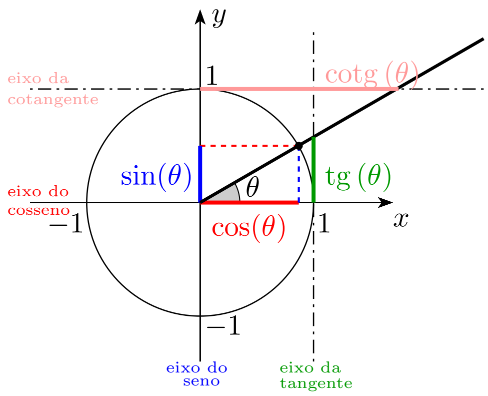
Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Análise Matemática I - Licenciatura em Engenharia Informática

FORMULÁRIO **Trigonometria**

Círculo trigonométrico



Ângulos e valores de referência

θ (graus)	0	30	45	60	90
θ (radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.
$\operatorname{cotg}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$	N.D.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Identidades trigonométricas:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2\alpha)\Big) \qquad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos(2\alpha)\Big)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\Big)$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\Big)$$

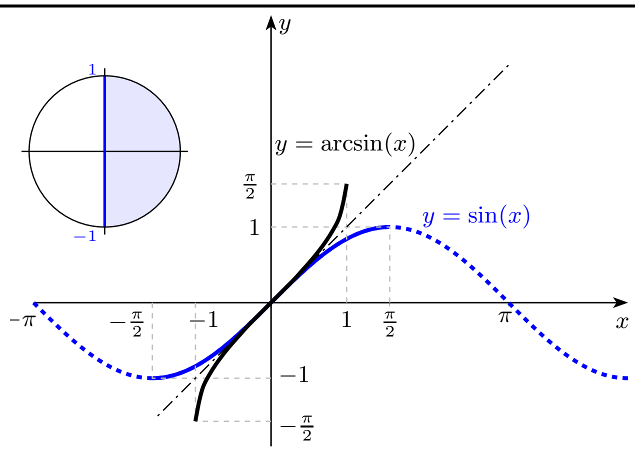
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\Big)$$

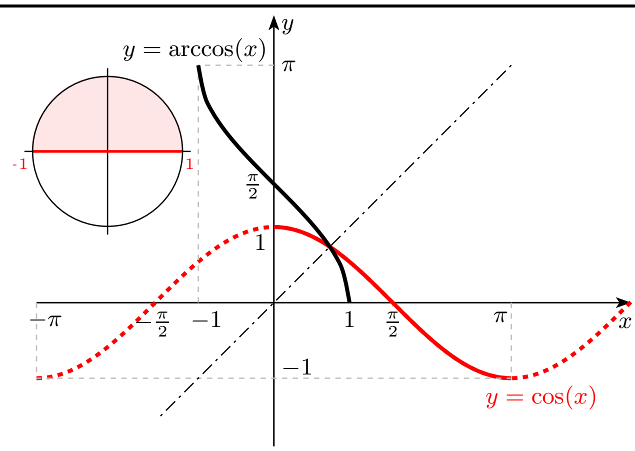
Equações trigonométricas:

$$\sin(x) = \sin(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\alpha + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Gráficos:



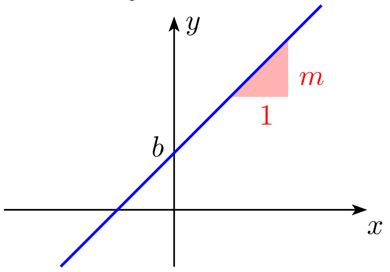


Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

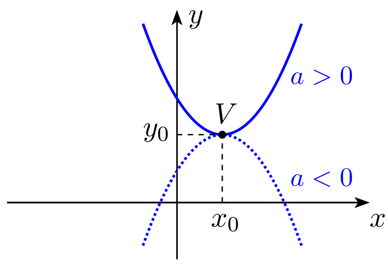
Análise Matemática I - Licenciatura em Engenharia Informática

