

# 自动控制理论

## Automatic Control Theory

<http://course.zju.edu.cn> 学在浙大



## 第三章 CHAPTER 3

### 连续时间控制系统的时域分析



## 第三章关键词

---

- 全解 (Complete solution) —— 时间响应
- 稳态响应 (Steady-State Response)
- 暂态响应 (Transient Response)
- 系统动态特性 (Dynamics of System)
  - 一阶系统 (First-order System)
  - 二阶系统 (Second-order System)
- 时域性能指标 (Time-response specifications)
- 状态转移矩阵 (State transition matrix, STM)

# 第三章主要内容

---

- 概述
  - 引言
  - 典型输入
- 微分方程求解
  - 经典方法（时域方法）
  - 拉氏变换方法
- 控制系统时域性能指标与时域分析
- 高阶系统的暂态响应
- 状态方程的求解与分析

# 本节主要内容

---

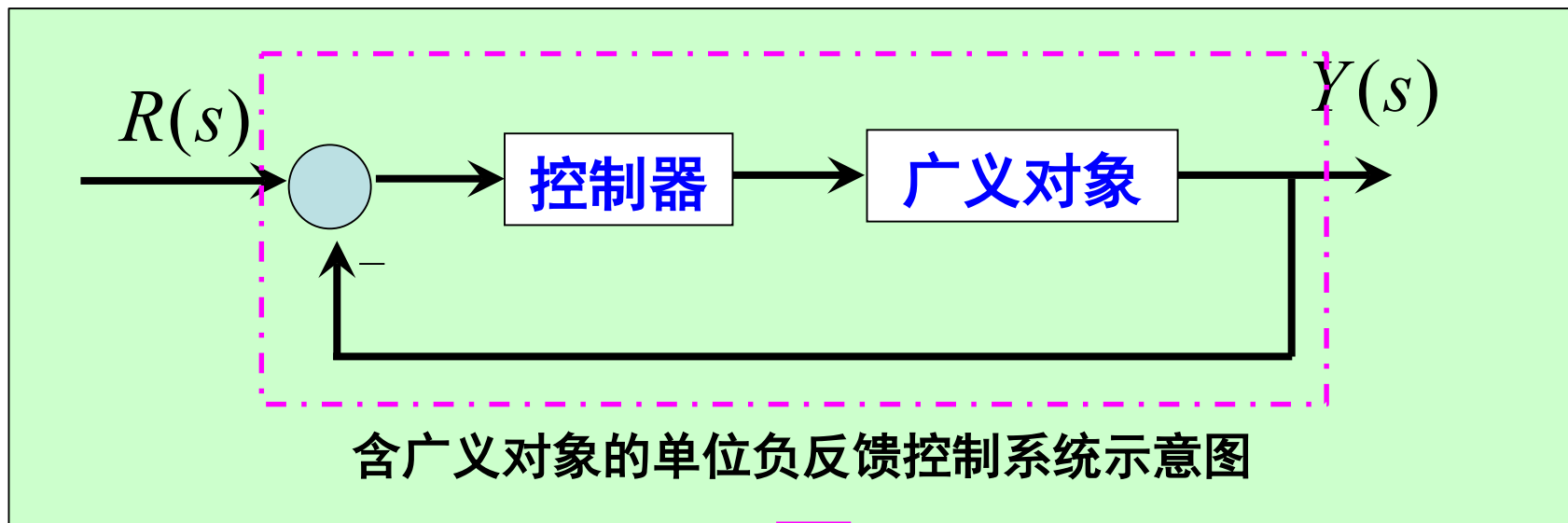
## ➤ 概述

- 引言
- 典型输入

## ➤ 微分方程求解

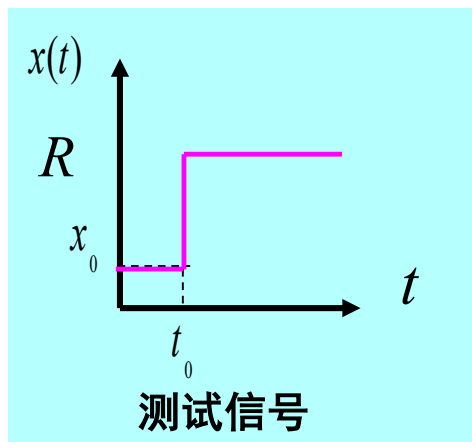
- 经典方法（时域方法）
- 拉氏变换方法

# 单位负反馈控制系统



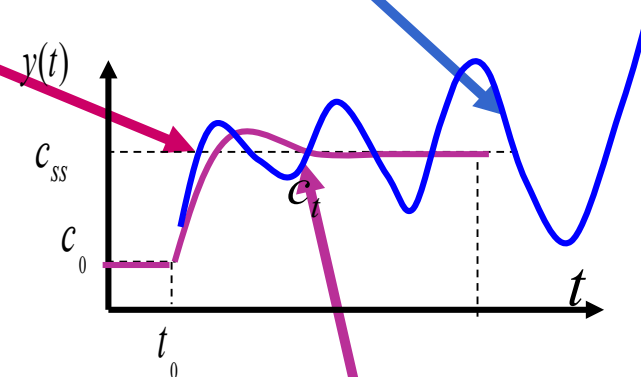
# 引言：从系统的角度

如果是这种情况，那么系统是不稳定的



新的稳态（如果系统是稳定的）

$$y(t) = y_{ss}(t) + y_t(t)$$



稳定系统响应



$$Y(s) = G(s)X(s)$$

稳定？若稳定，性能如何？满足控制系统要求？……

# 引言

- 控制系统的响应通常用**暂态响应**和**稳态响应**来刻画
- 稳定系统的**暂态响应**是响应中随时间而衰减直至消失的那部分
- 稳定系统的**稳态响应**是暂态过程结束后仍然持续的响应，稳态响应通常与驱动函数（输入）具有相同的函数形式
- **设计指标(Design specifications)**：针对特定输入指令（单位阶跃）的动态响应性能指标，以及期望的稳态精度等



# 引言

## ➤ 控制系统设计

- 通过控制器的设计，使系统的暂态及稳态响应达到某性能要求

## ➤ 控制系统的设计过程

- 判别系统是否稳定——第四章内容

- 规定被控系统性能指标的度量

- 常用的时域性能指标，如：

超调量、过渡过程时间、峰值时间、上升时间、稳态误差

(overshoot, settling time, peak time, rise time, steady-state error)

- 特定的输入信号（如 单位脉冲信号、阶跃信号、斜坡信号等）下控制系统的响应

# 本节主要内容

---

## ➤ 概述

- 引言

- 典型输入

## ➤ 微分方程求解

- 经典方法（时域方法）

- 拉氏变换方法

# 典型输入信号

- 控制系统输入信号的形式可以是：
  - 解析表达式
  - 特定曲线
  - 其他形式
- 需要采用**典型输入信号**对各种系统的响应进行比较
  - 信号的形式可以反映系统在实际工作过程中所遇到的输入信号或是它们的叠加
  - 数学表达上尽量简单，以便对系统响应进行分析
  - 可使控制系统工作在最不利的情况

# 典型输入信号

- 正弦函数 (Sinusoidal)

$$r = R \cos \omega t$$

- 幂级数函数 (Power series)

$$r = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

- 脉冲函数 (Impulse)

$$r = u_0(t)$$

- 阶跃函数 (Step)

$$r = u_{-1}(t)$$

- 斜坡函数 (Ramp)

$$r = u_{-2}(t) = t u_{-1}(t)$$

- 抛物线函数 (Parabolic)

$$r = u_{-3}(t) = \frac{t^2}{2} u_{-1}(t)$$

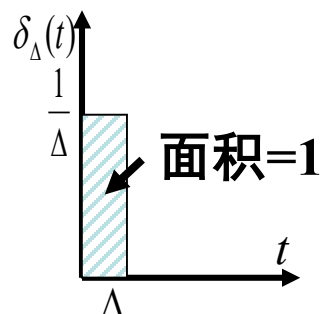
奇异函数  
(Singularity  
Function)

