Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Engenharia Informática - Exame de Análise Matemática I (parte 1)

8 de fevereiro de 2023 — Duração: 1h15m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.
- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. (a) Considere a função $f(x) = 1 + e^{x+2}$.

i) Faça a representação gráfica da função $f(x)$.

ii) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

(b) i) Calcule o valor numérico da expressão $\arccos\left(\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right)\right)$.

ii) Resolva a equação $2\sin(2x) + \sqrt{2} = 0$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $x^2 - e^x = 0$ tem apenas uma solução real, pertencente ao intervalo $[-1, 0]$.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Partindo da aproximação inicial $x_0 = 0$, efectue 2 iterações do método de Newton para estimar a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize 2 casas decimais em todos os cálculos que realizar.

Nota: $\frac{63}{237} \simeq 0.27$, $\frac{1}{19} \simeq 0.05$.

[1.5 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{1 + \sqrt[4]{x^3}}{x}\, dx$; b) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x}}{9 + e^{2x}}\, dx$.

[2.0 *val.*] 4. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

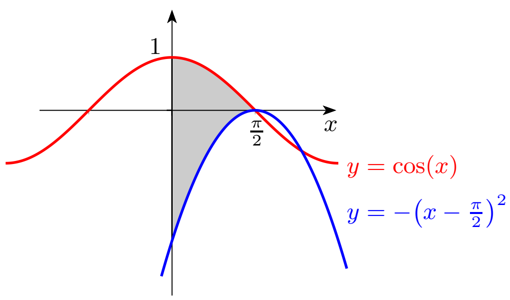
$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Considere o integral definido $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\, e^x\, dx$.

i) Determine uma estimativa para o integral, recorrendo à regra dos trapézios e a uma partição em 4 sub-intervalos.

ii) Recorrendo à alínea (a), determine o valor exacto do integral.

[4.5 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Calcule a área de $\mathcal{A}$.

(b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada para o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

(c) Indique uma expressão simplificada que permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Engenharia Informática - Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (parte 2)

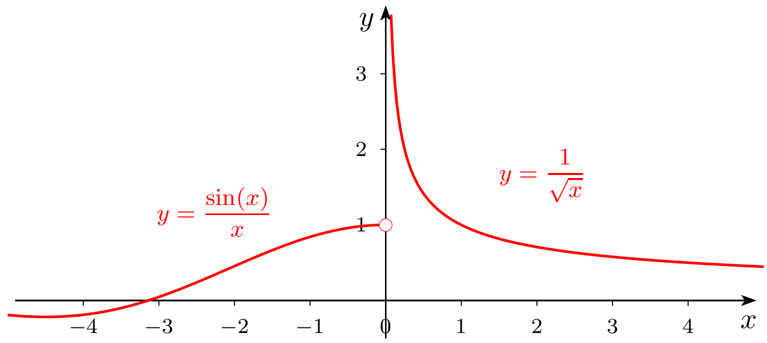
8 de fevereiro de 2023 Duração: 1h15m

- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 6. Considere os integrais

(I) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,;$ (II) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,;$ (III) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

e o gráfico da figura seguinte.



(a) Identifique, justificando, o integral impróprio de $1^{\underline{a}}$ espécie e determine a sua natureza.

(b) Identifique, justificando, o integral impróprio de $2^{\underline{a}}$ espécie e determine a sua natureza.

[5.0 *val.*] 7. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int x\,\sqrt{1+x}\,dx\,;$

(b) $\displaystyle\int \cos(2x)\,\cos(x)\,dx\,;$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx\,;$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,\sqrt{9+x^2}}\,dx\,.$

[2.0 *val.*] 8. (a) Recorrendo à definição de convergência, determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(3^n - 3^{n+1}\right).$

(b) Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\,.$

Coimbra Institute of Engineering
Department of Physics and Mathematics

Informatics Engineering - Calculus I (exam)

February 8th, 2023 | 2h30m

---

1. (a) Consider the function $f(x) = 1 + e^{x+2}$.
   - i. Plot the graph of the function $f(x)$.
   - ii. Define the inverse function f^{-1} (domain, codomain and analytical expression).

   (b)
   - i. Perform the numerical value of $\arccos\left(\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right)\right)$.
   - ii. Solve the equation $2\sin(2x) + \sqrt{2} = 0$.

