Licenciatura em Engenharia Informática -LEI/LEICE/LEIRP
Ano Letivo 2023/24

Métodos Estatísticos

Material de Apoio às Aulas

para a 1ª Frequência

Deolinda M. L. D. Rasteiro
Departamento de Física e Matemática

1 Capítulo I - Probabilidades

1.1 Experiência aleatória, espaço de resultados, acontecimentos

Definições

1. *Experiência aleatória* é um qualquer processo ou conjunto de circunstâncias capaz de produzir pelo menos dois resultados, com incerteza quanto ao que ocorrerá. As suas **características principais:** são

   - Possibilidade de repetição;
   - Carácter imprevisível;
   - Apresentam regularidade estatística.

2. *Espaço de resultados* ou *espaço fundamental* é o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência aleatória. Denota-se por Ω.

3. Um *acontecimento* (ou *evento*) é um subconjunto de Ω.

4. *Acontecimento elementar* é um subconjunto singular de Ω.

   - Ω é denominado *acontecimento certo* (realiza-se sempre);
   - $\emptyset$ é denominado *acontecimento impossível*;
   - $\overline{A}$ é denominado *acontecimento complementar* de A.

Operações e relações entre acontecimentos

1. $A \subset B$: a realização de A implica a realização de B;

2. $A = B$: $A \subset B$ e $B \subset A$; (A e B dizem-se idênticos)

3. $A \cap B$ (Acontecimento Interseção): A e B realizam-se conjuntamente;
   - Se $A \cap B = \emptyset$ então A e B dizem-se **mutuamente exclusivos**, **disjuntos** ou **incompatíveis**.

4. $A \cup B$ (Acontecimento Reunião): A ou B se realizam (o resultado da experiência aleatória pertence a pelo menos um dos conjuntos);

5. $A \setminus B$ (Acontecimento Diferença): A realiza-se e B não se realiza;

   - $\overline{A} = \Omega \setminus A$

   - $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Propriedades

1. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
2. $A \cup \overline{A} = \Omega$
3. **Comutativa**

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

4. **Associativa**

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

5. **Distributiva**

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

6. $A \cap \Omega = A$; $A \cup \emptyset = A$

7. $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \emptyset = \emptyset$

8. $A \subset B \;\Rightarrow\; A \cup B = B$ e $A \cap B = A$

9. **Leis de De Morgan**

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

1.2 Definição de probabilidade

Definição [Clássica]

Admita-se que Ω é um espaço finito e que todos os acontecimentos elementares são equipossíveis. A probabilidade de um acontecimento (qualquer subconjunto de Ω) A se realizar é dada por

$$P(A) = \frac{\sharp\, A}{\sharp\, \Omega}\,.$$

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall A \in \Omega,\ 0 \leq P(A) \leq 1.$

Definição [Axiomática]

Seja Ω um espaço de resultados e A e A_i, $i = 1, 2, ...$, acontecimentos quaisquer de Ω. Uma probabilidade é uma aplicação P que satisfaz os seguintes axiomas:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) Para o acontecimento reunião $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ de Ω,

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i), \quad \text{se } A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ para } i \neq j.$$

Nota

A partir de Ω é possível formar várias famílias de subconjuntos deste espaço (**pensemos no caso de Ω não ser finito**). A definição axiomática de probabilidade, definida anteriormente no domínio Ω, extende-se à família (chamemos-lhe $\mathcal{F}$) de todos os subconjuntos de Ω, que verifica:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) Se $A \in \mathcal{F}$ então $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(3) Se $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$, então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Propriedades de uma probabilidade

1. $P(\emptyset) = 0$

2. Se $A_i \in \Omega$, $i = 1, ..., n$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

   Caso particular:
$$\text{Se } A \text{ e } B \in \Omega \text{ e } A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

3. Se A e $B \in \Omega$, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

4. Se A e $B \in \Omega$ e $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

5. $A \in \Omega$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

6. A, $B \in \Omega$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7. Se $A_i \in \Omega$, $i = 1, ..., n$,
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

8. Se $A_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, e A_i é uma sucessão monótona,
$$P(\lim_{i \to +\infty} A_i) = \lim_{i \to +\infty} P(A_i).$$

1.3 Probabilidade condicionada

Definição Sejam A e B acontecimentos de Ω com $P(B) > 0$. A probabilidade de A *condicionada por* B, $P(A/B)$, é dada por
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema [**probabilidade composta**] Se A e B são acontecimentos de Ω tais que $P(A)P(B) > 0$, então
$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A).$$

Generalização: Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos de um mesmo espaço Ω, tais que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) > 0$. Então
$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)...P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

1.4 Acontecimentos independentes

Definição [**Independência**] Os acontecimentos A e B dizem-se *independentes* se e só se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Consequência: Sejam A e B acontecimentos de Ω tais que $P(A)P(B) > 0$. A e B são independentes se e só se

$$P(A/B) = P(A).$$

Nota: Não confundir acontecimentos **disjuntos** com acontecimentos **independentes**.

1.5 Probabilidade total. Teorema de Bayes

Teorema [**probabilidade total**] Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \emptyset, \ i \neq j \qquad (disjuntos) \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \Omega \qquad\qquad (exaustivos) \end{aligned}$$

Seja B um acontecimento qualquer. Tem-se

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i).$$

Teorema [**Bayes**] Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \emptyset, \ i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \Omega. \end{aligned}$$

Seja B um acontecimento qualquer, com $B \neq \emptyset$. Tem-se

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)}, \ i = 2, ..., n.$$

Capítulo I - Probabilidades

1. Uma caixa contém 5 lâmpadas das quais 2 são defeituosas. Estas têm os números 3 e 5. Considere a experiência aleatória "extração de duas lâmpadas ao acaso, uma a seguir à outra, sem reposição da primeira".

   (a) Construa o espaço de resultados associado a esta experiência aleatória.

   (b) Defina por extenso os acontecimentos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{saída de lâmpada defeituosa na primeira tiragem}\}; \\ B &= \{\text{saída de lâmpada defeituosa na segunda tiragem}\}; \\ C &= \{\text{saída de duas lâmpadas defeituosas}\}; \\ D &= \{\text{não sair qualquer lâmpada defeituosa}\}; \end{aligned}$$

   (c) Se as lâmpadas forem extraídas ao acaso, os resultados possíveis são equiprováveis. Calcule a probabilidade dos acontecimentos A, B, C e D.

2. Calcule a probabilidade de, ao lançar três vezes uma moeda equilibrada, obter:

   (a) duas caras;

   (b) pelo menos uma cara.

3. Lança-se simultaneamente um dado e uma moeda equilibrados.

   (a) Construa o espaço de resultados associado a esta experiência aleatória.

   (b) Defina por extenso os acontecimentos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{saída de coroa e número par}\}; \\ B &= \{\text{saída de cara e número ímpar}\}; \\ C &= \{\text{saída de múltiplos de três}\}; \end{aligned}$$

   e determine as respetivas probabilidades.

4. Sejam A, B, e C acontecimentos de Ω tais que:

$$A \cup B \cup C = \Omega, \quad P(A) = 0.3, \quad P(\overline{B}) = 0.7, \quad P(C) = 0.5 \ \text{ e } \ A \cap B = C \cap B = \emptyset.$$

   Determine $P(A \cap C)$.

5. Sejam A e B acontecimentos de um mesmo espaço de probabilidade Ω, tais que $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.6$ e $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.3$. Calcule:

   (a) $P(\overline{B})$;   (b) $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$.