“最不利” 的输入信号：突变→阶跃，周期性→正弦函数

# 典型输入信号

## ➤ 单位脉冲函数

$$r(t) = \begin{cases} \delta(t) = 0, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = \infty, t=0 \end{cases}$$



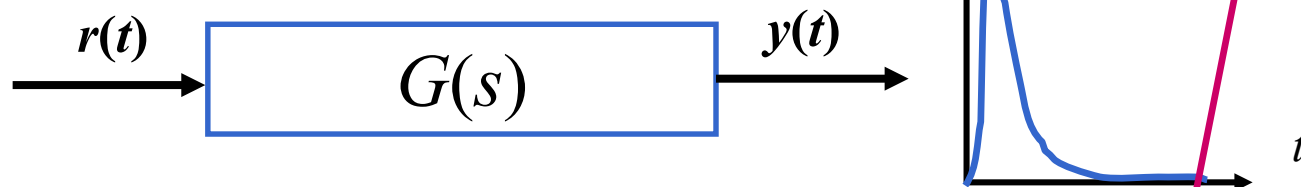
脉冲 (  $\delta(t)$  )

$$R(s) = L\{\delta(t)\} = 1$$

LT

$$L[r(t)] = 1$$

Impulse response function  
(单位脉冲响应或权函数)

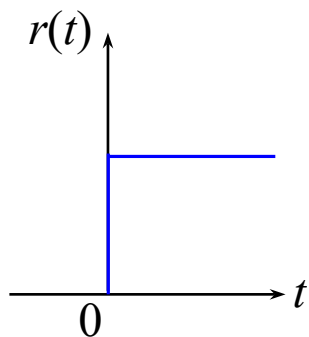


$$Y(s) = G(s)R(s) = G(s)$$

$$y(t) = L^{-1}[G(s)] = g(t)$$

系统单位脉冲响应的拉氏变换式即为系统的传递函数。

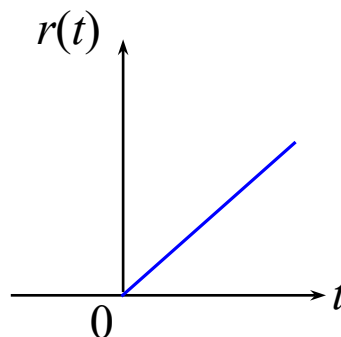
# 典型输入信号



➤ 阶跃

$$r = \begin{cases} R, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

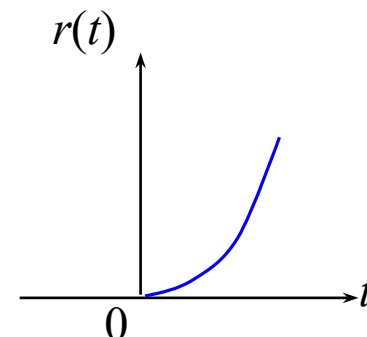
$$R(s) = L[r(t)] = \frac{R}{s}$$



➤ 斜坡

$$r = \begin{cases} Rt, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$R(s) = L[r(t)] = \frac{R}{s^2}$$



➤ 抛物线

$$r = \begin{cases} Rt^2, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$R(s) = L[r(t)] = \frac{2!R}{s^3}$$

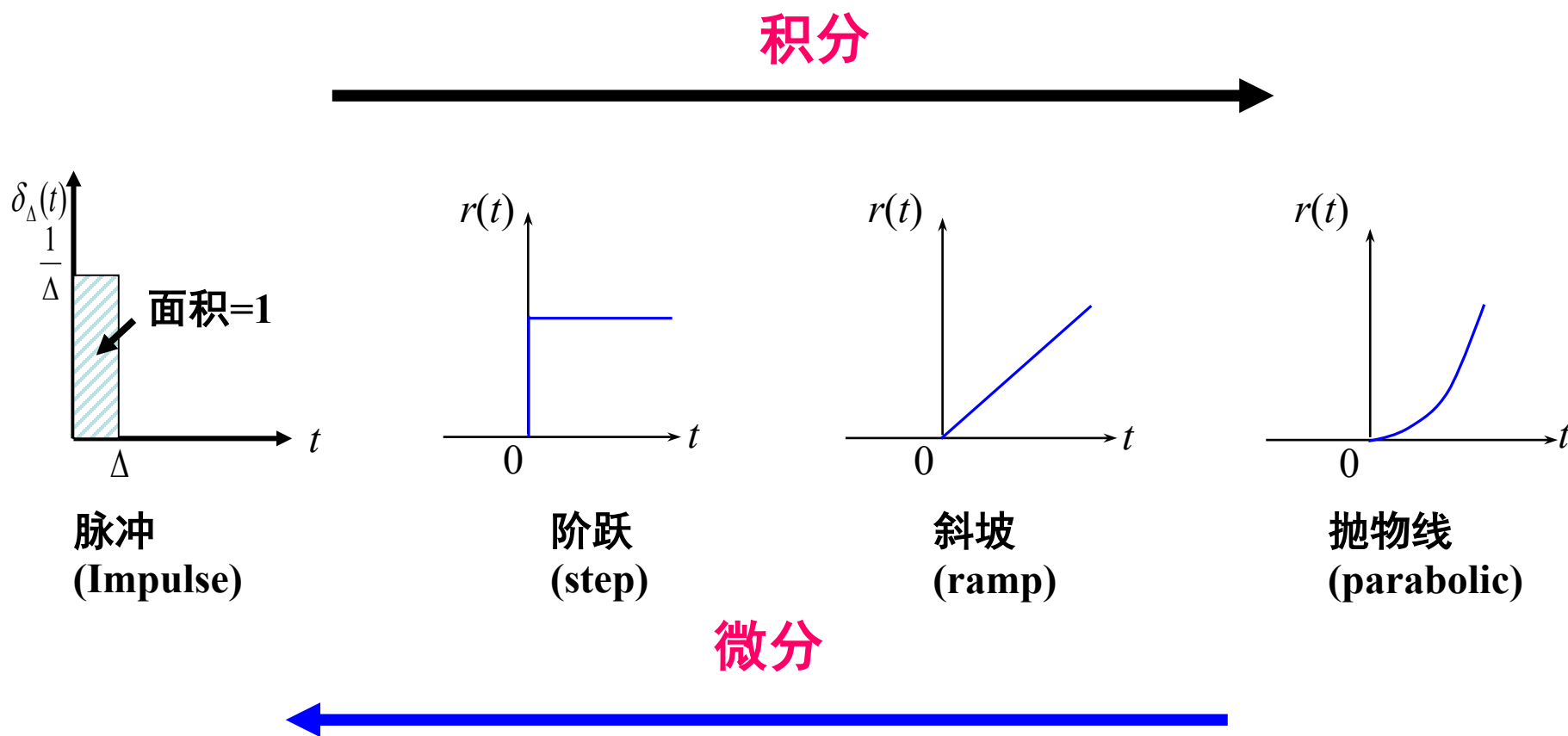
其中，当  $R=1$  时，相应的有单位阶跃、单位斜坡

其中，当  $R=1/2$  时，相应的有单位抛物线

# 典型输入信号

以这些函数作为输入信号得到的响应有什么关系？

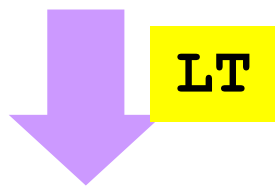
- 脉冲、阶跃、斜坡、抛物线函数之间可以通过微分或积分进行转换



# 典型输入信号

## ➤ 正弦函数

$$r = B \cos \omega t$$



$$R(s) = L[r(t)] = \frac{Bs}{s^2 + \omega^2}$$

- 正弦信号是**频率分析**的测试输入信号，并且通常用来模拟周期输入信号
- 对于**线性系统**，可将输入信号分解成典型信号的叠加。求系统响应时先求出系统在各信号单独作用下的输出，然后将它们叠加就得到系统总的响应。



