

第十一章 对策论

- 对策论问题及其基本概念
- 二人有限策略博弈
 - ▣ 矩阵博弈（二人有限零和博弈）
 - ▣ 双矩阵博弈（二人有限非零和博弈）
- 举例

问题引入：囚徒困境

- 囚徒困境（Dresher & Flood, 1950s）
- 两偷盗犯分别关押受审，有坦白和抗拒两种选择，判罚年份如下，问各自应选择的决策。

I \ II	坦白	抗拒
坦白	$(-9, -9)$	$(0, -15)$
抗拒	$(-15, 0)$	$(-1, -1)$

博弈论3要素

- 1、局中人 (Players)
- 2、策略集 (Strategies)
- 3、赢得函数/支付函数 (Payoff function)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

博弈论产生

- 1838年 Cournot：双寡头产量垄断模型，已出现类似纳什均衡的分析理念。
- 1944年 Von Neumann和Oskar Morgenstern合著“Game Theory and Economic Behaviors”首次给出了的博弈论的研究框架，开启了双人零和博弈的研究。
- 1950s年代，Nash将研究推广到多人博弈和非零和博弈，确定了非合作博弈形式，给出了Nash均衡（equilibrium）的概念。

博弈论的发展

- 1950年、1953年，Kuhn将战略型博弈发展为扩展型博弈，开启了动态博弈研究。
- 1965年，Selten提出了子博弈完美Nash均衡，消除了纳什均衡解中的非理性行为解。
- 1967-1968年，Harsanyi提出了贝叶斯博弈，解决信息不完全的问题。
- 1970s，向演化博弈等多个方向发展，更为成熟。
- 1993年，Nash、Selten和Harsanyi同获诺贝尔经济学奖。

博弈论问题的分类

- 局中人是否允许合作：非合作博弈、合作博弈
- 策略的数目：有限策略博弈-无限策略博弈
- 策略选择是否具有概率随机性：纯策略博弈、混合策略博弈
- 策略与时间的关系：静态博弈、动态博弈
- 参与人对问题信息结构的了解程度：完全信息博弈、不完全信息博弈
- 数学模型：矩阵博弈、连续博弈、微分博弈、阵地博弈、凸博弈、随机博弈

第十一章 对策论

- 对策论问题及其基本概念
- 二人有限策略博弈
 - 矩阵博弈（二人有限零和博弈）
 - 双矩阵博弈（二人有限非零和博弈）
- 举例

矩阵博弈

- 纯策略博弈及其均衡解
- 混合策略博弈及其均衡解
- 均衡解的求解

纯策略矩阵博弈模型

博弈模型 $G = \{I, II; S_1, S_2; \mathbf{A}\}$

➤ 局中人I、II

➤ 策略集

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

$$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

➤ 局中人I的赢得矩阵: \mathbf{A}

➤ 局中人II的赢得矩阵: $-\mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例：田忌赛马

➤ 局中人：田忌、齐王

➤ 策略集：

{（上中下）、（上下中）、（中下上）、
（中上下）、（下上中）、（下中上）}

➤ 田忌的赢得矩阵 $\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

理性博弈原则

- 自身利益最大化原则：自身的赢得值尽可能大
- 共许原则：双方均无改变策略的意愿

自身利益最大化原则

- 问题：不确定对方决策情况下的最优决策
- 准则：从最坏的预期中选则最好的（悲观准则）
一种保守而贪心的准则
“做最坏的打算，争取最好的结果”

➤ 局中人I最大预期赢得（赢得指自身最小收益）

极大极小值： $\max_i \min_j a_{ij}$

➤ 局中人II最小预期损失（损失指对手最大收益）

极小极大值： $\min_j \max_i a_{ij}$

举例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\min_j a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 4 & i=2 \\ 7 & i=3 \end{cases}$$

$$\max_i a_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{cases} 7 & j=1 \\ 8 & j=2 \\ 9 & j=3 \end{cases}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = 7 \leq \max_i a_{ij}$$

$$7 = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 7$$

极大极小值与极小极大值

■ 两者之间的关系: $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$

证明: 对于 $\forall j$, 有

$$\min_j a_{ij} \leq a_{ij}$$

$\max_i \min_j a_{ij} \leq \max_i a_{ij}$

第i行最小值

第j列最大值

故

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

最优纯策略对

➤ 如果存在

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} \triangleq V_G$$

则 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 为矩阵博弈的最优纯策略对，也称为最优局势。 V_G 称为博弈值。