FORMULÁRIO **Curvas de referência, domínios & equações**

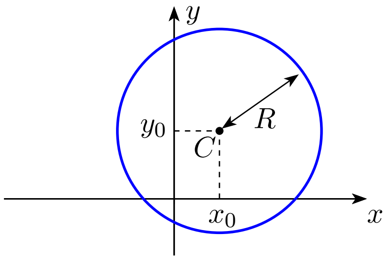
Recta: $y = mx + b$



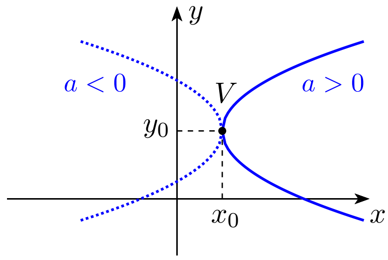
Parábolas: $y - y_0 = a(x - x_0)^2$



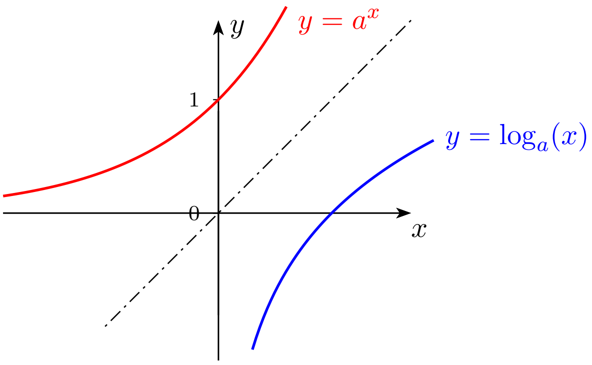
Circunferência: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



$x - x_0 = a(y - y_0)^2$



Exponencial & logaritmo: $y = a^x$, $y = \log_a(x)$ $(a > 1)$



Domínios

$\dfrac{\bullet}{\blacksquare}$, $D = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare \neq 0\}$

$\sqrt[n]{\blacksquare}$, $(n \text{ par})$, $D = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare \geq 0\}$

$\log_a(\blacksquare)$, $a > 0$, $D = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare > 0\}$

$\arcsin(\blacksquare)$ e $\arccos(\blacksquare)$, $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \blacksquare \leq 1\}$

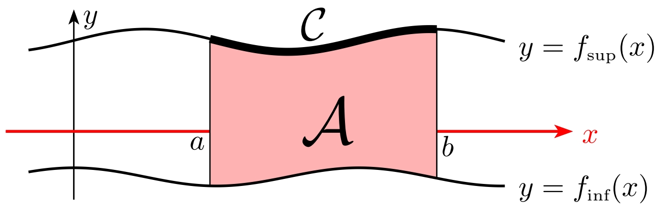
Resolução numérica de equações

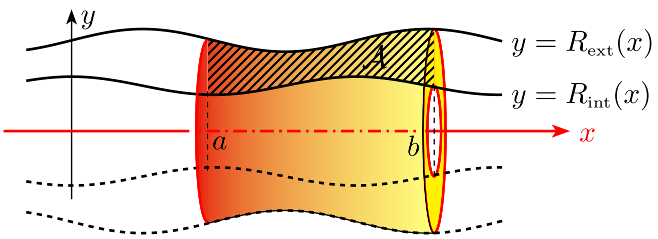
Bisseção: $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, erro $\leq |x_n - x_{n-1}|$

Newton: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, erro $\approx |x_n - x_{n-1}|$