# 本节主要内容

---

## ➤ 概述

- 引言

- 典型输入

## ➤ 微分方程求解

- 经典方法（时域方法）

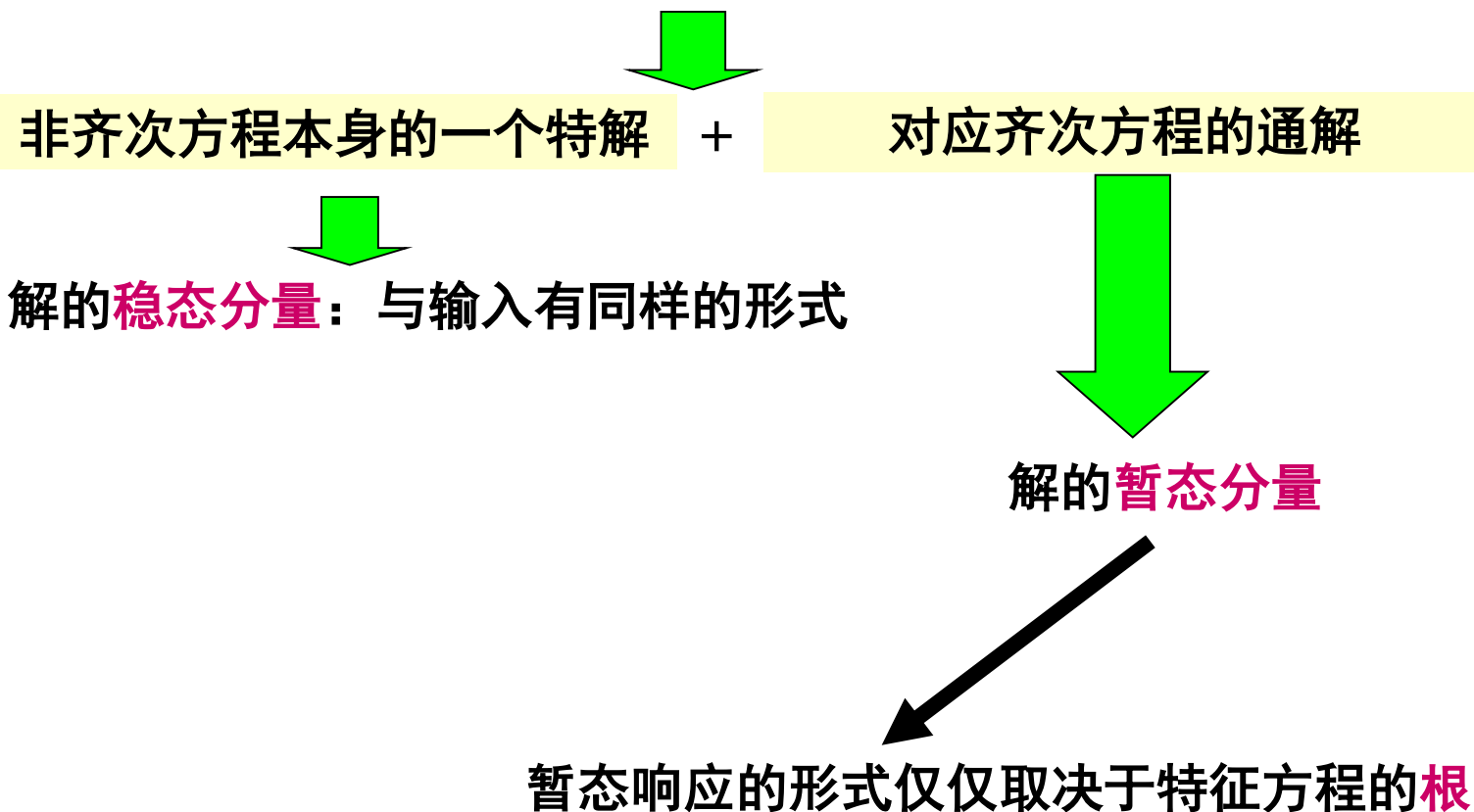
  - 稳态响应

  - 暂态响应

- 拉氏变换方法

# 数学方法

➤ 线性微分方程的一般解（响应）：



# 经典方法（时域方法）

---

## ➤ 稳态响应

- 正弦输入

- 多项式输入

  - 阶跃函数输入

  - 单位斜坡函数输入

## ➤ 暂态响应

# 稳态响应：正弦输入

- 输入量  $r$  假设为：

$$r = B \cos(\omega t + \alpha)$$

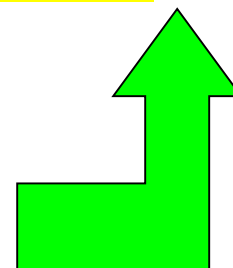
- 待解的微分方程具有如下形式

$$a_v D^v y(t) + a_{v-1} D^{v-1} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = r(t)$$

- 利用欧拉恒等式，可得  $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \quad \sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$r = B \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(B e^{j\alpha} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\mathbf{R} e^{j\omega t})$$



时间响应为：

$$y(t)_{ss} = \operatorname{Re}(\mathbf{Y} e^{j\omega t}) = |\mathbf{Y}| \cos(\omega t + \phi)$$

当输入为正弦信号时，系统的输出是频率与输入相同的正弦信号，只不过幅值与相位发生了变化

# 稳态响应：正弦输入

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \frac{\mathbf{R}(j\omega)}{a_v(j\omega)^v + a_{v-1}(j\omega)^{v-1} + \cdots + a_0}$$

$$D \Rightarrow j\omega$$

$$y \Rightarrow \mathbf{Y}(j\omega)$$

$$r \Rightarrow \mathbf{R}(j\omega)$$

时域转换到频域

$$a_v D^v y(t) + a_{v-1} D^{v-1} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = r(t)$$

$$G(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}(j\omega)}{\mathbf{R}(j\omega)} = \frac{1}{a_v(j\omega)^v + a_{v-1}(j\omega)^{v-1} + \cdots + a_0}$$

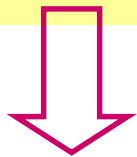
频率传递函数  
(频率特性)

# 稳态响应：正弦输入

➤ **例1：**考虑P20【例2-1a】串联电路的频率特性。

$$T_1 T_2 \frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e(t)$$

当输入为正弦信号时



$$T_1 T_2 (j\omega)^2 V_c(j\omega) + T_2 (j\omega) V_c(j\omega) + V_c(j\omega) = E(j\omega)$$

频率传递函数（频率特性）为：

$$G(j\omega) = \frac{V_c(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{T_1 T_2 (j\omega)^2 + T_2 (j\omega) + 1}$$

# 稳态响应：多项式输入

➤ 微分方程的一般形式为

$$a_v D^v y(t) + a_{v-1} D^{v-1} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = r(t)$$

多项式输入信号具有**幂级数**形式：

$$r(t) = R_0 + R_1 t + \frac{R_2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{R_k t^k}{k!}$$

$$t < 0, r(t) = 0$$

输入信号的  
最高阶项

假设解与输入信号有相同的形式

$$y(t)_{ss} = c_0 + c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{c_k t^k}{k!}$$

# 稳态响应：多项式输入

$$a_v D^v y(t) + a_{v-1} D^{v-1} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = r(t)$$



$$y(t)_{ss} = c_0 + c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{c_k t^k}{k!} \quad (**)$$



$$r(t) = R_0 + R_1 t + \frac{R_2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{R_k t^k}{k!} \quad (*)$$

输入信号式 (\*) 与假设的解式 (\*\*)

