随机过程学习笔记

原神不启动

更新：2025 年 6 月 2 日

目录

1　概统知识补充

1.1　正态分布

若随机变量 X 服从均值为 μ、方差为 σ^2 的正态分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其概率密度函数 (PDF) 为：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

1.1.1　标准正态分布

当均值 $\mu = 0$ 且方差 $\sigma^2 = 1$ 时，称为标准正态分布，记为 $Z \sim N(0, 1)$。其概率密度函数 (PDF) 为：

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

此时，累积分布函数 (CDF) 通常用 $\Phi(x)$ (或 $\Phi(z)$) 表示：

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{x} \phi(t) dt$$

1.1.2 一般正态分布与标准正态分布的关系

若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则其累积分布函数 $F_X(x) = P(X \leq x)$ 可以通过标准化转换为标准正态分布的累积分布函数:

$$F_X(x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

特别地，若随机变量 $X \sim N(0, \sigma^2)$ (即 $\mu = 0$)，则

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

1.2 n 元正态分布性质

1. 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 n 元正态分布, 则任意 k ($k = 1, 2, \ldots, n$) 分量服从正态分布。特别的, 每一个分量 X_i 服从正态分布。反之, 若 $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 都服从正态分布, 且相互独立, 则 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 n 元正态分布。
2. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 n 元正态分布的充要条件是它的 n 个分量的任意线性组合均服从一元正态分布。
3. 若 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 n 元正态分布, 设 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ 都是 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的线性组合, 则 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ 也服从正态分布。
4. 若 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从 n 元正态分布, 则 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立当且仅当它们两两不相关。

1.3 泊松分布

1.3.1 定义

若随机变量 X 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$ 或 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$，其概率质量函数为：

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

其中 k 是非负整数，e 是自然对数的底。参数 λ 通常表示在给定区间内某事件发生的平均次数。

1.3.2 主要性质

- **期望:** $E[X] = \lambda$.
- **方差:** $\text{Var}(X) = \lambda$. (期望与方差相等是泊松分布的一个显著特征)
- **可加性:** 若 $X_1 \sim P(\lambda_1)$ 和 $X_2 \sim P(\lambda_2)$ 是两个相互独立的随机变量，则它们的和 $Y = X_1 + X_2$ 服从泊松分布 $P(\lambda_1 + \lambda_2)$。此性质可推广到任意有限个相互独立的泊松随机变量之和。
- **二项分布的极限:** 当二项分布 $B(n, p)$ 的试验次数 n 很大，而成功概率 p 很小时，若 $np = \lambda$ (一个常数)，则该二项分布可以用参数为 λ 的泊松分布来近似。

1.4 随机变量数字特征

1.4.1 数学期望

离散型:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k$$

连续型:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

1.4.2 k 阶中心矩

若 $Y = X^k, k = 1, 2, \ldots$ 的数学期望存在, 则称 $E(X^k)$ 为 X 的 k 阶 (原点) 矩。若 $E((X - E(X))^k)$ 存在, 则称它为 X 的 k 阶中心矩。

1.4.3 方差

二阶中心矩 $E((X - E(X))^2)$ 也称为方差, 记为 $D(X)$。计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

性质:

1.

$$D(aX + c) = a^2 D(X)$$

2.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

1.5 协方差与相关系数

随机变量 X 与 Y 的协方差定义为:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

协方差计算公式为:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

2 随机过程基本概念

2.1 定义

注 (Tip) 设 S 是样本空间, P 是概率, $T\subset R$, 如果对任何 $t\in T$, $X(t)$ 是 S 上的随机变量, 则称 $\{X(t);t\in T\}$ 是 S 上的随机过程, T 称为参数集。用映射表示: $X(t,e):T\times S\to R$

2.2 均值函数和协方差函数

2.2.1 定义 1

注 对于任何 $t \in T$, 定义:

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E(X(t)), \\ \psi_X^2(t) &= E(X^2(t)) \\ \sigma_X^2(t) &= D_X(t) = D(X(t)), \\ \sigma_X(t) &= \sqrt{D(X(t))} \end{aligned}$$

分别称为随机过程的均值函数, 均方值函数, 方差函数和标准差函数。

2.2.2 定义 2

注 对任何的 $t, s \in T$, 定义:

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= E(X(t)X(s)), \\ C_X(t,s) &= \mathrm{Cov}(X(t), X(s)) \end{aligned}$$

分别称为随机过程的自相关函数和自协方差函数。

注 (推论)

$$\psi_X^2(t) = R_X(t,t),$$
$$\sigma_X^2(t) = C_X(t,t)$$
$$C_X(t,s) = R_X(t,s) - \mu_X(t)\mu_X(s)$$

注 (Caution) 如果对任何 $t \in T$, $E(X^2(t))$ 存在, 则称随机过程 $\{X(t); t \in T\}$ 是二阶矩过程。二阶矩过程的均值函数, 自相关函数和自协方差函数都是存在的。

2.2.3 定义 3

注 设 $\{X(t); t \in T\}$ 是一随机过程, 如果对任何 n, 任何 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ 服从 n 元正态分布, 则称 $\{X(t); t \in T\}$ 是正态过程 (或高斯过程)。正态过程是二阶矩过程, 它的有限维分布完全由它的均值函数和自协方差函数确定。

