

自动控制理论

Automatic Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大



第八章 Chapter 8

线性定常系统的状态空间分析法



主要内容

- 简介
- 能控性和能观性
- 线性变换和标准型
- **系统的状态反馈**
- **系统的状态观测**

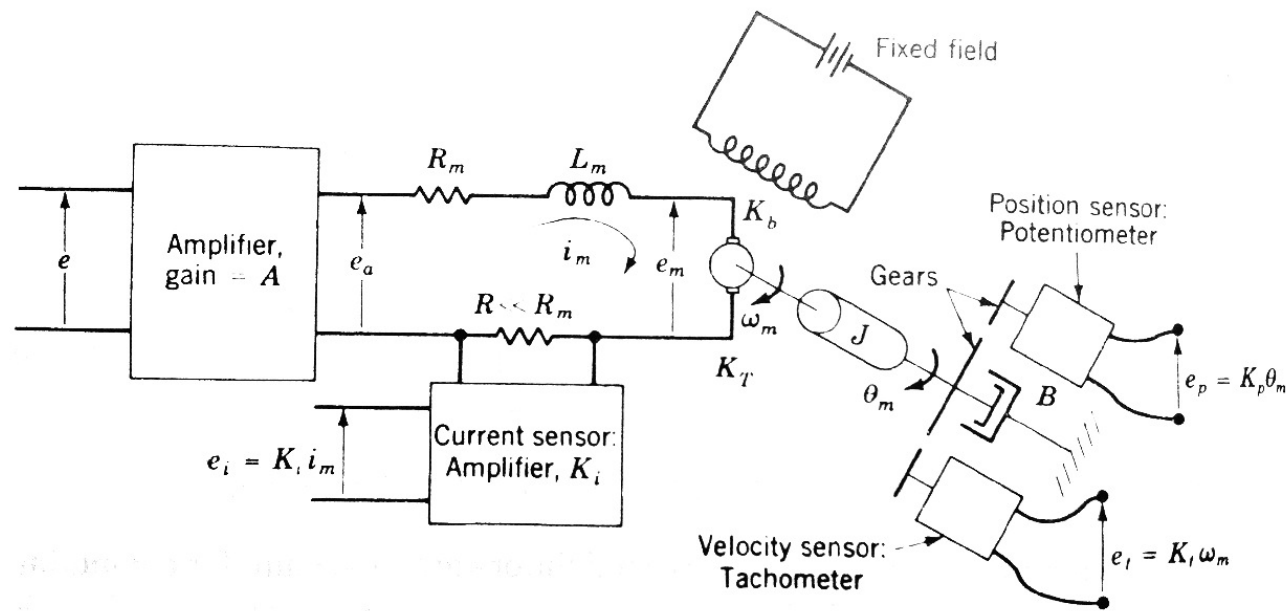
系统状态反馈

- 基本概念（通过状态反馈从开环到闭环）
- 闭环线性系统的能控性与能观性
- 状态反馈设计
 - 直接法
 - 相变量法（能控标准型法）
 - 采用物理变量
- 状态反馈的一般性质（采用相变量）
- 状态反馈示例
 - 全极点系统
 - 零极点系统

状态反馈控制器设计——物理变量法

为了得到**最多的可测状态**，经常选取**物理变量**为状态变量。

例：如图所示开环位置控制与状态测量系统



其中

$$e_a = Ae, \quad e_a - e_m = (R_m + L_m D)i_m, \quad e_m = K_b \omega_m$$

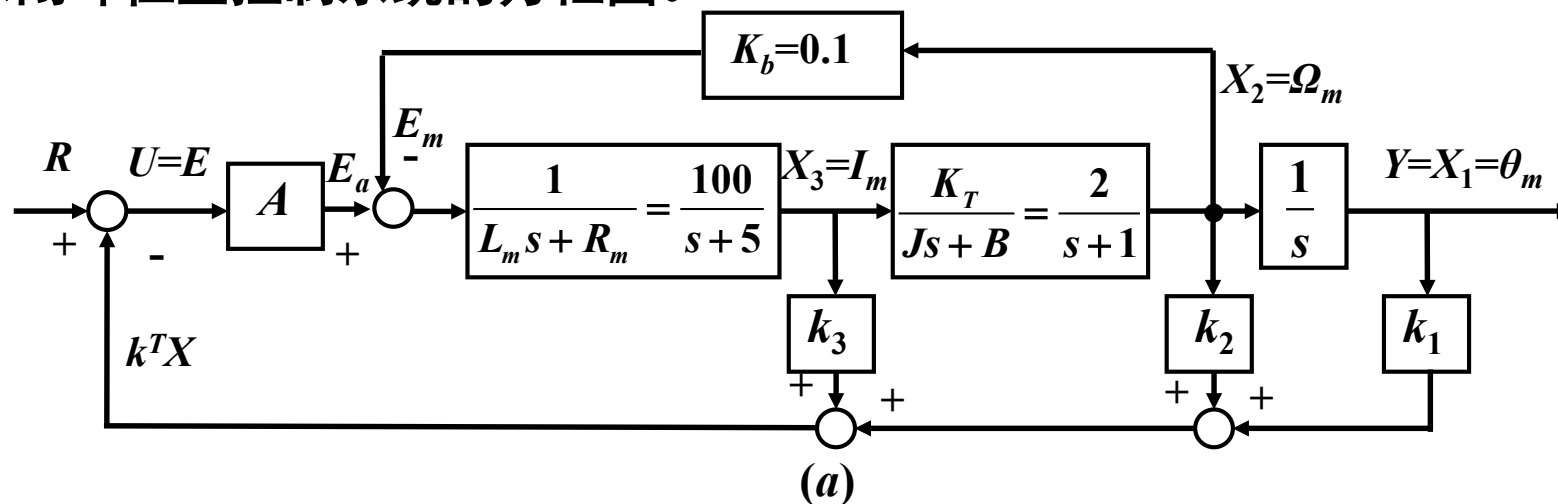
$$T = K_T i_m = J D \omega_m + B \omega_m, \quad \omega_m = D \theta_m$$

令

$$x_1 = \theta_m = y, \quad x_2 = \omega_m = \dot{x}_1, \quad x_3 = i_m, \quad u = e$$

状态反馈控制器设计——物理变量法

图a为表示闭环位置控制系统的方框图。



每个状态变量经放大器进行反馈，其放大倍数（增益） k_1, k_2 和 k_3 称为反馈系数（包括传感器常数，以及其他系统设计所需要的附加增益）。

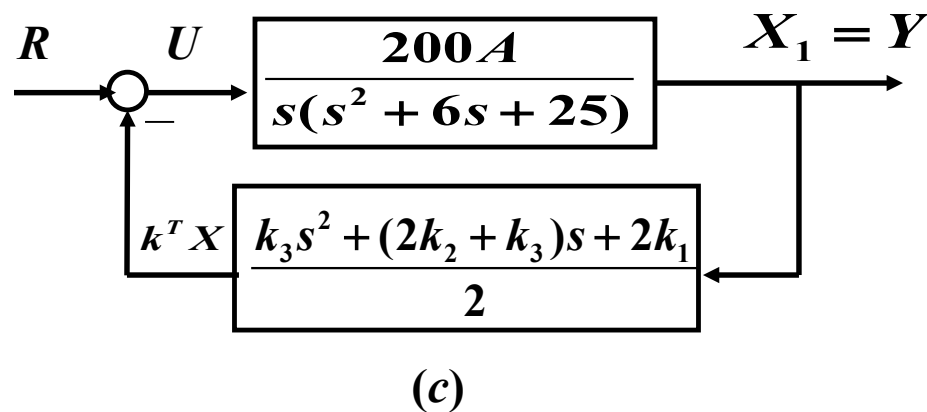
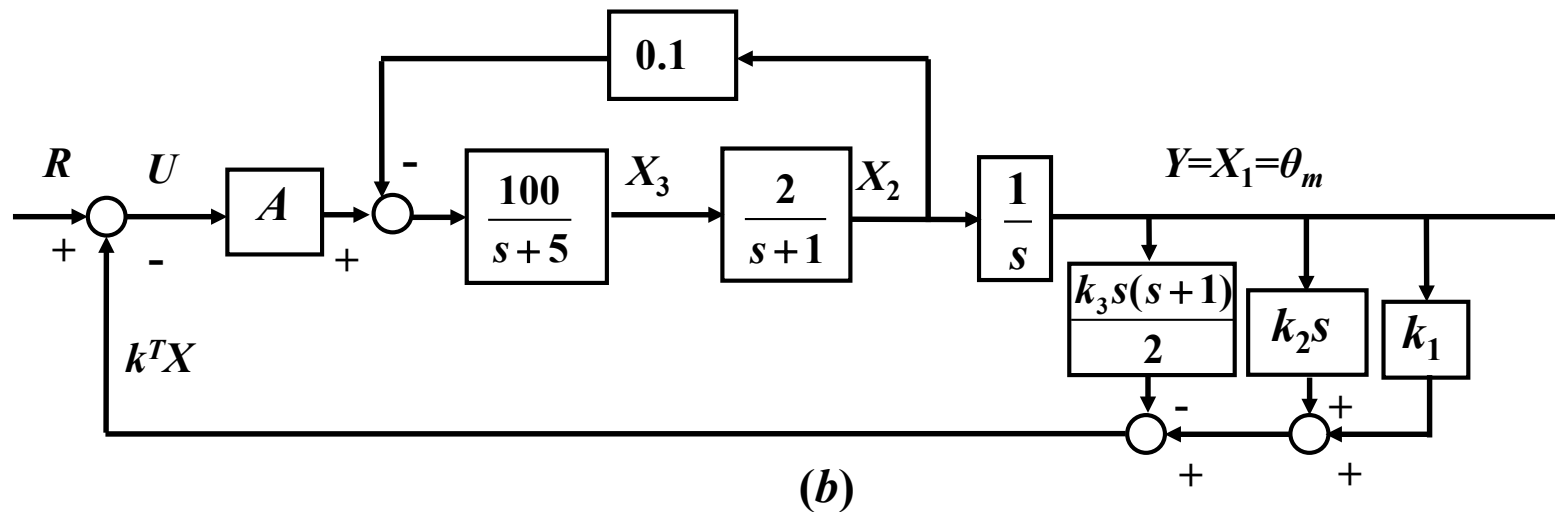
$$k = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T$$

