自动控制理论
Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous -time Control Systems

关键词

- 数学模型， 建模
- 动态系统（单元）
- 微分方程模型，状态空间模型
- 传递函数（Transfer Function）
- 开环传递函数，闭环传递函数
- 方块图（Block Diagram），仿真（模拟）图
- 信号流图（Signal Flow Graph, SFG）
- 梅逊增益公式

主要内容

- 数学模型的基本概念
- 电路系统的数学模型
- 系统总传递函数
- 各种模型间的关系
- 其他系统（机械、液位等）的数学模型
- 非线性系统的线性化以及特殊环节建模

主要内容

- 机械系统数学模型
- 液位系统数学模型
- 热力系统数学模型
- 直接蒸汽加热器建模
- 控制系统方块图建模

主要内容

- 机械系统数学模型
  - –机械传递（平移）系统
  - –机械旋转系统
- 液位系统数学模型
- 热力系统数学模型
- 直接蒸汽加热器建模
- 控制系统方块图建模

机械动力学系统

➢ 机械系统遵循牛顿定律（惯性系），即作用力与反作用力相等。

$$\sum_i F_i = \frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(Mv) = MDv = Ma = MD^2x$$

其中，$\sum_i F_i$ 是外力之和， M 是质量，v 是速度，p 是动量，

a 是加速度，x 是位移。

➢ 机械传递系统包括三种基本单元：质量块、弹簧和阻尼。

- 质量块(Mass)——惯性-惯量
- 弹簧(Elastance)——弹力-弹量
- 阻尼器(damping)——减震-衰减-阻尼力

常用储能元件及其物理量

储能元件	能量	物理变量
电容C	$\frac{Cv^2}{2}$	电压 v
电感L	$\frac{Li^2}{2}$	电流 i
质量M	$\frac{Mv^2}{2}$	传递速度 v
弹簧K	$\frac{Kx^2}{2}$	位移 x
流体容量$C=\rho A$	$\frac{\rho Ah^2}{2}$	高度 h
热容C	$\frac{C\theta^2}{2}$	温度 θ
流体可压缩性V/K_B	$\frac{VP_L{}^2}{2K_B}$	压力 P_L

机械动力学系统：基本单元

◈ P.22 图2.3 给出了机械系统基本单元的表示图

$$f_M = Ma = MDv = MD^2 x$$

式中x表示位移，下同。

$$f_K = K(x_c - x_d) \xrightarrow{if\ x_d = 0} f_K = Kx_c$$

◈ 图(c) 是阻尼器，表征能量吸收单元。表现形式是阻尼力，阻尼力的值正比于阻尼器两个端点的速度差。

$$f_B = B(v_e - v_f) = B(Dx_e - Dx_f)$$

◈ 图(a)是质量M，表现形式为惯性力；图(b)是弹簧K，弹簧根据其两个端点的相对位置，给出相应的回复力(弹性力)。

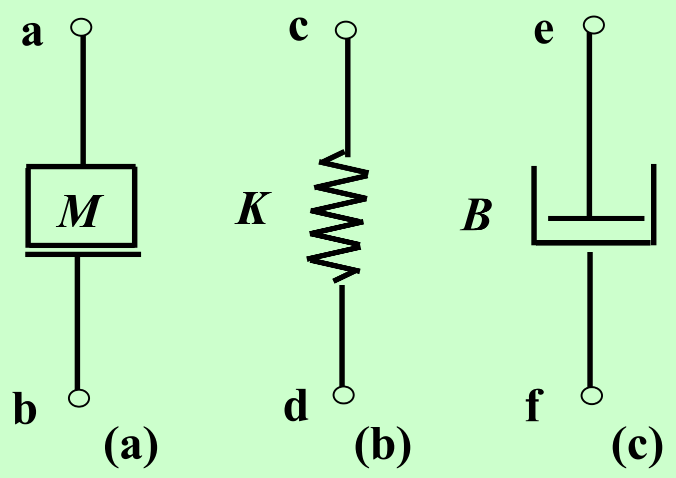
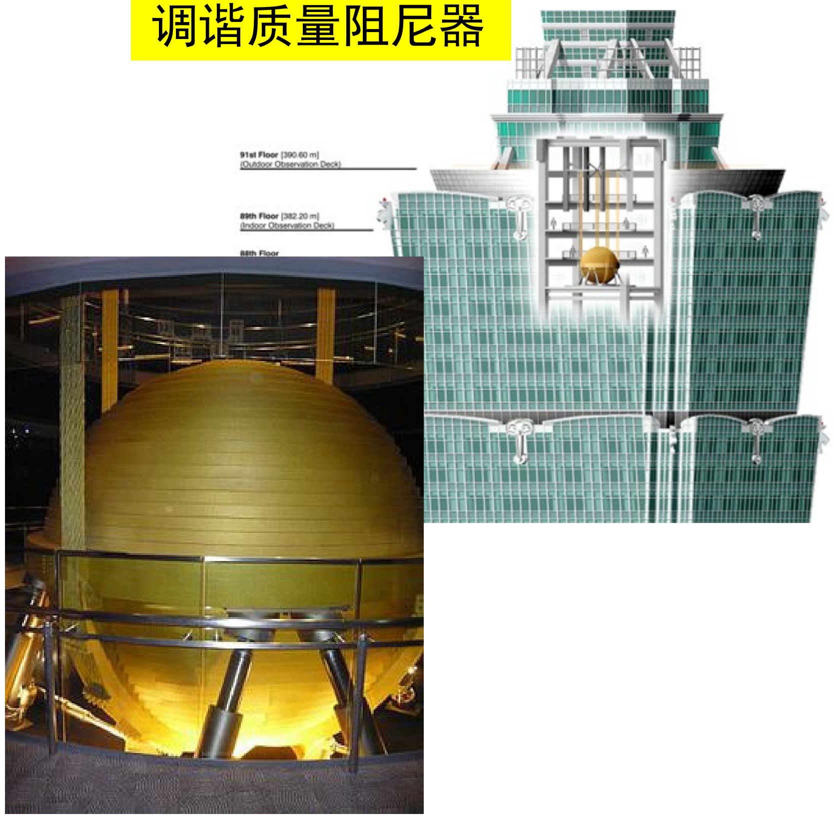


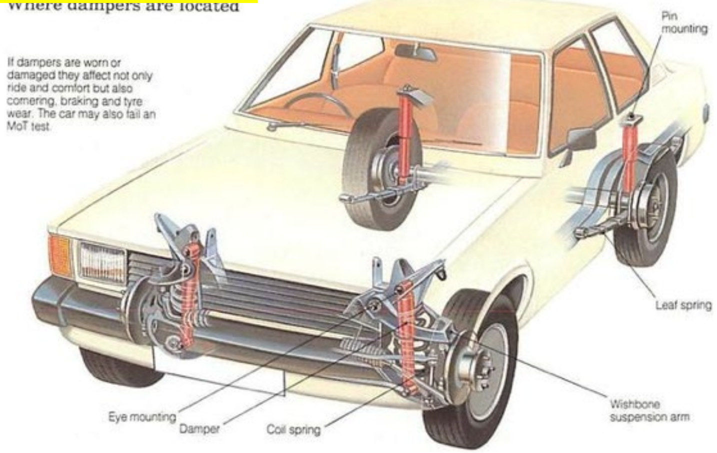
图 2.3 机械传递系统的基本单元

机械动力学系统：阻尼器应用

调谐质量阻尼器



汽车阻尼器



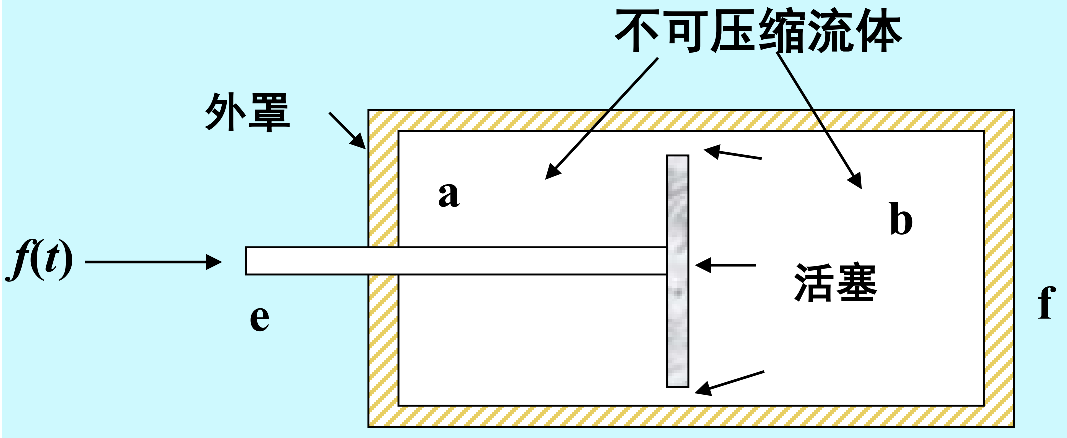
机械动力学系统：阻尼器应用

机械动力学系统：阻尼器基本结构

- 下图给出了阻尼器的基本构造
- 如果外力f作用于推杆，那么阻尼器将发生怎样的变化？

$$f_B = B(v_e - v_f) = B(Dx_e - Dx_f)$$

- 阻尼系数 B 同什么因素相关？



阻尼器构造

机械动力学系统：基本单元

$$f_M = Ma = MDv = MD^2 x$$

$$f_K = K(x_c - x_d) \xrightarrow{if\ x_d = 0} f_K = Kx_c$$

$$f_B = B(v_e - v_f) = B(Dx_e - Dx_f)$$

◆ 系统方程列写：对于每个节点（位置），列写合力方程，各节点的合力为零。

◆ 列写的节点方程类似于电路中的节点方程。力对应于电流。

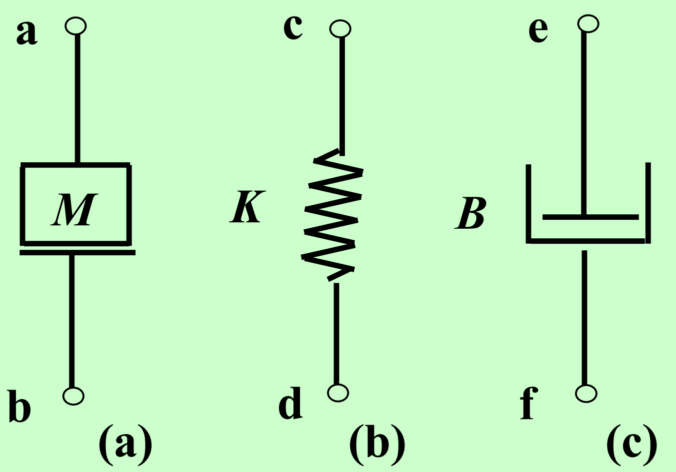


图 2.3 机械传递系统的基本单元

例：弹簧-质量-阻尼系统

未指明的，都假设理想*K*/*M*/*B*（表面光滑、弹簧无质量、没有其他形变）

例 P23，图2-4系统初始为静止状态。当外力 $f(t)$ 作用于质量 M 时，M 将产生位移 $y(t)$，列写如右图所示系统的方程。

第一步：列写原始的系统方程

$$f(t)-f_1(t)-f_2(t)=M\frac{d^2y}{dt^2}$$

其中， $f_1(t)$ — 阻尼器阻力

$f_2(t)$ — 弹簧回复力

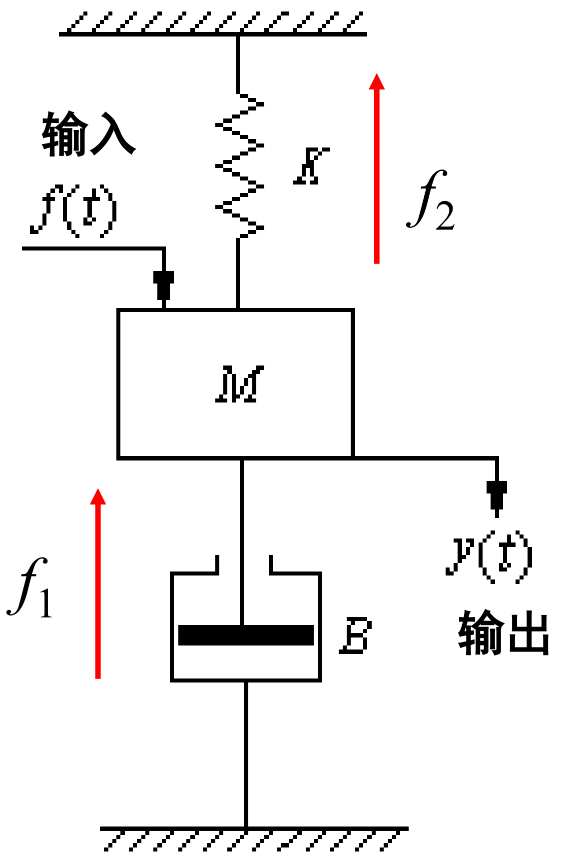
第二步：列写子系统方程

$$f_1(t)=B\frac{dy(t)}{dt}$$

其中，B— 阻尼系数

$$f_2(t)=Ky(t)$$

假设弹簧具有线性弹性性质，即 K 为常数。



P.23 图2-4

例：弹簧-质量-阻尼系统

第三步：将 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 代入原始方程

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)=f(t)$$

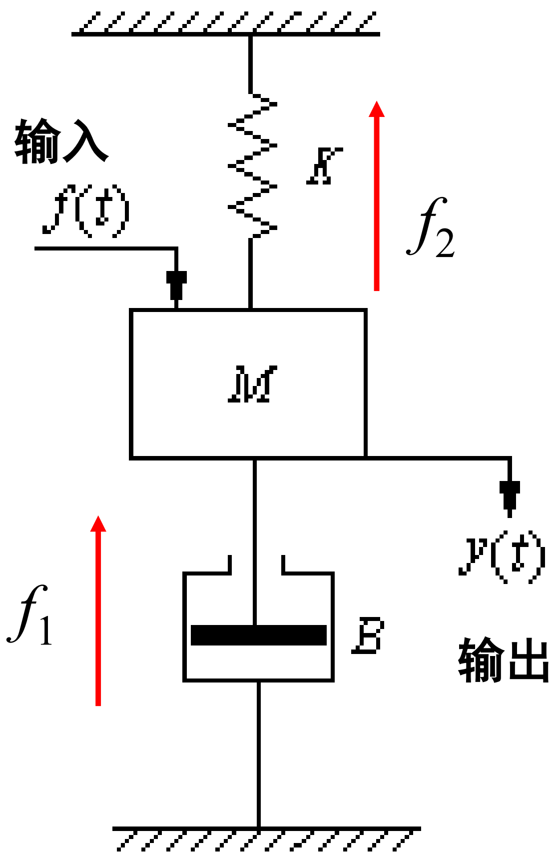
或

$$\frac{M}{K}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{B}{K}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{1}{K}f(t)$$

令 $T_B=\frac{B}{K}$ 及 $T_M^2=\frac{M}{K}$

于是得到描述系统动态性能的微分方程模型

$$T_M^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+T_B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{1}{K}f(t)$$



P.23 图2-4

其中，T_M 和 T_B 称为系统的时间常数；$1/K$ 是系统输出与输入的静态比。

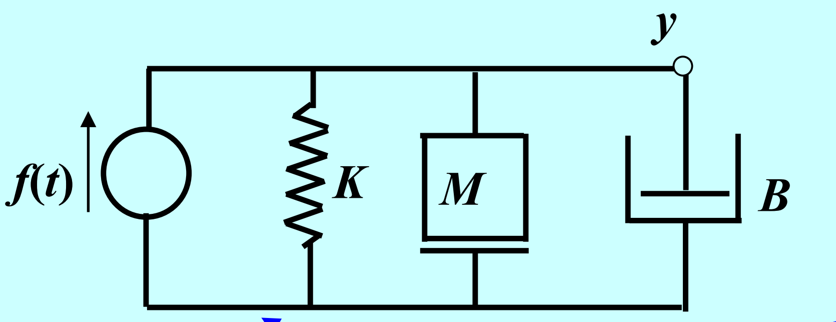
例：弹簧-质量-阻尼系统

可将图2-4改画成以相对于参考点的输出位移*y*为节点、外加激励力*f*为输入的机械网络图。由力的平衡关系：

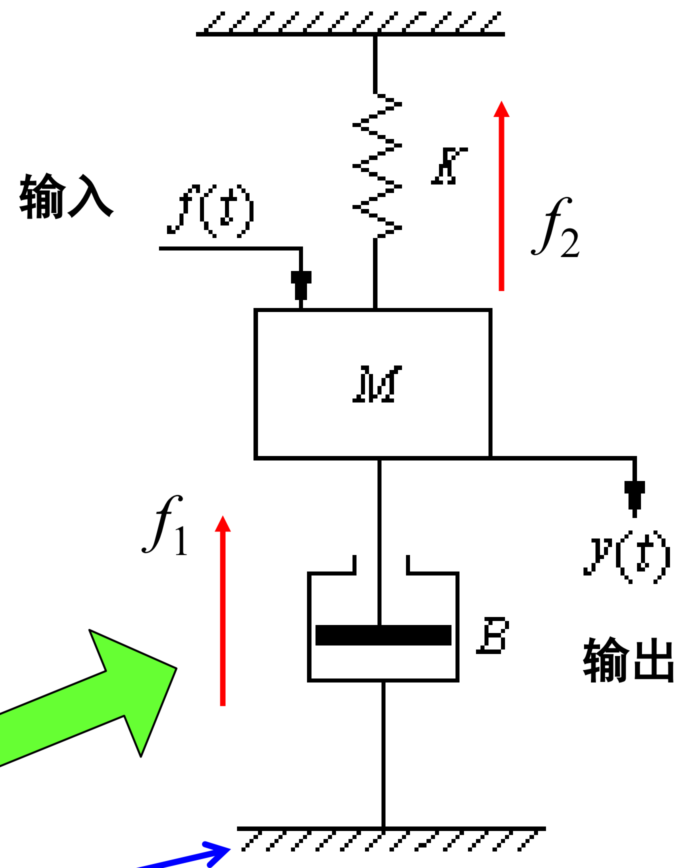
$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)=f(t)$$

