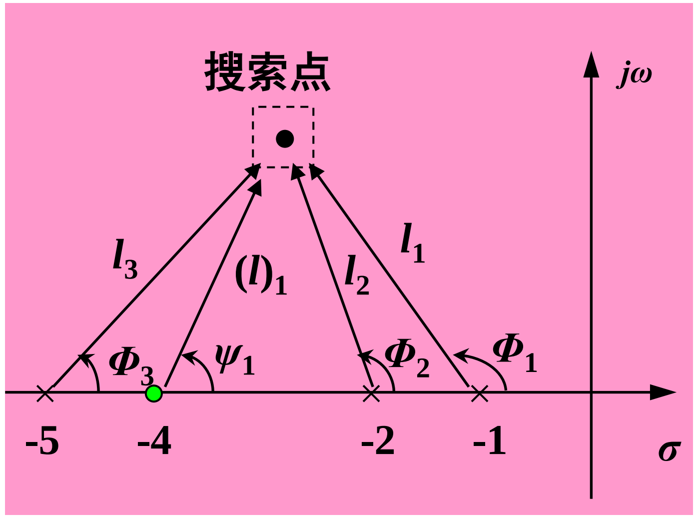
$$G(s)H(s)=\frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$K=2.5K_0$$

Step1. 绘制开环零极点

Step2. 任意选择一个搜索点

Step3. Φ 表示分母对应的相角, ψ表示分子对应的相角， l 表示分母因式线段的距离，(l) 表示分子因式线段的距离



根轨迹概述——幅值条件与相角条件

Step4. 判断下述相角条件是否满足。若是，则此搜索点在根轨迹上

$$\angle G(s)H(s)=\psi_1-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3=\begin{cases}(2h+1)180^\circ & for\quad K>0\\ h360^\circ & for\quad K<0\end{cases}$$

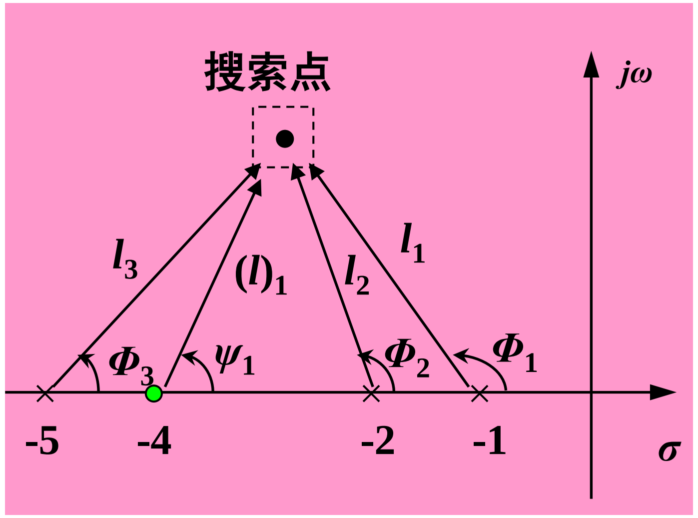
一旦所有的开环零极点确定，则根轨迹增益为

$$|K|=\frac{l_1 l_2 l_3}{(l)_1}\qquad l_1=|s_1+1|\qquad l_2=|s_1+2|\qquad l_3=|s_1+5|\qquad (l)_1=|s_1+4|$$