状态反馈之和为

$$k^T X = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] X = k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3$$

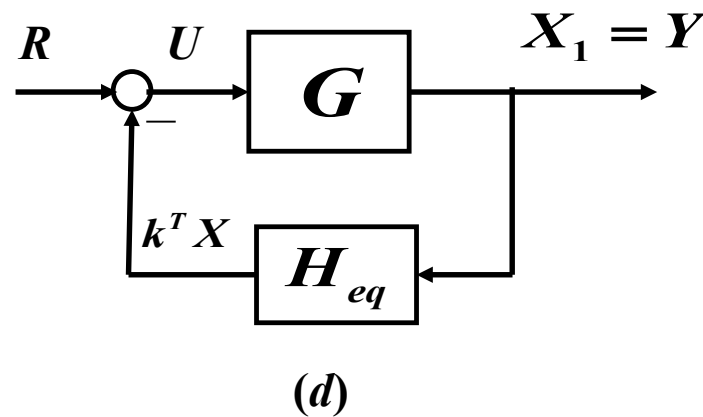
状态反馈控制器设计——物理变量法

通过方框图简化，将图a简化为图b及图c。



状态反馈控制器设计——物理变量法

注意 图c中前向通道传递函数 $G(s)=X_1(s)/U(s)$ 与图a中的前向通道传递函数一致。因此，状态反馈等价于在传统单位反馈控制系统的反馈回路中插入一个反馈补偿器，如图d所示。故可以用直观的根轨迹方法来理解和指导状态反馈设计。

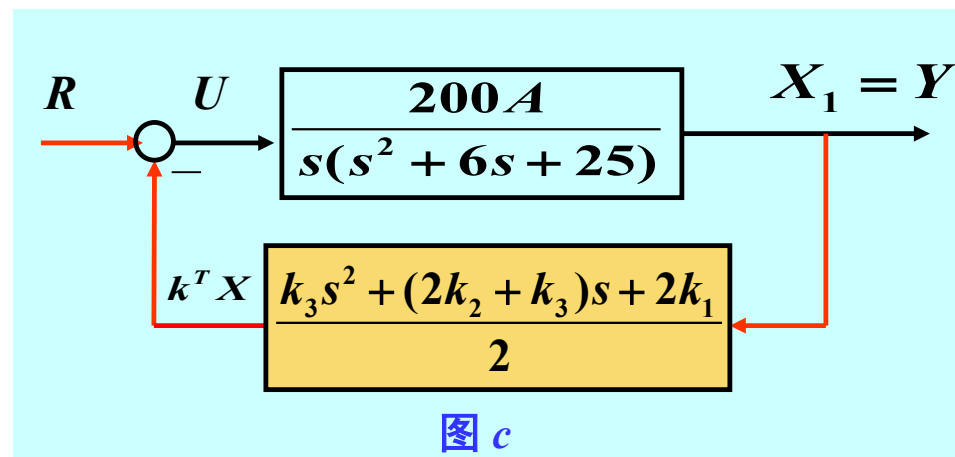
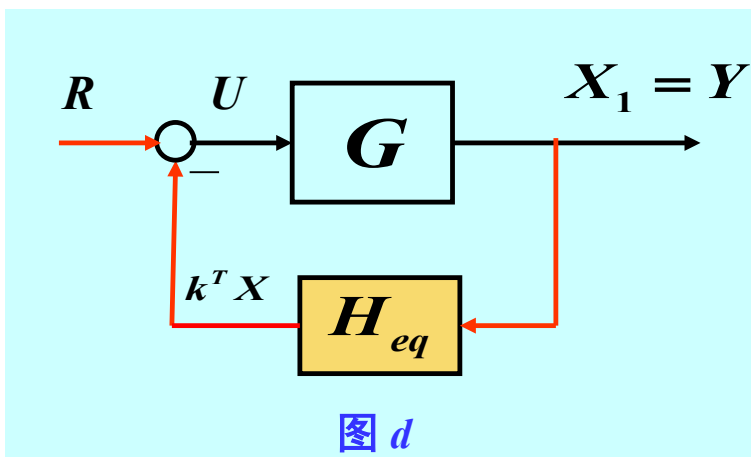


状态反馈控制器设计——物理变量法

- 从图d可以看出，系统闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H_{eq}(s)}$$

$$G(s) = X_1(s)/U(s)$$



- 从图c和图d可以看出，开环传递函数为

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{100A[k_3s^2 + (2k_2 + k_3)s + 2k_1]}{s(s^2 + 6s + 25)}$$

状态反馈控制器设计——物理变量法

$$G(s) = \frac{200A}{s(s^2 + 6s + 25)}$$

$$H_{eq}(s) = \frac{k_3 s^2 + (2k_2 + k_3)s + 2k_1}{2}$$

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{100A[k_3 s^2 + (2k_2 + k_3)s + 2k_1]}{s(s^2 + 6s + 25)}$$

- 因此系统闭环传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H_{eq}(s)} \\ &= \frac{200A}{s^3 + (6 + 100k_3A)s^2 + (25 + 200k_2A + 100k_3A)s + 200k_1A} \end{aligned}$$

- 通过设计等价反馈传递函数 $H_{eq}(s)$ ，可以满足系统的期望特性。
- 若 $G(s)$ 没有零点，则称其为全极点系统（all-poles plant）。

状态反馈控制器设计——物理变量法

$$G(s) = \frac{200A}{s(s^2 + 6s + 25)}$$
$$H_{eq}(s) = \frac{k_3 s^2 + (2k_2 + k_3)s + 2k_1}{2}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H_{eq}(s)} = \frac{200A}{s^3 + (6 + 100k_3A)s^2 + (25 + 200k_2A + 100k_3A)s + 200k_1A}$$

设计要点:

1) 为了满足对阶跃输入的零稳态误差特性, 从方程

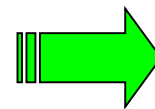
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{200A}{s^3 + (6 + 100k_3A)s^2 + (25 + 200k_2A + 100k_3A)s + 200k_1A} \quad R(s) = \frac{R_0}{s}$$

$\Rightarrow error = 0 \Rightarrow y(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \frac{R_0}{k_1} = R_0 \quad \Rightarrow k_1 = 1$

2) $G(s)$ 的分母阶次为 $n=3$, 且 $H_{eq}(s)$ 的分子阶次为 $n-1=2$ 。

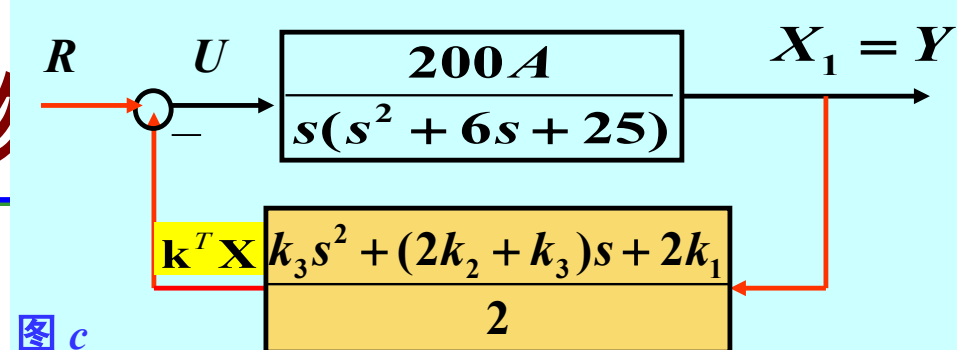
3) $G(s)H_{eq}(s)$ 的极点为 $G(s)$ 的极点。

4) $G(s)H_{eq}(s)$ 的零点是 $H_{eq}(s)$ 的零点。



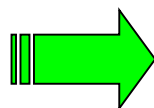
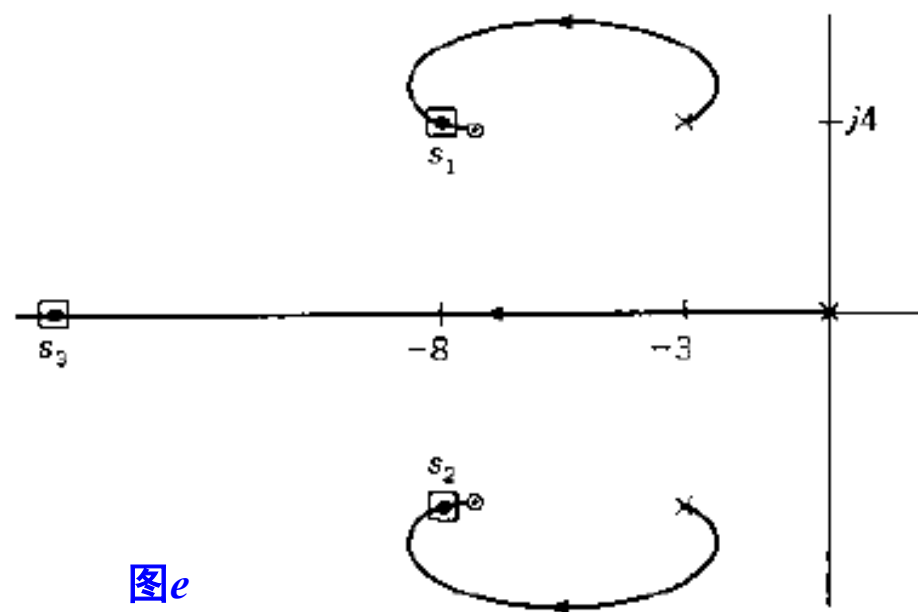
状态反馈控制器设计——物