Sejam f e g funções reais de variável real e k, p e a constantes reais

	Função: $h(x)$	**Derivada:** $h'(x)$
funções de base		
D1.	$k, \quad k \in \mathbb{R}$	0
D2.	x	1
operações elementares		
D3.	$k\,f, \quad k \in \mathbb{R}$	$k\,f'$
D4.	$f \pm g$	$f' \pm g'$
D5.	$f \times g$	$f'\,g + f\,g'$
D6.	$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$
regras de base		
	$f^{-1}(y)$	$\left.\dfrac{1}{f'(x)}\right\rvert_{x=f^{-1}(y)}$
	$(g \circ f)(x)$	$f'(x) \cdot \left[g'(y)\right]_{y=f(x)}$
potências		
D7.	$f^p, \quad p \in \mathbb{Q}$	$p\,f^{p-1}\,f'$
exponencial e logaritmo		
D8.	$a^f, \quad a \in \mathbb{R}^+$	$f'\,a^f\,\ln(a)$
D9.	$\log_a(f), \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\dfrac{f'}{f\,\ln(a)}$
funções trigonométricas		
D10.	$\sin(f)$	$f'\,\cos(f)$
D11.	$\cos(f)$	$-f'\,\sin(f)$
D12.	$\mathrm{tg}\,(f)$	$f'\,\sec^2(f)$
D13.	$\mathrm{cotg}\,(f)$	$-f'\,\mathrm{cosec}^{\,2}(f)$
D14.	$\sec(f)$	$f'\,\sec(f)\,\mathrm{tg}\,(f)$
D15.	$\mathrm{cosec}\,(f)$	$-f'\,\mathrm{cosec}\,(f)\,\mathrm{cotg}\,(f)$
D16.	$\arcsin(f)$	$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
D17.	$\arccos(f)$	$-\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
D18.	$\mathrm{arctg}\,(f)$	$\dfrac{f'}{1+f^2}$
D19.	$\mathrm{arcotg}\,(f)$	$-\dfrac{f'}{1+f^2}$





$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_a^b \underbrace{\left(f_{\text{sup}} - f_{\text{inf}}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{largura}}$$

$$\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) = \int_a^b \underbrace{\pi\left(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2\right)}_{\text{área}} \underbrace{dx}_{\text{espessura}}$$

$$\text{Comprimento}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'\right]^2}\, dx$$

Trapézios:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\Big[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big], \qquad \text{erro} \le \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \times \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Simpson: [n par!]

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(b)\Big], \qquad \text{erro} \le \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} \times \max_{[a,b]} |f''''(x)|$$

