Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

20 de janeiro de 2023 Duração: 2h30m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.
- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = 1 + \cos(x - \pi)$.

a) Faça a representação gráfica da função $f(x)$.

b) Caracterize a função inversa de f, numa restrição conveniente, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

c) Calcule o valor numérico da expressão $f\Big(\arcsin\big(-\frac{1}{2}\big)\Big)$.

d) Resolva a equação $f(x) = \frac{1}{2}$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $e^{-x} - x = 0$ tem apenas uma solução real, pertencente ao intervalo $[0, 1]$.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Partindo da aproximação inicial $x_0 = 0$, efectue 2 iterações do método de Newton para estimar a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize 2 casas decimais em todos os cálculos que realizar.
Nota: $\frac{11}{161} \simeq 0.07$, $\frac{63}{137} \simeq 0.46$.

[1.5 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cos(x) + \cos(x)}{4 + \sin^2(x)}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

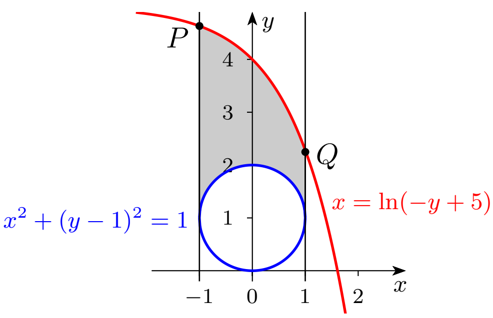
$$\int \operatorname{arctg}(2x)\,dx = x \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}\ln(1 + 4x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Considere o integral definido $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}(2x)\,dx$.

i) Determine uma estimativa para o integral, recorrendo à regra de Simpson e a uma partição em 2 sub-intervalos.

ii) Recorrendo à alínea (a), determine o valor exacto do integral.

[4.5 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Determine as coordenadas dos pontos P e Q.

(b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada para a área de $\mathcal{A}$.

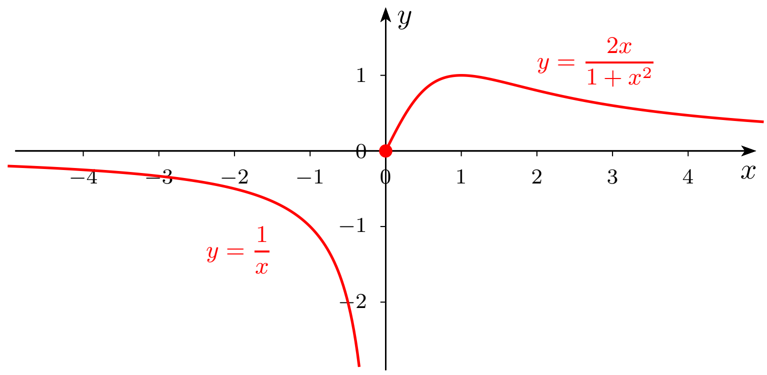
(c) Usando integrais, indique expressões simplificadas para o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

(d) Indique uma expressão simplificada que permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.

[2.0 *val.*] 6. Considere os integrais

(I) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx\,;$ (II) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx\,;$ (III) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

e o gráfico da figura seguinte.



(a) Identifique, justificando, o integral impróprio de 1ª espécie e determine a sua natureza.

(b) Identifique, justificando, o integral impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

[5.0 *val.*] 7. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln(x^2)\,dx\,;$

(b) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,\sqrt{\sin(x)}\,dx\,;$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx\,;$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx\,.$

[2.0 *val.*] 8. (a) Recorrendo à definição de convergência, determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\,.$

(b) Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}\,.$

Coimbra Institute of Engineering
Department of Physics and Mathematics

Calculus I - Informatics Engineering - Exam

January 20th, 2023 1h30m

[2.0 *val.*] 1. Consider the function $f(x) = 1 + \cos(x - \pi)$.