代入

原微分方程

➤ 令方程左右两端具有关于  $t$  的相同阶次项的相应系数相等可得系数

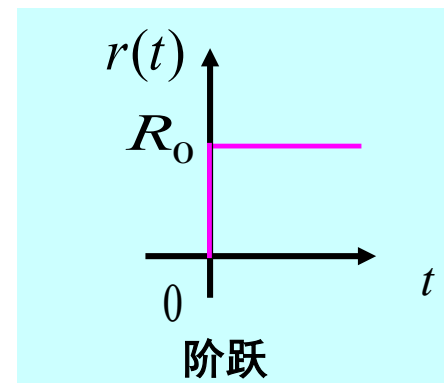
$c_0, c_1, \dots, c_k$



# 稳态响应：阶跃函数输入

➤ 阶跃函数输入信号：

$$r(t) = R_0 u_{-1}(t) \quad k = 0$$



$$y(t)_{ss} = c_0$$

$$a_v D^v y(t) + a_{v-1} D^{v-1} y(t) + \cdots + a_0 D^0 y(t) = R_0$$

0

$$y(t)_{ss} = c_0 = \frac{R_0}{a_0}$$

# 稳态响应：单位斜坡函数输入

➤ 单位斜坡函数输入信号：

$$r(t) = tu_{-1}(t)$$

$$k = 1$$

$$y(t)_{ss} = c_0 + c_1 t$$

$$a_v D^v y_{ss}(t) + a_{v-1} D^{v-1} y_{ss}(t) + \cdots + a_0 y_{ss}(t) = t$$

$$t^0: \quad a_1 c_1 + a_0 c_0 = 0$$

$$t^1: \quad a_0 c_1 = 1$$

$$c_0 = -\frac{a_1 c_1}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{a_0}$$

$$y(t)_{ss} = -\frac{a_1}{a_0^2} + \frac{1}{a_0} t$$

单位抛物线函数输入下的稳态响应见(3-25)，自行推导。

# 暂态响应

➤ 考察一般微分方程所对应的**齐次方程**:

$$a_v D^v y + a_{v-1} D^{v-1} y + \cdots + a_0 D^0 y + a_{-1} D^{-1} y + \cdots + a_{-w} D^{-w} y = 0$$

对于特征方程

$$Q(\lambda) = a_v \lambda^v + a_{v-1} \lambda^{v-1} + \cdots + a_0 + \cdots + a_{-w} \lambda^{-w} = 0$$

➤ 如果**所有的根均为单根**，则方程的解具有如下形式:

$$y_t = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + A_k e^{\lambda_k t} + \cdots + A_{v+w} e^{\lambda_{v+w} t}$$

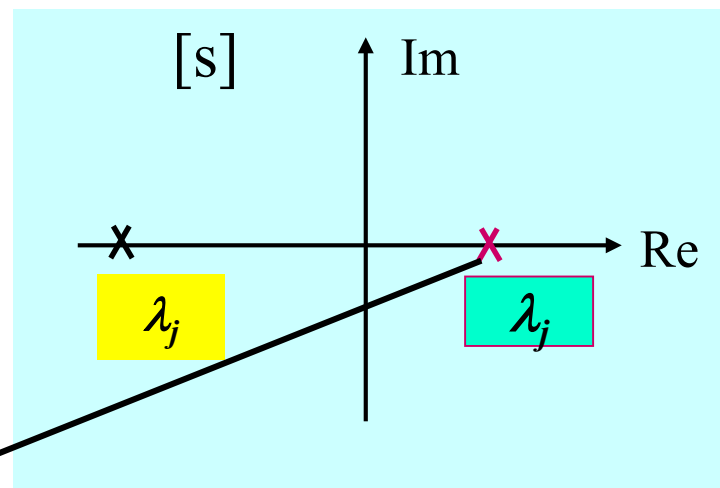
解中的**每一项**  $e^{\lambda_k t}$  可被称为系统的一个**模态**

注意: 每一项

$$y(t)_t = A_\lambda e^{\lambda t}$$

LT

$$Y(s)_t = \frac{A_\lambda}{s - \lambda}$$



$Y(s)$ 的**极点**  $\lambda$  可以画在 S 平面上。如果所有的  $\lambda_k < 0$ ，则系统是**稳定的**，但即使只有一个极点  $\lambda_i > 0$ ，则系统是**不稳定的**。

# 暂态响应

对于特征方程

$$Q(\lambda) = a_v \lambda^v + a_{v-1} \lambda^{v-1} + \cdots + a_0 + \cdots + a_{-w} \lambda^{-w} = 0$$

- 如果存在  $p$  重根  $\lambda_q$ ，则系统暂态响应将相应地包含如下形式的函数



$$A_{q_1} e^{\lambda_q t} + A_{q_2} t e^{\lambda_q t} + \cdots + A_{q_p} t^{p-1} e^{\lambda_q t}$$

- 由于暂态解中的系数必须由初始条件决定，因此为了确定这些系数，必须要求提供  $v+w$  个已知的初始条件

- 注意，如果特征方程存在复根  $\lambda_k$ 、 $\lambda_{k+1}$ （复根总是成对出现，称为共轭复根）

$$\lambda_{k,k+1} = \sigma \pm j\omega_d$$

那么，响应  $y_t = ???$

# 暂态响应

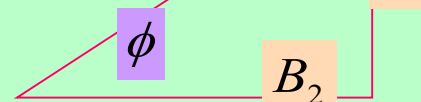
对于共轭复根

$$\lambda_{k,k+1} = \sigma \pm j\omega_d$$

衰减系数(damping coefficient)

衰减振荡频率, 有阻尼振荡频率  
(damped natural frequency)

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$



系统暂态响应将相应地包含

$A_k$  与  $A_{k+1}$  是共轭复数

$$e^{\sigma t} (A_k e^{j\omega_d t} + A_{k+1} e^{-j\omega_d t})$$

$$A_k e^{(\sigma + j\omega_d)t} + A_{k+1} e^{(\sigma - j\omega_d)t}$$

利用欧拉恒等式  $e^{\pm j\omega_d t} = \cos \omega_d t \pm j \sin \omega_d t$

$$e^{\sigma t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

$$A e^{\sigma t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

其中,  $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$  ,

$$\phi = \arctg B_1 / B_2$$

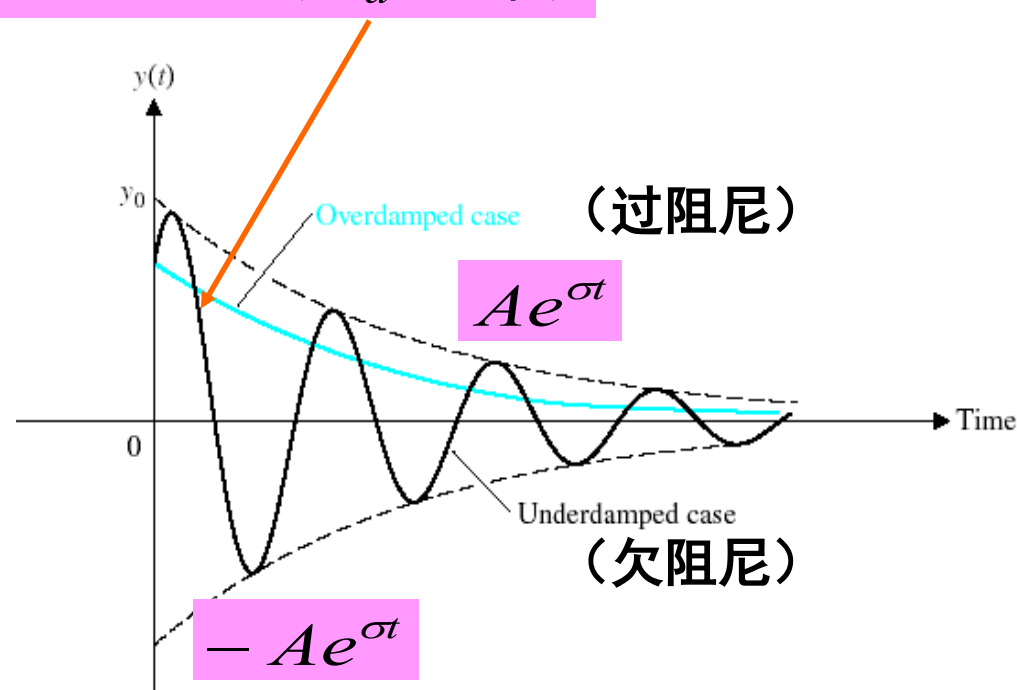
# 暂态响应

- 如果特征方程存在**共轭复根**，则系统暂态响应形式

指数衰减正弦曲线，如果  $\sigma$  是负数，则系统时间响应总是在包络线的两条分支之间变化。

只有当  $\sigma$  是负数时，系统才是稳定的；如果  $\sigma$  是正数，则系统不稳定，需要避免。

$$Ae^{\sigma t} \sin(\omega_d t + \phi)$$



# 阻尼比 $\zeta$ 和自然频率 $\omega_n$

- 当系统特征方程的根是一对共轭复根时，方程将具有二次方程式形式

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

➤ 方程的根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_2} \pm j\sqrt{\frac{4a_2a_0 - a_1^2}{4a_2^2}} = \sigma \pm j\omega_d$$

