

**空间描述和变换**

- 刚体的位置和姿态描述  $(\hat{X}_0, \hat{Y}_0, \hat{Z}_0) = (\hat{X}_1, \hat{Y}_1, \hat{Z}_1) {}^0R({}^0P \times Q) = RP \times RQ$
- $R^{-1} = R^T$   ${}^A R {}^B R^{-1} = {}^A R {}^B R^T$   ${}^A R {}^B R^T = {}^A R {}^B R^T$   ${}^A R {}^B R^T = {}^A R {}^B R^T$
- 链乘法则  ${}^A R {}^B R^T = {}^A R {}^B R^T$   ${}^A R {}^B R^T = {}^A R {}^B R^T$   ${}^A R {}^B R^T = {}^A R {}^B R^T$
- 姿态的欧拉角表示
- z轴偏摆(yaw)
- y轴俯仰(pitch)
- x轴横滚(roll)
- zyx欧拉角(右乘欧拉角)固定角表示(左乘基)

$R_{zyx}(\gamma, \beta, \alpha) = R_{zyx}(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$  • 欧拉角和固定角各 12 种, 非对称, 对称(1=3), 欧拉角和固定角都是最小表示。

• 一个姿态若能被一组俯仰角绝对值大于 90° 的 zyx 欧拉角或者 xyz 固定角描述, 那么也能被另一组俯仰角绝对值不大于 90° 的...表示

规定  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \times (-\pi, \pi]$   $\alpha = \arctan2(r_{21}, r_{11})$

$\beta = \arctan2(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})$   $\cos\beta > 0$   $\gamma = \arctan2(r_{32}, r_{33})$

若  $\beta = 90^\circ$   $\alpha - \gamma = \arctan2(r_{23}, r_{22})$

若  $\beta = -90^\circ$   $\alpha + \gamma = \arctan2(-r_{23}, r_{22})$

对于对称型欧拉角或固定角  $\beta \in [0, \pi]$   $\beta = 0$  或  $\pi$  角度不唯一表示

• 姿态的等效轴角表示

角度  $\theta$  和单位向量  $(k_x, k_y, k_z)$

$R_k(\theta) = R_k(-\theta)$

规定  $\theta \in [0, \pi]$

$\theta = \arccos(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2})$   $\theta$  不等于 0 或  $\pi$  • 若  $\theta = \pi$ ,  $r_{11} + r_{22} + r_{33} = -1$  以  $r_{11} \neq -1$  为例,

• 若  $\theta = 0$ , 意味着不旋转, 无穷多解

$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{r_{11}+1}/2 \\ r_{12}/\sqrt{2(r_{11}+1)} \\ r_{13}/\sqrt{2(r_{11}+1)} \end{pmatrix}$

•  $T = \begin{pmatrix} R_k(\theta) & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_k(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

右乘, 先平移后旋转 左乘, 先旋转后平移

四元数

$R_q(\eta) = \begin{pmatrix} 2(\eta^2 + \varepsilon_1^2) - 1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2 + \varepsilon_2^2) - 1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2 + \varepsilon_3^2) - 1 \end{pmatrix}$

• 已知 R 求四元数

若  $r_{11} + r_{22} + r_{33} > -1$ ,

$\begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{sgn}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sgn}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{pmatrix}$

$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

若  $r_{11} + r_{22} + r_{33} = -1$  当  $r_{11} \neq -1$  时

$\begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{12}) \sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{pmatrix}$

• 四元数和等效轴角

$\begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta \\ \varepsilon_1 \sin \frac{\theta}{2} \\ \varepsilon_2 \sin \frac{\theta}{2} \\ \varepsilon_3 \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

若  $r_{11} + r_{22} + r_{33} = -1$  当  $r_{11} \neq -1$  时

$\begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{12}) \sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{pmatrix}$

• 格拉斯曼积

$\begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \xi \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \xi \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta\xi - \varepsilon^T\delta \\ \eta\delta + \xi\varepsilon + \varepsilon \times \delta \end{pmatrix}$

• 三维向量的旋转

$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = R_\rho(\eta) \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \eta \\ -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 \end{pmatrix}$