设计要点:



5) **状态反馈**给开环传递函数 $G(s)H_{eq}(s)$ 引入了附加零点，没有增加极点。通过设置 $H_{eq}(s)$ 的零点可以产生期望的响应。一般地，附加开环传递函数零点使得根轨迹向左移动，即：使系统更加稳定并且提高系统响应特性。

6) 从根轨迹分析的观点来看，对于 $k_3 > 0$ ，系统的根轨迹有一条渐近线与正实轴的夹角 $\gamma = -180^\circ$ ，可以通过选择 $H_{eq}(s)$ 零点的位置使得对于所有的正增益系统都是稳定的。图 e 表示一种零点的选择及其根轨迹图。



状态反馈控制器设计——物理变量法

设计要点:

7) 对于期望的欠阻尼响应, 可以通过选择 $Y(s)/R(s)$ 极点的位置来满足

$$s_{1,2} = -a \pm jb \quad s_3 = -c$$

对于期望的极点位置, 特征方程具有如下形式

$$(s + a \pm jb)(s + c) = s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0$$

令对应的 $Y(s)/R(s)$ 分母的系数相等

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{200A}{s^3 + (6 + 100k_3A)s^2 + (25 + 200k_2A + 100k_3A)s + 200k_1A}$$

$$d_2 = 6 + 100k_3A$$

$$d_1 = 25 + 200k_2A + 100k_3A$$

$$d_0 = 200k_1A = 200A$$

系统状态反馈

- 基本概念（通过状态反馈从开环到闭环）
- 闭环线性系统的能控性与能观测性
- 状态反馈设计
 - 直接法
 - 相变量法（能控标准型法）
 - 采用物理变量
- 状态反馈的一般性质（采用相变量）
- 状态反馈示例
 - 全极点系统
 - 零极点系统

状态反馈的一般性质（采用相变量）

- 为了获得状态反馈可应用于所有传递函数 $G(s)$ 的一般（普遍）特性，考虑最小相位系统传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G (s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \dots + c_1s + c_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0}$$

其中 $K_G > 0$, $w < n$, 所有系数为正。

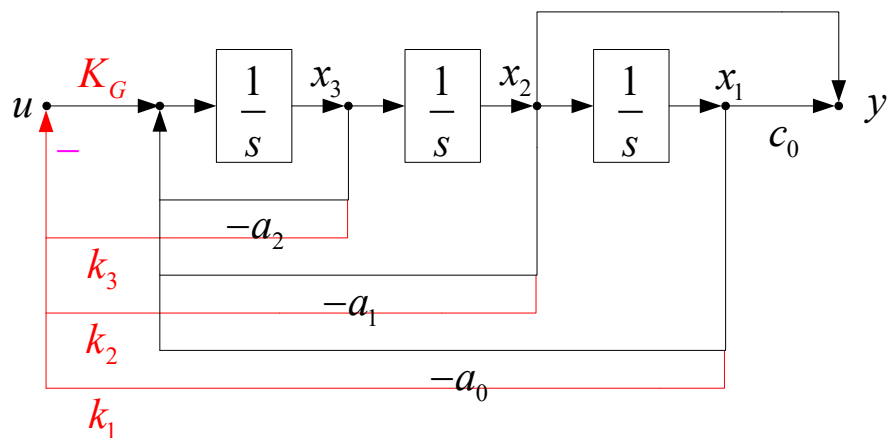
若选择相变量为状态变量，易得

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ K_G \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_{w-1} \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x$$

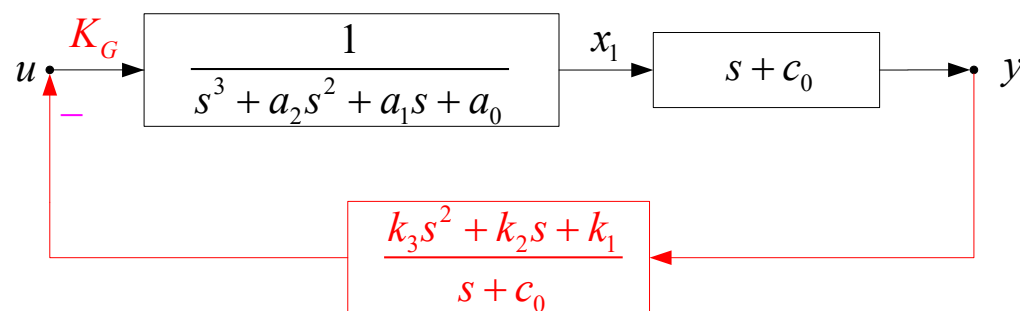
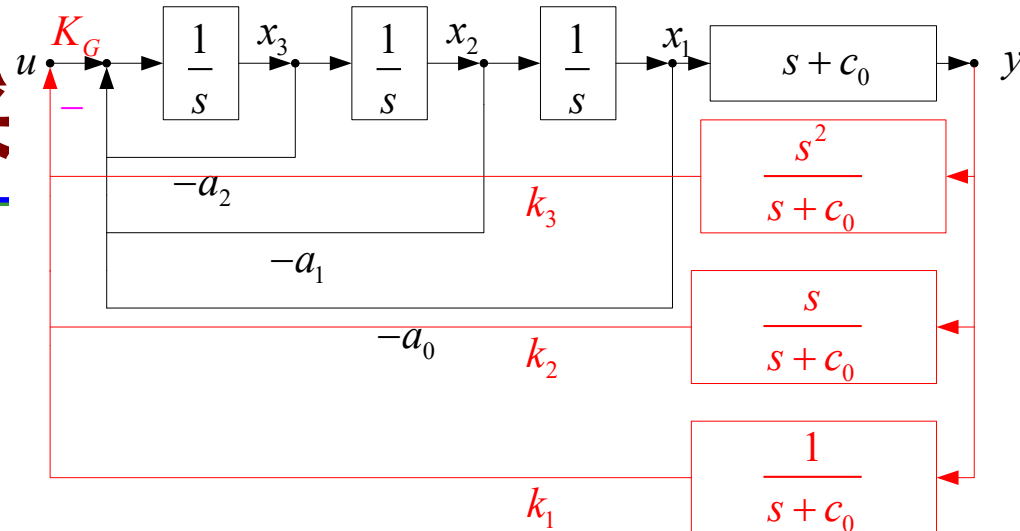
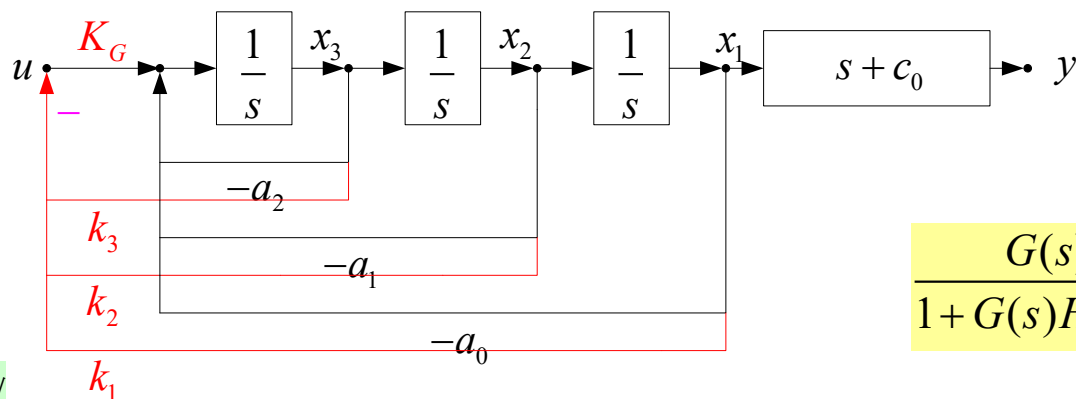
状态反馈的一般性质 (采)

以一3阶系统为例:



$$G(s) = \frac{K_G(s + c_0)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$$



$$H_{eq}(s) = \frac{k_3s^2 + k_2s + k_1}{s + c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{K_G(k_3s^2 + k_2s + k_1)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H_{eq}(s)} = \frac{K_G(s + c_0)}{s^3 + (a_2 + K_Gk_3)s^2 + (a_1 + K_Gk_2)s + (a_0 + K_Gk_1)}$$