最优纯策略对存在性定理

■ 矩阵博弈最优纯策略对存在的充要条件是存在鞍点。

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \quad \text{鞍点条件}$$

证明：1、必要性

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

$$\Rightarrow \exists i^*, j^*, \min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*}$$

$$\Rightarrow a_{i^*j^*} \geq \min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*} \geq a_{i^*j^*}$$

$$\Rightarrow \max_i a_{ij^*} = a_{i^*j^*} = \min_j a_{i^*j} \quad \Rightarrow \quad a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

最优纯策略对存在的充要条件

证明：2、充分性

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

→ $\max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq \min_j a_{i^*j}$

j*列最大值 **i*列最小值**

→ $\min_j \max_i a_{ij} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i \min_j a_{ij}$

又根据 $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$

→ $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$

Nash均衡解

鞍点解的博弈解释：没有一方愿意单方面改变策略，因为单方面改变策略均无法改善自身的赢得值，更多情况下反有损害。（共许原则）

这样的最优策略对具有一定稳定性，被称为**平衡局势**(Equilibrium Situation)、**均衡解**(Equilibrium Solution)，或直接简称为**解**(solution)。

Nash均衡解 \Leftrightarrow 最优纯策略对

解的类型： 1、唯一解

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & (8) & 11 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 7 & 9 \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 8 \quad \Rightarrow \quad (i^*, j^*) = (1, 2)$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j [10 \quad 8 \quad 11 \quad 9] = 8 \quad \Rightarrow \quad (i^*, j^*) = (1, 2)$$

2、多个解（多个鞍点）

$$A = \begin{bmatrix} 9 & (8) & 11 & (8) \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & [8] & 7 & [8] \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

◆局中人I选择:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 8 \Rightarrow j^*(i) = \begin{bmatrix} 2,4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow i^* = 1 \Rightarrow (i^*, j^*) = (1, 2), (1, 4)$$

◆局中人II选择:

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j [10 \quad 8 \quad 11 \quad 8] = 8$$

$$\Rightarrow i^*(j) = [4 \quad 1,3 \quad 1 \quad 1,3] \Rightarrow j^* = 2,4 \Rightarrow (i^*, j^*) = (1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)$$

讨论

问题： (α_3, β_2) 、 (α_3, β_4) 不是局中人I的最优方案，是否可作为博弈均衡解？

答案： 理性原则只考虑赢得值， 赢得值相同的策略对均等价， 所以4个点均为最优纯策略对， 即

$$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}) = \{(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_1, \beta_4), (\alpha_3, \beta_2), (\alpha_3, \beta_4)\} \quad V_G = 8$$

但满足鞍点条件的均衡解只有2个：

$$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}) = \{(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_1, \beta_4)\}$$

■ 结论： 鞍点解 \Rightarrow 均衡解/最优纯策略对

多个均衡解的性质

➤ 无差别性：如果 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 均为博弈G的解，则

$$a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}$$

证明：根据均衡解的定义，有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i_2 j_2}$$

可交换性

■ 可交换性：如果 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$ 均为博弈 **G** 的解，
则 $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$ 也为该博弈 **G** 的解。

证明：

$$a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = \min_j \max_i a_{ij} \quad \Rightarrow \quad a_{i_1 j_1} \geq a_{i_2 j_1} \quad a_{i_2 j_2} \geq a_{i_1 j_2}$$

$$a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = \max_i \min_j a_{ij} \quad \Rightarrow \quad a_{i_1 j_1} \leq a_{i_1 j_2} \quad a_{i_2 j_2} \leq a_{i_2 j_1}$$

$$\Rightarrow \quad a_{i_2 j_1} \leq a_{i_1 j_1} \leq a_{i_1 j_2} \quad a_{i_1 j_2} \leq a_{i_2 j_2} \leq a_{i_2 j_1}$$

$$\Rightarrow \quad a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_2} = a_{i_2 j_1} = V_G$$

