第二章 连续信号的分析

浙江大学 电气工程学院

杨欢

yanghuan@zju.edu.cn

连续信号的频域分析

- 周期信号的频谱分析
- 非周期信号的频谱分析
- 傅立叶变换的性质
- 周期信号的傅里叶变换

傅里叶生平

- 1768年生于法国
- 1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 1822年首次发表在“热的分析理论”书中
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件

周期信号的傅立叶级数展开式

三角函数的傅立叶级数

周期为T_0的周期信号x(t)，如果满足狄里赫利条件，都可以分解成三角函数不等式：

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)}$$

直流分量

基波分量 n =1

谐波分量 n>1

周期信号的傅立叶级数展开式

直流系数 $$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt$$

余弦分量系数 $$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos n\omega_0 t dt$$

n的偶函数

正弦分量系数 $$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin n\omega_0 t dt$$

n的奇函数

周期信号的傅立叶级数展开式

狄利赫利条件：

- 在一个周期内只有有限个间断点；
- 在一个周期内有有限个极值点；
- 在一个周期内函数绝对可积，即

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)| dt < \infty$$

- 通常周期信号都满足这些条件.

周期信号的傅立叶级数展开式

傅立叶级数的三角函数正交集表示

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$$

表明一个周期信号可以分解为直流分量和一系列余弦或正弦形式的交流分量

$$A_0=a_0$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

周期信号的频谱

- 基波信号、谐波信号：周期信号可以分解为一系列余弦信号之和：

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

- 表明一个周期为 T_0 的信号，除直流分量外，包含有频率为原信号频率以及原信号频率的整数倍的一系列正弦型信号，分别将它们称为基波信号（n=1,也称为一次谐波信号），二次谐波信号（n=2）,以及三次、四次……谐波信号，它们的振幅分别为对应的A_n，相位为 φ_n

周期信号的傅立叶级数展开式

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

↓ 欧拉公式

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\omega_0 t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-j\varphi_n}e^{-jn\omega_0 t}$$

↓ 奇、偶函数

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\omega_0 t}+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\omega_0 t}$$

↓ A_0内置

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\omega_0 t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

注意上下限！

周期信号的傅立叶级数展开式

复傅里叶系数

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}[A_n\cos(\varphi_n)+jA_n\sin(\varphi_n)]$$

$$=\frac{1}{2}[a_n - jb_n]$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)[\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t]dt$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

周期信号的傅立叶级数展开式

对于实信号， $x(t)=x^*(t)$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$$x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X^*(n\omega_0)e^{-jn\omega_0 t}$$

用 -*n* 取代 *n*， $x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X^*(-n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$

得： $\boxed{X(n\omega_0)=X^*(-n\omega_0)}$

周期信号的傅立叶级数展开式

傅立叶级数的指数形式

运算比较方便

$$x(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{j\varphi_n}e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

周期信号的频谱函数

- **频谱函数：**

指数形式的傅立叶级数表达式中复数量

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n}$$

随频率 $n\omega_0$ 的分布称为信号的频谱，也称为周期信号的频谱函数。

- **幅度频谱、相位频谱：**

由于$X(n\omega_0)$包含了幅度和相位的分布，通常把幅度 $|X(n\omega_0)|$随频率的分布称为幅度频谱，简称幅频，相位 φ_n 随频率的分布称为相位频谱，简称相频。

Δ **频谱图：**

以频率为横坐标，各谐波分量的幅度或相位为纵坐标，画出幅频和相频的变化规律，称为信号的频谱图。

周期信号的频谱

复傅里叶系数:

$$X(n\omega_0)=|X(n\omega_0)|\angle X(n\omega_0)\quad [X(n\omega_0)=\overset{*}{X}(-n\omega_0)]$$

$$\{\cdots,\ |X(-2\omega_0)|,\ |X(-\omega_0)|,\ |X(0)|,\ |X(\omega_0)|,\ |X(2\omega_0)|,\ \cdots\}$$

$$=\{\cdots,\ \frac{A_2}{2},\ \frac{A_1}{2},\ \frac{A_0}{2},\ \frac{A_1}{2},\ \frac{A_2}{2},\ \cdots\}\ \text{和}$$

$$\{\cdots,\angle|X(-2\omega_0)|,\angle|X(-\omega_0)|,\ \angle|X(0)|,\ \angle|X(\omega_0)|,\ \angle|X(2\omega_0)|,\ \cdots\}$$

$$=\{\cdots,-\varphi_2,-\varphi_1,0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\}$$

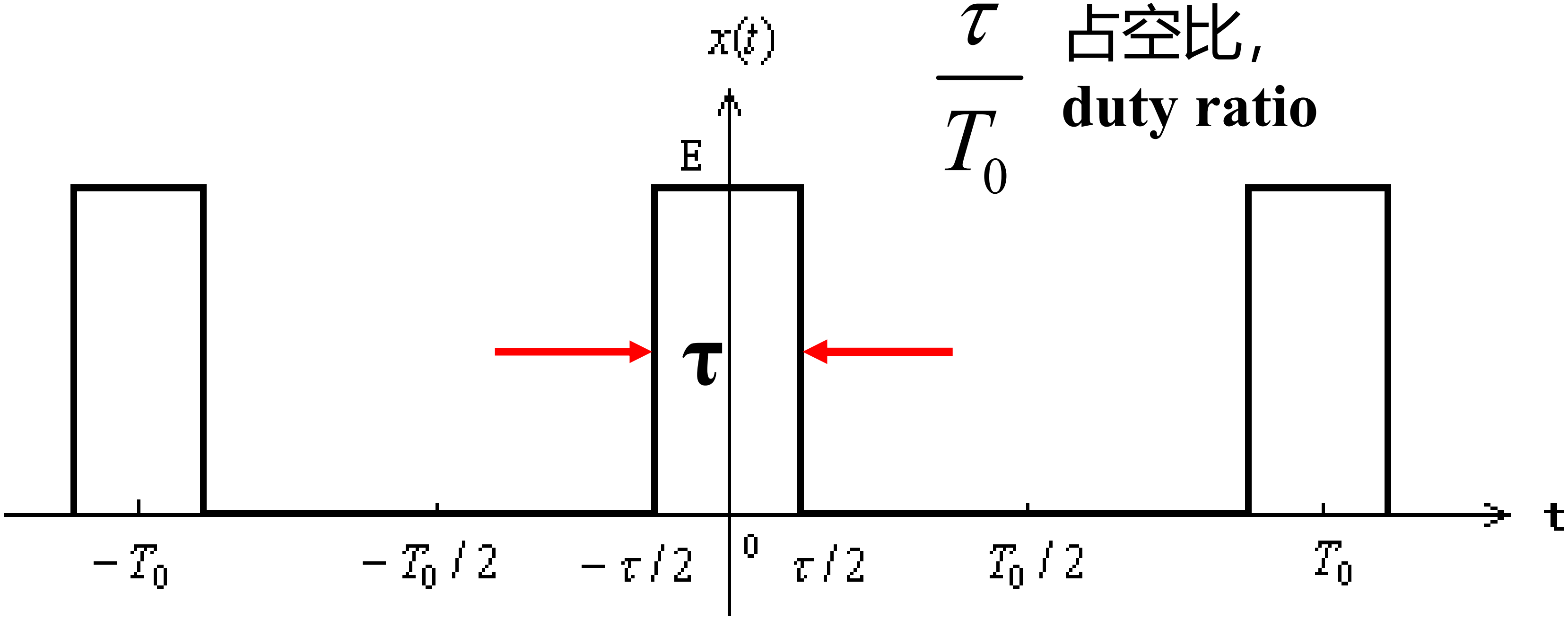
三角傅里叶级数形式与复指数傅里叶级数形式的对比

用图形表示，并分别称其为周期信号的幅度（频）谱和相位（频）谱。

周期信号的频谱

- 求下图所示的周期矩形脉冲信号的复指数形式傅立叶级数表示式。

$\dfrac{\tau}{T_0}$ 占空比，**duty ratio**



周期信号的频谱

- **解：**如图所示的矩形脉冲信号在一个周期内可表示为

$$x(t)=\begin{cases} E & -\frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

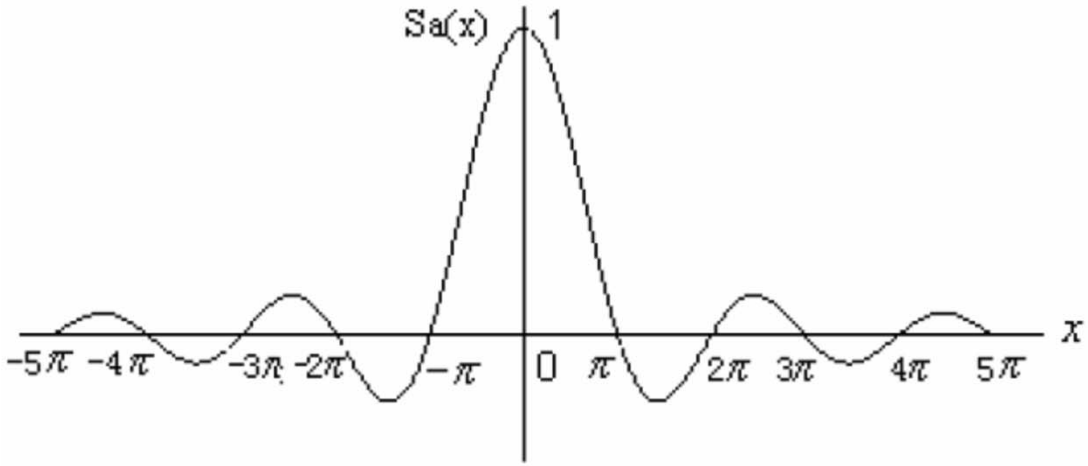
- 求复傅立叶系数

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{E}{T_0}\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{E\tau}{T_0}\frac{\boxed{\sin\frac{1}{2}n\omega_0\tau}}{\boxed{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}}$$