**正运动学**

- 机器人串联机构由 N+1 个连杆和 N 个关节组成, 基座为连杆 0
- 确定末端执行器在 3 维空间的位姿, 至少需 6 个关节
- 连杆长度  $a_{i-1}$ , 连杆转角  $\alpha_{i-1}$  顺正, 连杆偏距  $d_i$ , 关节角  $\theta_i$  DH 参数
- 首关节  $a_0 = 0, \alpha_0 = 0$  转动关节  $d_1 = 0$  滑动关节  $\theta_1 = 0$
- 末关节  $a_{N-1}, \alpha_{N-1}$  已知, 转动关节  $d_N = 0$  滑动关节  $\theta_N = 0$
- 建立连杆坐标系步骤: 各关节轴正方向为 Z 轴正方向, 轴 i 和轴 i+1 公垂线与轴 i 的交点为 {i} 的原点  $O_i$ ,  $X_i$  垂直于轴 i 和轴 i+1, 沿公垂线由轴 i 指向轴 i+1, 右手定则, 坐标系 {0} 和 {1} 在第一个关节变量为 0 时重合, 对坐标系 {N},  $O_N$  和  $X_N$  可以灵活选择, 尽量使连杆参数为 0
- 相邻连杆坐标系的变换  ${}^{i-1}T_i = {}^{i-1}T_i(\phi_1) {}^i T_i(\phi_2) \dots {}^{i-1} T_i(\phi_N)$

$\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} d_i \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**逆运动学**

- 工作空间: 机器人末端工具联体坐标系原点所能达到的范围
- 灵巧手: 末端工具能够以任何姿态到达的区域, 可达: 至少一种姿态
- 代数解法: 三连杆平面机器人 目标点位姿由 x, y,  $\phi$  确定

${}^0T_3 = {}^0T_3 T = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ c_\phi = c_{123} \\ s_\phi = s_{123} \end{cases}$

$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$  若  $c_2$  在 -1~1 之间, 则  $\theta_2$  有解  $s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$ ,  $\theta_2 = \arctan2(s_2, c_2)$

$\begin{cases} k_1 = l_1 + l_2 c_2 \\ k_2 = l_2 s_2 \end{cases} \begin{cases} x = k_1 c_1 - k_2 s_1 \\ y = k_1 s_1 + k_2 c_1 \end{cases} \begin{cases} k_1 = r \cos\gamma \\ k_2 = r \sin\gamma \end{cases}$  则  $\gamma = \arctan2(k_2, k_1)$

$\begin{cases} \frac{x}{r} = \cos\gamma \cos\theta_1 - \sin\gamma \sin\theta_1 \\ \frac{y}{r} = \cos\gamma \sin\theta_1 + \sin\gamma \cos\theta_1 \end{cases} \begin{cases} \cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r} \\ \sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r} \end{cases}$

$\theta_1 = \arctan2(y, x) - \arctan2(k_2, k_1)$

$\gamma + \theta_1 = \arctan2(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}) = \arctan2(y, x)$   $\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$

几何解法 • 通过化简为多项式的代数解法

**微分运动学和静力学**

- ${}^B V_Q$  在坐标系 {B} 的速度  ${}^A({}^B V_Q) = {}^A R {}^B V_Q$  不同于  ${}^A V_Q$
- $v_C = V_{CORG}$  C 的坐标系原点相对于世界坐标系 {U} 的速度
- ${}^A v_C = {}^A R v_C$   ${}^C v_C = {}^C R v_C = {}^C R {}^A v_C$
- ${}^A \omega_B$  在 {A} 中描述 {B} 的定点转动, 方向是瞬轴在 {A} 中的方向, 大小表示在 {A} 中 {B} 绕瞬轴的角速度  ${}^C({}^A \omega_B)$  坐标系 {B} 相对坐标系 {A} 的角速度在坐标系 {C} 中的描述, 满足  ${}^C({}^A \omega_B) = {}^C R {}^A \omega_B$
- $\omega_C = {}^A \omega_C = {}^A R {}^U \omega_C$   $\omega_C \neq {}^A \omega_C$   $\omega_C = {}^C R \omega_C = {}^C R {}^U \omega_C$
- 刚体一般运动时的线速度变化  ${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A R {}^B V_Q + {}^A R {}^B \omega_Q$
- 角速度向量  ${}^A \omega_B$ ,  ${}^A \omega_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A R {}^B V_Q + {}^A \omega_B \times {}^A R {}^B Q$