状态反馈的一般性质（采用相变量，

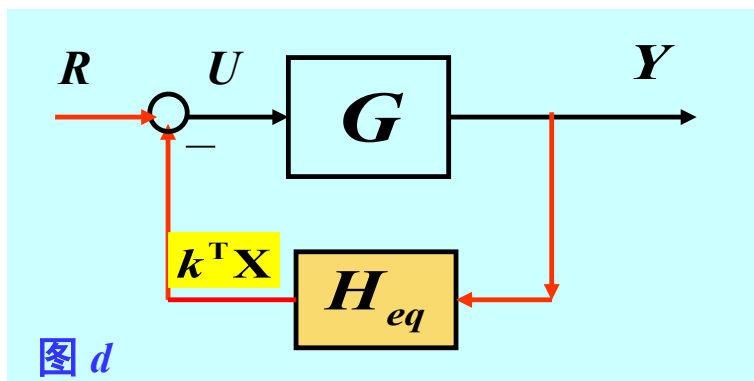
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G(s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \dots + c_1s + c_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H_{eq}(s)}$$

- 由图 d

$$H_{eq}(s) = \frac{k^T X(s)}{Y(s)} = \frac{k^T X(s)}{cX(s)} = \frac{k_1X_1(s) + k_2X_2(s) + \dots + k_nX_n(s)}{c_0X_1(s) + c_1X_2(s) + \dots + c_nX_{n+1}(s)}$$

$$X_j(s) = s^{j-1} X_1(s) \quad \downarrow \quad \text{相变量}$$



$$H_{eq}(s) = \frac{k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1}{s^w + c_{w-1} s^{w-1} + \dots + c_1 s + c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{K_G(k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- 将 $G(s)$ 和 $G(s)H_{eq}(s)$ 代入闭环传递函数 $Y(s)/R(s)$, 得

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_G(s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \dots + c_1s + c_0)}{s^n + (a_{n-1} + K_G k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + K_G k_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_0 + K_G k_1)}$$

状态反馈的一般性质（采用相变量）

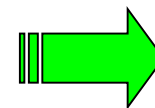
结论

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G(s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \dots + c_1s + c_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0}$$

- 1) $H_{eq}(s)$ 有 $n-1$ 个零点，零点由 k_i 确定。
- 2) 开环传递函数 $G(s)H_{eq}(s)$ 与 $G(s)$ 具有相同的 n 个极点。
- 3) 基于 $G(s)H_{eq}(s)$ ，对于 $k_n > 0$ ，根轨迹具有 $n-1$ 条分支，终止于 $n-1$ 个任意零点。通过适当地选取 k_i 值，这些零点可以位于 s -平面的任意位置。有一条根轨迹渐近线与实轴的夹角为 $\gamma = -180^\circ$ ，因此，一条根轨迹终止于负实轴。若 $H_{eq}(s)$ 的所有零点都在 s 平面的左半平面，系统的稳定性可以通过选择较大的 K_G 值来保证。

$$H_{eq}(s) = \frac{k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1}{s^w + c_{w-1} s^{w-1} + \dots + c_1 s + c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{K_G(k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$



状态反馈的一般性质（采用相变量）

结论

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G(s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \dots + c_1s + c_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0}$$

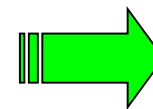
4) 状态反馈可以使系统任意配置 $G(s)H_{eq}(s)$ 零点位置，进而配置闭环系统极点以获得期望的系统特性；采用状态反馈 k_i 的结果就是**改变了闭环极点，不改变系统的零点**；通过状态反馈可以将闭环极点配置在不期望的 $Y(s)/R(s)$ 零点位置，从而对消不期望的零点。

5) $Y(s)/R(s)$ 的极点数减去零点数必须等于 $G(s)$ 的极点数减去零点数。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_G(s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \dots + c_1s + c_0)}{s^n + (a_{n-1} + K_Gk_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + K_Gk_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_0 + K_Gk_1)}$$

$$H_{eq}(s) = \frac{k_ns^{n-1} + k_{n-1}s^{n-2} + \dots + k_2s + k_1}{s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \dots + c_1s + c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{K_G(k_ns^{n-1} + k_{n-1}s^{n-2} + \dots + k_2s + k_1)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0}$$



状态反馈的一般性质（采用相变量）

设计步骤

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G(s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \dots + c_1s + c_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0}$$

Step 1. 绘制系统的状态变量图；

Step 2. 假设所有的状态变量可测量；

Step 3. 将 $H_{eq}(s)$ 和 $Y(s)/R(s)$ 表示为 k_i 的形式；

Step 4. 根据单位阶跃输入（ $u_{-1}(t)$ ）零稳态误差的要求，计算 k_1 值；即 $y(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 1$ ；

Step 5. 根据期望的系统特性（ M_p , t_p , t_s 和稳态误差）分析期望的 $Y(s)/R(s)$ 。有时也希望通过配置一个或多个闭环极点来对消不期望的 $Y(s)/R(s)$ 零点。

Step 6. 令 steps 3 和 5 所得到的闭环传递函数相等。分母多项式中对应项系数相等，从而解得 k_i 的值。若在设计中采用相变量，则必须进行线性变换，将相变量反馈系数转换为控制系统中物理变量对应的系数。

$$H_{eq}(s) = \frac{k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1}{s^w + c_{w-1} s^{w-1} + \dots + c_1 s + c_0}$$

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{K_G(k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

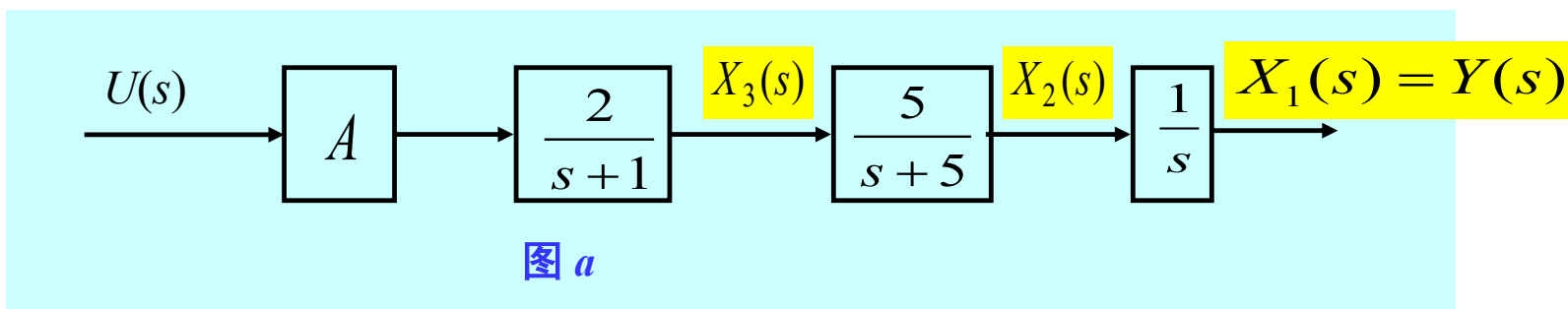
系统状态反馈

- 基本概念（通过状态反馈从开环到闭环）
- 闭环线性系统的能控性与能观测性
- 状态反馈设计
 - 直接法
 - 相变量法（能控标准型法）
 - 采用物理变量
- 状态反馈的一般性质（采用相变量）
- 状态反馈示例
 - 全极点系统
 - 零极点系统

状态反馈示例——全极点系统

全极点系统示例

设计示例1 对于如图 **图 a** 所示系统，设计状态反馈使闭环系统具有以下特性 $M_p=1.043$, $t_s=5.65s$ 以及对阶跃输入 $r(t)=R_0 u_{-1}(t)$ 具有零稳态误差特性。



