Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 2 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

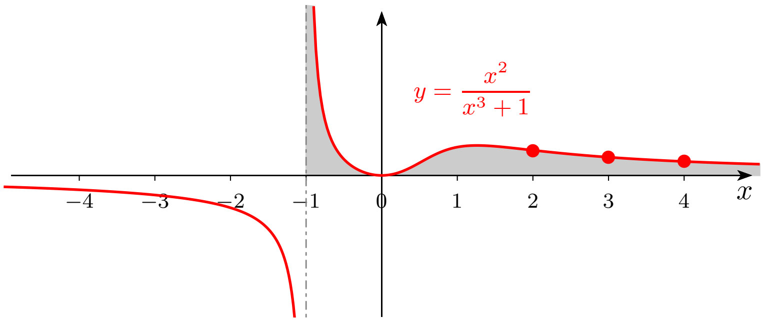
22 de dezembro de 2023 Duração: 1h15m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

[3.0 *val.*] 1. Considere os integrais

(I) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx\,;$ (II) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx\,;$ (III) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

e o gráfico da figura seguinte.



(a) Identifique, justificando, o integral impróprio de 1ª espécie e determine a sua natureza.

(b) Identifique, justificando, o integral impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

(c) A região representada a sombreado tem área finita? Justifique.

(d) Determine, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

[2.5 *val.*] 2. (a) Calcule as seguintes primitivas:

i. $\displaystyle\int \cos^3(x)\,\mathrm{cosec}\,(x)\,dx\,;$

ii. $\displaystyle\int x^3\,e^{x^2}\,dx\,.$

[2.5 *val.*] 3. (a) Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-x}\,dx\,.$

(b) Recorrendo à mudança de variável conveniente, mostre que o cálculo da primitiva

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x\,(\sqrt[6]{x}-1)}\,dx$$

pode reduzir-se ao cálculo da primitiva da alínea (a).

[1.0 *val.*] 4. Recorrendo à definição de convergência, determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{2n}}$.

Coimbra Institute of Engineering
Department of Physics and Mathematics

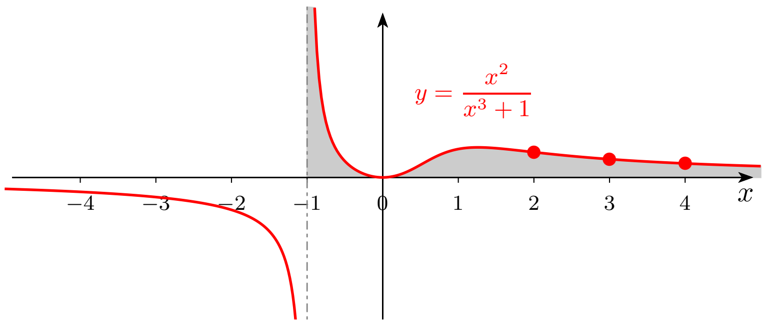
Calculus I - Informatics Engineering - test 2

December 22nd, 2023 | 1h15m

[3.0 *val.*] 1. Consider the integrals

$$\text{(I)} \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx\,; \qquad \text{(II)} \int_{0}^{2} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx\,; \qquad \text{(III)} \int_{2}^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$$

and the plot in the following figure.



(a) Identify the improper integral of 1st kind and determine if it is convergent or divergent. Justify.

(b) Identify the improper integral of 2nd kind and determine if it is convergent or divergent. Justify.

(c) Does the shaded region have a finite area? Justify.

(d) Determine if the series $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ converges or diverges. Justify.

[2.5 *val.*] 2. Evaluate each of the following indefinite integrals:

(a) $\displaystyle\int \cos^3(x)\operatorname{cosec}(x)\,dx\,;$

(b) $\displaystyle\int x^3\, e^{x^2}\,dx\,.$

[2.5 *val.*] 3. (a) Determine the indefinite integral $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-x}\,dx\,.$

(b) Using a convenient substitution, show that the indefinite integral

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x\,(\sqrt[6]{x}-1)}\,dx$$

can reduces to the indefinite integral from (a).

[1.0 *val.*] 4. Using the definition of convergence of a series, determine if the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{2n}}$ converges or diverges.

1. (a) O integral impróprio de 1ª espécie é (III):

   i. $D_{\text{int}} = [2, +\infty[$ não é limitado;

   ii. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ ($D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) está definida e é contínua em $D_{\text{int}} = [2, +\infty[$, porque $D_{\text{int}} \subseteq D_f$ e $f(x)$ é contínua em todo o seu domínio, respectivamente.

   Relativamente à natureza do integral, tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3} \int_2^t \underbrace{\frac{3x^2}{x^3+1}}_{P3} dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3} \Big[\ln|x^3+1| \Big]_2^t \;=\; \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3} \Big(\ln|\underbrace{t^3+1}_{\to+\infty}| - \ln(9) \Big) \;=\; +\infty\,,$$

   pelo que o integral é divergente.

   (b) O integral impróprio de 1ª espécie é (I):

   i. $D_{\text{int}} = [-1, 0]$ é limitado;

   ii. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ ($D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) está definida e é contínua em $D_{\text{int}} = [-1, 0]$, excepto em $x = -1$. Uma vez que o limite

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x^3+1} \;=\; +\infty$$

   não é finito, então a função não é limitada no intervalo de integração.