3、无纯策略解

➤ 原因: $\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$

➤ 举例: 石头剪刀布游戏

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ 局中人I选择:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad j^*(i) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad i^* = 1, 2, 3$$

$\Rightarrow (i^*, j^*) = (1, 3), (2, 1), (3, 2)$

◆ 局中人II选择:

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j [1 \quad 1 \quad 1] = 1 \quad \Rightarrow \quad i^*(j) = [3 \quad 1 \quad 2] \quad \Rightarrow \quad j^* = 1, 2, 3$$

$\Rightarrow (i^*, j^*) = (3, 1), (1, 2), (2, 3)$

如果知道对方的策略, 就能制胜, 故不可能选择固定策略。

矩阵博弈

- 纯策略博弈及其均衡解
- 混合策略博弈及其均衡解
- 均衡解的求解

混合策略矩阵博弈模型

博弈模型 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$

➤ 混合策略集

$$S_1^* = \left\{ \mathbf{x} \in R^m \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

x_i 为局中人I执行纯策略 α_i 的概率

$$S_2^* = \left\{ \mathbf{y} \in R^n \mid y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}$$

y_j 为局中人II执行纯策略 β_j 的概率

➤ 局中人I的赢得函数: $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$

➤ 局中人II的赢得函数: $-E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

说明

- 混合策略的取值在多次博弈中可看作概率，一次博弈中可看作偏好。
- 混合策略集是无穷集合，纯策略是混合策略的特例。
- 分析问题时，首先考虑纯策略博弈，当纯策略解不存在时，就考虑混合策略博弈。因此混合策略博弈也可以用 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}\}$ 表示。

极大极小值与极小极大值

理性决策

◆局中人I的最大预期赢得： $\max_{\mathbf{x} \in S_1^*} \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

◆局中人II的最小预期损失： $\min_{\mathbf{y} \in S_2^*} \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

两者关系： $\max_{\mathbf{x} \in S_1^*} \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

■ 混合策略 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$

■ 混合局势 (\mathbf{x}, \mathbf{y})

混合策略均衡解

■ 最优混合策略对

$$\max_{\mathbf{x} \in S_1^*} \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in S_2^*} \max_{\mathbf{x} \in S_1^*} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \triangleq V_G$$

■ 最优混合策略存在的充要条件：存在鞍点

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

■ 平衡局势 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$

问题：均衡解是否总是存在？

解的存在性

定理：一定存在混合策略意义下的矩阵博弈均衡解。

证明思路：鞍点条件一定有解。

解的存在性定理

定理：一定存在混合策略意义下的矩阵博弈均衡解。

证明： $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* x_i = E(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* y_j$ 鞍点条件

$$\iff \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

一方采用纯策略，一方采用最优混合策略

$\iff \exists v = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 使下面2组约束均有解

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq v \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m x_i^* = 1 \quad x_i^* \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq v \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_j^* = 1 \quad y_j^* \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

↔ 下面一对对偶问题均有可行解，且 $w^* = v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$

$$\begin{array}{ll}
 \max & w \\
 \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq w \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \min & v \\
 \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\
 & y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{array}$$

可以验证 $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ $w = \min a_{1j}$ 原问题可行解
 $\mathbf{y} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ $v = \max a_{i1}$ 对偶问题可行解

故有 $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* = v^* = w^* = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^*$ 强对偶性

又根据：

$$\left. \begin{array}{l}
 E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* y_j^* = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \right) x_i^* \leq v^* \sum_{i=1}^m x_i^* = v^* \\
 E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* y_j^* = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \right) y_j^* \geq w^* \sum_{j=1}^n y_j^* = w^*
 \end{array} \right\} \Rightarrow w^* = v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

均衡解的性质

- 互补松弛性
- 赢得矩阵严格单调变换下的解集不变性
- 对称博弈性质

互补松弛性

$$x_i^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* = v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

$$y_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* = w^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