${}^A S = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_y & \Omega_x \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}$   ${}^A R = {}^A S {}^A R$   ${}^A S = {}^A R {}^A R^{-1} = {}^A R {}^A R^T$

• 运动坐标系之间的角速度向量关系  ${}^A \omega_C = {}^A \omega_B + {}^A R {}^B \omega_C$

• 机器人连杆间的速度传递

转动型关节:

${}^{i+1} \omega_{i+1} = {}^{i+1} R {}^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \tilde{z}_{i+1}$   ${}^{i+1} v_{i+1} = {}^{i+1} R({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1})$

平动型关节:

${}^{i+1} \omega_{i+1} = {}^{i+1} R {}^i \omega_i$   ${}^{i+1} v_{i+1} = {}^{i+1} R({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1} \tilde{z}_{i+1}$

连杆速度计算的向外迭代法: 连杆 0 的角速度  $\omega_0 = 0$  线速度  $v_0 = 0$

迭代计算每一连杆的角速度  $\omega_i$  和线速度  $v_i$ , 直至  ${}^N \omega_N$  和  ${}^N v_N$

若要得到基坐标系下的结果  $\omega_N = {}^0 R {}^N \omega_N$ ,  $v_N = {}^0 R {}^N v_N$

• 叉乘的计算  $\omega_x = p_y q_z - p_z q_y$   $\omega_y = p_z q_x - p_x q_z$   $\omega_z = p_x q_y - p_y q_x$

• 雅可比(Jacobian)矩阵  $Y = F(X)$   $\delta Y = J(X) \delta X$

记关节速度为  $\phi$ , 机器人末端速度为  $v$  (相对基坐标系 {0} 的速度)

• 向外迭代法计算机器人末端速度的算法本质上是计算几何雅可比矩阵

五次多项式

$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$

$\begin{cases} \phi_0 = a_0 \\ \phi_1 = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ \dot{\phi}_0 = a_1 \\ \dot{\phi}_1 = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ \ddot{\phi}_0 = 2a_2 \\ \ddot{\phi}_1 = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{cases} \begin{cases} a_0 = \phi_0 \\ a_1 = \dot{\phi}_0 \\ a_2 = \frac{\ddot{\phi}_0}{2} \\ a_3 = \frac{20\phi_0 - 20\phi_1 - (8\dot{\phi}_0 + 12\dot{\phi}_1)t_f - (3\ddot{\phi}_0 - \ddot{\phi}_1)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_4 = \frac{30\phi_0 - 30\phi_1 + (14\dot{\phi}_0 + 16\dot{\phi}_1)t_f + (3\ddot{\phi}_0 - 2\ddot{\phi}_1)t_f^2}{2t_f^4} \\ a_5 = \frac{12\phi_0 - 12\phi_1 - (6\dot{\phi}_0 + 6\dot{\phi}_1)t_f - (\ddot{\phi}_0 - \ddot{\phi}_1)t_f^2}{2t_f^5} \end{cases}$

**几何雅可比矩阵**满足  $(\omega) = J(\phi)\dot{\phi}$  因  $\omega$  并不能由基坐标系下的末端姿态

最小表示求得得到, 该雅可比矩阵称为几何雅可比矩阵。

- 雅可比矩阵的向量积构造法

若第 i 个关节为平动型关节, 则  $v_N^{(i)} = \dot{d}_i \tilde{z}_i$   $\omega_N^{(i)} = 0$

若第 i 个关节为转动型关节, 则  $v_N^{(i)} = \dot{\theta}_i \tilde{z}_i \times (O_N - O_i)$   $\omega_N^{(i)} = \dot{\theta}_i \tilde{z}_i$

$v_N = \sum_{i=1}^N v_N^{(i)}$   $\omega_N = \sum_{i=1}^N \omega_N^{(i)}$

若机器人的每个关节均为转动型关节, 笛卡尔速度向量  $v_N = \begin{pmatrix} v_N \\ \omega_N \end{pmatrix} \in R^6$