x	$\sqrt{x}$	x^2	2^x	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\text{tg}\,(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\text{arctg}\,(x)$
−1.00	–	1.00	0.50	0.37	–	−1.00	−0.84	0.54	−1.56	−1.57	3.14	−0.79
−0.90	–	0.81	0.54	0.41	–	−1.11	−0.78	0.62	−1.26	−1.12	2.69	−0.73
−0.80	–	0.64	0.57	0.45	–	−1.25	−0.72	0.70	−1.03	−0.93	2.50	−0.67
−0.75	–	0.56	0.59	0.47	–	−1.33	−0.68	0.73	−0.93	−0.85	2.42	−0.64
−0.70	–	0.49	0.62	0.50	–	−1.43	−0.64	0.76	−0.84	−0.78	2.35	−0.61
−0.60	–	0.36	0.66	0.55	–	−1.67	−0.56	0.83	−0.68	−0.64	2.21	−0.54
−0.50	–	0.25	0.71	0.61	–	−2.00	−0.48	0.88	−0.55	−0.52	2.09	−0.46
−0.40	–	0.16	0.76	0.67	–	−2.50	−0.39	0.92	−0.42	−0.41	1.98	−0.38
−0.30	–	0.09	0.81	0.74	–	−3.33	−0.30	0.96	−0.31	−0.30	1.88	−0.29
−0.25	–	0.06	0.84	0.78	–	−4.00	−0.25	0.97	−0.26	−0.25	1.82	−0.24
−0.20	–	0.04	0.87	0.82	–	−5.00	−0.20	0.98	−0.20	−0.20	1.77	−0.20
−0.10	–	0.01	0.93	0.90	–	−10.00	−0.10	1.00	−0.10	−0.10	1.67	−0.10
0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	–	–	0.00	1.00	0.00	0.00	1.57	0.00
0.10	0.32	0.01	1.07	1.11	−2.30	10.00	0.10	1.00	0.10	0.10	1.47	0.10
0.20	0.45	0.04	1.15	1.22	−1.61	5.00	0.20	0.98	0.20	0.20	1.37	0.20
0.25	0.50	0.06	1.19	1.28	−1.39	4.00	0.25	0.97	0.26	0.25	1.32	0.24
0.30	0.55	0.09	1.23	1.35	−1.20	3.33	0.30	0.96	0.31	0.30	1.27	0.29
0.40	0.63	0.16	1.32	1.49	−0.92	2.50	0.39	0.92	0.42	0.41	1.16	0.38
0.50	0.71	0.25	1.41	1.65	−0.69	2.00	0.48	0.88	0.55	0.52	1.05	0.46
0.60	0.77	0.36	1.52	1.82	−0.51	1.67	0.56	0.83	0.68	0.64	0.93	0.54
0.70	0.84	0.49	1.62	2.01	−0.36	1.43	0.64	0.76	0.84	0.78	0.80	0.61
0.75	0.87	0.56	1.68	2.12	−0.29	1.33	0.68	0.73	0.93	0.85	0.72	0.64
0.80	0.89	0.64	1.74	2.23	−0.22	1.25	0.72	0.70	1.03	0.93	0.64	0.67
0.90	0.95	0.81	1.87	2.46	−0.11	1.11	0.78	0.62	1.26	1.12	0.45	0.73
1.00	1.00	1.00	2.00	2.72	0.00	1.00	0.84	0.54	1.56	1.57	0.00	0.79

Sejam f e g funções reais de variável real e k, p, a e c constantes reais

	Função: $h(x)$	**Primitiva:** $H(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$
constantes		
P1.	$k, \quad k \in \mathbb{R}$	$k\,x + c$
potências, produtos e quocientes		
P2.	$f'\,f^p, \quad p \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{f^{p+1}}{p+1} + c$
P3.	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\vert f\vert + c$
P4.	$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arctg}(f) + c$ ou $-\operatorname{arcotg}(f) + c$
P5.	$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin(f) + c$ ou $-\arccos(f) + c$
exponencial		
P6.	$f'\,a^f$	$\dfrac{a^f}{\ln(a)} + c$
funções trigonométricas		
P7.	$f'\cos(f)$	$\sin(f) + c$
P8.	$f'\sec(f) = \dfrac{f'}{\cos(f)}$	$\ln\vert\sec(f) + \operatorname{tg}(f)\vert + c$
P9.	$f'\sec^2(f) = \dfrac{f'}{\cos^2(f)}$	$\operatorname{tg}(f) + c$
P10.	$f'\sin(f)$	$-\cos(f) + c$
P11.	$f'\operatorname{cosec}(f) = \dfrac{f'}{\sin(f)}$	$\ln\vert\operatorname{cosec}(f) - \operatorname{cotg}(f)\vert + c$
P12.	$f'\operatorname{cosec}^2(f) = \dfrac{f'}{\sin^2(f)}$	$-\operatorname{cotg}(f) + c$
P13.	$f'\sec(f)\operatorname{tg}(f) = \dfrac{f'\sin(f)}{\cos^2(f)}$	$\sec(f) + c$
P14.	$f'\operatorname{cosec}(f)\operatorname{cotg}(f) = \dfrac{f'\cos(f)}{\sin^2(f)}$	$-\operatorname{cosec}(f) + c$

Linearidade (ou **decomposição**)
Sejam f_1 e f_2 funções reais de variável real e k_1 e k_2 constantes reais.