解：Step1: 因为要求闭环后的阶跃响应，故首先求出在有状态反馈情况下的闭环传递函数。选择状态如图所示（由于开环传递函数无零极点相消情况，故系统是能控的）。

状态反馈示例——全极点系统

全极点系统示例：设计示例1

状态反馈后的闭环方块图如下

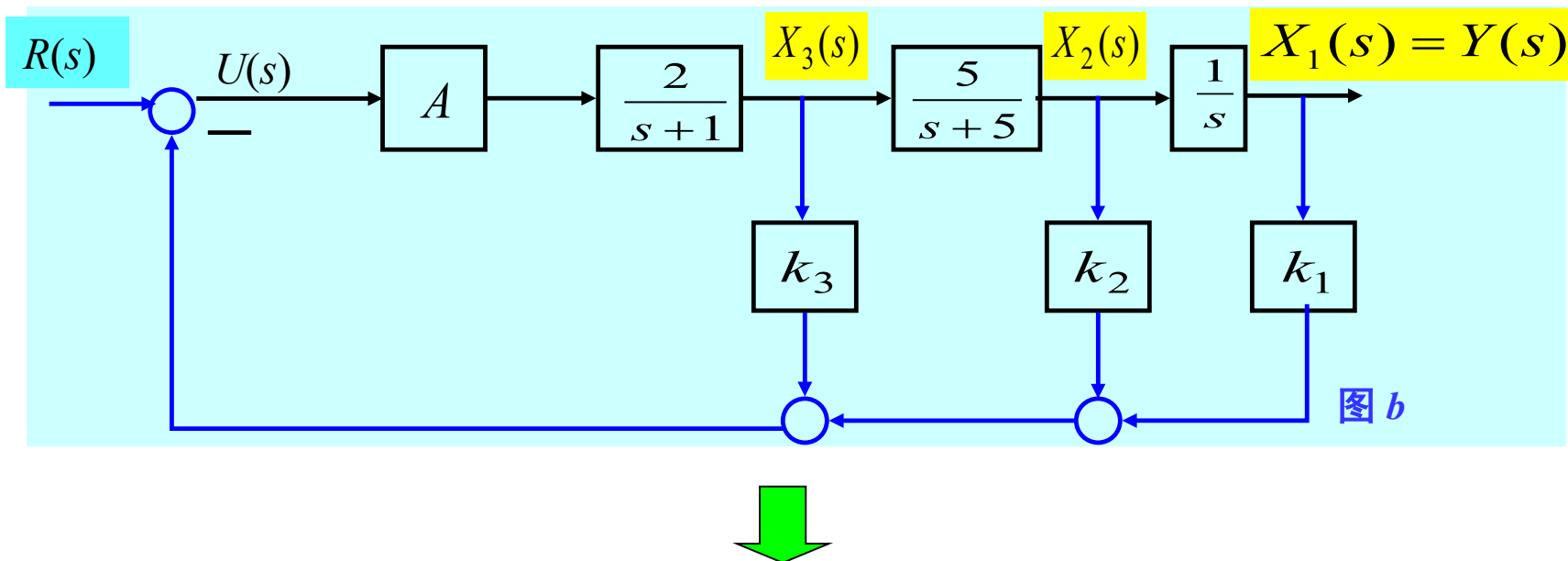
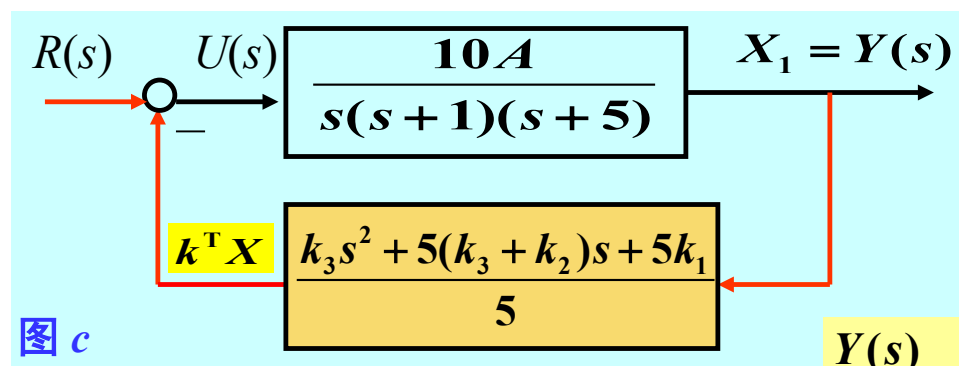
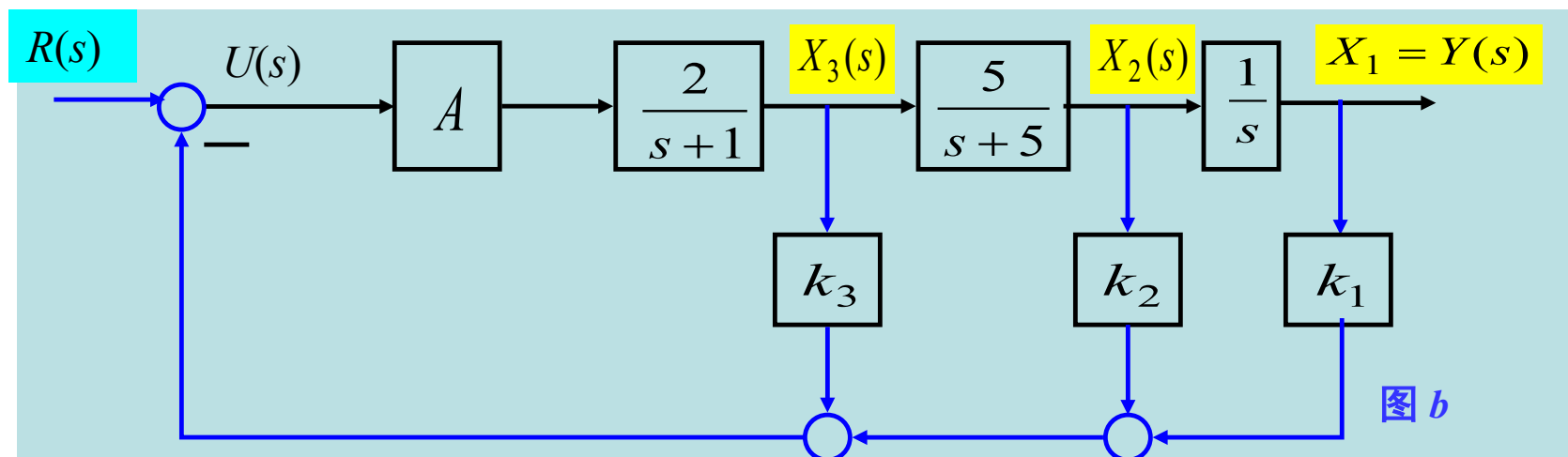


图 b

状态反馈示例——全极点系统

全极点系统示例：设计示例1



由图可求得闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10A}{s^3 + (6 + 2Ak_3)s^2 + [5 + 10A(k_3 + k_2)]s + 10Ak_1}$$

状态反馈示例——全极点系统

全极点系统示例：设计示例1

闭环传递函数：
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10A}{s^3 + (6 + 2Ak_3)s^2 + [5 + 10A(k_3 + k_2)]s + 10Ak_1} \quad (**)$$

Step2: 因为要求当阶跃输入为 R_0 时具有零稳态误差，即当 $t \rightarrow \infty$ 时， $e(t) = y(t) - R_0 \rightarrow 0$ 。因此利用终值定理得

$$y(t)_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R_0}{s} \cdot \frac{10A}{s^3 + (6 + 2Ak_3)s^2 + [5 + 10A(k_3 + k_2)]s + 10Ak_1} = R_0$$

即：

$$y(t)_{ss} = R_0 \cdot \frac{10A}{10Ak_1} = R_0 \Rightarrow k_1 = 1$$

Step3: 因为是三阶系统，假设其具有一对由所要求的闭环性能指标决定的复数主极点（由要求的时域性能指标求出）

(1) 由于要求最大峰值为 $M_p = 1.043$

$$M_p = 1.043 = 1 + \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Rightarrow \zeta = 0.708$$

状态反馈示例——全极点系统

全极点系统示例：设计示例1

$$\zeta = 0.708$$

闭环传递函数：
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10A}{s^3 + (6 + 2Ak_3)s^2 + [5 + 10A(k_3 + k_2)]s + 10Ak_1} \quad (**)$$

Step3 : (2) 要求调节时间为 $t_s = 5.65s$

$$t_s = \frac{4}{|\sigma|} \rightarrow \sigma = \zeta \omega_n = \frac{4}{5.65} = 0.708$$

即得到： (3) 一对复数主极点：
$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -0.708 \pm j0.706$$

设非主导极点为 -100，可求得期望的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10A}{(s+100)(s+0.708 \pm j0.706)} = \frac{10A}{s^3 + 101.4s^2 + 142.6s + 100}$$

(4) 该期望方程应该与前闭环传递函数相同，而为了达到零稳态误差，前面已经求出：

$$k_1 = 1$$

状态反馈示例——全极点系统

全极点系统示例：设计示例1

闭环传递函数： $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10A}{s^3 + (6 + 2Ak_3)s^2 + [5 + 10A(k_3 + k_2)]s + 10Ak_1} \quad (**)$

因而有

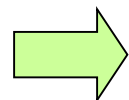
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10A}{s^3 + (6 + 2Ak_3)s^2 + [5 + 10A(k_3 + k_2)]s + 10A}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10A}{(s + 100)(s + 0.708 \pm j0.706)} = \frac{10A}{s^3 + 101.4s^2 + 142.6s + 100}$$