周期信号的频谱

➲ 出现 $\boxed{\dfrac{\sin x}{x}}$ 形式的函数，在信号理论中经常遇到，称为**取样函数**，记作$Sa(x)$,它是偶函数，当 $x \to 0$ 时，$Sa(x)=1$为最大值，随着$|x|$的增大而总趋势衰减，$x=\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$为过零点，每 2π 起伏一次。



周期信号的频谱

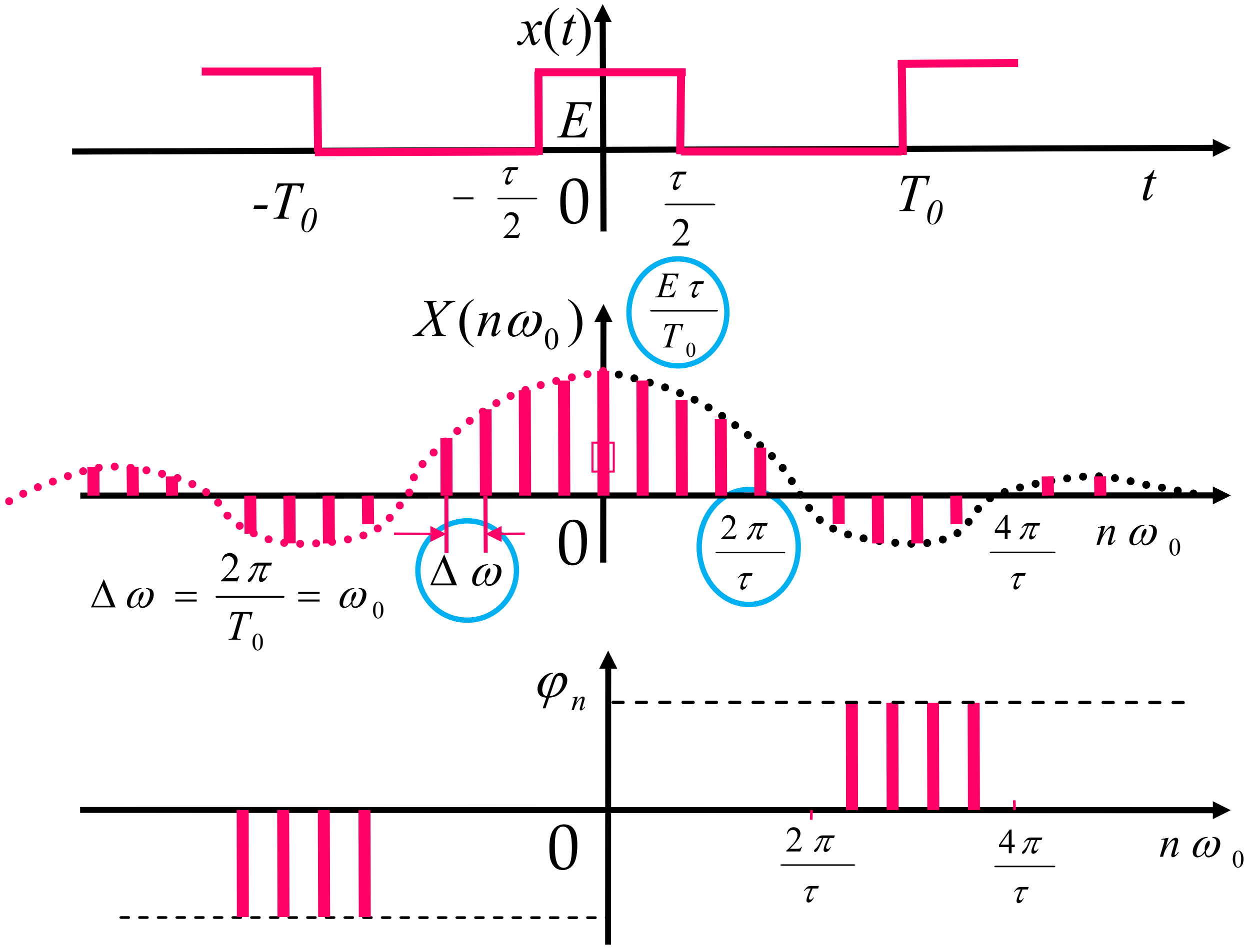
- 因此，有

$$X(n\omega_0) = \frac{E\tau}{T_0} Sa(\frac{n\omega_0\tau}{2})$$

- 周期矩形脉冲信号复指数形式傅立叶级数展开式为

$$x(t) = \frac{E\tau}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)e^{jn\omega_0 t}$$

周期信号的频谱

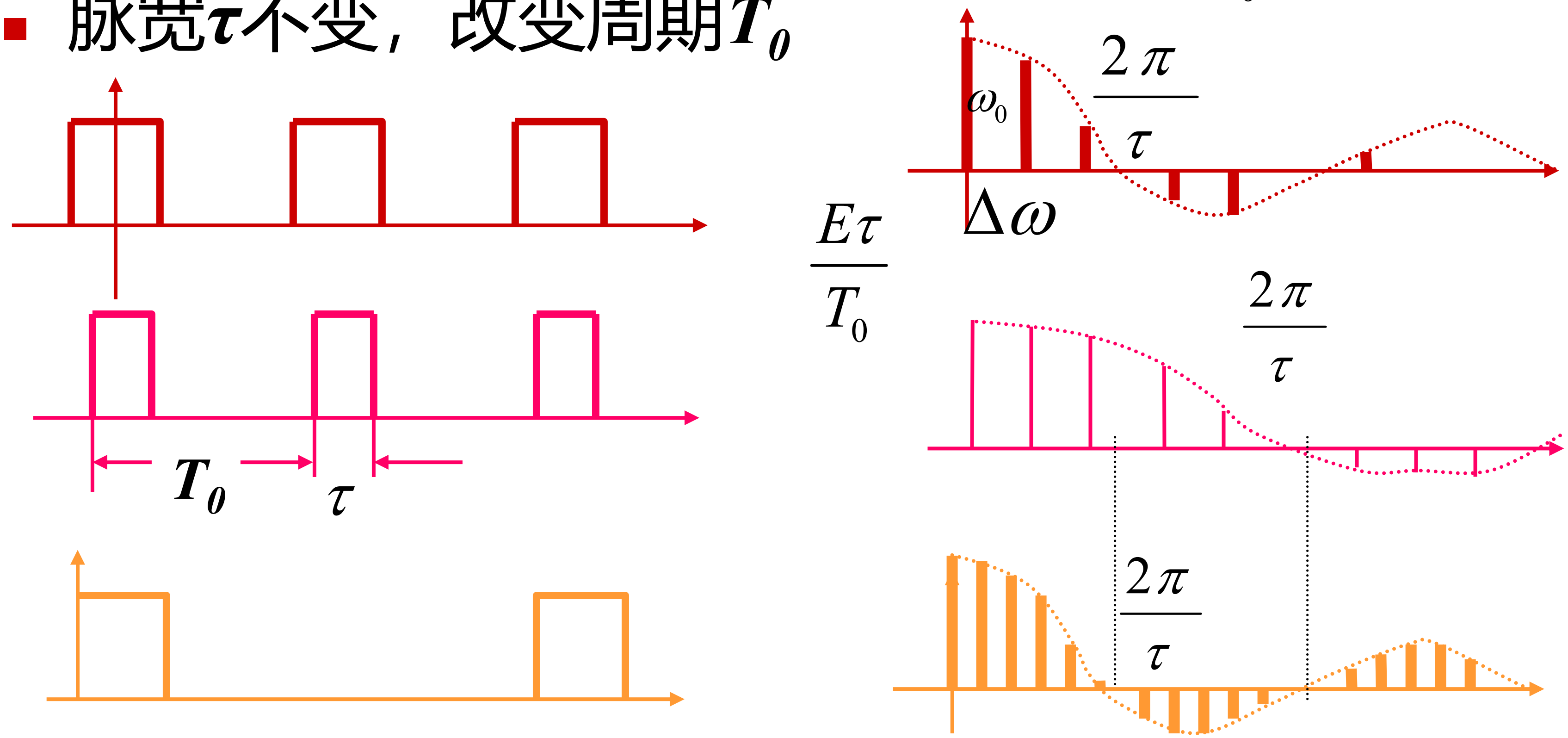


$x(t)$
E
$-T_0$
$-\frac{\tau}{2}$
0
$\frac{\tau}{2}$
T_0
t
$X(n\omega_0)$
$\frac{E\tau}{T_0}$
0
$\Delta\omega$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
$n\omega_0$
$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$
φ_n
0
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
$n\omega_0$

周期矩形脉冲的频谱变化规律

- 周期T_0不变，改变脉宽τ
- 脉宽τ不变，改变周期T_0

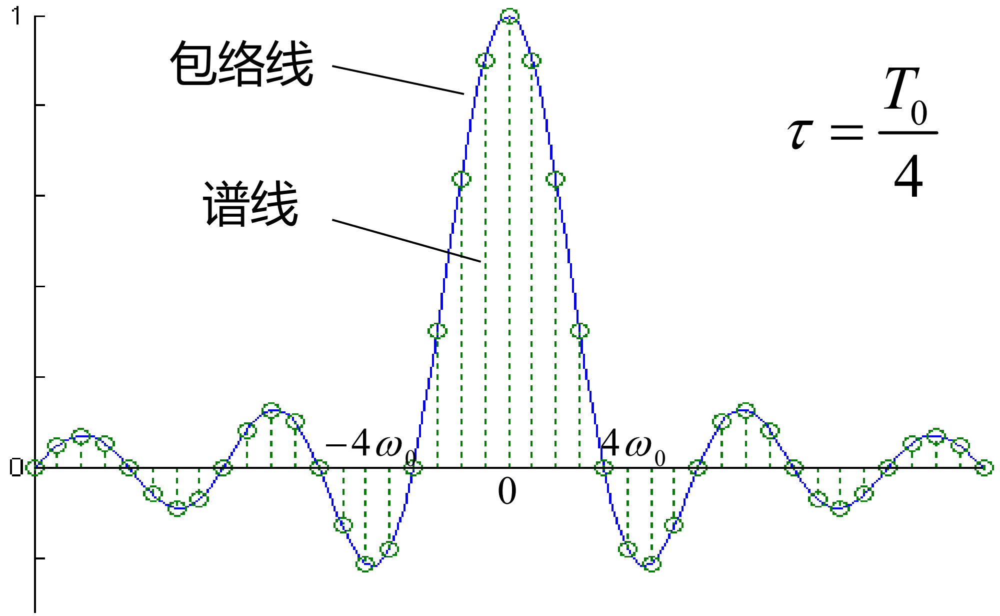
$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$