$f_K=Ky$　　$f_B=BDy$

$f_M=Ma=MDv=MD^2y$

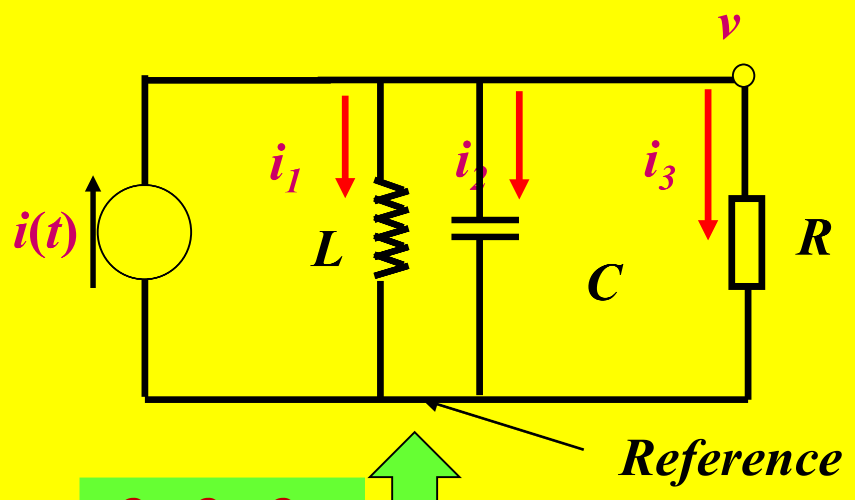


P.23 图2-4　相应的机械网络图

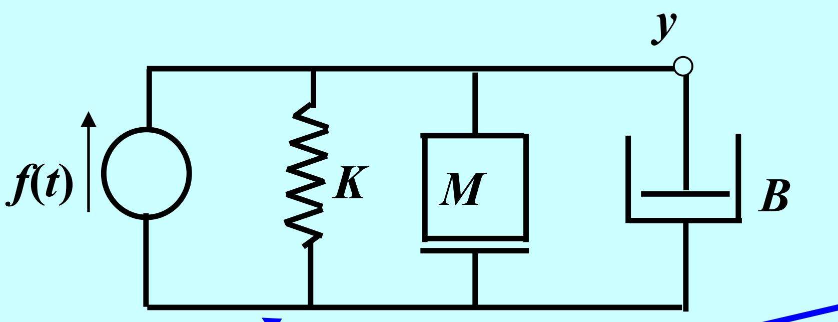


P.23 图2-4

例：弹簧-质量-阻尼系统

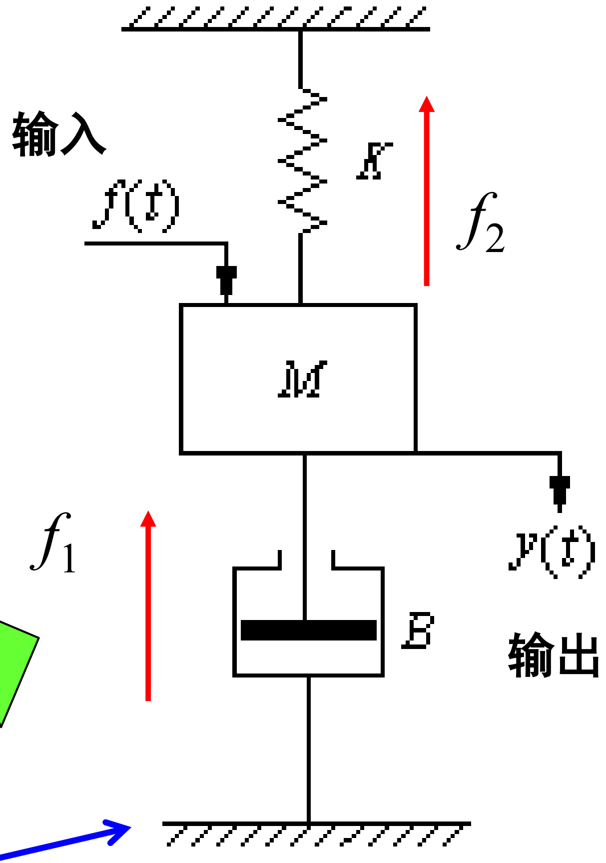


？？？



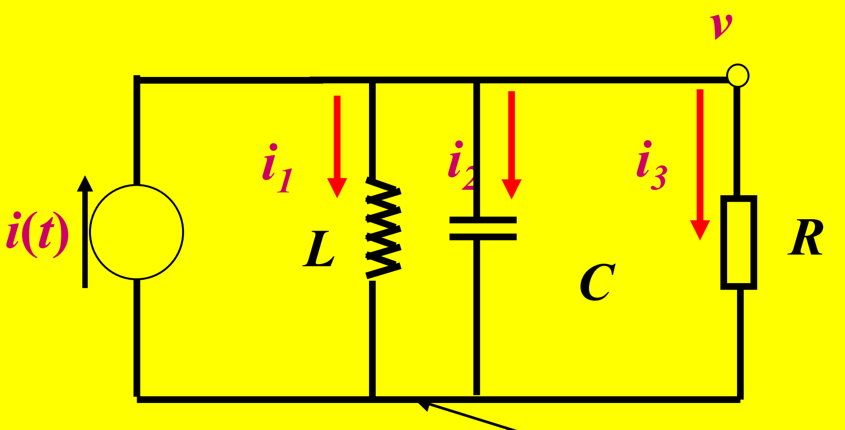
参考点

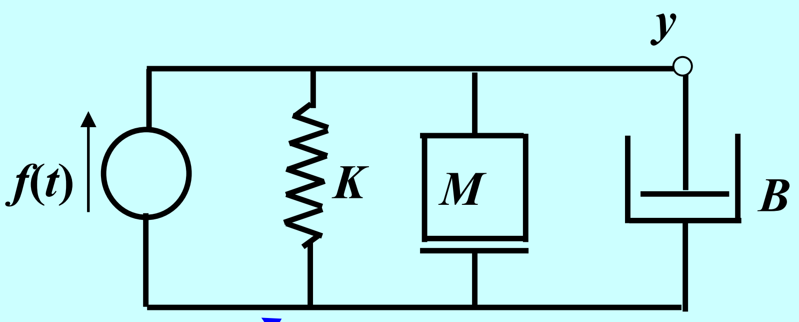
P. 23 图2-4相应的机械网络图



P.23 图2-4

例：弹簧-质量-阻尼系统





P. 23 图2-4相应的机械网络图

列写电路图的电流方程：

$$i_1 + i_2 + i_3 = i$$

$$i_1 = \frac{v}{LD}; \quad i_2 = CDv; \quad i_3 = \frac{1}{R}v$$

$$\boxed{CDv + \frac{1}{LD}v + \frac{1}{R}v = i}$$

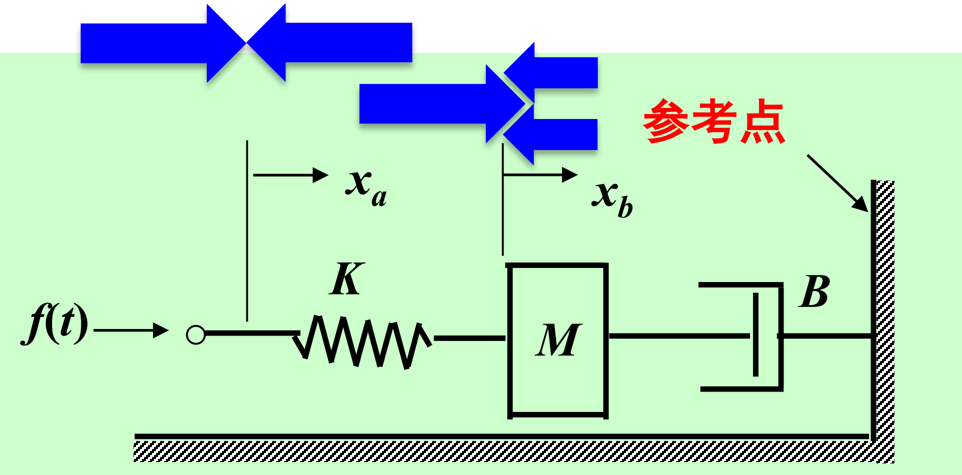
将外加力视为“电流源”，将位移的导数“速度”视为电压

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

$$MDv + K\frac{v}{D} + Bv = f$$

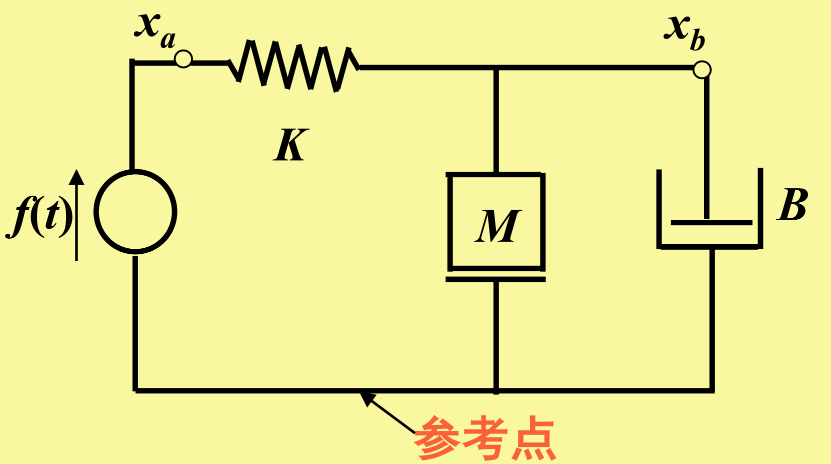
机械动力学系统：简单系统

- 系统结构如图所示，系统一开始处于静止状态，M与地面无摩擦。
- 作用于弹簧左端的外力f 将与弹簧压缩产生的弹力平衡。同样大小的力将通过弹簧传递并作用于 x_b点。注意到：M和B之间是刚性连接。



(a) 简单的质量-弹簧-阻尼机械系统

- 为了画出机械网络图，首先需要给节点x_a, x_b, 及参考点进行定位。



(b) 相应的机械网络图

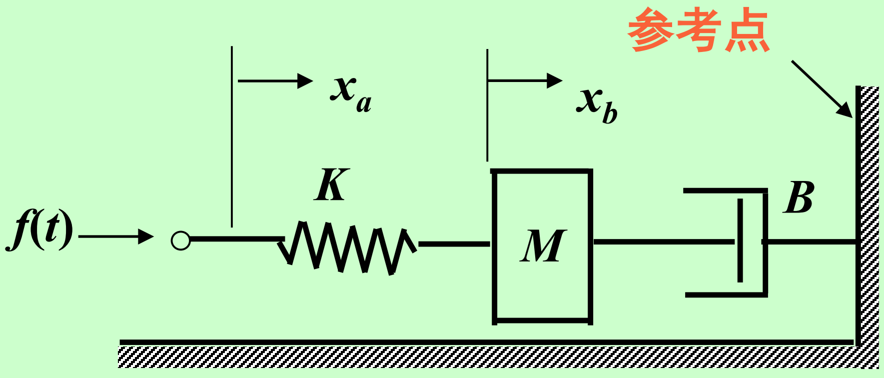
机械动力学系统：简单系统

◆ 位移 x_a 和 x_b 类似于电路中的节点。根据牛顿定律，在每个节点处，合力为零。

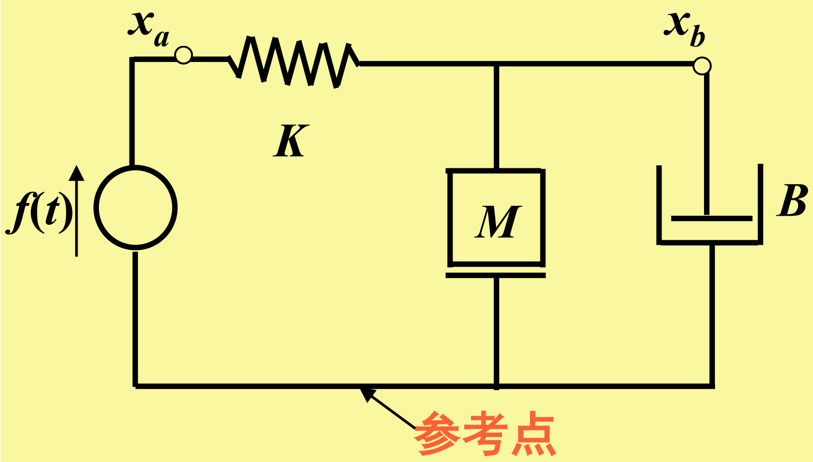
节点 a: $f = f_K = K(x_a - x_b)$

节点 b: $f_K = f_M + f_B = MD^2 x_b + BDx_b$

◆ 利用上述两个方程，可以求得任意两个变量之间的关系。如 x_a 和 f， x_b 和 x_a，或 x_b 和 f 之间的关系表达式。



(a) 简单的质量–弹簧–阻尼机械系统



(b) 相应的机械网络图

机械动力学系统：简单系统

◈ 求得相应的系统微分方程模型——输入/输出模型

$$f = f_K = K(x_a - x_b)$$

$$f_K = f_M + f_B = MD^2 x_b + BDx_b$$

$$x_b = x_a - \frac{f}{K}$$

x_a—f: $K(MD^2 + BD)x_a = (MD^2 + BD + K)f$

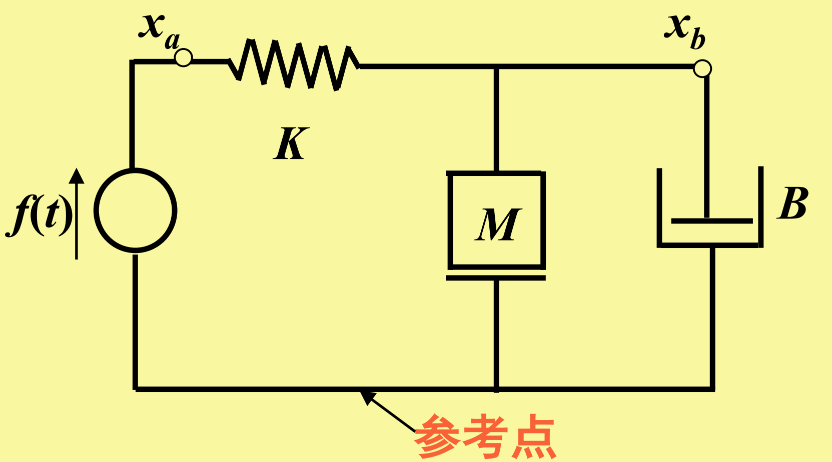
$$G_1 = \frac{x_a}{f} = \frac{MD^2 + BD + K}{K(MD^2 + BD)}$$

x_b—x_a: $(MD^2 + BD + K)x_b = Kx_a$

$$G_2 = \frac{x_b}{x_a} = \frac{K}{MD^2 + BD + K}$$

x_b—f: $(MD^2 + BD)x_b = f$

$$G = \frac{x_b}{f} = \frac{1}{MD^2 + BD}$$



(b) 相应的机械网络图

机械动力学系统：简单系统

$$f = f_K = K(x_a - x_b) \quad (*)$$

$$f_K = f_M + f_B = MD^2 x_b + BDx_b \quad (**)$$

对(*)式进行拉普拉斯变换 ⇨ $F(s) = K(X_a(s) - X_b(s))$

对(**)式进行拉普拉斯变换 ⇨ $F(s) = Ms^2 X_b(s) + BsX_b(s)$

则可以得到拉普拉斯变换形式的传递函数。

x_a—f: $K(MD^2 + BD)x_a = (MD^2 + BD + K)f$

$$G_1(s) = \frac{X_a(s)}{F(s)} = \frac{Ms^2 + Bs + K}{K(Ms^2 + Bs)}$$

$$G_1 = \frac{x_a}{f} = \frac{MD^2 + BD + K}{K(MD^2 + BD)}$$

x_b—x_a: $(MD^2 + BD + K)x_b = Kx_a$

$$G_2(s) = \frac{X_b(s)}{X_a(s)} = \frac{K}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$G_2 = \frac{x_b}{x_a} = \frac{K}{MD^2 + BD + K}$$

x_b—f: $(MD^2 + BD)x_b = f$

$$\boxed{G(s) = \frac{X_b(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs}}$$

$$\boxed{G = \frac{x_b}{f} = \frac{1}{MD^2 + BD}}$$

可对传递函数进行相应的比较

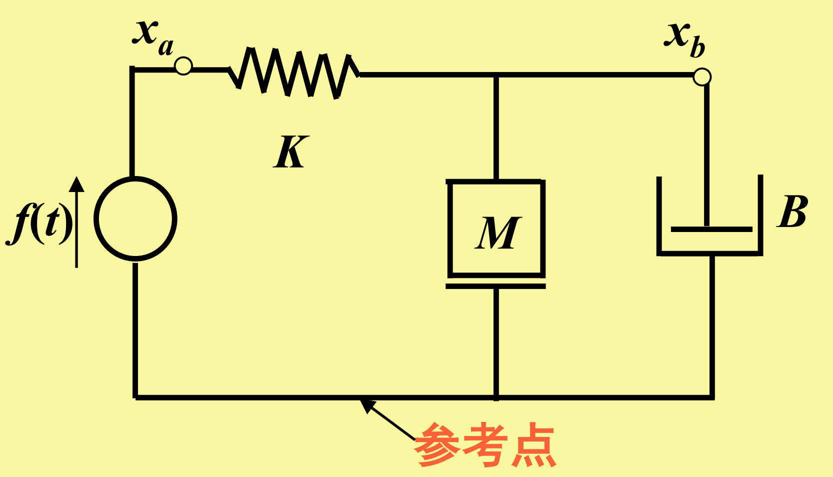
机械动力学系统：简单系统

◆ 注意：最后一个传递函数是前两个传递函数之积。

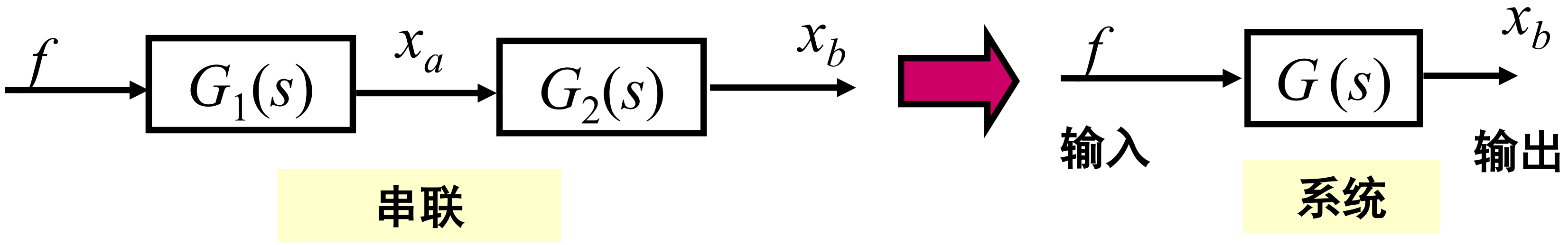
$$G_1(s)=\frac{X_a(s)}{F(s)}=\frac{Ms^2+Bs+K}{K(Ms^2+Bs)}$$

$$G_2(s)=\frac{X_b(s)}{X_a(s)}=\frac{K}{Ms^2+Bs+K}$$

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{X_a(s)}{F(s)}\cdot\frac{X_b(s)}{X_a(s)}=\frac{1}{Ms^2+Bs}$$



(b) 相应的机械网络图



机械动力学系统：简单系统

◈ 根据方程(**)确定系统状态空间模型

$$f_K = f_M + f_B = MD^2x_b + BDx_b \quad (**) \Longrightarrow MDv_b + Bv_b = f_k \qquad f_k = f$$

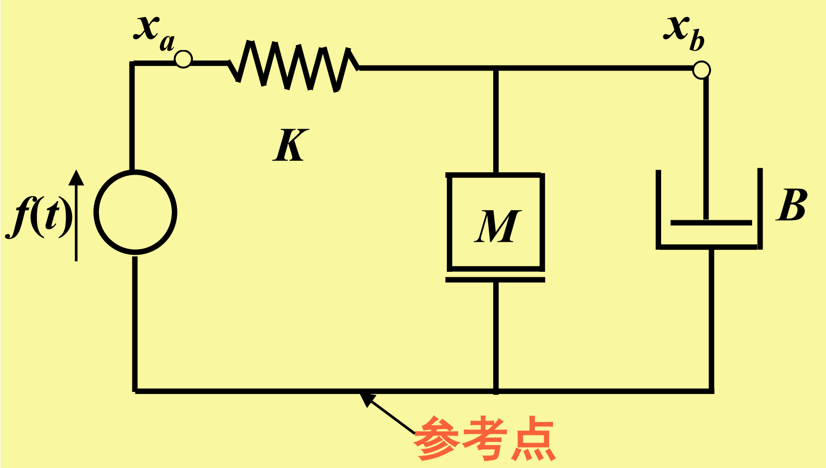
➢ 上面的方程只和一个储能元件质量 M 相关，怎么办？

➢ 由于系统是2阶的，需要2个状态变量。考虑到系统输出是 $y=x_b$，令其作为一个状态变量。

➢ 令 $x_1=x_b$， $x_2=v_b=dx_1/dt$，$f=u$, 于是系统的状态方程及输出方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{B}{M}\end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{array}{c} u \\ \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{M}\end{bmatrix} \end{array} u = Ax + bu$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x = cx$$



