Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

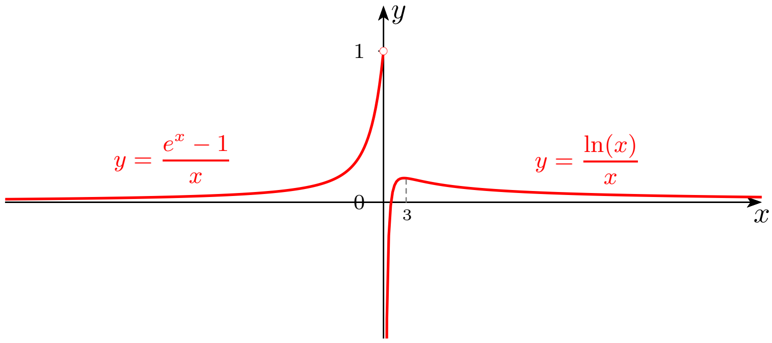
Teste 2 de Análise Matemática I - Engenharia Informática

28 de janeiro de 2021 | Duração: 1h15m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[3.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x)$ com o gráfico seguinte.



(a) Classifique, justificando, os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$; (II) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$; (III) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

(b) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.

(c) Indique, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$.

[2.0 *val.*] 2. Considere a primitiva $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^3(x)\,dx$.

(a) Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas.

(b) Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação por partes.

[2.0 *val.*] 3. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$.

(a) Calcule a primitiva, sem decompor a função em frações simples.

(b) Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação de frações racionais.

(c) Mostre que as soluções das alíneas anteriores constituem a mesma família de funções.

[2.0 *val.*] 4. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx$.

(a) Calcule a primitiva recorrendo à mudança de variável $\boxed{x = \frac{1}{t}}$.

(b) Calcule a primitiva recorrendo a outra mudança de variável.

1. (a) Começamos por notar que $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f(x)$ é contínua no seu domínio.

   (I) $I = [-1,\, 0]$ é limitado mas não está contido em D_f, porque $x = 0$ não pertence a D_f. Porém, o limite
   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) \;=\; 1\,,$$
   é finito, pelo que a função $f(x)$ é limitada em D_{int}. Logo o integral é definido (I é limitado e $f(x)$ é limitada).

   (II) $I = [0,\, 1]$ é limitado mas não está contido em D_f, porque $x = 0$ não pertence a D_f. Uma vez que o limite
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) \;=\; -\infty\,,$$
   não e finito, então a função $f(x)$ não é limitada em I. Logo o integral é impróprio de 2ª espécie (I é limitado mas $f(x)$ é ilimitada).

   (III) $I = [1,\, +\infty[$ não é limitado mas está contido em D_f. Como $f(x)$ é contínua em I, então o integral é impróprio de 1ª espécie (I é ilimitado mas $f(x)$ é limitada em intervalos fechados e limitados).

   (b) O integral impróprio de 1ª espécie é (III) e tem-se
   $$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \underbrace{\ln(x)\,\frac{1}{x}}_{R2}\,dx \;=\; \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^t \;=\; \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\,\ln^2(t) \;=\; +\infty\,,$$
   pelo que o integral é divergente.

   (c) Uma vez que, no intervalo $[3,\,+\infty[$, a função $f(x)$ é contínua, positiva e decrescente, então (pelo critério do integral), a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ e o integral $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\,dx$ têm a mesma natureza. Atendendo a que
   $$\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\,dx}_{\text{divergente}} \;=\; \underbrace{\int_1^{3}\frac{\ln(x)}{x}\,dx}_{\text{integral definido}} \;+\int_3^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\,dx$$
   então, da alínea (b), podemos concluir que o integral $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\,dx$ é divergente e portanto a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ também é divergente.

2. (a) Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas (página 7 das Tabelas de Matemática), tem-se
   $$\begin{aligned}
   \int \sin^3(x)\cos^3(x)\,dx &= \int \sin(x)\sin^2(x)\cos^3(x)\,dx\\
   &= \int \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\cos^3(x)\,dx\\
   &= \int \sin(x)\left(\cos^3(x)-\cos^5(x)\right)\,dx\\
   &= \int \sin(x)\,\cos^3(x)-\sin(x)\,\cos^5(x)\,dx\\
   &= -\int \underbrace{-\sin(x)\,\cos^3(x)}_{R2}\,dx-(-1)\int\underbrace{-\sin(x)\,\cos^5(x)}_{R2}\,dx\\
   &= -\frac{\cos^4(x)}{4}+\frac{\cos^6(x)}{6}+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.
   \end{aligned}$$