[1.0 *val.*] 2. The equation $x^2 - e^x = 0$ as only one solution, on the interval $[-1, 0]$.

   (a) Using graphical method, prove the previous statement.

   (b) Using the initial approximation $x_0 = 0$, perform 2 iterations of Newton's method to estimate the solution of the equation. Present the error of this estimate and use 2 decimal places on all your calculations.
   Remark: $\frac{63}{237} \simeq 0.27$, $\frac{1}{19} \simeq 0.05$.

[1.5 *val.*] 3. Perform the following indefinite integrals:

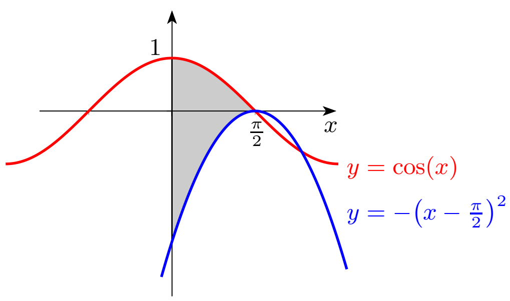
   a) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[4]{x^3}}{x}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x}}{9 + e^{2x}}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. (a) Using indefinite integral definition, prove that

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

   (b) Consider the definite integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx$.
   - i) Using trapezoidal rule and 4 sub-intervals, determine an estimate for the definite integral.
   - ii) Using result from paragraph (a), determine the exact value of the definite integral.

[4.5 *val.*] 5. Consider the region $\mathcal{A}$ presented in the following figure.



   (a) Determine the area of the region $\mathcal{A}$.

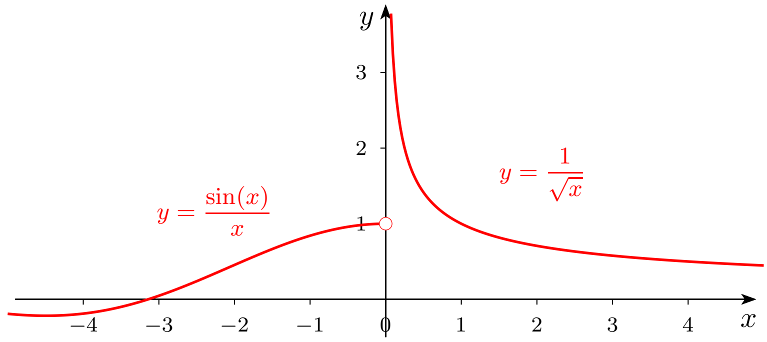
   (b) Using definite integrals, define a simplified analytical expression that allow to determine the volume of the solid obtained by rotating the region $\mathcal{A}$ about y-axis.

   (c) Define a simplified expression that allows to calculate perimeter of the region $\mathcal{A}$.

[2.0 *val.*] 6. Consider the integrals

(I) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$; (II) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$; (III) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

and the plot of the following figure.



(a) Identify the improper integral of 1st kind and determine if it is convergent or divergent. Justify.

(b) Identify the improper integral of 2nd kind and determine if it is convergent or divergent. Justify.

[5.0 *val.*] 7. Evaluate each of the following indefinite integrals:

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\, dx$;

(b) $\displaystyle\int \cos(2x)\cos(x)\, dx$;

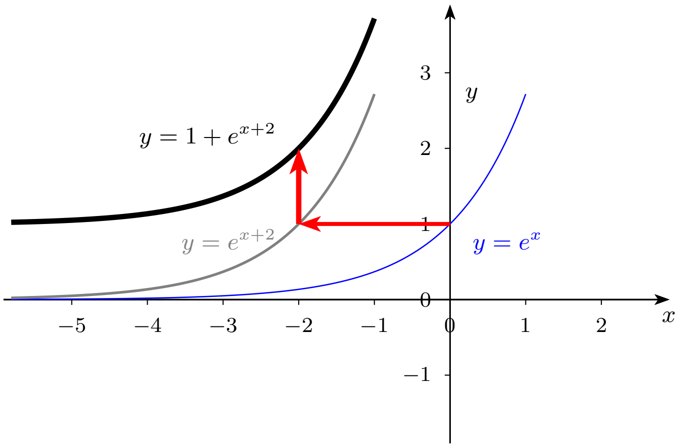
(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\, dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\, dx$.