$$(6 + 2Ak_3) = 101.4$$

$$5 + 10A(k_3 + k_2) = 142.7$$

$$10A = 100$$



$$k_3 = 4.77$$

$$k_2 = -3.393$$

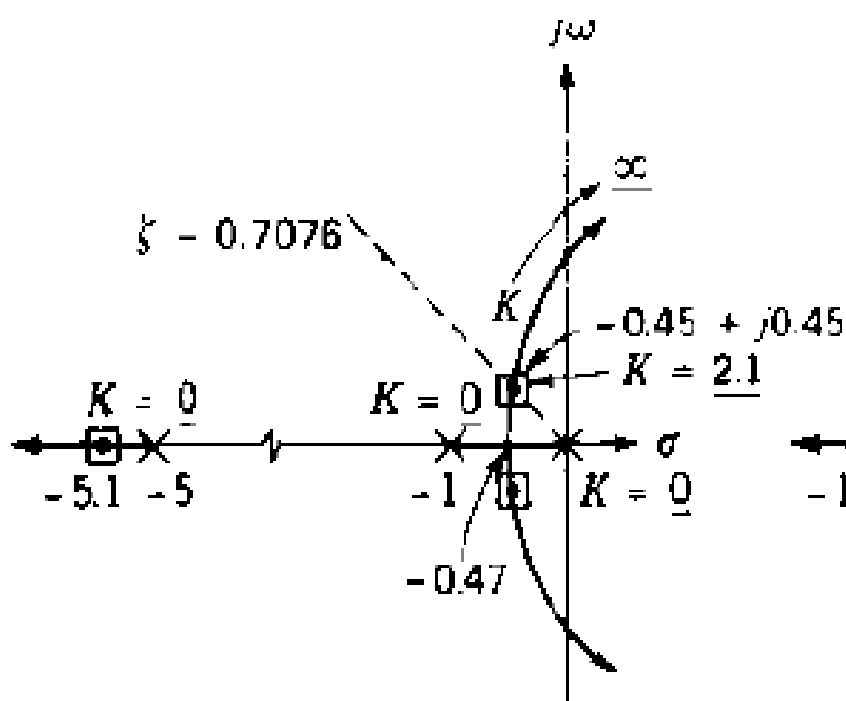
$$A = 10$$

所以：系统的开环放大系数 $A=10$ ，以及状态反馈增益阵： $k^T = [1, -3.393, 4.77]$ 。

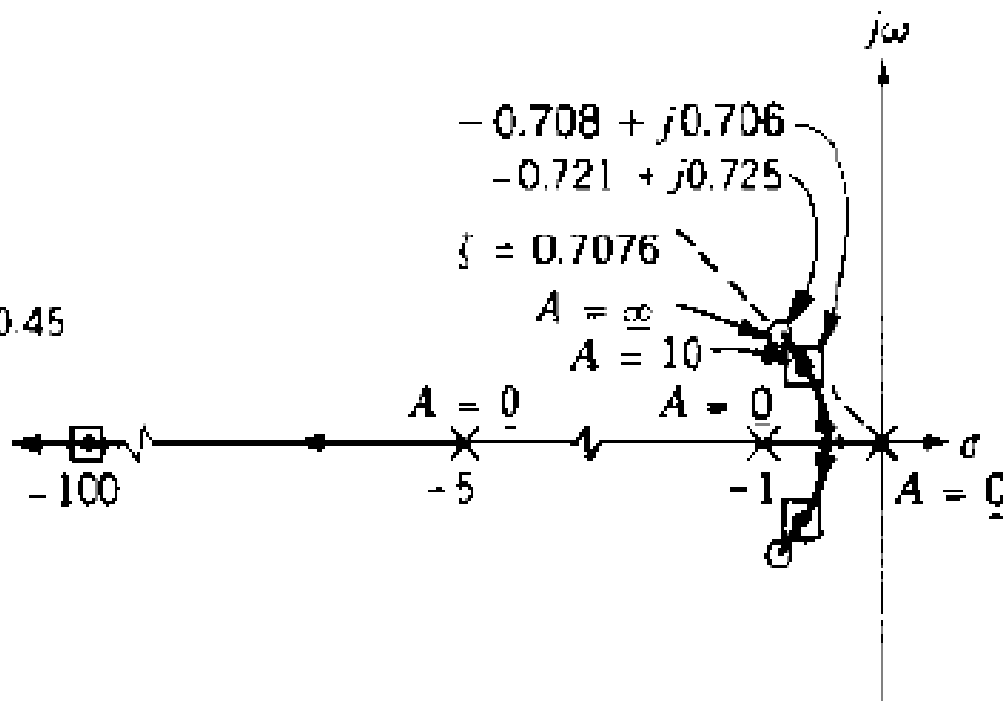
状态反馈示例——全极点系统

全极点系统示例：设计示例1

状态反馈设计与传统的单位反馈系统的根轨迹如图所示



基本的单位反馈系统



状态反馈系统

状态反馈示例——全极点系统

全极点系统示例：设计示例1

注意：对状态反馈而言，当 $A > 0$ ，系统总是稳定的。由于 $A = 10$ 的闭环根就在 $G(s)H_{eq}(s)$ 的零点附近，即使 $A > 10$ 后再增大，闭环根的位置基本不变，也即只要反馈系统保持不变，系统的动态响应几乎不受 A 变化的影响。——对增益 A 的变化不灵敏。——**灵敏度问题**

由根轨迹图可以直观地看出，不灵敏的原因中由于2个期望的主导极点接近 $H_{eq}(s)$ 的零点，以及第3个根是非主导极点。

结论：要达到对增益变化的不灵敏，期望的闭环系统必须有 β 个主导闭环极点位于 $H_{eq}(s)$ 的 β 个零点的附近，其余的 $(n - \beta)$ 个极点是非主导的。本例中， $n = 3, \beta = 2, n - \beta = 1$ 。

注意：对状态反馈而言，其与经典控制理论是有密切联系的，此例将时域的动态性能指标、主导极点、稳态误差等概念融合在一起了。因此基本概念非常重要。

状态反馈示例——零极点系统

设计示例1处理的系统只有极点；因此闭环传递函数没有零点。对于具有零点和极点的系统，闭环传递函数具有如下形式

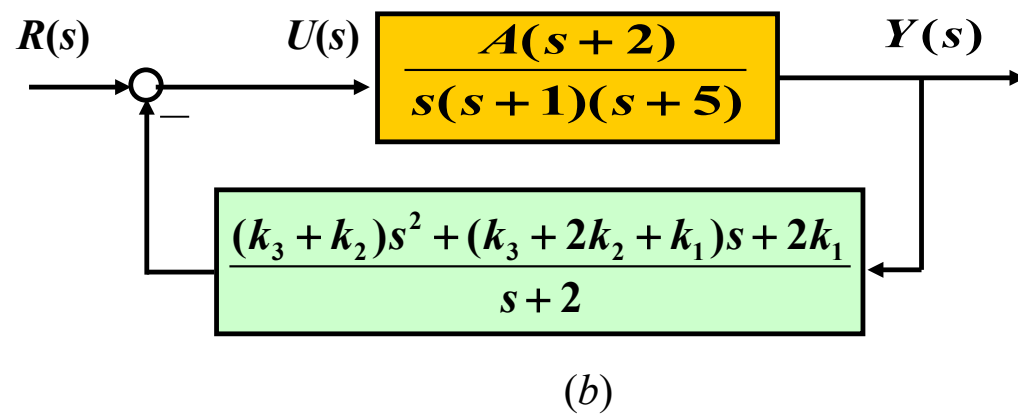
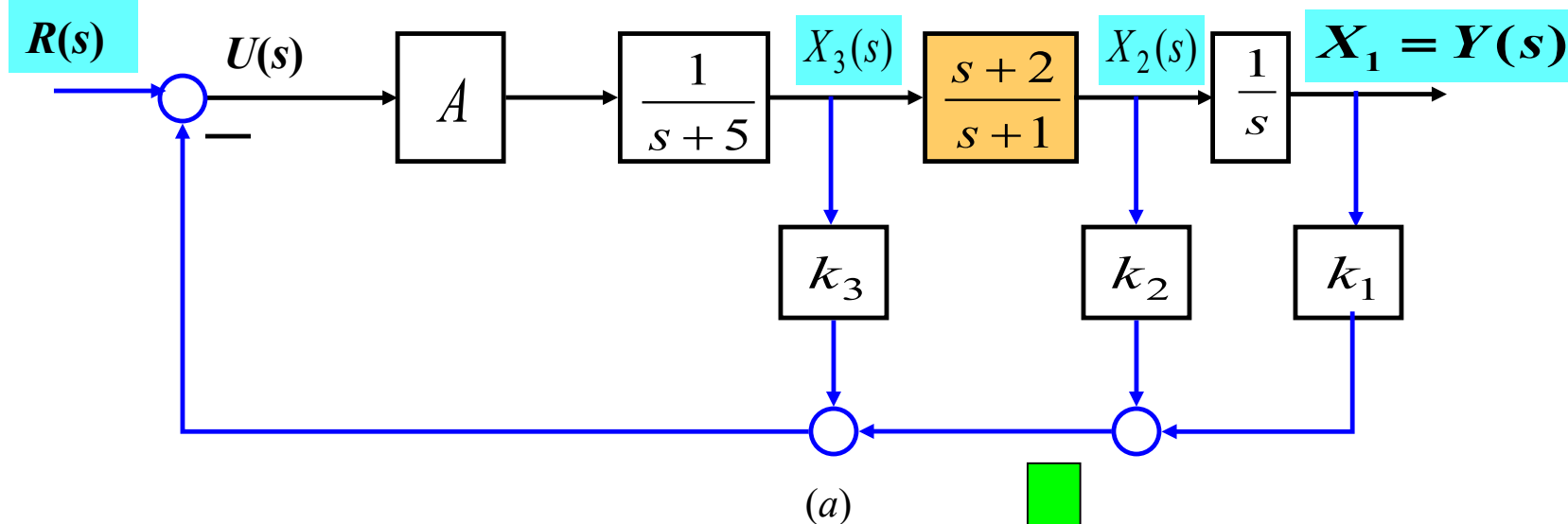
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_G (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_w)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

与对象 $G(s)$ 具有相同的零点。当存在开环零点时，闭环系统的特征方程比全极点对象的闭环系统特征方程要复杂得多。

$G_x(s) = Y(s)/U(s)$ 零点位置满足要求时的设计步骤与全极点设计示例1的步骤一样，但 $G_x(s) = Y(s)/U(s)$ 零点位置不满足要求时需做必要处理。