关节空间角速度向量  $J(\phi) \in R^{6 \times N}$

$\dot{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N \end{pmatrix} v_N = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \times (O_N - O_1) & \dot{z}_2 \times (O_N - O_2) & \dots & \dot{z}_N \times (O_N - O_N) \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dots & \dot{z}_N \end{pmatrix} \dot{\phi}$

$\dot{\phi} = J(\phi) \dot{\phi}$

• 参考坐标系变换下的雅可比矩阵

$\begin{pmatrix} v_N \\ \omega_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0 R & 0 \\ 0 & {}^0 R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_N \\ \omega_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0 R & 0 \\ 0 & {}^0 R \end{pmatrix} J(\phi) \dot{\phi}$   $J(\phi) = \begin{pmatrix} {}^0 R & 0 \\ 0 & {}^0 R \end{pmatrix} J(\phi)$

- 逆微分运动学: 已知末端速度求关节速度  $\dot{\phi} = J^{-1}(\phi) v_N$
- 奇异性: 雅可比矩阵不为逆的关节向量  $\phi$  边界奇异性: 工作空间边界的奇异形内点奇异性: 工作空间内部的奇异形
- 当机器人处于奇异形时, 机器人的末端失去自由度
- 可操作度: 衡量机器人位形与奇异形距离的一种度量方式
- 分析雅可比矩阵

$X = \begin{pmatrix} P(\phi) \\ \Psi(\phi) \end{pmatrix}$  表示机器人末端执行器的位置与姿态,  $P(\phi)$  为基座坐标系原点到末端执行器原点的一般向量,  $\Psi(\phi)$  为末端执行器坐标系相对于基座坐标系姿态的最小表示 (欧拉角/固定角)

- 刚体角速度与欧拉角速率的关系
- 针对 z-y-z 欧拉角表示的姿态
- 欧拉角表示为  $\Psi = (\alpha \beta \gamma)^T$
- 欧拉角速率为  $\dot{\Psi} = (\dot{\alpha} \dot{\beta} \dot{\gamma})^T$

$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -s\alpha & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & s\alpha s\beta \\ 1 & 0 & c\beta \end{pmatrix} \dot{\Psi}$  记  $B_\alpha(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & -s\alpha & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & s\alpha s\beta \\ 1 & 0 & c\beta \end{pmatrix}$

$\omega = B_\alpha(\Psi) \dot{\Psi}$

- 分析雅可比矩阵与几何雅可比矩阵的关系  $J_\phi(\phi) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B_\alpha^{-1}(\Psi) \end{pmatrix} J(\phi)$
- 机器人的静力: 机器人处于平衡位置时, 外部环境对末端执行器的作用力 (包括力和力矩) 将导致机器人关节 i 产生相应的作用力  $\tau_i$ , 该作用力对平动型关节为关节力, 对转动型关节为关节力矩
- 刚体静态平衡的条件: 全部力和力矩的向量和为零  $F = 0, n_z = 0$
- 机器人连杆间的静力传递

$f_i = {}^{i-1} R {}^i f_{i+1}$   $\tau_i = {}^{i-1} R {}^i \tau_{i+1}$   $\tau_i = {}^{i-1} R {}^i \tau_{i+1}$   $\tau_i = {}^{i-1} R {}^i \tau_{i+1}$

主动力矩 转动型  $\tau_i = {}^{i-1} \tilde{z}_i^T$  平动型  $\tau_i = {}^{i-1} f_i^T \tilde{z}_i$

- 力域中的雅可比 F 是末端作用于外部的 6 x 1 维笛卡尔力-力矩向量:  $\tau = J^T F$

**机器人轨迹规划**

- 关节空间轨迹规划
- 三次多项式

$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$   $\phi(t_0) = \phi_0$   $\phi(t_f) = \phi_f$   $\dot{\phi}(t_0) = \dot{\phi}_0$   $\dot{\phi}(t_f) = \dot{\phi}_f$

$a_0 = \phi_0, a_1 = \dot{\phi}_0, a_2 = -\frac{3\phi_0 - 3\phi_f + 2\dot{\phi}_0 t_f + \dot{\phi}_f t_f}{t_f^2}, a_3 = \frac{2\phi_0 - 2\phi_f + \dot{\phi}_0 t_f + \dot{\phi}_f t_f}{t_f^3}$

