现代控制理论
Modern Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第八章 Chapter 8

线性定常系统的状态空间分析法

主要内容

- 简介
- 能控性和能观性
- 线性变换和标准型
- 系统的状态反馈
- 系统的状态观测

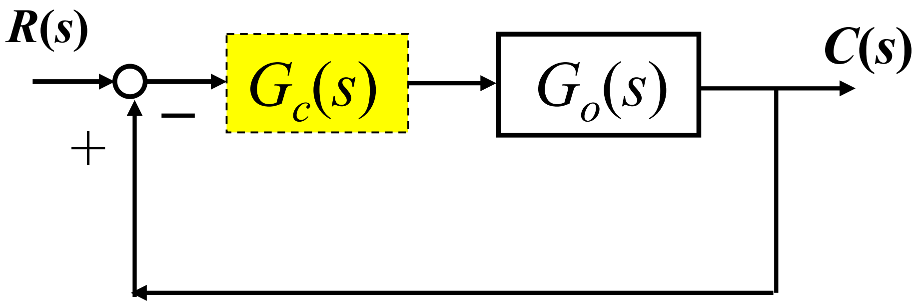
系统状态反馈

- 基本概念（通过状态反馈从开环到闭环）
- 闭环线性系统的能控性与能观测性
- 状态反馈设计
  - 直接法
  - 相变量法（能控标准型法）
  - 采用物理变量
- 状态反馈的一般性质（采用相变量）
- 状态反馈示例
  - 全极点系统
  - 零极点系统

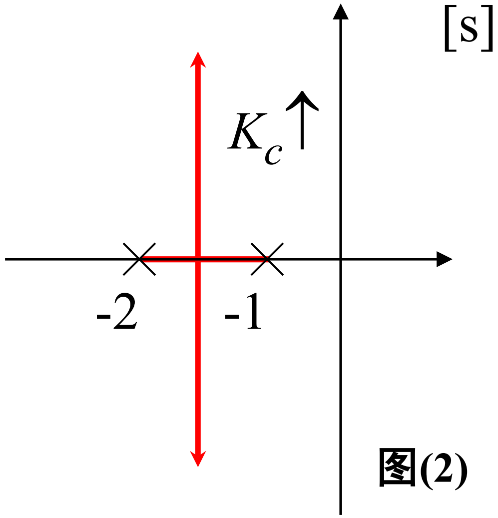
基本概念（从开环到闭环）

回顾：如图(1)，若 $G_o(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$　　$G_c(s)=K_c$

输出反馈控制系统的根轨迹（随 K_c 变化）如图(2)所示。无法得到[s]平面具有任意期望闭环极点（复数极点需共轭）的根轨迹，这些闭环极点是由系统特性决定的，K_c 变化无法得到[s] 平面上任意期望闭环极点，怎么办？



图(1)



图(2)

若系统特性需要闭环极点为 -5 和 -6，什么样的控制器可以满足这个要求？控制器又该如何设计？

基本概念（从开环到闭环）

考虑：开环系统 $G_o(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{s^2+3s+2}$ ，需要闭环极点为 -5 和 -6

即：要求闭环系统 $G_{cl}(s)=\dfrac{1}{(s+5)(s+6)}=\dfrac{1}{s^2+11s+30}$

采用状态反馈方法，考虑状态空间模型

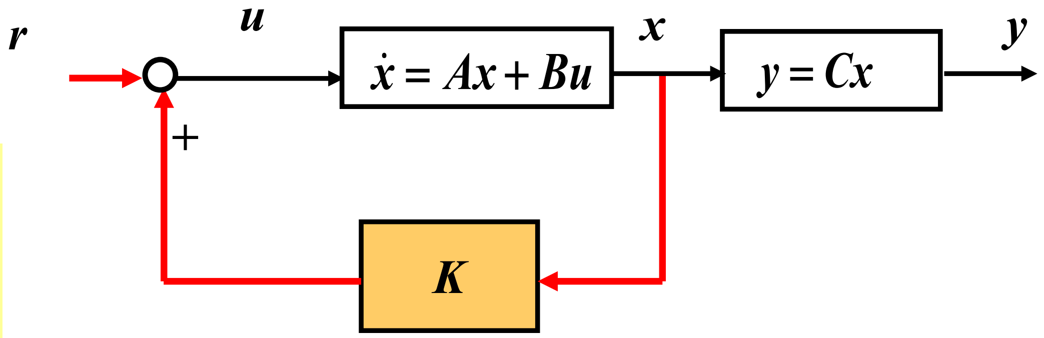
开环系统 $\Sigma:\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$ $\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x=x_1$

$u=r+Kx$

闭环系统

$$\Sigma_{cl}:\dot{x}=Ax+Bu=Ax+B(r+Kx)$$
$$=(A+BK)x+Br=A_{cl}x+Br$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \text{-30} & \text{-11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r$$

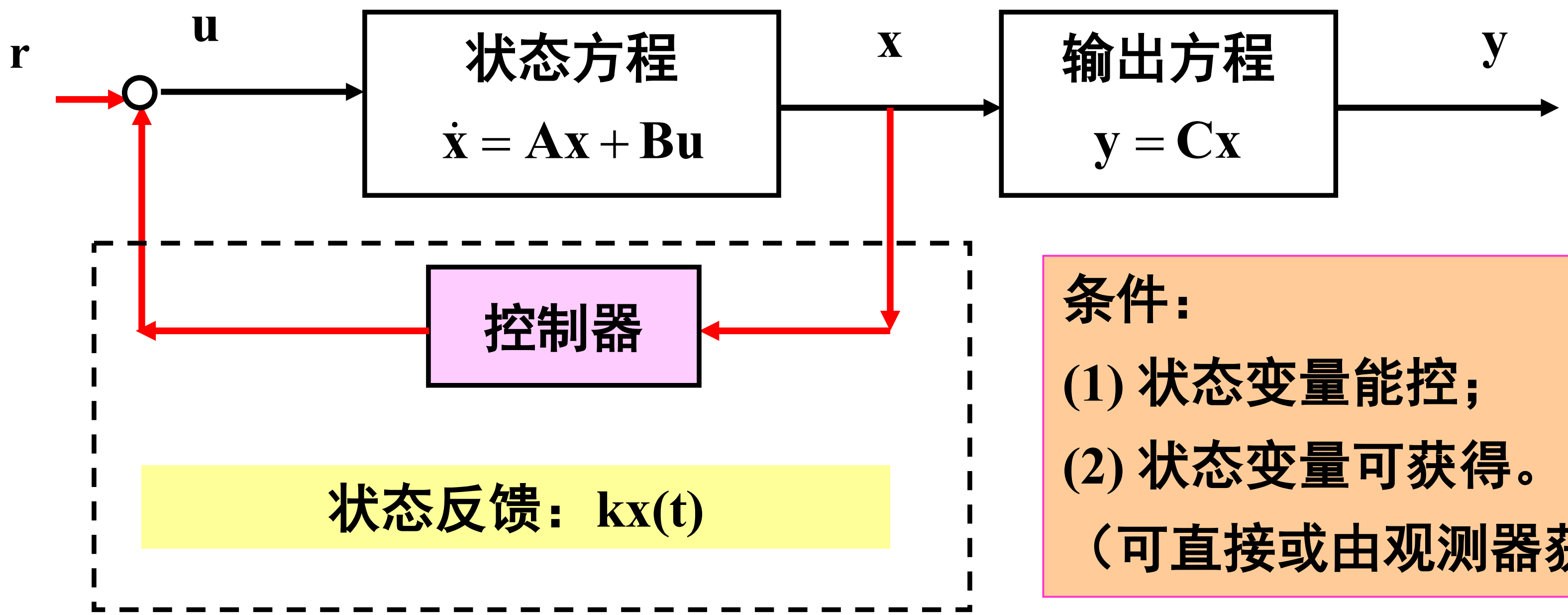
$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x=x_1$



可求得状态反馈控制器 $K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-28 & -8\end{bmatrix}$

基本概念（从开环到闭环）

系统需要满足什么条件才能设计状态反馈控制器?



条件：

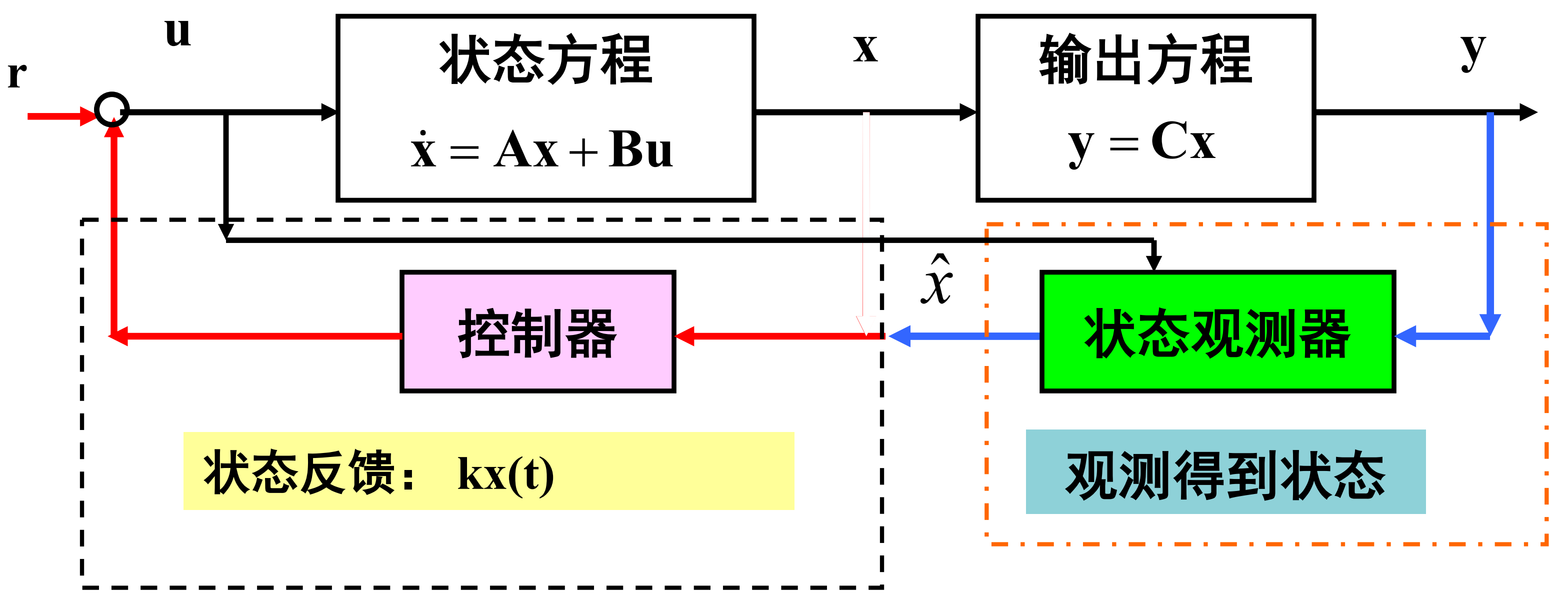
(1) 状态变量能控；

(2) 状态变量可获得。

（可直接或由观测器获得）

基本概念（从开环到闭环）

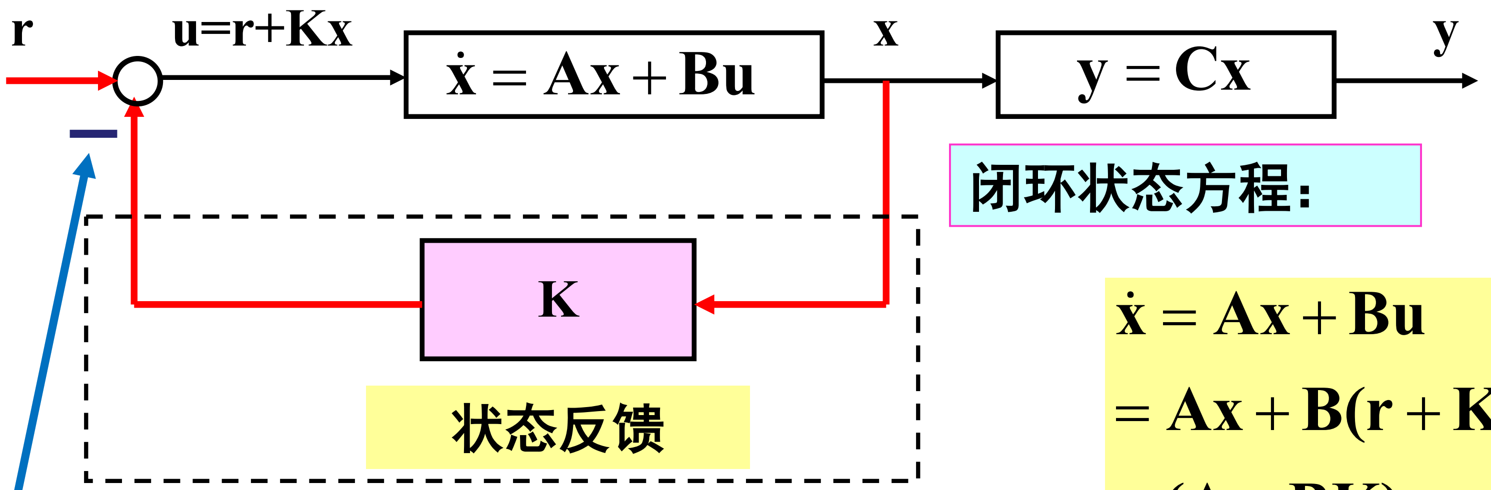
若状态变量不可测量，但是系统完全能观，则实时状态变量可以由系统的输入输出估计得到，如图所示，估计器又被称为状态观测器。



基本概念（从开环到闭环）

系统状态空间模型为：
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

状态反馈控制为： $\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{K}\mathbf{x}$



教材采用
$\dot{x} = (A - BK)x + Br$

闭环状态方程：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{K}\mathbf{x}) \\ &= \underline{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} \\ &= \underline{\mathbf{A}_{cl}}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}\end{aligned}$$

闭环系统矩阵

B、C均不变，仅A改变

基本概念（从开环到闭环）

状态反馈之后的闭环特征方程为：

$$\because \mathbf{A}_{cl} = (\mathbf{A}+\mathbf{BK})$$

状态反馈阵，可以根据需要来设计

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}_{cl}\right| = \left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{BK}\right| = 0$$

由于 Q(λ) 是闭环特征方程，这就意味着通过选择适当的状态反馈阵K可以任意配置闭环极点。 假设期望的 闭环极点为 λ_i (i=1,2,...,n），则

$$\Delta^*(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

采用状态反馈K进行极点配置的充分必要条件是系统完全能控。

- 状态反馈不改变系统的零点，不改变不能控子系统的极点，可任意改变能控子系统的极点（复极点需共轭）。
- 状态反馈可以任意配置闭环极点是因为状态反馈是基于所有状态变量的，n阶系统有n个状态变量。

基本概念（从开环到闭环）

- **定理1：一个开环系统｛A，B，C｝通过状态反馈控制可以任意配置闭环极点的充分必要条件是该系统｛A，B｝完全能控。**

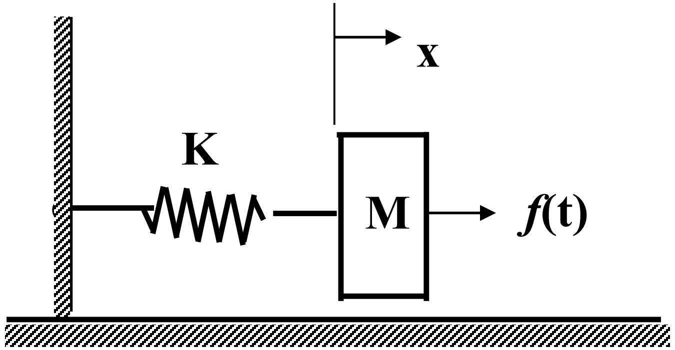
- **只要｛A，B｝完全能控，无论开环系统 A 是否为稳定矩阵，总能选择K，使 [A＋BK] 为稳定矩阵（所有特征值均位于 S 左半平面）。**

定义：对系统(A,B)，若存在矩阵K使$(A+BK,B)$稳定，称(A,B)可镇定

(A,B)可镇定，当且仅当(A,B)的不能控子系统稳定

基本概念（从开环到闭环）

例 8-4-1 考虑一个无阻尼(ζ=0)振荡器，
希望将阻尼增加到 1，使2个极点均位于－2ω_0。



Simple mass-spring mechanical system

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$M\ddot{x} = f - Kx$$

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} f$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解： (1) 能控性矩阵的秩为 $\mathrm{Rank} Q_C = \mathrm{Rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = n$

因此系统是 完全能控的，可用状态反馈任意配置闭环极点。

假设状态变量可获得，则状态反馈控制器可以实现，且 K=[k_1 , k_2]。

基本概念（从开环到闭环）

例 8-4-1 考虑一个无阻尼($\zeta=0$)振荡器，希望将阻尼增加到 1，使2个极点均位于$-2\omega_0$。

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

开环特征方程：

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm j\omega_0$$

原系统有2个虚轴上的极点，系统等幅振荡。

(2) 闭环特征方程：

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda}) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}| = \left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \lambda^2 - k_2\lambda + \omega_0^2 - k_1 = 0$$

(3) 期望的闭环特征方程：$\Delta^*(\lambda) = (\lambda + 2\omega_0)^2 = \lambda^2 + 4\omega_0\lambda + 4\omega_0^2 = 0$

(4) $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda})$ 和 $\Delta^*(\boldsymbol{\lambda})$ 对应项系数相等

$$K = [k_1 \ k_2] = [-3\omega_0^2, \ -4\omega_0]$$

$$-k_2 = 4\omega_0, \quad \omega_0^2 - k_1 = 4\omega_0^2$$

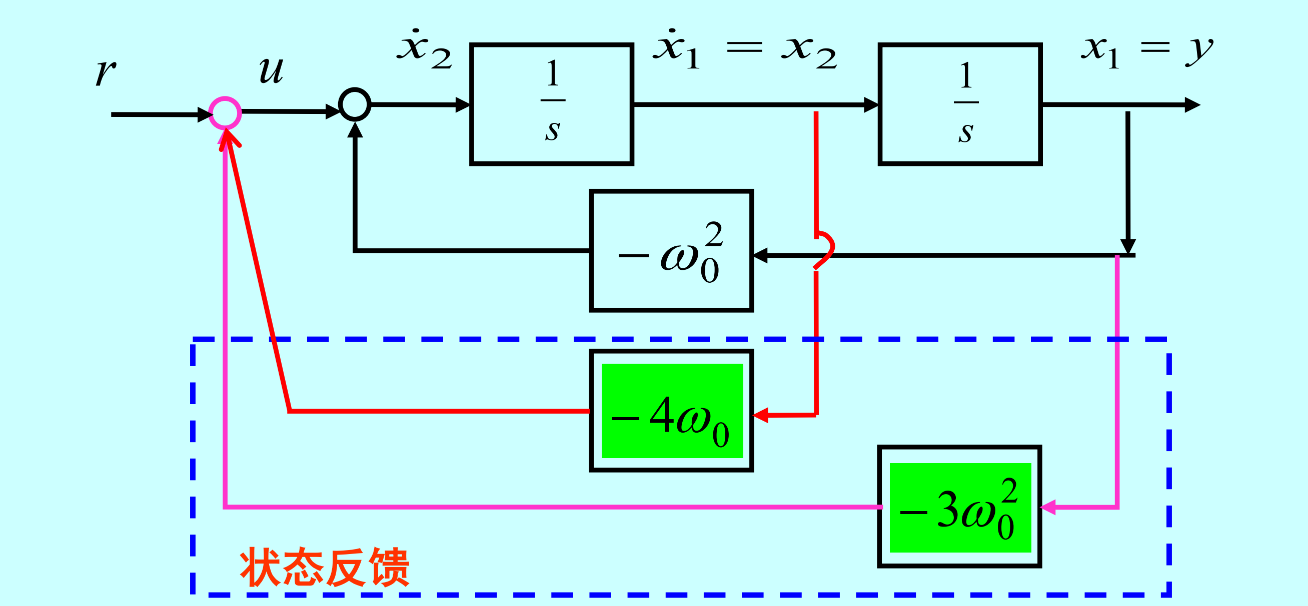
基本概念（从开环到闭环）

例 8-4-1 考虑一个无阻尼($\zeta=0$)振荡器，

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

希望将阻尼增加到 1，使2个极点均位于$-2\omega_0$。

$$K = [k_1 \ k_2] = [-3\omega_0^2, \ -4\omega_0]$$



闭环状态方程为

$$\Sigma_{cl}: \quad \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Br} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4\omega_0^2 & -4\omega_0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{r}$$

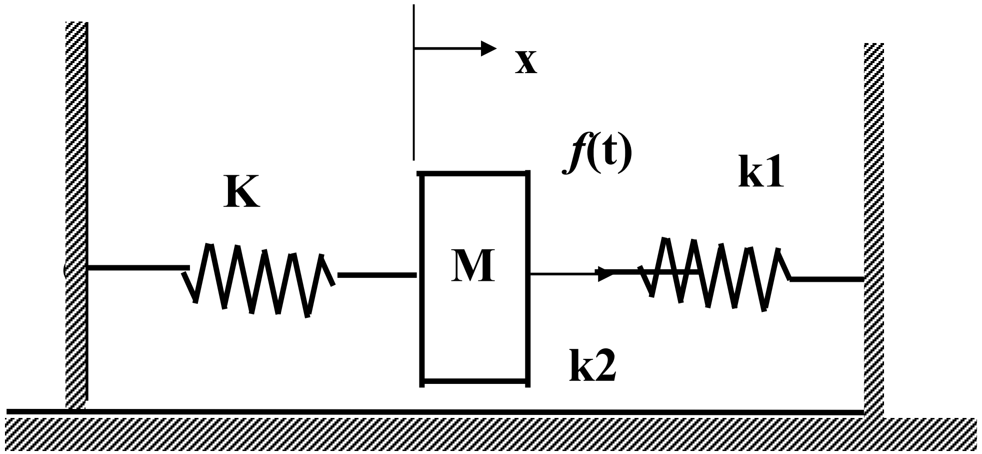
基本概念（从开环到闭环）

例 8-4-1 考虑一个无阻尼($\zeta=0$)振荡器，

希望将阻尼增加到 1，使2个极点均位于$-2\omega_0$。

$$K=[k_1\ \ k_2]=[-3\omega_0^2,\ \ -4\omega_0]$$

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$



With feedback

通过状态反馈，闭环极点可以位于期望的$-2\omega_0$。

基本概念（从开环到闭环）

- 系统表示为能控标准型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{cx}$$

采用状态反馈使期望的闭环极点为： λ_i (i=1,2,…,n)。

期望的闭环特征多项式为

$$\Delta^*(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0$$

通过状态反馈所得到的 闭环 特征多项式应与期望特征多项式相同

假设 $K=[k_1\ k_2\ ,\ldots,\ k_n]$

基本概念（从开环到闭环）

$$\Delta^*(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0$$

$$A_{cl}=A+BK=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0+k_1&-a_1+k_2&\cdots&-a_{n-2}+k_{(n-1)}&-a_{n-1}+k_n\end{bmatrix}$$

$$-\beta_0=-a_0+k_1\Rightarrow k_1=a_0-\beta_0;\quad \cdots\cdots$$

$$K=\begin{bmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_{n-1}&k_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0-\beta_0&a_1-\beta_1&\cdots&a_{n-2}-\beta_{n-2}&a_{n-1}-\beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

系统状态反馈

- 基本概念（通过状态反馈从开环到闭环）
- 闭环线性系统的能控性与能观性
- 状态反馈设计
  - 直接法
  - 相变量法（能控标准型法）
  - 采用物理变量
- 状态反馈的一般性质(采用相变量)
- 状态反馈示例
  - 全极点系统
  - 零极点系统

闭环系统的能控性与能观性

问题：当系统极点可以通过状态反馈任意配置时，闭环系统 [A+BK, B] 是否能控？

- **定理2** ：受控系统Σ｛A，B，C｝经状态反馈矩阵K构成闭环系统Σ_{cl}｛A＋BK，B，C｝，则闭环系统 Σ_{cl} 的能控性完全等价于系统 Σ 的能控性。即状态反馈控制不影响系统的能控性。

- **定理2’** ：系统Σ｛A，B，C｝引入状态反馈后，有可能会改变系统的能观性。即虽然状态反馈控制不影响系统的能控性，却有可能影响系统的能观性。

闭环系统的能控性与能观性

例 8-4-2 系统表示为

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

当状态反馈阵 K=[0, -4]，

试确定系统 Σ 和系统 Σ_{cl}的能控性和能观性？

解： (1) 能控性

$$\Sigma:\text{Rank}Q_C=\text{Rank}\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=2$$

$$\Sigma_{cl}:\text{Rank}Q_{CK}=\text{Rank}\begin{bmatrix}\text{b} & (\text{A}+\text{bK})\text{b}\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3+k_2\end{bmatrix}=2$$

(2) 能观性

$$\Sigma:\text{Rank}Q_o=\text{Rank}\begin{bmatrix}\text{c}\\ \text{cA}\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}=2=n$$

$$\Sigma_{cl}:\text{Rank}Q_{OK}=\text{Rank}\begin{bmatrix}\text{c}\\ \text{c}(\text{A}+\text{bK})\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1+k_1 & 5+k_2\end{bmatrix}$$

闭环系统的能控性与能观性

例 8-4-2 系统表示为

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}\qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

当状态反馈阵 K=[0, -4]，

试确定系统 Σ 和系统 Σ_{cl}的能控性和能观性？

解： (2) 能观性

$$\Sigma:\mathrm{Rank}Q_o=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\mathrm{c}\\\mathrm{cA}\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}1&1\\1&5\end{bmatrix}=2=n$$

$$\Sigma_{cl}:\mathrm{Rank}Q_{OK}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}1&1\\1+k_1&5+k_2\end{bmatrix}=1（当k_1-k_2=4时）$$

说明：状态反馈实现了极点的任意配置，将有可能产生零极点相消。

- 产生零极点相消：原来能观系统→不能观系统
- 消除零极点相消：原来不能观系统→能观系统

$$G=\frac{s+1}{(s-1)(s-3)}\qquad G_{cl}=\frac{s+1}{(s-1)(s+1)}$$

闭环系统的能控性与能观性

问题：怎样的反馈控制不会改变系统的能控性与能观性？

静态输出反馈控制 $u=r+Ky=r+KCx$ 不会改变系统的能控性与能观性。

$$\Sigma_{cl}: \dot{x} = Ax + Bu = Ax + BKy + Br = Ax + BKCx + Br = (A + BKC)x + Br$$

- **定理3** 受控系统Σ｛A，B，C｝采用输出反馈控制 $u=r+Ky=r+KCx$ 构成闭环系统 Σ_{cl}｛A＋BKC，B，C｝，则闭环系统 Σ_{cl} 的能控性和能观性完全等价于原系统 Σ的能控性与能观性。换言之，输出反馈控制不影响系统的能控性与能观性。

比较：状态信息 x 可完全描述系统的结构，状态反馈是一种完全的信息反馈，而输出只能反映部分系统的结构，故输出反馈控制不是完全的信息反馈。

系统状态反馈

- 基本概念（通过状态反馈从开环到闭环）
- 闭环线性系统的能控性与能观性
- 状态反馈设计
  - 直接法
  - 相变量法（能控标准型法）
  - 采用物理变量
- 状态反馈的一般性质(采用相变量)
- 状态反馈示例
  - 全极点系统
  - 零极点系统

状态反馈控制器设计——直接法

直接法即不对状态方程作任何变换，直接求解状态反馈的方法。

例 8-4-3 系统表示为

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}_1$$

试确定使闭环极点位于-5，-6时的状态反馈阵 K。

解： (1) 能控性矩阵的秩为2，系统完全能控。

$$\mathrm{Rank}Q_C=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}\mathrm{b} & \mathrm{Ab}\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}=2$$

设状态可获得，状态反馈可实现，即$K=[k_1, k_2]$。

(2) 期望的闭环特征方程为

$$\Delta^*(\lambda)=(\lambda+5)(\lambda+6)=\lambda^2+11\lambda+30$$

$$\Updownarrow$$

(3) 闭环系统特征方程

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A-BK|=\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right|$$

$$=\lambda^2+(3-k_1-k_2)\lambda+(2-5k_1-k_2)$$

状态反馈控制器设计——直接法

例 8-4-3 系统表示为

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}\qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}_1$$

试确定使闭环极点位于-5，-6时的状态反馈阵 K。

解：(4) 两个闭环系统特征方程 Q(λ) 和 Δ^*(λ)的同次幂系数相等

$$Q(\lambda)=\lambda^2+(3-k_1-k_2)\lambda+(2-5k_1-k_2)=\lambda^2+11\lambda+30=\Delta^*$$

$$3-k_1-k_2=11$$

$$2-5k_1-k_2=30$$

$$k_1=-5$$

$$k_2=-3$$

$$K=[k_1\ \ k_2]=[-5,\ -3]$$

因此，闭环系统方程为

$$\Sigma_{cl}:\dot{x}=(A+BK)x+Br=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ -5 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}r$$

通过状态反馈，闭环系统极点为期望的 –5 和 –6。

状态反馈控制器设计——直接法

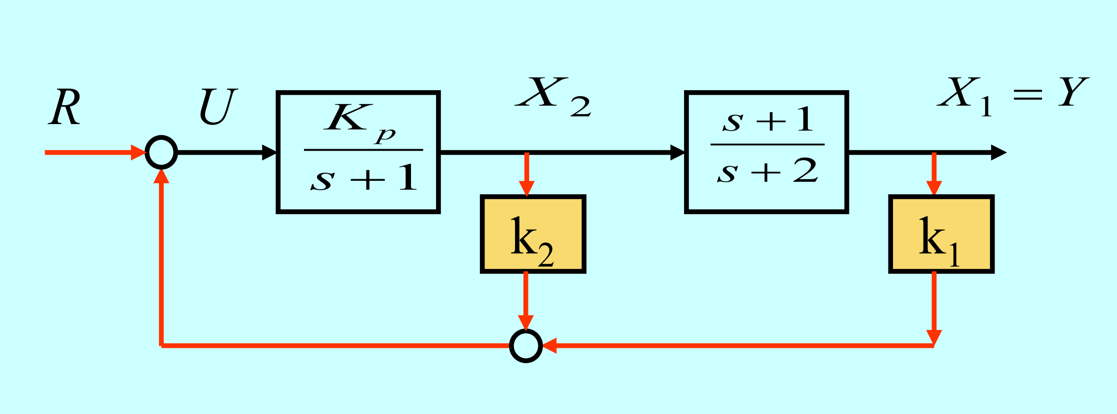
例 8-4-4 系统表示为

$$G(s)=\frac{K_p(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

试确定状态反馈阵 K，使得闭环系统极点为-5，-6，且对阶跃输入的稳态误差为零。

解：(1) 如图，状态模型为

$$\Sigma:\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}K_p\\ K_p\end{bmatrix}u \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}_1$$



(2) 能控性？

$$\mathrm{Rank}Q_C=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}K_p & -2K_p\\ K_p & -K_p\end{bmatrix}=2$$

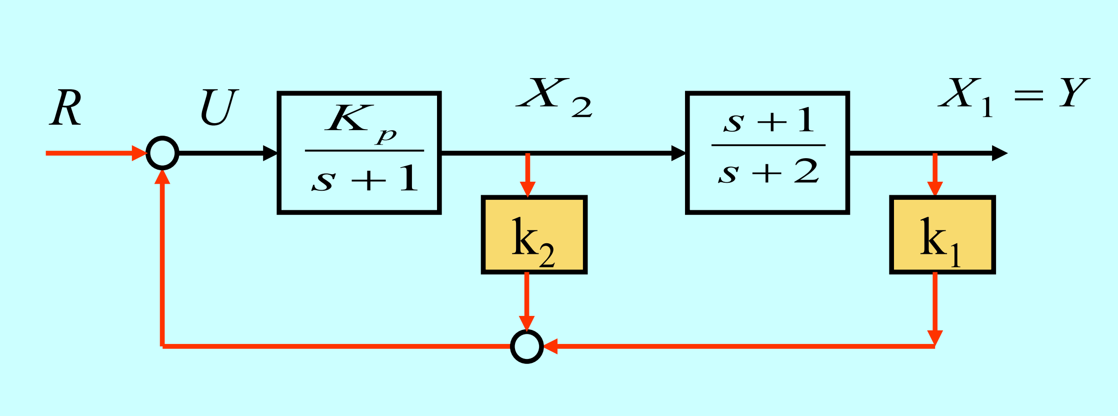
因此系统是 **完全能控。**

状态反馈控制器设计——直接法

例 8-4-4 系统表示为

$$G(s)=\frac{K_p(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

试确定状态反馈阵 K，使得闭环系统极点为-5，-6，且对阶跃输入的稳态误差为零。



$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_p(s+1)}{s^2+(3\text{-}K_pk_2\text{-}K_pk_1)s+2\text{-}2K_pk_2\text{-}K_pk_1}$$

(3) 闭环特征方程为

$$|\lambda I-A-BK|=\lambda^2+(3-K_pk_1-K_pk_2)\lambda+(2-K_pk_1-2K_pk_2)$$

$$\Delta^*(\lambda)=(\lambda+5)(\lambda+6)=\lambda^2+11\lambda+30$$

$$3-K_pk_1-K_pk_2=11$$

$$2-K_pk_1-2K_pk_2=30$$

$$\Rightarrow \quad k_1=\frac{12}{K_p} \qquad k_2=-\frac{20}{K_p}$$

状态反馈控制器设计——直接法

例 8-4-4 系统表示为

$$G(s)=\frac{K_p(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

试确定状态反馈阵 K，使得闭环系统极点为-5，-6，且对阶跃输入的稳态误差为零。

(4) 为了保证系统对阶跃输入的稳态误差为零，应用终值定理计算输出稳态值

$$Y(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\frac{K_p(s+1)}{s^2+(3-K_pk_2-K_pk_1)s+2-2K_pk_2-K_pk_1}=1$$

$$K_p=2-2K_pk_2-K_pk_1$$

$$K_p=\frac{2}{1+2k_2+k_1}$$

$$k_1=\frac{12}{K_p} \qquad k_2=-\frac{20}{K_p}$$

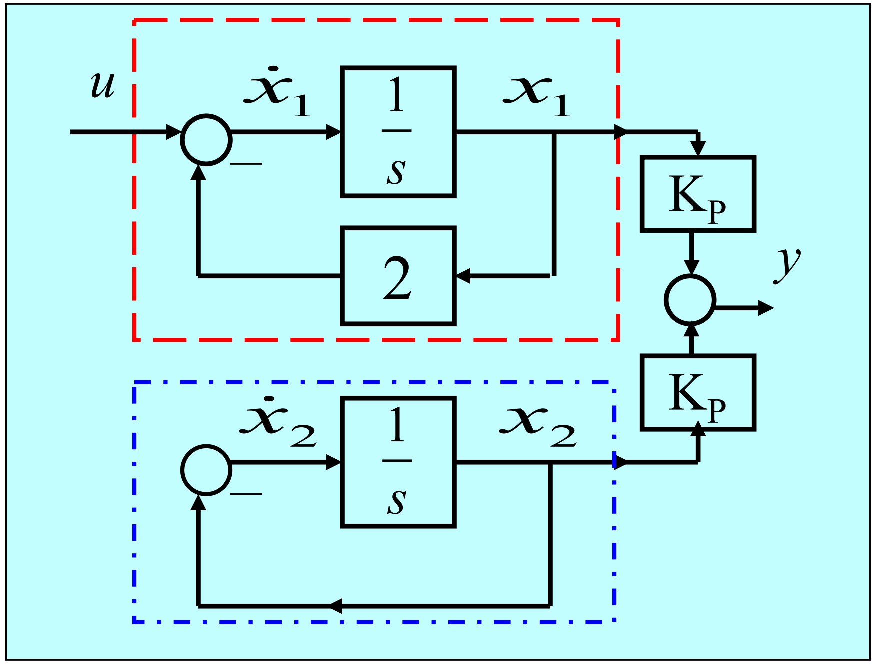
$$\Rightarrow \quad k_1=\frac{2}{5} \qquad k_2=-\frac{2}{3} \qquad K_p=30$$

状态反馈控制器设计——直接法

例 8-4-4-1 系统表示为

$$G(s)=\frac{K_p(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

试确定状态反馈阵 K，使得闭环极点位于-5，-6。



解：(1) 如图所示状态空间模型为

$$\Sigma:\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}K_p & K_p\end{bmatrix}x$$

(2) 能控性？

因此，系统是不能控的。

状态反馈控制器设计——直接法

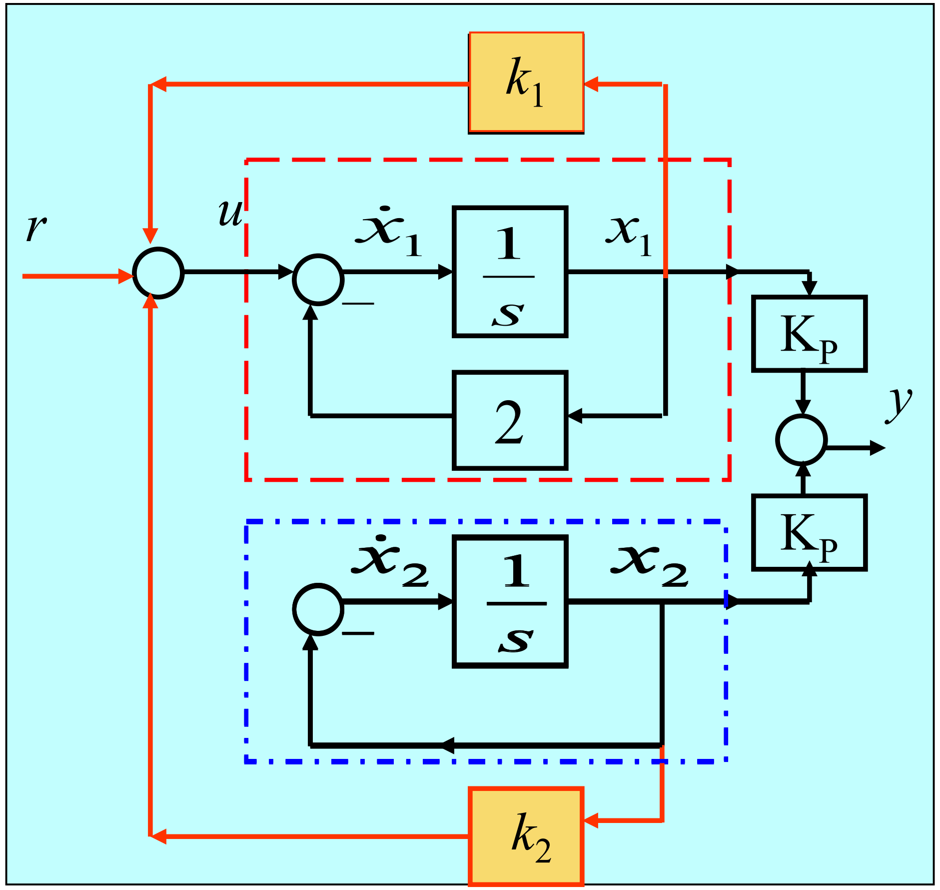
若系统不能控，则不能通过状态反馈来任意配置闭环极点。

$$G(s)=\frac{K_p(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

解：(3) 闭环特征方程

$$\mathbf{Q}(\lambda)=|\lambda I-\mathbf{A}-\mathbf{BK}|=\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\right|$$

$$=\lambda^2+(3-k_1)\lambda+2-k_1$$



闭环传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_p}{s+2-k_1}$$

因此 $s_1=-2$ 经状态反馈之后变为 $s_1=-2+k_1$，其中 k_1 可以按照闭环极点期望值进行配置。不能控极点 $s_2=-1$ 不能通过状态反馈来改变。

状态反馈控制器设计——直接法

例 8-4-5 系统表示为

$$\Sigma: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试确定状态反馈增益阵 K，

使得闭环极点为 -1，-1，-1。

解：(1) 能控性？

$$\text{Rank}Q_C = \text{Rank}\begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} = \text{Rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

因此系统是 完全能控的。

(2) 闭环特征方程为

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}\right| = \left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \lambda^3 + (-1 - k_3)\lambda^2 + (-2 - k_2)\lambda - k_3 - k_1$$

状态反馈控制器设计——直接法

例 8-4-5 系统表示为

试确定状态反馈增益阵 K，

使得闭环极点为 -1， -1， -1。

$$\Sigma: \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

解：(3) 为满足闭环极点为 –1, -1, -1, 期望的闭环特征方程为

$$\Delta^* = (\lambda+1)^3 = \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$$

(4) 两个闭环特征方程的对应项系数相等

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{BK}\right| = \lambda^3+(-1-k_3)\lambda^2+(-2-k_2)\lambda+k_3-k_1$$

$$3=-1-k_3 \Rightarrow k_3=-4$$

$$3=-2-k_2 \Rightarrow k_2=-5$$

$$1=k_3-k_1 \Rightarrow k_1=-5$$

$$K=[-5 \quad -5 \quad -4]$$

$$\Sigma_{C:}\dot{\mathbf{x}}=(\mathbf{A}+\mathbf{BK})\mathbf{x}+\mathbf{Br}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -4 & -4 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{r}$$

状态反馈控制器设计——直接法

总结 对于一个给定系统状态反馈 K 的设计问题：

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \xrightarrow{\mathbf{u}=\mathbf{r}+\mathbf{K}\mathbf{x}} \sum\nolimits_{cl}: \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}$$

(1) 检查系统的能控性

(2) 计算闭环特征方程 Q(λ)=det(λI-A-BK)

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right| = \lambda^n + g_{n-1}(K)\lambda^{n-1} + g_{n-2}(K)\lambda^{n-2} + \cdots + g_1(K)\lambda + g_0(K)$$

(3) 计算具有期望特征值λ_i (i=1,2,….,n)的期望特征方程

$$\Delta^* = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

(4) 令两个闭环特征方程的对应项系数相等

解n个方程： $g_i(K) = \beta_i$ ⇒ $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$

通常，求解n个方程是比较困难的，怎么样简化求解呢？

状态反馈控制器设计——能控标准型法

二阶系统的状态反馈阵K的代数解很容易直接计算。对于高阶系统，标准化的方法：

首先，将状态方程转换为能控标准型；

其次，设计能控标准型下的状态反馈增益阵 K_C，以简化设计过程；

最后，由K_C计算原状态空间下的状态反馈增益阵 K_P。

对于一个状态空间表达式描述的完全能控SISO系统，通过状态反馈配置期望的闭环特征值，状态反馈增益阵K是唯一的。

状态反馈控制器设计——能控标准型法

设计步骤

给定系统： $\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p\mathbf{u};\quad \mathbf{y} = \mathbf{c}_p\mathbf{x}_p$

设计状态反馈阵K以得到期望的特性。

(1) 确定系统的能控性

$$\mathrm{Rank}Q_C = n\,?$$

能控 ⇩ 不能控 ⇨ 停止!

(2) 列写开环特征多项式

$$\Delta = \det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_p] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

状态反馈控制器设计——能控标准型法

$$\Delta = \det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_p] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

(3) 构造矩阵 $\mathbf{T}_c$，将一般的状态方程转换为能控标准型。

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p\mathbf{u};\quad \mathbf{y} = \mathbf{c}_p\mathbf{x}_p$$

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{T}_c\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{p}\mathbf{T}_c\mathbf{x} + \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{b}_p\mathbf{u} = \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{b}_c\mathbf{u};\quad \mathbf{y} = \mathbf{c}_c\mathbf{x}$$

其中能控标准型状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}[u]$$

状态反馈控制器设计——能控标准型法

(4) 采用状态反馈阵 $\mathbf{k}_c = \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} & \cdots & k_{cn} \end{bmatrix}$

形成闭环反馈控制系统：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_c(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{k}_c\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}_c + \boldsymbol{b}_c\boldsymbol{k}_c)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_c\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}_{ccl}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_c\boldsymbol{r}$

$$\mathbf{A}_{ccl} = \mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} & \cdots & k_{cn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 + k_{c1} & -a_1 + k_{c2} & \cdots & -a_{n-2} + k_{c(n-1)} & -a_{n-1} + k_{cn} \end{bmatrix}$$

闭环反馈系统特征方程：$\Delta_k = \lambda^n + (a_{n-1} - k_{cn})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_{c2})\lambda + (a_0 - k_{c1})$

状态反馈控制器设计——能控标准型法

闭环反馈系统特征方程：$\Delta_k = \lambda^n + (a_{n-1} - k_{cn})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_{c2})\lambda + (a_0 - k_{c1})$

(5) 选择期望的特征根，从而获得相应的闭环方程

$$\begin{aligned}\Delta^* &= Q_{cl}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)\\ &= \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1\lambda + \beta_0\end{aligned}$$

(6) 令期望特征方程和反馈闭环系统特征方程相等，求解矩阵k_c的元素

$$\begin{aligned}\beta_0 &= a_0 - k_{c1}\\ \beta_1 &= a_1 - k_{c2}\\ &\vdots\\ \beta_{n-1} &= a_{n-1} - k_{cn}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}k_{c1} &= a_0 - \beta_0\\ k_{c2} &= a_1 - \beta_1\\ &\vdots\\ k_{cn} &= a_{n-1} - \beta_{n-1}\end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{ci} = \boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \boldsymbol{\beta}_{i-1} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

状态反馈控制器设计——能控标准型法

(7) 计算期望的物理状态反馈阵$\mathbf{k}_p$

开环系统方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{b}_c\mathbf{u}$

$\mathbf{x}_p = \mathbf{T}_c\mathbf{x}$ $\quad$ $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{x}_p$

$$T_c^{-1}\dot{x}_p = A_cT_c^{-1}x_p + b_cu$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= T_cA_cT_c^{-1}x_p + T_cb_cu \\ &= A_px_p + b_pu\end{aligned}$$

闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}}_{pcl} = (\mathbf{A}_p + \mathbf{b}_p\mathbf{k}_p)\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p\mathbf{r}$$

闭环系统方程 $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c)\mathbf{x} + \mathbf{b}_c\mathbf{r}$

$\mathbf{x} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{x}_p$

$$T_c^{-1}\dot{x}_p = (A_c + b_ck_c)T_c^{-1}x_p + b_cr$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= T_c(A_c + b_ck_c)T_c^{-1}x_p + T_cb_cr \\ &= (T_cA_cT_c^{-1} + T_cb_ck_cT_c^{-1})x_p + T_cb_cr\end{aligned}$$

$$\dot{x}_p = (A_p + b_pk_cT_c^{-1})x_p + b_pr$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_c\mathbf{T}_c^{-1}$$

状态反馈控制器设计——能控标准型法

例 8-4-5-1 系统表示为

试确定状态反馈增益阵 K，

使得闭环极点为 -1，-1，-1。

$$\Sigma: \mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：(1) 能控性？

因此系统是 完全能控的。

$$\text{Rank } Q_C = \text{Rank}\begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} = \text{Rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

(2) 列写开环特征多项式

$$\Delta = \det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 0 \Rightarrow \begin{aligned} a_2 &= -1 \\ a_1 &= -2 \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

状态反馈控制器设计——能控标准型法

例 8-4-5-1 系统表示为

$$\Sigma: \mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试确定状态反馈增益阵 K，使得闭环极点为 -1，-1，-1。

解： (3) 构造变换矩阵Tc，将一般的状态方程转换为能控标准型。

$$\mathrm{Q_C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = -1 \quad a_1 = -2 \quad a_0 = 0$$

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q_C L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{T}_c \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{b}_c \mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{T_c}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b_c} = \mathbf{T_c}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以不列写

状态反馈控制器设计——能控标准型法

$$\mathbf{T}_c^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

例 8-4-5-1 系统表示为

$$\Sigma:\mathbf{A}_P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_P=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

试确定状态反馈增益阵 K，

使得闭环极点为 -1，-1，-1。

解：(4) 列写具有期望特征根的(-1,-1,-1) 闭环特征多项式

$$\Delta^*=(\lambda+1)^3=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$$

$$\beta_0=1\quad \beta_1=3\quad \beta_2=3$$

$$\Delta=\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+0$$

$$a_2=-1\quad a_1=-2\quad a_0=0$$

(5) 能控标准型下的状态反馈阵$\mathbf{k}_c$

$$k_{c1}=a_0-\beta_0=0-1=-1$$
$$k_{c2}=a_1-\beta_1=-2-3=-5$$
$$k_{c3}=a_2-\beta_2=-1-3=-4$$

(6) 计算实际的物理反馈矩阵$\mathbf{k}_p$

$$\mathbf{k}_p=\mathbf{k}_c\mathbf{T}_c^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-5&-4\end{bmatrix}$$

状态反馈控制器设计——能控标准型法

例 8-4-6 系统表示为

$$\Sigma: \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试确定状态反馈阵 K，

使闭环极点为-1+j，-1-j，-4。

解：(1) 能控性？

$$\text{Rank } Q_C = \text{Rank}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -10 \end{bmatrix} = 3$$

完全能控的。

(2) 列写开环特征多项式

$$\Delta = \det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 \Rightarrow \begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_1 &= -3 \\ a_0 &= 2 \end{aligned}$$

(3) 构造矩阵T_c，将一般的状态方程转换为能控标准型 $\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{b}_c\mathbf{u}$

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_C\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ -13 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 7 & -8 & 1 \\ 13 & 52 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

状态反馈控制器设计——能控标准型法

$$\mathbf{T}_c^{-1}=\begin{bmatrix}-5&4&1\\-6&-1&1\\-13&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}1&4&-5\\7&-8&1\\13&52&-29\end{bmatrix}$$

例 8-4-6 系统表示为

$$\Sigma:\mathbf{A}_p=\begin{bmatrix}1&6&-3\\-1&-1&1\\-2&2&0\end{bmatrix},\ \mathbf{b}_p=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

试确定状态反馈阵 K，

使闭环极点为-1+j，-1-j，-4。

解：(4) 列写期望的闭环系统特征多项式

$$\Delta^*=(\lambda+1-j)(\lambda+1+j)(\lambda+4)=\lambda^3+6\lambda^2+10\lambda+8$$

$$\beta_0=8\quad \beta_1=10\quad \beta_2=6$$

(5) 能控标准型下的状态反馈阵$\mathbf{k}_c$

$$\Delta=\lambda^3-3\lambda+2$$

$$a_2=0\quad a_1=-3\quad a_0=2$$

$$k_{c1}=a_0-\beta_0=2-8=-6$$

$$k_{c2}=a_1-\beta_1=-3-10=-13$$

$$k_{c3}=a_2-\beta_2=0-6=-6$$

$$\mathbf{k}_c=\begin{bmatrix}-6 & -13 & -6\end{bmatrix}$$

(6) 计算实际的物理反馈矩阵

$$\mathbf{k}_p=\mathbf{k}_c\mathbf{T}_c^{-1}=\begin{bmatrix}-6 & -13 & -6\end{bmatrix}\mathbf{T}_c^{-1}=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}-175 & -232 & 191\end{bmatrix}$$

状态反馈控制器设计——两种方法比较

两种设计状态反馈的方法

直接法

能控标准型法

直接设计法：适用于低阶系统（如二阶）或B阵中只有1个1，其余均为0的三阶系统，否则有可能会遇到求解n个方程的复杂问题

标准型的设计法：先将已知的系统转换到能控标准型，设计出能控标准型下的状态反馈矩阵，然后再变换到原来状态空间下的状态反馈阵。

关键：(1)变换矩阵T_c？

(2)求出能控标准型下的K_c后，一定要记住变换至原状态空间

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_c \mathbf{T}_c^{-1}$$

标准型的设计法为人们提供了一种标准的直接求解状态反馈矩阵K的设计过程，从而可以借助计算机来完成。

The End