系统的有效衰减常数

衰减常数的临界值

$$a_1' = 2\sqrt{a_2a_0}$$

令其为零

定义阻尼比：  
(damping ratio)

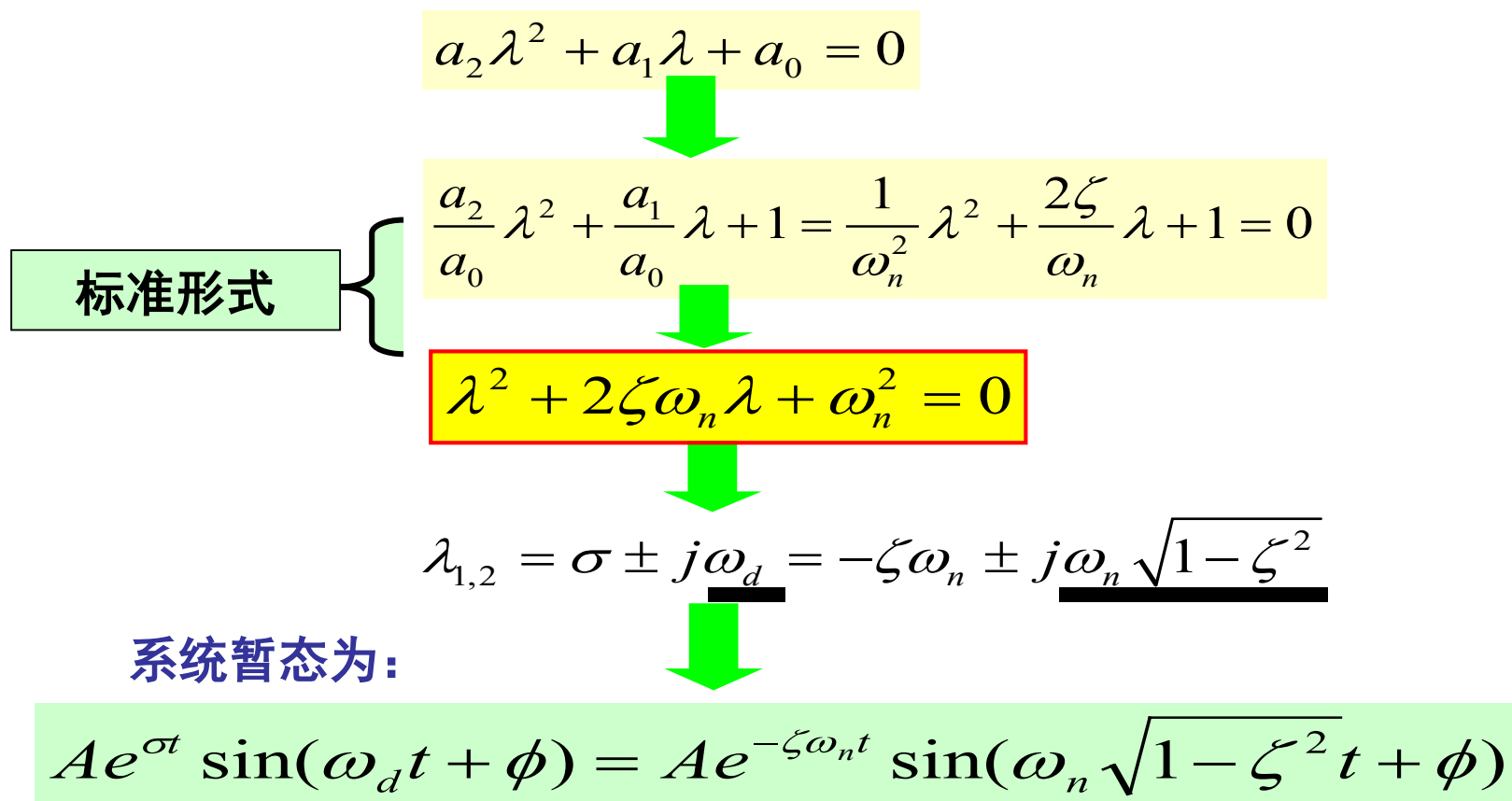
$$\zeta = \frac{a_1}{a_1'} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2a_0}}$$

和无阻尼振荡频率（自然频率）：  
(natural frequency)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

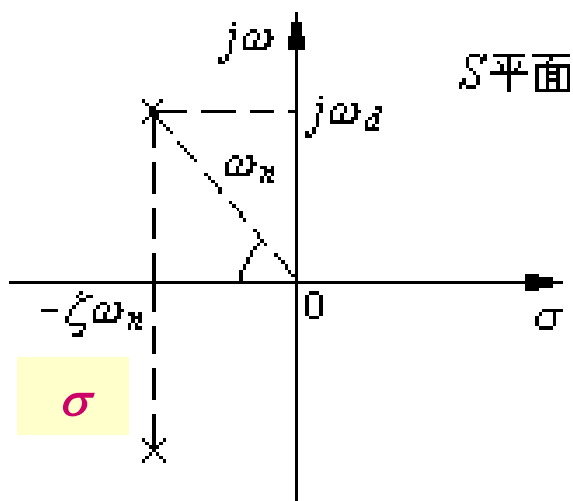
# 阻尼比 $\zeta$ 和自然频率 $\omega_n$

➤ 用  $\zeta$  和  $\omega_n$  分析欠阻尼 ( $0 < \zeta < 1$ ) 二阶系统

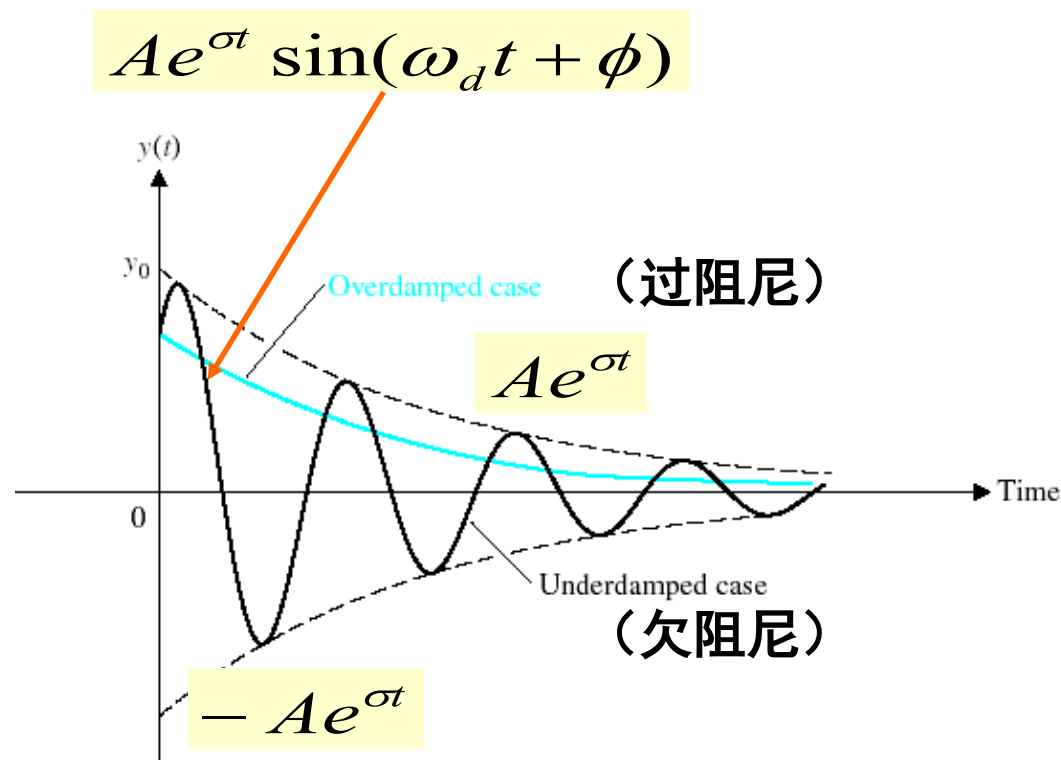




# 阻尼比 $\zeta$ 和自然频率 $\omega_n$



$$\begin{aligned}\lambda_{k,k+1} &= \sigma \pm j\omega_d \\ &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\end{aligned}$$



