Frequência 2 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

6 de janeiro de 2023 — Duração: 1h15m

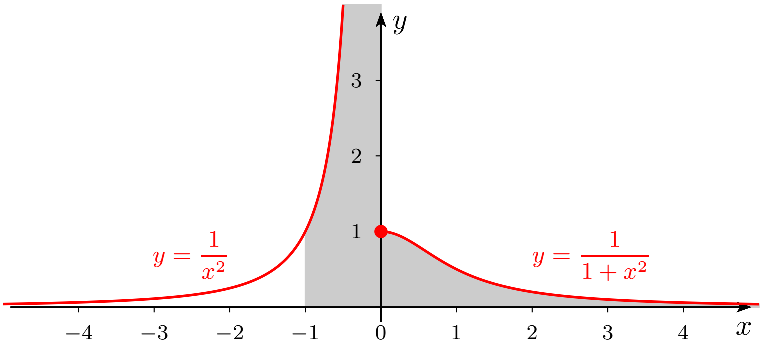
Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[3.0 *val.*] 1. Considere os integrais

(I) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx\,;$ (II) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx\,;$ (III) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

e o gráfico da figura seguinte.



(a) Identifique, justificando, o integral impróprio de 1ª espécie e determine a sua natureza.

(b) Identifique, justificando, o integral impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

(c) A região representada a sombreado tem área finita? Justifique.

(d) Determine, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

[3.5 *val.*] 2. (a) Calcule as seguintes primitivas:

i. $\displaystyle\int x^3 \sec^2(x^2)\,dx\,;$

ii. $\displaystyle\int \cos^2(x)\,dx\,.$

(b) Recorrendo à mudança de variável conveniente e ao resultado da alínea (a-ii), calcule a primitiva $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

[2.5 *val.*] 3. (a) Decomponha a fração $\displaystyle\frac{1}{x^2+x}$ numa soma de frações simples.

(b) Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2+x}\,dx\,.$

(c) Recorrendo à definição de convergência, determine a natureza da série telescópica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

Coimbra Institute of Engineering
Department of Physics and Mathematics

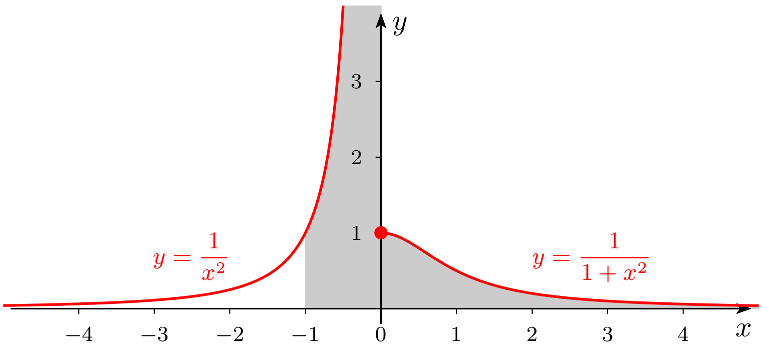
Calculus I - Informatics Engineering - test 2

January 6th, 2023 1h15m

[3.0 *val.*] 1. Consider the integrals

(I) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx\,;$ (II) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx\,;$ (III) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

and the plot of the following figure.



(a) Identify the improper integral of 1st kind and determine if it is convergent or divergent. Justify.

(b) Identify the improper integral of 2nd kind and determine if it is convergent or divergent. Justify.

(c) Does the shaded region have a finite area? Justify.

(d) Determine if the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ converges or diverges. Justify.

[3.5 *val.*] 2. (a) Evaluate each of the following indefinite integrals:

i. $\displaystyle\int x^3 \sec^2(x^2)\,dx\,;$

ii. $\displaystyle\int \cos^2(x)\,dx\,.$

(b) Using a convenient substitution and the results from paragraph (a-ii), determine the indefinite integral $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$

[2.5 *val.*] 3. (a) Perform the rational fraction $\dfrac{1}{x^2+x}$ as a summation of partial fractions.

(b) Determine the indefinite integral $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2+x}\,dx\,.$

(c) Using the definition of converge of a series, determine if the telescopic series $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$ converge or diverge.

1. (a) O integral impróprio de 1ª espécie é (III):
   i. $D_{\text{int}} = [1, +\infty[$ não é limitado;
   ii. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ está definida e é contínua em D_{int}, porque $[1, +\infty[= D_{\text{int}} \subseteq D_f = \mathbb{R}$ e $f(x)$ é contínua em todo o seu domínio, respectivamente.

   Relativamente à natureza do integral, tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[\operatorname{arctg}(x)\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

   pelo que o integral é convergente.

