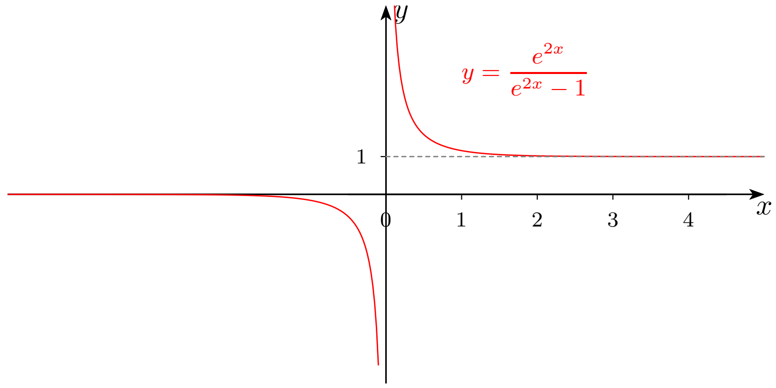
Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (parte 2) - Engenharia Informática

28 de janeiro de 2022 — Duração: 1h15m

- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.25 *val.*] 1. Considere o gráfico seguinte.



(a) Considere os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx$.

No que se segue, note que $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

i. Identifique, justificando, o integral impróprio de 1ª espécie e determine a sua natureza.

ii. Identifique, justificando, o integral impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

(b) Determine, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2n}}{e^{2n}-1}$.

[4.0 *val.*] 2. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int 3x\cos(6x)\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx$; c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$.

[1.25 *val.*] 3. Responda a <u>uma</u> das seguintes alíneas:

(a) Recorrendo à definição de convergência de uma série, determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n - 2^{n+1}\right)$.

(b) Determine o centro e o intervalo de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$.

[0.5 *val.*] 4. (a) A expressão $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln^3(x)}{x}\, dx$ (escolha a opção correta):

i) não tem sentido matemático;
ii) é integral definido;
iii) é integral impróprio de 1ª espécie;
iv) é integral impróprio de 2ª espécie.

[0.5 *val.*] (b) Identifique a proposição verdadeira:

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx\,;$
ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\, dx = \int x^{-2} + x^{-1}\, dx\,;$
iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(x+1)}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx \times \int \frac{1}{x+1}\, dx\,;$
iv) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(x+1)}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x+1}\, dx\,.$

[0.5 *val.*] (c) Considere o integral $\displaystyle I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x)\, dx$ e a mudança de variável definida por $x = \operatorname{arctg}(t)$.
Uma expressão equivalente de I é dada por (escolha a opção correta):

i) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} f(\operatorname{arctg}(t))\, \frac{1}{1+t^2}\, dt\,;$
ii) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} f(\operatorname{arctg}(t))\, \frac{1}{1+t^2}\, dt\,;$
iii) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} f(t)\, \frac{1}{1+t^2}\, dt\,;$
iv) nenhuma das opções anteriores.

1. (a) Começamos por notar que $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f(x)$ é contínua no seu domínio.

   i. O integral impróprio de 1ª espécie é (I) porque $D_{\text{int}} = [1, +\infty[$ está contido em D_f mas não é limitado. Tem-se

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1|\right]_1^t \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\ln|e^{2t}-1| - \frac{1}{2}\ln(e^2-1) = +\infty\,,\end{aligned}$$

   pelo que o integral é divergente.

   ii. O integral impróprio de 2ª espécie é (III) porque $D_{\text{int}} = [0, \frac{1}{2}]$ é limitado, a função $f(x)$ só não está definida num ponto desse intervalo e não é limitada:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,,$$

   Tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1|\right]_t^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\ln(e-1) - \frac{1}{2}\ln|e^{2t}-1| = +\infty\,,\end{aligned}$$

   pelo que o integral é divergente.

(b) Uma vez que a função $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$ é contínua, positiva e decrescente no intervalo $[1, +\infty[$, podemos usar o critério do integral e, portanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2n}}{e^{2n}-1}$ e o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx$ têm a mesma natureza. Uma vez que na alínea (a)(i) verificámos que o integral é divergente, então a série também é divergente.

