Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Teste 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

28 de janeiro de 2021 Duração: 1h15m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.

- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = e^{\cos\left(\frac{57\pi}{6}\right)} - 4\sin(2x)$.

a) Caracterize a função inversa de f, numa restrição conveniente.

b) Calcule o valor numérico da expressão $f\left(\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

c) Resolva a equação $f(x) = -1$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $e^x - x^2 = 0$ tem uma apenas solução real.

(a) Recorrendo ao método gráfico, indique um intervalo de amplitude 1 que contenha a solução da equação.

(b) Partindo do intervalo indicado na alínea anterior, efectue 2 iterações do método de Newton para estimar a solução positiva da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize 2 casas decimais e a tabela numérica, fornecida no formulário, em todos os cálculos que realizar.
Nota: $\frac{0.63}{2.37} \simeq 0.27$, $\frac{0.01}{1.96} \simeq 0.01$, $\frac{0.01}{1.9} \simeq 0.01$

[2.0 *val.*] 3. Calcule as primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sin\left(-\frac{2}{x}\right)}{x^2}\,dx$;

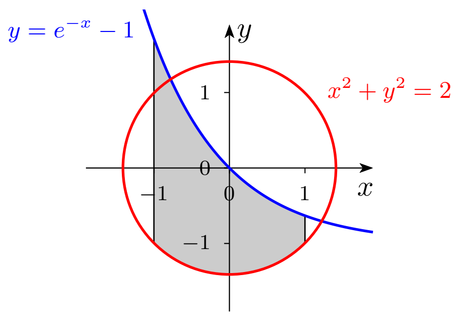
(b) $\displaystyle\int \frac{e^{x-2}}{\sqrt{4 - 9\,e^{2x}}}\,dx$.

[1.0 *val.*] 4. Determine uma estimativa para o integral definido

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx,$$

recorrendo à regra de Simpson e a 2 sub-intervalos. Utilize 2 casas decimais e a tabela numérica, fornecida no formulário, em todos os cálculos que realizar.
Nota: $\frac{3.23}{6} \simeq 0.54$, $\frac{3.23}{3} \simeq 1.08$

[5.0 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular a área de $\mathcal{A}$.

(b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume da região que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

(c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.
Nota: Além de integrais, também pode utilizar geometria elementar.

1. (a) Começamos por notar que

$$e^{\cos\left(\frac{57\pi}{6}\right)} = e^{\cos\left(\frac{60\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}\right)} = e^{\cos\left(10\pi-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{0} = 1\,.$$

Uma vez que a função f não é injectiva, a sua inversa só pode ser definida numa restrição que garanta que a função é injectiva. Consideraremos a restrição principal.
Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = ? & \xrightarrow[\quad f^{-1} \quad]{f} & CD_f = D_{f^{-1}} = ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = 1 - 4\,\sin\left(2x\right) \end{array}$$

O contradomínio da função inversa coincide com a restrição principal da função original pelo que, tendo em conta a restrição do seno, tem-se

$$CD_{f^{-1}} = D_f = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}\} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

A função inversa tem expressão analítica dada por

$$\begin{aligned} y = 1 - 4\,\sin\left(2x\right) \quad &\Leftrightarrow \quad y - 1 = -4\,\sin\left(2x\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1-y}{4} = \sin\left(2x\right) \\ &\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \arcsin\left(\frac{1-y}{4}\right) = 2x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\arcsin\left(\frac{1-y}{4}\right) = x\,. \end{aligned}$$

e, consequentemente, tem domínio

$$D_{f^{-1}} = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{1-y}{4} \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R} : -4 \leq 1 - y \leq 4\} = [-3, 5]\,.$$

Tem-se então

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] & \xrightarrow[\quad f^{-1} \quad]{f} & CD_f = D_{f^{-1}} = [-3, 5] \\ \frac{1}{2}\,\arcsin\left(\frac{1-y}{4}\right) = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = 1 - 4\,\sin\left(2x\right) \end{array}$$

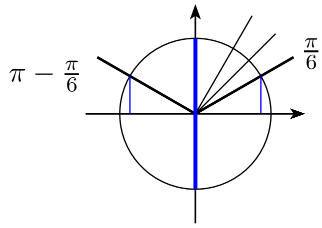
(b) Tendo em conta a periodicidade da função seno e respectiva restrição principal, tem-se

$$\begin{aligned} f\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) &= 1 - 4\,\sin\left(2\,\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 1 - 4\,\sin\left(2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 1 - 4\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 1 - 4\,\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 1 - 4\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 1 + 4\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

.