注意：

1) 确定K的符号，就可以应用对应的相角条件来确定根轨迹。

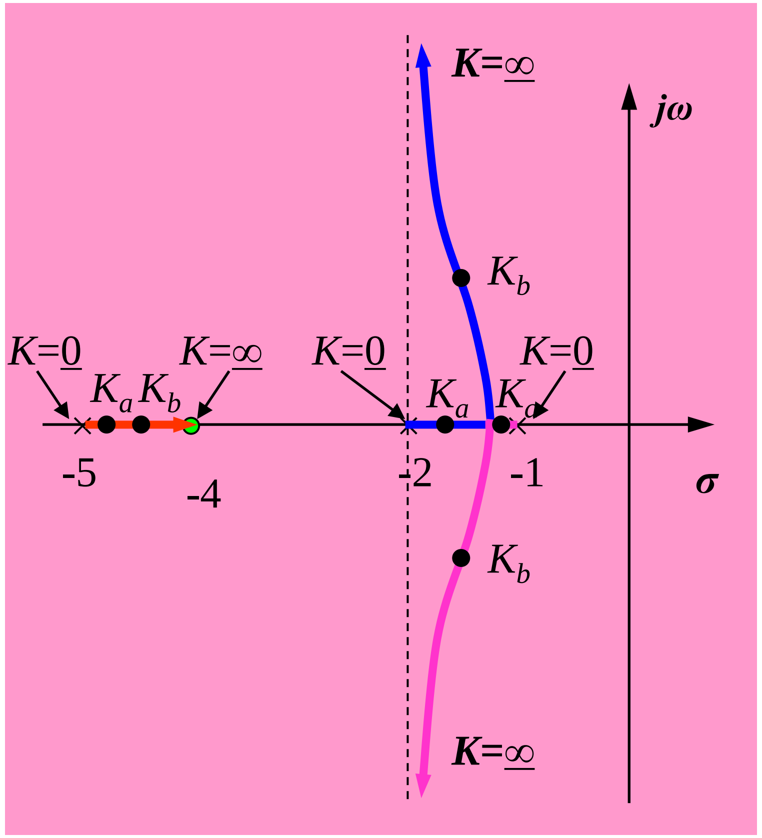
2) 由于复根是成共轭对出现的，因此根轨迹关于实轴对称，图中只表现了其中的一半。



