Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Teste 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

20 de janeiro de 2021 Duração: 1h15m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.

- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. (a) Considere a função $f(x) = 1 + 2\,e^{3x}$.

i) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

ii) Calcule os valores de $f(0)$ e $f^{-1}(3)$. Comente os resultados.

(b) i) Calcule o valor numérico da expressão $\arcsin\left(-\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right)$.

ii) Resolva a equação $2\sin(2x) = -1$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $e^x + x^2 - 2 = 0$ tem duas soluções, uma das quais pertence ao intervalo $[0, 1]$.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Partindo do intervalo indicado, efectue 2 iterações do método de Newton para estimar a solução positiva da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize 2 casas decimais em todos os cálculos que realizar.

Nota: $\frac{1.72}{4.72} \simeq 0.36$, $\frac{0.18}{3.10} \simeq 0.06$, $\frac{0.23}{3.10} \simeq 0.07$

[1.0 *val.*] 3. Considere a primitiva $\int \sec(x)\,\tan(x)\,dx$.

Recorrendo às regras de primitivação imediata, apresente 2 resoluções da primitiva anterior.

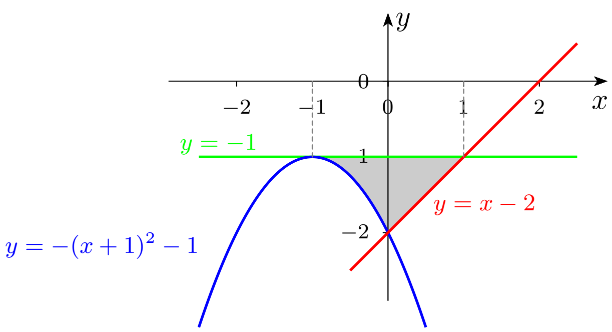
[2.0 *val.*] 4. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

$$\int \operatorname{arctg}(x)\,dx = x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Recorrendo à alínea anterior, determine o valor do integral definido $\int_0^1 \operatorname{arctg}(x)\,dx$.

(c) O cálculo do integral anterior recorrendo à regra dos trapézios e a 2 sub-intervalos garante uma estimativa com 1 casa decimal correcta. Determine essa estimativa.

[5.0 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{A}$

i) em função da variável x; ii) em função da variável y.

(b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular o volume da região que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo

i) Ox; ii) Oy.

1. (a) i. Começamos por notar que a função f é injectiva e portanto é invertível. Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = ? & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = 1 + 2\,e^{3x} \end{array}$$

O contradomínio da função inversa coincide com o domínio da função original pelo que, tendo em conta o domínio do exponencial, tem-se

$$CD_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$$

A função inversa tem expressão analítica dada por

$$\begin{aligned} y = 1 + 2\,e^{3x} \quad &\Leftrightarrow \quad y - 1 = 2\,e^{3x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{2} = e^{3x} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{y-1}{2}\right) = 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y-1}{2}\right) = x\,. \end{aligned}$$

e, consequentemente, tem domínio

$$D_{f^{-1}} = \{y \in \mathbb{R} : \frac{y-1}{2} > 0\} = \{y \in \mathbb{R} : y > 1\} =]1, +\infty[\,.$$

Tem-se então

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = \mathbb{R} & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} =]1, +\infty[\\ \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y-1}{2}\right) = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = 1 + 2\,e^{3x} \end{array}$$

ii. Tendo em conta a expressão da função $f(x)$, tem-se

$$f(0) = 1 + 2\,e^0 = 1 + 2 = 3$$

e portanto, por definição de função inversa, tem-se

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow 0 = f^{-1}(3)\,.$$

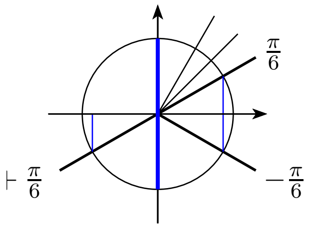
(b) i. Tendo em conta a periodicidade da função seno e respectiva restrição principal, tem-se

$$\begin{aligned} \arcsin\left(-\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right) &= \arcsin\left(-\sin\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(-\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(-\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

.