[2.0 *val.*] 8. (a) Using the convergence definition of series, determine if $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(3^n - 3^{n+1}\right)$ converge or diverge.

(b) Determine if the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ converge or diverge.

1. (a) Tendo como referência o gráfico do logaritmo e as transformações gráficas elementares, tem-se



(b) Do gráfico da alínea anterior, verificamos que a função f é injectiva, pelo que também é invertível.Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$CD_{f^{-1}} \; = \; ? \quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \quad CD_f \; = \; D_{f^{-1}} \; = \; ?$$

$$? = x = f^{-1}(y) \quad \longleftrightarrow \quad f(x) = y = 1 + e^{x+2}$$

O contradomínio da função inversa coincide com a restrição da função original pelo que, tendo em conta a restrição principal do cosseno, tem-se

$$CD_{f^{-1}} \; = \; D_f \; = \; \mathbb{R} \, .$$

A função inversa tem expressão analítica dada por

$$\begin{aligned} y \; = \; 1 + e^{x+2} \quad &\Leftrightarrow \quad y - 1 \; = \; e^{x+2} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(y-1) \; = \; x + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(y-1) - 2 \; = \; x \end{aligned}$$

e, consequentemente, tem domínio

$$D_{f^{-1}} \; = \; \big\{ y \in \mathbb{R} : \; y - 1 > 0 \big\} \; = \; \big\{ y \in \mathbb{R} : \; y > 1 \big\} \; = \; \big] 1, \, +\infty \big[\, .$$

(c) Tendo em conta a restrição principal do cosseno ($[0, \pi]$), tem-se

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{29\pi}{3} \right) \right) \; = \; \arccos\left(\cos\left(10\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) \; = \; \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} \right) \right) \; = \; \frac{\pi}{3} \, .$$

.

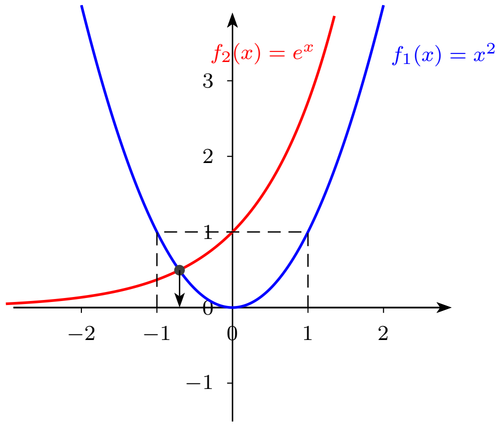
(d) Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$\begin{aligned} 2\sin(2x) + \sqrt{2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(2x) \; = \; -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + k\,2\pi \; \vee \; 2x = -\frac{3\pi}{4} + k\,2\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{8} + k\,\pi \; \vee \; x = -\frac{3\pi}{8} + k\,\pi \, , \quad k \in \mathbb{Z} \, . \end{aligned}$$

2. (a) Tendo em conta que

$$x^2 - e^x \; = \; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \; = \; e^x \, ,$$

a solução da equação corresponde à abcissa do ponto de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = e^x$.



(b) Consideremos a função $f(x) = x^2 - e^x$. Então $f'(x) = 2x - e^x$.

n	x_n	erro
0	$x_0 = 0$ (dado)	
1	$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{0-e^0}{0-e^0} = -1$	1.00
2	$x_2 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{(-1)^2-e^{-1}}{-2-e^{-1}} \simeq -1 - \frac{0.63}{-2.37} \simeq -0.73$	0.27

Logo, $\overline{x} = -0.73$ é uma aproximação para a solução, com erro aproximado de 0.27.

3. a) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt[4]{x^3}}{x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x}\,dx = \ln|x| + c + \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx \\ &= \ln|x| + c + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} = \ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x + e^{2x}}{9+e^{2x}}\,dx &= \int \frac{e^x}{9+e^{2x}}\,dx + \int \frac{e^{2x}}{9+e^{2x}}\,dx \\ &= \int \frac{e^x}{9\left(1+\frac{e^{2x}}{9}\right)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2\,e^{2x}}{9+e^{2x}}\,dx \\ &= \frac{3}{9}\int \frac{\frac{e^x}{3}}{1+\left(\frac{e^x}{3}\right)^2}\,dx + \frac{1}{2}\ln|9+e^{2x}| + c \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{3}\right) + \frac{1}{2}\ln|9+e^{2x}| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. (a) Basta verificar que a derivada de $x\,e^x - e^x + c$ é $x\,e^x$:

$$\begin{aligned}&\left(x\,e^x - e^x + c\right)' \\ =\ &\left(x\,e^x\right)' - \left(e^x\right)' + \left(c\right)' \\ =\ &\left(x\right)' e^x + x\left(e^x\right)' - e^x \\ =\ &e^x + x\,e^x - e^x \\ =\ &x\,e^x \quad \checkmark\end{aligned}$$