2.2.4 定义 4

注 设 $\{X(t); t \in T\}$ 和 $\{Y(t); t \in T\}$ 是两个随机过程, 定义:

$$R_{XY}(t,s) = E(X(t)Y(s))$$
$$C_{XY}(t,s) = \mathrm{Cov}(X(t), Y(s))$$

它们是 $T\times T$ 上的函数, 分别称为 $\{X(t);t\in T\}$ 和 $\{Y(t);t\in T\}$ 的互相关函数和互协方差函数。如果对任何 $t,s\in T, C_{XY}(t,s)=0$, 则称两随机过程不相关。如果对任何 $m,n,t_1,\ldots,t_m\in T, s_1,\ldots,s_n\in T$, $\{X(t_1),\ldots,X(t_m)\}$ 与 $\{Y(s_1),\ldots,Y(s_n)\}$ 相互独立, 则称两随机过程相互独立。一般的, 两随机过程不相关, 不能推出它们相互独立。但如果它们相互独立, 且是二阶矩过程, 则它们一定不相关。

3 马尔科夫链

3.1 定义

设随机过程 $\{X_n;n=0,1,\ldots\}$ 的状态空间 I 有限或可列, 如果它具有马尔可夫性, 即对于任何 $n\geq 1, i_0,\ldots,i_{n-1},i,j\in I$, 有:

$$P(X_{n+1}=j|X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$$

则称 $\{X_n;n=0,1,\ldots\}$ 是马尔科夫链。其具有无记忆性, 体现在:

注 若以 n 代表现在的时刻, 记 $A=\{X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1}\}, B=\{X_n=i\}, C=\{X_{n+1}=j\}$, 则 A 代表过去, B 代表现在, C 代表未来。我们可以推出: $P(A\cap C|B)=P(A|B)P(C|B)$ (此表示 A 和 C 在 B 条件下条件独立)。这个式子可以理解为: 知道现在状态的条件下, 过去与将来相互独立。需要注意的是, 马尔可夫性并不指过去与将来相互独立。

3.2 转移概率

记

$$p_{ij}(m, m+n) = P(X_{m+n} = j | X_m = i)$$

此式为 m 时处于状态 i 的条件下，经过 n 步后转移到状态 j 的转移概率。若 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ 不依赖于 n，则称 $\{X_n\}$ 是时齐的马尔科夫链，p_{ij} 称为从 i 到 j 的一步转移概率。

3.3 C-K 方程

对于时齐的马尔科夫链，可以通过 C-K 方程研究其有限维分布：

注 若采用 $p_{ij}^{(k)}$ 表示 k 步转移概率，则 C-K 方程为：

$$p_{ij}^{(m+l)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(l)}$$

由此还可以推出：(假定时齐，P 为一步转移概率矩阵)

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}$$

3.4 常返和暂留

3.4.1 概念

对于状态 i, 定义 $\tau_i = \inf\{n \geq 1; X_n = i\}$ 为 i 的首中时 (约定 $\inf(\emptyset) = \infty$)。

- 如果 $P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$, 则称 i 常返, 否则暂留。
- 如果 i 常返, 令 $\mu_i = E(\tau_i | X_0 = i)$, 称其为状态 i 的平均回转时。如果 $\mu_i < \infty$ 称为正常返, 否则零常返。
- 令 $f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j, \text{for } 1 \leq k < n | X_0 = i)$, 表示从 i 出发第 n 步首次击中 j 的概率。令 $f_{ij} = P(\tau_j < \infty | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, 表示从 i 出发有限步击中 j 的概率。状态 i 常返当且仅当 $f_{ii} = 1$。若 i 常返, 则 $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$。

3.4.2 等价描述

设 i 是某状态, 令 $N_i = \#\{n \geq 0; X_n = i\}$, 表示 i 访问的次数。

1. 状态 i 常返当且仅当 $P(N_i = \infty | X_0 = i) = 1$, 当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$。
2. 状态 i 暂留当且仅当 $P(N_i < \infty | X_0 = i) = 1$, 当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$。
3. 状态 i 正常返当且仅当 $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{ii}^{(k)} > 0$; (若 i 非周期，则等价于 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 1/\mu_i > 0$)
4. 状态 i 零常返当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ 且 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ (若 i 非周期)。

3.4.3 互达等价类

1. 定义 1: 设 i, j 是两状态, 如果 $i = j$, 或存在 $n \geq 1$, 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 则称 i 可达 j, 记为 $i \to j$。如果 $i \to j$ 并且 $j \to i$, 则称 i, j 互达, 记为 $i \leftrightarrow j$。互达满足自反性, 对称性, 传递性。

   注 对任何状态 i,j, i 和 j 的互达等价类不是相等就是互斥。因此状态空间可以表示为互不相交互达等价类的并。如果状态空间中任意两个状态互达, 则称马尔科夫链不可约。

2. 定义 2: 定义状态 i 的周期 (period) $d(i)$ 为集合 $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 中元素的最大公约数 (若该集合为空集, 则定义 $d(i) = 0$)。如果 $d(i) = 1$, 则称 i 非周期。如果所有 i 非周期, 则称此马尔可夫链非周期。若状态 i 正常返且非周期, 则称 i 为遍历状态。不可约非周期正常返的马尔可夫链称为遍历的马尔可夫链。

注 (一个判断常返的方法 (定理 3.3.3)) 如果 $i \leftrightarrow j$, 则

1. $d(i) = d(j)$;
2. i 常返当且仅当 j 常返;
3. i 正常返当且仅当 j 正常返.

3.4.4 平稳分布

1. 定义: 设 $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ 是一时齐马尔可夫链, 设初始分布为 π, 转移矩阵为 P。若 $\pi P = \pi$, 此时 π 称为 $\{X_n\}$ 的平稳分布。设 $\pi = (\pi_j; j \in I)$ 满足 (1) $\pi_j \geq 0, \sum_{j\in I} \pi_j = 1$; (2) $\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij}, \forall j \in I$, 则称 π 是 $\{X_n\}$ 的平稳分布。

注 一个不存在平稳分布的反例: 如果一个马尔科夫链的所有状态都是暂留态, 那么它通常不存在平稳分布。

2.

注 (引理) (a). 设状态 j 暂留或零常返, 则: (a) 对所有状态 i, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$; (b) 不论初始分布如何, 恒有 $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0$; (c) 设 π 是 $\{X_n\}$ 的平稳分布, 有 $\pi_j = 0$.

(b). 若 $\{X_n\}$ 是有限马尔可夫链, 则至少存在一个正常返态。

(c). 若 $\{X_n\}$ 是不可约的有限马尔可夫链, 则所有状态正常返。

3.

注 (关于常返判断和平均回转时的有用定理) 设 $\{X_n\}$ 不可约。

(a). $\{X_n\}$ 存在平稳分布当且仅当 $\{X_n\}$ 正常返;

(b). 当 $\{X_n\}$ 正常返时, 平稳分布 π 唯一且对任何状态 j 有 $\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$ (其中 μ_{jj} 是状态 j 的平均回转时间)。对任何 i, j:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{ij}^{(k)} = \pi_j$$

(c). 若 $\{X_n\}$ 遍历 (不可约、正常返、非周期), 则对任何状态 i, j 有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$。

4. 开集和闭集:

- 定义: 称 I 的子集 C 为闭集, 如果对于 $i \in C$ 和 $j \notin C$, 都有 $p_{ij} = 0$。
-

定理 3.1 (重要)(a). 如果 i 常返, 则 i 的互达等价类是闭的;

(b). 如果 i 的互达等价类是有限闭集, 则 i 正常返。

3.4.5 吸收概率与平均吸收时间

1. 问题引入: 有限 Markov 链的状态分解: $I = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$ 这里 T 是所有暂留态, $C_1, C_2, \ldots, C_k$ 是所有闭的常返的互达等价类。如果 $X_0 \in T$, 则最终会进入某个 C_i 并将不再离开。问题: 1. 进入 $C_1, \ldots, C_k$ 的概率分别是多少? 2. 进入 $C = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ 的平均时间是多少?
2. 做题方法: 当 Markov 链有多个闭集时, 我们可以利用 Markov 性和全概率公式, 利用 1 步分析法建立方程, 计算被某一个特定闭集吸收的概率。也用类似的方法来计算平均吸收时间。

注 (方法一: 计算吸收概率) 设 $h_i = P$(从状态 i 出发, 最终被吸收集A_{target} 吸收)。1. 定义变量与边界条件:

- 对于 $k \in A_{\text{target}}$: $h_k = 1$。
- 对于 $k \in A_{\text{other}}$ (其他吸收集, 无法到达 A_{target}): $h_k = 0$。
- 对于所有其他暂留状态 i: h_i 是待求未知数。

2. 建立方程 (一步分析): 对于每个非吸收暂留态 i:

$$h_i = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j$$

3. 求解方程组。

注 (方法二: 计算平均吸收时间) 设 $m_i = E$(从状态 i 出发, 首次进入吸收集 C 的时间)。1. 定义变量与边界条件:

- 对于 $k \in C$: $m_k = 0$。
- 对于所有其他暂留状态 i: m_i 是待求未知数。

2. 建立方程 (一步分析): 对于每个非吸收暂留态 i:

$$m_i = 1 + \sum_{j \in I} p_{ij} m_j$$

3. 求解方程组。

4 泊松过程与布朗运动

4.1 独立增量过程

定义 4.1 对 $\forall n$ 和 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 若随机变量序列 $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立, 则称随机过程 $\{X(t)\}$ 为独立增量过程。

- 在互不重叠的区间上, 状态的增量是相互独立的。

4.1.1 独立增量过程的性质

若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程, 且 $X(0) = 0$, 则:

1. $X(t)$ 的有限维分布函数族可以由增量 $X(t) - X(s)$ $(0 \leq s < t)$ 的分布所确定。

2. 设 $D_X(t) = \mathrm{Var}(X(t))$ 已知, 则协方差函数 $C_X(s,t) = D_X(\min(s,t))$。
3. 若对 $\forall h$ 和 $\forall s < t$, $X(t+h) - X(s+h) \overset{d}{=} X(t) - X(s)$ (即增量的分布仅依赖于时间差 $t-s$), 称 $\{X(t)\}$ 为平稳增量过程 (或齐次增量过程)。
4. 独立增量过程 + 平稳增量过程 = 平稳 (齐次) 独立增量过程。

4.2 泊松过程

以 $N(t)$ 表示在时间间隔 $(0,t]$ 内事件发生的数目。$\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个取非负整数值的、时间连续的随机过程, 称为计数过程。

定义 4.2 (定义 1: 泊松过程) 计数过程 $\{N(t)\}$ 称作强度为 λ 的泊松过程, 如果:

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t)\}$ 是独立增量过程。
3. $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$ (稀有性)
4. $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$ (非聚集性)

定义 4.3 (定义 2: 泊松过程 (等价定义)) 称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, 若满足:

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t)\}$ 是独立增量过程。
3. 对任意的 $t > s \geq 0$, $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda(t-s))$。

4.2.1 泊松过程的性质

1. $E[N(t)] = \lambda t$
2. $D[N(t)] = \lambda t$
3. $C_N(s,t) = \mathrm{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda \min(s,t)$
4. $R_N(s,t) = C_N(s,t) + \mu_N(s)\mu_N(t) = \lambda \min(s,t) + \lambda^2 st$, for $s,t \geq 0$.
5. 对 $t > s \geq 0, n \geq m$:

$$P\{N(s) = m | N(t) = n\} = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

6. 对 $t > s \geq 0, n \geq m$: (因为 $N(t) - N(s)$ 独立于 $N(s)$)

$$P\{N(t) = n | N(s) = m\} = P\{N(t) - N(s) = n - m\} = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!}$$

4.2.2 与泊松过程相联系的若干分布

1. 等待时间: W_n 是第 n 个事件发生的时刻。
   - $F_{W_n}(t) = P(W_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, t \geq 0$.
   - 概率密度函数: $f_{W_n}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, t > 0$, 即 $W_n \sim \Gamma(n, \lambda)$。
2. 相继到达时间间隔 (Inter-arrival Times): 记 $T_i = W_i - W_{i-1}$ (for $i = 1, 2, \ldots, W_0 = 0$). 特别地, $T_1 = W_1$ 服从指数分布: $f_{W_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$.

定理 4.1 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程当且仅当其时间间隔 $T_1, T_2, \ldots$ 独立同分布，且服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。

3. 条件事件发生时刻：
$$P\{T_1 \leq s | N(t) = 1\} = \frac{s}{t}, \quad 0 < s \leq t.$$
即若已知在 $(0, t]$ 内恰有一事件发生，则此事件发生的时刻在 $(0, t]$ 内均匀分布。$f_{T_1|N(t)=1}(s) = \frac{1}{t}, \quad 0 < s < t.$

4.2.3 泊松过程合成和分解

合成 设 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 是强度分别为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程，且相互独立，则 $\{N(t) = N_1(t) + N_2(t)\}$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程。

分解 设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程。若每个事件独立地以概率 p 属于类型 1，以概率 $1-p$ 属于类型 2。令 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别表示到时刻 t 为止类型 1 和类型 2 事件发生的个数。则 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 分别是强度为 λp 和 $\lambda(1-p)$ 的泊松过程，且它们相互独立。

4.2.4 非齐次泊松过程

定义 4.4 计数过程 $\{N(t)\}$ 称作强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程，如果：

1. $N(0) = 0$

2. $\{N(t)\}$ 是独立增量过程。
3. $P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$
4. $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$

定义 4.5 (等价定义) $\{N(t),t\geq 0\}$ 是强度为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程当且仅当:

1. $N(0)=0$
2. $\{N(t)\}$ 是独立增量过程。
3. 对任意的 $t>s\geq 0$, $N(t)-N(s)\sim \text{Poisson}\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)$。

令 $m(t)=\int_0^t \lambda(u)du$ 为均值函数, 则 $N(t)-N(s)\sim \text{Poisson}(m(t)-m(s))$。

4.3 布朗运动

4.3.1 布朗运动的定义及数字特征

定义 4.6 随机过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 称为布朗运动 (Wiener Process) ，如果:

1. $X(0)=0.$
2. $\{X(t)\}$ 独立增量。
3. 对于任意 $t>s\geq 0$, $X(t)-X(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s)).$
4. 样本轨道 $X(t,\omega)$ 在 t 上几乎处处连续。

如果 $\sigma^2=1$, 则为标准布朗运动, 记为 $\{B(t);t\geq 0\}$。

4.3.2 性质

1. 标准布朗运动 (SBM) 是一个齐次 (平稳) 独立增量过程。
2. 标准布朗运动是一个高斯过程。其分布由其均值函数和协方差函数完全确定。
3. 标准布朗运动 $\{B(t)\}$ 的数字特征:
   - 均值: $\mu_B(t) = E[B(t)] = 0$。
   - 方差: $D_B(t) = D[B(t)] = t$。
   - 协方差: $C_B(s,t) = \text{Cov}(B(s), B(t)) = \min(s,t)$。(由于 $E[B(t)] = 0$, 所以自相关函数 $R_B(s,t) = C_B(s,t)$)。
4. 标准布朗运动的等价定义: 一个具有连续样本路径的随机过程 $\{B(t); t \geq 0\}$ 是标准布朗运动, 当且仅当它是一个高斯过程, 且满足 $E[B(t)] = 0$ 和 $E[B(t)B(s)] = \min(s,t)$。
5. 马尔可夫性: 对于任意固定的 $s > 0$, 过程 $X_s(t) = B(t+s) - B(s)$ (其中 $t \geq 0$) 是一个标准布朗运动, 并且独立于 $\{B(u) : u \leq s\}$。
6. 自相似性 (标度性质): 对于任意 $a \neq 0$, $X(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} B(at)$ 也是标准布朗运动。(原 OCR 为 $X(t) = \frac{1}{a} B(a^2 t)$, 此为 $a > 0$ 时的情况)
7. 时间反演: 令

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} tB(1/t), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

   那么 $\{\tilde{B}(t); t \geq 0\}$ 是一个标准布朗运动。

4.3.3 首次击中时间

令 $T_a = \inf\{t : t > 0, B(t) = a\}$ 为标准布朗运动 $\{B(t); t \geq 0\}$ 首次达到水平 $a \neq 0$ 的时间。T_a 是一个随机变量，其累积分布函数 (CDF) 为 $F_{T_a}(t) = P(T_a \leq t)$。

情况 1: $a > 0$ 根据反射原理，对于 $a > 0$ 和 $t > 0$，有：

$$P(T_a \leq t) = P\left(\max_{0\leq s\leq t} B(s) \geq a\right) = 2P(B(t) \geq a)$$

由于标准布朗运动 $B(t) \sim N(0, t)$, 因此 $B(t)/\sqrt{t} \sim N(0, 1)$。所以,

$$P(B(t) \geq a) = P\left(\frac{B(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{a}{\sqrt{t}}\right) = P\left(N(0, 1) \geq \frac{a}{\sqrt{t}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布的累积分布函数。因此，对于 $a > 0$ 和 $t > 0$:

$$F_{T_a}(t) = P(T_a \leq t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

情况 2: $a < 0$ 如果 $a < 0$,我们可以考虑另一个标准布朗运动 $B'(t) = -B(t)$。则事件 $\{B(t)$ 首次达到$a\}$ 等价于事件 $\{B'(t)$ 首次达到 $-a\}$。由于 $a < 0$，则 $-a > 0$。令 $a' = -a = |a| > 0$。令 $T_a^{(B)}$ 表示 $B(t)$ 首次达到 a 的时间，$T_{a'}^{(B')}$ 表示 $B'(t)$ 首次达到 a' 的时间。则 $T_a^{(B)} = T_{a'}^{(B')}$。由于 $B'(t)$ 也是一个标准布朗运动，我们可以应用情况 1 的结果：

$$P(T_{a'}^{(B')} \leq t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a'}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

所以，对于 $a < 0$ 和 $t > 0$:

$$F_{T_a}(t) = P(T_a \leq t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{-a}{\sqrt{t}}\right)\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{|a|}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

统一表达式 综合以上两种情况，对于任意 $a \neq 0$ 和 $t > 0$，首次击中时间 T_a 的累积分布函数为:

$$F_{T_a}(t) = P(T_a \leq t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{|a|}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

并且，对于 $t \leq 0$, $F_{T_a}(t) = 0$ (因为首次击中时间必然是正的)。

与最大/最小值过程的关系

- 对于 $a > 0$:

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} B(s) \geq a\right) = P(T_a \leq t) = 2P(B(t) \geq a) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

- 对于 $a < 0$:

$$P\left(\min_{0\leq s\leq t} B(s) \leq a\right) = P(T_a \leq t) = 2P(B(t) \leq a) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$$

注意: $P(B(t) \leq a) = \Phi(a/\sqrt{t})$。而 $2(1 - \Phi(|a|/\sqrt{t})) = 2(1 - \Phi(-a/\sqrt{t})) = 2(1 - (1 - \Phi(a/\sqrt{t}))) = 2\Phi(a/\sqrt{t})$。所以两种表达是一致的。

4.3.4 布朗运动的极值分布

令 $X(t) = |\min_{0\le s\le t} B(s)|$, 求 $F_{X(t)}(y)$。

注 $X(t) = -\min_{0\le s\le t} B(s)$.

令 $B_1(s) = -B(s)$, 它也是一个标准布朗运动。

则 $X(t) = \max_{0\le s\le t} B_1(s)$。

对于 $y > 0$,

$$P(X(t) \le y) = P\left(\max_{0\le s\le t} B_1(s) \le y\right).$$

$P\left(\max_{0\le s\le t} B_1(s) \le y\right) = 1 - P\left(\max_{0\le s\le t} B_1(s) > y\right)$.

$= 1 - 2P(B_1(t) \ge y) = 1 - 2\left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1.$

所以,

$$F_{X(t)}(y) = \begin{cases} 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

4.3.5 布朗桥 (Brownian Bridge)

定义 4.7 令 $X(t) = B(t) - tB(1)$, 其中 $0 \le t \le 1$。过程 $\{X(t), 0 \le t \le 1\}$ 称为布朗桥。(它是一个在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 时被"固定"为 0 的布朗运动)。

性质:

1. $X(0) = B(0) - 0 \cdot B(1) = 0$。$X(1) = B(1) - 1 \cdot B(1) = 0$。
2. $\{X(t)\}$ 是一个高斯过程 (因为 $B(t)$ 是高斯过程)。
3. 均值: $E[X(t)] = E[B(t)] - tE[B(1)] = 0 - t \cdot 0 = 0$。协方差: 对于 $0 \le s \le t \le 1$, $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \min(s,t) - st = s(1-t)$。

5 平稳过程的定义

5.1 严平稳过程

5.1.1 定义

若随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 对任意的 $n = 1, 2, \ldots$, 任意的 $t_1, \ldots, t_n \in T$ 和任意实数 h, 使得 $t_i + h \in T$, 随机向量 $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ 和 $(X(t_1 + h), \ldots, X(t_n + h))$ 具有相同的分布函数, 则称此过程为严平稳过程。

5.1.2 严平稳过程的等价条件

$\{X_t\}$ 是严平稳过程当且仅当

1. 所有的 X_t 同分布。
2. 对任意 $n \geq 2$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ 的分布仅与时间差 $t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}$ 有关, 而与起始时间 t_1 无关。

5.1.3 严平稳过程的数字特征

设严平稳过程 $\{X(t)\}$ 是二阶矩过程, 则

1. 均值: $\mu_X(t) = E[X(t)] = E[X(0)] = \mu_X$ (常数)
2. 自相关函数: $R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(0)X(\tau)] = R_X(\tau)$ (仅与 τ 有关)

5.2 宽平稳过程

5.2.1 定义

给定二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$, 如果对任意的 $t, t+\tau \in T$,

1. $E[X(t)] = \mu_X$ (常数)
2. $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ (仅与 τ 有关)

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为宽平稳过程。

5.2.2 严平稳和宽平稳的等价关系

1. 严平稳过程 + 二阶矩存在 $\Rightarrow$ 宽平稳过程; 宽平稳过程 + 正态过程 $\Rightarrow$ 严平稳过程;
2. 平稳过程通常指宽平稳过程。

5.2.3 宽平稳过程的性质

如果 $\{X(t)\}$ 是宽平稳过程, 那么

1. $E[X(t)] = \mu_X$ (常数)
2. $E[X^2(t)] = R_X(0)$ (常数, 平均功率)
3. $D[X(t)] = R_X(0) - \mu_X^2$ (常数, 方差)
4. $E[X_{t_1} X_{t_2}] = R_X(t_2 - t_1)$
5. $\mathrm{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = R_X(t_2 - t_1) - \mu_X^2 = C_X(t_2 - t_1)$

5.2.4 联合 (宽) 平稳

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个平稳过程。如果它们的互相关函数也只是时间差的函数, 即 $R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau)$, 称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关的, 或称这两个过程是联合 (宽) 平稳的。

5.3 相关函数的性质

设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关过程:

1. $R_X(0) = E[X^2(t)] \geq 0$
2. $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$ (自相关函数是偶函数)
   $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$
3. $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ (自相关函数在 $\tau = 0$ 处取得最大模值)
   $|C_X(\tau)| \leq C_X(0) = \sigma_X^2$ (自协方差函数)
   $|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0)$ (柯西-施瓦茨不等式)
4. $R_X(\tau)$ 是非负定的: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_X(t_i - t_j)a_i a_j \geq 0$ for any a_i, t_i.
5. $X(t)$ 是周期为 T_0 的平稳过程 (均方意义) $\Leftrightarrow$ $R_X(\tau)$ 是周期为 T_0 的函数。

6 各态历经性

6.1 时间均值和时间自相关函数

设 $\{X(t) : -\infty < t < \infty\}$ 为一个随机过程 (通常在讨论时间平均时，我们关注的是其某个样本函数)。其时间均值和时间自相关函数定义如下:

时间均值 (Time Average)

对于过程的一个样本函数 $x(t)$，其时间均值定义为: :

$$\langle x(t)\rangle_{t\geq 0} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

时间自相关函数 (Time Autocorrelation Function)

对于过程的一个样本函数 $x(t)$，其时间自相关函数定义为:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle_{t\geq 0} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

6.2 各态历经性

设 $X(t)$ 是一平稳过程:

1. 均值具有各态历经性: $P\{\langle X(t)\rangle = \mu_X\} = 1$
2. 自相关函数具有各态历经性: $P\{\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = R_X(\tau)\} = 1, \forall\tau$
3. 各态历经过程: 均值和自相关函数都具有各态历经性。

6.3 均值各态历经定理

6.3.1 定义

设 $\{X(t) : -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程, 则均值具有各态历经性的充要条件是:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C_X(\tau)d\tau = 0$$

(其中 $C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2$ 是自协方差函数)

6.3.2 推论 (均值各态历经性判据)

对于广义平稳过程 $X(t)$，其均值为 μ_X，自相关函数为 $R_X(\tau)$，自协方差函数为 $C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2$。判断其均值是否具有各态历经性的一个常用推论如下：

前提条件： $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau)$ 存在。

- **若** $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \mu_X^2$，则均值具有各态历经性。
- **若** $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) \neq \mu_X^2$，则均值不具有各态历经性。

6.4 自相关函数各态历经定理

设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程, 对任给的 τ, $\{X(t)X(t+\tau)\}$ 也是平稳过程, 则 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 具有各态历经性的充要条件是:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [B(\tau_1) - R_X^2(\tau)]d\tau_1 = 0$$

其中 $B(\tau_1) = E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$。

6.5 均值各态历经定理 - 离散

设离散平稳过程 $\{X_n\}$, 均值具有各态历经性的充要条件是:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} C_X(k) = 0$$

7 平稳过程的功率谱密度

7.1 傅里叶变换基础

傅里叶变换 (Fourier Transform):

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

傅里叶逆变换 (Inverse Fourier Transform):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

帕塞瓦尔等式 (Parseval’s Theorem):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_X(\omega)|^2 d\omega$$

7.1.1 确定性信号的功率与谱密度

截尾信号的傅里叶变换:

$$F_X(\omega, T) = \int_{-T}^{T} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

确定性信号的功率谱密度:

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}|F_X(\omega, T)|^2$$

确定性信号的平均功率:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega$$

7.2 平稳随机过程的功率谱密度

定义 7.1 (功率谱密度) 对于平稳随机过程 $X(t)$，其功率谱密度定义为：

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left[\left|\int_{-T}^{T} X(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2\right]$$

其中 $F_X(\omega, T) = \int_{-T}^{T} X(t)e^{-i\omega t}dt$ 是过程 $X(t)$ 在 $[-T, T]$ 上的傅里叶变换。

平稳过程的平均功率 (总功率): 与自相关函数在零点的关系：

$$E[X^2(t)] = R_X(0)$$

通过功率谱密度计算：

$$E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega$$

7.3 功率谱密度的性质 (维纳—辛钦公式)

定理 7.1 (维纳—辛钦定理) 平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 与其功率谱密度 $S_X(\omega)$ 构成一个傅里叶变换对。

主要性质如下：

1. **实偶性与非负性:** $S_X(\omega)$ 是关于 ω 的实的、非负的偶函数，即：
   - $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$ (偶函数)
   - $S_X(\omega) \geq 0$ (非负性)
   - $S_X(\omega)$ 是实函数。
2. **傅里叶变换对关系:**

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$
$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

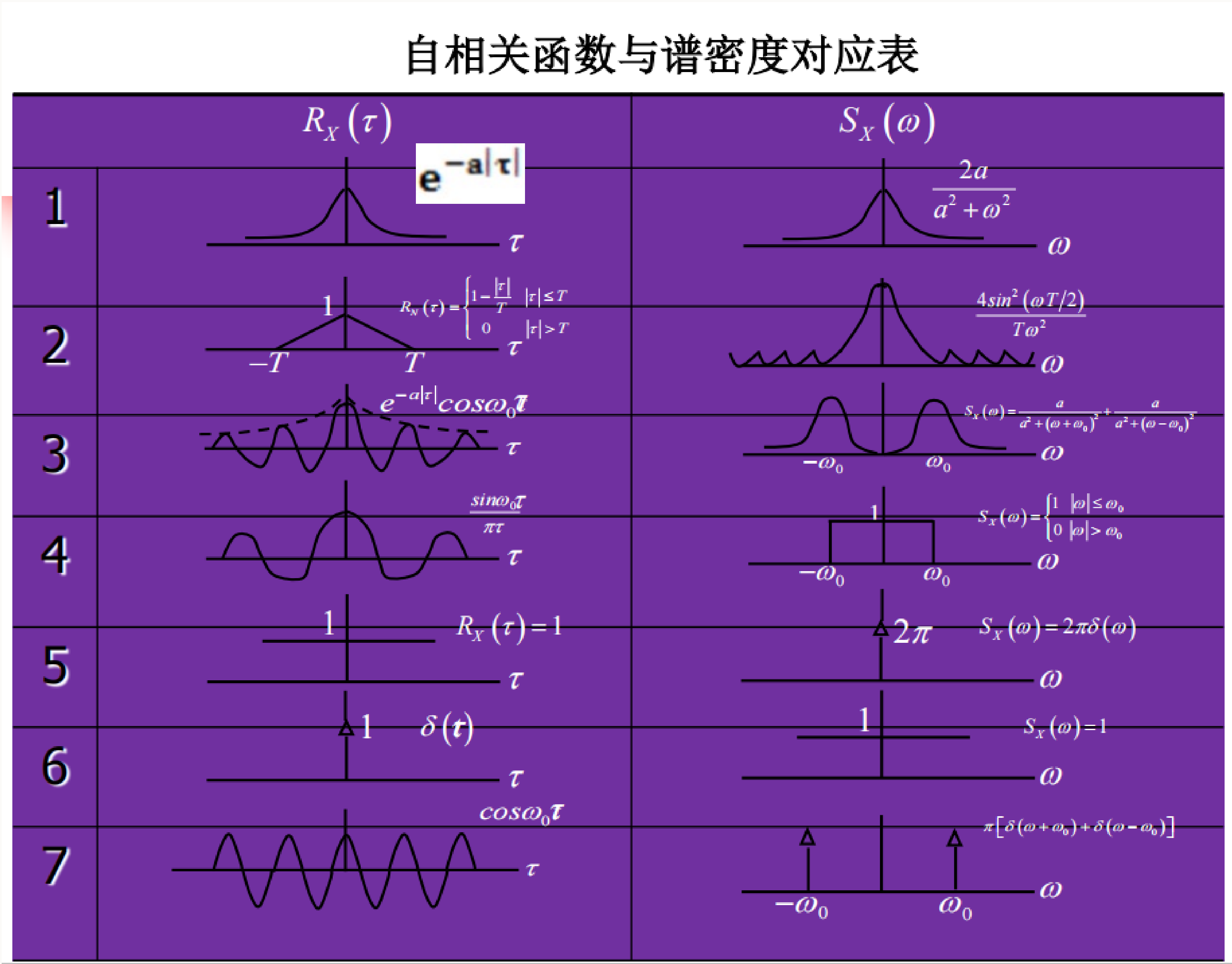

图 1: 常用的自相关函数与谱密度函数对应表

7.4 傅里叶变换的对偶性 (Duality Property)

傅里叶变换的对偶性（或称对称性）描述了时域函数与其频域表示在变换形式上的内在联系。

7.4.1 性质表述 (基于角频率 ω)

若信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\omega)$:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

其中 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$.

则对偶性表明，如果将原频域函数 $X(\omega)$ 中的变量 ω 替换为 t 形成新的时域函数 $X(t)$，那么这个新的时域函数 $X(t)$ 的傅里叶变换为：

$$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega)$$

7.4.2 性质表述 (基于频率 f)

若傅里叶变换定义为 $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\, dt$ 和 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\, df$，则对偶性表述为：若 $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$, 则 $X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$.

7.5 δ 函数 (单位冲激函数) 与其谱特性

定义 7.2 (δ 函数) $\delta(t) = 0$, 当 $t \neq 0$, 且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$.