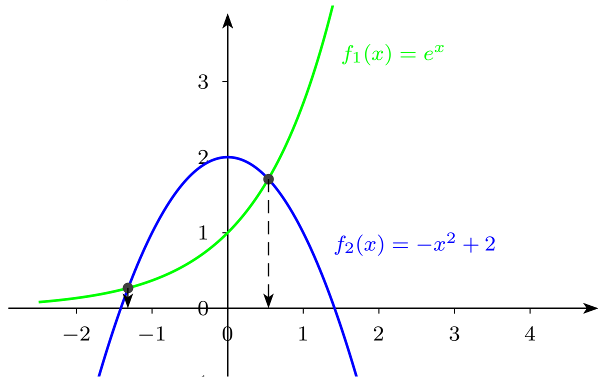
ii. Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$2\sin(2x) = -1 \;\Leftrightarrow\; \sin(2x) = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\; \sin(2x) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$



$$\Leftrightarrow\; 2x = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \;\vee\; 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\,2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} + k\,\pi \;\vee\; x = \frac{7\pi}{12} + k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

2. (a) Tendo em conta que
$$e^x + x^2 - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = -x^2 + 2$$
as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = -x^2 + 2$.



Então, a equação tem 2 soluções, umas das quais pertence ao intervalo $[0, 1]$.

(b) Consideremos a função $f(x) = e^x + x^2 - 2$.
Então, $f'(x) = e^x + 2x$ e, uma vez que $f''(x) = e^x + 2$ é positiva no intervalo $[0, 1]$, consideraremos $x_0 = 1$ (pois $f(1)$ tem o mesmo sinal de $f''(x)$). Assim,

n		x_n	erro
0		1	–
1	$1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{e^1+1-2}{e^1+2} \simeq 1 - \frac{1.72}{2.72+2} \simeq$	0.64	0.36
2	$0.64 - \frac{f(0.64)}{f'(0.64)} = 0.64 - \frac{e^{0.64}+0.64^2-2}{e^{0.64}+1.28} \simeq 0.64 - \frac{1.82+0.36-2}{1.82+1.28} \simeq 0.64 - \frac{0.18}{3.1} \simeq$	0.58	0.06

Então, $\overline{x} = 0.58$ é uma aproximação para a solução, com erro máximo 0.06.

3. Recorrendo directamente à regra 10 das primitivas imediatas, tem-se
$$\int \underbrace{\sec(x)\,\tan(x)}_{R10}\,dx = \sec(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Também podemos reescrever recorrendo a senos e cossenos e usar a regra 2 das primitivas imediatas:
$$\int \sec(x)\,\tan(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos(x)}\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx$$
$$= -\int \underbrace{-\sin(x)\cos^{-2}(x)}_{R2}\,dx = -\frac{\cos^{-1}(x)}{-1} + c = \sec(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

4. (a) Basta verifica que a derivada de $\quad x\,\mathrm{arctg}\,(x)-\dfrac{1}{2}\,\ln|1+x^2|+c \quad$ é $\quad \mathrm{arctg}\,(x)$:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\Big(x\,\mathrm{arctg}\,(x)-\frac{1}{2}\,\ln|1+x^2|+c\Big)'}_{R4+R3}\\
&= \underbrace{\Big(x\,\mathrm{arctg}\,(x)\Big)'}_{R5}-\frac{1}{2}\,\underbrace{\Big(\ln|1+x^2|\Big)'}_{R11}+\underbrace{(c)'}_{R1}\\
&= \underbrace{(x)'}_{R2}\,\mathrm{arctg}\,(x)+x\,\underbrace{\big(\mathrm{arctg}\,(x)\big)'}_{R21+R2}-\frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{(1+x^2)'}^{R4+R1+R7}}{1+x^2}+0\\
&= \mathrm{arctg}\,(x)+x\,\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2}\\
&= \mathrm{arctg}\,(x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

