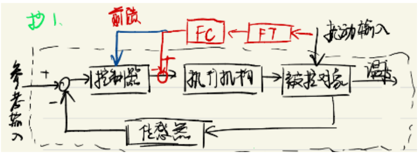


- 判断**线性**系统（叠加性、均匀/齐次性）：

1、只能出现函数本身，以及函数的任何阶次的导函数，**无常数**；2、函数**本身跟所有的导函数**之间除了加减之外，不可以有任何运算；3、函数**本身跟本身、各阶导函数本身跟本身**，都不可以有任何加减之外的运算；4、若有积分项，**被积函数应为输入变量**，如$\int_{-无穷}^{t} r(\tau)\,d\tau$，其实积分就是微分的负次幂。5、不允许对函数本身、各阶导函数做任何形式的**复合运算**。

- 判断**定常**系统：微分/差分方程系数为常数，则定常。
- RLC 电路微分方程：时间常数 T1=L/R, T2=RC

基尔霍夫电压定律+电流 i 用其与输出量的关系代替。

多回路：回路电流法、节点电压法

- 状态变量指能确定系统运动状态的最少数目的一组变量。一个用 n 阶微分方程描述的系统就有 n 个独立的变量。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \quad \text{状态方程}$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \quad \text{输出方程}$$

A 为系统矩阵或对象系数矩阵、B 为控制向量/矩阵、C 为输出矩阵，D 为前馈矩阵（许多简单的系统 D = 0）

状态变量：电容-电压，电感-电流，质量-速度，弹簧-位移，液位-高度。在惯性环节中，D = 0。实际上，只要输入的阶次小于输出的阶次，均有 D = 0。

- **传递函数（零状态）**

当状态变量为输出变量及其各阶导数时，称相应的状态变量为相变量

- **方块图简化：综合点和引出点的前后移**

相邻同性质点可以交换

- **信号流图（SFG）：每个点后面需要一个信号**
- **梅森增益公式（利用率克莱姆法则）**

$$M=\frac{1}{\Delta}\sum_{i}^{n}P_i\Delta_i$$

Pk=第 k 条前向通道的通道增益；Δ=1-（所有不同回路的增益之和）+（每两个互不接触回路增益乘积之和）-（每三个互不接触回路增益乘积之和）+… ；Δk=信号流图中除去与第 k 条前向通道 Pk 相接触的支路和节点后余下的信号流图的特征式。

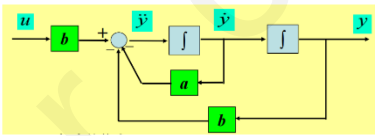
不接触回路：各回路之间没有任何公共节点，则称为不接触回路，反之称为接触回路

步骤：1.确定前向通路数 n；2.确定回路增益；3.确定不接触回路并计算余子式；4.计算特征式；5.计算 M

- **仿真图（理想积分器、理想放大器和理想加法器）**

$$\ddot{y}=bu-a\dot{y}-by$$

把输出的最高次微分项放到方程左边



若将系统的状态变量选择为仿真图中各个**积分器的输出**

$$\dot{y}=\dot{x}_2 \qquad \dot{y}=x_2=\dot{x}_1 \qquad y=x_1$$

可以很容易地得到系统的状态变量（称为相变量）；进一步地，可以直接得到系统的状态空间模型。此时的仿真图也称为状态变量图。

- 相变量（输入无微分项） $x_1=y(t)$ $x_2=\dot{x}_1=\dot{y}(t)$

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=u$$

$$x_n=\dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}(t) \qquad y^{(n)}(t)=\dot{x}_n$$

$$\dot{x}_n+a_{n-1}x_n+a_{n-2}x_{n-1}+\cdots a_1x_2+a_0x_1=u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}[u]$$

$$y=x_1=[1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0]x$$

标准形式： $\dot{x}=A_cx+b_cu$，$y=cx$

注意下标

Companion matrix　友矩阵，能控标准型(A_c, b_c)

- 相变量（输入有微分项）

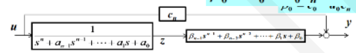
$$(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0)y=(c_nD^n+c_{n-1}D^{n-1}+\cdots+c_1D+c_0)u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=c_n+\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

x1=z, x2=x1’ …

状态方程同上，输出方程改变

$$\beta_{n-1}=c_{n-1}-a_{n-1}c_n$$
$$\beta_{n-2}=c_{n-2}-a_{n-2}c_n$$
$$\vdots$$
$$\beta_1=c_1-a_1c_n$$
$$\beta_0=c_0-a_0c_n$$