$$\int \Big(k_1 f_1 \pm k_2 f_2\Big)\,dx = k_1 \int f_1\,dx \pm k_2 \int f_2\,dx$$

FORMULÁRIO **Técnicas de primitivação**

PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO: $\boxed{\int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}}$

a, b são constantes reais

$R(\cdot)$ indica que a função envolve somas, diferenças, produtos ou quocientes dos termos representados

	Tipo de função:	**Substituição:**	Simplificações:
exponencial			
S1.	$R\left(a^{rx}, a^{sx}, \dots\right)$	$a^{mx} = t, \quad m = m.d.c.(r, s, \dots)$	
radicais de argumento polinomial			
S3.	$R\left(x, \sqrt[q]{x^p}, \sqrt[s]{x^r}, \dots\right)$	$x = t^m, \quad m = m.m.c.(q, s, \dots)$	
S5.	$R\left(x\,, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\sin(t),\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$
S6.	$R\left(x\,, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\operatorname{tg}(t),\ t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$1 + \operatorname{tg}^2(t) = \sec^2(t)$
S7.	$R\left(x\,, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\sec(t),\ t \in [0, \pi]\backslash\{0\}$	$\sec^2(t) - 1 = \operatorname{tg}^2(t)$

PRIMITIVAÇÃO POR PARTES: $\boxed{\int d\,p\,dx \;=\; d\,\int p\,dx - \int d'\,\int p\,dx\;dx}$

PRIMITIVAÇÃO DE FRACÇÕES RACIONAIS

1. Se a **fracção é imprópria** (grau do numerador $\geq$ grau do denominador):

   Efectua-se a divisão dos polinómios, para decompor a fracção na soma de um polinómio com uma fracção própria,

$$\underbrace{\frac{p(x)}{d(x)}}_{\substack{\text{fracção}\\ \text{imprópria}}} = \underbrace{q(x)}_{\text{polinómio}} + \underbrace{\frac{r(x)}{d(x)}}_{\substack{\text{fracção}\\ \text{própria}}},$$

   A fracção racional própria resultante é tratada conforme descrito no passo 2.

2. Se a **fracção é própria** (grau do numerador $<$ grau do denominador):

   Decompõe-se a fracção numa soma de fracções simples:

   i) factoriza-se o denominador, tendo em conta as suas raízes: $d(x) = (x - \star)^m \cdots (x - \bullet)^n$

   ii) cada **raiz real** $\star$, de **multiplicidade** m, origina um factor real $(x-\star)^m$ e portanto uma soma de m fracções simples com a forma

$$\frac{A_1}{x-\star} + \frac{A_2}{(x-\star)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\star)^m},$$

   iii) Determinam-se os coeficientes A_i recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados ou ao método das constantes arbitrárias.

PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. **Potências** ou **produtos de potências** de seno e cosseno:

   (a) Seno e cosseno têm expoente **par**:
   Reescrevem-se as potências pares na forma $\left(\cos^2(a)\right)^p$ e $\left(\sin^2(a)\right)^p$ e aplicam-se as fórmulas do arco duplo correspondentes.

   $$\cos^2(a) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2a)\Big) \qquad \sin^2(a) = \frac{1}{2}\Big(1-\cos(2a)\Big)$$

   (b) Seno ou cosseno tem expoente **ímpar**:
   Destaca-se uma unidade à potência de expoente ímpar e ao factor resultante, $\left(\cos^2(a)\right)^p$ ou $\left(\sin^2(a)\right)^p$, aplica-se a fórmula fundamental da trigonometria, para passar à co-função.

   $$\cos^2(a) = 1-\sin^2(a) \qquad \sin^2(a) = 1-\cos^2(a)$$

2. **Produtos** de seno e cosseno de **argumentos diferentes**:
   Aplica-se uma das seguintes fórmulas:

   $$\sin(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)$$
   $$\cos(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big)$$
   $$\sin(a)\ \sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)$$

