Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

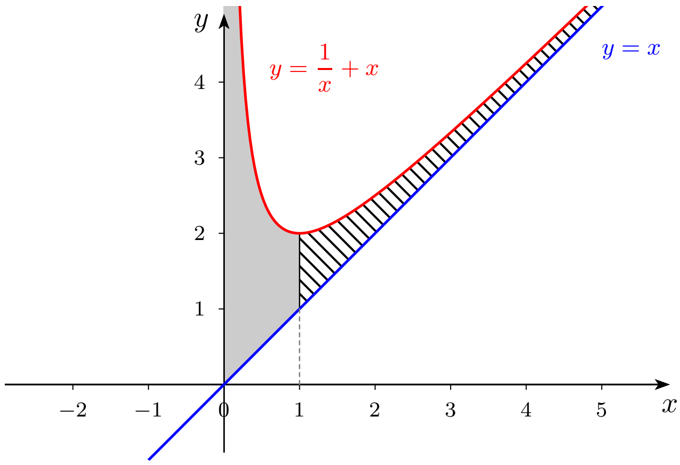
Teste 2 de Análise Matemática I - Engenharia Informática

20 de janeiro de 2021 Duração: 1h15m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.5 *val.*] 1. Considere o gráfico seguinte.



(a) Classifique, justificando, os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

(b) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.

(c) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 2ª espécie.

(d) A região representada a tracejado tem área finita? Justifique.

[1.5 *val.*] 2. Considere a primitiva $\displaystyle\int \sec^2(x)\,\tan(x)\,dx$.

Recorrendo às regras de primitivação imediata, apresente 3 resoluções da primitiva anterior.

[3.0 *val.*] 3. (a) Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx$.

(b) Recorrendo à mudança de variável $\boxed{e^x = t}$ e à alínea anterior, calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-4}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \arcsin(2x)\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sec^3(x)}\,dx$.

1. (a) Começamos por notar que $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Além disso, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua no seu domínio.

   (I) $D_{\text{int}} = [0,\, 1]$ é limitado mas não está contido em D_f, porque $x = 0$ não pertence a D_f. Uma vez que o limite
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,,$$
   então a função não é limitada em D_{int}. Logo o integral é impróprio de 2ª espécie (D_{int} é limitado mas $f(x)$ é ilimitada).

   (II) $D_{\text{int}} = [1,\, +\infty[$ não é limitado mas está contido em D_f. Como $f(x)$ é contínua em D_{int}, então o integral é impróprio de 1ª espécie (D_{int} é ilimitado mas $f(x)$ é limitada em intervalos fechados e limitados).

   (b) O integral impróprio de 1ª espécie é (II) e tem-se
   $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \Big[\ln(x)\Big]_1^t \;=\; \lim_{t\to+\infty} \ln(t) \;=\; +\infty\,,$$
   pelo que o integral é divergente.

   (c) O integral impróprio de 2ª espécie é (I) e tem-se
   $$\int_0^{1} \frac{1}{x}\, dx \;=\; \lim_{t\to 0^+} \int_t^{1} \frac{1}{x}\, dx \;=\; \lim_{t\to 0^+} \Big[\ln(x)\Big]_t^1 \;=\; \lim_{t\to 0^+} -\ln(t) \;=\; +\infty\,,$$
   pelo que o integral é divergente.

   (d) A área da região a tracejado é dada por
   $$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} + x\right) - x\, dx \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$
   pelo que não é finita, de acordo com a alínea (b).

2. Recorrendo à regra 2, tem-se
   $$\int \underbrace{\sec^2(x)\,\tan(x)}_{R2}\, dx \;=\; \frac{\tan^2(x)}{2} + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$
   Também podemos recorrer à regra 2, tendo por base a função secante:
   $$\int \sec^2(x)\,\tan(x)\, dx \;=\; \int \underbrace{\sec(x)\,\sec(x)\,\tan(x)}_{R2}\, dx \;=\; \frac{\sec^2(x)}{2} + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$
   Finalmente, também podemos recorrer à regra 2, tendo por base a função cosseno:
   $$\int \sec^2(x)\,\tan(x)\, dx \;=\; \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx \;=\; -\int \underbrace{-\sin(x)\,\cos^{-3}(x)}_{R2}\, dx \;=\; -\frac{\cos^{-2}(x)}{-2} + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