6. Supondo que A e B são acontecimentos independentes com probabilidade não nula prove que os acontecimentos A e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e B também são independentes.

7. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos contidos em Ω não vazios. Sabe-se que $A \subset B$. O valor de P$[(A \cup B) \cap \overline{B}]$ é:

   (A) 0   **(B)** P(A)   **(C)** P(B)   **(D)** 1

8. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $\mathrm{P}(A) = 0.3$, $\mathrm{P}(B/A) = \dfrac{1}{3}$ e $\mathrm{P}(A \cup B) = 0.8$. Qual é o valor de $\mathrm{P}(\overline{B})$?

   (A) 0.3 **(B)** 0.4 **(C)** 0.1 **(D)** 0.2

9. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $\mathrm{P}(A) = 0.3$, $\mathrm{P}(B) = 0.4$ e $\mathrm{P}(A \cap B) = 0.1$. O valor de $\mathrm{P}(\overline{A}/\overline{B})$ é

   (A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{4}{7}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

10. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos equiprováveis e independentes. Sabe-se que $\mathrm{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = \dfrac{8}{9}$. O valor de $\mathrm{P}(B)$ é:

    (A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

11. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $\mathrm{P}(A) = 0.6$, $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0.6$ e $\mathrm{P}(\overline{B}/A) = \dfrac{1}{3}$. O valor de $\mathrm{P}(B \cap \overline{A})$ é

    (A) 0.4 **(B)** 0 **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** 1

12. Foi examinada uma coleção de 100 programas de computador, para detetar erros de "sintaxe", "input/output" e de "outro tipo". Verificou-se que:

    - 20 programas tinham erros de "sintaxe", 10 tinham erros de "input/output" e 5 tinham erros de "outro tipo";
    - 6 tinham erros de "sintaxe" e de "input/output", 3 tinham erros de "sintaxe" e de "outro tipo"e 3 tinham erros de "input/output" e de "outro tipo"
    - 2 programas tinham os três tipos de erros considerados.

    Foi selecionado um desses programas, ao acaso. Determine a probabilidade de que o programa selecionado tenha:

    (a) exclusivamente erros de "sintaxe".

    (b) pelo menos um dos três tipos de erros.

13. Uma empresa fabrica aparelhos elétricos em duas cadeias de produção A e B. Sabe-se que a probabilidade de um desses artigos ser exportado é 0.2 se produzido pela cadeia A e 0.5 se produzido pela cadeia B. Além disso, a proporção de artigos provenientes da cadeia A é 52%. Escolhe-se, ao acaso, um artigo da produção desta empresa.

    (a) Determine a probabilidade do artigo ser exportado.

    (b) Sabendo que o artigo não foi exportado, qual a probabilidade dele ter sido produzido pela cadeia B?

14. A central telefónica do INEM de uma grande cidade recebe chamadas, umas genuínas e outras falsas, isto é, correspondentes ou não a verdadeiros acidentes. A central recebe na totalidade 2% de chamadas falsas. Destas, 20% são efetuadas durante o período da manhã, 40% durante o período da tarde e as restantes à noite. Das chamadas genuínas recebidas na central, 30% são feitas durante a manhã.

(a) Mostre que a percentagem de chamadas recebidas na central durante o período da manhã é de 29.8%.

(b) Considerando que a probabilidade de uma chamada, recebida na central, ser efetuada no período da tarde é de 40%, calcule a probabilidade de uma chamada ser feita durante a noite dado que é uma chamada genuína.

15. Em determinada linha de montagem 2% das peças ficam mal colocadas. Um programa para detetar falhas de montagem tem as seguintes propriedades:

- se a peça está mal colocada, o programa indica essa falha com probabilidade 0.99;
- se a peça está correctamente colocada, o programa indica falha com probabilidade 0.005.

(a) Determine a probabilidade de, ao ser efetuado o referido teste, o programa indicar falha.

(b) Se o teste indicar a existência de uma falha, qual a probabilidade de efetivamente existirem peças mal colocadas?

16. Uma empresa de fabrico de peças dispões de três setores de produção: A, B e C. Sabe-se que:

- a percentagem de peças produzidas pelo setor A é 50%;
- a percentagem de peças defeituosas é 10%;
- em C não são produzidas peças defeituosas;
- 2% das peças provêm de B e são defeituosas.

Escolhe-se aleatoriamente uma peça da produção da empresa.

(a) Mostre que a probabilidade da peça ser defeituosa, sabendo que provém de A é 0.16.

(b) Calcule a probabilidade da peça não provir de B sabendo que é defeituosa.

(c) Sabendo que, das peças não defeituosas 40% provêm de C, qual a probabilidade da peça ser proveniente de C?

17. Dos utilizadores de telefones móveis duma determinada localidade, 50% estão ligados à rede A, 40% à rede B e 10% à rede C. Após um estudo de opinião de mercado conclui-se que:

- 70% dos utilizadores estão satisfeitos com o serviço;
- dos utilizadores ligados à rede A, 80% estão satisfeitos;
- dos utilizadores satisfeitos com o serviço, 10% estão ligados à rede C.

Determine a percentagem de utilizadores:

(a) da rede B que estão satisfeitos com o serviço;

(b) não satisfeitos com o serviço, sabendo que estes não estão ligados à rede C.

18. O fabrico de uma peça consta de duas operações. Inicialmente a peça é moldada numa máquina M e, em seguida, passa por uma de duas impressoras, I_1 ou I_2. A probabilidade de uma peça apresentar defeito de moldagem é 0.4 e 70% das peças são impressas em I_1. Além disso, a probabilidade de surgir um defeito de impressão é de 0.05 para I_1 e de 0.02 para I_2. Note que defeitos de moldagem e de impressão são independentes entre si. No final de determinado dia de laboração, da produção total da fábrica retira-se uma peça ao acaso.

(a) Qual a probabilidade da peça ter defeitos de impressão?

(b) Qual a probabilidade da peça apresentar um qualquer defeito?

(c) Supondo que a peça apresenta defeito de impressão, calcule a probabilidade de ter sido impressa em I_1.

19. Uma empresa de desenvolvimento de *software* efetuou um estudo sobre a probabilidade de ocorrência de erros de programação entre os seus colaboradores. Classificou o tipo de programas que desenvolvem segundo a sua ordem de complexidade em dois níveis: média complexidade e alta complexidade. Verificou que

   - quando a ordem de complexidade do programa a desenvolver é média, a probabilidade de erro é 3%;
   - a probabilidade da ordem de complexidade ser média é 20%;
   - há 10% de probabilidade de ocorrerem erros e o tipo de programas ter complexidade alta.

   (a) Determine a probabilidade dos programas terem complexidade média sabendo que ocorreram erros.

   (b) Quando não se verifica a ocorrência de erros, é mais provável que os programas tenham complexidade média? Justifique.

20. Uma companhia de seguros classifica os seus segurados em três categorias: baixo risco, risco médio e risco elevado. Os seus registos indicam que a probabilidade de um segurado se envolver em pelo menos um acidente, por ano, é 0.01, 0.10, e 0.25 se o segurado pertence à categoria de baixo, médio ou risco elevado, respetivamente. Admita que a probabilidade de um segurado ser classificado na categoria de baixo risco é de 0.1 enquanto que na de risco médio é 0.6.

   (a) Qual a probabilidade de, num ano, um dos segurados tenha pelo menos um acidente?

   (b) Sabendo que um dos segurados teve pelo menos um acidente no último ano, qual a probabilidade de pertencer à categoria de risco elevado?