$$y=(\beta_{n-1}D^{n-1}+\beta_{n-2}D^{n-2}+\cdots+\beta_1D+\beta_0)z+c_nu$$

$$z=\frac{u}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

w=n　$y=[(c_0-a_0c_n)\ \ (c_1-a_1c_n)\ \ \cdots\ \ (c_{n-1}-a_{n-1}c_n)]x+c_nu$

w<n　$y=[c_0\ \ c_1\ \ \cdots\ \ c_w\ 0\ \ \cdots\ \ 0]x=cx$

- 标准型（对角标准型、能控标准型、能观标准型）

对角：

$$Y(s)=\beta_nU(s)+f_1Z_1(s)+f_2Z_2(s)+\cdots$$

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}u=\Lambda z+b_nu$$

$$y=[f_1\ \ f_2\ \ \cdots\ \ f_n]z+\beta_nu=c_nz+d_nu$$

Bn 全为 1，dn 在 w!=n 时为 0。正则标准型与正则变量

对于 MIMO，b,c,d 变为矩阵

Eg:

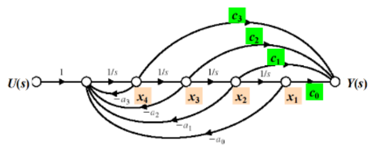
$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s(s^2+7s+12)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+4}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{2}{3}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}x$$

能控：就是上面输入有微分项的形式，状态方程只与 A,b 有关【有限时间内状态可任意转移】



$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

能观：状态方程只与 A,C 有关，是能控的转置【有限时间内输入与输出得状态初值】

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{c_ws^w+c_{w-1}s^{w-1}+\cdots+c_1s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$\dot{x}=A_ox+B_ou$$
$$y=c_ox+Du$$

$$A_o=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$c_o=[0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1]$$

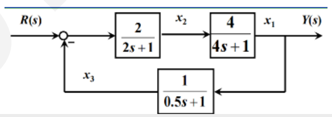
$w=n, c_n\neq0$：

$$B_o=\begin{bmatrix}c_0-a_0c_n\\c_1-a_1c_n\\c_2-a_2c_n\\ \vdots\\c_{n-1}-a_{n-1}c_n\end{bmatrix}, \quad D=c_n$$

$w<n, c_n=0$：

$$B_o=\begin{bmatrix}c_0\\ \vdots\\c_w\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, \quad D=0$$

方块图到状态空间模型：每个函数输入输出作为状态变量



然后对每个方块列方程

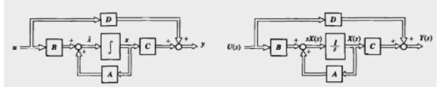


图 2-19 线性连续时间系统结构图　图 2-20 线性连续时间系统结构图的拉氏变换形式

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$
$$Y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)=G(s)U(s)$$

多变量传递函数的矩阵表示

$$Y(s)=[I+G(s)]^{-1}G(s)U(s)$$

其中 G(s)=G3G2G1

直接通过矩阵形式表达传递函数，然后拉式逆变换得微分。

- **机械动力学系统** f,x 等正方向均一致，摩擦力与质量并联，对于每个位置点，非外力流都朝外

$f_M=Ma=MDv=MD^2x$，$f_K=K(x_c-x_d)\to f_K=Kx_c$

$f_B=B(v_e-v_f)=B(Dx_e-Dx_f)$

- **机械旋转系统**

$T_J=J\alpha=JD\omega=JD^2\theta$，$T_K=K(\theta_c-\theta_d)$，$T_B=B(\omega_e-\omega_f)=B(D\theta_e-D\theta_f)$

- **液位系统数学模型** R：液阻

$\Delta q_{in}-\Delta q_{out}=dV/dt=A_1d\Delta h_1/dt$，

$\Delta q_{in}=K_u\Delta u$，$q_{out}=\alpha f\sqrt{h_1}$，$\Delta q_{out}=\Delta h_1/R$

$A_1dh_1/dt=K_uu-h_1/R$，　$1/R=\partial q_{out}/\partial h_1$

- **热力系统数学模型**

热量$Q=q/D=C(\theta_2-\theta_1)$热流率$q=CD(\theta_2-\theta_1)$

热阻$q=(\theta_3-\theta_4)/R$

- **直接蒸汽加热器模型**（流量 q，蒸汽量 W，蒸汽热焓 H）

$Q_c+Q_s=Q_a$，$Q_c=q_cc_c\theta_c$，$Q_s=WH$，$Q_a=q_ac_a\theta_a$

$\theta_{a0}=\theta_{c0}+H/q_ac\cdot W_0$

动态：$dQ/dt=Q_c+Q_s-Q_a$，$Q=V\gamma c\theta_a$

V 是体积，伽马是密度。动态-稳态=增量方程

$dQ/dt=V\gamma c\cdot d\theta_a/dt=C\cdot d\theta_a/dt$

$C\cdot d\theta_a/dt+q_ac\theta_a=q_cc\theta_c+WH$

- **单位抛物线** r(t)=1/2t^2，yss+yt=y
- **暂态响应**

特征方程 p 重根$A_{q_1}e^{\lambda t}+A_{q_2}te^{\lambda t}+\cdots+A_{q_p}t^{p-1}e^{\lambda t}$