(b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{arctg}\,(x)\,dx &= \Big[x\,\mathrm{arctg}\,(x)-\frac{1}{2}\,\ln|1+x^2|\Big]_0^1\\
&= \mathrm{arctg}\,(1)-\frac{1}{2}\,\ln(2)-\Big(0-\frac{1}{2}\,\ln(1)\Big)\\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\,\ln(2)\,.
\end{aligned}$$

(c) Considerando a regra dos trapézios e uma partição uniforme do intervalo $[0,1]$ em 2 subintervalos, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{\mathrm{arctg}\,(x)}_{f(x)}\,dx &\simeq \frac{0.5}{2}\Big(f(0)+2\,f(0.5)+f(1)\Big)\\
&= 0.25\Big(\mathrm{arctg}\,(0)+2\,\mathrm{arctg}\,(0.5)+\mathrm{arctg}\,(1)\Big)\\
&\simeq 0.25\Big(0+2\times 0.46+0.79\Big)\\
&\simeq 0.43
\end{aligned}$$

5. (a) i. Tendo em conta as funções que delimitam a região, tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-1}^{0}\underbrace{-1}_{f_{sup}}-\underbrace{\big(-(x+1)^2-1\big)}_{f_{inf}}\,dx+\int_0^1 \underbrace{-1}_{f_{sup}}-\underbrace{(x-2)}_{f_{inf}}\,dx\\
&= \int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx \;+\; \int_0^1 -x+1\,dx
\end{aligned}$$

ii. Comecemos por explicitar as curvas que delimitam a região, em função da variável y:

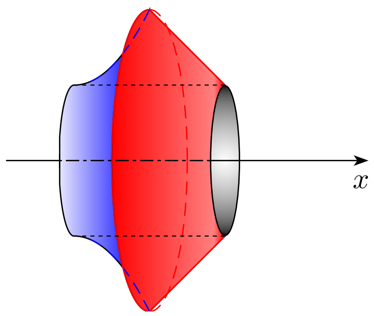
- $y=-(x+1)^2-1 \quad\Leftrightarrow\quad -y-1=(x+1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x=-1\pm\sqrt{-y-1}$
- $y=x-2 \quad\Leftrightarrow\quad x=y+2$

Então

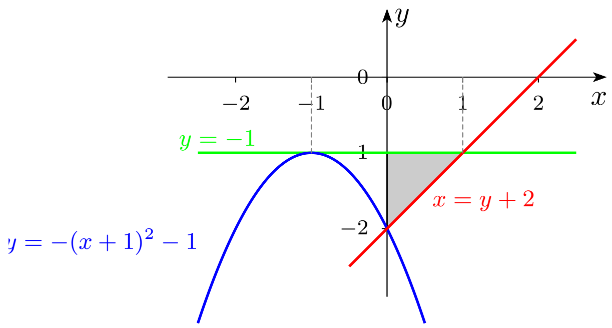
$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-2}^{-1}\underbrace{y+2}_{f_{sup}}-\underbrace{\big(-1+\sqrt{-y-1}\big)}_{f_{inf}}\,dy\\
&= \int_{-2}^{-1} y+3-\sqrt{-y-1}\,dy
\end{aligned}$$

(b) i. O volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \pi\int_{-1}^{0}\Big(\underbrace{-(x+1)^2-1}_{R_{ext}}\Big)^2-\Big(\underbrace{-1}_{R_{int}}\Big)^2\,dx+\pi\int_0^1\Big(\underbrace{x-2}_{R_{ext}}\Big)^2-\Big(\underbrace{-1}_{R_{int}}\Big)^2\,dx\\
&= \pi\int_{-1}^{0}\big(-(x+1)^2-1\big)^2-1\,dx+\pi\int_0^1(x-2)^2-1\,dx\,.
\end{aligned}$$



ii. Na rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy o sólido gerado pela parte esquerda vai ficar embutido no sólido gerado pela parte direita, pelo que temos que considerar apenas a rotação desta última:



Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \pi\int_{-2}^{-1}\Big(\underbrace{y+2}_{R_{ext}}\Big)^2-\Big(\underbrace{0}_{R_{int}}\Big)^2\,dy\\
&= \pi\int_{-2}^{-1}(y+2)^2\,dy\,.
\end{aligned}$$