•  $\zeta\omega_n$  越大，则系统暂态衰减越快

**问题：** 1) 当  $\zeta=0$  时，暂态响应将是如何的？当  $\zeta>0$  或  $\zeta<0$  时呢？  
2) 分别当  $\sigma>0$  和  $\sigma<0$  时，暂态响应有什么区别？

# 阻尼比 $\zeta$ 和自然频率 $\omega_n$

- 当  $\zeta > 0$  时，系统暂态随时间衰减，响应曲线  $y(t)$  将趋向于稳态值，这意味着系统是**稳定的(stable)**
- 当  $0 < \zeta < 1$  时，系统特征方程具有共轭复根，系统暂态是如  $Ae^{\sigma t} \sin(\omega_d t + \varphi)$  形式的衰减正弦函数，**欠阻尼(underdamped)**
- 当  $\zeta > 1$  时，系统特征方程具有实根，系统响应是**过阻尼(overdamped)**
- 当  $\zeta < 0$  时，系统暂态将随时间增加，响应是不稳定的，这意味着系统**不稳定(unstable)**
- **无阻尼振荡频率  $\omega_n$**  定义为系统暂态持续振荡时的振荡频率，此时阻尼为零 ( $a_1=0$ )

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

# 举例：二阶系统（机械）

◆ **例2：** 系统结构如图所示。系统初始处于静止状态，在 $t=0$ 时  $x_a$  移动 1 个单位，分析  $x_b(t)$  的运动。

➤ 根据建模部分的知识，列写位移  $x_b$  和  $x_a$  之间的关系方程

$$MD^2x_b + BDx_b + Kx_b = Kx_a$$

求解

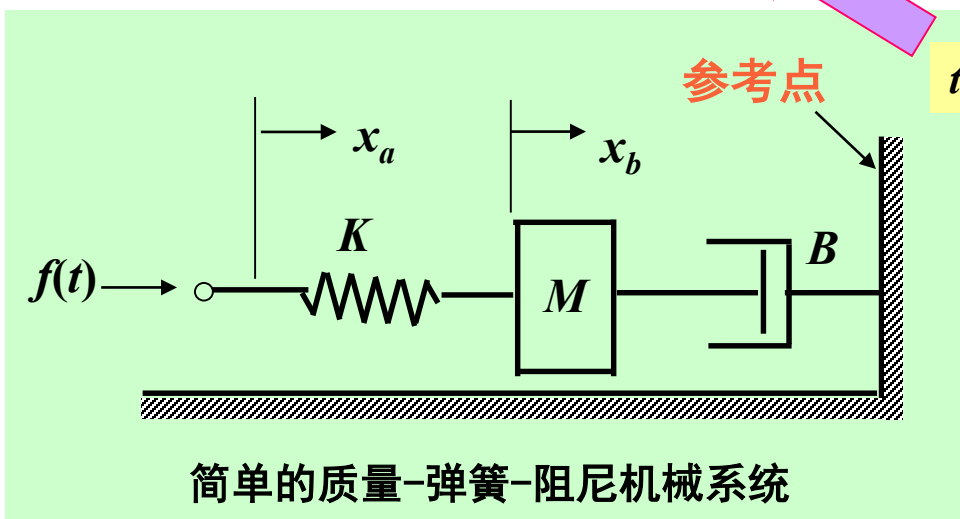
$$x_b(t) = x_b(t)_{ss} + x_b(t)_t$$

$$t \rightarrow \infty, D^2x_b = Dx_b = 0$$

$$x_b(t)_{ss} = x_a = 1$$

???

❖ 关键在于求解**暂态解**



# 举例：二阶系统（机械）

## ◆ 例2：经典方法

➤ 系统特征方程为：

$$M\lambda^2 + B\lambda + K = M\left(\lambda^2 + \frac{B}{M}\lambda + \frac{K}{M}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

(1) 对于  $\zeta > 1$ ，系统具有实根  $\lambda_1 = -a$  and  $\lambda_2 = -b$

$$x_b(t)_t = A_1 e^{-at} + A_2 e^{-bt}$$

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

(2) 对于  $\zeta = 1$ ，系统具有相等实根  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\zeta\omega_n = -\omega_n$

$$x_b(t)_t = A_1 e^{-\omega_n t} + A_2 t e^{-\omega_n t}$$

(3) 对于  $0 < \zeta < 1$ ，系统具有共轭复根  $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ，并且系统暂态具有阻尼正弦函数形式  $Ae^{\sigma t} \sin(\omega_d t + \phi)$

$$x_b(t)_t = A e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$$

# 举例：二阶系统（机械）

## ◆ 例2：经典方法

➤ 全解是稳态解与暂态解之和：

$$x_b(t) = x_b(t)_{ss} + x_b(t)_t$$

➤ 对于欠阻尼情况， $0 < \zeta < 1$ ，系统关于单位阶跃输入的全解为

$$x_b(t) = 1 + A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$$

$$Dx_b(t) = -\zeta \omega_n A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) + \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$$

$$\because x_b(0) = 0, \quad Dx_b(0) = 0$$

常数吗？

从初始条件获得

$$\therefore 0 = 1 + A \sin \phi$$

$$0 = -\zeta \omega_n A \sin \phi + \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} A \cos \phi$$

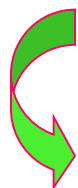
# 举例：二阶系统（机械）

## ◆ 例2：经典方法

$$0 = 1 + A \sin \phi$$

$$0 = -\zeta \omega_n A \sin \phi + \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} A \cos \phi$$

单位是弧度



$$A = \frac{-1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{and} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \cos^{-1} \zeta$$

➤ 对于欠阻尼情况， $0 < \zeta < 1$ ，系统关于单位阶跃输入的全解为

$$\begin{aligned} x_b(t) &= 1 + A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \end{aligned}$$

检验：

$$\begin{aligned} x_b(t)_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \right\} \\ &= 1 = x_a(t) \end{aligned}$$

# 本节主要内容

---

## ➤ 概述

- 引言
- 典型输入

## ➤ 微分方程求解

- 经典方法（时域方法）
- 拉氏变换方法

# 拉普拉斯变换方法

➤ 一般地， $n$  阶系统具有如下形式的微分方程：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0y(t) = b_w r^{(w)}(t) + \cdots + b_1 r'(t) + b_0 r(t)$$

✓ 在零初始条件下，取拉普拉斯变换，可以得到

$$G(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{R(s)} = \frac{b_w s^w + b_{w-1} s^{w-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