复数根（成对以共轭复数形式出现）

$\lambda_{k,k+1}=\sigma\pm j\omega_d$ ——>$Ae^{\sigma t}sin(\omega_dt+\phi)$

- 阻尼比和振荡频率$a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$

a_1为有效衰减常数，$a_1'=2\sqrt{a_2a_0}$ 临界衰减常数

$\zeta=a_1/a_1'=a_1/2\sqrt{a_2a_0}$，$\omega_n=\sqrt{a_0/a_2}$

$\lambda^2+2\zeta\omega_n\lambda+\omega_n^2=0$

$\lambda_{1,2}=\sigma\pm j\omega_d=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$\zeta<0$：不稳定；$\zeta=0$：临界稳定；$\zeta>0$：稳定；

$0<\zeta<1$：欠阻尼；$\zeta>1$：实根、过阻尼；$\zeta=1$：重根；

- **拉氏变换（重根+共轭复根）**

$$:A_{13}\frac{t^2}{2!}e^{s_1t}+A_{12}te^{s_1t}+A_{11}e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

$A_{13}/(s-s_1)^3+A_{12}/(s-s_1)^2+A_{11}/(s-s_1)+A_2/(s-s_2)$

$$A_{13}=[(s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}]_{s=s_1}$$
$$A_{12}=\{\frac{d}{ds}[(s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}]\}_{s=s_1}$$
$$A_{11}=\{\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}[(s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}]\}_{s=s_1}$$

共轭复根

$$y(t)=A_1e^{\left(-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t}+A_2e^{\left(-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t}=2|A_1|e^{-\zeta\omega_nt}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)$$

$P(s)/(s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2)$

$=A_1/\left(s+\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)+A_2/\left(s+\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)$

S1 为具有正虚部的根，A1 和 A2 都是复数，且共轭

- **时间常数 T：使 e 的指数部分为-1 的时间值**

上升时间、峰值时间、超调量、最大偏离量 Mp、最大偏差 B、调节时间、延迟时间、衰减比 n=\sigma/B ‘、稳态误差 ess

平方误差积分指标（ISE）	$J_1=\int_0^\infty e^2(t)dt$
时间乘平方误差积分指标（ITSE）	$J_2=\int_0^\infty te^2(t)dt$
绝对误差积分指标（IAE）	$J_3=\int_0^\infty \lvert e(t)\rvert dt$
时间乘绝对误差积分指标（ITAE）	$J_4=\int_0^\infty t\lvert e(t)\rvert dt$

- **一阶系统**$1/(Ts+1)$

单位阶跃：$1-e^{-t/T}$。Td=0.69T,Tr=2.20T,Ts=3T(5%y(inf)) Ts=4T(2%y(inf))。比例-稳态误差下降，积分-无误差

单位脉冲：$1/T\cdot e^{-t/T}$　单位斜坡：$t-T+Te^{t/T}$

单位抛物线：$t^2/2-Tt+T^2(1-e^{-t/T})$

- **二阶系统**【开环$G(s)=\omega_n^2/s(s+2\zeta\omega_n)$】

上升时间：$T_r=(\pi-arccos\zeta)/(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$

约$(2.16\zeta+0.60)/\omega_n$

峰值时间：$T_p=\pi/\omega_d=\pi/(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$，取决于虚部

超调量：$\sigma=(y(T_p)-y_{ss})/y_{ss}=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$，取决于 zeta

最大偏离量：$M_p=1+\sigma$

调节时间：5%：$T_s\approx3/\zeta\omega_n$，2%：$T_s\approx4/\zeta\omega_n$

取决于实部

衰减比：$T_3=3\pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$y(T_3)=1+e^{-3\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$，$n=\sigma/B'=e^{2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$，取于 zeta

具有零点的二阶系统只影响系数的求解结果，如终值定理

- **高阶系统**

- 列写 n 阶微分方程，然后直接求取微分方程的解
- 利用二阶系统近似高阶系统（远离且附近无零极点）

不能忽略零点使得超调量增加，响应加快，极点反之

- **状态方程求解** STM 状态转移矩阵

$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}[(SI-A)^{-1}]$　e^{At}的性质：

1. $A=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]\Leftrightarrow e^{At}=diag[e^{\lambda_1t},e^{\lambda_2t},\cdots,e^{\lambda_nt}]$
2. $\frac{d}{dt}\exp(At)=A\exp(At)=\exp(At)A$
3. $\exp(At)\mid_{t=0}=I$
4. $[\exp(At)]^{-1}=\exp(-At)$
5. $\exp(At)\exp(Bt)=\exp[(A+B)t]$若方阵 AB=BA
6. $\exp(T^{-1}ATt)=T^{-1}\exp(At)T$