   (b) O integral impróprio de 1ª espécie é (I):
   i. $D_{\text{int}} = [-1, 0]$ é limitado;
   ii. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ está definida e é contínua em $D_{\text{int}} = [-1, 0]$, excepto em $x = 0$. Uma vez que o limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

   não é finito, então a função não é limitada no intervalo de integração.

   Relativamente à natureza do integral, tem-se

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{-1}^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to 0^-} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{-1}^t = \lim_{t\to 0^-} -\frac{1}{t} - 1 = +\infty,$$

   pelo que o integral é divergente.

   (c) A área da região sombreada é dada por

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

   Uma vez que qualquer um dos integral é divergente, então a área não é finita.

   (d) Uma vez que a função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é contínua, positiva e decrescente no intervalo $[1, +\infty[$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ e o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ têm a mesma natureza (critério do integral). Uma vez o integral é convergente (integral III), então a série também é convergente.

2. (a) i. Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int x^3 \sec^2(x^2)\,dx = \int \underbrace{x^2}_{d} \cdot \underbrace{x\sec^2(x^2)}_{p}\,dx$$

cálculos auxiliares:

- $\displaystyle\int x\sec^2(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x\sec^2(x^2)\,dx}_{P10} = \frac{1}{2}\tan(x^2) + c$
- $(x^2)' = 2x$

$$= \frac{1}{2}\tan(x^2)\,x^2 - \int \frac{1}{2}\tan(x^2)\cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan(x^2) + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{-2x\,\sin(x^2)}{\cos(x^2)}\,dx}_{P3}$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan(x^2) + \frac{1}{2}\ln|\cos(x^2)| + c, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

ii. Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas, tem-se

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\,dx &= \int \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2x)\Big)\,dx \\ &= \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{P1}\,dx + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \underbrace{2\cos(2x)}_{P7}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,\sin(2x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à mudança de variável

$$\text{m.v. } \boxed{x = 2\sin(t)}\,, \quad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

tem-se

$$x' = 2\cos(t)\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-x^2}\,dx &\overset{\text{m.v.}}{=} \int \sqrt{4-\big(2\sin(t)\big)^2}\;2\cos(t)\,dt \\ &= \int \sqrt{4-4\sin^2(t)}\;2\cos(t)\,dt \\ &= \int \sqrt{4\,\big(1-\sin^2(t)\big)}\;2\cos(t)\,dt \\ &= 4\int \cos^2(t)\,dt\,, \quad \text{porque } t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \\ &\overset{\text{(a)(ii)}}{=} 4\left(\frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\,\sin(2t)\right) + c\,, \quad \text{pelo resultado da alínea a(ii)} \\ &= 2\,t + \sin(2t) + c \\ &\overset{\text{m.v.}}{=} 2\,\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

3. (a) A fracção é própria (grau do numerador $= 0 < 2 =$ grau do denominador), pelo que

- factorização do denominador:

$$x^2 + x = 0 \;\Leftrightarrow\; x\,(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = -1\,.$$

Então

$$x^2 + x \;=\; x\,(x+1).$$

- decomposição da fração:

$$\frac{1}{x\,(x+1)} \;=\; \frac{1}{x^2+x} \;=\; \underbrace{\frac{A}{x}}_{\cdot(x+1)} + \underbrace{\frac{B}{x+1}}_{\cdot x} \;=\; \frac{A\,(x+1) + B\,x}{x\,(x+1)}\,.$$

Da igualdade entre os numeradores resulta que

$$\begin{array}{r|rcl} & 1 & = & A\,(x+1) + B\,x \\ \hline x = 0 & 1 & = & A + 0 \\ x = -1 & 1 & = & 0 - B \end{array} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{1}{x^2+x} \;=\; \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,,$$

(b) Uma vez que a fracção é imprópria (grau do numerador $= 3 > 2 =$ grau do denominador), começamos por efectuar a divisão dos dois polinómios:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & & +1 & x^2+x \\ \cline{5-5} -(x^3 & +x^2 & &) & x \\ \cline{1-4} & & & 1 & \end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{x^3+x^2+1}{x^2+x}}_{\text{fracção imprópria}} = x + \underbrace{\frac{1}{x^2+x}}_{\text{fracção própria}},$$

Na alínea (a) já foi determinada a decomposição da fração própria resultante numa soma de frações simples, pelo que

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2+x} = x + \frac{1}{x^2+x} = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

donde

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x^2+1}{x^2+x}\,dx &= \int \underbrace{x}_{P2}\,dx + \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{P3}\,dx - \int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{P3}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \ln|x+1| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(c) Tendo em conta a decomposição determinada na alínea (a), tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

pelo que a série é uma série telescópica. Então

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

pelo que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

e portanto a série é convergente e tem soma 1.