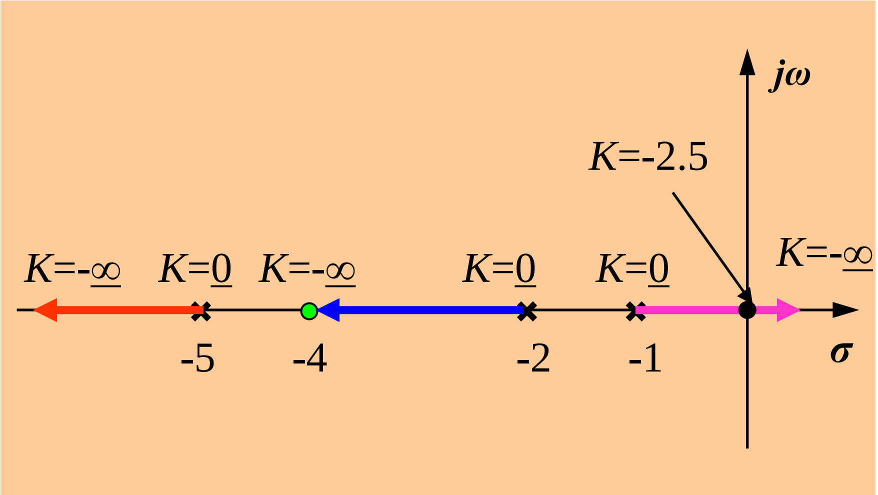
根轨迹概述——根轨迹

本系统的根轨迹：

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$



$K>0$



注意：

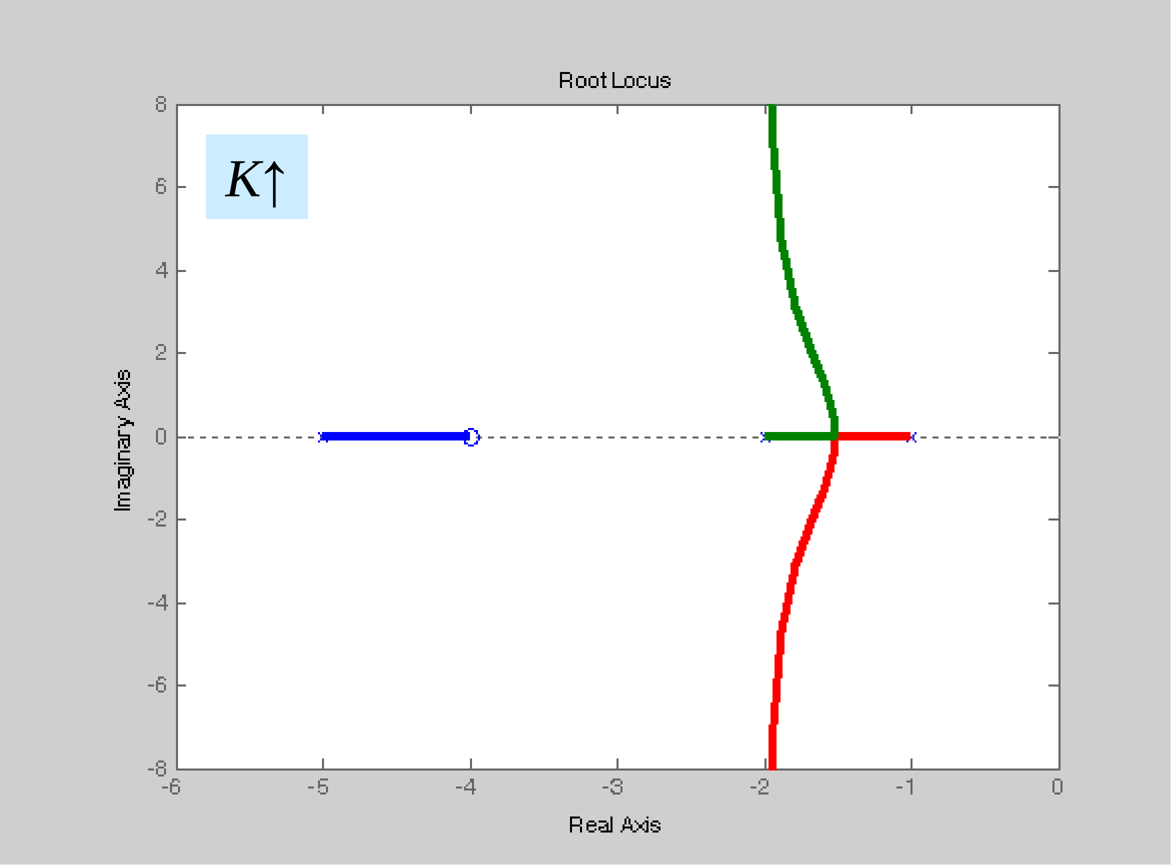
$K<0$

当 $K<0$，$K>-2.5$时三条根轨迹均位于S的左半平面

根轨迹概述——根轨迹

用MATLAB绘制的根轨迹

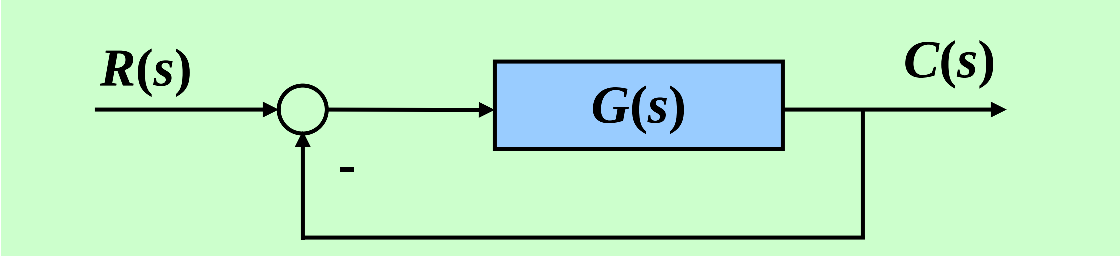
$$G(s)H(s)=\frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$



$K>0$

根轨迹概述——参数根轨迹

例5-4



如果例5-1中 K=1，时间常数T可调，则开环传递函数：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+T)}$$