STM 性质：

1. $\dot{\Phi}(t,\tau)=A\Phi(t,\tau)$且$\Phi(t_0,t_0)=I$
2. $\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)=\Phi(t_2,t_0)$，对任意 t_0,t_1,t_2
3. $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)\ \Rightarrow\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$
4. $\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\cdot\Phi(t_2)=\Phi(t_2)\cdot\Phi(t_1)\ \Rightarrow\ \Phi(t)\cdots\Phi(t)=\Phi^q(t)=\Phi(qt)$，q是正整数
5. $\Phi(t)$为非奇异阵（t为有限值）

对于线性时不变系统，$\Phi(t)=e^{At}=\exp[At]$

$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$　　$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

计算：1、exp 展开；2、拉氏变换；3、A 对角化

3. 模态矩阵 T

$A=T\Lambda T^{-1}\Rightarrow exp(At)=exp(T\Lambda T^{-1}t)=Texp(\Lambda t)T^{-1}$

友矩阵的特征值

一般矩阵特征向量 vi 正比于 adj[λi I-A] 的任意非零列

$$T=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\cdots&\lambda_n^2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

$A=T^{-1}AT=diag[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$

全解计算 1. 时域 2. 拉氏变换

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau,\ t>t_0$$

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(\beta)Bu(t-\beta)d\beta$$

2. 拉氏变换

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+L^{-1}[\Phi(s)BU(s)]$$

用性质 3 求逆，性质 1 求$A=\dot{\Phi}(0)$[注意是一阶导数]

·劳斯稳定性判据

必要非充分：特征多项式系数同号且非零常数，只能判断不稳定

充要：劳斯阵列首列符号无变化

·1.首列无零元素。二阶：特征多项式系数同号；三阶：系数全正且 a2a1>a3a0。任意阶 s1 和 s0 只有一个元素

【劳斯阵列任意一行可以同时乘以一个正数使运算简便】

·2.首列有零元素【1.用很小正数ϵ代替 0;2.用 1/x 代替 s;3.特征多项式 Q(s)乘上(s+1)】

【第一列有 0 但是无符号变化，说明有纯虚根，不稳定（临界稳定）】

·3.全零行【一定是 s 奇数次行】

以全零行上一行 sn 元素作为系数构造辅助方程 U(s)=b1s^n+b2s^(n-2)+⋯，辅助方程的根是原方程根的一部分，再用辅助方程一阶导数的系数代替全零行。全零行上两行成比例，辅助方程为偶次幂。根成对出现，系统不稳定。【另外，开环、闭环稳定不能相互推】

·稳定裕度： $s=z-\sigma$把虚轴左移σ

【特征方程$\Delta\equiv|sI-A|=0$，A 的所有特征根负实部则稳定】

·稳态误差（系统型别由开环传递函数判断）e=r-y

$E(s)=Y(s)/G(s)$，$e(t)_{ss}=\lim_{s\to0}[sE(s)]=\lim_{s\to0}s[s^mY(s)]/K_m$（s->0）

再次终值定理：$e(t)_{ss}=D^my(t)_{ss}/K_m$

"0" 型系统：定常误差信号产生定常的被控变量。

"1" 型系统：定常误差信号产生定常的被控变量变化率。

"2" 型系统：定常误差信号产生定常的被控变量的二阶导数。

也可以用输入算：$e(t)_{ss}=\lim sE(s)=\lim s[R(s)/(1+G(s))]s->0$

$e(t)_{ss}=\lim_{s\to0}s^{m+1}R(s)/(K_m+\lim_{s\to0}s^m)$，K 是前向传递函数增益

0、1、2 型单位反馈系统稳态响应特征分析及结论仅适用于稳定系统。

·稳态误差系数(适用于稳定系统)

稳态位置(阶跃)误差系数 $K_p=\lim G(s)H(s)$

稳态速度(斜坡)误差系数$K_v=\lim_{s\to0}sG(s)H(s)$

稳态加速度(抛物线)误差系数$K_a=\lim_{s\to0}s^2G(s)H(s)$

减小/消除稳态误差：提高型别　增大稳态误差系数　改变结构

非单位负反馈的等效

$$Y(s)/R(s)=G/[1+G\cdot H]=N/D=G_{eq}/(1+G_{eq}),$$
$$G_{eq}=N/(D-N)$$

·根轨迹概述

1）闭环系统根轨迹增益等于开环系统前向通道根轨迹增益 K1r

2) 闭环零点由开环前向通道传递函数零点和反馈通道传递函数极点组成 3) 闭环极点与开环零、极点和根轨迹增益有关

两个条件：$|G(s)H(s)|=1,\angle G(s)H(s)=(1+2h)\pi$，$h=0,\pm1,\pm2,\dots$ K 正则奇数倍，负则偶数倍