如果某条纯策略可能被选择，则该纯策略下对手的最优混合策略下的赢得值必为 V_G 。

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* < v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad \Rightarrow \quad x_i^* = 0$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* > w^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad \Rightarrow \quad y_j^* = 0$$

如果某条纯策略下对手的最优混合策略的赢得值比 V_G 更好，则该纯策略无被选择可能。

解集不变性

- 赢得矩阵严格单调变换下的解集不变性

博弈： $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_1\}$ $G_2 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_2\}$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + L * \mathbf{1}_{m \times n} \quad \longrightarrow \quad T(G_1) = T(G_2) \quad V_{G_1} = V_{G_2} + L$$

$$\mathbf{A}_2 = a\mathbf{A}_1 \quad a > 0 \quad \longrightarrow \quad T(G_1) = T(G_2) \quad V_{G_1} = aV_{G_2}$$

■ 解集 $T(G)$ ： 博弈 G 的均衡解集合。

证明： 上述变换只改变了赢得矩阵元素的数值，
不改变相对大小关系。

对称博弈性质

如果博弈问题具有如下对称性：

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \text{自身角度的赢得矩阵相同}$$

$$\Rightarrow T_I(G) = T_{II}(G) \quad a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_G = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* x_j^* = -V_G = 0 \quad \text{最优策略时无赢家}$$

举例：石头剪刀布游戏

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵博弈

- 纯策略博弈及其均衡解
- 混合策略博弈及其均衡解
- 均衡解的求解

均衡解的求解方法

➤ 互补松弛方程组法

➤ 线性规划法

.....

互补松弛性方程组

$$x_i^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* = v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* = w^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m x_i^* = 1$$

$$\sum_{j=1}^n y_j^* = 1$$

举例：田忌赛马

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & \textcircled{1} & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & \textcircled{1} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & \textcircled{1} & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -1 & \textcircled{1} \\ \textcircled{1} & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & \textcircled{1} & -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

任何一条纯策略均是对方特定策略下的**唯一**赢得策略，不可忽略，故有

$$x_i^* > 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_j^* > 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

严格单调变换

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{1}_{6 \times 6}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

利于对称性增加A的稀疏性，简化问题。

互补松弛性方程组

$$\begin{array}{ll} -x_1^* + x_5^* = V_{\tilde{G}} & -y_1^* + y_3^* = V_{\tilde{G}} \\ -x_2^* + x_6^* = V_{\tilde{G}} & -y_2^* + y_4^* = V_{\tilde{G}} \\ x_1^* - x_3^* = V_{\tilde{G}} & -y_3^* + y_5^* = V_{\tilde{G}} \\ x_2^* - x_4^* = V_{\tilde{G}} & -y_4^* + y_6^* = V_{\tilde{G}} \\ x_3^* - x_5^* = V_{\tilde{G}} & y_1^* - y_5^* = V_{\tilde{G}} \\ x_4^* - x_6^* = V_{\tilde{G}} & y_2^* - y_6^* = V_{\tilde{G}} \end{array}$$

$$\Rightarrow V_{\tilde{G}} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x_1^* = x_3^* = x_5^* \\ x_2^* = x_4^* = x_6^* \\ y_1^* = y_3^* = y_5^* \\ y_2^* = y_4^* = y_6^* \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i^* = 1$$

$$\sum_{j=1}^6 y_j^* = 1$$

$$+ \Rightarrow$$

无穷多个均衡解

$$x_1^* = x_3^* = x_5^* = a'$$

$$y_1^* = y_3^* = y_5^* = b'$$

$$x_2^* = x_4^* = x_6^* = a''$$

$$y_2^* = y_4^* = y_6^* = b''$$

$$a' + a'' = 1/3$$

$$b' + b'' = 1/3$$

$$a' \geq 0$$

$$b' \geq 0$$

$$a'' \geq 0$$

$$b'' \geq 0$$

$$V_{\tilde{G}} = 0 \quad \longrightarrow \quad V_G = 2V_{\tilde{G}} - 1 = -1$$

问题：田忌能赢齐王吗？

线性规划法

$$\begin{aligned} \max \quad & w \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq w \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