(a) Plot the graph of the function $f(x)$.

(b) Define the inverse function f^{-1} (domain, codomain and analytical expression), on a convenient restriction of the domain.

(c) Perform the numerical value of $f\Big(\arcsin\big(-\frac{1}{2}\big)\Big)$.

(d) Solve the equation $f(x) = \frac{1}{2}$.

[1.0 *val.*] 2. The equation $e^{-x} - x = 0$ as only one solution, on the interval $[0, 1]$.

(a) Using graphical method, prove the previous statement.

(b) Using the initial approximation $x_0 = 0$, perform 2 iterations of Newton's method to estimate the solution of the equation. Present the error of this estimate and use 2 decimal places on all your calculations.
Remark: $\frac{11}{161} \simeq 0.07$, $\frac{63}{137} \simeq 0.46$

[1.5 *val.*] 3. Perform the following indefinite integrals:

a) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$; b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cos(x) + \cos(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx$.

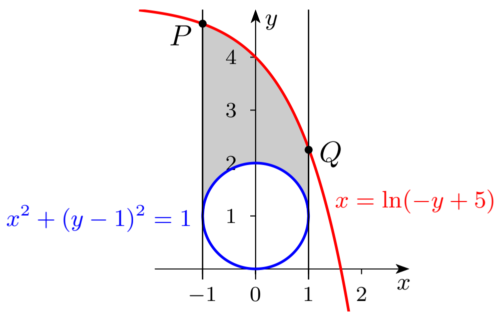
[2.0 *val.*] 4. (a) Using indefinite integral definition, prove that

$$\int \operatorname{arctg}(2x)\, dx = x \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}\ln(1 + 4x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consider the definite integral $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}(2x)\, dx$.

i) Using Simpson's rule and 2 sub-intervals, determine an estimate for the definite integral.
ii) Using result from paragraph (a), determine the exact value of the definite integral.

[4.5 *val.*] 5. Consider the region $\mathcal{A}$ presented in the following figure.



(a) Determine the coordinates of the points P and Q.

(b) Using definite integrals, define a simplified analytical expression for the area of the region $\mathcal{A}$.

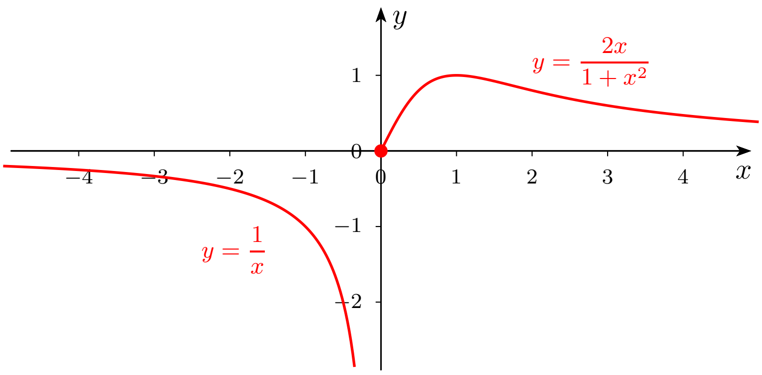
(c) Using definite integrals, define a simplified analytical expression that allow to determine the volume of the solid obtained by rotating the region $\mathcal{A}$ about y-axis.

(d) Define a simplified expression that allows to calculate perimeter of the region $\mathcal{A}$.

[2.0 *val.*] 6. Consider the integrals

(I) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx\,;$ (II) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx\,;$ (III) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

and the plot of the following figure.



(a) Identify the improper integral of 1st kind and determine if it is convergent or divergent. Justify.

(b) Identify the improper integral of 2nd kind and determine if it is convergent or divergent. Justify.