(b) 相应的机械网络图

机械动力学系统：简单系统

- 根据方程 (***) 确定状态空间模型

$$(MD^2 + BD + K)x_b = Kx_a \quad (***)$$

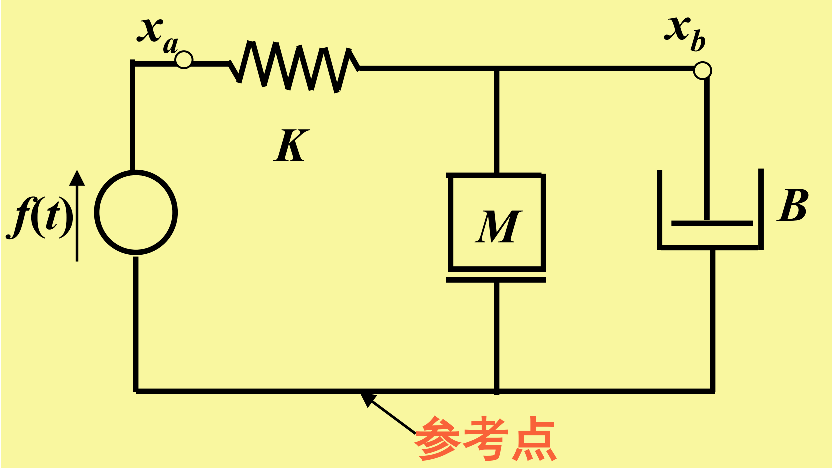
- 上述方程同两个储能元件单元弹簧 K 及质量 M 有关，与能量相关的变量分别是 x_b 和 v_b 。注意这里 x_a 是输入。

- 令 $x_1 = x_b = y$， $x_2 = v_b = Dx_1$，于是状态方程和输出方程分别是

$$MDx_2 + Bx_2 + Kx_1 = Ku$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{B}{M} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{array}{c} u \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K}{M} \end{bmatrix} \end{array} u = Ax + bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x = cx$$



(b) 相应的机械网络图

机械动力学系统建模方法小结（1）

- 机械传递系统单元的受力特点
  - M：所受的外力可以不等，外力差令M产生加速度
  - K、B：所受的外力和为零(无质量元件)
- 机械传递系统单元的运动特点
  - M：两端运动状态变量(位移、速度)相等
  - K、B：两端运动状态变量可以不等

机械动力学系统建模方法小结（2）

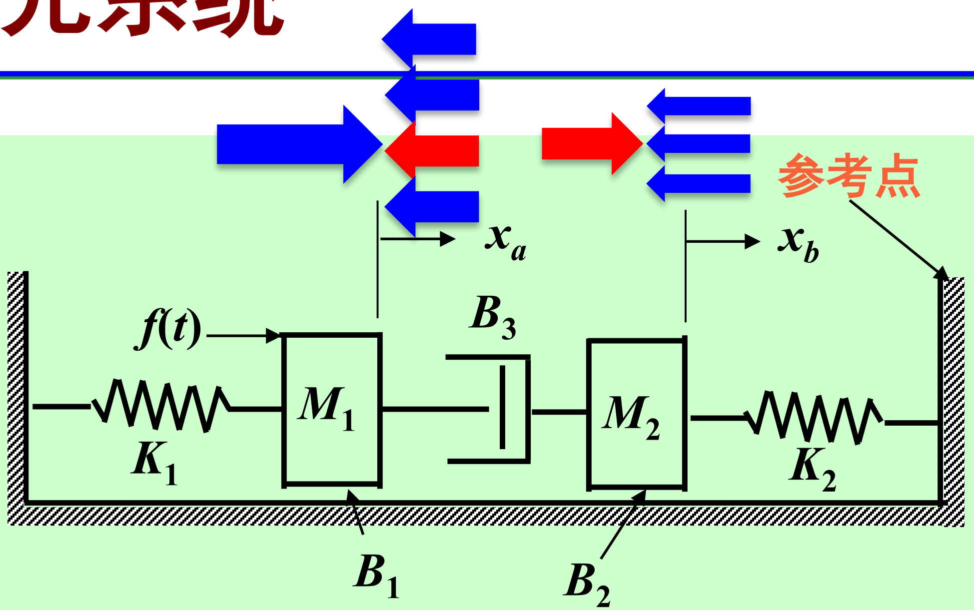
- 机械传递系统微分方程列写步骤
  - 在系统结构示意图上确定待分析的节点（包括节点数及其位置）和参考点（注：待分析的节点也可以理解为运动状态可变的节点。）
    - 准则：从受力关系上，所选节点和参考点能够把所有的K、B及外力隔离开，即任意两节点（包括节点与参考点）之间不存在物理上串联的K、B及外力）
  - 针对选定的各节点（参考点除外），列写合力方程
  - 将各元件的运动方程代入合力方程

机械动力学系统建模方法小结（3）

- **机械网络图作图步骤**
  - 根据系统结构示意图确定待分析节点（节点通常表示某实际节点的位移）、参考点
  - 针对各节点分析受力关系
  - 根据受力关系，将各K、B放到与其相连的两个节点（包括节点与参考点）之间
  - 将M放到与其相连的节点与参考点之间
  - 将外力f放到与其相连的节点与参考点之间

机械动力学系统：多单元系统

- 在图(a)中，外力 f 作用于质量 M_1。考虑表面存在滑动摩擦 B_1、B_2。
- 系统方程可以以位移x_a 和x_b 为变量进行列写。
- 相应的机械网络图如图(b)所示。



图(a) 多单元机械传递系统

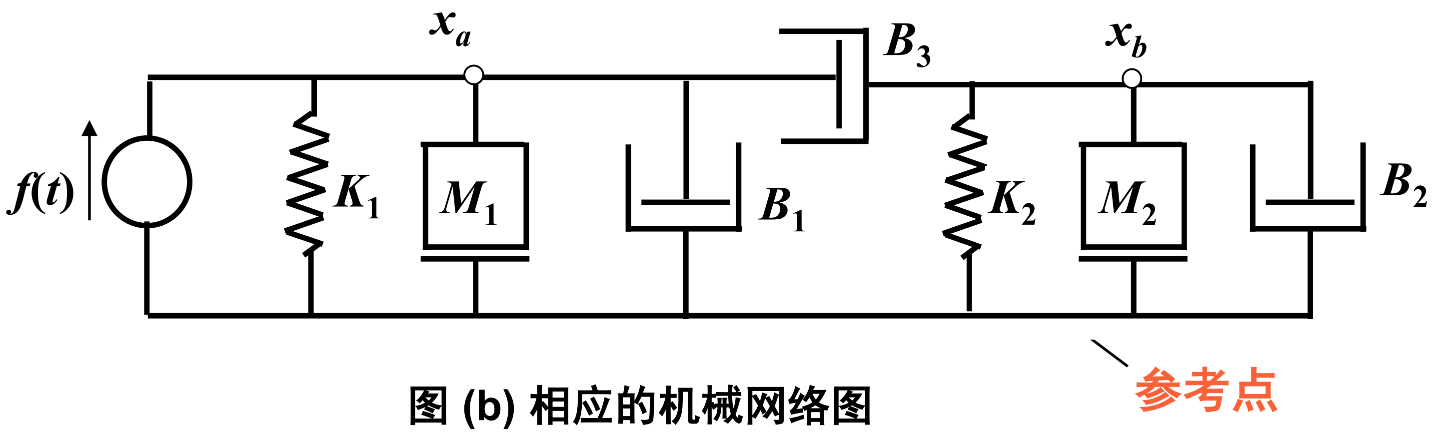


图 (b) 相应的机械网络图

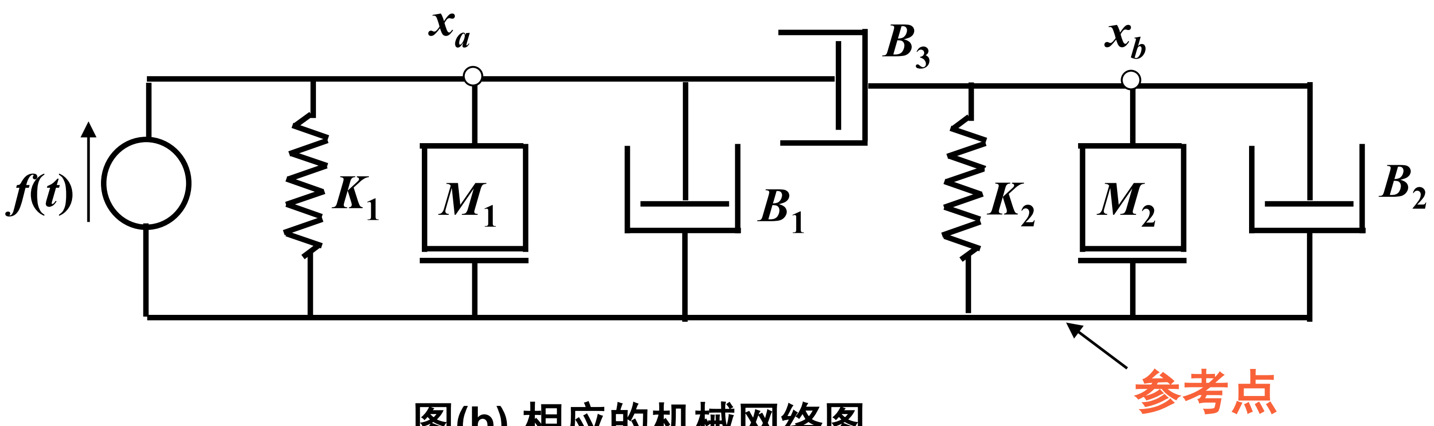
机械动力学系统：多单元系统

- 各节点的合力为零，方程可根据节点方程规则进行列写。

节点 a：$(M_1D^2 + B_1D + B_3D + K_1)x_a - (B_3D)x_b = f$

节点 b：$-(B_3D)x_a + (M_2D^2 + B_2D + B_3D + K_2)x_b = 0$

- 机械系统的节点方程类似于电路的节点方程，可使用同样的规则。



图(b) 相应的机械网络图

机械动力学系统：多单元系统

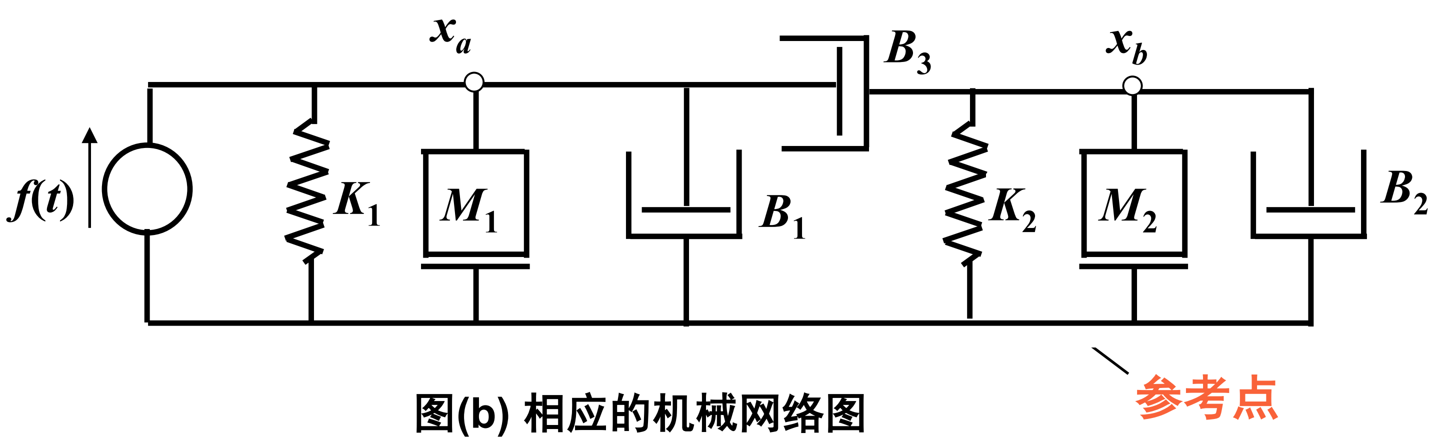
- 对图(b)所示系统建立状态空间模型，其中 x_b 是输出，f 是输入。
- 系统包含4个储能单元，因此需要指定4个状态变量：x_a, x_b, Dx_a, Dx_b。

$x_1 = x_b$, for K_2 　　 $x_2 = \dot{x}_1 = v_b$, for M_2

$x_3 = x_a$, for K_1 　　 $x_4 = \dot{x}_3 = v_a$, for M_1

$u = f,\ y = x_b = x_1$

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$



图(b) 相应的机械网络图

机械动力学系统：多单元系统

节点 a: $(M_1D^2 + B_1D + B_3D + K_1)x_a - (B_3D)x_b = f$

节点 b: $-(B_3D)x_a + (M_2D^2 + B_2D + B_3D + K_2)x_b = 0$

$x_1 = x_b,\quad x_2 = \dot{x}_1 = v_b$

$x_3 = x_a,\quad x_4 = \dot{x}_3 = v_a$

$u = f,\ y = x_b = x_1$

$$M_1Dx_4 = f - B_1x_4 - B_3x_4 - K_1x_3 + B_3x_2$$

$$M_2Dx_2 = B_3x_4 - B_2x_2 - B_3x_2 - K_2x_1$$

$$y = x_1$$

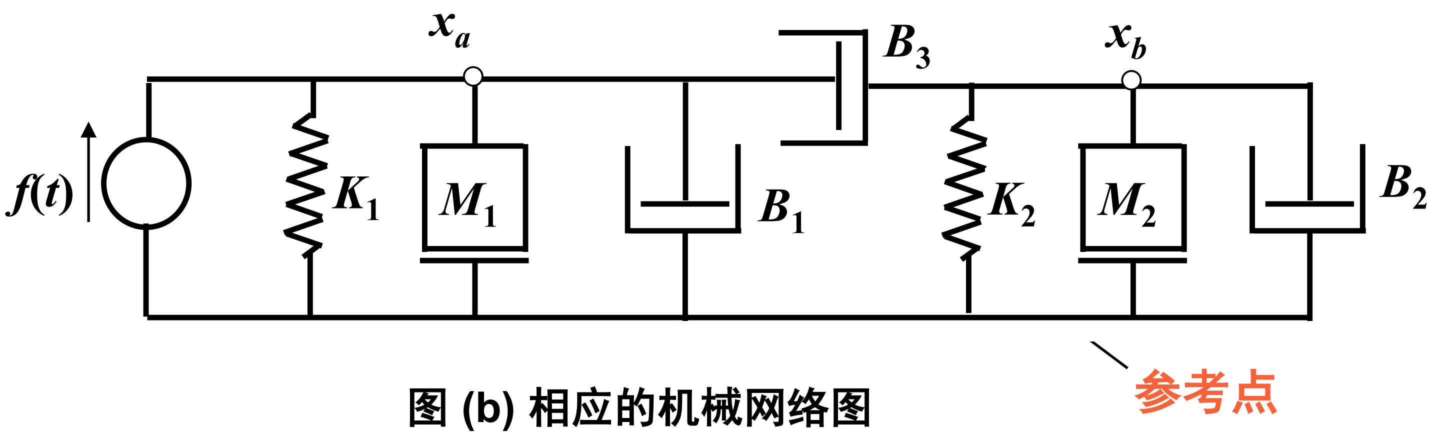


图 (b) 相应的机械网络图

机械动力学系统：多单元系统

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

$$M_2 D x_2 = B_3 x_4 - B_2 x_2 - B_3 x_2 - K_2 x_1$$

$$M_1 D x_4 = f - B_1 x_4 - B_3 x_4 - K_1 x_3 + B_3 x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{B_2 + B_3}{M_2} & 0 & \dfrac{B_3}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{B_3}{M_1} & -\dfrac{K_1}{M_1} & -\dfrac{B_1 + B_3}{M_1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

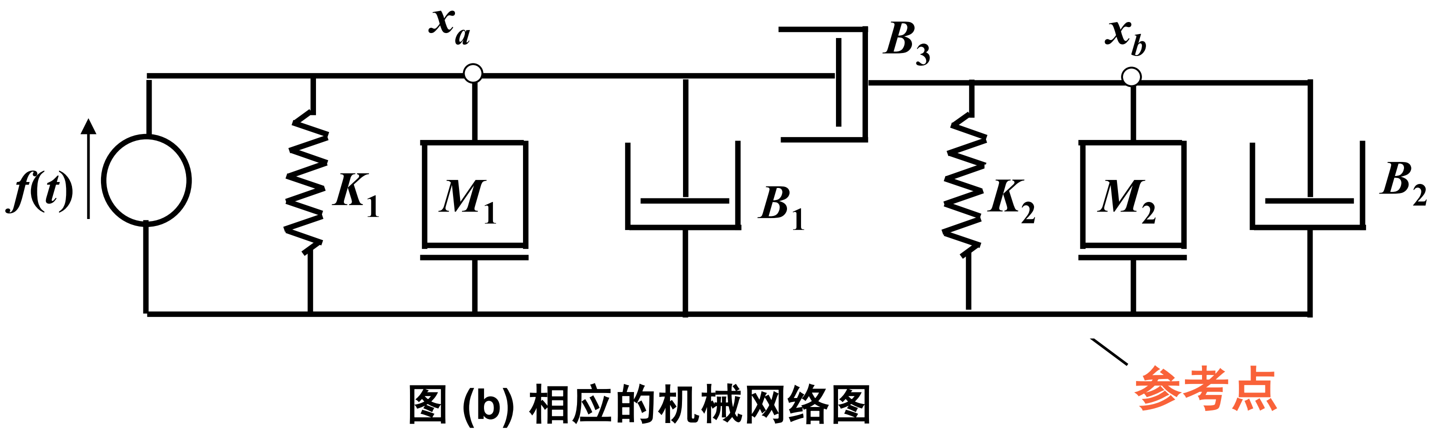


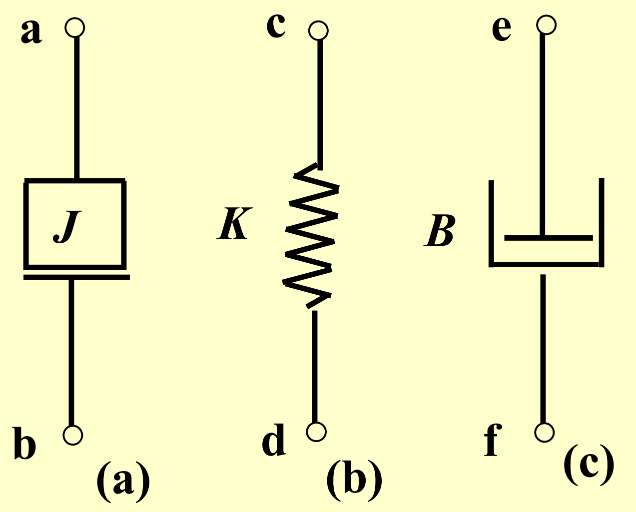
图 (b) 相应的机械网络图

主要内容

- 机械系统数学模型
  - –机械传递（平移）系统
  - –机械旋转系统
- 液位系统数学模型
- 热力系统数学模型
- 直接蒸汽加热器建模
- 控制系统方块图建模