   Relativamente à natureza do integral, tem-se

$$\lim_{t\to-1^+} \int_t^0 \frac{x^2}{x^3+1}\, dx \;=\; \lim_{t\to-1^+} \frac{1}{3} \Big[\ln|x^3+1| \Big]_t^0 \;=\; \lim_{t\to-1^+} -\frac{1}{3} \ln|\underbrace{t^3+1}_{\to+\infty}| \;=\; +\infty\,,$$

   pelo que o integral é divergente.

   (c) A área da região sombreada é dada por

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1}\, dx \;=\; \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x^3+1}\, dx + \int_{0}^{2} \frac{x^2}{x^3+1}\, dx + \int_{2}^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1}\, dx\,.$$

   Uma vez que qualquer um dos integrais impróprios é divergente, então a área não é finita.

   (d) Como a função $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ é contínua, positiva e decrescente no intervalo $[2, +\infty[$ (pelo gráfico), então a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ e o integral impróprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1}\, dx$ têm a mesma natureza (critério do integral). Uma vez que o integral é divergente (integral III), então a série também é divergente.

2. i. Tendo em conta a definição de cosssecante e recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(x)\,\mathrm{cosec}\,(x)\, dx &= \int \cos^3(x)\, \frac{1}{\sin(x)}\, dx \\
&= \int \cos(x) \cos^2(x)\, \sin^{-1}(x)\, dx \\
&= \int \cos(x) \Big(1 - \sin^2(x)\Big)\, \sin^{-1}(x)\, dx \\
&= \int \cos(x) \Big(\sin^{-1}(x) - \sin(x) \Big)\, dx \\
&= \int \underbrace{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}_{P3} dx - \int \underbrace{\cos(x)\sin(x)}_{P2} dx \\
&= \ln|\sin(x)| - \frac{\sin^2(x)}{2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

ii. Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int x^3\, e^{x^2}\, dx = \int \underbrace{x^2}_{d} \cdot \underbrace{x\, e^{x^2}}_{p}\, dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \displaystyle\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x\, e^{x^2}}_{P6}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + k \\ \bullet\ (x^2)' = 2x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\, e^{x^2}\, x^2 - \int \frac{1}{2}\, e^{x^2} \cdot 2x\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\, e^{x^2} - \frac{1}{2}\int \underbrace{2x\, e^{x^2}}_{P6}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\, e^{x^2} - \frac{1}{2}\, e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. (a) Uma vez que a fracção é imprópria (grau do numerador $= 2 =$ grau do denominador), começamos por efectuar a divisão dos dois polinómios:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & & +2 & x^2 - x \\ \hline -(\,x^2 & -x &) & 1 \\ \hline & x & +2 & \end{array}$$

Então

$$\underbrace{\frac{x^2+2}{x^2-x}}_{\text{fracção imprópria}} = 1 + \underbrace{\frac{x+2}{x^2-x}}_{\text{fracção própria}},$$

A fracção própria resultante também ainda não é primitivável através das regras de primitivação imediata, pelo que necessitamos de a decompor numa soma de fracções simples.

- factorização do denominador:

$$x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 1. \qquad \rightarrow \quad x^2 - x = x\,(x-1).$$

- decomposição da fração:

$$\frac{x+2}{x\,(x-1)} = \frac{x+2}{x^2-x} = \underbrace{\frac{A}{x}}_{\cdot(x-1)} + \underbrace{\frac{B}{x-1}}_{\cdot x} = \frac{A\,(x-1) + B\,x}{x\,(x-1)}.$$

- determinação dos coeficientes:

$$\begin{array}{l} x=0: \\ x=1: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 = -A + 0 \\ 3 = 0 + B \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -2 \\ B = 3 \end{array} \right.$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{x+2}{x^2-x} = \frac{-2}{x} + \frac{3}{x-1},$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{x^2-x}\, dx &= \int 1 + \frac{x+2}{x^2-x}\, dx \\ &= \int 1 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{x-1}\, dx \\ &= \int \underbrace{1}_{P1}\, dx - 2\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{P3}\, dx + 3\int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{P3}\, dx \\ &= x - 2\ln|x| + 3\ln|x-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Recorrendo à mudança de variável

$$\text{m.v. } \boxed{x = t^6}, \qquad t \in [0, +\infty[$$

tem-se

$$x' = 6\,t^5\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x\,(\sqrt[6]{x}-1)}\,dx \;&\overset{\text{m.v.}}{=}\; \int \frac{\sqrt[3]{t^6}+2}{t^6\,(\sqrt[6]{t^6}-1)}\,6\,t^5\,dt \\ &= \; 6\int \frac{t^2+2}{t\,(t-1)}\,dt \\ &= \; \underbrace{6\int \frac{t^2+2}{t^2-t}\,dt}_{\text{alínea (a)}}\,.\end{aligned}$$

4. Tendo em conta que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{2n}} \;=\; \frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\ldots$$

é geométrica,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; \frac{\frac{3}{2^{2(n+1)}}}{\frac{3}{2^{2n}}} \;=\; \frac{3}{2^{2n+2}}\,\frac{2^{2n}}{3} \;=\; \frac{1}{2^2} \;=\; \frac{1}{4} \qquad \text{(constante)}\,,$$

tem-se

$$S_n \;=\; \frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\cdots+\frac{3}{2^{2n}} \;=\; \frac{3}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \;=\; \frac{3}{4}\,\frac{1-\frac{1}{4^n}}{\frac{3}{4}} \;=\; 1-\frac{1}{4^n}\,.$$

Então,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \;=\; 1$$

e portanto a série é convergente e tem soma 1.