周期矩形脉冲信号频谱的特点

- 周期矩形脉冲信号的频谱特性——离散性

频谱反映了个频率分量幅度随频率变化的情况

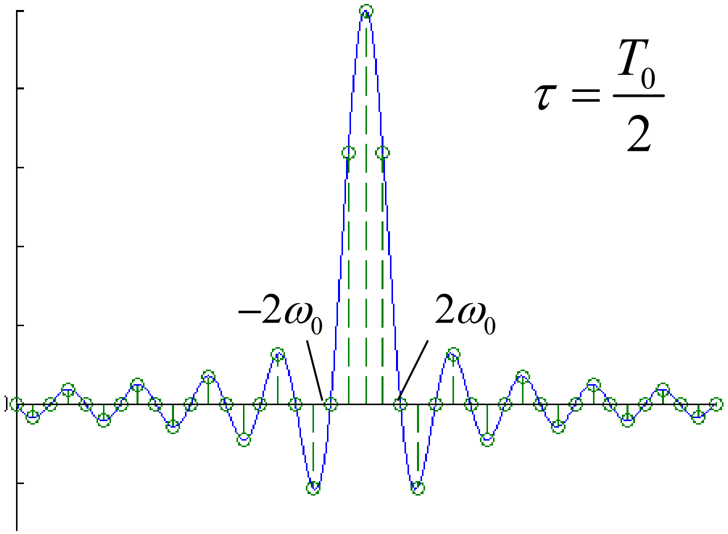


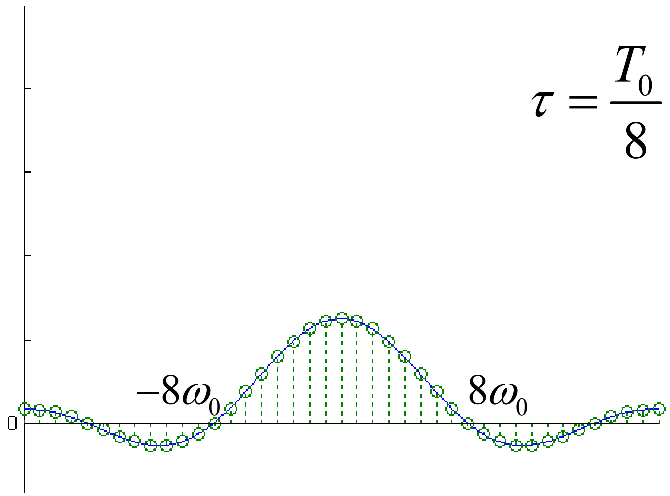
周期矩形脉冲信号频谱的特点

- 周期矩形脉冲信号的频谱特性——谐波性

频谱以基波频率ω_0为间隔等距离分布，

表明周期矩形脉冲信号只包含直流分量、基波分量和各次谐波分量。





周期矩形脉冲信号频谱的特点

- 周期矩形脉冲信号的频谱特性——收敛性

频谱幅度整体上具有减小的趋势，

较高幅值的频谱集中在第一个过零点范围内，

表明信号的能量绝大部分由该频率范围的各谐波分量决定。

通常，这个频率范围称为**频带宽度**或**带宽。**

任何满足狄里赫利条件的周期信号频谱都具有
- 离散性
- 谐波性
- 收敛性

周期信号的频谱

例3 求出复指数信号$e^{j\omega_0 t}$ 的频谱

- 复傅立叶系数为

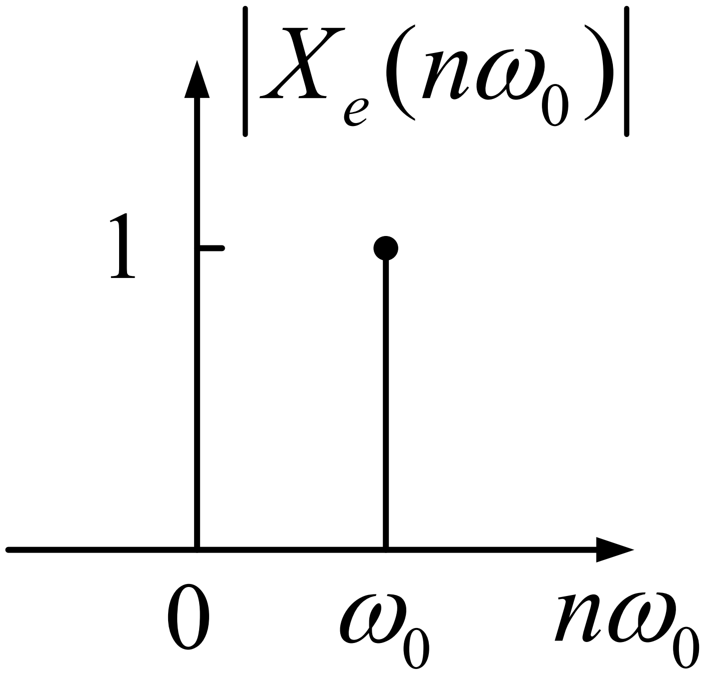
$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j(1-n)\omega_0 t} dt$$

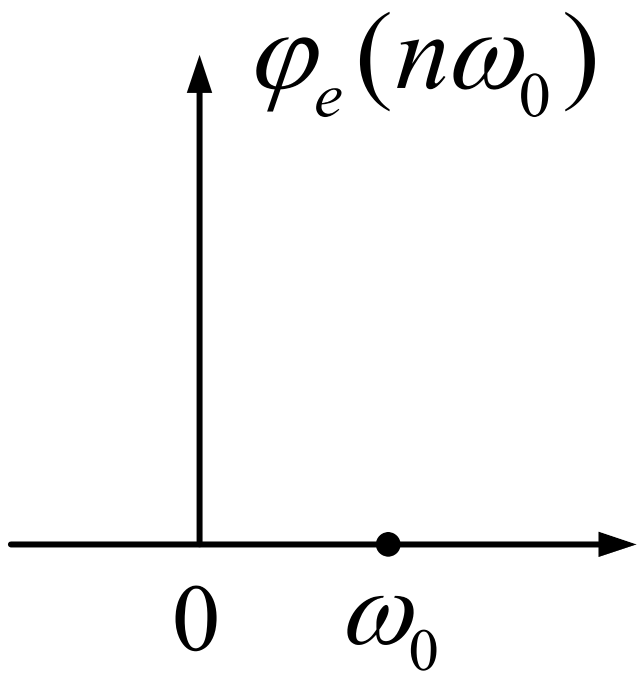
$$= \frac{1}{T_0 j(1-n)\omega_0} e^{j(1-n)\omega_0 t} \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{2j(1-n)\pi}[e^{j(1-n)\pi} - e^{-j(1-n)\pi}]$$

$$= \frac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)\pi} = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

周期信号的频谱

- 仅在 ω_0 处有幅度为 1 的分量，说明复指数信号是正弦信号的一种表现形式





周期信号的功率分配

- P为周期信号的平均功率

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x^2(t)dt$$

- 将 $x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$ 代入，有

$$P=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}[\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)]^2dt=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2$$

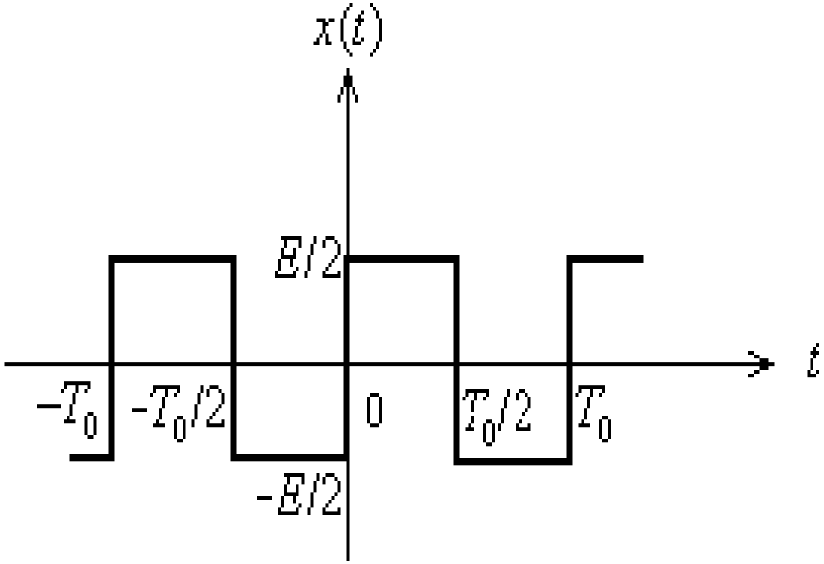
表明周期信号在时域的平均功率等于信号所包含的直流、基波及各次谐波的平均功率之和，反映了周期信号的平均功率对离散频率的分配关系，称为功率信号的**帕斯瓦尔公式**。