   (c) Sabendo que um dos segurados não teve acidentes no último ano, qual a probabilidade dele pertencer à categoria de risco médio?

21. Numa fábrica as máquinas I, II e III produzem peças do mesmo comprimento na proporção de 35:25:40. Sabe-se que 2% das peças produzidas pela máquina I são defeituosas e 1% das peças produzidas pela máquina II são defeituosas. Sabe-se ainda que 1.2% das peças são produzidas pela máquina III e são defeituosas.

   (a) Se for escolhida aleatoriamente uma peça da produção da fábrica, qual a probabilidade de ser defeituosa?

   (b) Se for selecionada uma peça defeituosa, qual a probabilidade de ter sido produzida pela máquina II?

Capítulo I - Probabilidades

1. (c) 0.4; 0.4; 0.1; 0.3
2. (a) 0.375 (b) 0.875
3. (b) 0.25; 0.25; 0.33
4. 0.1
5. (a) 0.4 (b) 0.8; 0.5
6. Resolução ao cuidado do aluno
7. A
8. B
9. A
10. C
11. B
12. (a) 0.13 (b) 0.25
13. (a) 0.344 (b) 0.3659
14. (b) 0.3
15. (a) 0.0247 (b) 0.8016
16. (b) 0.8 (c) 0.36
17. (a) 0.575 (b) 0.3
18. (a) 0.041 (b) 0.4246 (c) 0.8537
19. (a) 0.0566 (b) Não
20. (a) 0.1360 (b) 0.5515 (c) 0.6250
21. (a) 0.0215 (b) 0.1163

2 Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade Discretas

2.1 Introdução

Definição Seja Ω um espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Designa-se por *variável aleatória* (v.a.) uma função (correspondência unívoca) X de domínio Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow X(w)$$

Exemplos de Ilustração

1. Lançamento de duas moedas equilibradas, uma a seguir à outra, anotando as faces que ficam voltadas para cima.

   $\Omega = \{(C,C),(C,\overline{C}),(\overline{C},C),(\overline{C},\overline{C})\}$, com C :“saída de cara”.

   Seja X a v.a. que representa (por exemplo) o **número** de caras obtidas no lançamento das duas moedas.

   $X(w) \longleftarrow$número de caras no elemento w de Ω.

2. Lançamento de dois dados, anotando os números de pontos das faces que ficam voltadas para cima.

   $\Omega = \{(i,j), i,j = 1,2,3,4,5,6\}$.

   Seja X a v.a. que representa a **soma** dos pontos obtidos.

3. Medição da altura de uma pessoa, escolhida ao acaso.

   Ω é o conjunto de todas as alturas atribuíveis a uma pessoa.

   Seja X a v.a. que representa a **altura** de uma pessoa.

Observação Em algumas situações o conjunto de valores que uma v.a. toma (contradomínio) confunde-se com o próprio Ω; noutras, os valores da v.a. distinguem-se claramente dos elementos de Ω. Embora da experimentação nem sempre resultem **valores numéricos**, o conceito de variável aleatória permite associar valores numéricos (números ou intervalos reais) aos elementos de Ω, relação esta com grande interesse prático.

Para $w \in \Omega$, como calcular a probabilidade de ocorrência de $X(w)$? (“deixámos” Ω, estamos em $\mathbb{R}$!!!)

Uma variável aleatória $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que:

- $\forall A \subseteq \Omega,\ \ X(A) = \{X(w) : w \in A\}$ (imagem de A por X)

- $\forall E \subseteq \mathbb{R}$, $X^{-1}(E) = \{w \in \Omega : X(w) \in E\}$(imagem inversa de E por X)

  Note que se $w \in X^{-1}(E) \Rightarrow X(w) \in E$.

(Uma v.a. é uma aplicação que estabelece uma relação entre subconjuntos de Ω e subconjuntos de $\mathbb{R}$ e **vice-versa**)

Propriedade
Sendo E um qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ e X uma variável aleatória, $X^{-1}(E)$ é um subconjunto de Ω.

Como P está definida neste domínio, podemos sempre calcular $P(X^{-1}(E))$! É assim introduzida em $\mathbb{R}$ uma **probabilidade**, denotada por P_X, definida por

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)),\ \forall B \subseteq \mathbb{R}.$$

A P_X é usual chamar-se lei de probabilidade da v.a. X.

Notação
$X^{-1}(B) = \{w \in \Omega : X(w) \in B\} \equiv \{X \in B\}$
$\Rightarrow P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$

Na nossa incursão pelas variáveis aleatórias vamos considerar dois tipos de variáveis: as **discretas** e as (absolutamente) **contínuas** (Capítulo III). Esta classificação é ditada pelos próprios fenómenos aleatórios em estudo e consequente leitura, mas também porque estas variáveis obedecem a certas regras (matemáticas) para que possam ser classificadas deste modo.

2.2 Variáveis Aleatórias Discretas

Definição Uma v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se discreta se $\exists S \subset \mathbb{R} : S$ é finito ou infinito numerável tal que $P_X(S) = P(X \in S) = 1$.

Ao menor subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem probabilidade 1 chamamos *Suporte* de X.

Definição Seja X uma v.a. discreta. Chama-se *função de probabilidade de* X à função $p : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definida por

$$p(x) = P(X = x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriedades

(1) $0 \leq p(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\sum_x p(x) = 1.$

Observação Se X tem suporte S então $p(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{se} \quad x \in S \\ 0 & \text{se} \quad x \in \overline{S} \end{cases}$.

Notas

- O conhecimento da função de probabilidade de X, p, implica o conhecimento da lei de probabilidade de X, P_X, e por isso p também é designada por lei de probabilidade de X.
- Identificamos sempre as v.a.'s por letras maiúsculas (X) e as suas concretizações por letras minúsculas (x).

Definição Seja X uma v.a. discreta. Chama-se *função distribuição de* X à função $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definida por

$$F(x) = P(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se X tem suporte S então

$$F(x) = \sum_{\mathbf{a} \in S \cap]-\infty, x]} P(X = \mathbf{a}).$$

$$\downarrow$$

"valores do suporte de X e que são inferiores ou iguais a x"

Propriedades da função distribuição de uma v.a. discreta

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq F(x) \leq 1$ $\quad$ (F é uma função limitada)

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \text{se } a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$ $\quad$ (F é não decrescente)

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\quad$ e $\quad$ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(4) $\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$ $\quad$ (F é contínua à direita)

(5) F admite um número finito ou infinito numerável de pontos de descontinuidade (pontos do suporte de X)

(6) A cada v.a. X corresponde uma e uma só função distribuição

(7) Para $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P(a < X < b) &= P(X < b) - P(X \leq a) \\
&= \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a); \\
P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) - P(X = a); \\
P(a \leq X < b) &= F(b) - P(X = b) - F(a) + P(X = a); \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Independência de Variáveis Aleatórias

Definição Sejam X e Y duas variáveis aleatórias (<u>discretas</u> ou <u>contínuas</u>). X e Y dizem-se independentes se e só se

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y).$$

Generalização
As n $(n \geq 2)$ variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ dizem-se independentes se e só se

$$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}, P(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2 \cap ... \cap X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i).$$

Parâmetros de localização e de dispersão

Definição Seja X uma v.a. discreta de suporte S. A *esperança matemática de* X (ou *valor médio de* X ou *valor esperado de* X), caso exista, é definida por

$$E(X) = \sum_{x \in S} x P(X = x) \quad .$$

Notas
−A existência do valor médio de uma v.a. X depende da convergência da série anterior.
−Se a v.a. X é discreta com suporte finito, então $E(X)$ existe sempre!
−O valor médio de uma v.a. é um parâmetro de localização (tendência central).