五次多项式

$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$

$\begin{cases} \phi_0 = a_0 \\ \phi_1 = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ \dot{\phi}_0 = a_1 \\ \dot{\phi}_1 = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ \ddot{\phi}_0 = 2a_2 \\ \ddot{\phi}_1 = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{cases} \begin{cases} a_0 = \phi_0 \\ a_1 = \dot{\phi}_0 \\ a_2 = \frac{\ddot{\phi}_0}{2} \\ a_3 = \frac{20\phi_0 - 20\phi_1 - (8\dot{\phi}_0 + 12\dot{\phi}_1)t_f - (3\ddot{\phi}_0 - \ddot{\phi}_1)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_4 = \frac{30\phi_0 - 30\phi_1 + (14\dot{\phi}_0 + 16\dot{\phi}_1)t_f + (3\ddot{\phi}_0 - 2\ddot{\phi}_1)t_f^2}{2t_f^4} \\ a_5 = \frac{12\phi_0 - 12\phi_1 - (6\dot{\phi}_0 + 6\dot{\phi}_1)t_f - (\ddot{\phi}_0 - \ddot{\phi}_1)t_f^2}{2t_f^5} \end{cases}$

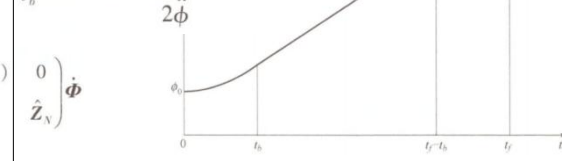
• 考虑关节中间点的两个三次多项式  $\phi_{ij}(0) = \phi_i$   $\phi_{ij}(0) = \phi_i$

$\phi_{ij}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$   $t \in [0, t_{11}]$   $\phi_{jk}(t_{11}) = \phi_j$   $\dot{\phi}_{jk}(t_{12}) = \dot{\phi}_k$

$\phi_{jk}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$   $t \in [0, t_{12}]$

• 带抛物线过渡的直线段

确保有解,  $\ddot{\phi} \geq \frac{4(\phi_f - \phi_0)}{t_f^2}$   $\phi_{jk}(t_{12}) = \phi_k$   $\dot{\phi}_{jk}(t_{11}) = \dot{\phi}_k$



• 考虑关节中间点的带抛物线过渡的直线段

用 j, k, l 表示三个相邻的路径点, 位于路径点 k 处的拟合区段的时间间隔为  $t_{kl}$ , 位于 j 和 k 之间的直线段的时间间隔为  $t_{jk}$ , 点 j 和 k 之间总的的时间间隔为  $t_{adjk}$ , 直线段的速度为  $\dot{\phi}_{jk}$ , 点 j 处拟合区段的加速度为  $\ddot{\phi}_j$

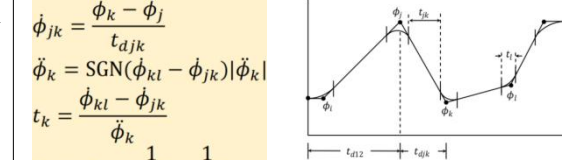
对于内部路径点

$\dot{\phi}_{jk} = \frac{\phi_k - \phi_j}{t_{adjk}}$

$\ddot{\phi}_k = \text{SGN}(\phi_{kl} - \phi_{jk}) |\ddot{\phi}_k|$

$t_k = \frac{\phi_{kl} - \phi_{jk}}{\ddot{\phi}_k}$

$t_{jk} = t_{adjk} - \frac{1}{2} t_j - \frac{1}{2} t_k$

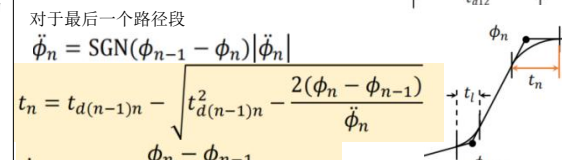


对于第一个路径段

$\ddot{\phi}_1 = \text{SGN}(\phi_2 - \phi_1) |\ddot{\phi}_1|$

$t_1 = t_{adj1} - \sqrt{t_{adj1}^2 - \frac{2(\phi_2 - \phi_1)}{\ddot{\phi}_1}}$

$\dot{\phi}_{12} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_{adj12} - \frac{1}{2} t_1}$   $t_{12} = t_{adj12} - t_1 - \frac{1}{2} t_2$