3. **Potências** de tangente, cotangente, secante ou cossecante:

   (a) Potência de tangente ou cotangente:
   Destaca-se $\operatorname{tg}^2(a)$ ou $\operatorname{cotg}^2(a)$ e, nesse factor, aplica-se a fórmula correspondente.

   $$\operatorname{tg}^2(a) = \sec^2(a)-1 \qquad \operatorname{cotg}^2(a) = \operatorname{cosec}^2(a)-1$$

   (b) Potência **ímpar** de secante ou cossecante:
   Destaca-se $\sec^2(a)$ ou $\operatorname{cosec}^2(a)$ e primitiva-se por partes, primitivando o factor destacado. Depois, aplica-se uma das fórmulas seguintes para obter no segundo membro a primitiva que se pretende calcular. Isola-se a primitiva e resolve-se a igualdade como uma equação, em que a incógnita é a primitiva.

   $$\operatorname{tg}^2(a) = \sec^2(a)-1 \qquad \operatorname{cotg}^2(a) = \operatorname{cosec}^2(a)-1$$

   (c) Potência **par** de secante ou cossecante:
   Destaca-se $\sec^2(a)$ ou $\operatorname{cosec}^2(a)$ e ao factor resultante, $\left(\sec^2(a)\right)^p$ ou $\left(\operatorname{cosec}^2(a)\right)^p$, aplica-se a fórmula correspondente.

   $$\sec^2(a) = 1+\operatorname{tg}^2(a) \qquad \operatorname{cosec}^2(a) = 1+\operatorname{cotg}^2(a)$$

- **Convergência de uma série** $\left[\ \sum u_n = \overbrace{\boxed{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}}^{S_n} + \cdots\ \right]$

  A série $\sum u_n$ é convergente se e só se o limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe e é finito.

  1. *Série de Mengoli (ou telescópica):* $u_n = a_n - a_{n+p} \quad \to \quad S_n = a_1 + \cdots + a_p - (a_{n+1} + \cdots + a_{n+p})$, *desde que* $n > p$
  2. *Série geométrica:* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = R$ *(constante)* $\quad \to \quad S_n = 1^o\text{termo} \times \frac{1-R^n}{1-R}$

- **Condição necessária de convergência** $\left[\ \sum u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots\ \right]$

  Se $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ é diferente de zero ou não existe, então a série $\sum u_n$ é divergente.

- **Critério do integral**

  Sejam $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente e $u_n = f(n)$, para $n \geq n_0$.

  A série $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ e o integral impróprio $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

  SÉRIES DE REFERÊNCIA

  - Série de Mengoli $[u_n = a_n - a_{n+p}]$

    se $\lim a_n$ é finito : convergente e $S = a_1 + \cdots + a_p - p \cdot \lim a_n$

    se $\lim a_n$ não é finito : divergente

  - Série geométrica $\left[\frac{u_{n+1}}{u_n} = R \quad | \quad u_n = aR^n\right]$

    se $|R| < 1$: convergente e $S = \frac{1^o\text{termo}}{1-R}$

    se $|R| \geq 1$: divergente

  - Série de Dirichlet $\left[u_n = \frac{a}{n^\alpha}\right]$

    se $\alpha > 1$: convergente

    se $\alpha \leq 1$: divergente

- **Critério de D'Alembert (ou da razão)**

  Sejam $\sum u_n$ uma série e $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lambda$.

  i) Se $\lambda < 1$, então a série $\sum u_n$ é (absolutamente) convergente;

  ii) Se $\lambda > 1$, então a série $\sum u_n$ é divergente.

- **Critério de Leibniz**

  Seja $\sum u_n$ uma série de termos alternados ($u_n = (-1)^n a_n$ com $a_n > 0$).

  Se $(a_n)_n$ é uma sucessão decrescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, então a série $\sum u_n$ é convergente.