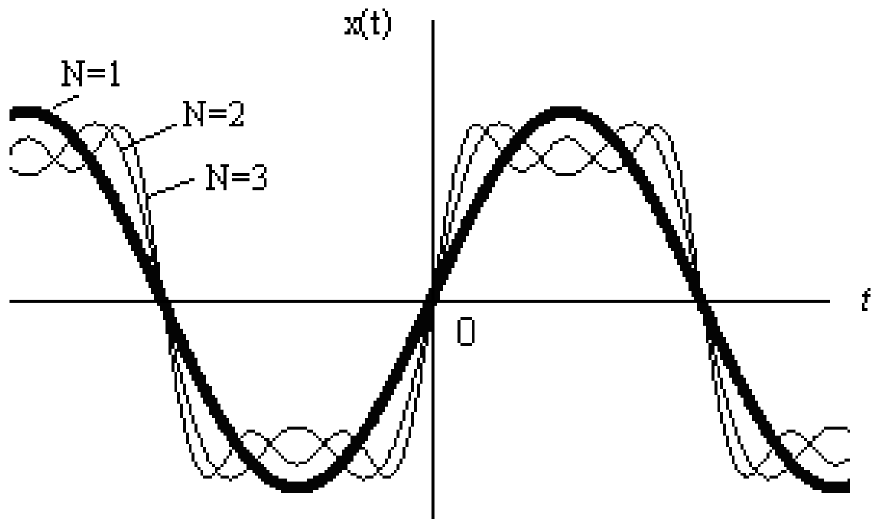
周期信号的傅立叶级数近似

一般情况下一个周期信号是由无穷多项正弦型信号（直流、基波及各项谐波）组合而成，换言之，一般情况下，无穷多项正弦型信号的和才能完全逼近一个周期信号。如果采用有限项级数表示周期信号，势必产生表示误差。

周期信号的傅立叶级数近似

➲ 周期方波信号的三角形傅立叶级数展开式





周期信号的傅立叶级数近似

- 傅立叶级数所取项数越多，叠加后波形越逼近原信号，两者之间的均方误差越小。
- 当信号为方波等脉冲信号时，其高频分量主要影响脉冲的跳变沿，低频分量主要影响脉冲的顶部。所以，波形变化愈激烈，所包含的高频分量愈丰富；变化愈缓慢，所包含的低频分量愈丰富。
- 组成原信号的任一频谱分量（包括幅值、相位）发生变化时，信号的波形也会发生变化。

回顾

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

三角函数表达式
三角函数集

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

复指数表达式
复指数函数集

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n}$$

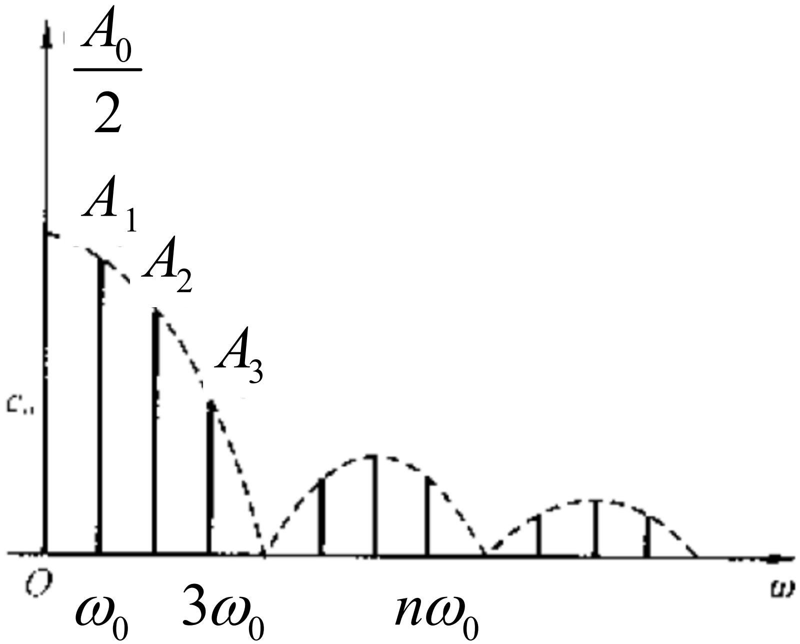
复傅里叶系数
周期函数的频谱（函数）

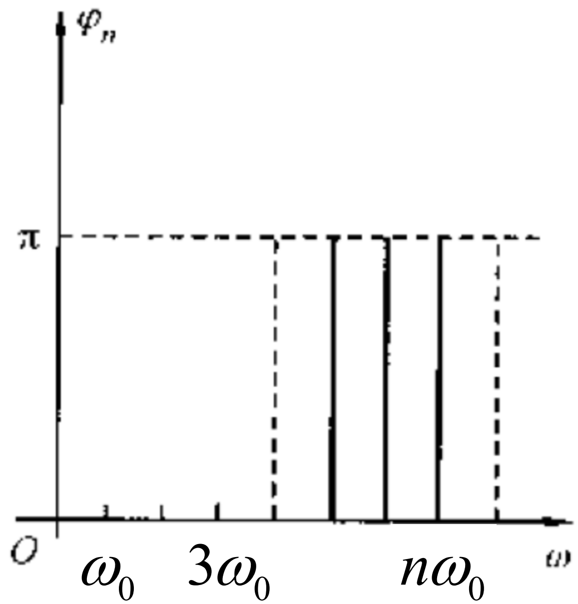
$$A_0=a_0 \quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

周期信号频谱的物理含义

- 三角函数形式的傅里叶级数

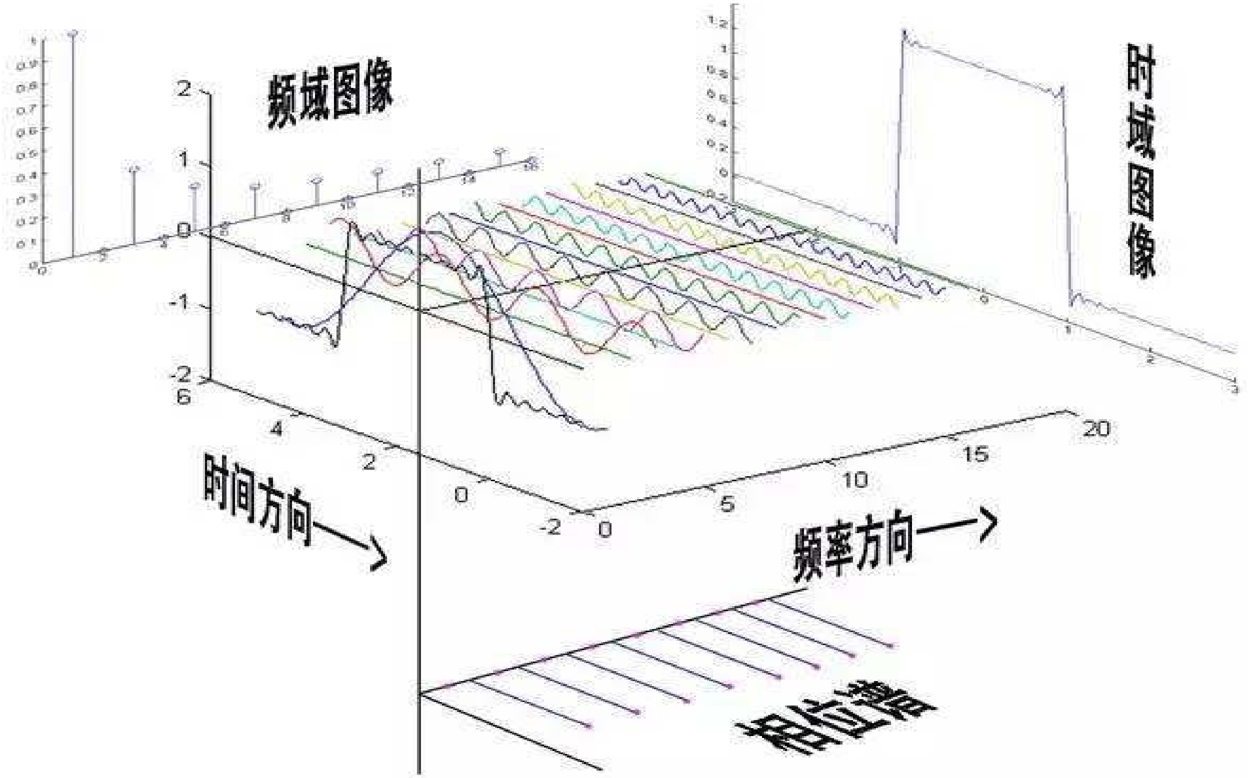
$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$$





周期信号频谱的物理含义

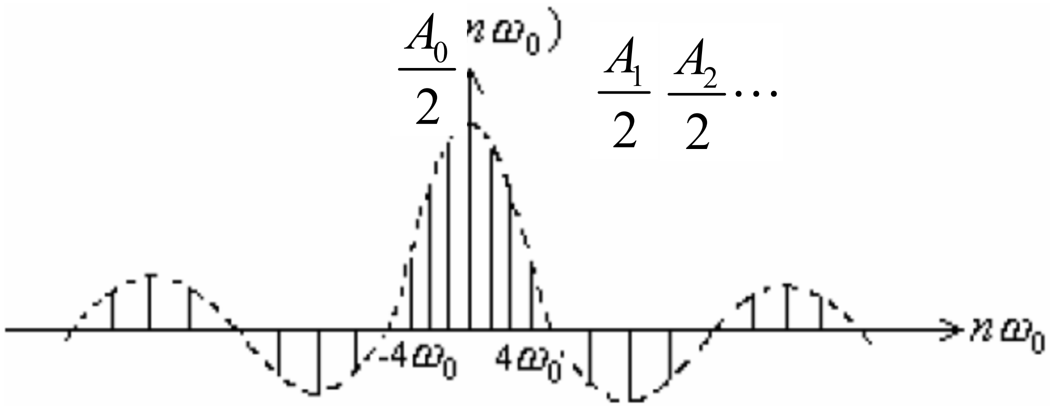
- 三角函数形式的傅里叶级数



周期信号频谱的物理含义

- 复指数形式的傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}\qquad X(n\omega_0)=\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n}$$