·根轨迹绘制

1、根轨迹**始于开环极点，终于开环零点**

2、设开环有限零点数为 w，有限极点数为 n，则根轨迹的**分支数**为 max(n,w)，它们是连续的，并且对称于实轴。

3、**实轴**上的某一区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹。

4、**渐近线** n−w 条根轨迹分支沿着与实轴交角为$\gamma_a=(2h+1)\pi/(n-w)$

交点为$\sigma_a=(\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{w}z_i)/(n-w)$

5、**分离点和分离角**（必定在根轨迹上），当l条根轨迹分支进入并立即离开分离点时，分离角可由$(2k+1)\pi/l$决定。

分离点的坐标 d 是方程 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{d-z_j}$ **的解。**

结论1：根轨迹离开开环极点的出射角(起始角)

$$\varphi_{p_k}=(1+2h)180^\circ+\sum_{j=1}^{w}\angle(p_k-z_j)-\sum_{\substack{i=1\\i\ne k}}^{n}\angle(p_k-p_i)$$

结论2：根轨迹到达开环零点的入射角(终止角)

$$\psi_{z_k}=(1+2h)180^\circ+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_k-p_i)-\sum_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{w}\angle(z_k-z_j)$$

6、**起始角与终止角**

7、**虚轴交点**

S=jw 代入特征方程；劳斯判据强制为 0+辅助方程

8、**交叉点**：如果在根轨迹上的给定点处 W(s) 的前 y-1 阶导数等于零，则有 y 条根轨迹分支在该点相聚又分离

9、系统**根之和守恒**：对于开环传递函数 w ≤ n-2 的系统，当系统增益由 0 变化到∞时，系统的根之和是常数。换言之，系统的根之和与 K 无关。

·正反馈根轨迹

4、渐近线夹角$\gamma_a=2h\pi/(n-w)$

3、实轴根轨迹：

右侧偶数零极点

6、去掉第一项

·参数根轨迹（将特征方程除以不含参数项，得等效开环 G**）**

$s^2+Ts+1=0$，

$1+Ts/(s^2+1)=0$，

$G_{eqp}(s)=Ts/(s^2+1)$

这里等效只对闭环极点，而非闭环零点。

若 G(s)H(s) 出现零极点对消情况，将对消的极点也作为一个闭环极点补上（用闭环特征方程分析）

开环极点：n=5, $p_1=p_2=\cdots$

开环零点：w=0

渐近线：$\gamma=\frac{(2h+1)180^\circ}{n-w}=36^\circ,108^\circ,\cdots$

$\sigma_0=\frac{-3-3+0-1-3.5}{n-w}=2.1$

分离点：$W(s)=\cdots$

$\frac{d(W(s))}{ds}=0\Rightarrow d=$

或 $\frac{1}{d-p_1}+\frac{1}{d-p_2}+\cdots=\frac{1}{d-z_1}+\frac{1}{d-z_2}+\cdots$

出射角：$\varphi_{1D}=(2h+1)180^\circ-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4-\varphi_5$

$=108^\circ$

$\therefore\varphi_{2D}=-108^\circ$

虚轴交点：S=jw 代入

或特征方程 Routh 表

$\because K>0$

令 $\cdots=0\Rightarrow K=\cdots$

∴辅助方程=0

$\therefore S_{1,2}=\cdots$

$\therefore W=\cdots$

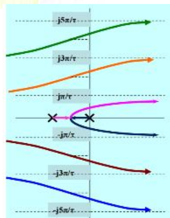
·纯滞后

1.pade 近似

$$e^{-\tau s}=\frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s}=-\frac{s-\frac{2}{\tau}}{s+\frac{2}{\tau}}$$

2. 幅相条件

$$|G_1(\sigma+j\omega)H_1(\sigma+j\omega)|e^{-\sigma\tau}=1$$



·多参数·系统性能分析

主导极点（1 个或 2 个）特征：附近无它零极点；距虚轴较近（其实部绝对值小于其它极点实部绝对值的 1/5）

·补偿器设计

$$\angle G_1(\sigma+j\omega)H_1(\sigma+j\omega)=(2h+1)\pi+\omega\tau$$

附加极点：超调减小，稳态时间可能增大或减小

附加极点和零点：若零点 z 在极点 p3 的左侧，A3 为负，响应与仅有复数极点的系统响应相似，超调减小，峰值时间加大。

控制器	瞬态响应	稳态（对阶跃响应的误差）
比例 (P)	加快	通常非零
微分 (D)	增大阻尼和稳定性	通常非零
积分 (I)	降低稳定性	零稳态误差
PI	P, I结合	结合P, I
PD	P, D结合	结合P, D
PID	P, I, D结合	结合P, I, D

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)^r\cdots}{(j\omega)^m(1+j\omega T_a)[1+(2\zeta/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2]\cdots}$$