Definição Se $E(X) = 0$ diz-se que a v.a. X é centrada.

Propriedades da esperança matemática

1. Seja $X = c$, $c \in \mathbb{R}$. $E(X) = E(c) = c$.

2. Seja X uma v.a. discreta de suporte S e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $g(X)$ é uma v.a. discreta. Tem-se
$$E[\, g(X)\,] = \sum_{x \in S} g(x) P(X = x).$$
   - Seja $Y = g(X) = aX + b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Se $E(X)$ existe então $E(Y) = aE(X) + b$.
   - Seja $k \in \mathbb{N}$ (arbitrariamente fixo) e $g(X) = X^k$.
   $E(X^k) = \sum_{x \in S} x^k P(X = x)$ (*momento de ordem* k de X).

3. Se $E(X)$ existe então $|E(X)| \leq E(|X|)$.

4. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ $(n \in \mathbb{N})$ v.a.'s todas definidas sobre o mesmo espaço Ω e tais que $E(X_i)$ existe para $i = 1, 2, ..., n$. Então
$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \,+\, b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) \,+\, b,$$
para $\forall\, a_1, a_2, ..., a_n$, $b \in \mathbb{R}$. **(Linearidade da esperança)**

   - $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Definição Seja X uma v.a. discreta de suporte S e esperança $E(X) = \mu$. A *variância de* X, denotada por $V(X)$, $Var(X)$ ou σ^2, é definida por

$$V(X) = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

$$= \sum_{x \in S} (x-\mu)^2 P(X=x)$$

Definição Chama-se *desvio-padrão de* X à raiz quadrada positiva da variância de X, e denota-se por $\sigma(X) = \sigma = \sqrt{V(X)}$.

Nota A variância e o desvio padrão de uma v.a. X são ambos parâmetros de dispersão; no entanto, o desvio padrão é mais usado, uma vez que vem expresso nas mesmas unidades de X.

Propriedades da variância

1. Seja X uma v.a. tal que $E(X)$ e $E(X^2)$ existem. Então
$$V(X) = E(X^2) - E^2(X).$$
2. Se $X = c,\ c \in \mathbb{R}$, então $V(X) = 0$.
3. Seja X uma v.a. tal que $E(X)$ e $E(X^2)$ existem e $a,\ b \in \mathbb{R}$. Então
$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

   - $V(X+b) = V(X)$;
   - $V(aX) = a^2 V(X)$;
   - $V(-X) = V(X)$.

Outros parâmetros: Mediana e Quantis
Definição Chama-se *mediana* de X ao número real M_d tal que

$$F(M_d) = F(M_d^+) \geq 0.5 \quad \wedge \quad F(M_d^-) \leq 0.5$$

Nota A mediana é um parâmetro de localização, alternativo (ou complementar) ao valor esperado.
Definição Seja $p \in]0,1[$. Chama-se *quantil de ordem p de X* ao número real x_p tal que

$$F(x_p^+) \geq p \quad \wedge \quad F(x_p^-) \leq p$$

2.3 Distribuições Especiais Discretas

Vimos que associado a uma variável aleatória temos um modelo matemático que descreve (e resume) o comportamento dessa mesma variável e, consequentemente, o fenómeno aleatório em estudo. Deste modelo fazem parte a sua Distribuição de probabilidade (caracterizada pelas funções de probabilidade ou distribuição), os seus parâmetros de localização e de dispersão.

Nesta seção vamos conhecer alguns modelos, Leis, Famílias de distribuições, que são especiais porque uma mesma lei pode ser usada numa grande variedade de aplicações que envolvem fenómenos aleatórios.

Notemos a utilidade que uma *expressão comum*, isto é, que um *modelo* para a distribuição de variáveis aleatórias associadas a diferentes experiências aleatórias tem, pois simplifica o seu estudo e o nosso trabalho!!!

Estas distribuições estão bem estudadas e tabeladas. De entre um vasto leque de distribuições especiais, estudaremos apenas algumas, discretas nesta seção e contínuas no Capítulo III, essenciais num estudo introdutório a esta área.

2.3.1 Distribuição de Bernoulli

Seja A um acontecimento associado a uma determinada experiência aleatória, tal que $P(A) = p$, com $p \in]0,1[$.

Considere-se a variável aleatória X definida do modo seguinte

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \text{A ocorre} \\ 0 & \text{se} \quad \text{A não ocorre} \end{cases} .$$

A variável assim definida é uma v.a. discreta de suporte $S = \{0, 1\}$ e função de probabilidade

$$p(x) = \begin{cases} 1-p & \text{se} \quad x = 0 \\ p & \text{se} \quad x = 1 \\ 0 & \text{se} \quad x \in \overline{S} \end{cases} = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{se} \quad x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \overline{S} \end{cases} .$$

- A função (lei) de probabilidade assim definida é denominada por **lei de Bernoulli de parâmetro p**, denotada por $\mathcal{B}(\mathbf{p})$ (ou **Bernoulli(p)**).

- Diz-se que a v.a. **X segue uma lei de Bernoulli** (ou **X tem distribuição de Bernoulli**) **de parâmetro p**, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X} \sim \mathcal{B}(\mathbf{p})$.

Nota A distribuição de Bernoulli está associada a experiências aleatórias com apenas dois resultados possíveis, usualmente denominados por **sucesso** e **insucesso**, com probabilidade de ocorrer sucesso p (o seu parâmetro!) e insucesso $q = 1 - p$. Uma experiência aleatória assim caracterizada chama-se **prova (ou tentativa) de Bernoulli**.

Propriedades Se $X \sim \mathcal{B}(p)$ então

$$E(X) = p$$
$$V(X) = p(1-p)$$

2.3.2 Distribuição Binomial

Seja A um acontecimento associado a uma determinada experiência aleatória, tal que $P(A) = p$, com $p \in]0,1[$.

Suponha agora que esta mesma experiência é realizada n vezes, com $n > 1$, sempre nas mesmas condições (note que os resultados das sucessivas experiências são independentes e logo $P(A) = p$ em qualquer realização).

Considere-se a variável aleatória

X: número de vezes que ocorre o acontecimento A, nas n realizações da experiência aleatória

Observações

- O suporte de X é $S = \{0, 1, ..., n\}$

- A probabilidade (por exemplo) de ocorrer exatamente x vezes o acontecimento A, **e de seguida** $n-x$ vezes $\overline{A}$, é dada por

$$P(\underbrace{A\cap...\cap A}_{x\ vezes}\cap\underbrace{\overline{A}\cap...\cap\overline{A}}_{n-x\ vezes}) = \underbrace{P(A)...P(A)}_{x\ vezes}\ \underbrace{P(\overline{A})...P(\overline{A})}_{n-x\ vezes} = p^x\,(1-p)^{n-x}$$

- O número de maneiras distintas de ocorrer x vezes o acontecimento A, nas n realizações, é $C_x^n = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) = \dfrac{n!}{(n-x)!x!}$

- A probabilidade de ocorrer exatamente x vezes o acontecimento A, nas n realizações, é dada por

$$P(X=x) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) p^x\,(1-p)^{n-x},\ x\in\{0,1,...,n\}.$$

X é uma v.a. discreta de **suporte** $S=\{0,1,...,n\}$ e **função de probabilidade** dada por

$$p(x) = P(X=x) = \begin{cases} \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) p^x\,(1-p)^{n-x} & \text{se} \quad x\in\{0,1,...,n\} \\ 0 & \text{se} \quad x\in\overline{S} \end{cases}.$$

- $P(X=x)>0, \forall x\in\{0,1,...,n\}$
- $\displaystyle\sum_{x=0}^{n} P(X=x) = 1$

Diz-se que a v.a. **X segue uma lei Binomial** (ou X **tem distribuição Binomial**) **de parâmetros n** e **p**, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X}\sim\mathcal{B}(\mathbf{n},\mathbf{p})$.