2. a) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \arcsin(2x)\,dx = \int \underbrace{3x}_{v} \cdot \underbrace{\cos(6x)}_{u}\,dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \displaystyle\int \cos(6x)\,dx = \frac{1}{6}\sin(6x) + c \\ \bullet\ (3x)' = 3 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6}\sin(6x)\,3x - \int \frac{1}{6}\sin(6x)\cdot 3\,dx \\ &= \frac{x}{2}\sin(6x) - \frac{1}{12}\int \underbrace{6\sin(6x)}_{R7}\,dx \\ &= \frac{x}{2}\sin(6x) - \frac{1}{12}\big(-\cos(6x)\big) + c \\ &= \frac{x}{2}\sin(6x) + \frac{1}{12}\cos(6x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas (página 7 das Tabelas de Matemática), tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx &= \int \sin^3(x)\cos^{-\frac{1}{2}}(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\sin^2(x)\cos^{-\frac{1}{2}}(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\big(1-\cos^2(x)\big)\cos^{-\frac{1}{2}}(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\big(\cos^{-\frac{1}{2}}(x)-\cos^{\frac{3}{2}}(x)\big)\,dx \\
&= -\int \underbrace{-\sin(x)\cos^{-\frac{1}{2}}(x)}_{R2}\,dx + \int \underbrace{-\sin(x)\cos^{\frac{3}{2}}(x)}_{R2}\,dx \\
&= -\frac{\cos^{\frac{1}{2}}(x)}{\frac{1}{2}} + \frac{\cos^{\frac{5}{2}}(x)}{\frac{5}{2}} + c \\
&= -2\sqrt{\cos(x)} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5(x)} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

c) Uma vez que a fracção é própria (grau do numerador $<$ grau do denominador) mas não é directamente primitivável através das regras de primitivação imediata, necessitamos de a decompor numa soma de fracções simples (página 8 das Tabelas de Matemática).

- factorização do denominador:

$$x^3+2x^2+x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x^2+2x+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \vee x=-1 \vee x=-1\,.$$

Então

$$x^3+2x^2+x = x\,(x+1)(x+1).$$

- decomposição da fracção:

$$\underbrace{\frac{x+1}{x^3+2x^2+x}}_{\cdot x\,(x+1)(x+1)} = \underbrace{\frac{A}{x}}_{\cdot x\,(x+1)(x+1)} + \underbrace{\frac{B_1}{x+1}}_{\cdot x\,(x+1)(x+1)} + \underbrace{\frac{B_2}{(x+1)^2}}_{\cdot x\,(x+1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x+1 = = A\,(x+1)^2 + B_1\,x\,(x+1) + B_2\,x\,.$$

Então,

$$\begin{array}{r} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& A+0+0 \\ 0 &=& 0+0-B_2 \\ 2 &=& 4A+2B_1+B_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B_2=0 \\ B_1=-1 \end{array}\right.$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{x+1}{x^3+2x^2+x} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\,,$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx &= \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{R5}\,dx - \int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{R5}\,dx \\
&= \ln|x| - \ln|x+1| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

3. (a) Trata-se de uma série de Mengoli,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n - 2^{n+1}\right) \;=\; \left(2^1 - 2^2\right) + \left(2^2 - 2^3\right) + \left(2^3 - 2^4\right) + \left(2^4 - 2^5\right) + \dots$$

pelo que

$$S_n \;=\; \left(2^1 - \cancel{2^2}\right) + \left(\cancel{2^2} - \cancel{2^3}\right) + \left(\cancel{2^3} - \cancel{2^4}\right) + \cdots + \left(\cancel{2^n} - 2^{n+1}\right) \;=\; 2 - 2^{n+1}$$

donde

$$\lim S_n \;=\; \lim \left(2 - 2^{n+1}\right) \;=\; -\infty$$

Logo, a série é divergente.

(b) Recorrendo ao critério da razão (D'Alembert), tem-se

$$\lim \left| \frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x+1)^n}{n^2}} \right| \;=\; \lim \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^2} \, \frac{n^2}{(x+1)^n} \right| \;=\; \lim \cancelto{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \; |x+1| \;=\; |x+1|$$

Então, a série é convergente quando

$$|x+1| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x+1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 2$$

A série tem centro em $x_0 = 1$ e intervalo de convergência $]0, 2[$.

4. (a) Opção(iii).

(b) Opção(iv).

(c) Opção(ii).