机械旋转系统（1）

◈ 描述机械旋转系统的方程与描述机械传递系统的方程类似，其中旋转系统中的位移、速度和加速度用角度量来表示（角位移、角速度、角加速度）。



机械旋转系统网络基本单元示意图

◈ 作用转矩（Torque，力矩）等于反作用转矩之和。

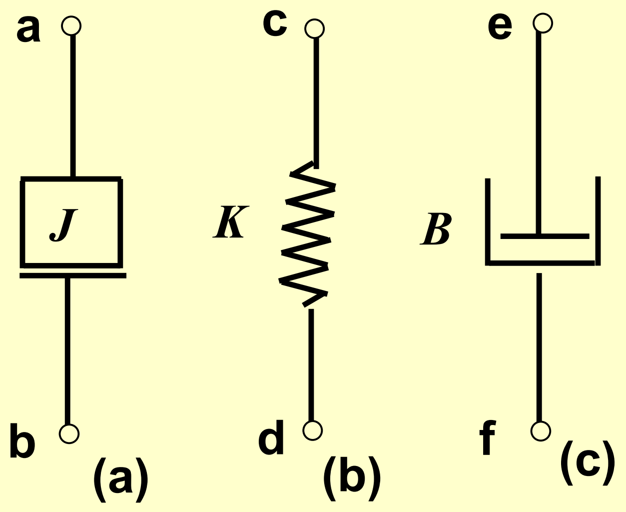
◈ 旋转系统中的三个基本单元是惯量（转动惯量）、弹簧（扭簧，扭转刚度系数）和阻尼（粘性阻尼系数），它们的网络元件表示图如左图所示。

◈ 同机械传递系统对比，元件图示基本一样，但物理行为有差别。

机械旋转系统（2）

◈ 转矩作用于具有转动惯量 J 的物体，产生角加速度a

$$T_J = Ja = JD\omega = JD^2\theta$$



机械旋转系统网络基本单元

◈ 当转矩作用于弹簧时，弹簧将转过角度 θ。

$$T_K = K(\theta_c - \theta_d)$$

◈ 在流体中转动，为了使物体运动，对该物体施加的转矩必须克服阻尼转矩。阻尼转矩为

$$T_B = B(\omega_e - \omega_f) = B(D\theta_e - D\theta_f)$$

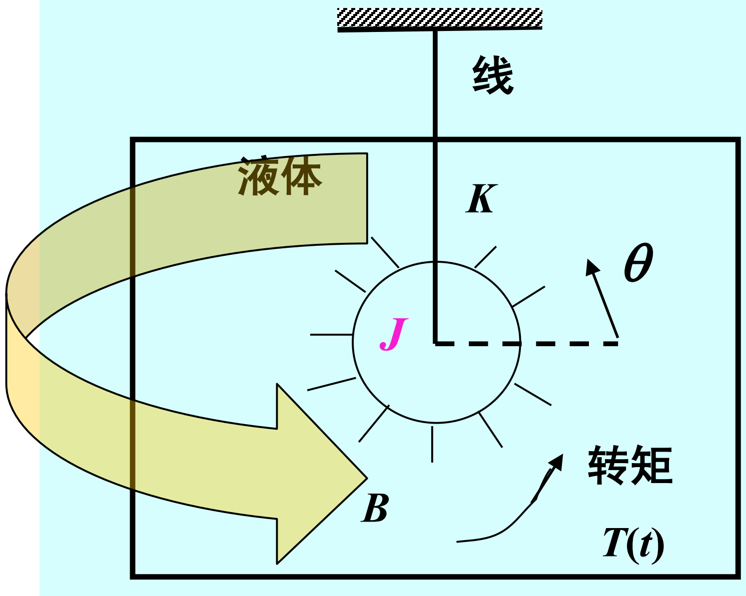
◈ 对于每个节点，根据合力矩为零列写**转矩方程**

◈ 假设用θ表示角位移，ω表示角速度，a表示角加速度。

机械旋转系统（4）

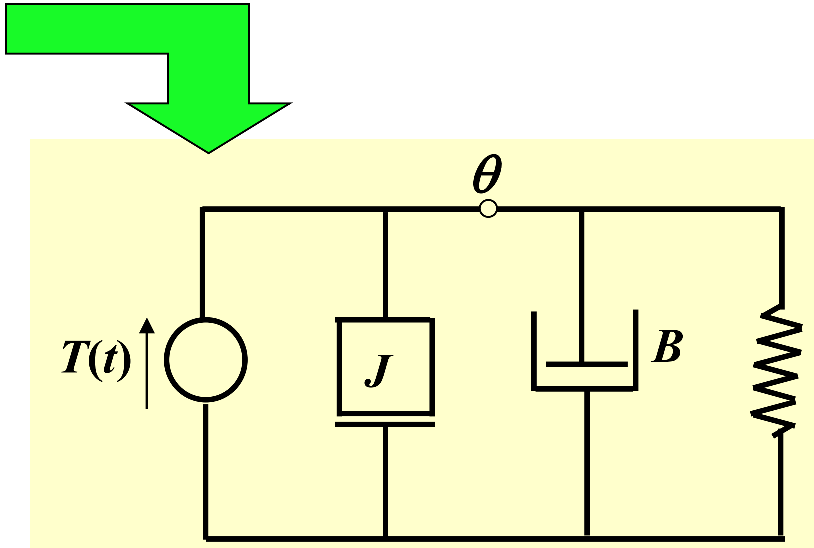
◆ 如图所示，系统包含一个质量块，其具有转动惯量 J，并浸在流体中，转矩 T 作用于该质量块。

◆ 系统中只有一个节点产生角位移 θ；因此只需要一个方程。我们也可以类比于电路，转矩可类比于电流，转动惯量可类比于电容。



图(a) 简单旋转系统

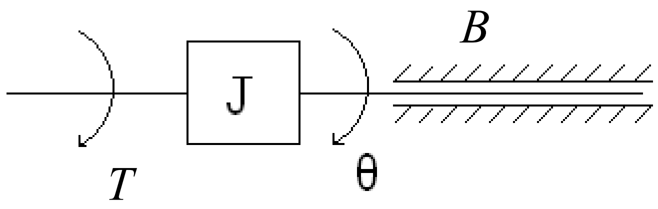
$$JD^2\theta + BD\theta + K\theta = T(t)$$



图(b) 相应的机械网络图

机械旋转系统：例

下图为转动物体，J表示转动惯量，B表示粘滞系数。若输入为转矩T，输出为轴角位移θ，求传递函数。



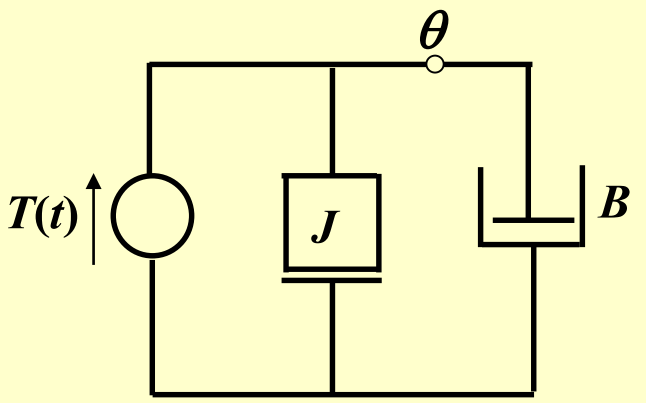
解：由转矩方程得：

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+B\frac{d\theta}{dt}=T(t)$$

设初始条件为零，对上式取拉氏变换得：

$$Js^2\theta(s)+Bs\theta(s)=T(s)$$

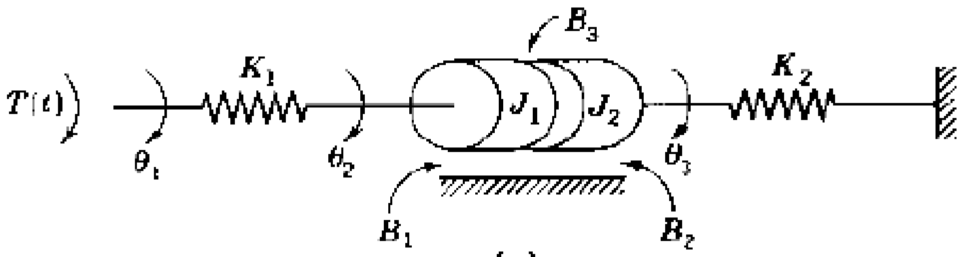
$$\therefore \frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{1}{s(Js+B)}$$



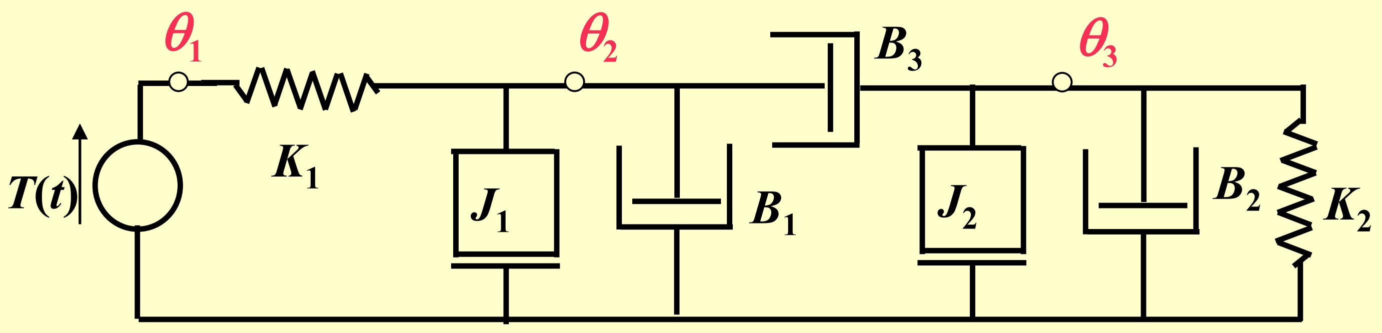
机械网络

机械旋转系统：多单元旋转（1）

◆ 如图a所示的系统包含两个圆盘，两个圆盘之间存在阻尼作用，并且两个圆盘各自同下方的平面之间存在摩擦。相应的机械网络图如图b所示。



(a)



图(b) 旋转系统的机械网络图

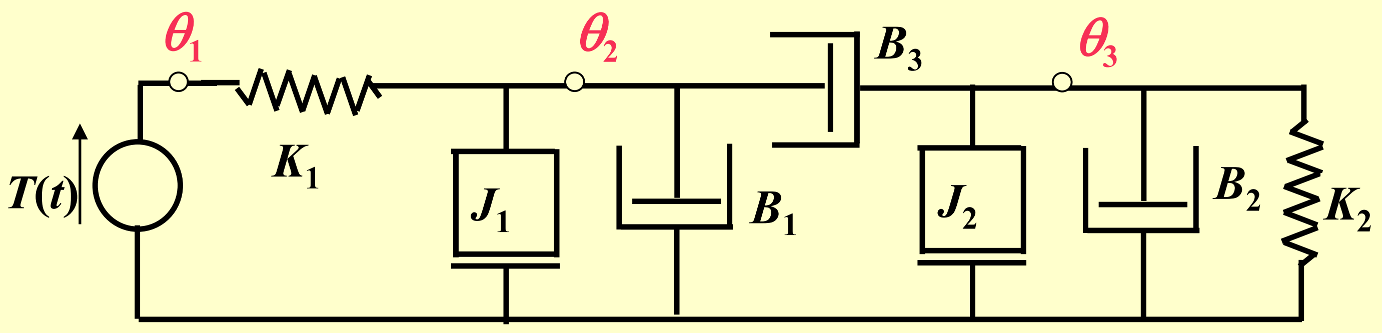
机械旋转系统：多单元旋转（2）

◈ 如图a所示的系统包含两个圆盘，两个圆盘之间存在阻尼作用，并且两个圆盘各自同下方的平面之间存在摩擦。相应的机械网络图如图b所示。

$$Node\ 1:\ T(t)=K_1(\theta_1-\theta_2)$$

$$Node\ 2:\ K_1(\theta_1-\theta_2)=J_1D^2\theta_2+B_1D\theta_2+B_3D(\theta_2-\theta_3)$$

$$Node\ 3:\ B_3D(\theta_2-\theta_3)=J_2D^2\theta_3+B_2D\theta_3+K_2\theta_3$$



图(b) 旋转系统的机械网络图

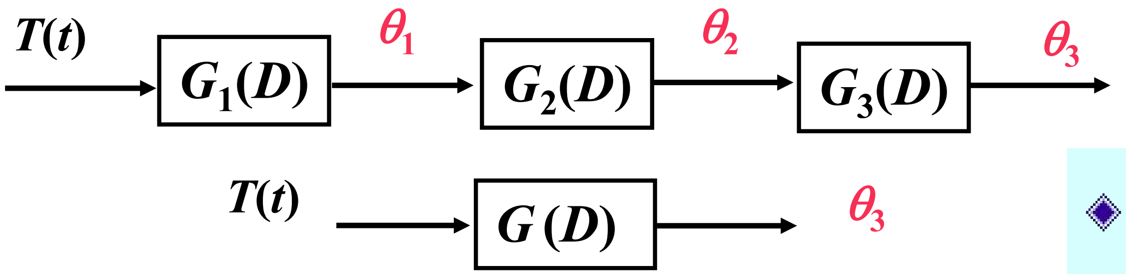
机械旋转系统：多单元旋转（3）

- 这三个方程联立求解，可以得到θ_1, θ_2, 和θ_3关于作用转矩的函数。
- 如果θ_3是系统输出，则每个单元的传递函数分别为

$$G_1(D)=\frac{\theta_1}{T} \qquad G_2(D)=\frac{\theta_2}{\theta_1} \qquad G_3(D)=\frac{\theta_3}{\theta_2}$$

- 系统整体的传递函数为

$$G=G_1G_2G_3=\frac{\theta_1}{T}\frac{\theta_2}{\theta_1}\frac{\theta_3}{\theta_2}=\frac{\theta_3}{T}$$



系统的总传递函数

- 问题：系统的状态空间表达式？

主要内容

- 机械系统数学模型
- 液位系统数学模型
- 热力系统数学模型
- 直接蒸汽加热器建模
- 控制系统方块图建模

实际装置照片

液位系统

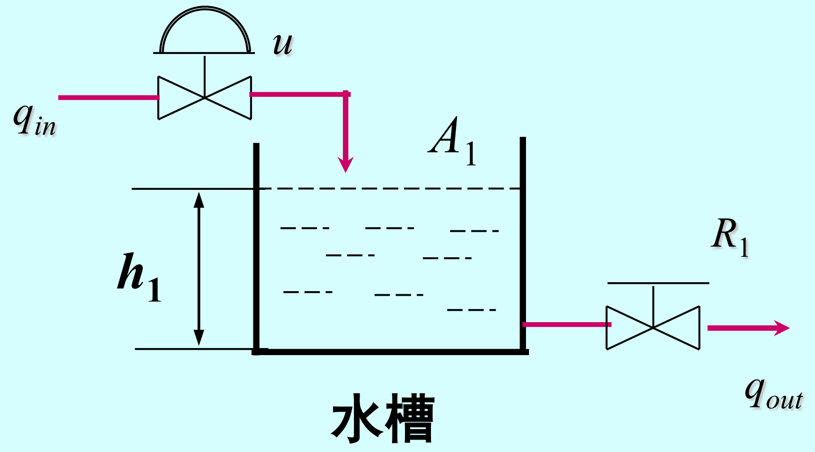
- 单个带阀的水槽

q = 液体流量

h = 液位

R = 液阻

A =水槽的横截面积



$$\Delta q_{in} - \Delta q_{out} = \frac{dV}{dt} = A_1 \frac{d\Delta h_1}{dt}$$

流入：假设阀前后差压不变，流量与阀门开度的关系

$$\Delta q_{in} = K_u \Delta u$$

流出：流量与液位关系：

$$q_{out} = \alpha f \sqrt{h_1}$$

假设阀门开度不变
只考虑液位影响
线性化后得到

$$\Delta q_{out} = \frac{\Delta h_1}{R}$$

代入后得到

$$K_u \Delta u - \frac{\Delta h_1}{R} = A_1 \frac{d\Delta h_1}{dt}$$

简写为：

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = K_u u - \frac{h_1}{R}$$

传递函数：

$$G(s) = \frac{h_1(s)}{u(s)} = \frac{K_u R}{RA_1 s + 1}$$

液位系统：非线性的线性化

进一步
如果同时考虑输出量与液位、阀门流通面积之间的关系：

泰勒展开：

$$q_{out} = \alpha f \sqrt{h}$$

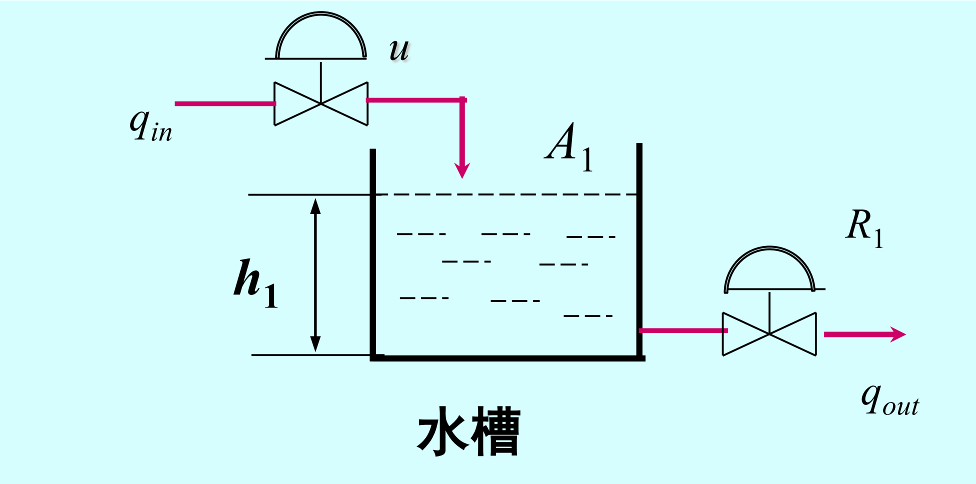
$$q_{out} = q_{out}^0 + \left.\frac{\partial q_{out}}{\partial h}\right|_{\substack{h=h_0\\ f=f_0}} (h-h_0) + \left.\frac{\partial q_{out}}{\partial f}\right|_{\substack{h=h_0\\ f=f_0}} (f-f_0)$$

$$= q_{out}^0 + \frac{1}{2}\alpha f_0 \sqrt{\frac{1}{h_0}}\Delta h + \alpha\sqrt{h_0}\Delta f$$