[5.0 *val.*] 7. Evaluate each of the following indefinite integrals:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln(x^2)\,dx\,;$

(b) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,\sqrt{\sin(x)}\,dx\,;$

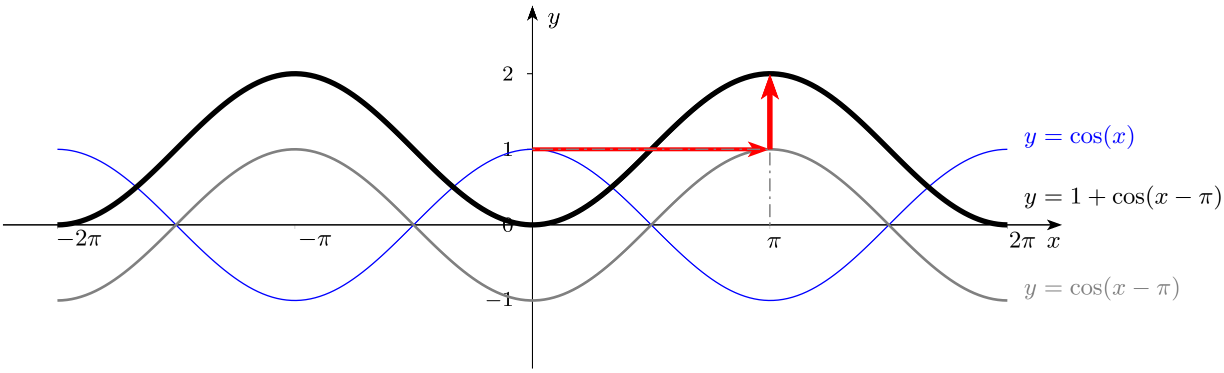
(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx\,;$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx\,.$

[2.0 *val.*] 8. (a) Using the convergence definition of series, determine if $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ converge or diverge.

(b) Determine of the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}$ converge or diverge.

1. (a) Tendo como referência o gráfico do logaritmo e as transformações gráficas elementares, tem-se



(b) Do gráfico da alínea anterior, verificamos que a função f não é injectiva, pelo que a inversa será definida na restrição principal do domínio. Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} CD_{f^{-1}} = ? & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 1 + \cos(x - \pi) \end{array}$$

O contradomínio da função inversa coincide com a restrição da função original pelo que, tendo em conta a restrição principal do cosseno, tem-se

$$CD_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x - \pi \leq \pi\} = \{x \in \mathbb{R} : \pi \leq x \leq 2\pi\} = [\pi, 2\pi].$$

A função inversa tem expressão analítica dada por

$$\begin{aligned} y = 1 + \cos(x - \pi), \quad x \in [\pi, 2\pi] \quad &\Leftrightarrow \quad y - 1 = \cos(x - \pi), \quad x \in [\pi, 2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad \arccos(y - 1) = x - \pi \\ &\Leftrightarrow \quad \pi + \arccos(y - 1) = x \end{aligned}$$

e, consequentemente, tem domínio

$$D_{f^{-1}} = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y - 1 \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 2\} = [0, 2].$$

(c) Tendo em conta a restrição principal do seno, tem-se

$$f\Big(\arcsin\big(-\tfrac{1}{2}\big)\Big) = f\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) = 1 + \cos\Big(-\frac{\pi}{6} - \pi\Big) = 1 - \cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

.

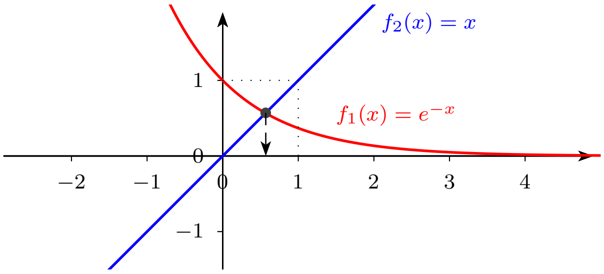
(d) Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \cos(x - \pi) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x - \pi) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x - \pi = \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \;\vee\; x - \pi = -\frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{3} + k\,2\pi \;\vee\; x = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. (a) Tendo em conta que

$$e^{-x} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = x,$$

a solução da equação corresponde à abcissa do ponto de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x) = e^{-x}$ e $f_2(x) = x$.