3. (a) Uma vez que a fracção é imprópria (grau do numerador $= 2 =$ grau do denominador), começamos por efectuar a divisão dos dois polinómios:
   $$\begin{array}{rr|l} x^2 & & x^2 - 4 \\ \hline -(\,x^2 & -4\,) & 1 \\ \hline & 4 & \end{array}$$
   Então
   $$\underbrace{\frac{x^2}{x^2-4}}_{\text{fracção imprópria}} \;=\; 1 + \underbrace{\frac{4}{x^2-4}}_{\text{fracção própria}}\,,$$
   A fracção própria resultante também ainda não é primitivável através das regras de primitivação imediata, pelo que necessitamos de a decompor numa soma de fracções simples (página 8 das Tabelas de Matemática).

- factorização do denominador:

$$x^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \vee x=-2\,.$$

  Então

$$x^2-4 \;=\; (x-2)(x+2).$$

- decomposição da fracção:

$$\begin{aligned}\frac{4}{x^2-4} &= \underbrace{\frac{A}{x-2}}_{\cdot(x+2)}+\underbrace{\frac{B}{x+2}}_{\cdot(x-2)}\\ \Leftrightarrow \quad \frac{4}{(x-2)(x+2)} &= \frac{A\,(x+2)+B\,(x-2)}{(x-2)(x+2)}\,.\end{aligned}$$

  Da igualdade entre os numeradores resulta que

$$\begin{array}{r|rcl} & 4 & = & A\,(x+2)+B\,(x-2)\\ \hline x=2 & 4 & = & 4A+0\\ x=-2 & 4 & = & 0-4B\end{array} \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1\\ B=-1\end{array}\right.$$

  A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{4}{x^2-4} \;=\; \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{x^2}{x^2-4}}_{\text{fracção imprópria}} &= 1+\underbrace{\frac{4}{x^2-4}}_{\text{fracção própria}}\\ &= 1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\,.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx &= \int 1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\,dx\\ &= \int \underbrace{1}_{R2}\,dx+\int \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{R5}\,dx-\int \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{R5}\,dx\\ &= x+\ln|x-2|-\ln|x+2|+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à mudança de variável indicada,

$$\text{m.v. } \boxed{e^x=t}\,, \qquad t\in\mathbb{R}$$

tem-se

$$x=\ln(t) \quad \Rightarrow \quad x'=\frac{1}{t}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-4}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{t^3}{t^2-4}\,\frac{1}{t}\,dt\\ &= \int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt\\ &\overset{\text{(a)}}{=} t+\ln|t-2|-\ln|t+2|+c\\ &\overset{\text{m.v}}{=} e^x+\ln|e^x-2|-\ln|e^x+2|+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. (a) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \arcsin(2x)\,dx = \int \underbrace{1}_{u} \cdot \underbrace{\arcsin(2x)}_{v}\,dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \displaystyle\int 1\,dx = x + c \\ \bullet \left(\arcsin(2x)\right)' = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
&= x\arcsin(2x) - \int x \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx \\
&= x\arcsin(2x) - \int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \\
&= x\arcsin(2x) - \frac{1}{-4}\int \underbrace{(-8x)(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \\
&= x\arcsin(2x) + \frac{1}{4}\,\frac{(1-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
&= x\arcsin(2x) + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas (página 7 das Tabelas de Matemática), tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sec^3(x)}\,dx &= \int \sqrt{\sin(x)}\cos^3(x)\,dx \\
&= \int \sin^{\frac{1}{2}}(x)\,\cos^3(x)\,dx \\
&= \int \sin^{\frac{1}{2}}(x)\cos^2(x)\,\cos(x)\,dx \\
&= \int \sin^{\frac{1}{2}}(x)\,\left(1-\sin^2(x)\right)\,\cos(x)\,dx \\
&= \int \left(\sin^{\frac{1}{2}}(x) - \sin^{\frac{5}{2}}(x)\right)\,\cos(x)\,dx \\
&= \int \underbrace{\sin^{\frac{1}{2}}(x)\,\cos(x)}_{R2}\,dx - \int \underbrace{\sin^{\frac{5}{2}}(x)\,\cos(x)}_{R2}\,dx \\
&= \frac{\sin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}} - \frac{\sin^{\frac{7}{2}}(x)}{\frac{7}{2}} + c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3(x)} - \frac{2}{7}\sqrt{\sin^7(x)} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$