$$= q_{out}^0 + \frac{1}{R}\Delta h + K\Delta f$$

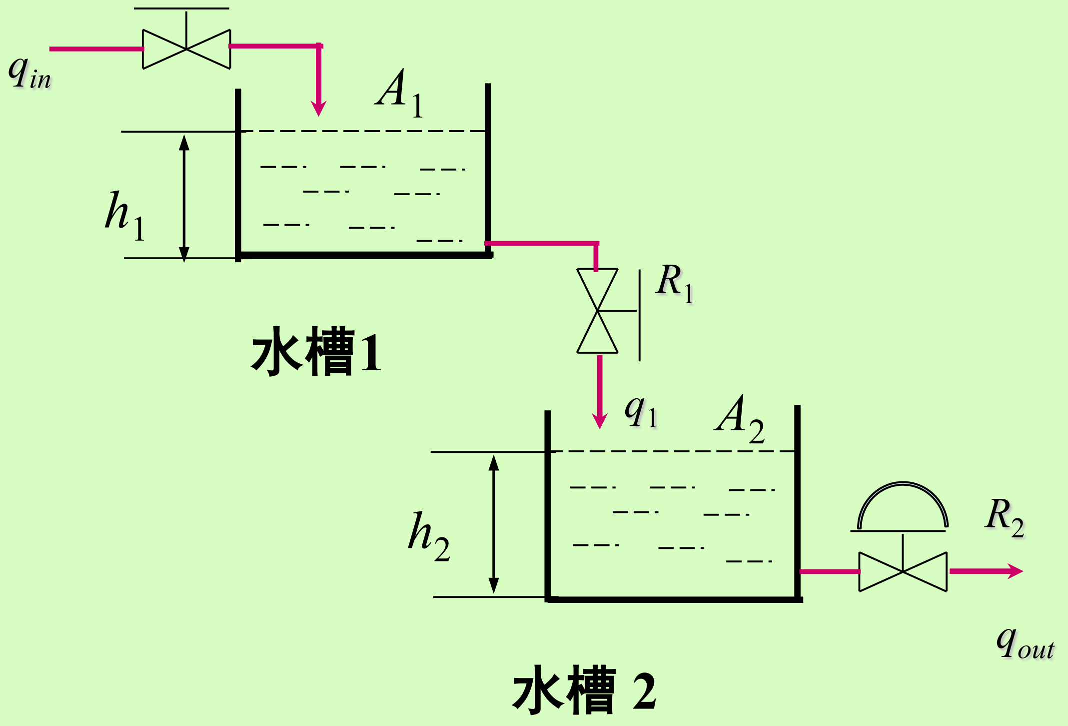
阀门开度变化引起流出量的变化q_f

液位变化引起流出量的变化



液位系统（双容例1）

➢二容液位控制系统如下图所示。系统变量及参数包括：



液位系统由两个独立的一阶对象串联组成。

q ： 液体流量

h ： 液位高度

R ： 液阻

A ： 水槽截面积

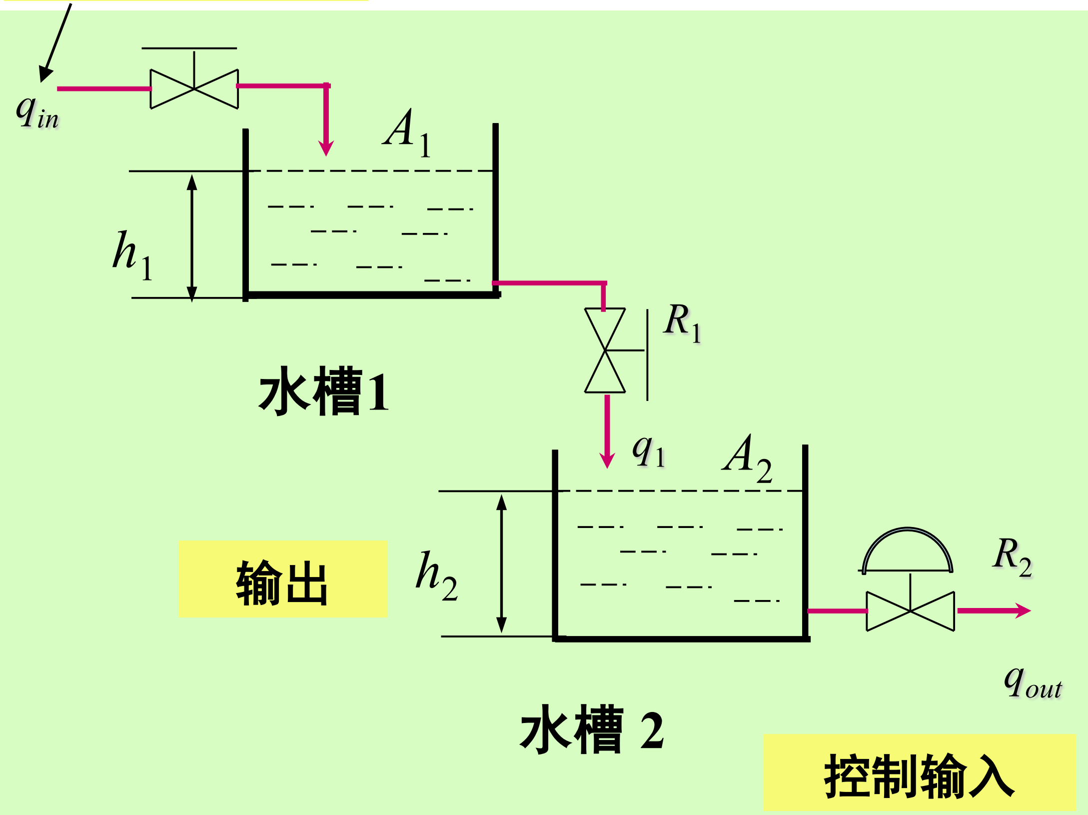
目标：保持 h_2 不变，h_2 与 q_{out} 和 q_{in} 相关

注意， 水槽液位 h_1 和 h_2 的关系

手段：控制 q_{out}(—— q_f)

液位系统（双容例1）

首先需要找出输入输出关系



水槽1
$$A_1\frac{dh_1}{dt}=q_{in}-q_1$$

其中
$$q_1=\frac{1}{R_1}h_1$$

水槽2
$$A_2\frac{dh_2}{dt}=q_1-q_{out}$$

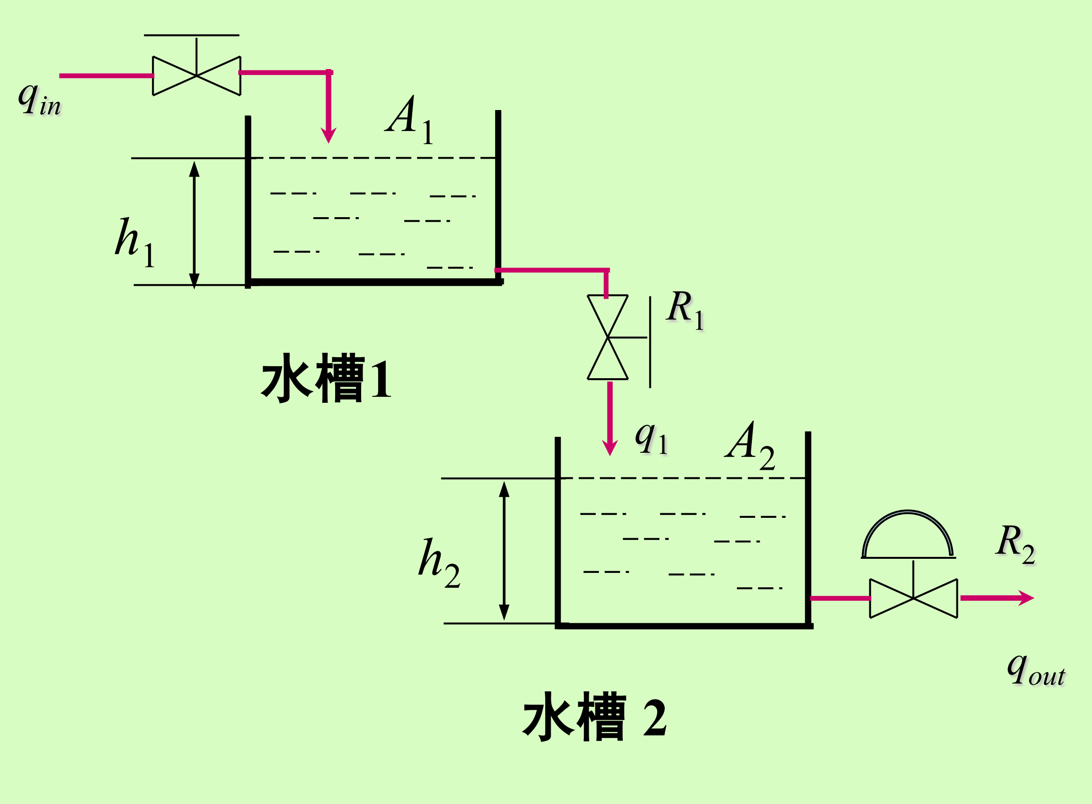
其中
$$q_{out}=\frac{1}{R_2}h_2+q_f$$

消去内部变量 q_1, h_1等，则可以得到如下方程：

目标：保持 h_2 不变；手段：控制 q_{out}

液位系统（双容例1）

$$T_1T_2\frac{d^2h_2}{dt^2}+(T_1+T_2)\frac{dh_2}{dt}+h_2=R_2q_{in}-R_2q_f-T_1R_2\frac{dq_f}{dt}$$

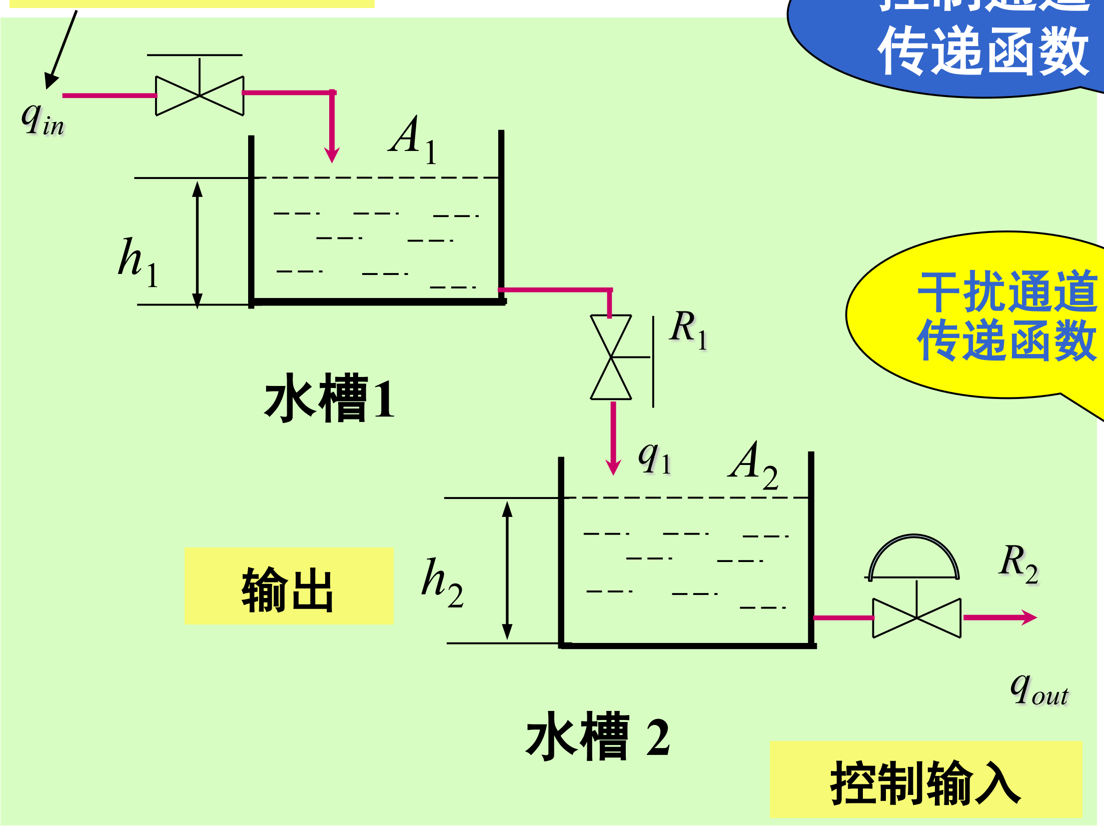


其中，$T_1=A_1R_1$，$T_2=A_2R_2$

上式是系统的输入输出模型，反映了输出变量 h_2 同扰动输入 q_{in} 和控制输入 q_f 之间的关系。但是该模型不能反映其他变量对 h_1 的影响。

液位系统（双容例1）：传递函数

$$T_1T_2\frac{d^2h_2}{dt^2}+(T_1+T_2)\frac{dh_2}{dt}+h_2=R_2q_{in}-R_2q_f-T_1R_2\frac{dq_f}{dt}$$



控制通道传递函数

干扰通道传递函数

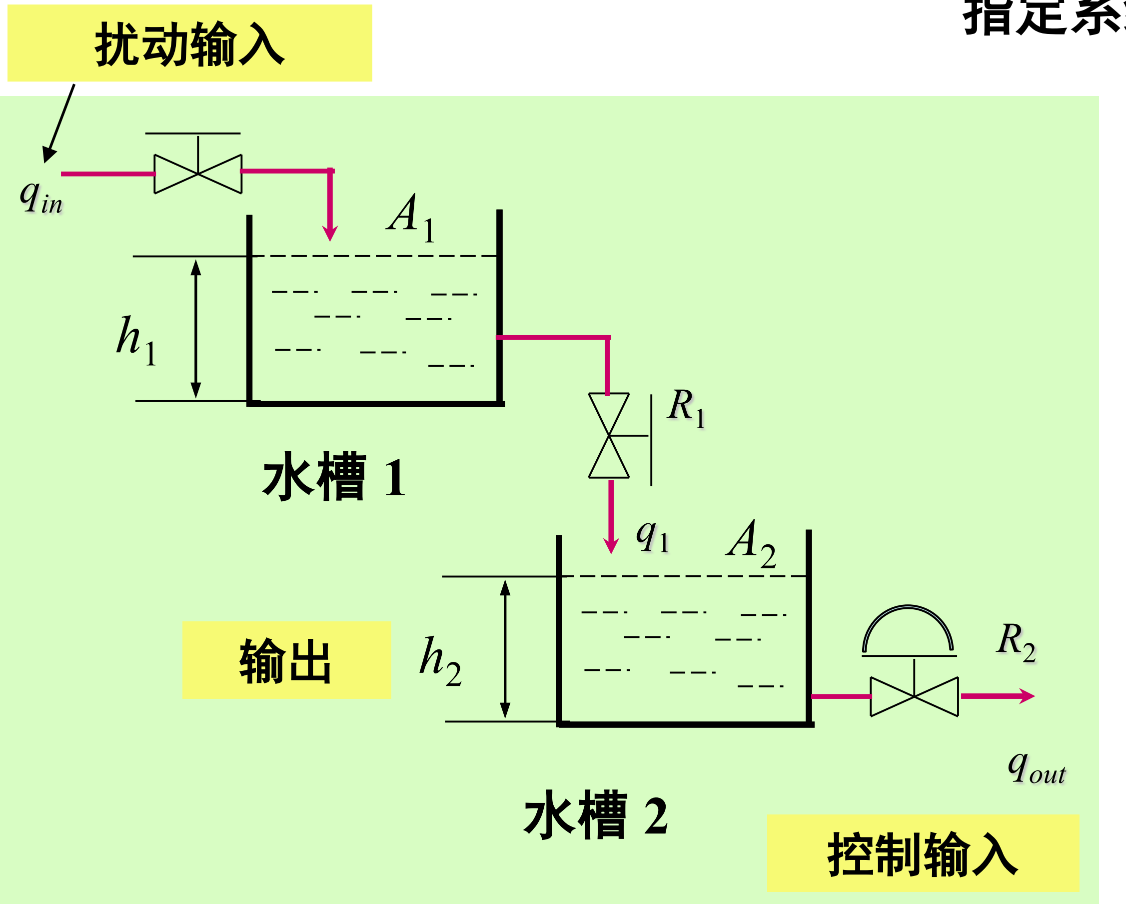
系统的传递函数为：

$$G_1(s)=\frac{y(s)}{u_1(s)}=\frac{h_2(s)}{q_f(s)}$$
$$=\frac{-R_2-T_1R_2s}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}$$

$$G_2(s)=\frac{y(s)}{u_2(s)}=\frac{h_2(s)}{q_{in}(s)}$$
$$=\frac{R_2}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}$$

液位系统（双容例1）：状态方程

➢ 系统包含两个储能元件，可以选取与其能量函数相关的变量作为系统的状态变量。



指定系统的状态变量为 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

输入变量 $u=\begin{bmatrix} q_{in} \\ q_f \end{bmatrix}_{2\times 1}$

输出变量 $y=h_2$

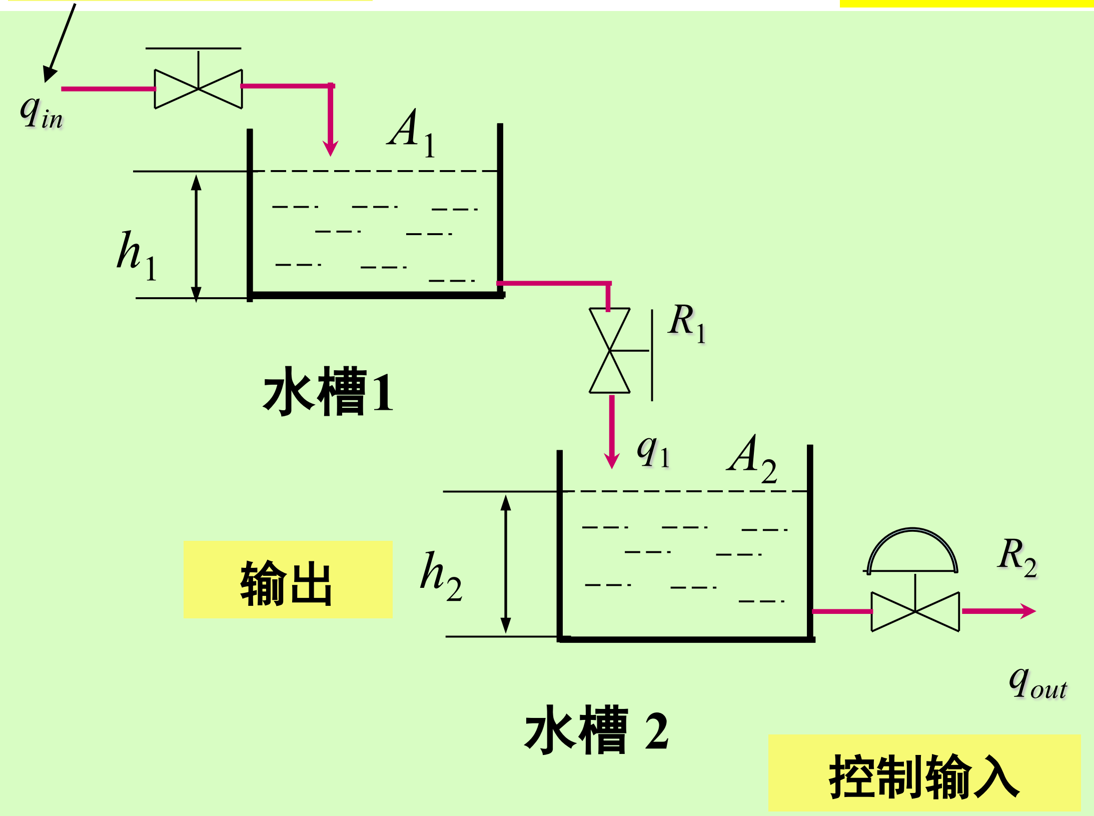
水槽 1 $$A_1\frac{dh_1}{dt}=q_{in}-q_1=q_{in}-\frac{h_1}{R_1}$$

水槽 2 $$A_2\frac{dh_2}{dt}=q_1-q_{out}$$
$$=\frac{h_1}{R_1}-\frac{h_2}{R_2}-q_f$$

液位系统（双容例1）：状态方程

➢ 系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{T_1} & 0\\ \dfrac{1}{R_1A_2} & -\dfrac{1}{T_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{A_1} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{A_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{in}\\ q_f\end{bmatrix}$$