(c) Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$
\begin{aligned}
1-4\sin(2x) = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad -4\sin(2x) = -2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

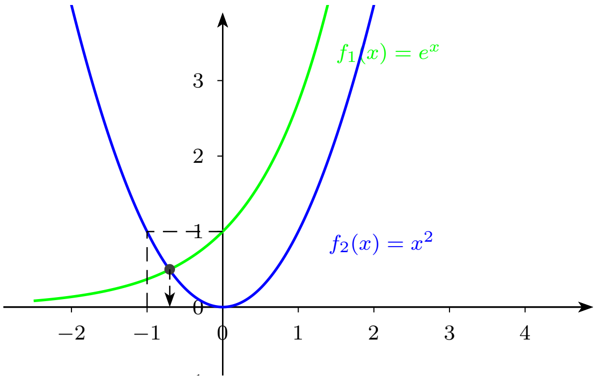


$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi \ \vee \ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + k\,2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\,\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}
$$

2. (a) Tendo em conta que

$$e^x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = x^2$$

as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = x^2$.



Então, a equação tem apenas 1 solução, que pertence ao intervalo $[-1, 0]$.

(b) Consideremos a função $f(x) = e^x - x^2$.

Então, $f'(x) = e^x - 2x$ e, uma vez que $f''(x) = e^x - 2$ é negativa no intervalo $[-1, 0]$, consideraremos $x_0 = -1$ (pois $f(-1)$ tem o mesmo sinal de $f''(x)$). Assim,

n		x_n	erro
0		-1	–
1	$-1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{e^{-1}-(-1)^2}{e^{-1}-2(-1)} \simeq -1 - \frac{-0.63}{2.37} \simeq$	-0.73	0.27
2	$-0.73 - \frac{f(-0.73)}{f'(-0.73)} = -0.73 - \frac{e^{-0.73}-(-0.73)^2}{e^{-0.73}-2(-0.73)} \simeq -0.73 - \frac{0.01}{1.96} \simeq$	-0.72	0.01

Então, $\overline{x} = -0.72$ é uma aproximação para a solução, com erro aproximado 0.01.

3. (a) Decompondo a primitiva e recorrendo às regra R2 e R7 das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sin\left(-\frac{2}{x}\right)}{x^2}\,dx &= \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2}+\frac{\sin\left(-\frac{2}{x}\right)}{x^2}\,dx \\
&= \int \underbrace{x^{-\frac{4}{3}}}_{R2}\,dx + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2}{x^2}\sin\left(-\frac{2}{x}\right)}_{R7}\,dx \\
&= \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\Big(-\cos\left(-\frac{2}{x}\right)\Big) + c \\
&= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{2}{x}\right) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à regra R18 das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{x-2}}{\sqrt{4-9\,e^{2x}}}\,dx &= \int \frac{e^x\,e^{-2}}{\sqrt{4\,(1-\frac{9\,e^{2x}}{4})}}\,dx \\
&= e^{-2}\int \frac{e^x}{\sqrt{4}\,\sqrt{1-(\frac{3\,e^x}{2})^2}}\,dx \\
&= \frac{e^{-2}}{2}\,\frac{2}{3}\int \underbrace{\frac{\frac{3\,e^x}{2}}{\sqrt{1-(\frac{3\,e^x}{2})^2}}}_{R18}\,dx \\
&= \frac{e^{-2}}{3}\,\arcsin\left(\frac{3\,e^x}{2}\right) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

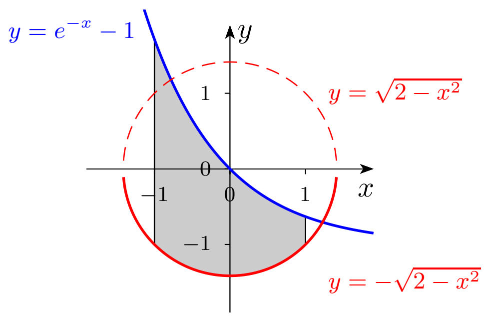
4. Considerando a regra de Simpson e uma partição uniforme do intervalo $[0,1]$ em 2 sub-intervalos, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}_{f(x)}\,dx &\simeq \frac{0.5}{3}\Big(f(0)+4\,f(0.5)+f(1)\Big) \\
&= \frac{1}{6}\Big(\operatorname{arctg}(0)+4\operatorname{arctg}(\sqrt{0.5})+\operatorname{arctg}(1)\Big) \\
&\simeq \frac{1}{6}\Big(\operatorname{arctg}(0)+4\operatorname{arctg}(0.71)+\operatorname{arctg}(1)\Big) \\
&\simeq \frac{1}{6}\Big(0+4\times 0.61+0.79\Big) \\
&= \frac{3.23}{6} \\
&\simeq 0.54
\end{aligned}$$