(b) i) Considerando uma partição uniforme do intervalo $\left[-1,1\right]$ em 4 sub-intervalos, tem-se $h = \frac{2}{4} = 0.5$ e

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx &\simeq \frac{0.5}{2}\Big(-e^{-1} + 2\times\left(-0.5\,e^{-0.5}\right) + 2\times 0 + 2\times 0.5\,e^{0.5} + e^1\Big) \\ &\simeq \frac{1}{4}\Big(-0.37 - 0.61 + 1.65 + 2.72\Big) \\ &\simeq 0.85\end{aligned}$$

ii) Tendo em conta o resultado da alínea (a), tem-se

$$\int_{-1}^{1} x\, e^x\, dx \;=\; \Big[x\, e^x - e^x\Big]_{-1}^{1} \;=\; e - e - \Big(-e^{-1} - e^{-1}\Big) \;=\; 2\, e^{-1}$$

5. (a) A área de $\mathcal{A}$ é dada por

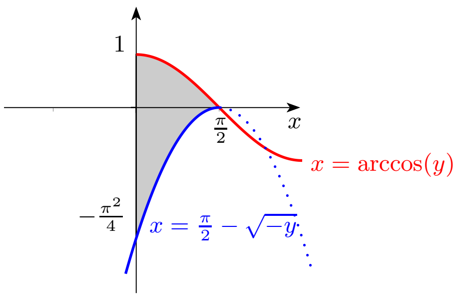
$$\text{Área}(\mathcal{A}) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(x)}_{f_{sup}} - \Big(\underbrace{-(x-\frac{\pi}{2})^2}_{f_{inf}}\Big)\, dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) + (x-\frac{\pi}{2})^2\, dx$$

$$= \left[\sin(x) + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + 0 - \Big(\sin(0) + \frac{1}{3}\,(-\frac{\pi}{2})^3\Big) \;=\; 1 + \frac{\pi^3}{24}\,.$$

(b) As curvas referentes à circunferência são definidas em função da variável y por:

- $y = -\big(x-\frac{\pi}{2}\big)^2 \;\Leftrightarrow\; -y = \big(x-\frac{\pi}{2}\big)^2 \;\Leftrightarrow\; \pm\sqrt{-y} = x - \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-y} = x$
- $y = \cos(x)\,, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \;\Rightarrow\; \arccos(y) = x$

Além disso, a ordenada na origem da parábola é $y = -\big(0-\frac{\pi}{2}\big)^2 = -\frac{\pi^2}{4}$



Então, o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy é dado por

$$\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) \;=\; \pi \int_{-\frac{\pi^2}{4}}^{0} \Big(\frac{\pi}{2} - \sqrt{-y}\Big)^2 dy + \pi \int_0^1 \arccos^2(y)\, dy\,.$$

(c) O perímetro da região é dado por

$$\text{Perímetro} \;=\; \frac{\pi^2}{4} + 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \Big[\big(\cos(x)\big)'\Big]^2}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \Big[\Big(-(x-\frac{\pi}{2})^2\Big)'\Big]^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \Big[-\sin(x)\Big]^2}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \Big[-2\,(x-\frac{\pi}{2})\Big]^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2(x)}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 4\,(x-\frac{\pi}{2})^2}\, dx\,.$$

6. (a) O integral impróprio de 1ª espécie é (III):

i. $D_{\text{int}} = [1, +\infty[$ não é limitado;

ii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ está definida e é contínua em D_{int}, porque $[1, +\infty[= D_{\text{int}} \subseteq D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f(x)$ é contínua em todo o seu domínio, respectivamente.

Relativamente à natureza do integral, tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-\frac{1}{2}}\, dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^t \;=\; \lim_{t\to+\infty} 2\sqrt{t} - 2 \;=\; +\infty\,,$$

pelo que o integral é divergente.