(b) Consideremos a função $f(x) = e^{-x} - x$. Então $f'(x) = -e^{-x} - 1$.

n	x_n	erro
0	$x_0 = 0$ (dado)	
1	$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{e^0 - 0}{-e^0 - 1} = -\frac{1}{-2} \simeq 0.50$	0.50
2	$x_2 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} = 0.5 - \frac{e^{-0.5} - 0.5}{-e^{-0.5} - 1} \simeq 0.5 - \frac{0.11}{-1.61} \simeq 0.57$	0.07

Logo, $\overline{x} = 0.57$ é uma aproximação para a solução, com erro aproximado de 0.07.

3. (a) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx &= \int \frac{1+x}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx + \int \frac{x}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx \\
&= \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c \\
&= 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin(x)\cos(x) + \cos(x)}{4 + \sin^2(x)}\,dx &= \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{4 + \sin^2(x)}\,dx + \int \frac{\cos(x)}{4 + \sin^2(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{4 + \sin^2(x)}\,dx + \int \frac{\cos(x)}{4\left(1 + \frac{\sin^2(x)}{4}\right)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(4 + \sin^2(x)\right) + \frac{1}{4}\,2\int \frac{\frac{\cos(x)}{2}}{1 + \left(\frac{\sin(x)}{2}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(4 + \sin^2(x)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(x)}{2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4. (a) Basta verificar que a derivada de $x\operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + c$ é $\operatorname{arctg}(2x)$:

$$\begin{aligned}
&\left(x\operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + c\right)' \\
&= \left(x\operatorname{arctg}(2x)\right)' - \frac{1}{4}\left(\ln(1+4x^2)\right)' + \left(c\right)' \\
&= (x)'\operatorname{arctg}(2x) + x\left(\operatorname{arctg}(2x)\right)' - \frac{1}{4}\frac{(1+4x^2)'}{1+4x^2} \\
&= \operatorname{arctg}(2x) + x\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{4}\frac{8x}{1+4x^2} \\
&= \operatorname{arctg}(2x) + \frac{2x}{1+4x^2} - \frac{2x}{1+4x^2} \\
&= \operatorname{arctg}(2x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

(b) i) Considerando uma partição uniforme do intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ em 2 sub-intervalos, tem-se

$h = \frac{1}{2}$ e

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}(2x)\,dx &\simeq \frac{\frac{1}{2}}{3}\Big(\operatorname{arctg}\Big(2\times(-\frac{1}{2})\Big) + 4\operatorname{arctg}\Big(2\times 0\Big) + \operatorname{arctg}\Big(2\times\frac{1}{2}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{6}\Big(\operatorname{arctg}(-1) + 4\operatorname{arctg}(0) + \operatorname{arctg}(1)\Big)\\
&= \frac{1}{6}\Big(-\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{4}\Big)\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

ii) Tendo em conta o resultado da alínea (a), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}(2x)\,dx &= \Big[x\operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{4}\ln(2) - \Big(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-1) - \frac{1}{4}\ln(2)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

5. (a) Começamos por notar que as curvas que delimitam a região são definidas (em função da variável x) por:

- $x = \ln(-y+5) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = -y+5 \quad \Leftrightarrow \quad -e^x + 5 = y$
- $x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$

Relativamente ao ponto P, tem-se

$$x = -1 \text{ na curva } y = -e^x + 5: \quad y = -e^{-1} + 5 \quad \to P(-1, -e^{-1}+5)$$

Relativamente ao ponto Q, tem-se

$$x = 1 \text{ na curva } y = -e^x + 5: \quad y = -e + 5 \quad \to Q(1, -e+5)$$

(b) Tendo em conta as expressõe já determinadas na alínea (a), a área de $\mathcal{A}$ é definida por