Diz-se que a v.a. **X segue uma lei Binomial** (ou X **tem distribuição Binomial**) **de parâmetros n** e **p**, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X}\sim\mathcal{B}(\mathbf{n},\mathbf{p})$.

Observação A lei Binomial descreve a contagem do número de *sucessos* em n repetições, independentes, de uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso p. Note que se X_i representar o número de sucessos (0 ou 1) obtidos na prova i, então $X_i\sim\mathcal{B}(p)$, $i=1,2,...,n$, e o número de sucessos obtidos nas n provas é a v.a.

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim\mathcal{B}(n,p).$$

Uma das aplicações mais interessantes da lei Binomial é a contagem do número de elementos de determinado tipo numa amostra de dimensão n, quando selecionados com reposição.

Nota A família de distribuições Binomial depende apenas dos parâmetros n e p. Esta está implementada na maioria das máquinas de calcular, assim como tabelada nos livros da área. Em particular, nas aulas de ME podem (ou devem, em falta de alternativa) ser consultadas as tabelas da disciplina onde constam as probabilidades

$$F(x) = P(X\le x) = \sum_{k=0}^{x} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k\,(1-p)^{n-k} \text{ para } x\in\{0,1,...,n\}.$$

2.3.3 Distribuição Hipergeométrica

Suponha que se tem um número finito de N objectos, dos quais M são de um tipo (*sucesso*) e os restantes $N - M$ de outro tipo (*insucesso*).

Considere a experiência aleatória: extração, ao acaso, de um objecto.

Suponha agora que esta mesma experiência é realizada n vezes, isto é, extração sucessiva, e sem reposição, de n dos N objectos (note que os resultados das sucessivas experiências não são independentes).

Seja

X: número de objectos do tipo sucesso obtidos nas n extrações

Observações

- $x \leq n$ e $x \leq M \iff x \leq min(n, M)$

  $n - x \leq n$ e $n - x \leq N - M \iff x \geq 0$ e $x \geq n - (N - M)$

  $\iff x \geq max(0, n - (N - M))$

  Então
  $$S = \{\max(0, n - (N - M)), 1, \ldots, \min(n, M)\}$$

- O número de casos favoráveis à saída de x sucessos, nas n extrações, é $\begin{pmatrix} M \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N - M \\ n - x \end{pmatrix}$

- O número de casos possíveis nas n extrações, é $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$

- A probabilidade de obter exatamente x sucessos, nas n extrações, é dada por
  $$P(X = x) = \frac{\begin{pmatrix} M \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N - M \\ n - x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \quad \text{para} \quad x \in S$$

X é então uma v.a. discreta de suporte $S = \{\max(0, n - (N - M)), 1, \ldots, \min(n, M)\}$ e função de probabilidade dada por

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} M \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N - M \\ n - x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} & \text{se} \quad x \in S \\ 0 & \text{se} \quad x \in \overline{S} \end{cases}.$$

Diz-se que a v.a. **X segue a lei Hipergeométrica** (ou **X tem distribuição Hipergeométrica**) **de parâmetros n**, **N** e **M**, e escreve-se simbolicamente $\mathbf{X} \sim \mathcal{H}(\mathbf{n}, \mathbf{N}, \mathbf{M})$.

Propriedades

- Se $X \sim \mathcal{H}(n, N, M)$ então

$$E(X) = n\frac{M}{N}$$

$$V(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Notas

Tal como no caso da Binomial, a distribuição Hipergeométrica é usada na contagem do número de sucessos que ocorrem em n realizações de uma experiência aleatória, cada uma com apenas dois resultados possíveis (sucesso ou insucesso). No entanto, a Hipergeométrica é usada quando a probabilidade do sucesso é alterada em cada realização.

Uma das aplicações mais interessantes destas distribuições é na área da Amostragem, onde uma amostra de dimensão n é seleccionada numa população de dimensão N. Uma nova leitura dos parâmetros da Hipergeométrica, (n, N, M), é
n: dimensão da amostra
N: dimensão da população (finita)
M: número de sucessos na população

Prova-se, no entanto, que em certas condições, a distribuição $\mathcal{H}(n, N, M)$ pode ser aproximada pela distribuição $\mathcal{B}(n, p)$, com $p = \dfrac{M}{N}$.

Na prática,

$$\text{se } \frac{n}{N} \leq 0.1 \text{ então } \mathcal{H}(n, N, M) \mathrel{\dot{\sim}} \mathcal{B}\left(n, \tfrac{M}{N}\right)$$

$$\downarrow$$

"*aproximadamente (no limite)*"

Intuitivamente, se a dimensão da amostra, n, é muito pequena relativamente à dimensão da população, N, a seleção, embora seja feita sem reposição, não vai alterar "significativamente" a probabilidade de ocorrer um sucesso.

(Mais à frente voltaremos a esta aproximação !!)

2.3.4 Distribuição de Poisson

Seja λ um número real positivo. Diz-se que uma v.a. X segue a lei de Poisson de parâmetro λ, e escreve-se simbolicamente $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, se X for discreta de suporte $S = \mathbb{N}_0$, com função de probabilidade

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!} & \text{se} \quad x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{se} \quad x \in \overline{S} \end{cases}.$$

- $P(X = x) > 0, \forall x \in \mathbb{N}_0$
- $\displaystyle\sum_{x=0}^{+\infty} P(X = x) = 1$

Propriedades

- $E(X) = V(X) = \lambda$
- Sejam $X_1, X_2, ...X_k$ v.a.'s independentes tais que $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$. Então

$$Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k)$$

Notas

Concluir que uma certa v.a. segue a lei de Poisson (ao contrário das leis Binomial e Hipergeométrica) não é imediato, e sai fora do âmbito do nosso curso. No entanto, esta distribuição é aplicada na contagem de eventos independentes que ocorrem durante um dado intervalo de tempo ou numa dada região espacial. Esta distribuição também é conhecida pela distribuição dos acontecimentos raros, pois a probabilidade de ocorrer mais do que um evento num intervalo muito pequeno é nula.

Prova-se que a distribuição $\mathcal{B}(n,p)$, com p muito pequeno e n suficientemente grande, pode ser aproximada pela distribuição $\mathcal{P}(\lambda)$, com $\lambda = np$. Na prática,

$$\text{se } \; p \leq 0.1 \; \text{ então } \; \mathcal{B}(n,p) \dot{\sim} \mathcal{P}(np)$$

2.4 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Definição Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Designa-se por *variável aleatória bidimensional* (ou *vector aleatório de dimensão dois*) uma função $\mathbf{X}$ de domínio Ω e contradomínio em $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ w &\longrightarrow \mathbf{X}(w) = (X_1(w), X_2(w)) \end{aligned}$$

Exemplo de Ilustração

Lançamento de dois dados, anotando os números de pontos das faces que ficam voltadas para cima.

$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$.

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ o vetor aleatório que representa a **soma**, X_1, e a **diferença**, X_2, dos pontos obtidos.