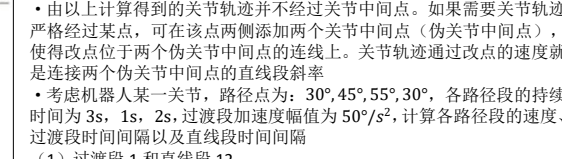
对于最后一个路径段

$\ddot{\phi}_n = \text{SGN}(\phi_{n-1} - \phi_n) |\ddot{\phi}_n|$

$t_n = t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 - \frac{2(\phi_n - \phi_{n-1})}{\ddot{\phi}_n}}$

$\dot{\phi}_{(n-1)n} = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2} t_n}$

$t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2} t_{n-1}$



• 由以上计算得到的关节轨迹并未经过关节中间点。如果需要关节轨迹严格经过某点, 可在该点两侧添加两个关节中间点 (伪关节中间点), 使得改点位于两个伪关节中间点的连线上。关节轨迹通过改点的速度就是连接两个伪关节中间点的直线段斜率

• 考虑机器人某一关节, 路径点为: 30°, 45°, 55°, 30°, 各路段的持续时间为 3s, 1s, 2s, 过渡段加速度幅值为 50°/s², 计算各路段的速度、过渡段时间间隔以及直线段时间间隔

(1) 过渡段 1 和直线段 12

过渡段加速度:  $\ddot{\phi}_1 = \text{SGN}(45 - 30) \times 50 = 50^\circ/\text{s}^2$

过渡段持续时间:  $t_1 = 3 - \sqrt{9 - \frac{2(45-30)}{50}} = 0.101\text{s}$

直线段速度:  $\dot{\phi}_{12} = \frac{45-30}{3-0.5 \times 0.101} = 5.09^\circ/\text{s}$

直线段时间间隔:  $t_{12} = 3 - 0.101 - \frac{1}{2} t_2 = 2.8499\text{s}$

(2) 过渡段 2、直线段 23、过渡段 3

直线段 23 速度:  $\dot{\phi}_{23} = \frac{55-45}{1-0.5 \times 0.101} = 10^\circ/\text{s}$

过渡段 2 加速度:  $\ddot{\phi}_2 = \text{SGN}(10 - 5.09) \times 50^\circ/\text{s}^2 = 50^\circ/\text{s}^2$

过渡段 2 持续时间:  $t_2 = \frac{\phi_{23} - \phi_{12}}{\ddot{\phi}_2} = \frac{10-5.09}{50} = 0.0982\text{s}$



过渡段3加速度:  $\ddot{\phi}_3 = \text{SGN}(-13.398 - 10) \times 50^\circ/\text{s}^2 = -50^\circ/\text{s}^2$   
 过过渡段3持续时间:  $t_{34} = \frac{-13.398 - 10}{-50} = 0.468\text{s}$   
 直线段23间隔时间:  $t_{23} = 1 - 0.5 \times 0.0982 - 0.5 \times 0.468 = 0.7169\text{s}$

(3) 直线段 34 和过渡段 4  
 过过渡段4加速度:  $\ddot{\phi}_4 = \text{SGN}(30 - 55) \times 50^\circ/\text{s}^2 = -50^\circ/\text{s}^2$

过过渡段4时间间隔:  $t_{45} = 2 - \sqrt{4 - \frac{2(30-55)}{-50}} = 0.268\text{s}$

直线段34速度:  $\dot{\phi}_{34} = \frac{30-55}{2-0.5 \times 0.268} = -13.398^\circ/\text{s}$

直线度34时间间隔:  $t_{34} = 2 - 0.268 - 0.5 \times 0.468 = 1.498\text{s}$

• 笛卡尔直线运动

对姿态进行插补的方法: 采用姿态的等效轴角表示的变形

$K = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k}_x \\ \hat{k}_y \\ \hat{k}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{k}_z]^T \\ \theta \end{bmatrix}$ : 等效单位转动轴  
 $\theta$ : 绕该轴的转动量

$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450^\circ \\ 900^\circ \\ 1350^\circ \end{bmatrix} / \sqrt{14}$  该最终姿态也等于绕同一轴旋转450+360n度的结果  
 $n$ : 任意整数