周期信号的频谱是离散函数，且为**双边谱**，幅频偶对称，相频奇对称。**“负”频率的出现是数学运算的结果**，正负频率上的谱线矢量相加才代表该分量的幅度

周期信号的频谱

复傅里叶系数：

$$X(n\omega_0)=\left|X(n\omega_0)\right|\angle X(n\omega_0)\quad [X(n\omega_0)=\overset{*}{X}(-n\omega_0)]$$

$$\{\cdots,\ \left|X(-2\omega_0)\right|,\ \left|X(-\omega_0)\right|,\ \left|X(0)\right|,\ \left|X(\omega_0)\right|,\ \left|X(2\omega_0)\right|,\ \cdots\}$$

$$=\{\cdots,\ \frac{A_2}{2},\ \frac{A_1}{2},\ \frac{A_0}{2},\ \frac{A_1}{2},\ \frac{A_2}{2},\ \cdots\}\ \text{和}$$

$$\{\cdots,\angle\left|X(-2\omega_0)\right|,\angle\left|X(-\omega_0)\right|,\ \angle\left|X(0)\right|,\ \angle\left|X(\omega_0)\right|,\ \angle\left|X(2\omega_0)\right|,\ \cdots\}$$

$$=\{\cdots,-\varphi_2,-\varphi_1,0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\}$$

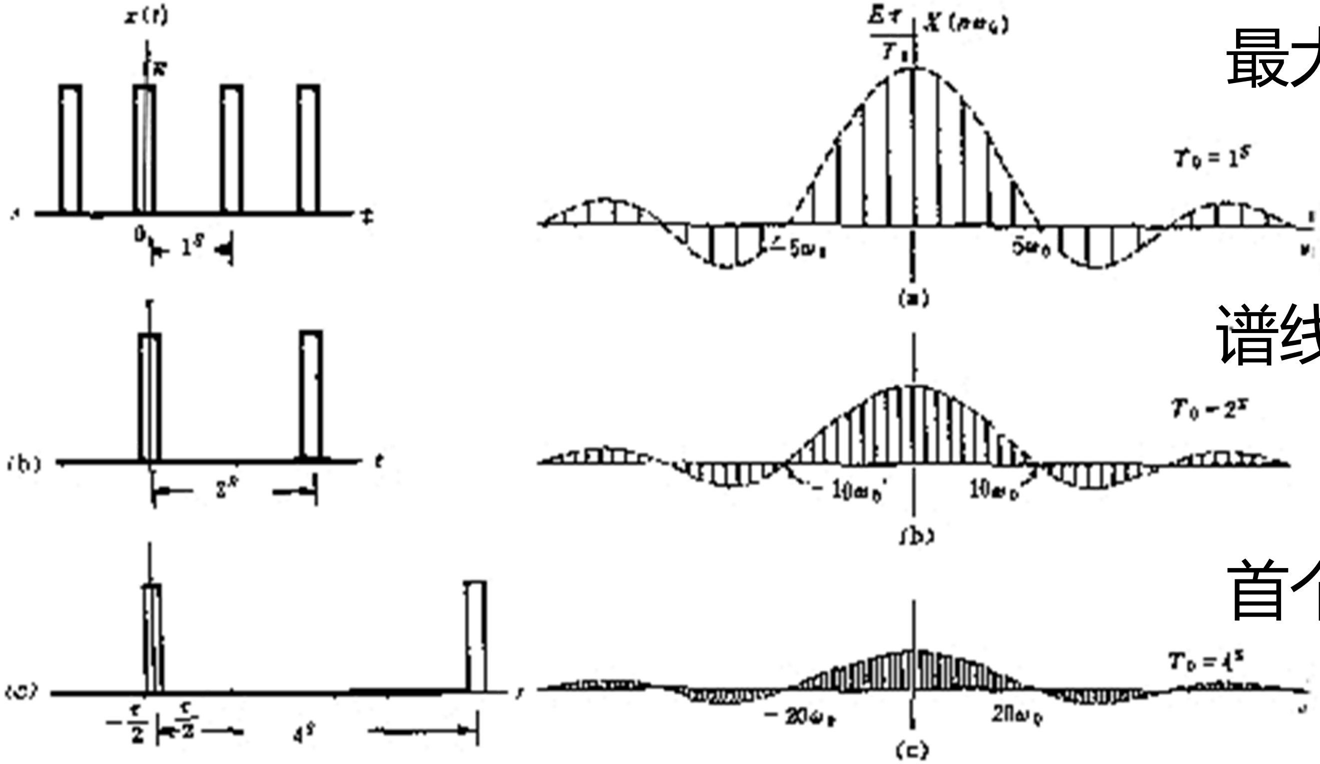
三角傅里叶级数形式与复指数傅里叶级数形式的对比

用图形表示，并分别称其为周期信号的幅度（频）谱和相位（频）谱。

二、非周期信号的频谱分析

- 从傅立叶级数到傅立叶变换
- 常见非奇异信号的频谱
- 奇异信号的频谱
- 周期信号的傅立叶变换

从傅立叶级数到傅立叶变换



最大值 $\dfrac{E\tau}{T_0}$

谱线间距 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

首个过零点 $\dfrac{2\pi}{\tau}$

从傅立叶级数到傅立叶变换

当周期矩形脉冲信号的周期T无限大时,就演变成了非周期的单脉冲信号

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$T_0 \to \infty \quad X(n\omega_0) \to 0$

$X(n\omega_0) \to T_0 X(n\omega_0)$

谱线无限密集，频率也变成连续变量

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \to 0 \to d\omega \qquad n\omega_0 \to \omega$$

从周期信号FS推导非周期的FT

$$\hat{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{X}(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow \hat{X}(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\hat{x}(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

一个非周期信号包含了频率从零到无限大的一切频率的余弦分量

$$x(t)=\lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{X}(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$$=\lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}T_0\hat{X}(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}\cdot\frac{1}{T_0}$$

$$=\lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}T_0\hat{X}(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}\cdot\omega_0$$

$$T_0\hat{X}(n\omega_0)=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\hat{x}(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$T_0\to\infty$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅立叶反变换

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅立叶变换

傅里叶变换

从物理意义来讨论傅立叶变换

- X(ω)是一个频谱密度函数的概念
- X(ω)是一个连续谱
- X(ω)包含了从零到无限高频率的所有频率分量
- 各频率分量的频率不成谐波关系

傅立叶变换存在的条件

- 在无限区间内是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

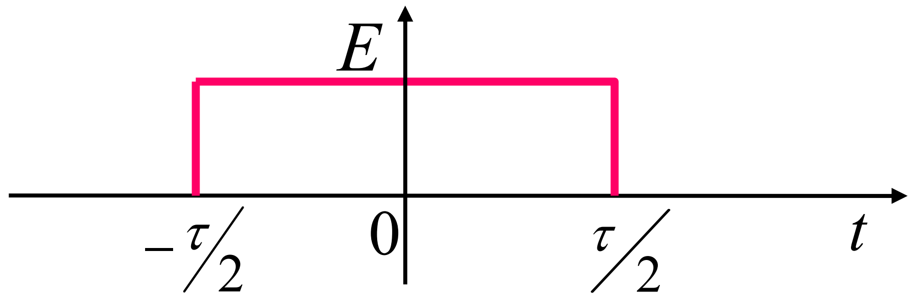
- 在任意有限区间内，$x(t)$只有有限个不连续点，在这些点上函数取有限值。
- 在任意有限区间内，$x(t)$只有有限个极大值和极小值。

常见非奇异信号的频谱

- 矩形脉冲信号
- 单边指数信号
- 双边指数信号
- 双边奇指数信号

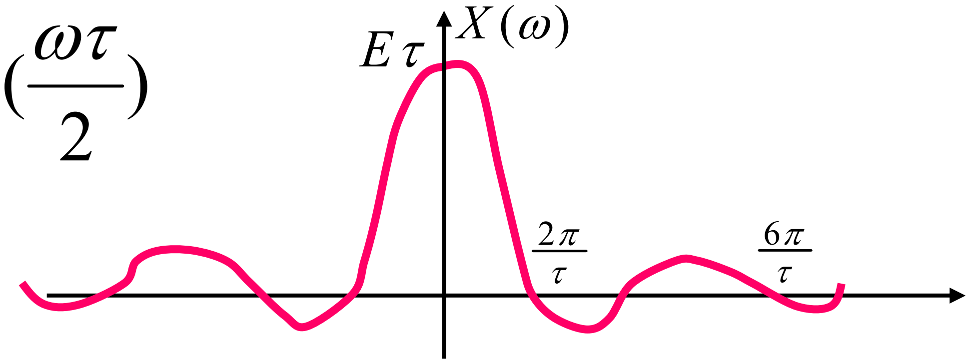
矩形脉冲信号

$$g(t)=\begin{cases} E & |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

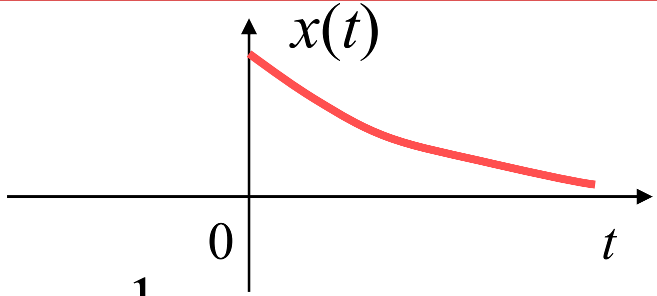


$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$



单边指数信号

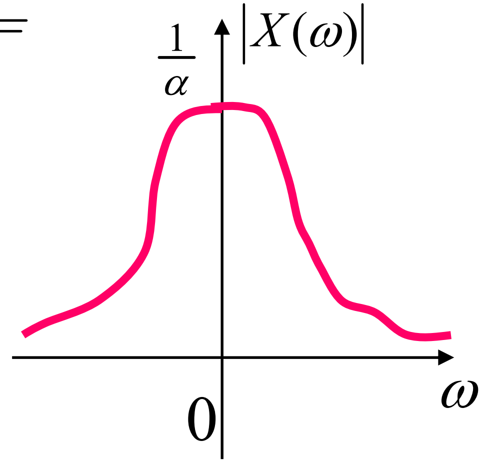


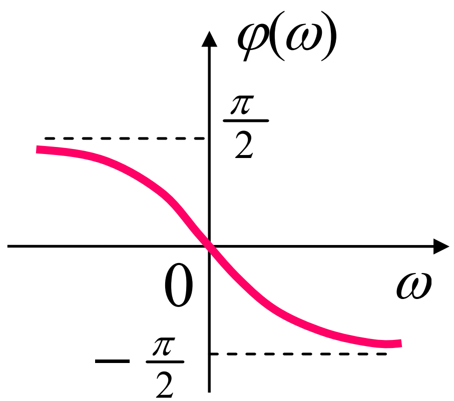
$$x(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0, a>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}$$