Notas

$-$ Uma variável aleatória bidimensional é um vetor cujas componentes são variáveis aleatórias unidimensionais.

$-$ Associado a uma experiência aleatória, pode interessar o estudo de k, com $k \geq 2$, medidas/características. Surge o conceito de variável (vetor) aleatória(o) k-dimensional, com

$$\mathbf{X}(w) = (X_1(w), X_2(w), ..., X_k(w)) \in \mathbb{R}^k.$$

Por uma questão de clareza e simplicidade na exposição dos conceitos, no nosso estudo vamos considerar apenas variáveis aleatórias bidimensionais. No entanto, todos os conceitos aqui apresentados generalizam-se facilmente para o caso k-dimensional.

– Os vetores aleatórios podem ser discretos (todas as componentes do vetor são v.a.'s discretas), contínuos (todas as componentes do vetor são v.a.'s contínuas) ou mistos. Embora neste curso se analise apenas o caso discreto, os conceitos aqui apresentados generalizam-se para o caso contínuo. O caso misto está fora do âmbito do nosso estudo.

Definição Um vector aleatório (X, Y) diz-se discreto se existir um conjunto finito ou infinito numerável S tal que

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(X = x, Y = y) > 0\}$$

e tal que

$$P((X, Y) \in S) = \sum_{(x,y)\in S} P(X = x, Y = y) = 1.$$

Definição Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. A *função de probabilidade conjunta* do par (X, Y) é dada por

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x \cap Y = y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\downarrow$$

"probabilidade de, simultaneamente,
X tomar o valor x e Y tomar o valor y"

Propriedades

(1) $0 \leq p_{XY}(x, y) \leq 1, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(2) $\displaystyle\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} p_{XY}(x, y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} \sum_{x\in\mathbb{R}} p_{XY}(x, y) = 1.$

Definição A *função distribuição conjunta* do par de v.a.'s (X, Y) é dada por

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se (X, Y) tem suporte $S = S_X \times S_Y$ então

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\in S\cap]-\infty,x]\times]-\infty,y]} P(X = \mathbf{a} \cap Y = \mathbf{b}).$$

$$= \sum_{\mathbf{a}\,\in S_X\cap]-\infty,x]} \ \sum_{\mathbf{b}\,\in S_Y\cap]-\infty,y]} P(X = \mathbf{a} \cap Y = \mathbf{b}).$$

Algumas propriedades da função distribuição conjunta

(1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$ (F_{XY} é uma função limitada)

(2) $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2, \text{se } x_1 < x_2 \, e \, y_1 < y_2 \Rightarrow F_{XY}(x_1,y_1) \leq F_{XY}(x_2,y_2)$ (F_{XY} é não decrescente)

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} F_{XY}(x,y) = 0$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} F_{XY}(x,y) = 1$

Definições Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto com função de probabilidade conjunta p_{XY}.

- A *função de probabilidade marginal de* X é a função dada por

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}} p_{XY}(x,\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}} P(X = x \cap Y = \mathbf{y}), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- A *função de probabilidade marginal de* Y é a função dada por

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}} p_{XY}(\mathbf{x},y) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}} P(X = \mathbf{x} \cap Y = y), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

(As funções de probabilidade marginais são funções de probabilidade de v.a.'s unidimensionais.)

- A *função de probabilidade condicionada de* Y *dado* $X = x$, com $p_X(x) > 0$, é a função de y dada por

$$p_{Y/X=x}(y) = P(Y = y/X = x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

(de modo análogo se define função de probabilidade condicionada de X dado $Y = y$, com $p_Y(y) > 0$)
$p_{Y/X=x}$ é uma função de probabilidade.

Independência de Variáveis Aleatórias

Definição Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas. X e Y dizem-se independentes se e só se

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ p_{XY}(x,y) = p_X(x) \times p_Y(y).$$

Generalização As n $(n \geq 2)$ variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ dizem-se independentes se e só se

$$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}, P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap ... \cap X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

Parâmetros de Vetores Aleatórios

Definição Seja (X,Y) um vetor aleatório tal que $E(X)$ e $E(Y)$ existem. Chama-se *esperança matemática* (*valor médio* ou *valor esperado*) do vector (X,Y) ao vector $(E(X),E(Y))$.

Propriedade Seja (X,Y) um vetor aleatório discreto de suporte S e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(X,Y)$ é uma variável aleatória. Tem-se

$$E[\,g(X,Y)\,] = \sum_{(x,y)\in S} g(x,y) P(X = x, Y = y).$$

Definição Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto tal que $E(X) = \mu_X$ e $E(Y) = \mu_Y$. A *Covariância entre X e Y*, denotada por $cov(X, Y)$, é definida por

$$cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]\,.$$

- $\begin{aligned} cov(X,Y) &= \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) P(X = x, Y = y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$

Algumas propriedades :

1. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X, Y)$
2. $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\,cov(X, Y)$
3. Se $X_1,\, X_2, ..., X_n$ $(n \in \mathbb{N})$ são v.a.'s **independentes** então

$$E\,(X_1\,X_2...X_n) = E(X_1)E(X_2)...E(X_n);$$

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \,+\, b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i),\ \forall\, a_1, a_2, ..., a_n,\, b \in \mathbb{R}.$$

Casos particulares:

i) $V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V(X_i);$

ii) $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2).$

Nota Se X e Y são independentes então $cov(X, Y) = 0$ (!), mas a implicação contrária já não é válida!

Definição Seja (X, Y) um vetor aleatório. O *coeficiente de correlação linear entre X e Y*, denotado por ρ_{XY}, é dado por

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}\,.$$

Nota
$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

Exemplo

1. Uma fábrica possui duas linhas de produção de um certo motor. Considere o vetor aleatório (X, Y), onde

   X: número de motores produzidos, diariamente, na linha I

   Y: número de motores produzidos, diariamente, na linha II

   A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na forma tabular, por

X / Y	0	1	2
0	0	0.06	0.19
1	0.03	0.07	0.18
2	0.04	0.06	0.1
3	0.04	0.08	0.15

   Funções de probabilidade marginais

x	0	1	2
$p_X(x)$	0.11	0.27	0.62

y	0	1	2	3
$p_Y(y)$	0.25	0.28	0.2	0.27

   $E(X) = 1.51$, $V(X) = 0.4699$, $\sigma_X = 0.6855$

   $E(Y) = 1.49$, $V(Y) = 1.2899$, $\sigma_Y = 1.1357$

   (Comparar as duas linhas de produção.)

Capítulo II - Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade Discretas

1. Uma moeda apresenta cara duas vezes mais frequentemente que coroa. Essa moeda é lançada três vezes e X é a variável aleatória que representa o número total de caras que ocorreram.

   (a) Determine a função de probabilidade de X e represente-a graficamente.

   (b) Determine a função distribuição de X e represente-a graficamente.

   (c) Qual é a probabilidade de só saírem caras nos três lançamentos? E de saírem, no máximo, duas caras?

2. Suponha que o número de computadores utilizados diariamente numa determinada empresa é uma variável aleatória X com função de probabilidade,

$$P(X = x) = p(x) = \begin{cases} \dfrac{k2^x}{x!} & \text{se} \quad x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases} .$$

   (a) Determine o valor de k, justificando a sua resposta.

   (b) Defina a função distribuição de X.

   (c) Qual deverá ser o número mínimo de computadores disponíveis no ínicio de cada dia para que a procura diária seja satisfeita com uma probabilidade de pelo menos 0.8?

   (d) Qual é o número médio de computadores utilizados diariamente naquela empresa? E o desvio padrão?