状态反馈示例——零极点系统

设计示例2 如图所示状态反馈系统



状态反馈示例——零极点系统

设计示例2 系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{A(s+2)}{s^3 + [6 + (k_3 + k_2)A]s^2 + [5 + (k_3 + 2k_2 + k_1)A]s + 2k_1A}$$

这个系统的期望闭环传递函数假设为

$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\text{desired}} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \quad (1)$$

注意：状态反馈不改变系统的零点

$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\text{actually desired}} = \frac{2(s+2)}{(s+2)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{2(s+2)}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} 5 + (k_3 + 2k_2 + k_1)A &= 6 \\ 6 + (k_3 + k_2)A &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = \frac{1}{2} \\ k_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$A = 2$$

$$2k_1A = 4 \Rightarrow k_1 = 1$$

状态反馈示例——零极点系统

设计示例2 系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{A(s+2)}{s^3 + [6 + (k_3 + k_2)A]s^2 + [5 + (k_3 + 2k_2 + k_1)A]s + 2k_1A}$$

根轨迹分析

$$k_1 = 1 \quad k_2 = \frac{1}{2}; \quad k_3 = -\frac{3}{2}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A(s+2)}{s(s+1)(s+5)}$$

$$H_{eq}(s) = \frac{(k_3 + k_2)s^2 + (k_3 + 2k_2 + k_1)s + 2k_1}{(s+2)}$$

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{-A(s^2 - s/2 - 2)}{s(s+1)(s+5)} = -1$$

$$s^2 - s/2 - 2 = 0$$

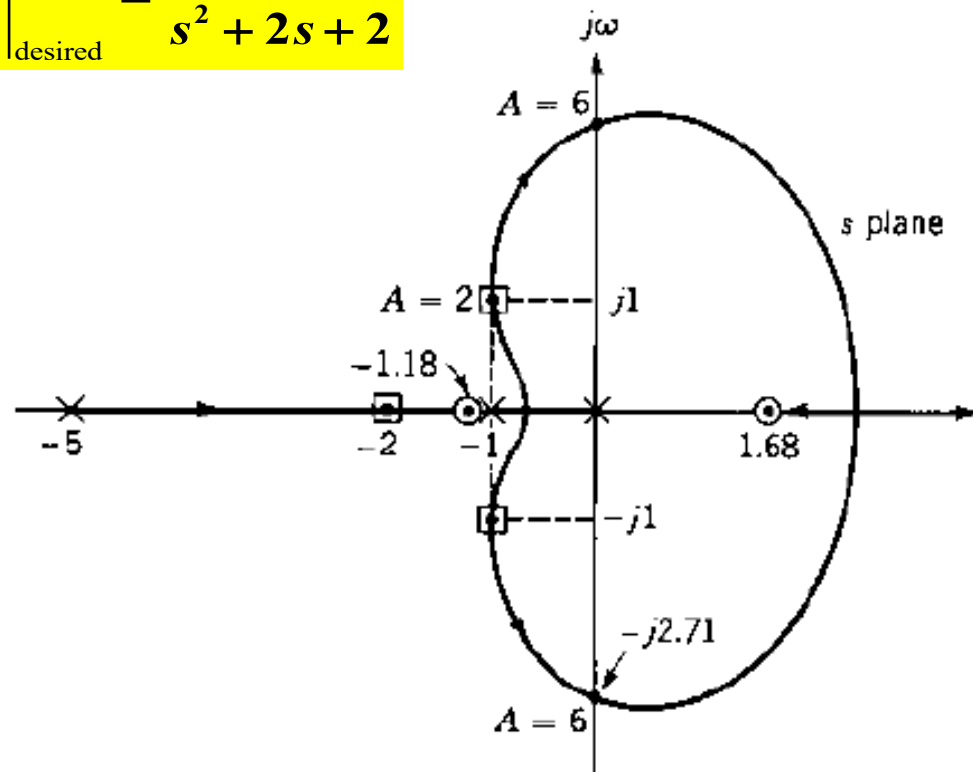
$$z_1 = -1.189; \quad z_2 = 1.686$$

$$G(s)H_{eq}(s) = \frac{A(s^2 - s/2 - 2)}{s(s+1)(s+5)} = 1$$

注意需要绘制零度根轨迹

状态反馈示例——零极点系统

$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\text{desired}} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$



根轨迹的两个分支进入 s 平面的右半平面，当 $A > 6$ 时系统将不稳定

特征根与 $G(s)H_{eq}(s)$ 的零点 $z_1 = -1.189$, $z_2 = 1.686$ 并不靠近，系统对增益的变化非常敏感。 A 值得增大将使系统的性能发生很大的变化

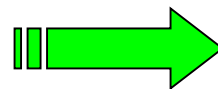
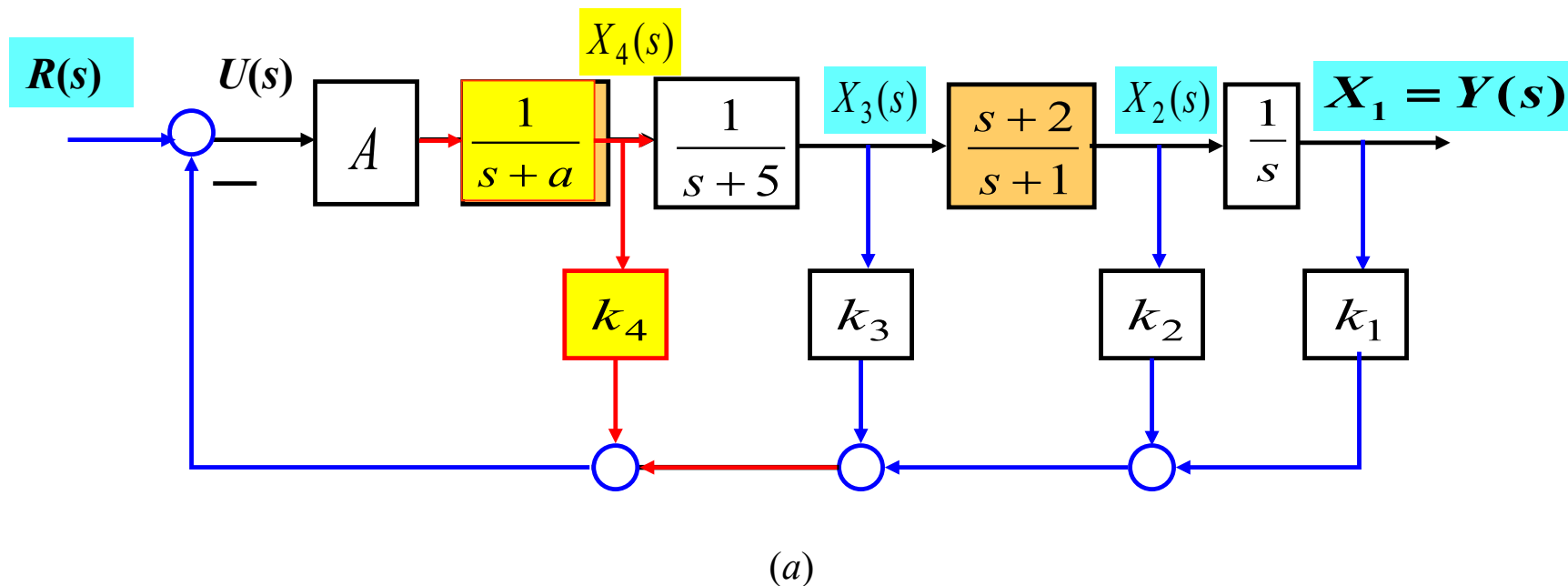
若希望降低敏感度，将 $G(s)H_{eq}(s)$ 的零点设置在期望极点附近，则无法满足的“-2是闭环极点”要求

所用控制器结构无法同时满足“敏感度”和“-2是闭环极点”的要求，需要改进控制器结构

状态反馈示例——零极点系统

设计示例2 为了使系统对增益变化不敏感

期望的闭环系统必须增加一个非主导极点，即分母的阶次为4，所以在前向通道串联一个环节，则状态反馈回路 $H_{eq}(s)$ 有3个零点，可以通过设计该零点的位置，使期望的3个闭环主导极点位于该零点附近。



状态反馈示例——零极点系统

设计示例2

期望的闭环传递函数

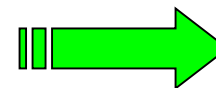
$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\text{actually desired}} = \frac{K_G (s + 2)}{(s + 2)(s^2 + 2s + 2)(s - p)}$$