- **幅频** $|X(\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$

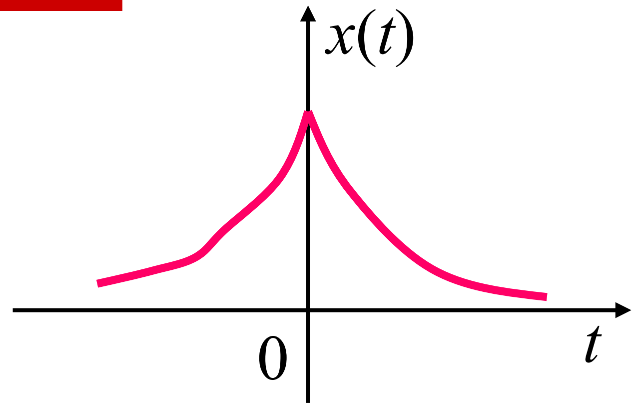
- **相频** $\varphi(\omega)=-\tan^{-1}(\dfrac{\omega}{a})$





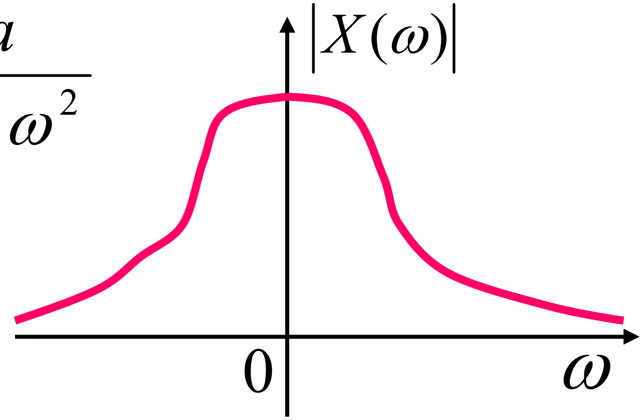
双边指数信号

$$x(t)=e^{-a|t|}\qquad a>0$$



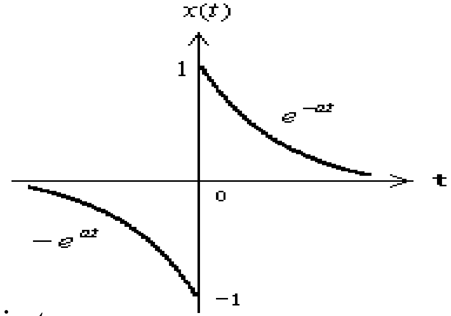
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$



双边奇指数信号

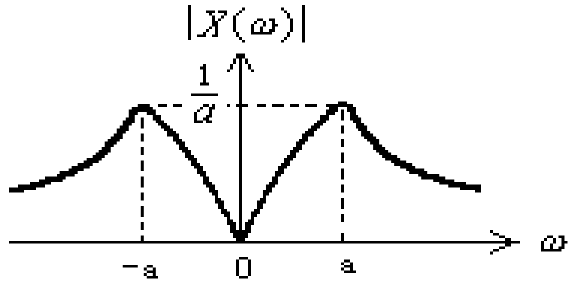
$$x(t)=\begin{cases}-e^{at} & t<0, a>0\\ e^{-at} & t>0, a>0\end{cases}$$



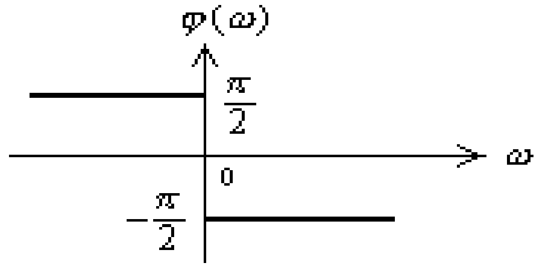
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}(-e^{at}e^{-j\omega t})dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$$

- 幅频 $|X(\omega)|=\dfrac{2|\omega|}{a^2+\omega^2}$



- 相频 $\varphi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \omega<0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \omega>0\end{cases}$



复习

连续信号的频域分析

周期信号的频谱分析

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

周期信号频谱特点

离散性

谐波性

收敛性

非周期信号的频谱分析

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

非周期信号频谱特点

连续性

非谐波性

收敛性

复习

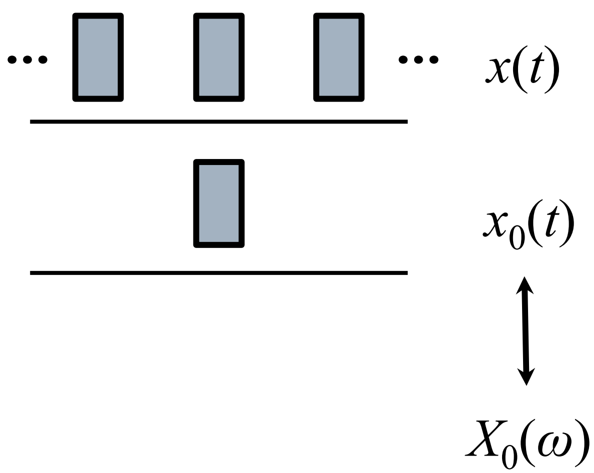
周期矩形脉冲信号的频谱的特点

- **离散性：** 频谱是非周期性的离散的线状频谱
- **谐波性：** 谱线以基波频率为间隔等距离分布，表明周期矩形脉冲信号只包含直流分量、基波分量和各次谐波分量。
- **收敛性：** 谱线幅度整体上具有减小的趋势。

复习

取周期信号 $x(t)$ 的一个周期:

$$x_0(t)=\begin{cases} x(t) & |t|\le \dfrac{T_0}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$



$$X_0(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_0(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

对照： $X(n\omega_0)=\dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t$

$$\boxed{X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\cdot X_0(n\omega_0)}$$

周期脉冲的复傅里叶氏系数等于单脉冲的傅里叶变换在 $n\omega_0$ 的频率点的值除以 T_0

奇异信号的频谱

- 单位冲激信号
- 单位直流信号
- 符号函数信号
- 单位阶跃信号

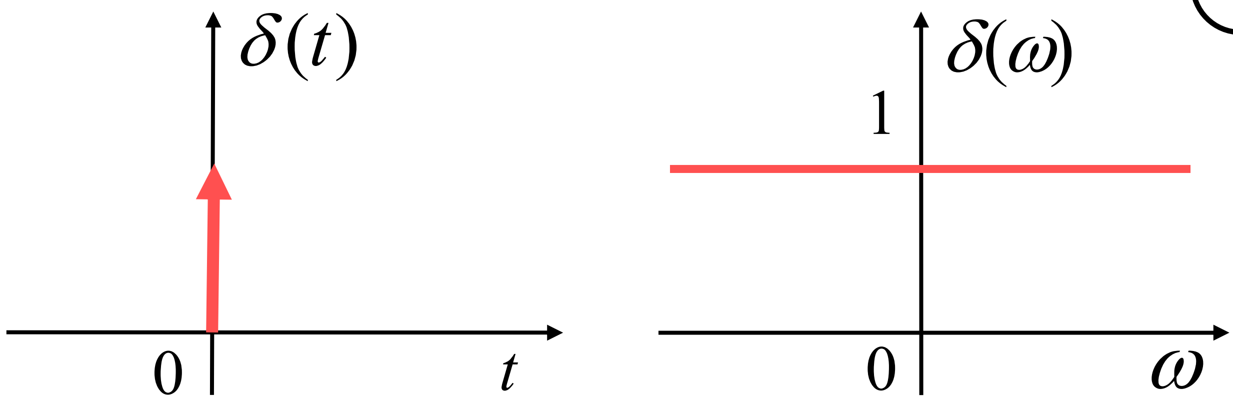
往往不满足狄里赫利条件，通常用求极限的方法得到其频谱。

单位冲激信号

➲ **根据冲激函数的抽样特性，有**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{0} = 1$$

也可由单矩形脉冲信号的傅立叶变换取极限得到



单位直流信号

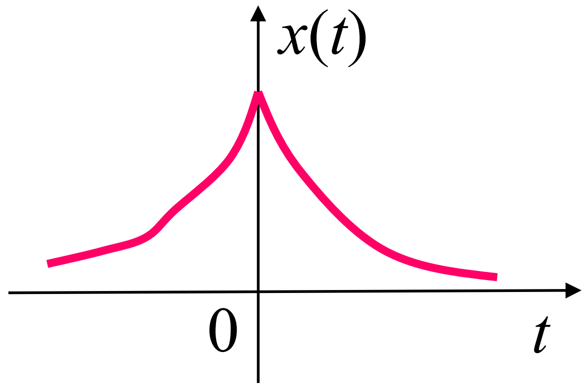
$$x(t) = 1 \qquad -\infty < t < \infty$$