(b) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \sin^3(x)\cos^3(x)\,dx = \int \underbrace{\sin^2(x)}_{v}\underbrace{\sin(x)\cos^3(x)}_{u}\,dx$$

cálculos auxiliares:

- $-\int -\sin(x)\cos^3(x)\,dx = -\frac{\cos^4(x)}{4} + c$
- $\left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x)\cos(x)$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\cos^4(x)}{4}\sin^2(x) - \int -\frac{\cos^4(x)}{4}\cdot 2\sin(x)\cos(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\cos^4(x)\,\sin^2(x) - \frac{1}{2}\int \underbrace{-\sin(x)\,\cos^5(x)}_{R2}\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\cos^4(x)\,\sin^2(x) - \frac{1}{2}\frac{\cos^6(x)}{6} + c \\
&= -\frac{1}{4}\cos^4(x)\,\sin^2(x) - \frac{1}{12}\cos^6(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

3. (a) Recorrendo à regra 2, tem-se

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x}{x^2-4}}_{R2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Uma vez que a fracção é própria (grau do numerador = 1 é menor do que o grau do denominador = 2), então não é possível realizar a divisão dos polinómios. Vamos então decompor a função em frações simples (página 8 das Tabelas de Matemática).

- factorização do denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -2\,.$$

Então

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

- decomposição da fracção:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2-4} &= \underbrace{\frac{A}{x-2}}_{\cdot(x+2)} + \underbrace{\frac{B}{x+2}}_{\cdot(x-2)} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{x}{(x-2)(x+2)} &= \frac{A\,(x+2) + B\,(x-2)}{(x-2)(x+2)}\,.
\end{aligned}$$

Da igualdade entre os numeradores resulta que

$$\begin{array}{r|rcl}
 & x & = & A\,(x+2) + B\,(x-2) \\
\hline
x = 2 & 2 & = & 4A + 0 \\
x = -2 & -2 & = & 0 - 4B
\end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2-4}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{R5}\,dx + \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{R5}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Tendo em conta a propriedade

$$\ln(f \times g) \;=\; \ln(f) + \ln(g)\,, \quad f,\, g > 0$$

e a factorização determinada na alínea (b), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\ln|x^2-4|\,, \quad \text{solução de (a)} \quad &= \frac{1}{2}\,\ln|(x-2)(x+2)| + c \\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln|x-2| + \ln|x+2|\Big) + c \\
&= \frac{1}{2}\,\ln|x-2| + \frac{1}{2}\,\ln|x+2| + c\,, \quad \text{solução de (b)}
\end{aligned}$$

4. (a) Recorrendo à mudança de variável indicada,

$$\text{m.v.}\ \boxed{x = \frac{1}{t}}\,, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

tem-se

$$x' = -\frac{1}{t^2}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\,\sqrt{x^2-2}}\,dx \;&\overset{\text{m.v}}{=}\; \int \frac{1}{\frac{1}{t}\,\sqrt{(\frac{1}{t})^2-2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \;=\; -\int \frac{1}{\frac{1}{t}\,\sqrt{\frac{1-2\,t^2}{t^2}}}\,\frac{1}{t^2}\,dt \\
&= -\int \frac{1}{\frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{1-2\,t^2}}{t}}\,\frac{1}{t^2}\,dt \;=\; -\int \frac{1}{\sqrt{1-2\,t^2}}\,dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\,t)^2}}}_{R18}\,dt \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\arcsin(\sqrt{2}\,t)\Big) + c \\
&\overset{\text{m.v}}{=}\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Tendo em conta o caso 3 da página 5 das Tabelas de matemática, consideremos a mudança de variável

$$\text{m.v.}\ \boxed{x = \sqrt{2}\sec(t)}\,, \quad t \in \left]-\tfrac{\pi}{2}\,\tfrac{\pi}{2}\right[\quad \to \quad \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\cos(t)} \quad \to \quad \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) = t$$

tem-se

$$x' = \sqrt{2}\sec(t)\tan(t)\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\,\sqrt{x^2-2}}\,dx \;&\overset{\text{m.v}}{=}\; \int \frac{1}{\sqrt{2}\sec(t)\,\sqrt{(\sqrt{2}\sec(t))^2-2}}\,\sqrt{2}\sec(t)\tan(t)\,dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\sec^2(t)-2}}\,\tan(t)\,dt \;=\; \int \frac{1}{\sqrt{2\,(\sec^2(t)-1)}}\,\tan(t)\,dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\,\tan^2(t)}}\,\tan(t)\,dt \;=\; \int \frac{1}{\sqrt{2}\,\tan(t)}\,\tan(t)\,dt \\
&= \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{R1}\,dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,t + c \;\overset{\text{m.v}}{=}\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$