➢ 系统输出方程为

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}=h_2$$

如果选择输出变量为

$y_1=h_1$ $y_2=h_2$

则输出方程为

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

液位系统（双容例2）

➢ 二容液位控制系统由两个一阶独立对象串联组成。注意， 这里水槽液位 h_1 和 h_2 是耦合的（为什么？）

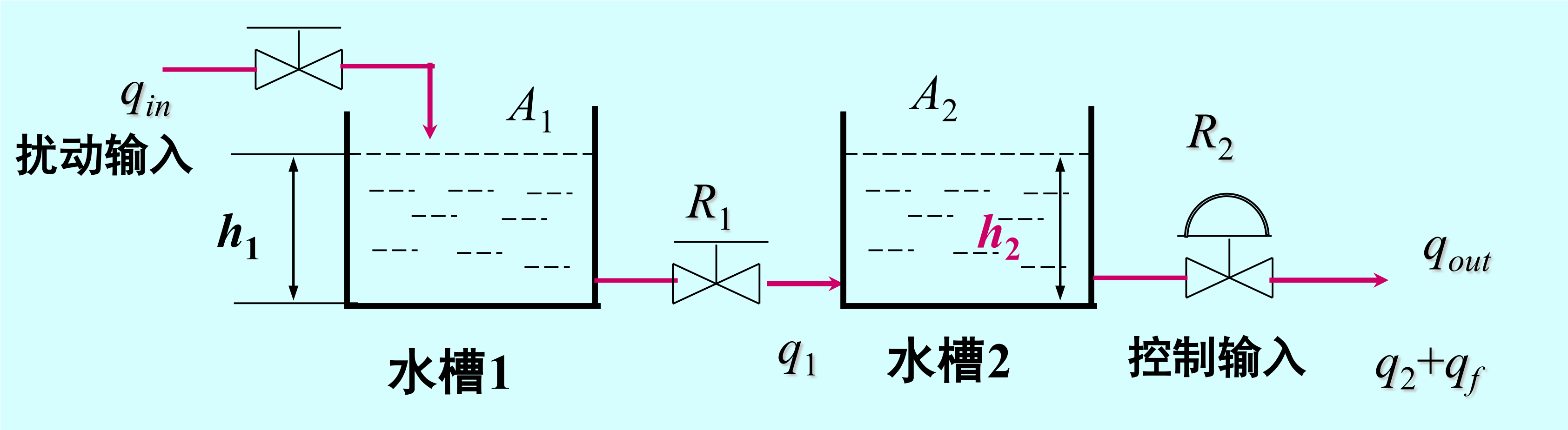
q： **液体流量**

h： **液位高度**

R： **液阻**

A： **水槽截面积**

目标: 保持 h_2 不变，h_2 与 q_{out} 和 q_{in}相关



液位系统（双容例2）

注意：不同于系统1 $q_1 = \dfrac{h_1}{R_1}$

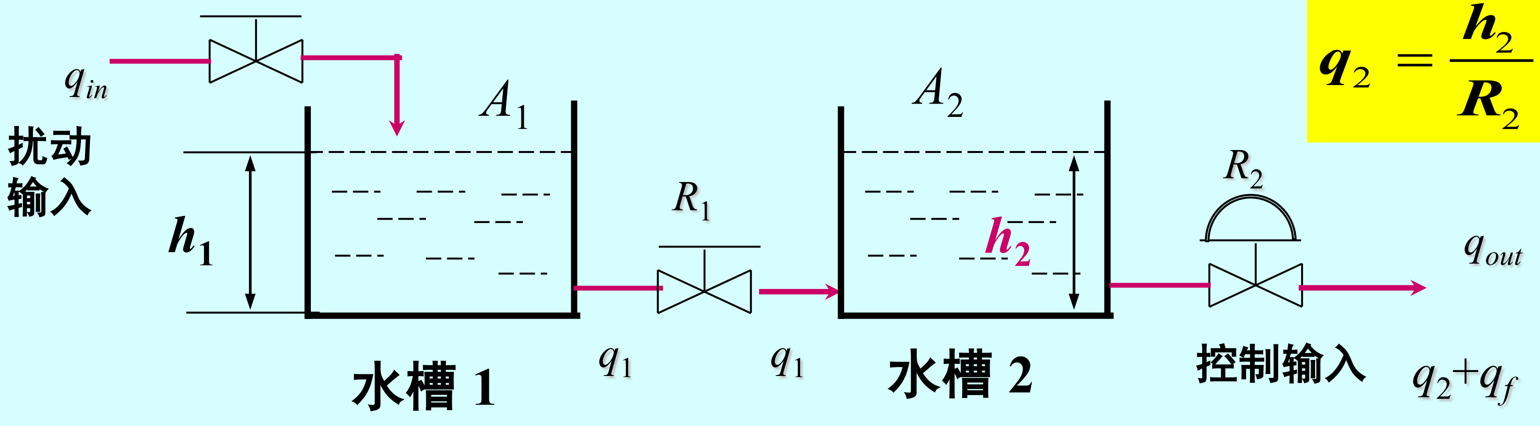
目标：保持 h_2 不变，h_2 与 q_{out} 和 q_{in} 相关

水槽 1 $$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - q_1$$ 其中 $$q_1 = \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2)$$

水槽 2 $$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_{out}$$ 其中 $$q_{out} = \frac{1}{R_2} h_2 + q_f$$

其中第一项由 h_2 变化引起，第二项由阀门 R_2 的开度变化引起

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$



设 R_1 开度不变；R_2 为调节阀，因开度变化引起流量变化为 q_f。

液位系统（双容例2）：微分方程与传递函数

➢ 消去内部变量 q_1, h_1等，于是可以得到（令 $T_1 = A_1R_1$，$T_2 = A_2R_2$）

$$T_1T_2\frac{d^2h_2}{dt^2} + (T_1 + T_2 + \underline{A_1R_2})\frac{dh_2}{dt} + h_2 = R_2q_{in} - R_2q_f - T_1R_2\frac{dq_f}{dt}$$

注意这是耦合项！

此为输入输出模型，可以反映输出h_2与输入q_{in}与q_f之间的关系，但无法反映变量h_1与其他变量的关系，从而损失了系统内部变量h_1的信息。

系统传递函数

控制通道

$$G_1(s) = \frac{y(s)}{u_1(s)} = \frac{h_2(s)}{q_f(s)} = \frac{-R_2 - T_1R_2s}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2 + A_1R_2)s + 1}$$

扰动通道

$$G_2(s) = \frac{y(s)}{u_2(s)} = \frac{h_2(s)}{q_{in}(s)} = \frac{R_2}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2 + A_1R_2)s + 1}$$

如果h_1也是输出变量？

液位系统（双容例2）：状态方程

设状态变量为 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}_{2\times1}$

并令输入变量为 $u=\begin{bmatrix} q_{in} & q_f \end{bmatrix}^T$

输出变量为 $y=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}_{2\times1}$

- 于是状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & \dfrac{1}{T_1} \\ \dfrac{1}{R_1A_2} & -\dfrac{1}{R_1A_2}-\dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{A_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{in} \\ q_f \end{bmatrix}$$

- 输出方程为

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

水槽 1 $\quad A_1\dfrac{dh_1}{dt}=q_{in}-q_1$ 其中 $q_1=\dfrac{1}{R_1}(h_1-h_2)$

水槽 2 $\quad A_2\dfrac{dh_2}{dt}=q_1-q_{out}$ 其中 $q_{out}=\dfrac{1}{R_2}h_2+q_f$

液位系统：对比

- 液位系统-1状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{T_1} & 0\\ \frac{1}{R_1A_2} & -\frac{1}{T_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{A_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{A_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{in}\\ q_f\end{bmatrix}$$

比较

- 液位系统-2状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_1}\\ \frac{1}{R_1A_2} & -\frac{1}{R_1A_2}-\frac{1}{T_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{A_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{A_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{in}\\ q_f\end{bmatrix}$$

不同?!

主要内容

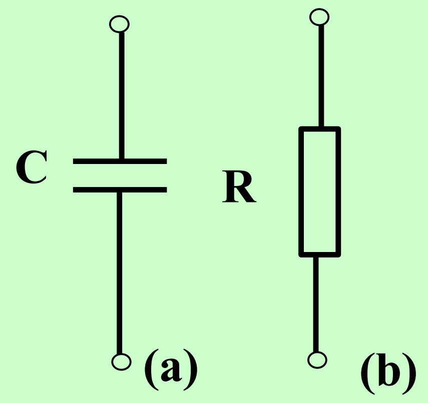
- 机械系统数学模型
- 液位系统数学模型
- 热力系统数学模型
- 直接蒸汽加热器建模
- 控制系统方块图建模

热力系统：基本单元（1）

◈ 只有少数热力系统可以由常微分方程描述，用常微分方程描述的热力系统要求研究对象的温度是均匀的。

——集总参数模型

◈ 热平衡的必要条件是输入系统的热量等于系统存储的热量加上离开系统的热量。这个条件也可以通过热流率来表示。



热力系统网络单元示意图

◈ 热力系统网络可以由热容和热阻表示。

Uniform temperature assumption
（温度均匀分布的假设）
1、small body (for solid固体)
2、perfect mixing(for liquid液体)

热力系统：基本单元（2）

- ◈ 外加的热量Q会让对象温度从 θ_1 升到 θ_2

热流率q：单位时间内通过某一截面的热量，单位是“瓦特”。热流率大于零，物体获得热量；反之，热量外流。

热容C（J/°C）：物体在某一过程中，每升高(或降低)单位温度时从外界吸收(或放出)的热量，热容决定了对象储存的热量——类似于电路中的电容。

- ◈ **热量** $$Q=\frac{q}{D}=C(\theta_2-\theta_1)$$
- ◈ **热流率** $$q=CD(\theta_2-\theta_1)$$

热阻R（°C · s/J）：热量在热流路径上遇到的阻力，反映介质与介质间的传热能力的大小，表明单位热功率所引起的温升，热阻决定了通过对象的热流率——类似于电路中的电阻。

- ◈ 用边界温度 θ_3 和 θ_4表示的、通过对象的热流率为 $$q=\frac{\theta_3-\theta_4}{R}$$

热力系统：水银温度计（1）

◆ 考虑一个充满水银的细壁温度计（具有热容 C 及热阻 R ），温度计稳定于温度 θ_1。在 t=0 时，将温度计放入温度为 θ_0 的容器中，请建立水银计温度 θ_m与容器温度θ_0 的数学模型。

◆ 温度计的热流率为

$$q=\frac{\theta_0-\theta_m}{R}$$

◆ 进入温度计并由热容 C 储存的热量为

$$Q=\frac{q}{D}=C(\theta_m-\theta_1)$$

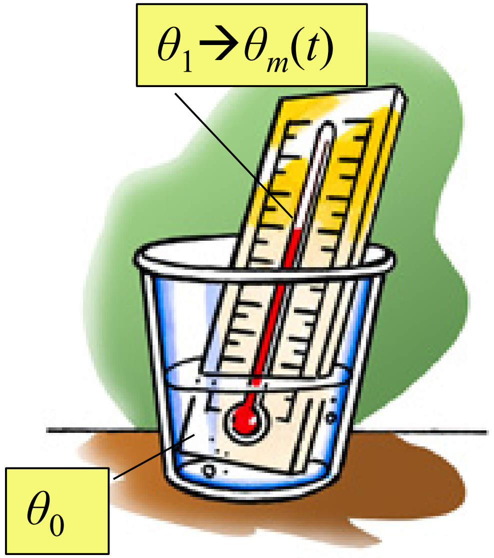
◆ 上述方程可以合并为

$$Q=\frac{\theta_0-\theta_m}{RD}=C(\theta_m-\theta_1)$$

◆ 整理可以得到

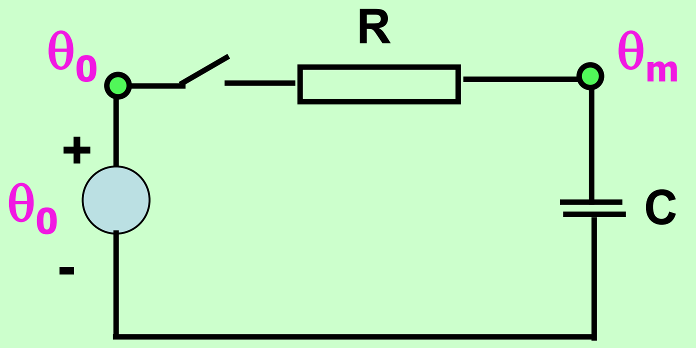
$$\boxed{RCD\theta_m+\theta_m=\theta_0}$$

问题：上式中为何没有温度 θ_1了？



热力系统：水银温度计（2）

◆ 系统的热力网络表示如图所示。将温度视作电压，则该网络的节点方程如方程(1)，于是可以得到传递函数$G= \theta_m/\theta_0$



温度计的网络表示

$$RCD\theta_m + \theta_m = \theta_0 \qquad (1)$$

$$G(D) = \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{1}{RCD+1}$$

或

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{\theta_0(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

◆ 令 $x_1=\theta_m$， $u=\theta_0$，状态方程为

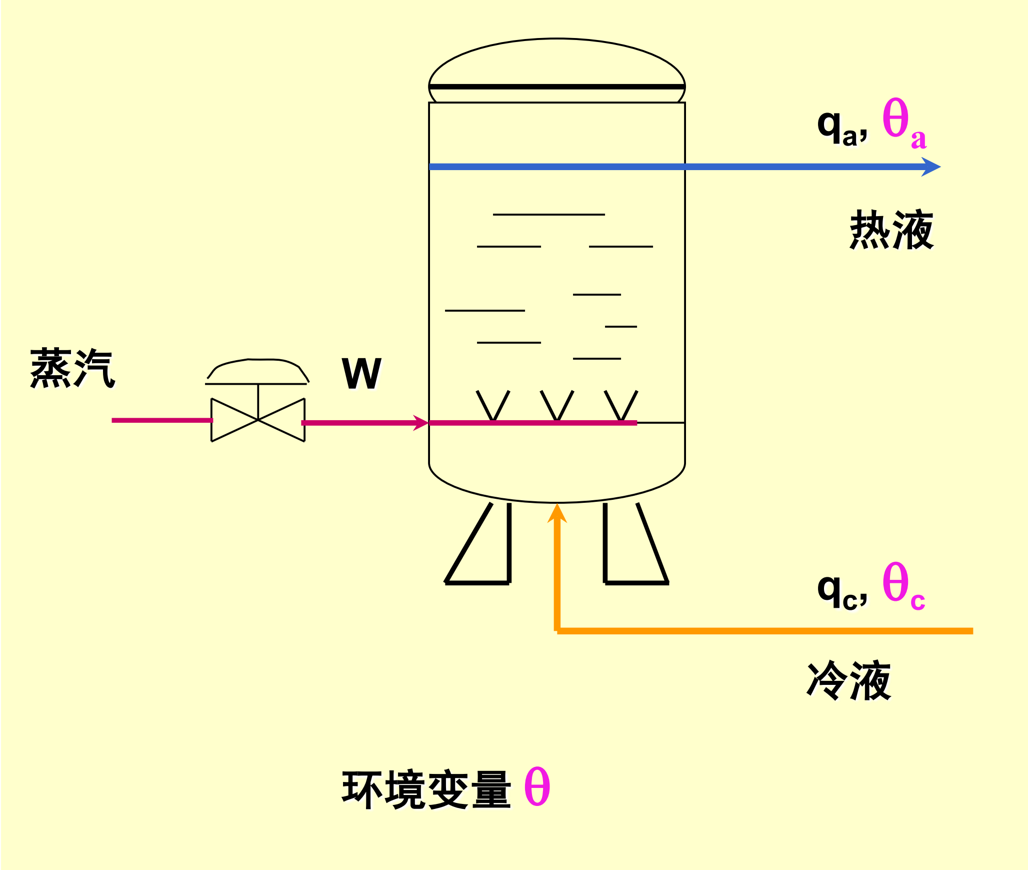
$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{RC}u$$