对两个等效轴角表示的姿态  $K_0 = \begin{bmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0z} \end{bmatrix}$  和  $K_1 = \begin{bmatrix} k_{1x} \\ k_{1y} \\ k_{1z} \end{bmatrix}$  插值时, 遵循如下的选取规则

插值时, 通常应该选择使得  $\left| \begin{bmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0z} \end{bmatrix} - (\theta + 360n) \begin{bmatrix} \hat{k}_{1x} \\ \hat{k}_{1y} \\ \hat{k}_{1z} \end{bmatrix} \right|$  最小的  $n$

然后对  $\begin{bmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0z} \end{bmatrix}$  和  $(\theta + 360n) \begin{bmatrix} \hat{k}_{1x} \\ \hat{k}_{1y} \\ \hat{k}_{1z} \end{bmatrix}$  运用前面的多项式或带抛物线过渡直线段等插值方法

• 姿态的四元数插值

四元数球面线性插值(Slerp) 对于单位四元数  $q_0$  和  $q_1$ ,  $t \in [0, 1]$

$q_t = \text{Slerp}(q_0, q_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)} q_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)} q_1$

钝角处理:

若  $q_0 \cdot q_1 < 0$ , 则将  $q_1$  改为  $-q_1$ , 使用新的夹角进行插值, 保证插值的路径最短

• 机器人动力学

• 线加速度传递:  ${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{BORG} + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^B P_Q + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}^B P_Q)$

• 角加速度传递:  ${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^B\Omega_C + {}^A\Omega_B \times {}^B\Omega_C$

• 刚体的惯性张量与欧拉方程

${}^C N = {}^C I \dot{\omega}_C + \omega_C \times {}^C I \omega_C$

该式为旋转刚体的欧拉方程, 描述了作用在刚体上的力矩  ${}^C N$  与刚体旋转角速度  $\omega_C$  和角加速度  $\dot{\omega}_C$  之间的关系,  ${}^C I$  成为刚体的惯性张量

${}^C I = \begin{pmatrix} \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$

• 牛顿-欧拉迭代动力学方程

1) 向外迭代: 连杆  $0 \rightarrow N$ , 依次计算速度和加速度, 质心加速度, 力, 力矩

转动  ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{z}_{i+1}$

${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{z}_{i+1} + {}^{i+1}R \cdot {}^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{z}_{i+1}]$

平动  ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R \cdot [{}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1})]$

是非保守力/力矩向量, 它包括关节力/力矩向量  $\tau$ 、摩擦力/力矩向量  $B\Phi$ 、末端执行器与环境接触而引起的关节负荷力/力矩向量  $J^T(\Phi)F$ 。本章假设机器人末端执行器与环境不接触, 因此  $F = 0$ , 得到

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Phi}} - \frac{\partial k}{\partial \Phi} + \frac{\partial u}{\partial \dot{\Phi}} = \tau - B\Phi$$

$B = \text{diag}(b_1 \dots b_N)$ ,  $b_i$  为折算到关节  $i$  的粘性摩擦系数,  $B\Phi$  可不考虑动能的计算: 连杆  $i$  的动能

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} {}^i\omega_i^T I_i {}^i\omega_i = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} {}^i\omega_i^T R^0 I_i {}^0 R^T {}^i\omega_i$$

可由关节变量计算:  $v_{ci} = J_p^{(i)}(\Phi) \dot{\Phi}$ ,  $\omega_i = J_o^{(i)}(\Phi) \dot{\Phi}$

机器人的总动能  $k(\Phi, \dot{\Phi}) = \sum_{i=1}^N k_i(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^T M(\Phi) \dot{\Phi}$

惯性矩阵  $M(\Phi) = \sum_{i=1}^N (m_i (J_p^{(i)}(\Phi) J_p^{(i)T}(\Phi) + (J_o^{(i)}(\Phi))^T R^0 I_i {}^0 R^T J_o^{(i)}(\Phi)))$  对称且正定