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_{-1}^{1} \underbrace{-e^x + 5}_{f_{sup}} - \underbrace{\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)}_{f_{inf}}\,dx = \int_{-1}^{1} -e^x + 4 - \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

(c) Uma vez que na rotação em torno do eixo Oy a parte esquerda irá sobrepor-se à parte direita, iremos considerar apenas o efeito da sub-região esquerda.
As curvas referentes à circunferência são definidas em função da variável y por:

- $x = \ln(-y+5)$
- $x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 - (y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1-(y-1)^2}$

Então, o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy é dado por

$$\begin{aligned}
&\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy})\\
&= \pi\int_1^2 (-1)^2 - \left(-\sqrt{1-(y-1)^2}\right)^2 dy + \pi\int_2^4 (-1)^2\,dy + \pi\int_4^{-e^{-1}+5} (-1)^2 - \ln^2(-y+5)\,dy\\
&= \pi\int_1^2 (y-1)^2\,dy + 2\pi\int_2^4 1\,dy + \pi\int_4^{-e^{-1}+5} 1 - \ln^2(-y+5)\,dy\,.
\end{aligned}$$

(d) O perímetro da região é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Perímetro} &= (-e^{-1}+5) - 1 + \int_{-1}^{1}\sqrt{1 + \left[\left(-e^x+5\right)'\right]^2}\,dx + (-e+5) - 1 + \frac{2\pi\times 1}{2}\\
&= -e^{-1} + 4 + \int_{-1}^{1}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx - e + 4 + \pi\,.
\end{aligned}$$

6. (a) O integral impróprio de 1ª espécie é (I):

   i. $D_{\text{int}} =]-\infty, -1]$ não é limitado;

   ii. $f(x) = \frac{1}{x}$ está definida e é contínua em D_{int}, porque $]-\infty, -1] = D_{\text{int}} \subseteq D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f(x)$ é contínua em todo o seu domínio, respectivamente.

   Relativamente à natureza do integral, tem-se

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x}\, dx \;=\; \lim_{t\to-\infty} \Big[\ln|x|\Big]_t^{-1} \;=\; \lim_{t\to-\infty} \ln(1) - \ln|t| \;=\; -\infty\,,$$

   pelo que o integral é divergente.

   (b) O integral impróprio de 2ª espécie é (II):

   i. $D_{\text{int}} = [-1, 0]$ é limitado;

   ii. $f(x) = \frac{1}{x}$ está definida e é contínua em $D_{\text{int}} = [-1, 0]$, excepto em $x = 0$. Uma vez que o limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

   não é finito, então a função não é limitada no intervalo de integração.

   Relativamente à natureza do integral, tem-se

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\, dx \;=\; \lim_{t\to 0^-} \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{t} \;=\; \lim_{t\to 0^-} \ln|t| - \ln(1) \;=\; -\infty\,,$$

   pelo que o integral é divergente.

7. (a) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \sqrt{x}\,\ln(x^2))\,dx \;=\; \int \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{d} \cdot \underbrace{\ln(x^2)}_{p}\, dx$$

cálculos auxiliares:

- $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + c$
- $\displaystyle\big(\ln(x^2)\big)' = \frac{(x^2)'}{x^2} = \frac{2}{x}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\,\ln(x^2) - \int \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{x}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\ln(x^2) - \frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\ln(x^2) - \frac{4}{3}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\ln(x^2) - \frac{8}{9}\sqrt{x^3} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