3. A função distribuição de uma variável aleatória (v.a.) X é

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0.5 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.6 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.9 & \text{se} \quad 3 \leq x < 3.5 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 3.5 \end{cases} .$$

   (a) Represente graficamente $F(x)$.

   (b) Justifique que a v.a. X é discreta e calcule a sua função de probabilidade.

   (c) Calcule: $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 2)$, $P(X \geq 3)$, $P(2.5 \leq X \leq 4)$, $P(X \geq 3.5)$ e $P(2.5 \leq X \leq 4 / X \geq 1)$.

   (d) Calcule $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ e $\sigma(X)$.

   (e) Considere a v.a. $Y = X - 1.15$.

      i. Calcule $P(Y \leq 1)$.

      ii. Compare as v.a.'s X e Y, em termos de valor esperado e variância.

4. Seja X uma variável aleatória discreta definida por:

x_i	$m-1$	m	$m+3$	$m+5$
$P(X=x_i)$	$\frac{k+1}{8}$	$\frac{k}{8}$	$\frac{k-1}{8}$	$\frac{k}{8}$

(a) Determine as constantes k e m sabendo que $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{4}$.

(b) Calcule $\mathrm{E}(X-2)$ e $\mathrm{V}(3X-2)$.

(c) Obtenha a função distribuição da v.a. X.

(d) Calcule: $P(X \leq -5)$, $P(X \leq -1)$, $P(-1 < X \leq 3)$, $P(X \geq 4)$, $P(X < 4)$ e $P(X \leq 6)$.

5. Seja X uma variável aleatória discreta definida por:

x_i	-2	-1	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{3}$	k	$\frac{1}{15}$	k	$\frac{1}{3}$

(a) Determine o valor de k por forma a que p seja lei de probabilidade de X.

(b) Deduza a função distribuição de X.

(c) Calcule o valor médio e a variância de X.

(d) Calcule o valor de $P(X^2 = 4/X \leq 1)$.

6. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x	0	1	2
$P(X=x)$	b^2	a	$2a$

onde a e b designam números reais. Sabendo que valor médio desta variável é 1.25, os valores de a e b podem ser respetivamente

(A) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{9}; \frac{\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $\frac{1}{8}; \frac{\sqrt{10}}{4}$

7. **(Exercício ao cuidado do aluno)** Seja X uma v. a. discreta de Suporte $S \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, com **a** e **b** dois números inteiros positivos à sua escolha.

(a) Gere, aleatoriamente, o suporte de X, S, usando o ***Microsoft Excel***:
1 º Numa célula insira o comando $\boxed{\textbf{=ALEATÓRIO()*(b-a)+a}}$
2 º Formate a célula que contém o número obtido em (1 º) :

Formatar células→ Número→Categoria: número→casas decimais=1

3 º Repita a operação até que S tenha dimensão 5.

(b) Considere o suporte de X, S, obtido na alínea anterior, e assuma que a probabilidade de cada valor é igual à sua frequência relativa em S.

i. Calcule as funções de probabilidade e distribuição de X.

ii. Calcule, se possível, as seguintes probabilidades:

(i) $P(X \geq 0)$ (ii) $P(0 < X \leq 7)$

(iii) $P(X \leq 1.5/X \geq 0.5)$ (iv) $P(1 < X < 3/X \geq 2)$

iii. Considere a variável aleatória $g(X) = X^2 - 4$.
Sem usar o suporte de $g(X)$, calcule $E[g(X)]$ e $V[g(X)]$.

8. Uma caixa contém 20 peças das quais 5 são defeituosas. Tiram-se 6 peças da caixa, com reposição da peça extraída em cada tiragem. Seja X o número de peças defeituosas encontradas.

   (a) Identifique, justificando, a lei de probabilidade de X.

   (b) Determine: $P(X \leq 0)$, $P(2 \leq X < 4)$, $P(X > 3)$ e $P(X \leq 7)$.

   (c) Qual é o número esperado de peças defeituosas nas 6 tiragens?

   (d) Assuma agora que a tiragem das 6 peças é feita sem reposição. Qual é a lei de probabi-lidade de X? Justifique. Qual a probabilidade de nenhuma peça ser defeituosa?

9. Considere o exercício nº 1. A lei da variável aleatória aí definida é especial. Identifique-a, justificando a sua resposta.

10. Uma loja quer vender rapidamente os 100 computadores portáteis que tem em armazém, pelo que realizou uma promoção com descontos oferecendo o sistema operativo. O processo de instalação do sistema operativo não é completamente fiável e 10 dos portáteis necessitarão de assistência complementar.

    Uma empresa comprou na loja 20 portáteis, seleccionados aleatoriamente no armazém.

    (a) Indique (justificando) a lei de probabilidade do número de portáteis comprados pela empresa, que necessitarão de assistência.

    (b) Qual a probabilidade de nenhum dos portáteis apresentar problemas?

    (c) Indique uma expressão matemática que dê a probabilidade de mais de 5 portáteis nece-ssitarem de assistência.

    (d) Cada um dos portáteis é vendido a 1.520 euros e a sua eventual assistência custará à loja 55 euros. Indique o lucro esperado da loja com a venda dos portáteis à empresa.

11. Considere a experiência aleatória "lançamento de um dado equilibrado". Suponha que se efetua uma sucessão de 20 realizações desta experiência. Seja X a v.a. que representa o número de faces 5 que ocorreram nas 20 realizações da experiência. Determine:

    (a) a lei de probabilidade de X;

    (b) a probabilidade de ocorrerem 10 faces 5.

12. A informação obtida em experiências anteriores diz-nos que a probabilidade de um certo leitor ótico fornecer uma leitura errada é de 1%. Suponha que, num determinado período de tempo, se obtêm 18 leituras com esse leitor ótico. A probabilidade de se obter, nesse período de tempo, duas ou mais leituras erradas é:

    (A) 0.0007 **(B)** 0.0138 **(C)** 0.7338 **(D)** 0.9993

13. De um grupo de 1000 habitantes de certa região, há 20% que são proprietários da casa que habitam. Se se recolher, ao acaso, uma amostra de 10 indivíduos, qual a probabilidade de 6 terem casa própria?

14. Apenas 30% dos habitantes de uma grande cidade pensam que o sistema de trânsito vigente é adequado. Se forem seleccionados 20 habitantes, encontre a probabilidade de, no máximo, 2 concordarem com o sistema de trânsito.

15. Suponha que 10% dos vidros fabricados por certa máquina são defeituosos. Se forem selecionados, ao acaso, 10 vidros da produção total da máquina, qual a probabilidade de

    (a) nenhum ser defeituoso?

    (b) o número de vidros defeituosos não ser inferior a 2 nem superior a 6?

    Qual é o valor esperado do número de vidros defeituosos entre os selecionados?

16. Durante os Censos 2021, nos inquéritos à população feitos de forma independente uns dos outros, verificou-se que 25% das pessoas precisavam de ajuda para preencher o inquérito.

    (a) Condidere que num dia esse inquérito foi realizado, pelo mesmo profissional, a 16 pessoas.

        i. A probabilidade de mais de 4 terem precisado de ajuda é:

           (A) 0.4050 **(B)** 0.6302 **(C)** 0.3698 **(D)** 0.5950

        ii. As pessoas que precisam de ajuda demoram 60 minutos a preencher o inquérito e as que não precisam de ajuda demoram 30 minutos. Quantas horas é de esperar que, no total, o profissional tenha necessitado para recolher as respostas das 16 pessoas?