主要内容

- ➢ 机械系统数学模型
- ➢ 液位系统数学模型
- ➢ 热力系统数学模型
- ➢ 直接蒸汽加热器建模
- ➢ 控制系统方块图建模

直接蒸汽加热器

- 目标：把冷液加热至温度 θ_a



步骤 1：输入输出？

输出（被控变量）： θ_a

输入（控制变量）可以是：W，q_c（流量），θ_c（温度）和 θ（环境温度）等。最合适的变量是 W（蒸汽量）？其他的作为扰动变量。

步骤 2：假设及简化

(1) 集总模型

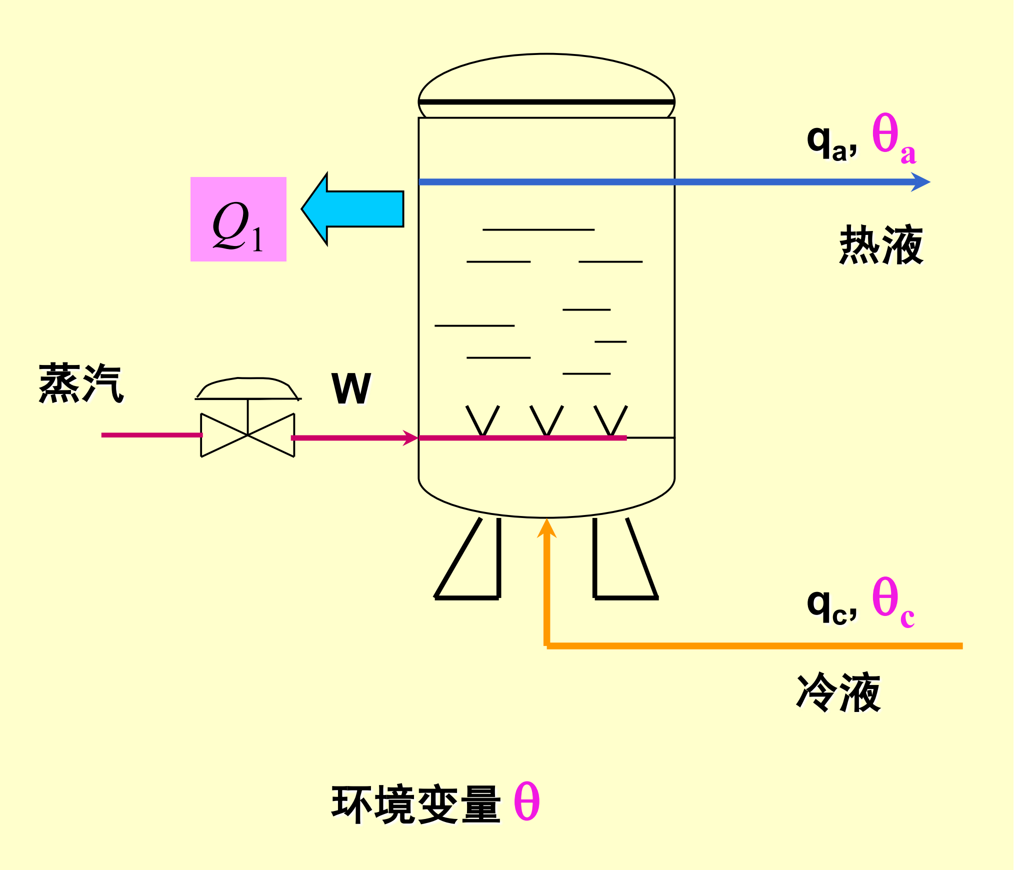
(2) 理想保温条件

(3) q_c , θ_c, θ 近似为常数

(4) 需要的蒸汽量远小于冷液量

直接蒸汽加热器

步骤 3：建立数学模型



- 令 Q 表示热量

根据能量守恒定律，在单位时间内：

$$Q_{input} = Q_{output} + \frac{dQ}{dt}$$

首先，考虑稳态

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

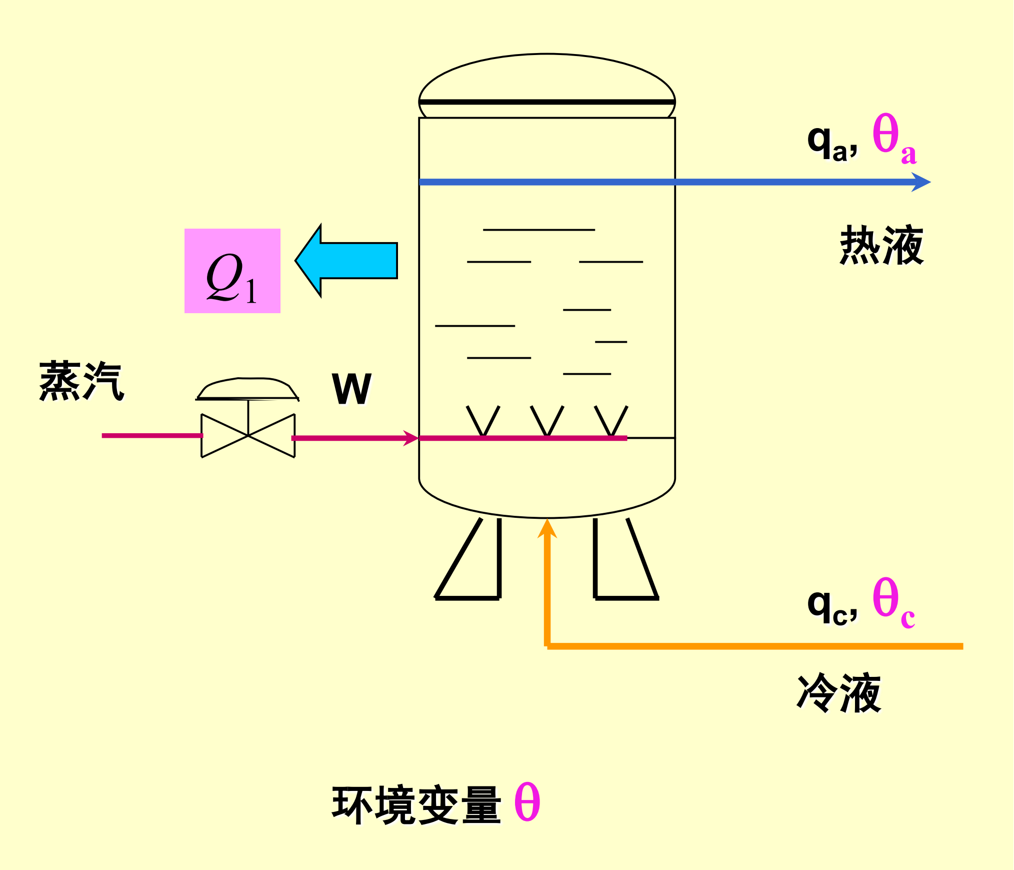
$$Q_c + Q_s = Q_a + Q_1$$

根据假设(2)，$Q_1=0$，于是

$$Q_c + Q_s = Q_a$$

直接蒸汽加热器

$$Q_c + Q_s = Q_a \qquad Q_c = q_c c_c \theta_c, \quad Q_s = WH, \quad Q_a = q_a c_a \theta_a$$



其中 H 是蒸汽的热焓。

假设满足：

$$c_c = c_a = c$$

$$\because q_a = q_c + W \approx q_c$$

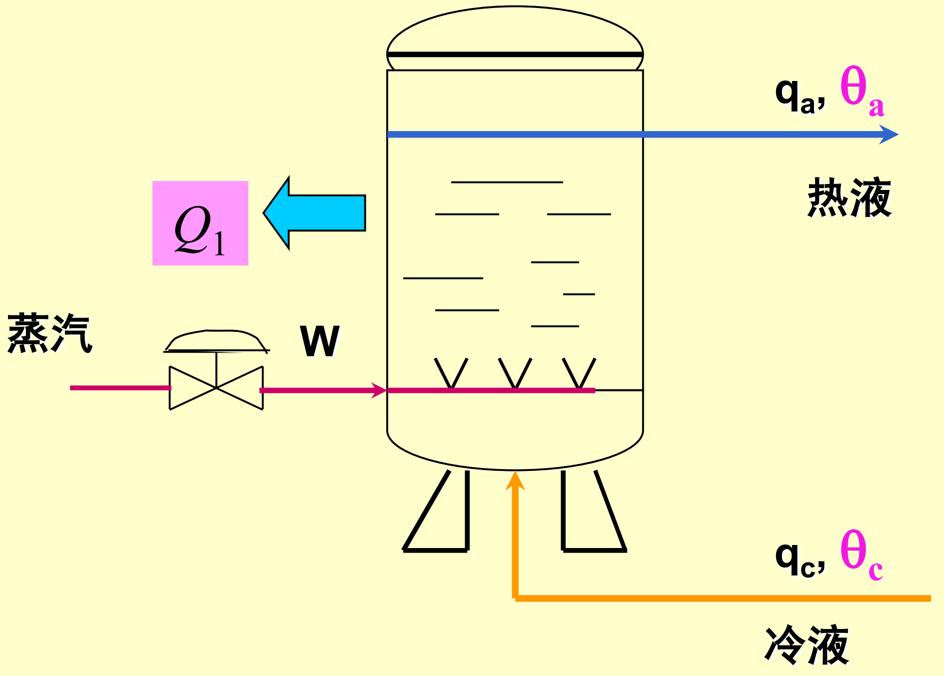
其中 W 非常小，热焓H很大

$$\theta_{a0} = \theta_{c0} + \frac{H}{q_a c} \cdot W_0$$

这是系统的稳态模型

直接蒸汽加热器

考虑系统的动态模型



$$\frac{dQ}{dt} = Q_c + Q_s - Q_a$$

其中， $Q = V\gamma c\theta_a$

V 是已知的体积，

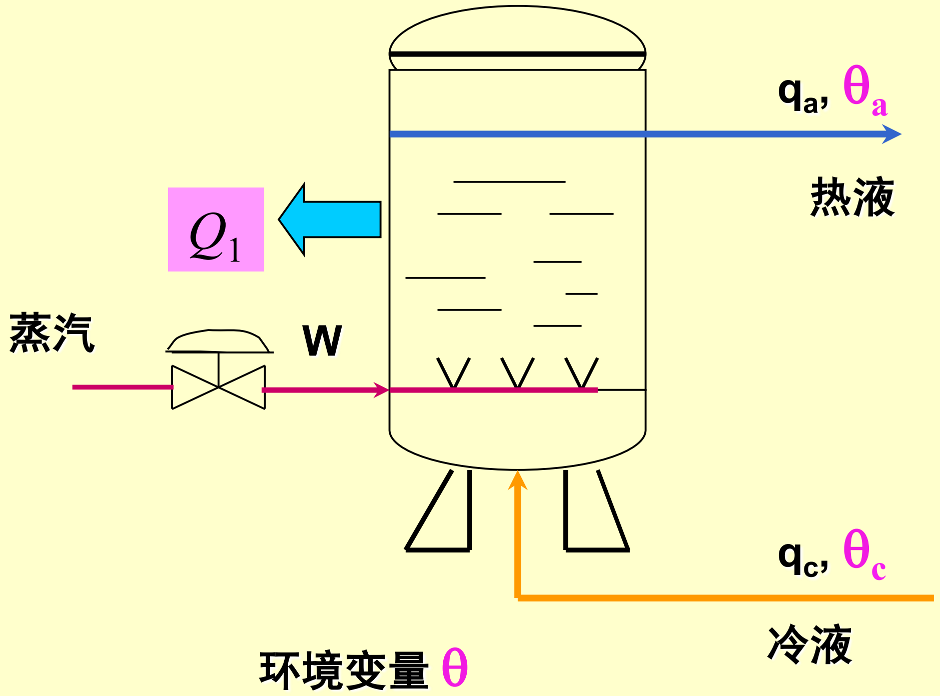
γ 是液体的密度，于是

$$\frac{dQ}{dt} = V\gamma c\frac{d\theta_a}{dt} = C\frac{d\theta_a}{dt}$$

$$\therefore C\frac{d\theta_a}{dt} + q_a c\theta_a = q_c c\theta_c + WH$$

直接蒸汽加热器

令 $R=\dfrac{1}{q_a c}$



$$C\frac{d\theta_a}{dt}+q_a c\theta_a = q_c c\theta_c + WH$$

$\because q_a = q_c + W \approx q_c$ 于是

$$C\frac{d\theta_a}{dt}+\frac{1}{R}\theta_a = \frac{1}{R}\theta_c + WH$$

$$RC\frac{d\theta_a}{dt}+\theta_a = \theta_c + KW$$

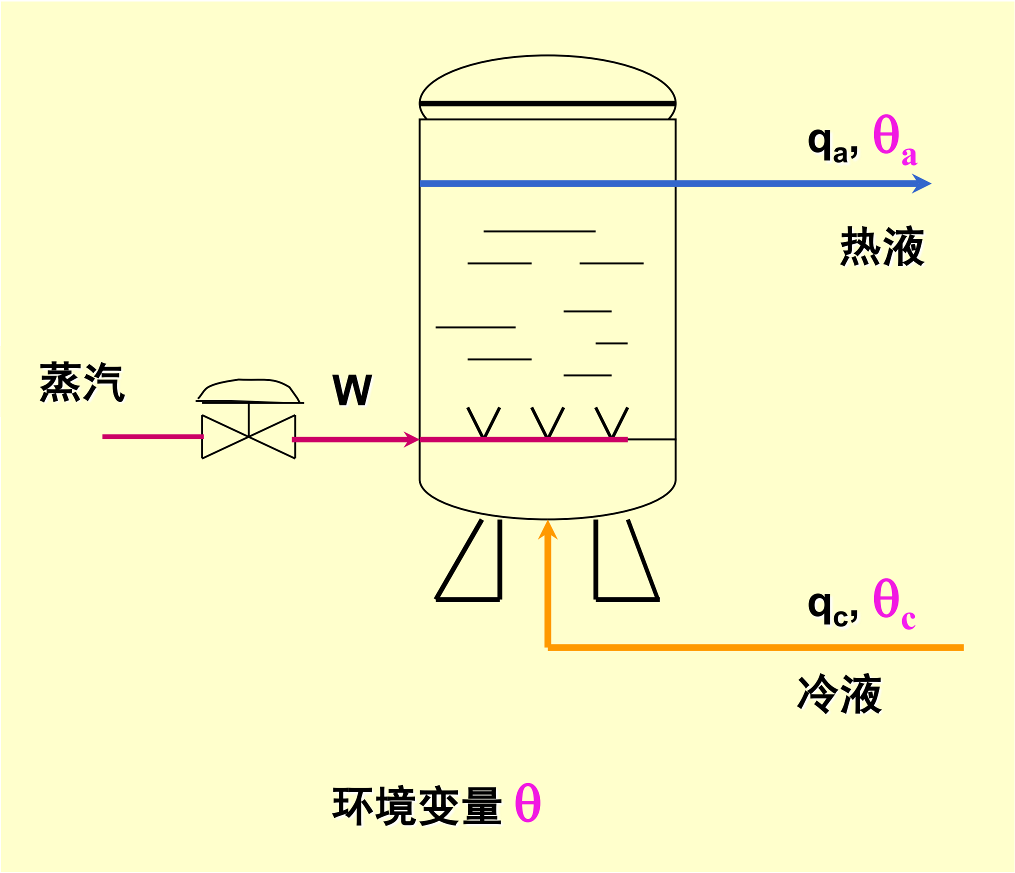
或 $$T\frac{d\theta_a}{dt}+\theta_a = \theta_c + KW$$ **

其中，*T*=*RC* 是时间常数；*K*=*HR*是放大系数，也称为系统的稳态增益。 θ_c 是扰动变量，是不可控的输入。

直接蒸汽加热器

➤ 系统的微分方程为：

$$T\frac{d\theta_a}{dt}+\theta_a=\theta_c+KW$$



➤ 系统的传递函数：

调节通道

$$G_o(s)=\frac{\theta_a(s)}{W(s)}=\frac{K}{Ts+1}$$

扰动通道

$$G_d(s)=\frac{\theta_a(s)}{\theta_c(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

如果考虑时滞，

$$G_o(s)=\frac{\theta_{a\tau}(s)}{W(s)}=\frac{Ke^{-\tau s}}{Ts+1}$$

微分方程增量形式

- 在工业控制中，我们通常考虑变量的增量方程，如

系统动态方程：

$$T\frac{d\theta_a}{dt}+\theta_a=\theta_c+KW$$

**

系统稳态方程：

$$\theta_{a0}=\theta_{c0}+\frac{H}{q_a c}\cdot W_0$$

---工作点

- 将动态方程减去稳态方程，其中，$\theta_a=\theta_{a0}+\Delta\theta_a$

$$T\frac{d\theta_a}{dt}+\theta_a-\theta_{a0}=\theta_c+KW-\theta_{c0}-KW_0$$

- 可以得到增量方程

$$\boxed{\boldsymbol{T\frac{d\Delta\theta_a}{dt}+\Delta\theta_a=\Delta\theta_c+K\Delta W}}$$

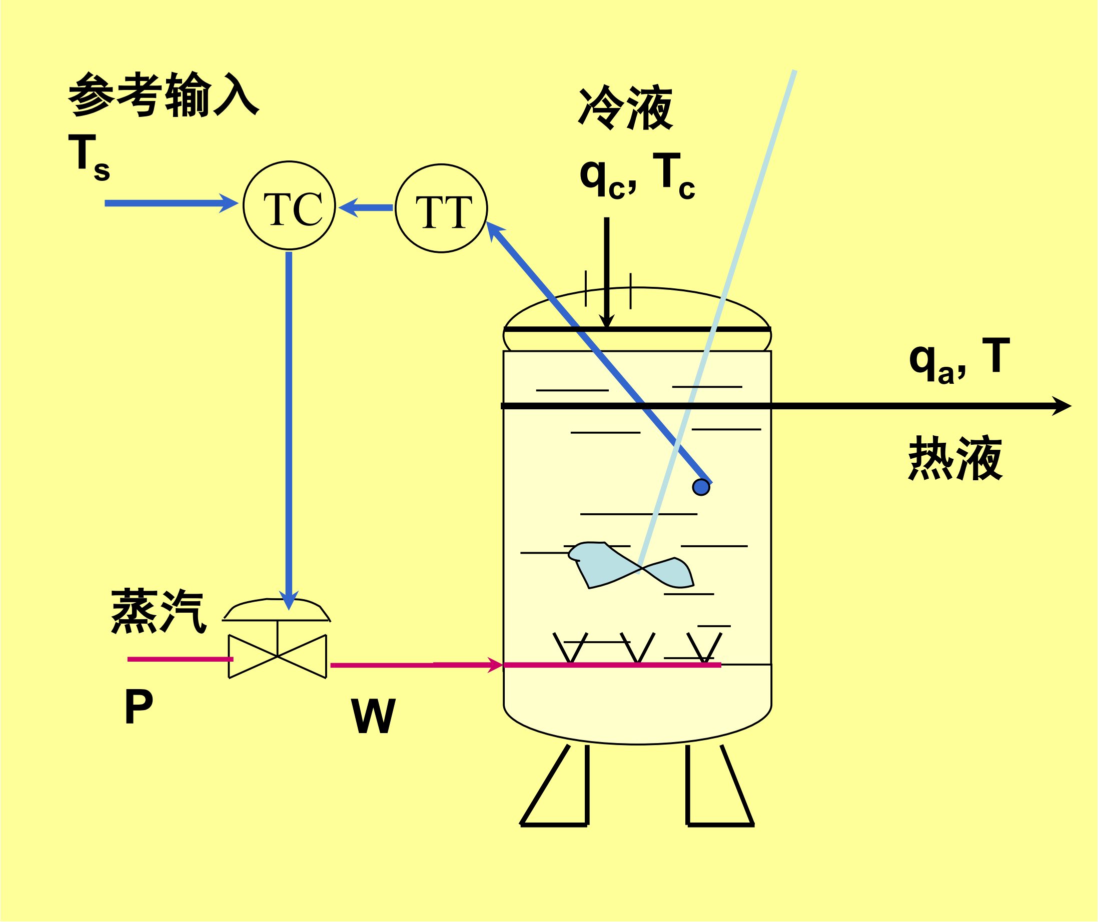
除了增量符号Δ之外，增量方程与动态方程具有一样的表达式。对于线性时不变系统，符号Δ通常省略，但是“增量”的思想非常重要。

主要内容

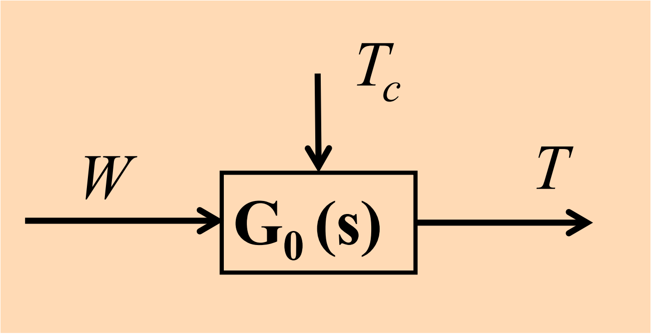
- 机械系统数学模型
- 液位系统数学模型
- 热力系统数学模型
- 直接蒸汽加热器建模
- **控制系统方块图建模**