势能的计算: 连杆  $i$  的势能  $u_i = -m_i g^T {}^0 P_{ci}$

机器人的总势能  $u(\Phi) = \sum_{i=1}^N u_i(\Phi) = -\sum_{i=1}^N m_i g^T {}^0 P_{ci}$

$M - 2C$  是反对称的

• 运动控制: 在机器人末端与环境无接触的情况下, 如何设计用于实时计算关节执行器输入的闭环控制律, 使得各关节较好地跟踪期望轨迹。

• 独立关节控制

$T_{ci}$  是干扰力矩

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

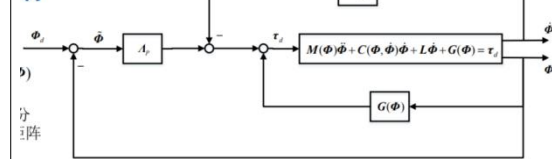
考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

考虑阶跃输入的 PD 控制器设计

## 3. 重力补偿 PD 控制制



控制律  $\tau_d = A_p(\Phi_p - \Phi) - A_D \dot{\Phi} + G(\Phi)$   $A_p, A_D$  均为  $N$  阶正定矩阵该控制律可以使  $\Phi$  收敛于定常的  $\Phi_d$

## 4. 逆动力学控制

质量-弹簧-阻尼系统:  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$  设计控制律  $f = -k_p x - k_v \dot{x}$

得  $m\ddot{x} + (b + k_p)\dot{x} + (k + k_p)x = 0$

分解成模型控制+位置校正两部分

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f + \beta$

$\alpha = m, \beta = b\dot{x} + kx$

同样设计控制律  $f' = -k_p x - k_v \dot{x}$  位置校正部分

$M(\Phi)\ddot{\Phi} + C(\Phi, \dot{\Phi})\dot{\Phi} + L\dot{\Phi} + G(\Phi) = \tau_d$

内环控制律  $\tau_d = M(\Phi)\alpha_\phi + C(\Phi, \dot{\Phi})\dot{\Phi} + L\dot{\Phi} + G(\Phi)$

得到  $\alpha_\phi = \ddot{\Phi}$

对每个双积分系统实施“前馈+PD控制”

外环控制律  $\alpha_\phi = \ddot{\Phi}_d + K_p(\Phi_d - \Phi) + K_D(\dot{\Phi}_d - \dot{\Phi})$   $K_p, K_D$  是对角矩阵

缺点: 系统参数必须精确已知

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

分解控制下的闭环控制系统

可行运动空间: 所有可行运动向量组成的向量集合  $V_a \subset R^6$   
 约束空间:  $V_c$  为  $V_a$  的正交补空间  $V_c = V_a^\perp \subset R^6$   
 梅森规则 在两个彼此正交的子空间分别采取位置控制和力控制

	运动学	静力学
自然约束	$\dot{p}_c = 0, \dot{p}_c \in V_c$	$F_g = 0, F_g \in V_a$
人工约束	$\dot{p}_a \in V_a$ 可取任意值	$F_c \in V_c$ 可取任意值

自然约束: 运动约束  ${}^c v_x = {}^c v_z = {}^c \omega_x = {}^c \omega_y = 0$  力约束  ${}^c f_y = {}^c n_z = 0$

人工约束:  ${}^c v_y = 0, {}^c \omega_z = \alpha_2, {}^c f_x = {}^c n_x = {}^c n_y = 0, {}^c f_z = \alpha_3$

自然约束的运动约束在  $R^6$  定义了一个广义表面 (2 维)

力位混合控制的策略: 为完成任务而实现规划好的人工约束序列。策略需包含检测手段以检测接触状态的变化, 并跟踪自然约束的变化。当自然约束变化时, 要调用新的人工约束集并进行控制。

• 力位混合控制器设计: 在存在自然力约束的方向进行位置控制, 在存在自然位置约束的方向进行力控制

沿着任意坐标系  $\{C\}$  的正交自由度方向进行任意位置和力的混合控制

质量-弹簧系统的力控制: 环境刚度  $k_e$ , 干扰力  $f_{dist}$ , 接触力  $f_e = k_e x$ , 其期望值  $f_d$ , 物理系统方程:  $f = m\ddot{x} + k_e x + f_{dist}$ , 输入力与接触力的关系

方为  $f = m\ddot{x} + k_e x + f_{dist}$ , 控制律分解方法进行反馈线性化:  $f = \alpha f' + \beta = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$ , 设计控制律为:

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$

$f = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta$