自动控制理论

Automatic Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第五章 Chapter 5

根轨迹分析法 (Root Locus)

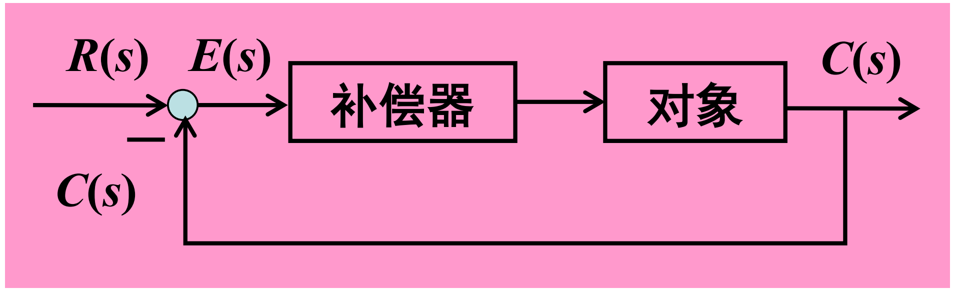
第五章主要内容

- 根轨迹概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

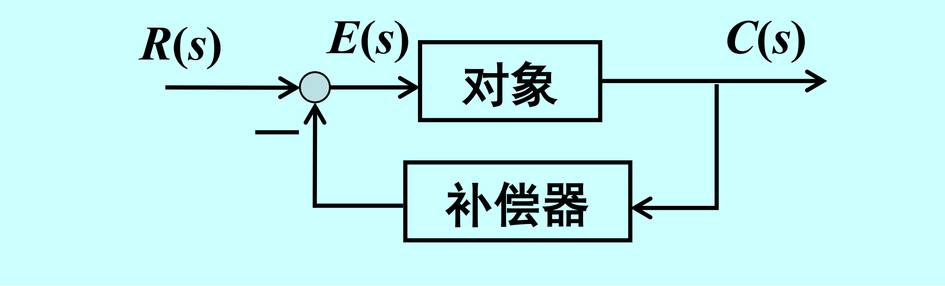
基于根轨迹的系统补偿器设计

- 从综合设计到补偿器设计
- 附加极点
- 附加极点与零点
- 控制器设计
- 控制器设计示例

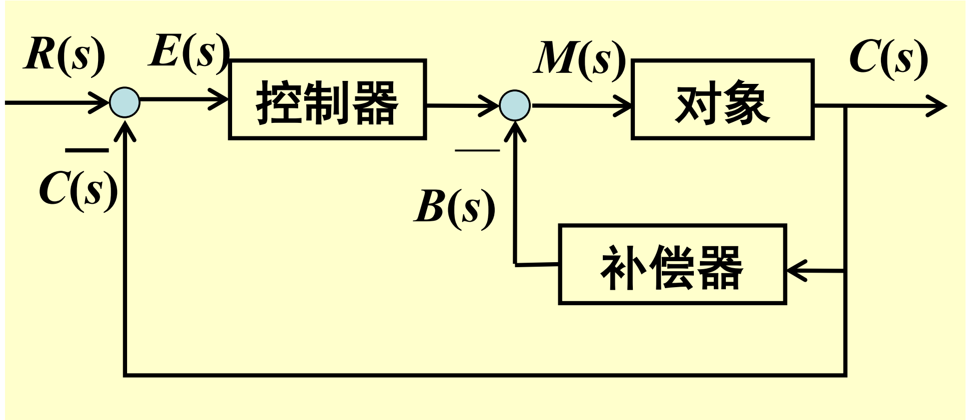
从综合设计到补偿器设计



串联补偿



反馈补偿

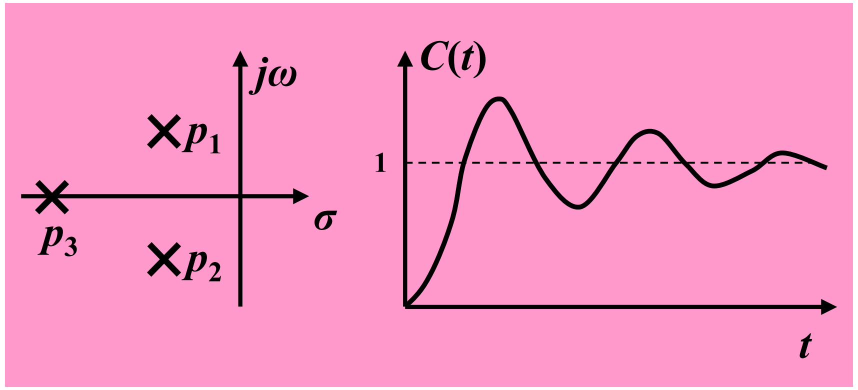


局部反馈补偿

……….

附加极点

考虑一个具有复数主导极点和一个附加实数极点p_3的系统，如图所示，闭环传递函数为



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s-p_3)}$$

$$K=-\omega_n^2 p_3$$

单位阶跃输入下的系统输出响应为

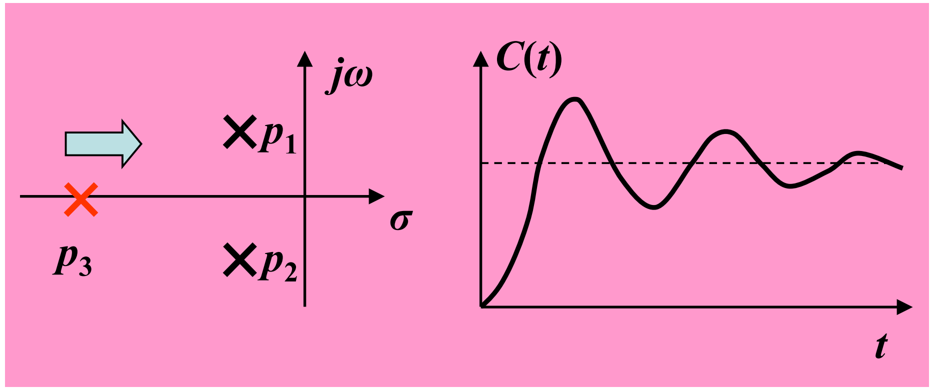
$$c(t)=1+2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\varphi\right)+A_3e^{p_3t}$$

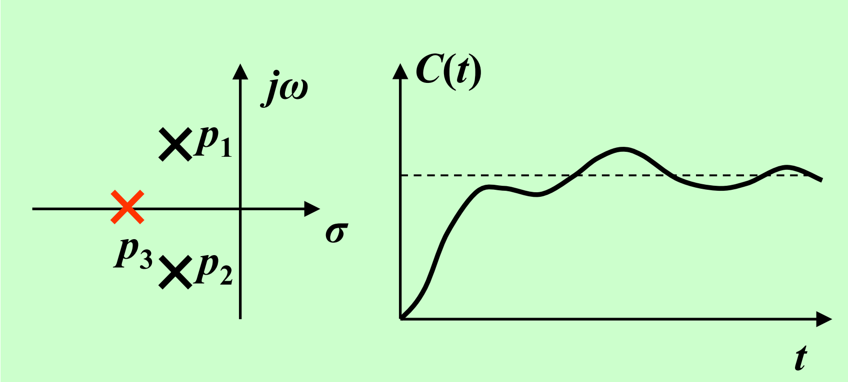
$$A_3=\left.\frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3}=\left.\frac{-\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=p_3}<0$$

附加极点

系统的响应：

$$c(t)=1+2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)+A_3e^{p_3t}$$



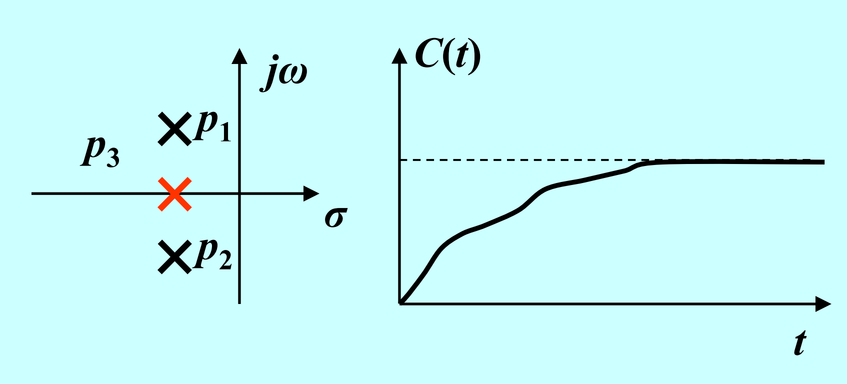


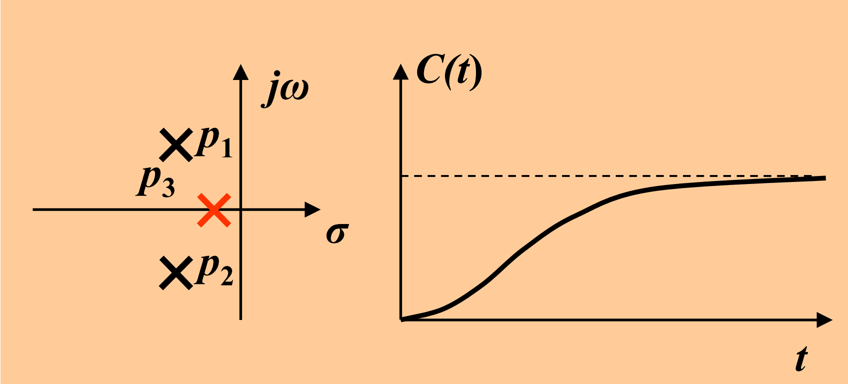
- 当极点p_3 向右侧移动， $|A_3|$ 增大，超调减少。
- 当p_3接近但仍然在复数极点的左侧时，时域上第一个峰值小于稳态值，最大超调可能出现在第二个峰值或后面的峰值。

$$A_3=\left.\frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3}=\left.\frac{-\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=p_3}<0$$

附加极点

系统的响应： $c(t)=1+2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)+A_3e^{p_3t}$





- 当p_3位于复数极点在实轴的投影处，响应是单调的，没有超调。这代表着临界阻尼状态，复数极点则导致时域响应出现波纹(ripple)。
- 当p_3位于复数极点的右侧， p_3的作用反而超过其它2个极点， 系统响应特点为过阻尼。

$$A_3=\left.\frac{-\omega_n^2p_3}{s(s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3}=\left.\frac{-\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2}\right|_{s=p_3}<0$$

附加极点

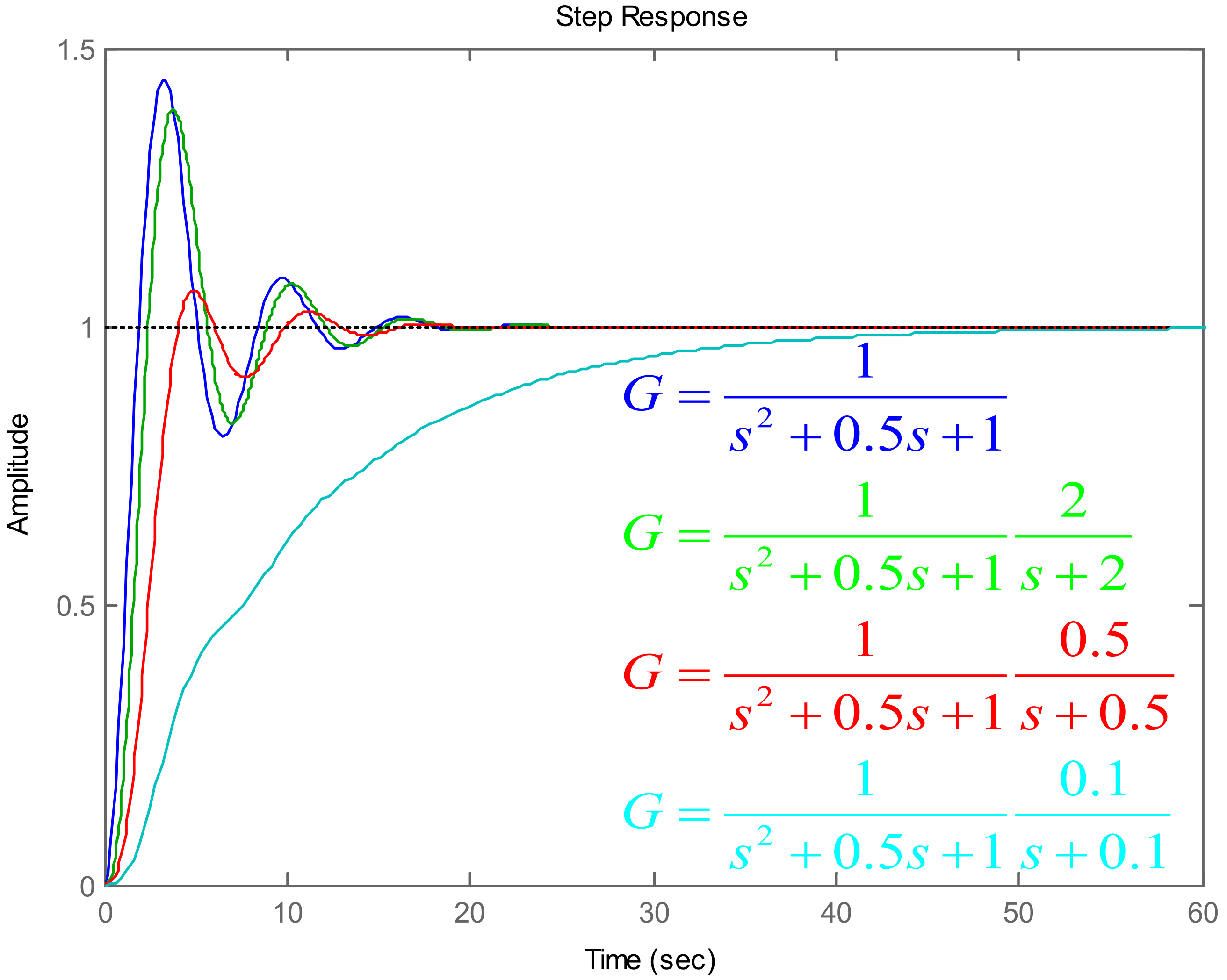
$$c(t)=1+2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)+A_3e^{p_3t}$$

$$A_3=\left.\frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3}=\left.\frac{-\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=p_3}<0$$

结论：

- ❖ 由于实数极点 p_3 作用的瞬态项为 $A_3e^{p_3t}$，其中 A_3 <0。 因此超调 M_p减少，稳态时间 T_s有可能增大或减少。
- ❖ 幅值A_3 取决于p_3 相对于复数极点的位置。 p_3 越靠左侧，幅值 A_3越小，对系统响应的影响越小。
- ❖ 若极点在复数主导极点左侧5倍以远的位置，对系统响应的影响可以忽略不计。

附加极点



$s_{1,2}=-0.25\pm j0.968$

$s_{3-g}=-2$

$s_{3-r}=-0.5$

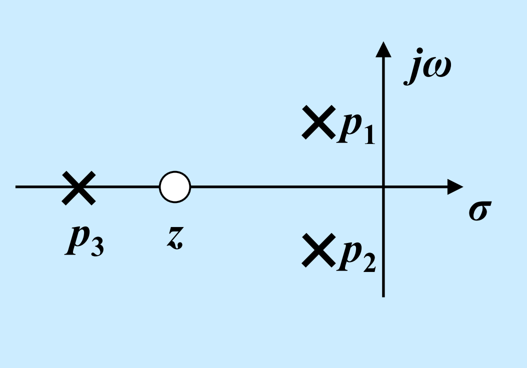
$s_{3-c}=-0.1$

附加极点与零点

除了增加实数极点之外，再增加一个实数零点，则会进一步影响系统的**瞬态响应**。

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K(s-z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s-p_3)}$$

$$K=\frac{\omega_n^2 p_3}{z}$$



单位阶跃响应

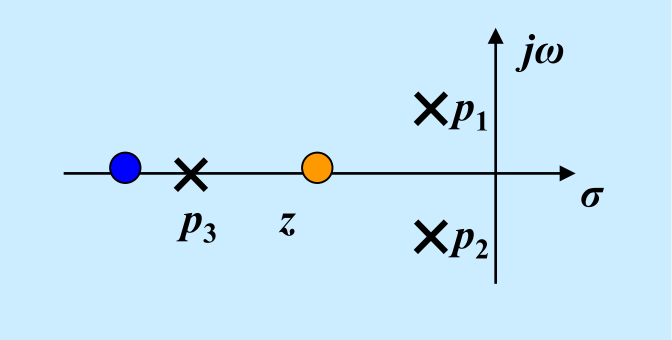
$$c(t)=1+2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)+A_3e^{p_3t}$$

$$A_3=\left.\frac{\omega_n^2\dfrac{p_3}{z}(s-z)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3}=\left.\frac{\omega_n^2\left(\dfrac{p_3}{z}-1\right)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=p_3}=K_1\left(\frac{p_3}{z}-1\right)$$

$$K_1>0$$

附加极点与零点

$$A_3 = K_1\left(\frac{p_3}{z} - 1\right)$$



A_3 的符号取决于实数零极点的相对位置：

1) 若零点z在p_3的左侧，则A_3为负。

2) 若零点z在p_3的右侧，则A_3为正。

A_3 的幅值正比于 p_3 到 z的距离。

3) 若零点z接近于极点，则A_3很小，该项瞬态响应则相对较小。

附加极点与零点

结论：

- 若零点 z 在极点p_3的左侧，A_3 为负，响应与仅有复数极点的系统响应相似，超调减小，峰值时间加大。

- 若零点 z 在极点p_3的右侧，A_3 为正，超调比仅有复数极点的系统响应大，峰值时间减小。

$$A_3 = \left.\frac{\omega_n^2 \dfrac{p_3}{z}(s-z)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3} = \left.\frac{\omega_n^2\left(\dfrac{p_3}{z}-1\right)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=p_3} = K_1\left(\frac{p_3}{z}-1\right)$$

$$K_1 > 0$$

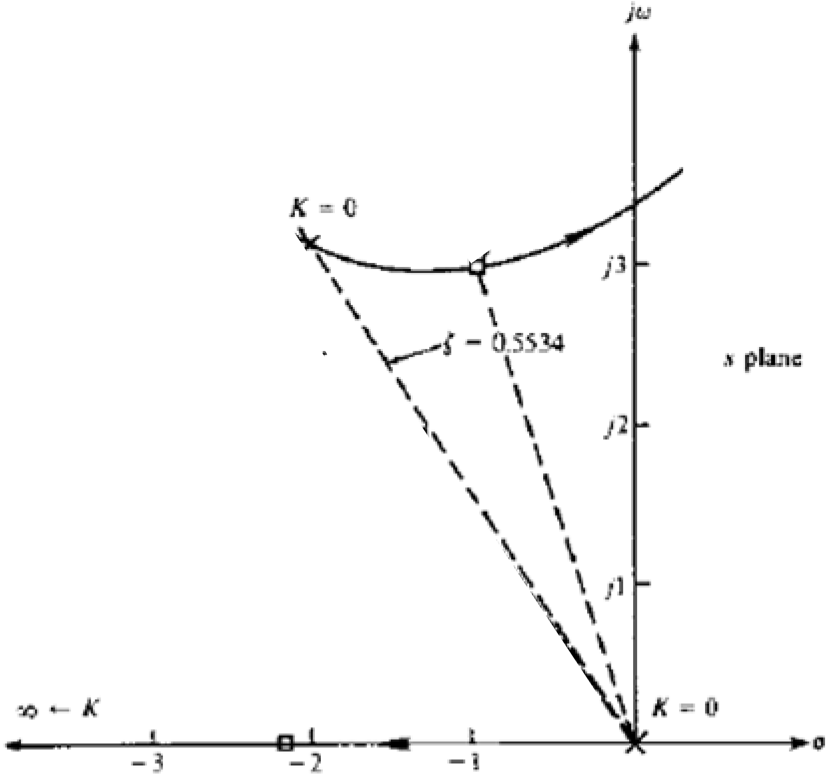
附加极点与零点

例5-28 考虑一单位负反馈系统开环传递函数为

$$G_x(s)=\frac{K_x}{s(s^2+4.2s+14.4)}=\frac{K_x}{s(s+2.1+j3.1607)(s+2.1-j3.1607)}$$

设计控制器，使闭环系统单位阶跃响应满足：

$$K_1=K_x/14.4,\quad K_1\geq 1.5s^{-1}$$
$$1<M_p\leq 1.123,$$
$$T_s\leq 3s,$$
$$T_p\leq 1.6s$$



解：1）根据开环传递函数绘制根轨迹如图示

附加极点与零点

确定 $\zeta_D,\omega_d,\omega_n$ 采用下列公式

$$M_p = 1.123 = 1 + \exp\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \rightarrow \zeta_D = 0.555$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \rightarrow \omega_d > 1.9636$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta_D\omega_n} \quad \rightarrow \zeta\omega_n > 1.3333$$

由 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$= \sigma \pm j\omega_d$

闭环系统的主导极点：

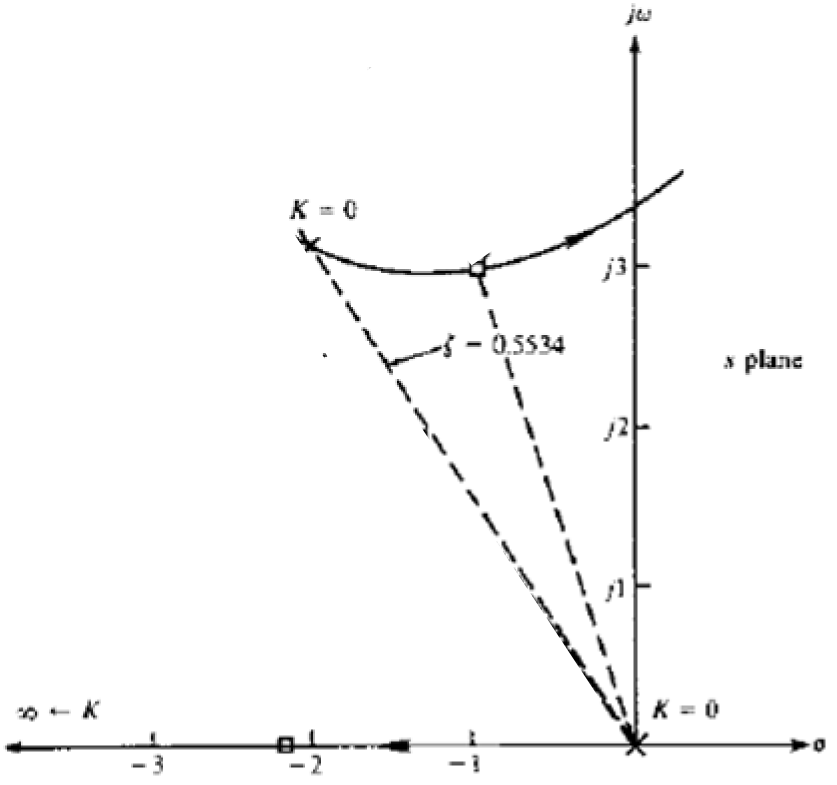
$$s_{1,2} = -1.3333 \pm j1.9984$$

由图可以看出：无法得到期望的主导极点，必须进行再次设计。

$K_1 = K_x/14.4$， $K_1 \geq 1.5s^{-1}$

$1 < M_p \leq 1.123$,

$T_s \leq 3s$, $\quad T_p \leq 1.6s$



附加极点与零点

$$K_1 = K_x / 14.4,\quad K_1 \ge 1.5 s^{-1}$$
$$1 < M_p \le 1.123,$$
$$T_s \le 3s,\qquad T_p \le 1.6s$$

第二次设计：

由于第三个根p_3对应瞬态响应 $A_3 e^{p_3 t}$，若该瞬态响应为负，则将降低由复数极点产生的超调，因此，可以选择较小的阻尼比ζ，第三个极点的作用是使得超调在要求的范围内。

为了同时满足K_1>1.5，根轨迹增益K_x>1.5×14.4=21.6，因此根轨迹上选择K_x=22的根 $s_{1,2} = -1 \pm j3$，相应的K_1=1.528。

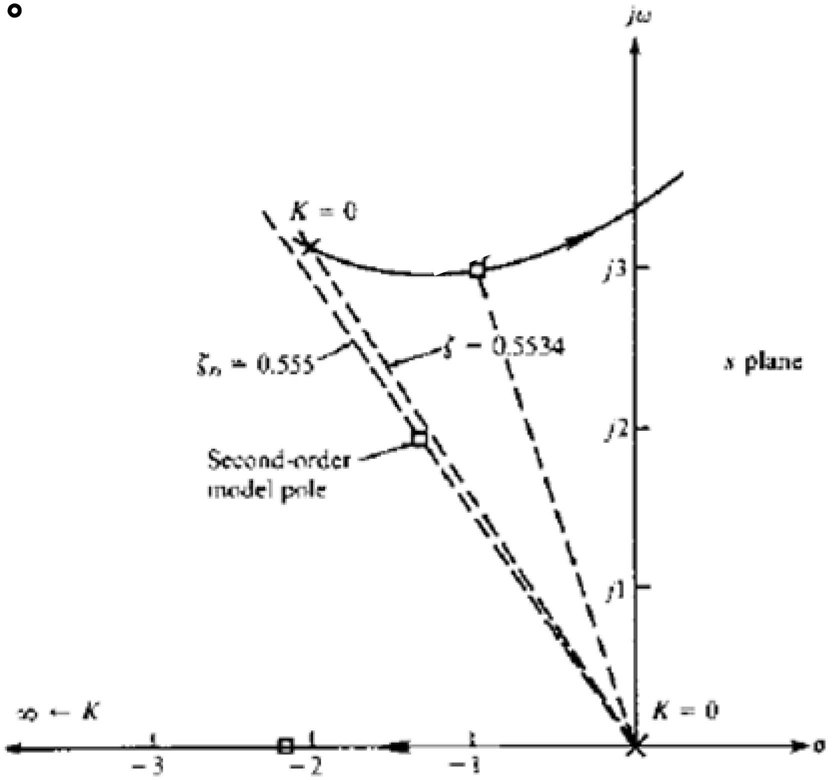
闭环传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{22}{(s+1-j3)(s+1+j3)(s+2.2)}$$

单位阶跃输入下：

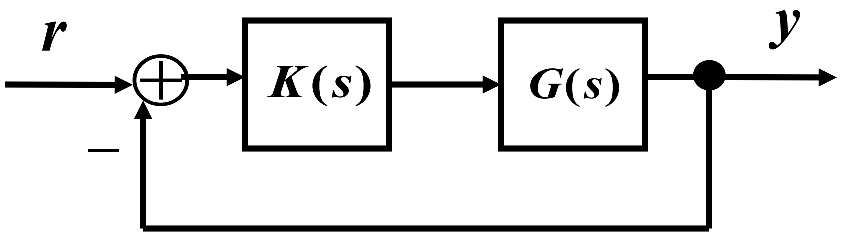
$$M_p \approx 1.123,\quad T_p \approx 1.51s, T_s \approx 2.95s$$

能够满足设计要求。



控制器设计

当动态系统不满足要求时，需要设计一个控制器$K(s)$。



设计控制器的第一步是确定它的结构。 简单而常用的有三种$K(s)$结构：

- 增益
- 零点
- 极点

通常是将三者根据需要巧妙结合

例5-27介绍了一个增益和一个极点的特殊结构（K/s），常见设计结构：

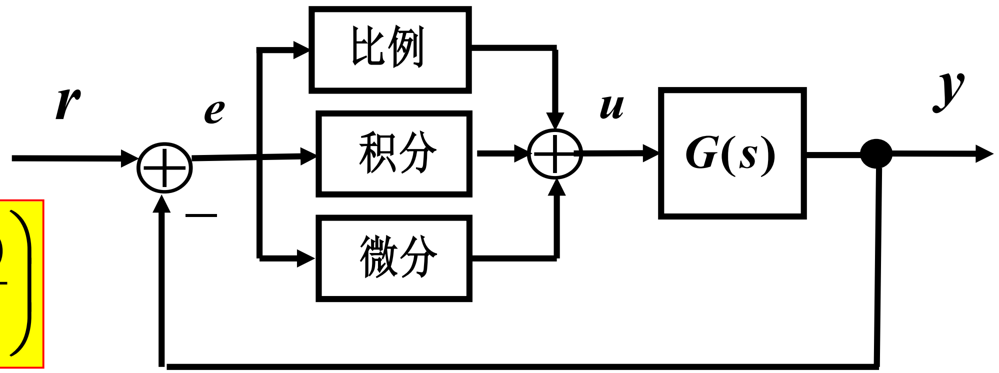
1) 单位反馈系统回路增益中的积分器意味着对阶跃响应的零稳态误差（参见介绍系统型别时的内容）。
2) 另一个重要的控制器结构就是仅有原点处的零点：微分控制。

控制器设计

3) 在控制领域中比例、积分、微分控制是非常重要的，这三种模式一起作用，称为 PID 控制器。

❑ PID控制器

$$u(t) = K_c\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$



4) 理论上可接受增加单个零点的情况，但物理不可实现，通常通过增加一个稳定的零点和一个稳定的极点，来形成如下控制器结构：

$$K(s) = K\frac{s+z}{s+p}$$

❖ 当零点的幅值小于极点的幅值时，称为超前（lead）控制器。

❖ 否则，称为滞后（lag）控制器。

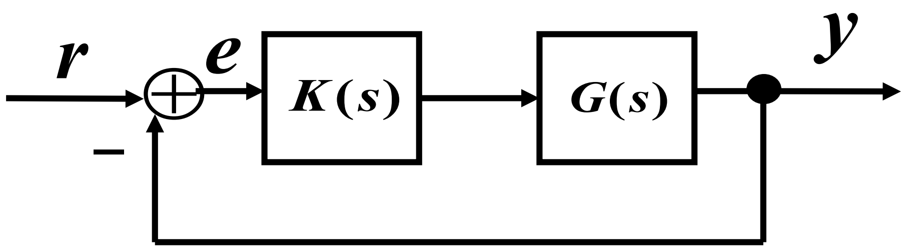
控制器设计

常见结构对瞬态响应与稳态响应的影响如下表所示

控制器	瞬态响应	稳态（对阶跃响应的误差）
比例 (P)	加快	通常非零
微分 (D)	增大阻尼和稳定性	通常非零
积分 (I)	降低稳定性	零稳态误差
PI	P , I结合	结合P, I
PD	P, D结合	结合P, D
PID	P, I, D结合	结合P, I, D
Lead	降低上升时间，加大阻尼	通常非零
Lag	降低稳定性	减小误差

控制器设计示例

例5-29 考虑如下标准系统



其中 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$; $E(s)=\dfrac{1}{1+K(s)G(s)}R(s)$; $R(s)=\dfrac{1}{s}$

试分析常见的一些控制器结构$K(s)$对系统的影响。

解：1) 比例控制(P)

$$K(s)=K\Rightarrow K(s)G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

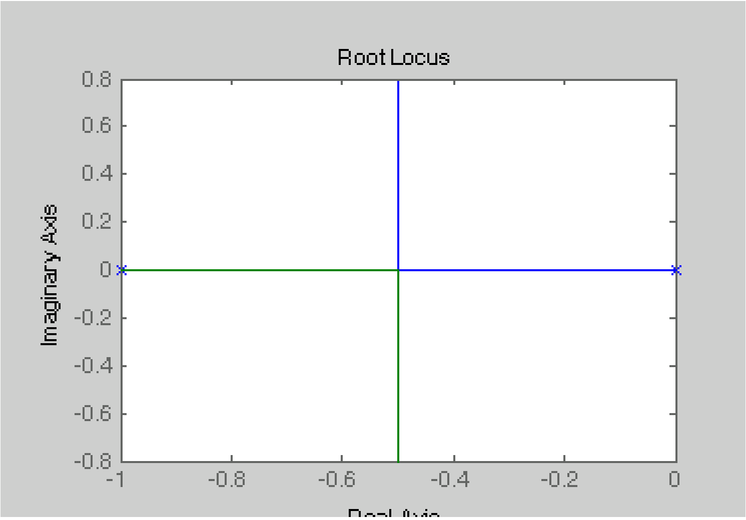
控制器设计示例

1) 比例控制(P)

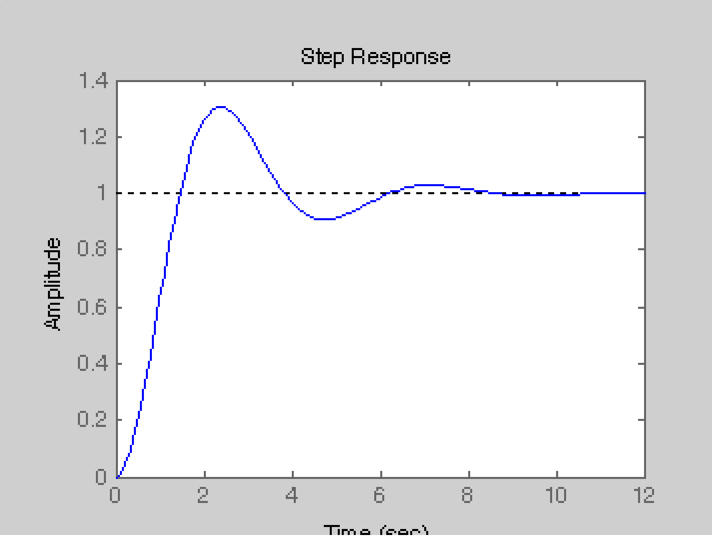
$$K(s)G(s)=\frac{K}{s(s+1)};\qquad E(s)=\frac{1}{1+K(s)G(s)}R(s)$$

稳态误差：$$e_p(\infty)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\cdot\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+K(s)G(s)}\right)=\lim_{s\to0}\left(\frac{s^2+s}{s^2+s+K}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示。若K=2，单位阶跃响应如图所示。



K=2



控制器设计示例

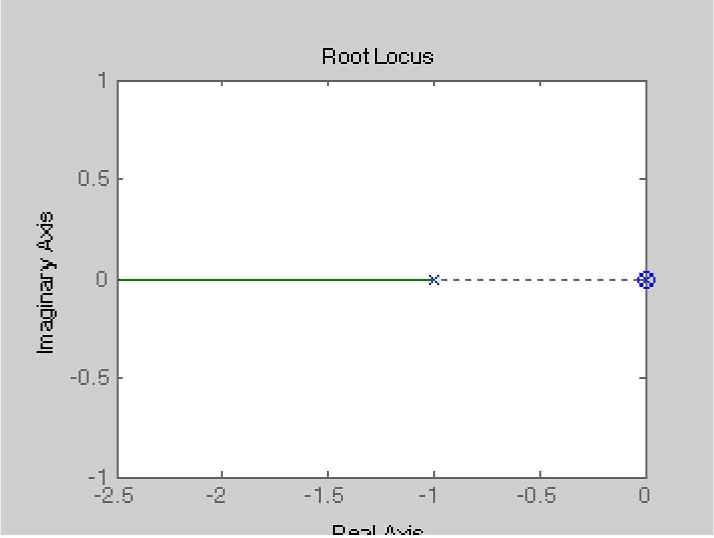
2) 微分控制(D)

$$K(s) = Ks \Rightarrow K(s)G(s) = \frac{Ks}{s(s+1)} = \frac{K}{s+1}$$

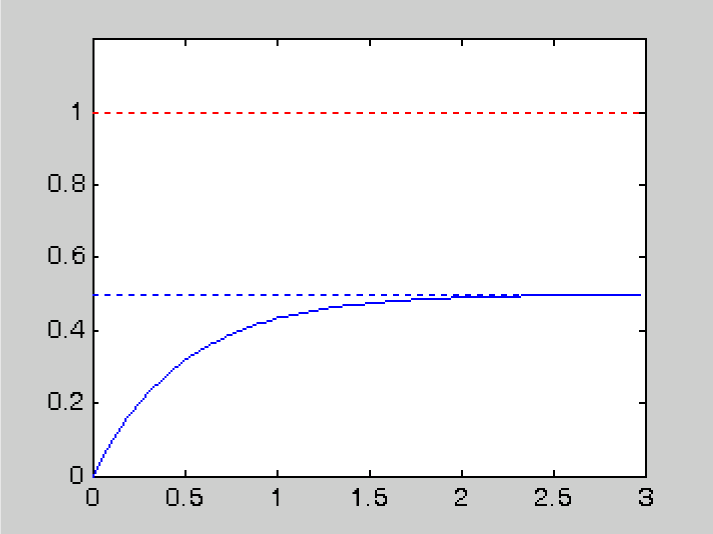
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

稳态误差：
$$e_p(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+K(s)G(s)}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s+1}{s+1+K}\right) = \frac{1}{K+1}$$

系统的根轨迹如图示。若K=1，单位阶跃响应如图所示。



K=1



控制器设计示例

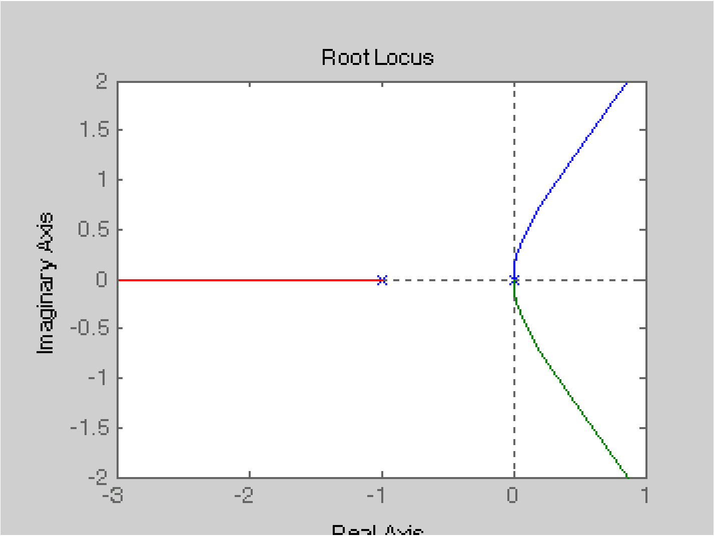
3) 积分控制(I)

$$K(s)=\frac{K}{s}\Rightarrow K(s)G(s)=\frac{K}{s^2(s+1)}$$

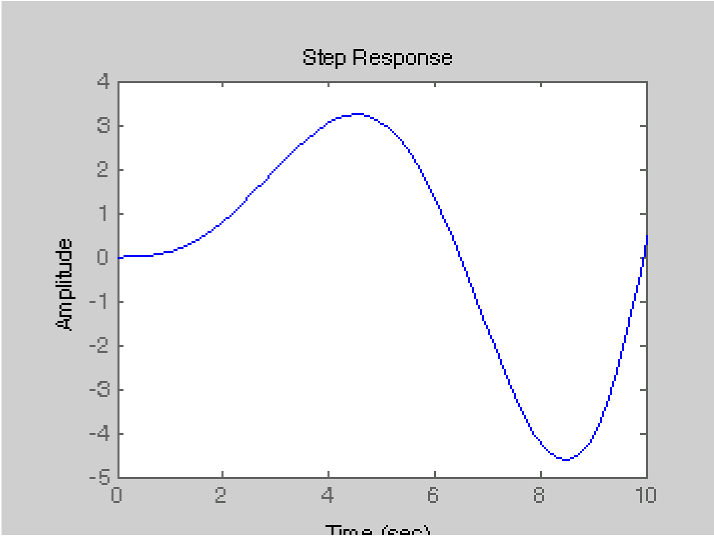
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

注：闭环系统不稳定！

系统的根轨迹如图示。若$K=1$，单位阶跃响应如图所示。



$K=1$



控制器设计示例

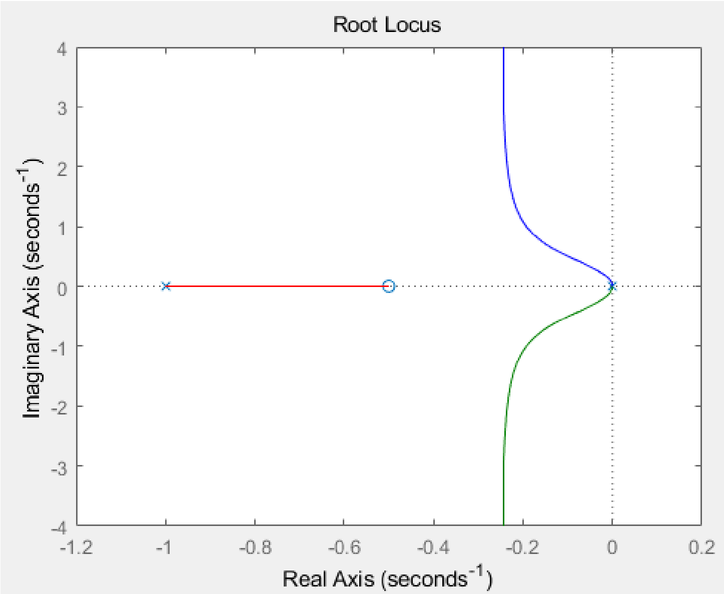
4) 比例积分控制(PI)(T_{i1}=2)

$$K(s)=K\left(1+\frac{0.5}{s}\right)=K\frac{s+0.5}{s}\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+0.5}{s^2(s+1)}$$

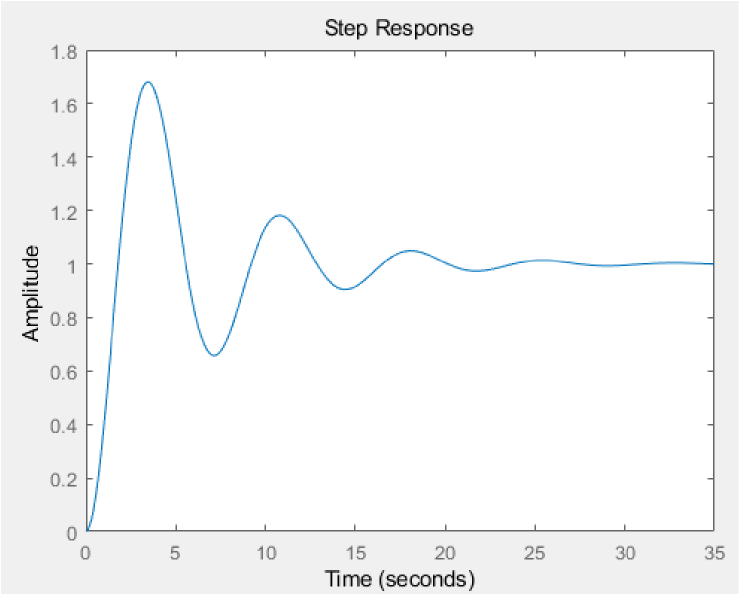
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

注：稳态误差为零

系统的根轨迹如图示。若K=1，单位阶跃响应如图所示。



K=1



控制器设计示例

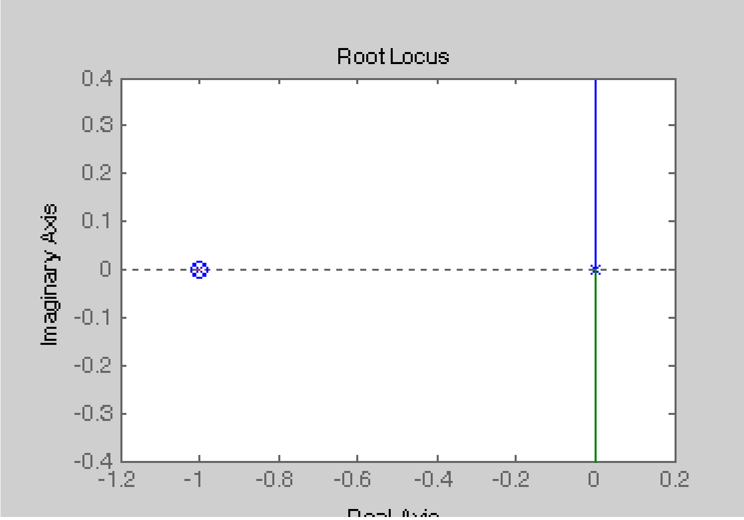
4) 比例积分控制(PI)(T_{i2}=1)

$$K(s)=K\left(1+\frac{1}{s}\right)=K\frac{s+1}{s}\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+1}{s^2(s+1)}=\frac{K}{s^2}$$

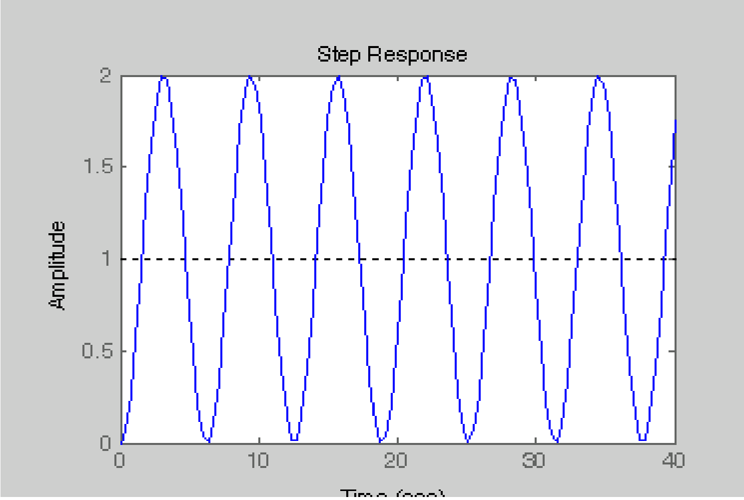
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

注：闭环系统临界稳定

系统的根轨迹如图示。若K=1，单位阶跃响应如图所示。



K=1



控制器设计示例

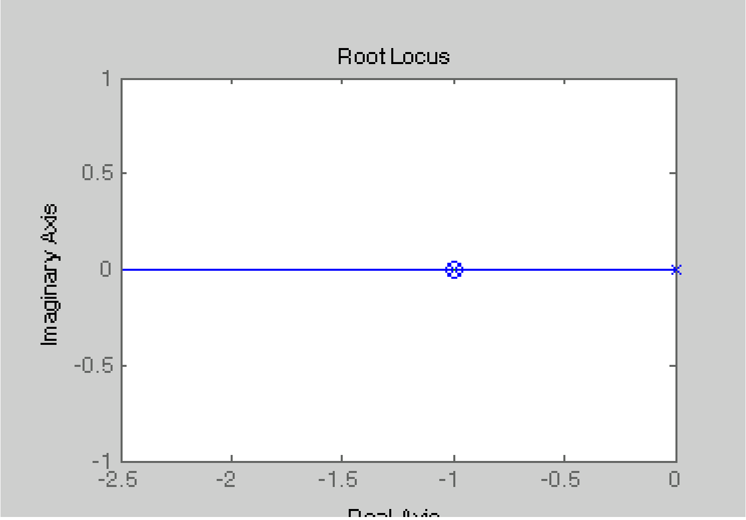
5) 比例微分控制(PD)(T_d=1)

$$K(s)=K(1+s)\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+1}{s(s+1)}=\frac{K}{s}$$

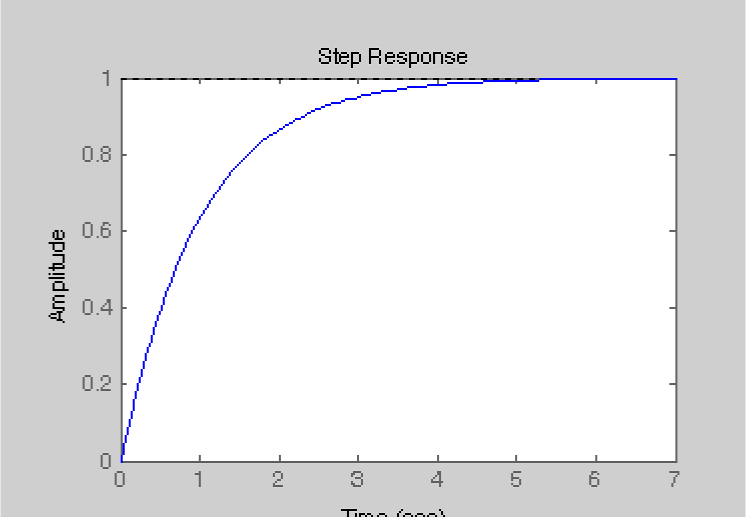
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

稳态误差：$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left(1-\frac{K}{s+K}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示。若K=1，单位阶跃响应如图所示。



K=1



控制器设计示例

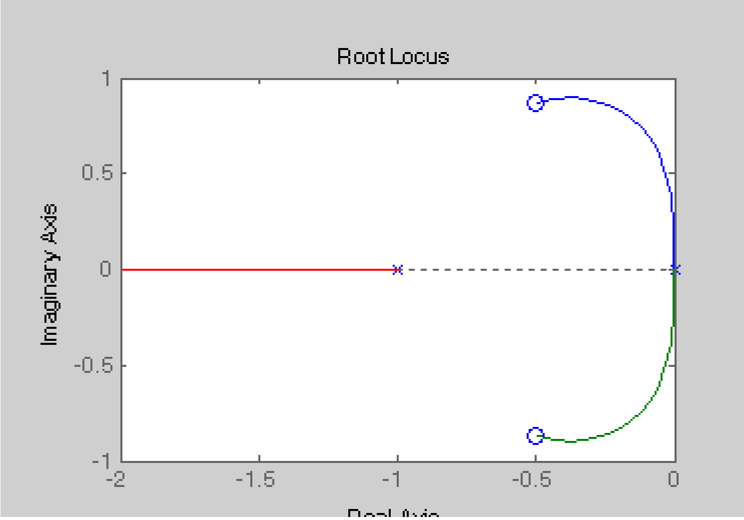
6) 比例微分积分控制(PID)

$$K(s)=K\left(1+\frac{1}{s}+s\right)\Rightarrow K(s)G(s)=K\,\frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)}$$

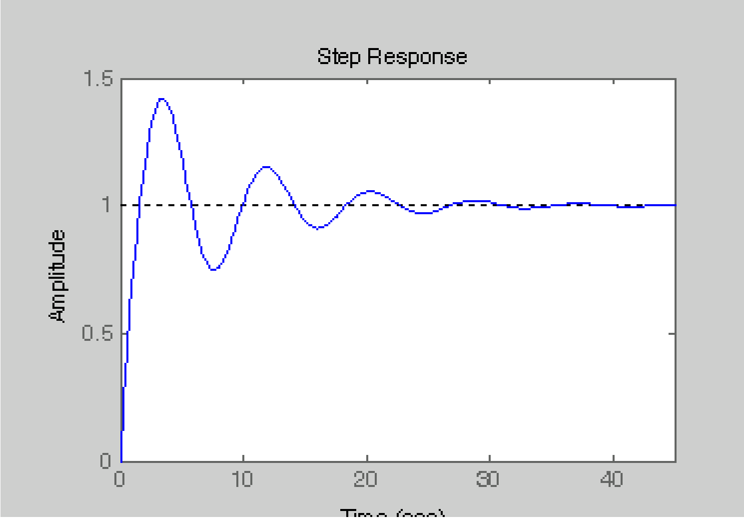
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

稳态误差：
$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left(1-\frac{K(s^2+s+1)}{s^2(s+1)+K(s^2+s+1)}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示。若K=1，单位阶跃响应如图所示。

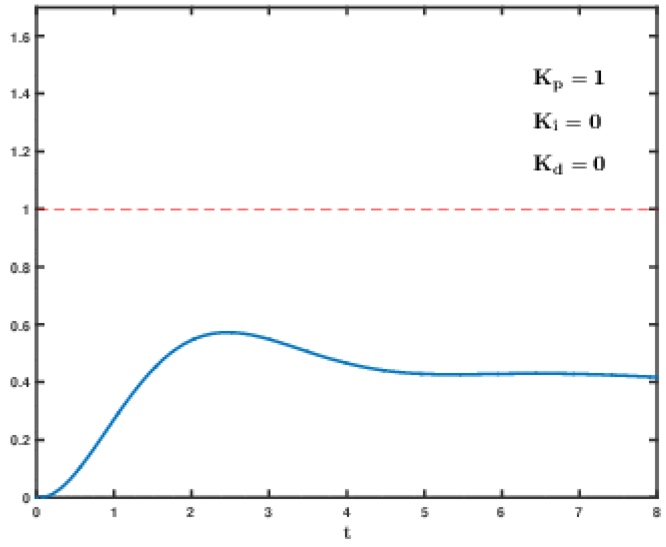


K=1



控制器设计示例

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_i}{s} + K_d s$$



控制器设计示例

7) 超前补偿

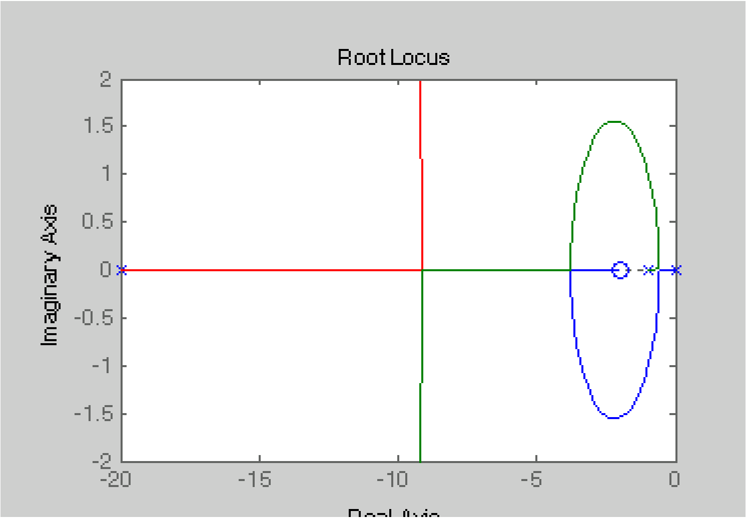
$$K(s)=K\frac{s+2}{s+20}\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+2}{s(s+1)(s+20)}$$

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

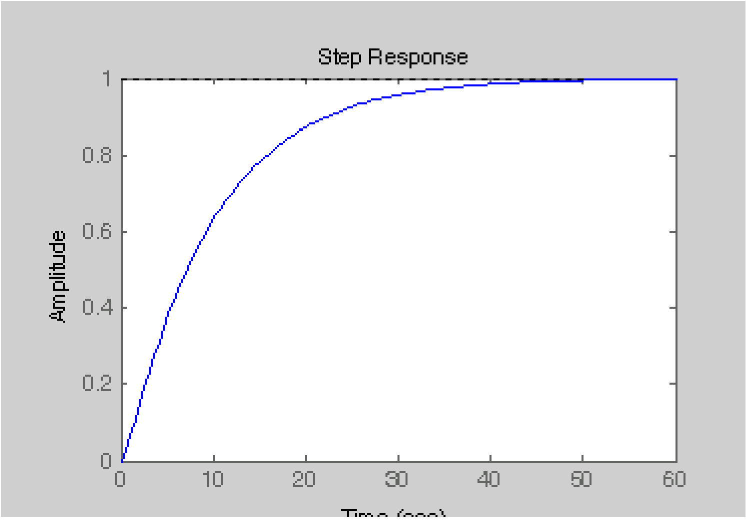
稳态误差：

$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\left(1-\frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+20)+K(s+2)}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示。若K=1，单位阶跃响应如图所示。



K=1



控制器设计示例

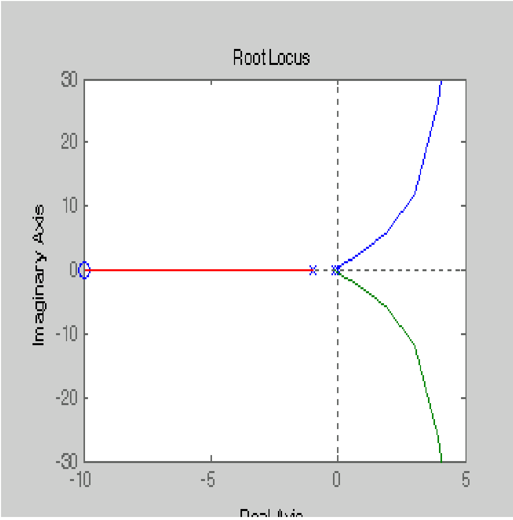
8) 滞后补偿

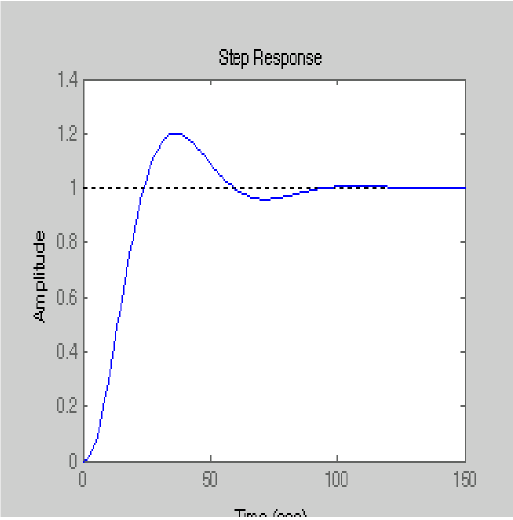
$$K(s)=K\frac{s+10}{s+0.1}\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+10}{s(s+1)(s+0.1)}$$

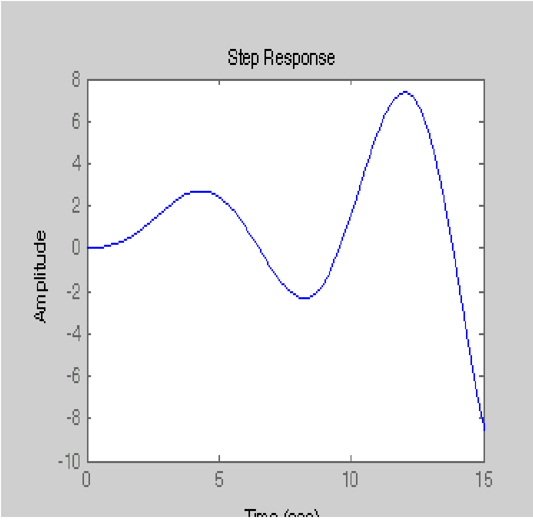
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

注：闭环系统仅当*K*较小时稳定

系统的根轨迹如图示。若*K*不同，其单位阶跃响应如图所示。







K=0.001　　　*K*=0.1

控制器设计示例

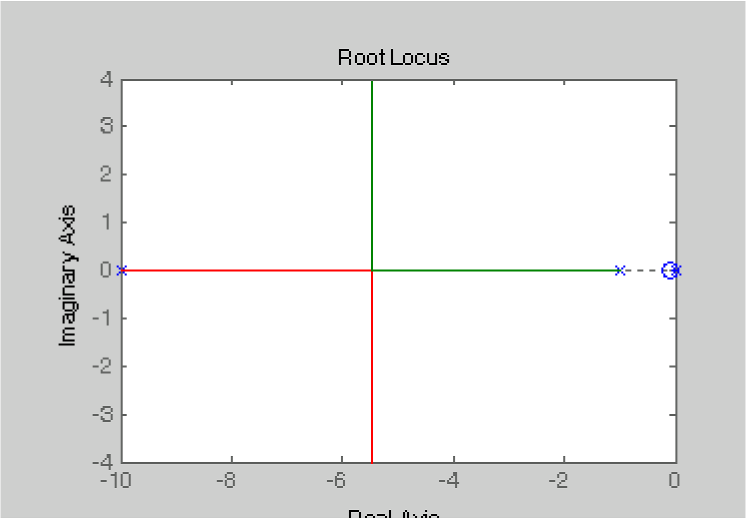
9) 微分作用超前近似

$$K(s)=K\frac{s+0.1}{s+10} \Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+0.1}{s(s+1)(s+10)}$$

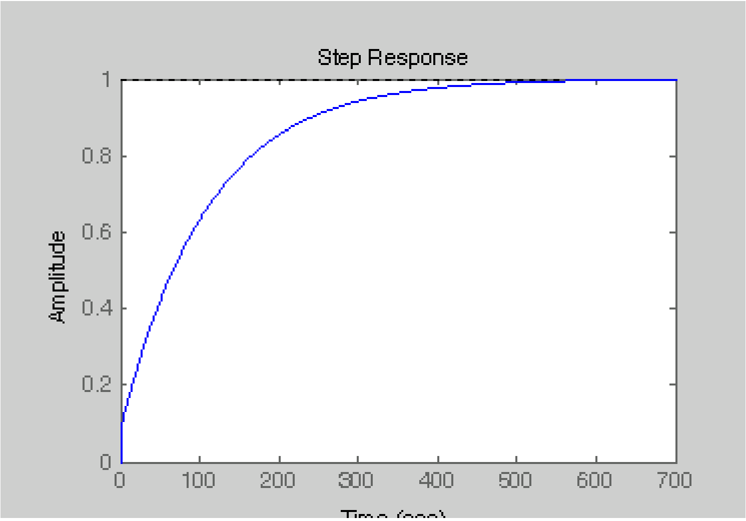
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

稳态误差：$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left(1-\frac{K(s+0.1)}{s(s+1)(s+10)+K(s+0.1)}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示。若K=1，单位阶跃响应如图所示。



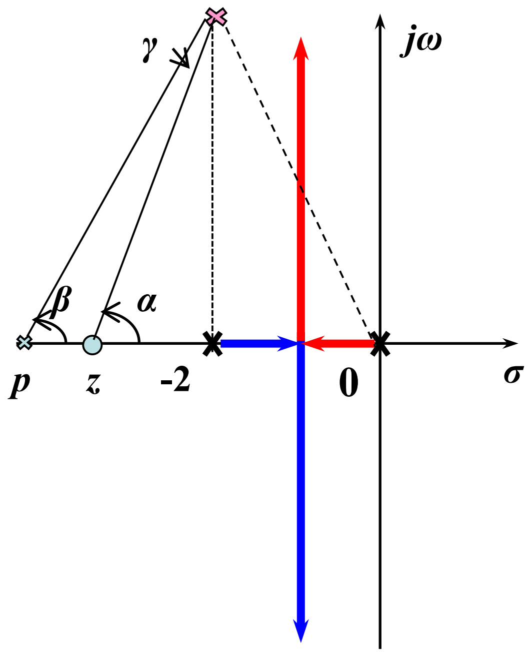
K=1



控制器设计示例

例5-30 单位负反馈系统的开环传递函数 $G_p(s)=\dfrac{4}{s(s+2)}$，试用根轨迹方法设计串联校正，使闭环系统的主导极点满足ζ=0.5和ω_n=4。

解： 校正前闭环系统的根轨迹如图所示，p_1=0，p_2=-2



期望的闭环主导极点：$s_{1,2}=-2\pm j2\sqrt{3}$

期望的闭环主导极点不在根轨迹上，需要设计补偿器。

期望的闭环主导极点在根轨迹上，应满足相角条件。

若补偿器为 $K^*\dfrac{s-z}{s-p}$，则由相角条件：

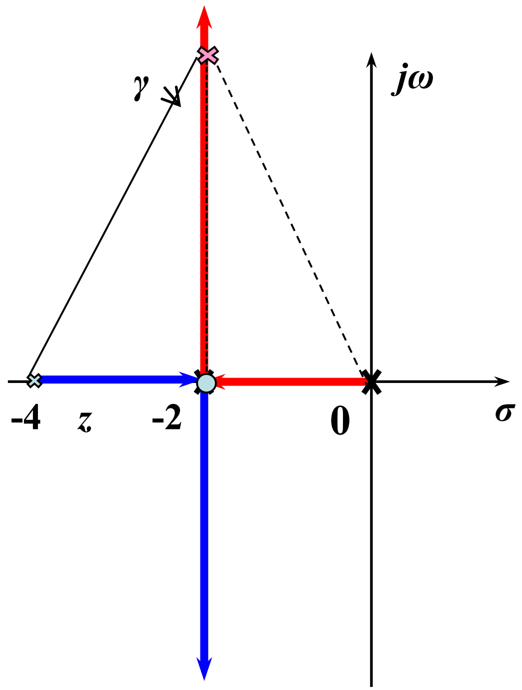
$$\angle(s_1-z)-\angle(s_1-p)-\angle(s_1-p_1)-\angle(s_1-p_2)=-180^\circ$$

$\gamma=\alpha-\beta=30^\circ$ 补偿器不唯一，取z<0，可求出p。

控制器设计示例

例5-30 单位负反馈系统的开环传递函数 $G_p(s)=\dfrac{4}{s(s+2)}$ ，试用根轨迹方法设计串联校正，使闭环系统的主导极点满足ζ=0.5和ω_n=4。

解： 取$z=p_2$=-2。稳定的零极点对消在控制实践中常用。



期望的闭环主导极点在根轨迹上，由幅值条件：

$$\frac{4K^*}{\left|-2+j2\sqrt{3}\right|\left|-2+j2\sqrt{3}+4\right|}=1 \Rightarrow \boxed{K^*=4}$$

方法二：（代数法）直接利用稳定的零极点对消

$$K(s)G_p(s)=K^*\frac{s+2}{s-p}\frac{4}{s(s+2)}$$

$$s_1(s_1-p)+4K^*=0 \Rightarrow \boxed{p=-4, K^*=4}$$

第五章小结

- 根轨迹的概述
- 根轨迹的绘制方法（规则）
- 广义根轨迹
  - –根轨迹规则的推广
- 基于根轨迹的系统性能分析
  - –考虑时域指标
- 基于根轨迹的系统补偿器设计
  - –方式多样

The End