直接蒸汽加热器

➢ 目标：通过调节 W 控制 T



➢ 考虑：被控过程（对象）是什么？被控变量是什么？输入、输出变量是什么？控制（操作）变量是什么？



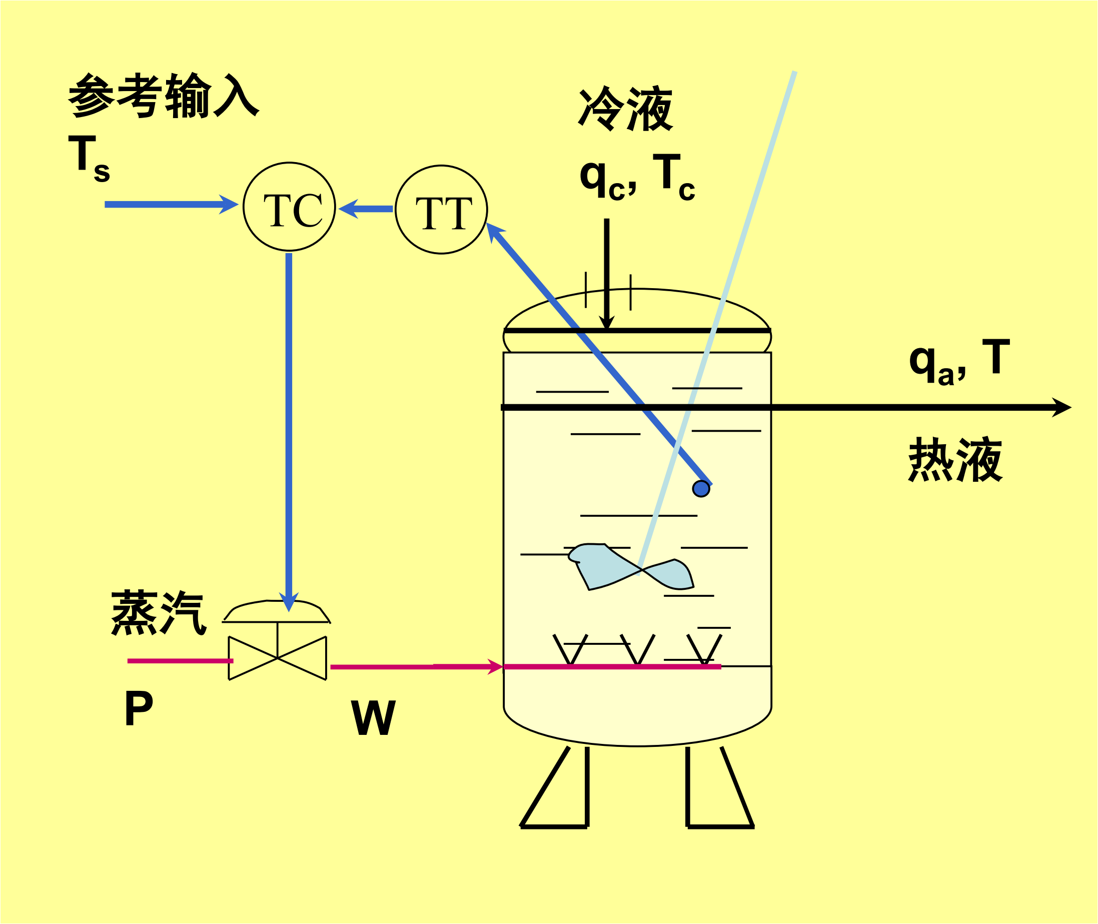
从输出端考虑：被控变量是T；

输入变量是：W、T_c；

被控对象：直接蒸汽加热器G_0

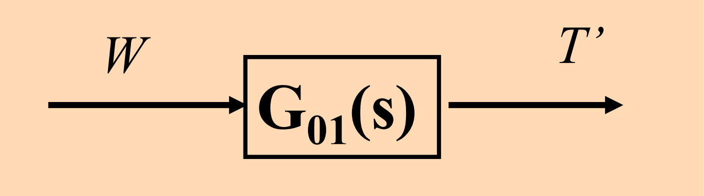
直接蒸汽加热器

- 目标：通过调节 W 控制 T

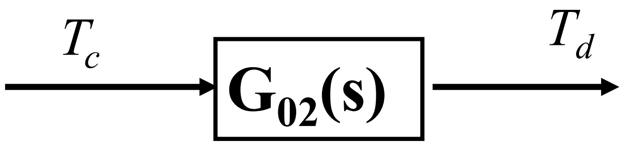


- 考虑被控对象

控制通路 W → T'



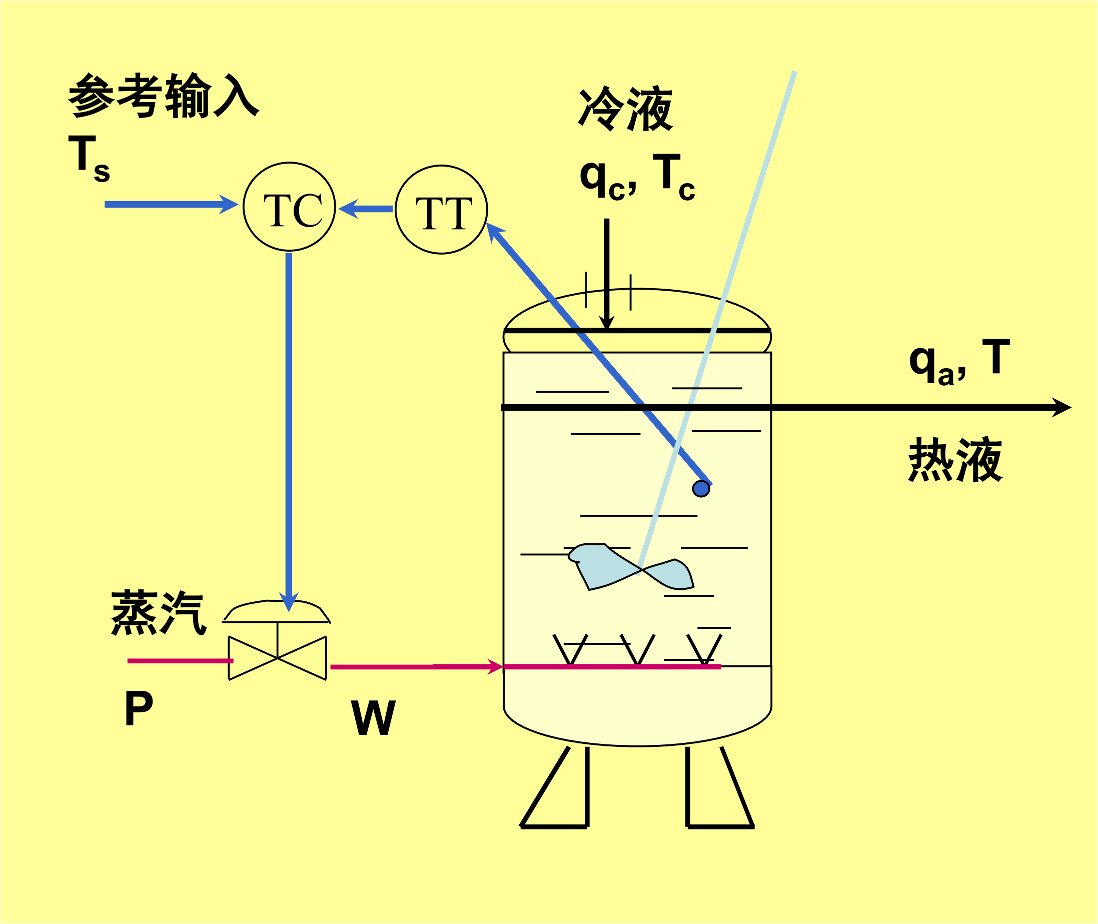
扰动通路 T_c → T_d

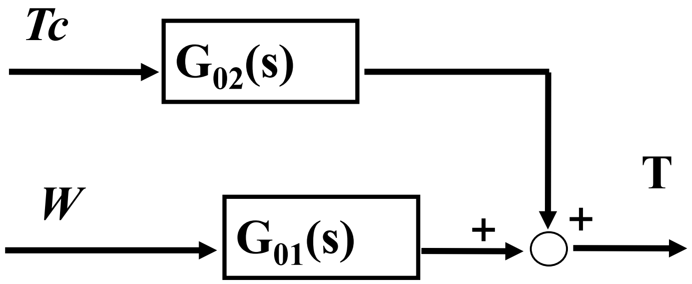


其中 $T'+T_d=T$

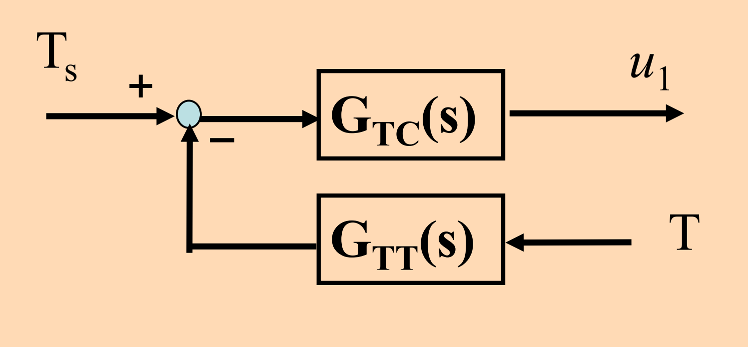
直接蒸汽加热器

➢ 目标：通过调节 W 控制 T



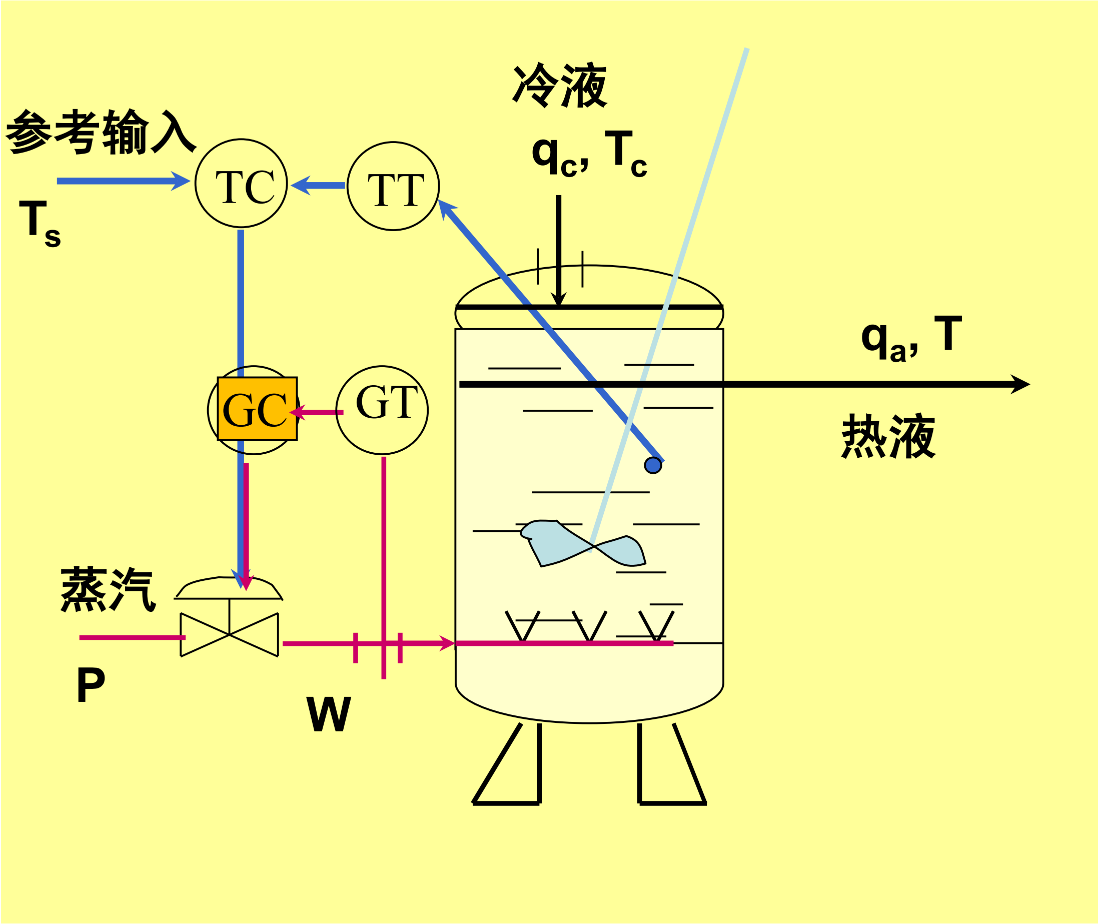


控制器 1-TC (主回路)



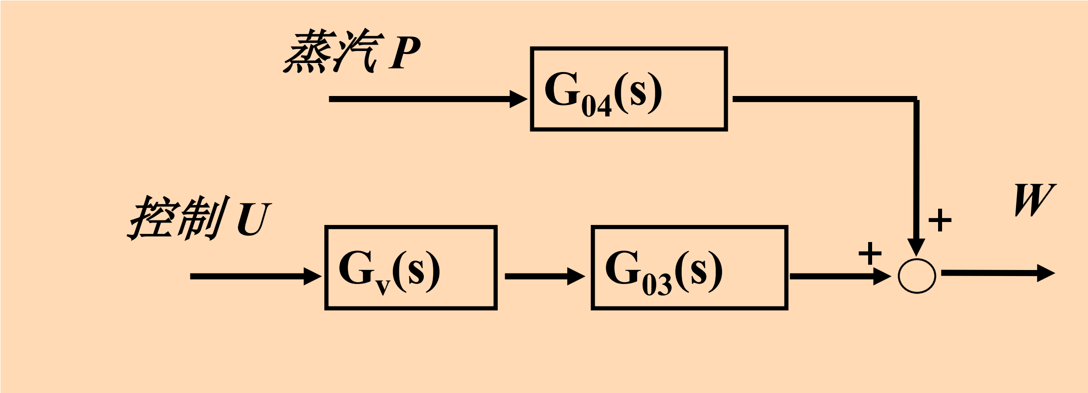
直接蒸汽加热器

- 目标：通过调节 W 控制 T



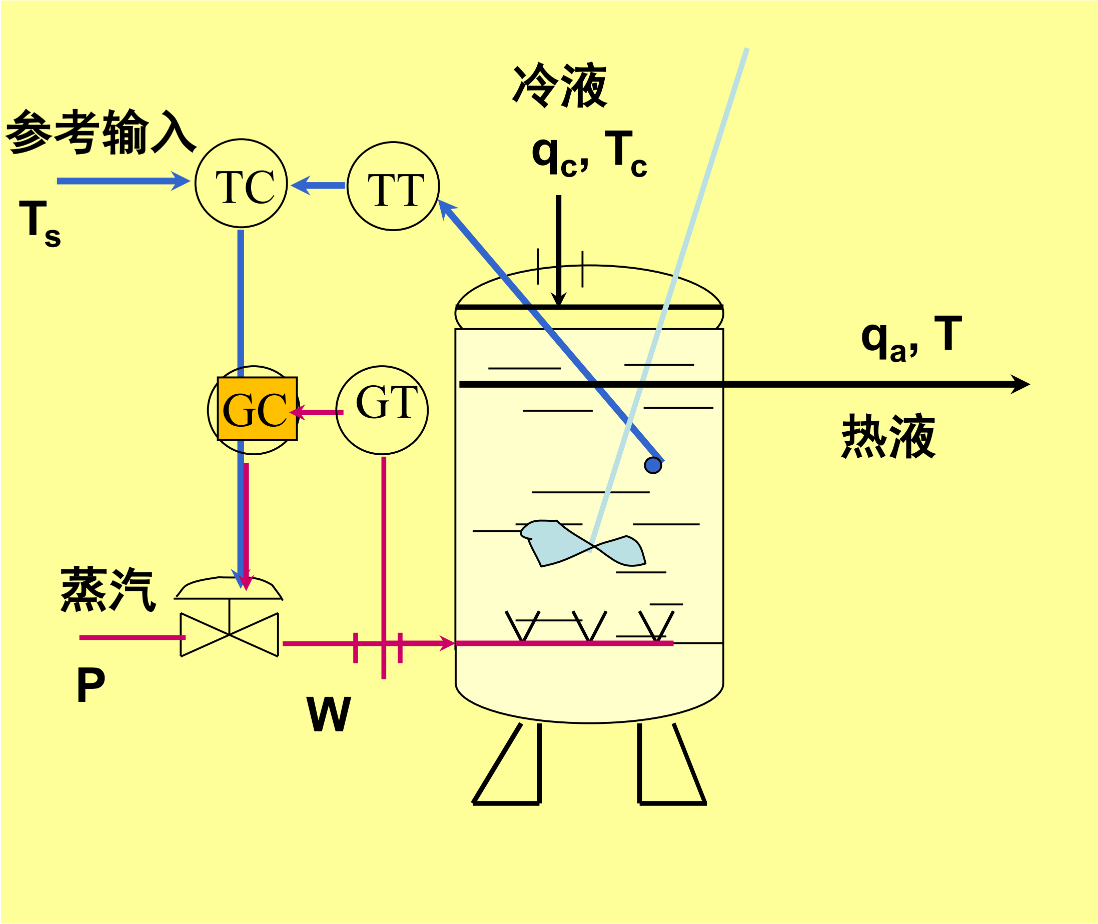
- 由于蒸汽压力经常变动，我们**增加蒸汽流量控制回路**，这样组成一个 T 加 G 的 串级控制系统，系统扰动为T_c

2 个通道 → W ↕

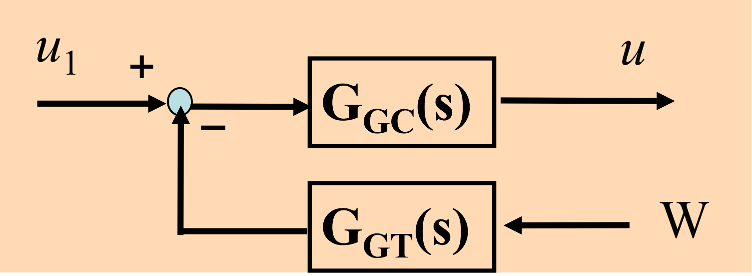


直接蒸汽加热器

➢ 目标：通过调节 W 控制 T

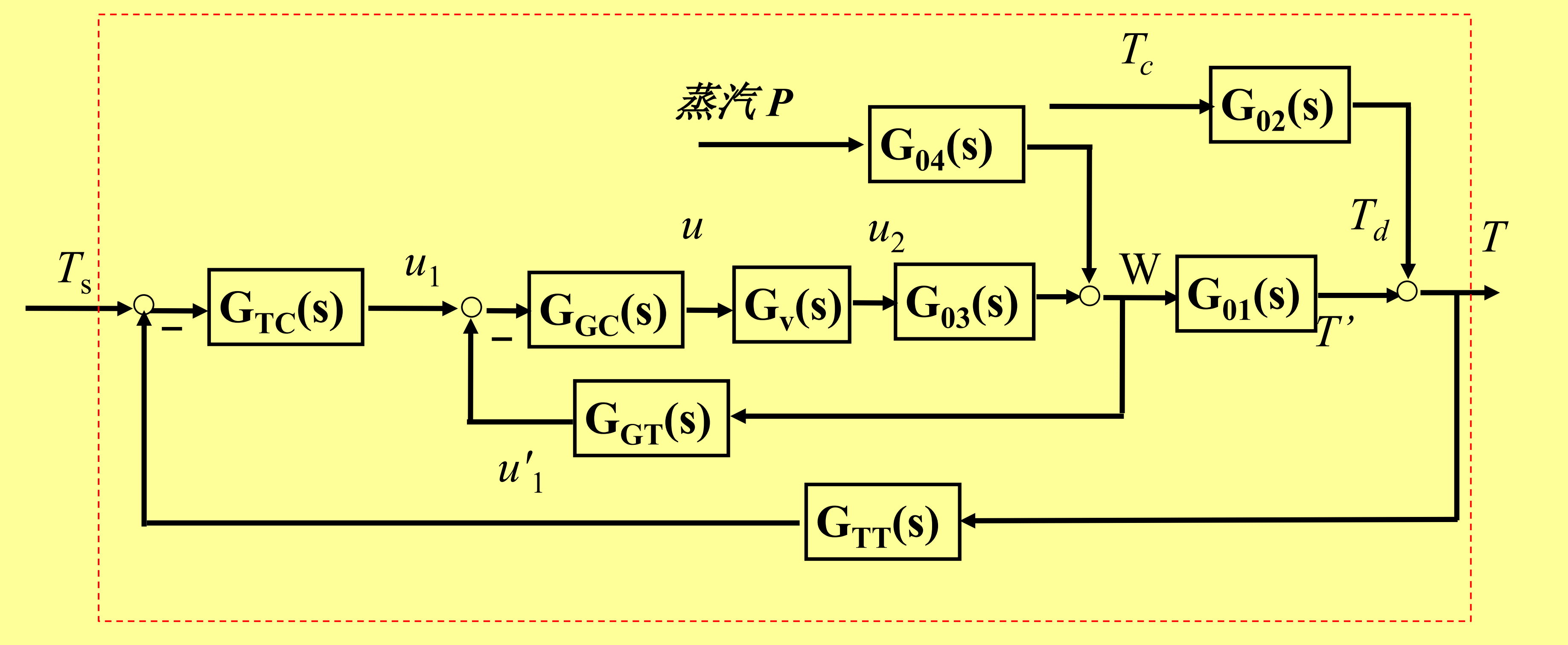


控制器 2-GC (副回路)



直接蒸汽加热器

整个系统的方块图模型为



如何根据上面的多回路方块图得到整个系统的传递函数T/T_S?

思考题：

1)u_1、u_2、u分别是什么？ 2)内外回路串级有何好处？

The End