➲该信号不满足绝对可积条件，可以把它看作双边指数信号 $e^{-a|t|}(a > 0)$ 当$a \to 0$ 的极限。

$$F[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \xrightarrow{\text{a趋于零}} X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

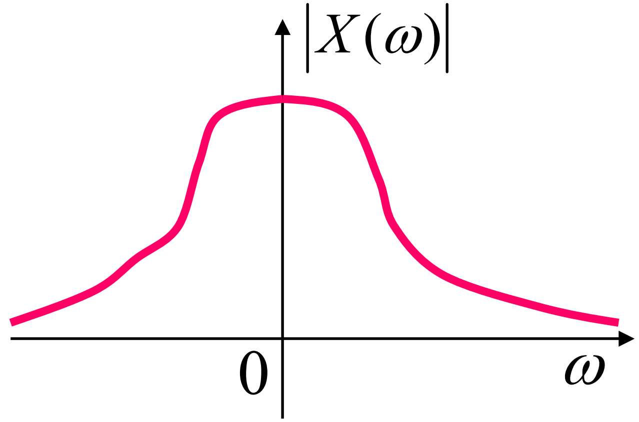
双边指数信号

$$x(t)=e^{-a|t|} \qquad a>0$$

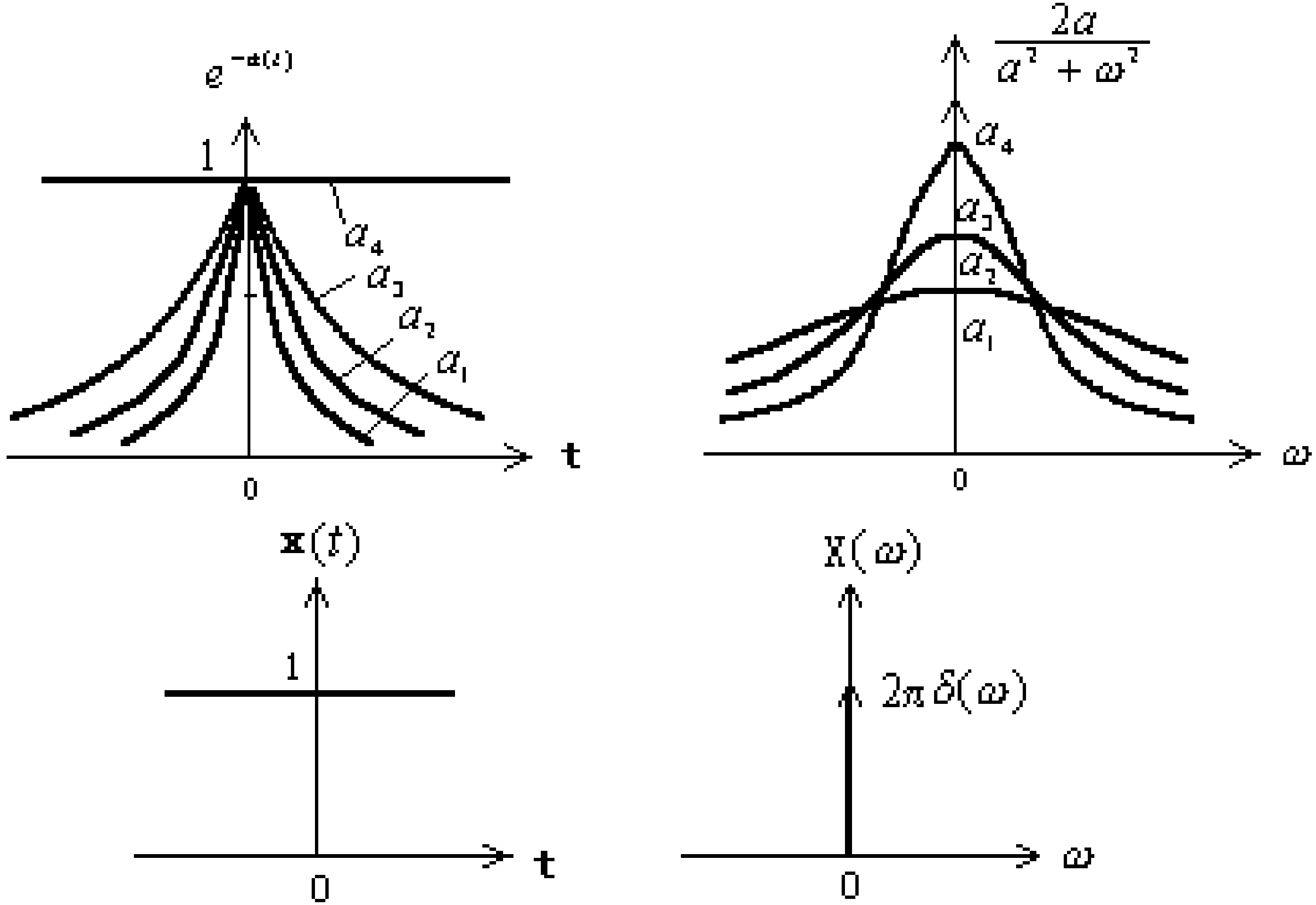


$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$



双边指数信号



$e^{-a|t|}$
1
a_4
a_3
a_2
a_1
t
0
$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
a_4
a_3
a_2
a_1
ω
0
$x(t)$
1
t
0
$X(\omega)$
$2\pi\delta(\omega)$
ω
0

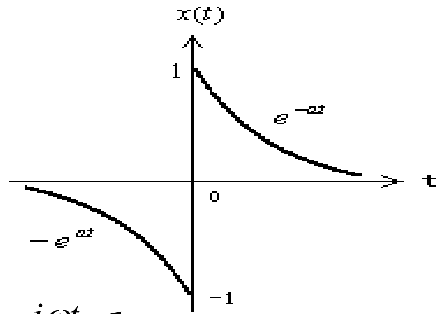
符号函数信号

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

- 把符号函数信号看成是双边奇指数信号当**a**趋于**0**时的极限 。

$$X(\omega)=\lim_{a\to 0}[-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}]=\begin{cases}\dfrac{2}{j\omega} & \omega\neq 0\\ 0 & \omega=0\end{cases}$$

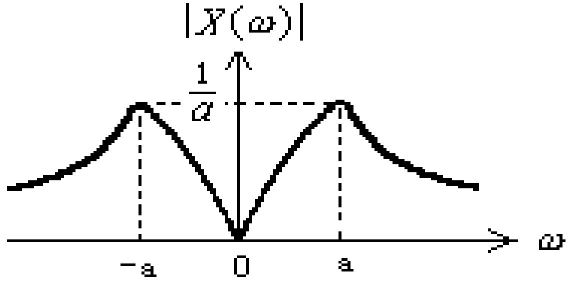
双边奇指数信号



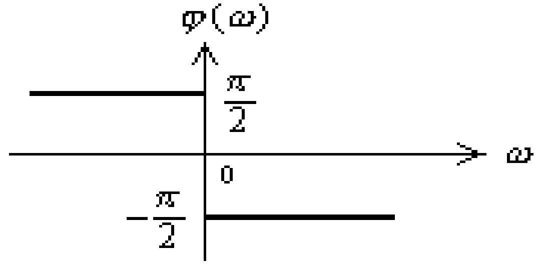
$$x(t)=\begin{cases}-e^{at} & t<0, a>0\\ e^{-at} & t>0, a>0\end{cases}$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}(-e^{at}e^{-j\omega t})dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

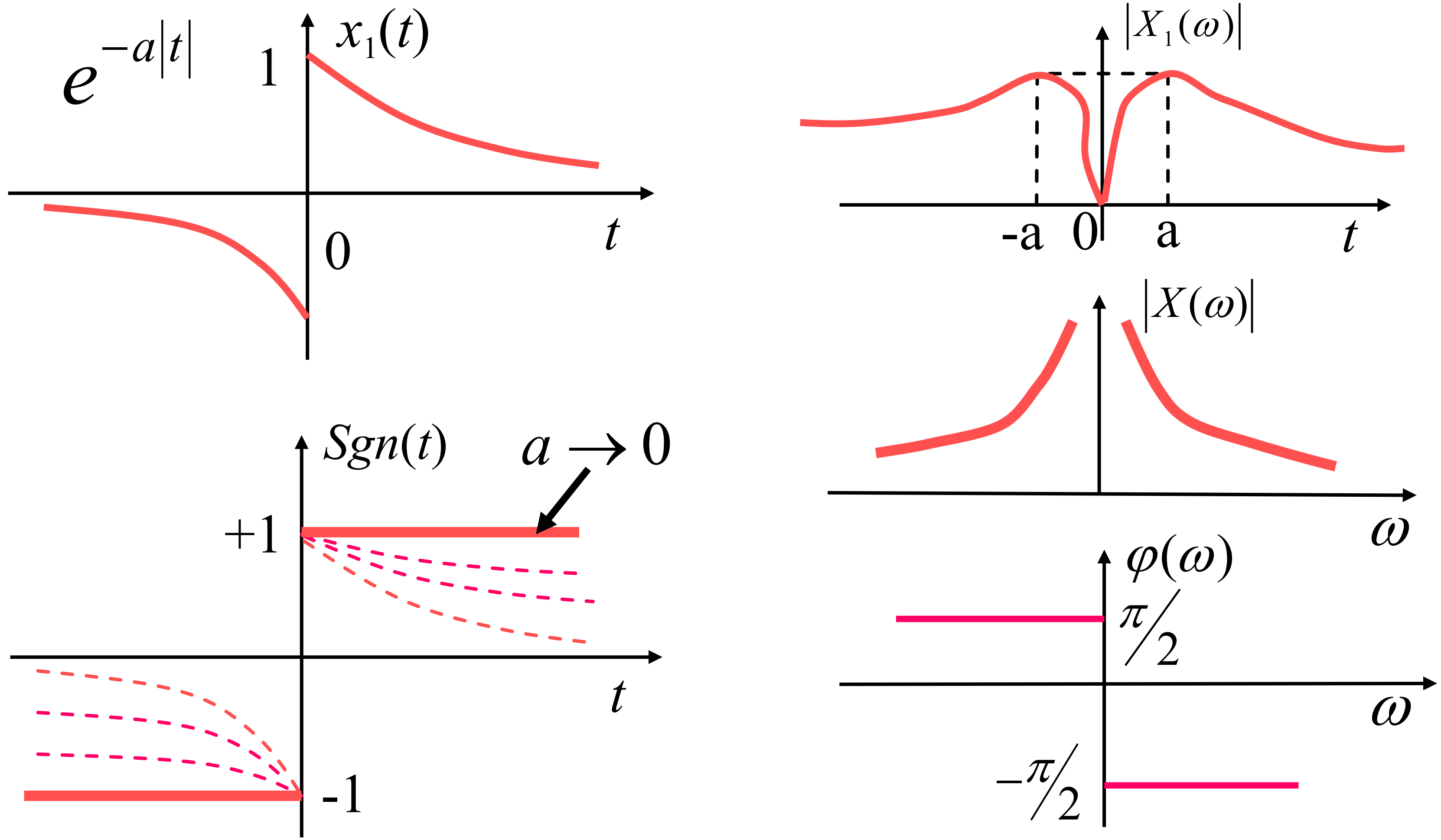
$$=-\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$$