5. (a) Comecemos por determinar as funções que delimitam a região:

- $y = e^{-x} - 1$
- $x^2 + y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2-x^2}$

Então



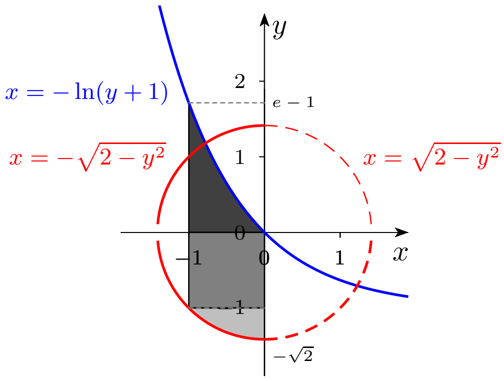
e portanto

$$\text{Área}(\mathcal{A}) \;=\; \int_{-1}^{1} \underbrace{e^{-x}-1}_{f_{sup}} - \underbrace{\left(-\sqrt{2-x^2}\right)}_{f_{inf}}\,dx \;=\; \int_{-1}^{1} e^{-x}-1+\sqrt{2-x^2}\,dx\,.$$

(b) Comecemos por explicitar as curvas que delimitam a região, em função da variável y:

- $y=e^{-x}-1 \quad\Leftrightarrow\quad y+1=e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad \ln(y+1)=-x \quad\Leftrightarrow\quad x=-\ln(y+1)$
- $x^2+y^2=2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=2-y^2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\sqrt{2-y^2}$

Na rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy o sólido gerado pela parte direita vai ficar embutido no sólido gerado pela parte esquerda, pelo que temos que considerar apenas a rotação desta última:

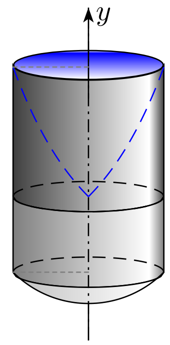


Atendendo a que

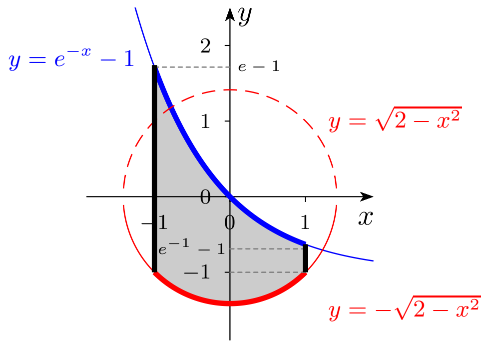
$$x=-1: \quad y=e^{-(-1)}-1=e-1$$

tem-se então

$$\begin{aligned}
&\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy})\\
=\;& \pi\int_{-\sqrt{2}}^{-1} \Big(\underbrace{-\sqrt{2-y^2}}_{R_{ext}}\Big)^2 dy + \pi\int_{-1}^{0} \big(\underbrace{-1}_{R_{ext}}\big)^2 dy + \pi\int_{0}^{e-1} \big(\underbrace{-1}_{R_{ext}}\big)^2 - \Big(\underbrace{-\ln(y+1)}_{R_{ext}}\Big)^2 dy\\
=\;& \pi\int_{-\sqrt{2}}^{-1} 2-y^2\,dy + \pi\int_{-1}^{0} 1\,dy + \pi\int_{0}^{e-1} 1-\ln^2(y+1)\,dy\,.
\end{aligned}$$



(c) Tendo em conta a alínea (a) e as fórmulas de geometria elementar, tem-se



Então

$$
\begin{aligned}
& \text{Perímetro}(\mathcal{A}) \\
= \;& \Big((e-1)-(-1)\Big) + \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left[(e^{-x}-1)'\right]^2}\, dx + \Big((e^{-1}-1)-(-1)\Big) + \frac{2\pi \times \sqrt{2}}{4} \\
= \;& e + \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left[-e^{-x}\right]^2}\, dx + e^{-1} + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} \\
= \;& e + \int_{-1}^{1} \sqrt{1+e^{-2x}}\, dx + e^{-1} + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$