对数幅值：

$$LmG(j\omega)=LmK_m+Lm(1+j\omega T_1)+rLm(1+j\omega T_2)+\cdots-mLm(j\omega)-Lm(1+j\omega T_a)-Lm\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]-\cdots$$

相角方程：

$$\angle G(j\omega)=\underbrace{\angle K_m}_{0^\circ/-180^\circ}+\underbrace{\angle(1+j\omega T_1)}_{\tan^{-1}\omega T_1}+r\angle(1+j\omega T_2)+\cdots-\underbrace{m\angle(j\omega)}_{m90^\circ}-\angle(1+j\omega T_a)-\underbrace{\angle\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]}_{\tan^{-1}\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}}-\cdots$$

浙江大学控制学院 2023

若零点 z 在极点 p3 的右侧，A3 为正，超调比仅有复数极点的系统响应大，峰值时间减小。

控制器：如下面加粗的补偿器增加一个稳定的零点和一个稳定的极点，若零点的幅值小于极点，则为超前控制器；反之，滞后控制器微分作用超前近似

一般使用补偿器 K*(s-z)/(s-p),然后常用零极点对消

·Bode 图

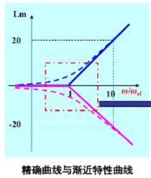
$$K_m\qquad(j\omega)^{\pm m}\qquad(1+j\omega T)^{\pm r}\qquad\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm p}$$

$$K_m\qquad(j\omega)^{\pm1}\qquad(1+j\omega T)^{\pm1}\qquad\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm1}$$

最小相位环节	非最小相位环节
比例环节 $K(K>0)$	比例环节 $K(K<0)$
惯性环节 $\frac{1}{Ts+1}(T>0)$	惯性环节 $\frac{1}{-Ts+1}(T>0)$
一阶微分环节 $Ts+1(T>0)$	一阶微分环节 $-Ts+1(T>0)$
振荡环节 $\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}$	振荡环节 $\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}-\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}$
二阶微分环节 $\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1$	二阶微分环节 $\frac{s^2}{\omega_n^2}-\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1$
积分环节 $\frac{1}{s}$	
微分环节 s	

$LmG(jw)=20\lg|G(jw)|$

典型环节：



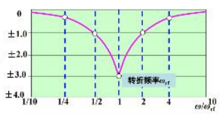
精确曲线与渐近特性曲线

精确曲线与渐近特性曲线的偏差如下

✓在转折频率处：3dB　$Lm(1+j\omega T)|_{\omega=\frac{1}{|T|}}=20\log\sqrt{2}=3$ dB

✓距转折频率1个倍频(octave)处：1dB

✓距转折频率2个倍频(octave)处：0.26dB



$$Lm(1+j\omega T)|_{\omega=\frac{1}{|T|}}=20\log\sqrt{2}=3\ \text{dB}$$

✓在转折频率处有最大误差3dB

惯性环节$(1+\mathrm{j}\omega T)^{-1}$

转折频率$\omega_{cf}=1/T$

惯性环节极坐标图为圆，一阶微分环节则实部恒为 1

$$-20\lg\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}\approx-20\lg(\omega^2T^2)=-40\lg(\omega T)=-40\lg\omega-40\lg T$$

振荡环节 $1/(T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1)$

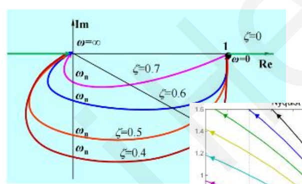
$\omega_{cf}=1/T$，-90°

-40dB/dec

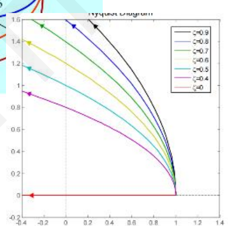
$$\angle\left[1+j2\zeta\omega T+(j\omega T)^2\right]^{-1}=-\tan^{-1}\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}=\begin{cases}-\tan^{-1}\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2} & \omega\le1/T\\-\left[180^\circ-\tan^{-1}\frac{2\zeta\omega T}{\omega^2T^2-1}\right] & \omega\ge1/T\end{cases}$$

当$\zeta<0.707,Lm[1+j2\zeta\omega/\omega_n+(j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$会出现峰值，峰值幅度和该点频率为$M_r=1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$，$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

若$\zeta=0$，则 1/T 处幅值为无穷，相频跳变 180



若$-1<\zeta<0$，关于实轴对称即可



二阶微分环节$T^2(j\omega)^2+2\zeta T(j\omega)+1$

$Im^2/4\zeta^2=1-Re$，抛物线上半支，定点（1，0）

$\zeta<0.707$，$M_r=(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$，$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

幅频特性先减后增

若$\zeta=0$，为射线

对于环节 $\frac{1}{1+j2\zeta_1\frac{\omega}{\omega_1}+\left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)^2}$