筛选性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau_0) f(t)\, dt = f(\tau_0)$$

傅里叶变换对示例:

- 若 $R_X(\tau) = A\delta(\tau)$, 则 $S_X(\omega) = A$.
- 若 $R_X(\tau) = A$, 则 $S_X(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$.

定理 7.2 (均值与功率谱密度的关系) 对于一个广义平稳随机过程 $X(t)$，其均值为 $\mu_X = E[X(t)]$，自相关函数为 $R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$，功率谱密度为 $S_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$.

1. 随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 可以表示为零均值过程 $Y(t) = X(t) - \mu_X$ 的自相关函数 $R_Y(\tau)$ 与均值平方之和：

$$R_X(\tau) = R_Y(\tau) + \mu_X^2$$

2. 随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度 $S_X(\omega)$ 可以表示为零均值过程 $Y(t)$ 的功率谱密度 $S_Y(\omega)$ 与一个在 $\omega = 0$ 处的冲激函数之和：

$$S_X(\omega) = S_Y(\omega) + 2\pi\mu_X^2\delta(\omega)$$

其中 $S_Y(\omega) = \mathcal{F}\{R_Y(\tau)\}$，且 $\delta(\omega)$ 是狄拉克 δ 函数。

3. 因此，随机过程 $X(t)$ 的均值 μ_X 非零的充要条件是其功率谱密度 $S_X(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处包含一个冲激函数项 $2\pi\mu_X^2\delta(\omega)$。
4. 推论：如果功率谱密度 $S_X(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处不包含冲激函数 $\delta(\omega)$ (即 $S_X(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处是有限的，或者 $\delta(\omega)$ 项的系数为零)，则该随机过程的均值 $\mu_X = 0$。

7.6 白噪声及其特性

定义 7.3 (白噪声) 均值为零，且功率谱密度为常数 $S_X(\omega) = S_0$ (其中 $S_0 > 0$) 的平稳过程。

自相关函数:

$$R_X(\tau) = S_0\delta(\tau)$$

这意味着不同时刻的白噪声是不相关的。

7.7 限带白噪声

定义 7.4 (限带白噪声) 谱密度仅在某些有限频率范围内取非零常数的平稳过程。

例 7.1 (理想低通白噪声) 功率谱密度为：

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \le \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$

其自相关函数为:

$$R_X(\tau) = S_0 \frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\pi\tau} = \frac{S_0\omega_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_1 \tau}{\pi}\right)$$

(注: $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ 或 $\frac{\sin(x)}{x}$, 这里采用 $\frac{\sin(\omega_1\tau)}{\pi\tau}$ 形式)

7.8 互功率谱密度 (基于维纳—辛钦公式的推广)

对于两个联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，其互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 和互功率谱密度 $S_{XY}(\omega)$ 也构成傅里叶变换对:

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

性质:

1. **共轭对称性:** $S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega)$ (其中 $S_{YX}^*(\omega)$ 表示 $S_{YX}(\omega)$ 的复共轭)。
2. **实部与虚部奇偶性:** $S_{XY}(\omega)$ 的实部 $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$ 是偶函数，虚部 $\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$ 是奇函数。
3. **相关幅度的约束 (施瓦茨不等式形式):** $|S_{XY}(\omega)|^2 \leq S_X(\omega) S_Y(\omega)$.

8 线性系统中的平稳过程

8.1 线性时不变 (LTI) 系统

- **线性:**

$$L[ax_1(t) + \beta x_2(t)] = aL[x_1(t)] + \beta L[x_2(t)]$$

- **时不变:** 若 $y(t) = L[x(t)]$, 则

$$y(t+\tau) = L[x(t+\tau)]$$

- **频率响应:** $H(\omega)$
  若输入 $x(t) = e^{i\omega t}$, 则输出

$$y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

- **脉冲响应:**

$$h(t) = L[\delta(t)]$$

- **输出:**

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- **关系 ($H(\omega)$ 与 $h(t)$ 的关系):**

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$$

8.2 LTI 系统输出过程的均值和相关函数

设输入为平稳过程 $X(t)$ (均值 μ_X, 自相关函数 $R_X(\tau)$), 输出过程为 $Y(t)$。

- $Y(t)$ 是平稳过程。
- $(X(t), Y(t))$ 是联合平稳过程。

均值:

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du = \mu_X H(0)$$

互相关函数:

$$\begin{aligned}
R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_X(\tau - u)du \\
&= R_X(\tau) * h(\tau)
\end{aligned}$$

注 (关于定义的说明) 互相关函数定义为 $R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)]$ 时，其傅里叶变换对应 $S_{XY}(\omega) = H(\omega)S_X(\omega)$，卷积形式为 $R_X(\tau) * h(\tau)$。如果采用定义 $R_{XY}(\tau) = E[X(t-\tau)Y(t)]$，则卷积形式会变为 $R_X(\tau) * h(-\tau)$。本笔记遵循前一种定义。

自相关函数:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) R_{XY}(\tau+v) dv \quad (\text{利用} R_{XY} \text{ 定义}) \\ &= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}$$

8.3 LTI 系统输出过程的功率谱密度

设输入平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度为 $S_X(\omega)$, 输出过程为 $Y(t)$。

输出谱密度:

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)$$

互谱密度:

$$S_{XY}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega)$$

$$S_{YX}(\omega) = H^*(\omega) S_X(\omega) \quad (H^*(\omega) \text{ 表示} H(\omega) \text{ 的共轭})$$