其中，通常有  $n \geq w$ ， $G(s)$  是系统传递函数

特征多项式函数—— $Q(s)$   
 $Q(s)=0$  是系统的特征方程

为了得到系统的时间响应，需要进行拉普拉斯反变换

$$y_{zs}(t) = L^{-1}[G(s)R(s)]$$

如果初始条件不等于零，我们能够得到系统的时间响应吗？如何得到？



# 拉普拉斯变换方法

- 通常可以利用拉氏变换表或计算机程序来进行拉普拉斯反变换

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$



将 $Y(s)$ 写成部分分式和的形式

根据分母 $Q(s)$ ，部分分式分解分四种情况：

- 所有的根 $s_k$ 均为单实根
- 有一个根 $s_q$ 为 $p$ 重实根
- 存在单重共轭复根
- 存在多重共轭复根

# 拉普拉斯变换方法

❖ 情况 1:  $Q(s)$  所有的根  $s_k$  均为单实根

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - s_n}$$

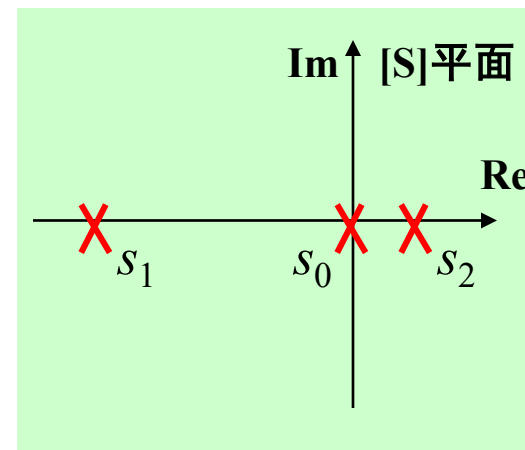
LT<sup>-1</sup>

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t}$$

❖ 对于一个稳定系统，所有与通解相关的实极点必须位于 **S** 平面的左半平面

❖ 系数  $A_k$  是  $Y(s)$  在  $s_k$  处的留数：

$$A_k = \left[ (s - s_k) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_k}$$



$$y(t) = A_0 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

# 拉普拉斯变换方法

[例3] 若已知系统的传递函数，求该系统的单位阶跃响应。

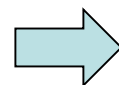
单位阶跃输入的拉氏变换

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

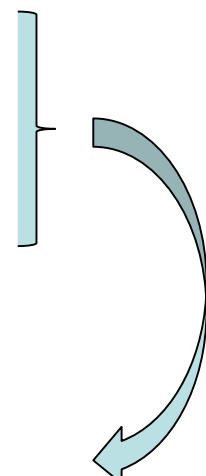
$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+3}$$

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{6}$$



$$y(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$



# 拉普拉斯变换方法

❖ 情况 2:  $Q(s)$  有一个根  $s_q$  为  $p$  重实根

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-s_q)^p (s-s_1) \cdots} = \frac{A_{qp}}{(s-s_q)^p} + \frac{A_{q(p-1)}}{(s-s_q)^{p-1}} + \cdots + \frac{A_{q1}}{s-s_q} + \frac{A_1}{s-s_1} + \cdots$$

↓ **LT<sup>-1</sup>**

$$y(t) = \frac{1}{(p-1)!} A_{qp} t^{p-1} e^{s_q t} + \frac{1}{(p-2)!} A_{q(p-1)} t^{p-2} e^{s_q t} + \cdots + A_{q1} e^{s_q t} + A_1 e^{s_1 t} + \cdots$$

❖ 其中,

$$A_{qp} = \left[ (s-s_q)^p \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_q}$$

$$A_{q(p-k)} = \left\{ \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left[ (s-s_q)^p \frac{P(s)}{Q(s)} \right] \right\}_{s=s_q}$$

如何计算  $A_1$ ?

# 拉普拉斯变换方法

[例4] 已知系统的输出拉氏变换，求其零初始条件下的时间响应

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{(s+2)^3(s+3)}$$

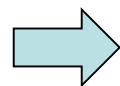
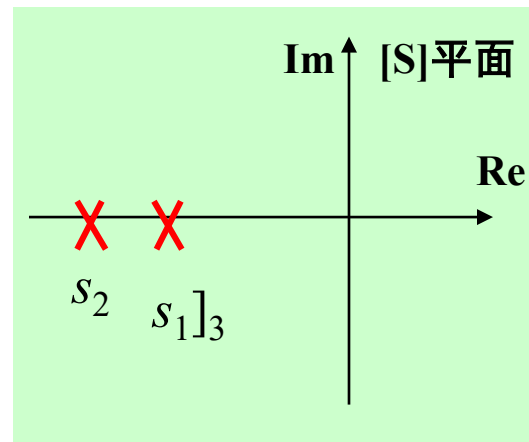
$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^3(s+3)} = \frac{A_{13}}{(s+2)^3} + \frac{A_{12}}{(s+2)^2} + \frac{A_{11}}{s+2} + \frac{A_2}{s+3}$$

$$A_{13} = \left[ (s+2)^3 Y(s) \right]_{s=-2} = 1$$

$$A_{12} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[ (s-s_1)^3 Y(s) \right] \right\}_{s=-2} = -1$$

$$A_{11} = \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s-s_1)^3 Y(s) \right] \right\}_{s=-2} = 1$$

$$A_2 = \left[ (s+3)Y(s) \right]_{s=-3} = -1$$



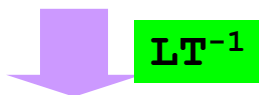
$$y(t) = \frac{t^2}{2} e^{-2t} - t e^{-2t} + e^{-2t} - e^{-3t}$$

# 拉普拉斯变换方法

❖ 情况 3-1:  $Q(s)$  具有一对共轭复根 (分母具有二次多项式形式)

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - s_3)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s - s_3}$$

$$= \frac{A_1}{s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A_2}{s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{A_3}{s - s_3}$$



**LT<sup>-1</sup>**

$$y(t) = A_1 e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + A_2 e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + A_3 e^{s_3 t}$$

$$= 2|A_1| e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi) + A_3 e^{s_3 t}$$

$$= 2|A_1| e^{\sigma t} \sin(\omega_d t + \phi) + A_3 e^{s_3 t}$$

$$A_1 = \left[ (s - s_1) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_1}$$

$$\phi = A_1 \text{ 的角度} + 90^\circ$$

❖  $s_1$  为具有正虚部的根

❖ 由于  $s_1$  是复数, 所以  $A_1$  也是复数, 且  $A_1$  和  $A_2$  是共轭复数

# 拉普拉斯变换方法

[例5]

$$Y(s) = \frac{10}{(s^2 + 6s + 25)(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 3 - 4j} + \frac{A_2}{s + 3 + 4j} + \frac{A_3}{s + 2}$$

$$A_1 = \left[ (s + 3 - 4j) \frac{10}{(s^2 + 6s + 25)(s + 2)} \right]_{s=-3+4j} = 0.303 \angle -194^\circ$$

$$\phi = A_1 \text{ 的角度} + 90^\circ = -194^\circ + 90^\circ = -104^\circ$$

$$A_3 = \left[ (s + 2) \frac{10}{(s^2 + 6s + 25)(s + 2)} \right]_{s=-2} = 0.59$$

$$y(t) = 2|A_1|e^{\sigma t} \sin(\omega_d t + \phi) + A_3 e^{s_3 t} \\ = 0.606e^{-3t} \sin(4t - 104^\circ) + 0.59e^{-2t}$$

$$y(t) = 10 \left[ \frac{e^{-ct}}{(c-a)^2 + b^2} + \frac{e^{-\sigma t} \sin(bt - \phi)}{b\sqrt{(c-a)^2 + b^2}} \right], \phi = \tan^{-1} \frac{b}{c-a}$$

$$\frac{1}{(s+c)[(s+a)^2 + b^2]} \Leftrightarrow \frac{e^{-ct}}{(c-a)^2 + b^2} + \frac{e^{-at} \sin(bt - \phi)}{b\sqrt{(c-a)^2 + b^2}}, \phi = \tan^{-1} \frac{b}{c-a}$$

a=3, b=4, c=2

可查阅拉氏  
变换表

# 拉普拉斯变换方法

❖ 情况 3-2:  $Q(s)$  具有一对虚根 (实部为零)

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s^2 + \omega_n^2)(s - s_3)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s - s_3}$$

$$= \frac{A_1}{s - j\omega_n} + \frac{A_2}{s + j\omega_n} + \frac{A_3}{s - s_3}; \quad (\text{here } \zeta = 0)$$