由 $\mathrm{Lm}\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{-1}=-20\lg\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}$

转折频率ω_1处，对数幅值

$20\lg\frac{1}{2\zeta_1}=13.98$, → $\zeta_1=0.1$

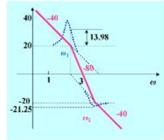
对于环节 $1+j2\zeta_1\frac{\omega}{\omega_2}+\left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)^2$

峰值为

$M_r=2\zeta_2\sqrt{1-\zeta_2^2}$ → $20\lg2\zeta_2\sqrt{1-\zeta_2^2}=-1.25$

→ $\zeta_{2,1}=0.5$; $\zeta_{2,2}=0.866$(舍去)

注意这两个二次项情况的不同！



传递函数：$G(s)=\frac{28.4567\left[1+\frac{s}{5.3348}+\left(\frac{s}{5.3348}\right)^2\right]}{s^2\left[1+0.2\frac{s}{1.6870}+\left(\frac{s}{1.6870}\right)^2\right]}$

若$-1<\zeta<0$，关于实轴对称即可

纯滞后环节$e^{-j\tau\omega}$

最小相位：对于线性系统而言，增益为正，在右半 S 平面上既无极点也无零点，同时无纯滞后环节的系统是最小相位系统。

1 最小相位环节与非最小相位环节的幅频特性**关于实轴对称**；在 2 具有相同幅频特性的系统中，最小相位系统的**相角变化范围最小**。3 最小相位系统的幅频特性和相频特性存在严格确定的关系，因而，由对数幅频特性即可**唯一**地确定其相频特性。

4 最小相位系统，如果其对数幅频特性在某个频率附近相当宽的频率段内斜率约为 20kdB/dec (k 为整数)，则对应的相角约为 **90k°**

步骤：1.典型环节；2.转折频率；3.型别+最小转折频率；4.各频率区间的斜率+转折点的幅值；5.画。

第 4 步：

- 在低频段任取一点 ω_0，计算 $\mathrm{Lm}\left[\frac{\pm K}{s^\nu}\right]=20\lg K-20\nu\lg\omega_0$。通常考虑取 $\omega_0=1$（注意是否在低频段，不在则作延长线）、$\omega_0=\omega_{\min}$、$\omega_0=0$（仅当系统为 0 型系统时）。
- 求低频段直线与横轴的交点（即此环节截止频率 ω_c）。有：$\omega_c=K^{\frac{1}{\nu}}$。注意：交点有可能在延长线上。

·传递函数的实验确定方法

$$Lm(\omega_a)-Lm(\omega_b)=k[\lg\omega_a-\lg\omega_b]$$

系统的开环幅相曲线绘制

概略开环幅相曲线应反映三个要素：

1. 起点（$\omega=0_+$）和终点（$\omega=\infty$）。

2. 与实轴的交点。交点处频率 $\omega=\omega_x$ 称为穿越频率，满足以下条件：

$$\mathrm{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0\text{ 或 }\phi(\omega_x)=\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x)=k\pi$$

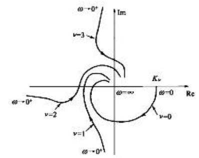
开环幅相曲线与实轴的交点坐标值为 $\mathrm{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=G(j\omega_x)H(j\omega_x)$。

3. 变化范围：象限与单调性。

二型:

若 $\sum T_{分子}-\sum T_{分母}>0$，起点在实轴下方；

若 $\sum T_{分子}-\sum T_{分母}<0$，起点在实轴上方；



对于 1 型系统，开环幅相曲线低频段的渐近线由下式决定：

$$V_x=\lim_{\omega\to0}\mathrm{Re}[G(j\omega)H(j\omega)]$$

幅相曲线与实轴交点处的频率可令 $\mathrm{Im}[G(j\omega)H(j\omega)]=0$ 得到；与虚轴交点处的频率可令 $\mathrm{Re}[G(j\omega)H(j\omega)]=0$ 得到。

若开环系统存在**等幅振荡**环节，重数 l 为正整数，即开环传递函数具有以下形式：

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{\left[\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}+1\right]^l}G_1(j\omega)H_1(j\omega)$$

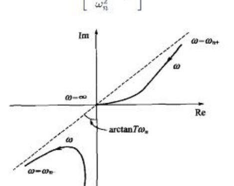
当ω趋于ωn 时，开环系统的幅值和相角满足：

$G(j\omega_{n-})H(j\omega_{n-})$

$=\infty\angle G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)$

$G(j\omega_{n+})H(j\omega_{n+})=\infty$

$[\angle G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)-l\times180^\circ$



·奈奎斯特稳定性判据

ZR=PR-N

Nyquist 判据：反馈控制系统稳定的充分必要条件是闭合曲线 Γ_{GH} 不穿过 $(-1+j0)$ 点，且逆时针包围 $(-1+j0)$ 点的圈数 N 等于开环传递函数 $G(s)H(s)$ 在 S 右半平面的极点数 P_R，即 $Z_R=0$。闭合曲线 Γ_{GH} 又称为 Nyquist 图。