- **幅频** $$|X(\omega)|=\frac{2|\omega|}{a^2+\omega^2}$$
- **相频** $$\phi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \omega<0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \omega>0\end{cases}$$



双边奇指数信号

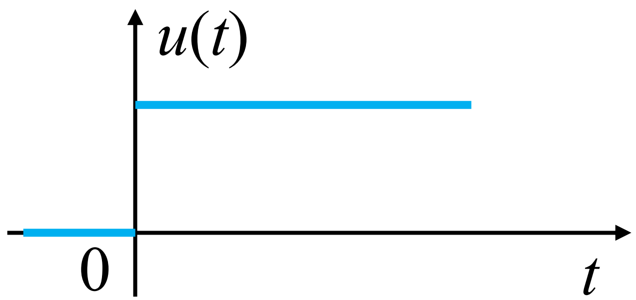


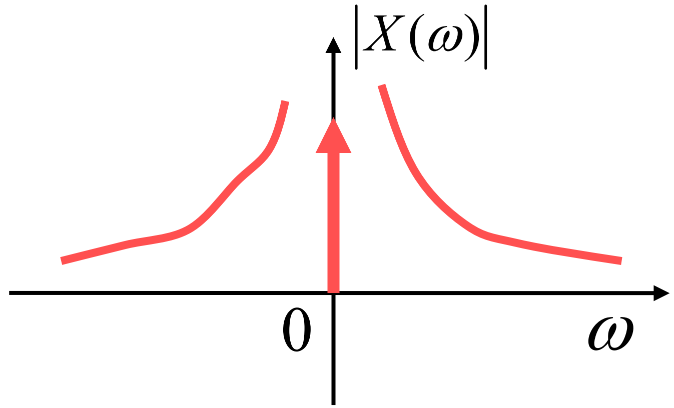
$e^{-a|t|}$
$x_1(t)$
1
0
t
$Sgn(t)$
$a \to 0$
+1
-1
t
$|X_1(\omega)|$
-a
0
a
t
$|X(\omega)|$
ω
$\varphi(\omega)$
$\pi/2$
ω
$-\pi/2$

单位阶跃信号

➲ 把它视为单边指数信号当a趋于0的时极限

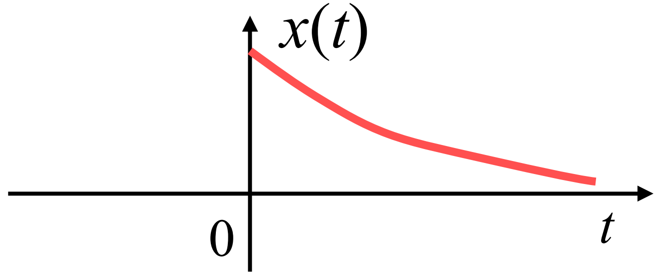
$$X(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$





单边指数信号

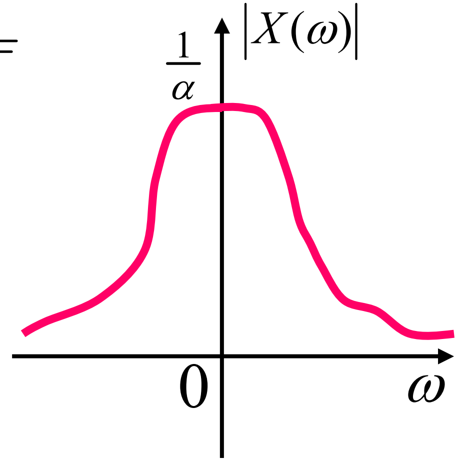
$$x(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0, a>0 \\ 0 & t<0, a>0 \end{cases}$$

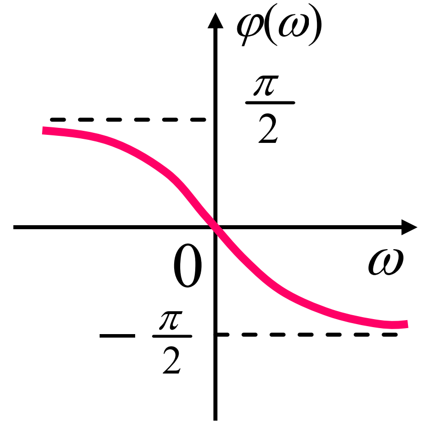


$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}$$

- **幅频** $|X(\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$

- **相频** $\varphi(\omega)=-\tan^{-1}(\dfrac{\omega}{a})$





周期信号的傅立叶变换

- 复指数信号
- 正弦信号
- 余弦信号
- 一般周期信号

复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$

- 考虑 $x(t)e^{j\omega_0 t}$ 的傅立叶变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

设$x(t)$的傅立叶变换为$X(\omega)$，则上式为$X(\omega\text{-}\omega_0)$

令$x(t)=1$，则由直流信号的傅立叶变换式，有

$$X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

$$X_e(\omega)= X(\omega-\omega_0)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

正弦信号 $\sin\omega_0 t$

- **欧拉公式** $\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$

应用复指数信号的傅立叶变换

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$= -j\pi\delta(\omega-\omega_0) + j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

余弦信号 $\cos\omega_0 t$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

一般周期信号

周期信号的傅立叶变换（频谱密度函数）由无穷多个冲激函数组成，这些冲激函数位于周期信号的各谐波频率处，其强度为各相应幅度$X(n\omega_0)$的2π倍。

- 一般周期信号可以展开成指数形式的傅立叶级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$$X(\omega)=F[\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)F[e^{jn\omega_0 t}]$$

已知 $e^{jn\omega_0 t}$ 的傅立叶变换为 $2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

一般周期信号

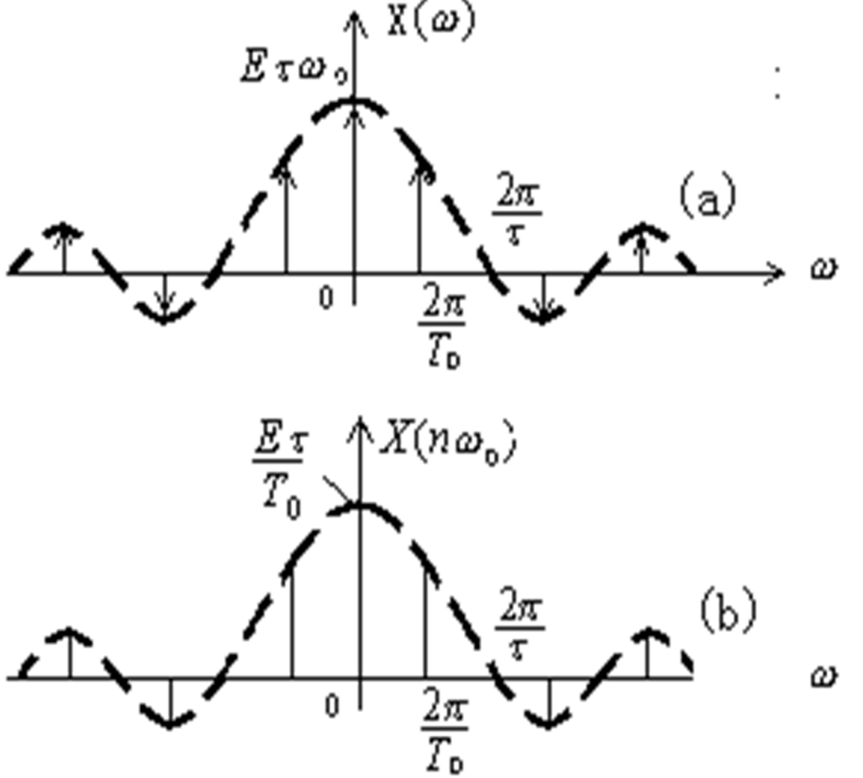
➲ 周期信号$x(t)$的傅立叶变换为

$$X(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\cdot\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_0(n\omega_0)\cdot\delta(\omega-n\omega_0)$$

周期信号的频谱是离散函数，**它包含间隔为ω_0的冲激序列**，**其强度的包络线的形状与单脉冲频谱$X_0(\omega)$的形状相同**，**也和复傅立叶系数$X_0(n\omega_0)$的包络线形状相同。**

一般周期信号



$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\cdot X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

周期信号的频谱是离散函数，它包含间隔为ω_0的冲激序列，其强度的包络线的形状和非周期信号的傅立叶变换形状相同。