   (b) Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(x)\,\sqrt{\sin(x)}\,dx &= \int \cos(x)\,\cos^2(x)\,\sin^{\frac{1}{2}}(x)\,dx \\
&= \int \cos(x)\,\Big(1 - \sin^2(x)\Big)\,\sin^{\frac{1}{2}}(x)\,dx \\
&= \int \cos(x)\,\Big(\sin^{\frac{1}{2}}(x) - \sin^{\frac{5}{2}}(x)\Big)\,dx \\
&= \int \cos(x)\,\sin^{\frac{1}{2}}(x)\,dx - \int \cos(x)\sin^{\frac{5}{2}}(x)\,dx \\
&= \frac{\sin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}} - \frac{\sin^{\frac{7}{2}}(x)}{\frac{7}{2}} + c \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3(x)} - \frac{2}{7}\sqrt{\sin^7(x)} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) A fração é própria (grau do numerador $= 0 < 3 =$ grau do denominador), pelo que

- factorização do denominador:

$$x^3 + x^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2\,(x+1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{x = 0 \vee x = 0}_{\text{raiz dupla}} \vee x = -1\,.$$

Então

$$x^3 + x^2 \;=\; x^2\,(x+1).$$

- decomposição da fração:

$$\frac{1}{x^2\,(x+1)} \;=\; \frac{1}{x^3+x^2} \;=\; \underbrace{\frac{A_1}{x}}_{\cdot x\,(x+1)} + \underbrace{\frac{A_2}{x^2}}_{\cdot (x+1)} + \underbrace{\frac{B}{x+1}}_{\cdot x^2} \;=\; \frac{A_1\,x\,(x+1) + A_2\,(x+1) + B\,x^2}{x^2\,(x+1)}\,.$$

Da igualdade entre os numeradores resulta que

$$\begin{array}{r|rcl} & 1 & = & A_1\,x\,(x+1) + A_2\,(x+1) + B\,x^2 \\ \hline x = 0 & 1 & = & 0 + A_2 + 0 \\ x = -1 & 1 & = & 0 + 0 + B \\ x = 1 & 1 & = & 2\,A_1 + 2\,A_2 + B \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A_2 = 1 \\ B = 1 \\ A_1 = -1 \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{1}{x^3+x^2} \;=\; -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\,,$$

donde

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx \;&=\; -\int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-2}\,dx \;+\; \int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &=\; -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(d) Recorrendo à mudança de variável

$$\text{m.v.}\; \boxed{x = 3\tan(t)}\,, \qquad t \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

tem-se

$$x' = 3\sec^2(t)\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx \;&\overset{\text{m.v.}}{=}\; \int \frac{3\tan(t)}{\sqrt{9+\big(3\tan(t)\big)^2}}\,3\sec^2(t)\,dt \\ &=\; \int \frac{3\tan(t)}{\sqrt{9+9\tan^2(t)}}\,3\sec^2(t)\,dt \\ &=\; \int \frac{3\tan(t)}{\sqrt{9\left(1+\tan^2(t)\right)}}\,3\sec^2(t)\,dt \\ &=\; \int \frac{\tan(t)}{\sec(t)}\,3\sec^2(t)\,dt \\ &=\; \int 3\,\tan(t)\,\sec(t)\,dt \\ &=\; 3\,\sec(t) + c \\ &\overset{\text{m.v.}}{=}\; 3\,\sec\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)\right) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Alternativa:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx \;&=\; \int 2x\,(9+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int 2x\,(9+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{(9+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \;=\; \sqrt{9+x^2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

8. (a) Começamos por observar que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \;=\; 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

pelo que a série é geométrica de razão $R = \frac{1}{3}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} \;=\; \frac{1}{3^{n+1}}\, 3^n \;=\; \frac{1}{3}$$

Então

$$S_n \;=\; 1\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \;=\; \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right),$$

pelo que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \;=\; \frac{3}{2}$$

e portanto a série é convergente e tem soma $\frac{3}{2}$.

(b) Começamos por observar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n} \;=\; \frac{e}{1} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} + \ldots$$

Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{1} \;=\; +\infty$$

é diferente de zero então, pela condição necessária de convergência, concluímos que a série é divergente.