↓  $\mathbf{LT^{-1}}$

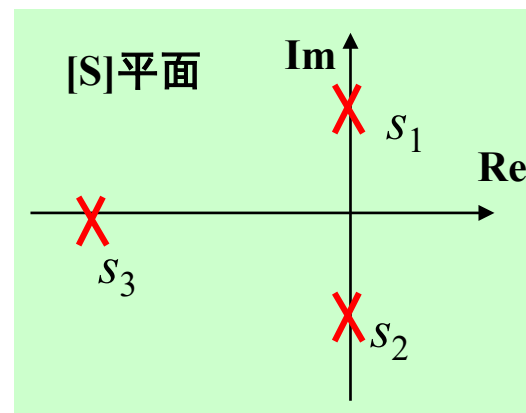
$$y(t) = A_1 e^{j\omega_n t} + A_2 e^{-j\omega_n t} + A_3 e^{s_3 t} = 2|A_1| \sin(\omega_n t + \phi) + A_3 e^{s_3 t}$$

$$A_1 = \left[ (s - s_1) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_1}$$

$$A_3 = \left[ (s - s_3) \frac{P(s)}{Q(s)} \right]_{s=s_3}$$

$\phi = A_1$  的角度  $+ 90^\circ$

❖ 由于没有阻尼项与正弦函数相乘, 因此此部分输出为正弦函数





# 拉普拉斯变换方法

❖ 情况 4:  $Q(s)$  具有多重共轭复根 (分母具有多重二次多项式形式)

- ❖ 多重共轭复数极点非常少见
- ❖ 可以用处理多重实极点的方式来进行处理

# 举例：二阶系统（机械）

◆ **例2：** 系统结构如图 所示。系统初始处于静止状态，在 $t=0$ 时  $x_a$  移动 1 个单位，分析  $x_b(t)$  的运动。

➤ 根据建模部分的知识，列写位移  $x_b$  和  $x_a$  之间的关系方程

$$MD^2x_b + BDx_b + Kx_b = Kx_a$$

求解

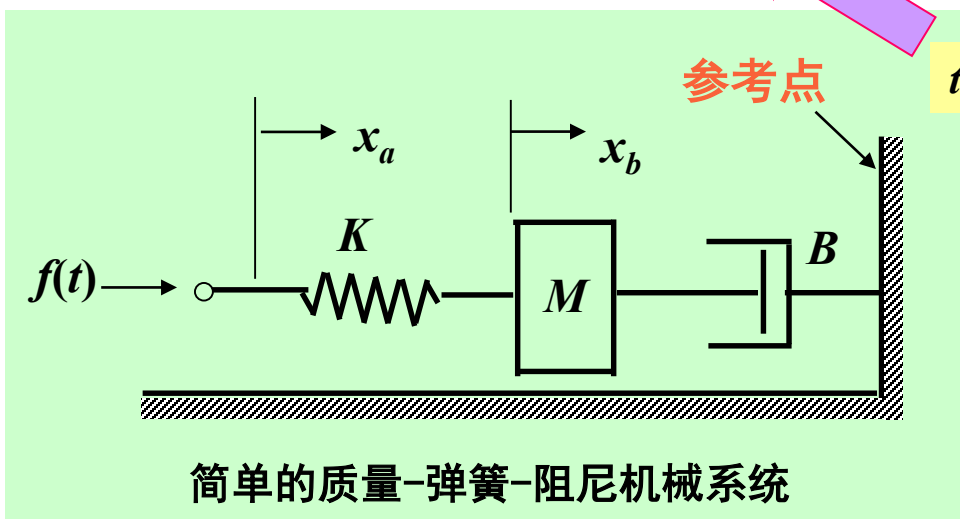
$$x_b(t) = x_b(t)_{ss} + x_b(t)_t$$

$$t \rightarrow \infty, D^2x_b = Dx_b = 0$$

$$x_b(t)_{ss} = x_a = 1$$

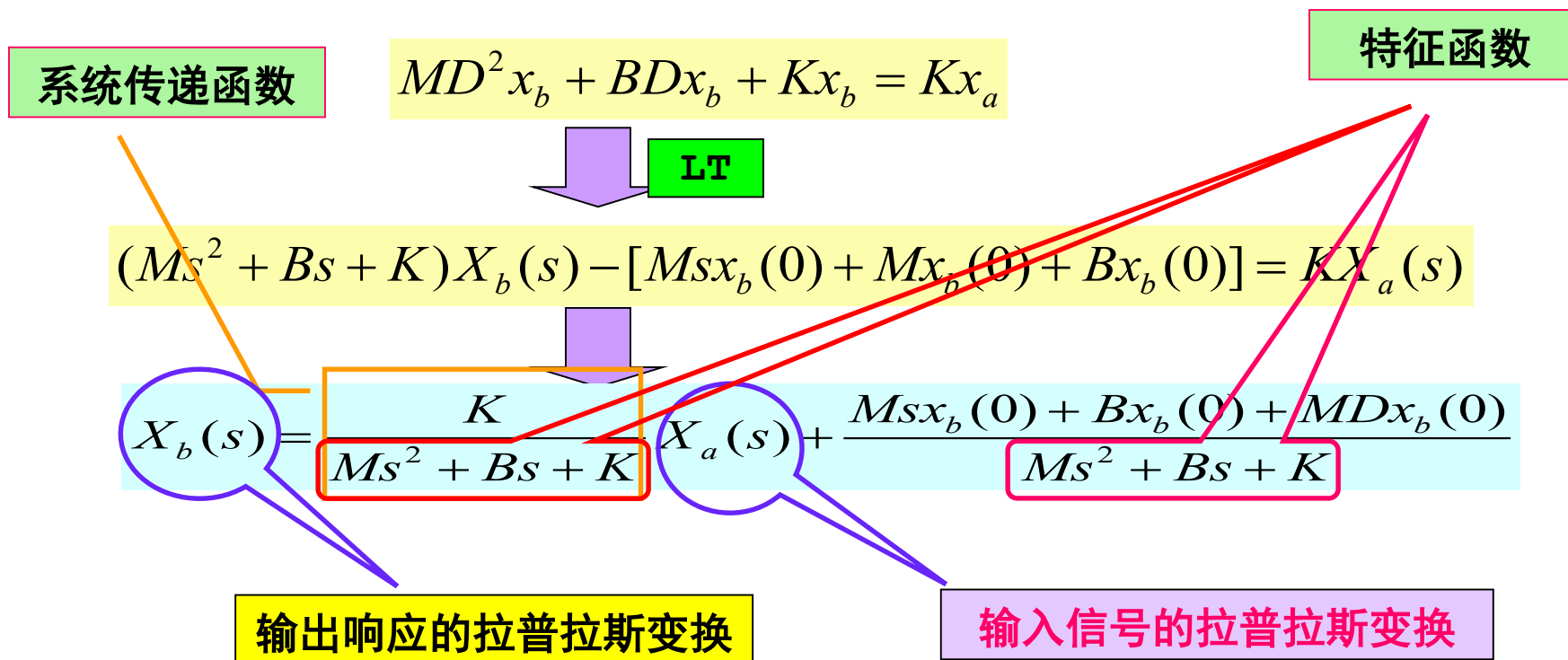
???

❖ 关键在于求解**暂态解**



# 举例：二阶系统（机械）

## ◆ 例 2：拉普拉斯变换方法



# 举例：二阶系统（机械）

## ◆ 例2：拉普拉斯变换方法

$$X_b(s) = \frac{K}{Ms^2 + Bs + K} X_a(s) + \frac{Msx_b(0) + Bx_b(0) + MDx_b(0)}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$\because x_b(0) = 0, \quad Dx_b(0) = 0 \quad \Downarrow \quad X_a(s) = \frac{1}{s}$$

$$x_b(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K/M}{s^2 + Bs/M + K/M} \cdot \frac{1}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\}$$

其中,

$$\omega_n = \sqrt{K/M}$$

$$\zeta = B/2\sqrt{KM}$$

参考拉氏变换表

$$\begin{aligned} x_b(t) &= 1 + Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \end{aligned}$$

结果与经典分析方法的结果相同！

---

*The End*