其中 $K_G = A$, p 由阶跃输入的零稳态误差来决定。

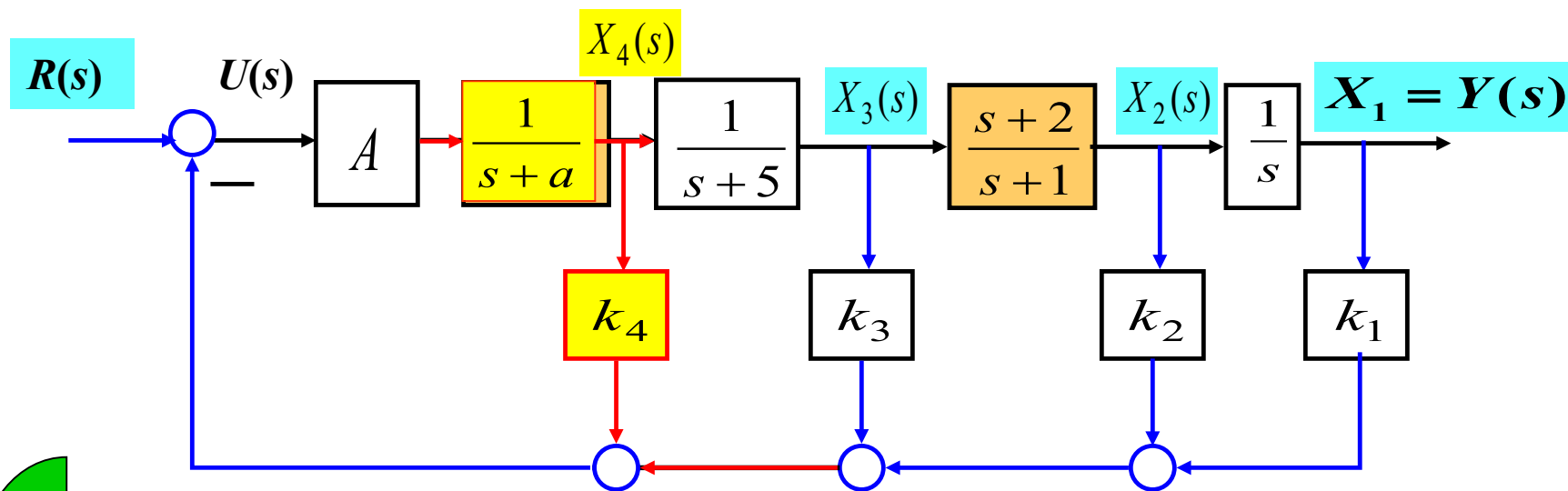
$$y(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = R_0 \cdot \frac{-K_G}{2p} = R_0 \Rightarrow K_G = -2p$$

选择 $K_G = 100$, 保证 $p = -50$ 是一个非主导极点。

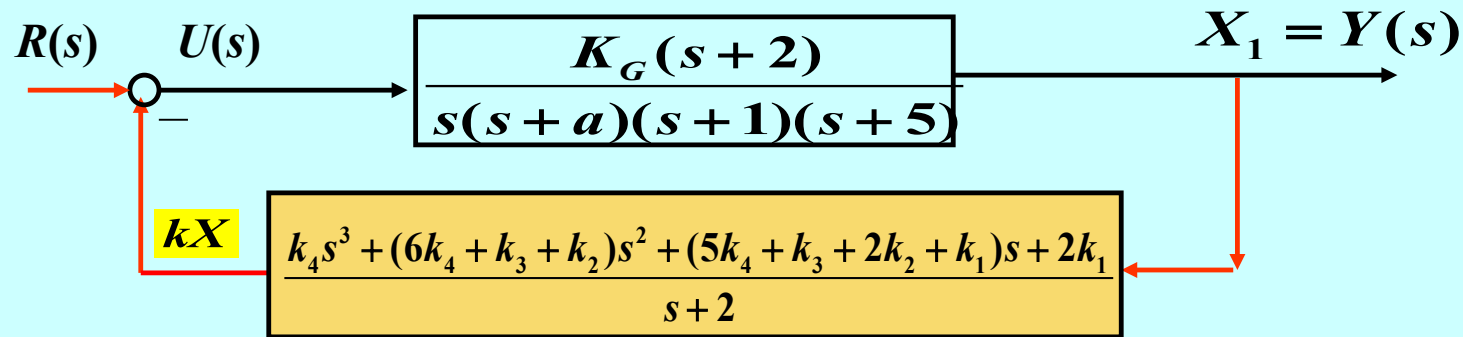
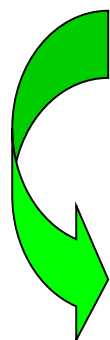
$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\text{actually desired}} = \frac{100(s + 2)}{s^4 + 54s^3 + 206s^2 + 304s + 200}$$



状态反馈示例——零极点系统



(a)



(b)

令 $a=1$

原则上 $a=1$ 可取不等于2的任意实数

状态反馈示例——零极点系统

设计示例2

从图b, 设 $a=1$, 系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100(s+2)}{s^4 + (7+100k_4)s^3 + [11+100(6k_4+k_3+k_2)]s^2 + [5+100(5k_4+k_3+k_2+k_1)]s + 200k_1}$$



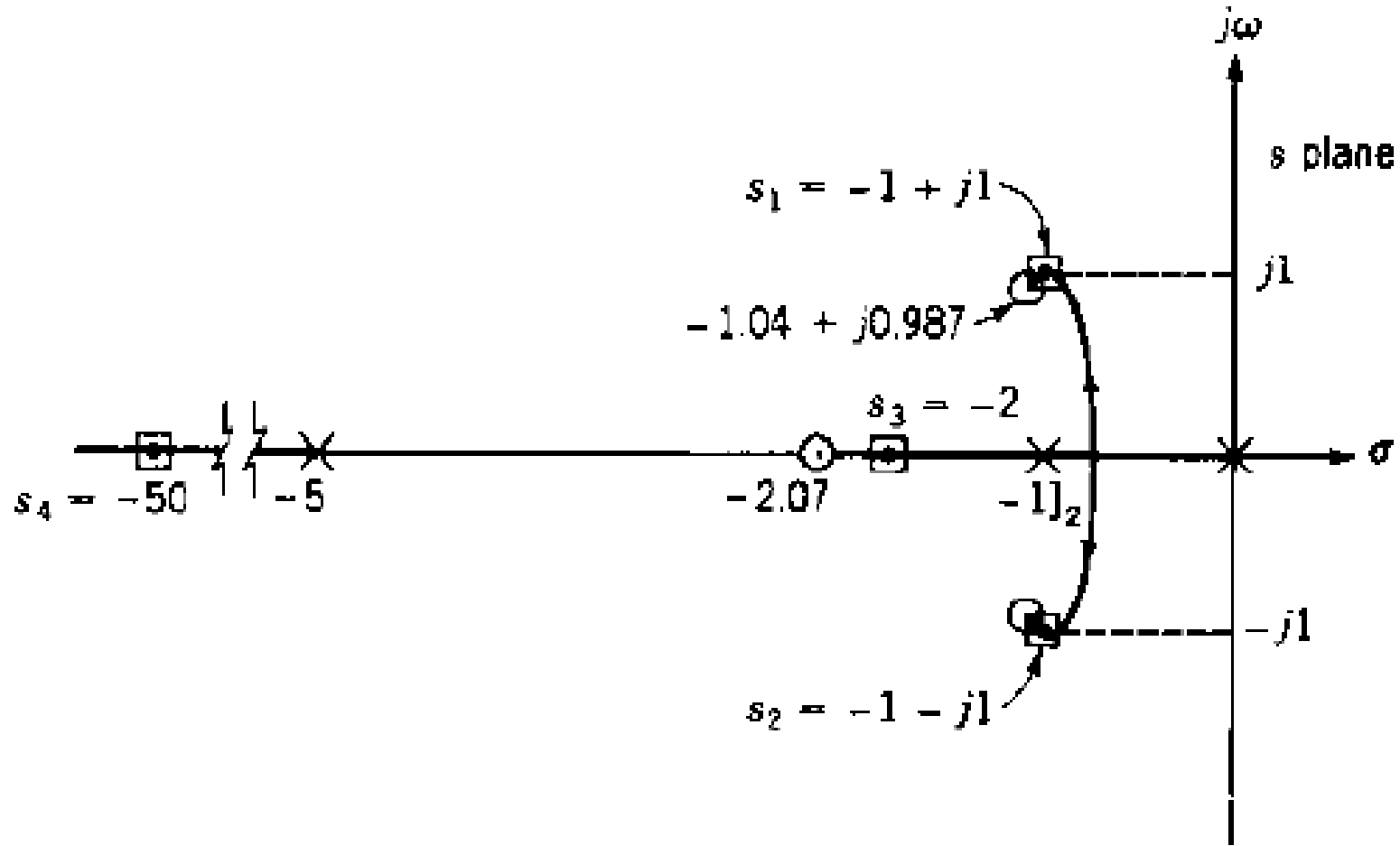
$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\text{actually desired}} = \frac{100(s+2)}{s^4 + 54s^3 + 206s^2 + 304s + 200}$$



状态反馈矩阵 $k^T = [1, 0.51, -1.38, 0.47]$

根轨迹如图

状态反馈示例——零极点系统



状态反馈示例

• 通过以上两个示例 说明了系统设计的方法

- (1) 分析期望的系统特性以及闭环传递函数；
- (2) 分析期望系统的根轨迹 $G(s)H_{eq}(s)=-1$ ，验证对增益变化的不敏感性；
- (3) 确定 k_i 值以产生期望的系统特性。

系统状态反馈

- 基本概念（通过状态反馈从开环到闭环）
- 闭环线性系统的能控性与能观测性
- 状态反馈设计
 - 直接法
 - 相变量法（能控标准型法）
 - 采用物理变量
- 状态反馈的一般性质（采用相变量）
- 状态反馈示例
 - 全极点系统
 - 零极点系统

The End