对偶



$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ & y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$




$$w > 0$$



$$v > 0$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m x'_i = \frac{1}{w} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} x'_i \geq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & x'_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

对偶



$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n y'_j = \frac{1}{v} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & y'_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

矩阵形式

$$\begin{array}{ll}\min & \mathbf{1}_m^T \mathbf{x}' \\s.t. & \mathbf{A}^T \mathbf{x}' \geq \mathbf{1}_n \\ & \mathbf{x}' \geq 0\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}' \\s.t. & \mathbf{A} \mathbf{y}' \leq \mathbf{1}_m \\ & \mathbf{y}' \geq 0\end{array}$$

问题: $w > 0$ 和 $v > 0$ 是否具有一般性?

举例：石头剪刀布游戏

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad V_G = 0$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{1}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad V_{\tilde{G}} = 1$$

求解

$$\min \quad x'_1 + x'_2 + x'_3$$

$$s.t. \quad x'_1 + 2x'_3 \geq 1$$

$$2x'_1 + x'_2 \geq 1$$

$$2x'_2 + x'_3 \geq 1$$

$$x'_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\max \quad y'_1 + y'_2 + y'_3$$

$$s.t. \quad y'_1 + 2y'_2 \leq 1$$

$$y'_2 + 2y'_3 \leq 1$$

$$2y'_1 + y'_3 \leq 1$$

$$y'_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$\text{解得: } x'_i = \frac{1}{3} \quad y'_j = \frac{1}{3} \quad V_{\tilde{G}} = (x'_1 + x'_2 + x'_3)^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow x_i = x'_i V_{\tilde{G}} = \frac{1}{3} \quad y_j = y'_j V_{\tilde{G}} = \frac{1}{3} \quad V_G = V_{\tilde{G}} - L = 0$$

注：一般问题，可以先求解，再判断 w 、 v 是否大于0

第十一章 对策论

- 对策论问题及其基本概念
- 二人有限策略博弈
 - ▣ 矩阵博弈（二人有限零和博弈）
 - ▣ 双矩阵博弈（二人有限非零和博弈）
- 举例

双矩阵博弈

- 双矩阵博弈模型
- 双矩阵博弈模型的均衡解
- 均衡解的求解

双矩阵博弈

博弈模型 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}, \mathbf{B}\}$

➤ 局中人I、II

➤ 策略集

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

$$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

➤ 局中人I的赢得矩阵 \mathbf{A}

➤ 局中人II的赢得矩阵 \mathbf{B}

囚徒困境

I \ II	坦白	抗拒
坦白	$(-9, -9)$	$(0, -15)$
抗拒	$(-15, 0)$	$(-1, -1)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

双矩阵博弈

- 双矩阵博弈模型
- 双矩阵博弈模型的均衡解
- 均衡解的求解

囚徒困境的纯策略解

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

◆局中人I选择:

$$j_i^*(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad i_{j^*}^*(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad (i^*, j^*) = (1, 1)$$

◆局中人II选择:

$$i_j^*(A) = [1 \quad 1] \quad \Rightarrow \quad j_{i^*}^*(B) = 1 \quad \Rightarrow \quad (i^*, j^*) = (1, 1)$$

纯策略Nash均衡解

■ Nash均衡点

满足以下条件的策略对 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$

$$a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$b_{i^*j^*} \geq b_{i^*j} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

没有一个局中人愿意单方面改变策略

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (-9) & 0 \\ -15 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-9) & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

混合策略Nash均衡解

■ 赢得函数

$$E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j$$

■ Nash混合策略均衡点

满足以下条件的策略对 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$

$$E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \quad \mathbf{x} \in S_1^*$$

$$E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad \mathbf{y} \in S_2^*$$

- n 人有限策略博弈至少存在一个Nash均衡点（包括纯策略和混合策略）（Nash, 1950）。
- 如果纯策略均衡解存在，也是混合策略的均衡解。

Pareto最优解

允许合作下的博弈问题为多目标优化问题：

◆ 目标1: $\max_{\mathbf{x} \in S_1^*, \mathbf{y} \in S_2^*} E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