若 Nyquist 曲线穿过(−1+j0)点,说明闭环特征方程存在共轭虚根，系统临界稳定。

$$Q(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6}\cdots\\s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7}\cdots\end{array}$$

纯滞后：

1) 当沿着闭合曲线Q的虚轴部分运动时（$0^+<\omega<+\infty$），$G(j\omega)H(j\omega)$在第三象限的极坐标图将顺时针旋转，接近于$-1+j0$点。因此，若滞后时间足够大，极坐标图将包围$-1+j0$点，系统将不稳定。

2) 当 $\omega\to+\infty$，由纯滞后带来的相角将无限增大，当 $|G(j\omega)H(j\omega)|\to0$，出现螺旋线。

纯滞后降低系统的稳定性，对闭环稳定性，需要重点关注（-1,0）点附近的幅相曲线的情况，在远离（-1,0）点的高频幅相曲线与稳定性关系不大

Gain crossover（截止频率——增益临界点）

$G(j\omega)$幅相曲线在幅值为1 [$\mathrm{Lm}G(j\omega)$=0dB] 的点处的频率称为 截止频率ω_c。

Phase margin angle（相位裕度）

相位裕度等于180° 加上截止频率处的负相位，用γ来表示，γ=180° +Φ，其中 $\angle G(j\omega_c)$=Φ是负

Phase crossover（穿越频率——相位临界点）

幅相曲线在该点处的相角是-180°。该点处的频率被称为穿越频率ω_x，也被称为幅值裕度频率

Gain margin（幅值裕度）

对于闭环稳定系统，如果系统的开环幅频特性再增大幅值裕度h倍，则系统将处于临界稳定状态。可以用频率点ω_x处的传递函数来表示，即 $|G(j\omega_x)|\cdot h=1$

在$G(j\omega)$极坐标图上，频率点 ω_x对应的幅值 $|G(j\omega_x)|=\frac{1}{h}$

在对数幅频曲线上，$\mathrm{Lm}h=-\mathrm{Lm}|G(j\omega_x)|$

相位裕度 45-60。裕度只对最小相位系统判断稳定性有用。h>6dB

·补偿器设计

二阶系统

截止频率与阻尼比、自然频率的关系：$\omega_c/\omega_n=(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}$

相位裕度与阻尼比的关系：$\gamma=\mathrm{arctg}(2\zeta\omega_n/\omega_c)=\mathrm{arctg}\left(2\zeta/\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}\right)$，$\zeta\le0.7$ 时，$\zeta=0.01\gamma$

带宽频率：**闭环**幅频特性下降到频率为零时的分贝值以下 3 分贝时对应的频率，取 min

$$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

谐振峰值 Mr，谐振频率 wr，带宽频率 wb，截止频率 wc，相位裕度泽塔，调节时间$T_S=3.5/\zeta\omega_n$或$\omega_nT_S=7/tan\gamma$

谐振峰值得到超调量

$$\sigma=\exp\left(-\pi\sqrt{\left(M_r-\sqrt{M_r^2-1}\right)/\left(M_r+\sqrt{M_r^2-1}\right)}\right)$$

高阶系统：若主导极点则采用二阶，若无则如下近似

谐振峰值：$M_r=1/|sin\gamma|$

超调量：$\sigma=0.16+0.4(M_r-1),1\le M_r\le1.8$

调节时间：$T_S=K_0\pi/\omega_c,K_0=2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2,1\le M_r\le1.8$

设计

（1）稳。相位裕度γ 不低于 45 度幅值裕度不低于 6dB

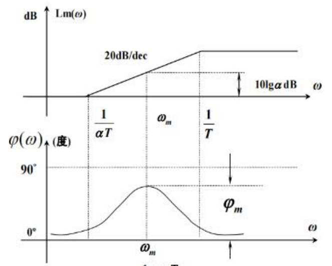
（2）快。相位裕度γ 在 45 度到 60 度之间，尽可能大的开环截止频率ωc（3）准。开环幅频起始斜率为-20dB/dec 或-40dB/dec 低频段应有较高幅值（4）抗干扰。开环高频段应有尽可能大的斜率。

串联超前

$\phi_m=\arcsin[(a-1)/(a+1)]$

$\alpha=(1+sin\phi)/(1-sin\phi)$

重新找到-10lga 作为新的 wm



无源超前网络 $\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$ 的Bode图

串联滞后

右下换β取倒数

$\phi_m=arcsin(1-\beta)/(1+\beta)$, β=(1+sin-phi)/(1-sin-phi)

找到满足裕度的角（+5~12）得到 wc,算 20lgβ和 wc=(5~10)1/T