(b) O integral impróprio de 2ª espécie é (II):

i. $D_{\text{int}} = [0, 1]$ é limitado;

ii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ está definida e é contínua em $D_{\text{int}} = [0,\, 1]$, excepto em $x = 0$. Uma vez que o limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

não é finito, então a função não é limitada no intervalo de integração.

Relativamente à natureza do integral, tem-se

$$\lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; \lim_{t \to 0^+} \Big[2\sqrt{x} \Big]_t^1 \;=\; \lim_{t \to 0^+} 2\sqrt{t} - 0 \;=\; 2\,,$$

pelo que o integral é convergente e tem soma 2.

7. (a) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int x\sqrt{1+x}\, dx \;=\; \int \underbrace{x}_{d}\; \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{2}}}_{p}\, dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\; \displaystyle\int (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx \;=\; \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{2}{3}\,(1+x)^{\frac{3}{2}} + c \\ \bullet\; (x)' \;=\; 1 \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
&= x\,\frac{2}{3}\,(1+x)^{\frac{3}{2}} - \int 1 \cdot \frac{2}{3}\,(1+x)^{\frac{3}{2}}\, dx \\
&= \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{(1+x)^3} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\, dx \\
&= \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{(1+x)^3} - \frac{2}{3}\,\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c \\
&= \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15}\,\sqrt{(1+x)^5} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \cos(2x)\,\cos(x)\, dx &= \int \frac{1}{2}\Big(\cos(3x) + \cos(x)\Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(x)\, dx \\
&= \frac{1}{6}\,\sin(3x) + \frac{1}{2}\,\sin(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) A fração é imprópria (grau do numerador = 2 = grau do denominador), pelo que começamos por efectuar a divisão dos polinómios. Dessa divisão, obtém-se

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$$

A fração própria, resultante da divisão anterior, pode agora decompor-se numa soma de frações simples:

- factorização do denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = -1\,.$$

  Então

$$x^2 - 1 \;=\; (x-1)(x+1).$$

- decomposição da fração:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} \;=\; \frac{1}{x^2-1} \;=\; \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\cdot(x+1)} + \underbrace{\frac{B}{x+1}}_{\cdot(x-1)} \;=\; \frac{A\,(x+1) + B\,(x-1)}{(x-1)\,(x+1)}\,.$$

Da igualdade entre os numeradores resulta que

$$\begin{array}{r|rcl} & 1 & = & A\,(x+1)+B\,(x-1) \\ \hline x=1 & 1 & = & 2\,A+0 \\ x=-1 & 1 & = & 0-2\,B \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,,$$

donde

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx &= \int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(d) Recorrendo à mudança de variável

$$\text{m.v.}\ \boxed{x = 3\tan(t)}\,, \quad t \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$$

tem-se

$$x' = 3\sec^2(t)\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\,dx &\overset{\text{m.v.}}{=} \int \frac{1}{3\tan(t)\sqrt{9+9\tan^2(t)}}\,3\sec^2(t)\,dt \\ &= \int \frac{1}{\tan(t)\sqrt{9\left(1+\tan^2(t)\right)}}\,\sec^2(t)\,dt \\ &= \int \frac{1}{\tan(t)\,3\,\sec(t)}\,\sec^2(t)\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sin(t)}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int \operatorname{cosec}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{cosec}(t) - \operatorname{cotg}(t)\right| + c \\ &\overset{\text{m.v.}}{=} \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{cosec}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \frac{3}{x}\right| + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

8. (a) Começamos por observar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(3^n - 3^{n+1}\right) = \left(3^1-3^2\right)+\left(3^2-3^3\right)+\left(3^3-3^4\right)+\dots$$

pelo que a série é telescópica e portanto

$$S_n = \left(3^1-\cancel{3^2}\right)+\left(\cancel{3^2}-\cancel{3^3}\right)+\left(\cancel{3^3}-\cancel{3^4}\right)+\dots+\left(\cancel{3^n}-3^{n+1}\right) = 3-3^{n+1}\,,$$

pelo que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(3-3^{n+1}\right) = -\infty$$

e portanto a série é divergente.

(b) Começamos por observar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots$$

Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{(pela regra de Cauchy)}$$

é diferente de zero então, pela condição necessária de convergência, concluímos que a série é divergente.