闭环传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{s(s+T)+1}=\frac{1}{s^2+Ts+1}$$

特征方程：

$$s^2+Ts+1=0$$

$$s_{1,2}=-\frac{T}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{T^2-4}$$

$$1+\frac{Ts}{s^2+1}=0 \Rightarrow G_{eqo}(s)=\frac{Ts}{s^2+1}$$

根轨迹概述——参数根轨迹

特征方程： $s^2+Ts+1=0$

$$s_{1,2}=-\frac{T}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{T^2-4}$$

$$G(s)=\frac{1}{s(s+T)}$$

$$G_{eqo}(s)=\frac{Ts}{s^2+1} \Leftarrow 1+\frac{Ts}{s^2+1}=0$$

$$T=-\frac{s^2+1}{s}$$

绘制根轨迹：2条分支

开环极点： +j, -j

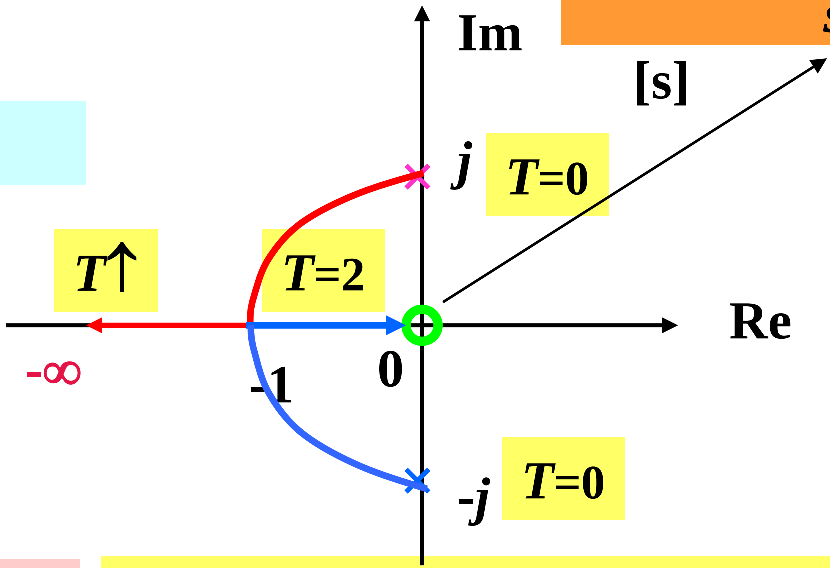
开环零点：0

T=0 —— 特征根s_1=s_2=±j;

T=2 —— 特征根s_1= s_2= -1

0<T<2 —— 特征根$s_{1,2}$ 为复共轭极点，位于S左半平面

T>2 —— 特征根是实数，且 $s_1\to -\infty$, $s_2\to 0$



因此，不仅只有参数 K 可以调整

根轨迹概述——性能分析与设计

根轨迹法进行系统性能分析与设计的基本步骤

- 由性能指标确定**主导极点**——通常希望过渡过程有一点衰减振荡（欠阻尼振荡），这就要求系统有一对共轭复根。
- 时域指标中的阻尼比ζ、调节时间T_s（对于2%是$T_s=4/\zeta\omega_n$)、自然频率ω_n，或者阻尼振荡频率ω_d等均可用于确定主导极点——因其可以直观地在S平面上表示出来。
- 反映性能指标的信息在S平面上与根轨迹的交点便是欲求的主导极点，进而通过幅值条件确定系统增益。
- 一旦主导极点确定并进而求出系统增益，则该增益条件下的其他极点也可以求到。

根轨迹概述——性能分析与设计

问题：

（1）是否只能按前面例子那样逐点绘制根轨迹？

（2）如果绘制出的根轨迹不满足期望的瞬态响应怎么办？

- 根据幅值条件和相角条件，有一系列规则可以使根轨迹绘制高效简单。
- 如果根轨迹无法满足动态响应，则必须通过补偿环节来改变根轨迹的形状，从而获得期望的响应。

The End