◆ 目标2: $\max_{\mathbf{x} \in S_1^*, \mathbf{y} \in S_2^*} E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

■ Pareto最优解 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ ：不存在超优 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 的策略对。

■ $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ 超优(dominate) $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$:

$$E_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \geq E_1(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \quad E_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \geq E_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$$

且至少有一个不等式严格成立。

均衡与最优

- Pareto最优解：允许合作下的满意解
- Nash均衡解：不合作情况下的理性解

I \ II	坦白	抗拒
坦白	$(-9, -9)$	$(0, -15)$
抗拒	$(-15, 0)$	$(-1, -1)$

问题：是否有既是Pareto最优又是Nash均衡的解？

严格意义下的解

- 严格意义下的解：满足可交换性和无差别性的
Pareto最优均衡解。

I \ II	坦白	抗拒
坦白	$(-1, -1)$	$(0, -15)$
抗拒	$(-15, 0)$	$(-1, -1)$

完全弱意义下的解

- 完全弱意义下的解：反复删除非占优策略所得的简化博弈的严格意义下的解，可以证明同时也是原博弈问题的Nash均衡解。

占优策略



占优策略 →

I \ II	坦白	抗拒
	坦白	抗拒
坦白	$(-9, -9)$	$(0, -15)$
抗拒	$(-15, 0)$	$(-1, -1)$

非占优策略

非占优策略

双矩阵博弈

- 双矩阵博弈模型
- 双矩阵博弈模型的均衡解
- 均衡解的求解

Nash均衡解的充要条件

■ 定理： $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ 是 $G = \{S_1, S_2; \mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ 的 Nash 均衡解的充要条件为：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \mathbf{y}^* \leq E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \mathbf{1}_m$$

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i^* \leq E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{B}^T \mathbf{x}^* \leq E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x} \in S_1^* \quad \mathbf{y} \in S_2^*$$

证明： 根据 Nash 均衡解的定义。

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^* \leq E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \mathbf{1}_m$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x}^* \leq E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \mathbf{1}_n$$

二次规划求解

$$v_1 \stackrel{\circ}{=} E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{A} \mathbf{y}^*$$

$$v_2 \stackrel{\circ}{=} E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{B} \mathbf{y}^*$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x}^* \leq v_2 \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x}^{*T} \mathbf{1}_m = 1$$

$$\mathbf{x}^* \geq 0$$



$$\mathbf{x}^{*T} \mathbf{B} \mathbf{y}^* \leq v_2$$



$$\mathbf{A} \mathbf{y}^* \leq v_1 \mathbf{1}_m$$

$$\mathbf{y}^{*T} \mathbf{1}_n = 1$$

$$\mathbf{y}^* \geq 0$$



$$\mathbf{x}^{*T} \mathbf{A} \mathbf{y}^* \leq v_1$$

$$\max \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} - v_1 + \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y} - v_2$$

$$s.t. \quad \mathbf{A} \mathbf{y} \leq v_1 \mathbf{1}_m$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x} \leq v_2 \mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{1}_m = 1$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{1}_n = 1$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

第十一章 对策论

- 对策论问题及其基本概念
- 二人有限策略博弈
 - ▣ 矩阵博弈（二人有限零和博弈）
 - ▣ 双矩阵博弈（二人有限非零和博弈）
- 举例

军备竞赛

- 假设有两个国家，有扩军和裁军两种策略，其赢得矩阵为

	扩军	裁军
扩军	(2, 2)	(5, 0)
裁军	(0, 5)	(4, 4)

问两个国家会如何决策？

求解

$$\max 4x_1 y_1 + 5x_1 y_2 + 5x_2 y_1 + 8x_2 y_2 - v_1 - v_2$$

$$s.t. \quad 2y_1 + 5y_2 \leq v_1$$

$$4y_2 \leq v_1$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq v_2$$

$$4x_2 \leq v_2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2$$

$$y_j \geq 0 \quad j = 1, 2$$



$$\mathbf{x}^* = [1 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{y}^* = [1 \quad 0]^T$$

$$E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = v_1^* = 2 \quad E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = v_2^* = 2$$

问题

如何避免军备竞赛？