    (b) Suponha agora que o inquérito foi realizado a 144 pessoas, qual a probabilidade *aproximada* de no máximo 40 pessoas terem precisado de ajuda?

17. Admita que é engenheiro de controle de qualidade numa empresa de produção de *hardware* para computadores. A sua empresa recebeu um grande lote de componentes eletrónicos de um determinado fornecedor que afirma que cada lote só tem 5% de componentes defeituosas. O lote contém 500 componentes e é da sua responsabilidade inspecionar uma amostra aleatória de 50 componentes. O valor exato da probabilidade de encontrar 3 componentes defeituosas na amostra de 50 componentes é:

    (A) 0.2138 **(B)** 0 **(C)** 0.2328 **(D)** 0.2199

18. Uma empresa efetuou um estudo sobre a probabilidade de ocorrência de erros no trabalho dos seus colaboradores. Classificou o tipo de tarefas que desenvolvem segundo a sua complexidade em dois níveis: média complexidade e alta complexidade. Verificou que

    - quando a complexidade da tarefa a desenvolver é média, a probabilidade de erro é 3%;
    - a probabilidade da complexidade da tarefa ser média é 20%;
    - se ocorrem erros, a probabilidade da tarefa ter complexidade alta é 0.9434.

    (a) Determine a probabilidade da tarefa ter complexidade média e ocorrerem erros.

    (b) Suponha que foram analisadas 10 tarefas cuja complexidade foi classificada como média. Determine a probabilidade de em pelo menos 2 dessas tarefas terem ocorrido erros.

19. O número de chamadas que chegam num período de 5 minutos à central telefónica de uma empresa é uma variável aleatória com distribuição de *Poisson* de parâmetro 10.

    (a) Calcule a probabilidade de, num período de 5 minutos,

i. chegarem exatamente 8 chamadas;
ii. chegarem menos de 5 chamadas;
iii. chegarem, no mínimo, 3 chamadas;
iv. não chegar alguma chamada.

(b) Qual a probabilidade de chegarem à central telefónica 35 chamadas, num período de 10 minutos consecutivos? Justifique.

20. O número de visitantes que entra num *cibercafe* ao longo dos vários períodos diários segue uma lei de Poisson. No entanto, o número médio de visitantes varia consoante o período do dia: no período da manhã espera-se 3 visitantes e no período da tarde 15.

Assuma independência entre o número de visitantes ao *cibercafe* nos dois períodos diários.

(a) Qual a probabilidade de numa manhã de um dia qualquer, o número de visitantes ao *cibercafe* ser pelo menos cinco?
(b) Qual a probabilidade de, num dia qualquer, o número total de visitantes ao *cibercafe* nos períodos da manhã e da tarde ser menor que 31?
(c) Qual a probabilidade de, num dia qualquer, o número de visitantes na manhã ser igual a 5 e na tarde ser igual a 20?

21. Determinada editora publica um livro com uma tiragem de 100 000 exemplares. A probabilidade de que um dos livros seja encadernado incorrectamente é 10^{-4}. Calcule a probabilidade *aproximada* de que o número de livros mal encadernados da tiragem seja

(a) exactamente 5;
(b) pelo menos 4;
(c) não mais do que 2.

22. O número de petroleiros que chegam em cada dia a determinada refinaria é uma variável aleatória com distribuição de *Poisson* de média 2. As atuais instalações do porto podem atender 3 petroleiros por dia; se acontecer que mais de 3 navios pretendam entrar no porto, os excedentes a 3 deverão seguir para outro destino.

(a) Em determinado dia, qual a probabilidade de se ter de mandar petroleiros para outro porto?
(b) Qual o número esperado de petroleiros a chegarem por dia?
(c) Qual o número mais provável de petroleiros a chegarem por dia?
(d) De quanto deverão ser aumentadas as atuais instalações do porto para permitir manobrar todos os petroleiros em 95% dos dias?
(e) Deduza a lei de probabilidade do número de petroleiros a serem *atendidos* por dia.
(f) Qual o número esperado de petroleiros a serem atendidos por dia?

23. O número de acidentes de trabalho, *por mês*, numa obra de construção civil é uma v.a. com distribuição de *Poisson* de valor médio 2.

(a) Determine a probabilidade de não ocorrerem acidentes num determinado mês.
(b) Calcule a probabilidade de ocorrerem pelo menos 6 acidentes em *3 meses*.
(c) Suponha que a obra foi observada durante 6 meses consecutivos. Qual a probabilidade de não ocorrerem acidentes em exactamente 4 meses?

24. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais independentes tais que $X \sim \mathcal{P}(0.2)$ e $Y \sim \mathcal{P}(0.4)$. Determine $\mathrm{P}(X+Y=3)$.

25. Uma máquina eletrónica tem, em média, 2 avarias por mês. Considerando que o número de avarias mensal segue uma distribuição de Poisson, a probabilidade de, num ano, se terem verificado pelo menos 11 avarias é:

    (A) 0.0025 **(B)** 0.0054 **(C)** 1 **(D)** 0.9989

26. O número de defeitos por artigo produzido numa certa linha de produção segue uma distribuição de *Poisson* de valor esperado 0.01. Para serem distribuídos, esses artigos são embalados em caixas de 10 unidades.

    (a) A probabilidade de um qualquer artigo não apresentar defeitos é

    (A) 0.9048 **(B)** 0.9901 **(C)** 0.0952 **(D)** 0.0100

    (b) A probabilidade de, numa caixa, no máximo 1 artigo ser defeituoso é

    (A) 0.9044 **(B)** 0.9957 **(C)** 0.0956 **(D)** 0.0013

27. Na sede de uma empresa, é produzida diariamente uma grande quantidade de peças. A probalilidade de uma peça ter defeitos é 0.01. Antes de enviar a produção para as filiais, o responsável pela linha de produção tem como obrigação efetuar um controlo de qualidade, pelo que inspeciona um lote de 20 peças, extraídas, ao acaso e sem reposição, das que foram produzidas. O responsável inviabiliza o envio se encontrar mais do que duas peças com defeitos nessa amostra.

    (a) Qual é a probabilidade do envio ser viabilizado pelo responsável da linha de produção?

    (b) Qual é o número esperado de peças defeituosas na amostra inspecionada?

    (c) Admita que, na produção da empresa, o número de peças que é necessário inspecionar sucessivamente até serem encontradas duas peças com defeitos é uma variável aleatória Y. Determine a lei de probabilidade da variável aleatória Y.

28. Seja X a v.a. relativa ao número de defeitos encontrados numa unidade de determinado artigo e Y a v.a. que indica o número da fábrica que o produziu. A tabela seguinte representa a função de probabilidade conjunta do vector (X, Y):

Y \ X	0	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

    (a) Determine as leis de probabilidade marginais de X e Y.

    (b) Calcule $P(X=2)$, $P(X \geq 2)$, $P(X \leq Y)$ e $P(Y=3)$.

    (c) Determine $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, Cov (X, Y) e ρ_{XY}. (**Nota:** $\mathrm{E}(Y)=1.5$, $\mathrm{V}(Y)=0.25$).

    (d) O número de defeitos que um artigo apresenta é independente da fábrica que o produziu?

    (e) Sabendo que determinado artigo foi produzido pela fábrica 2, qual a probabilidade de apresentar defeitos?

29. A tabela seguinte indica a função de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y:

X \ Y	-1	0	1
-1	0	p	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

(a) Determine o valor de p, justificando a sua resposta.

(b) Determine as funções de probabilidade marginais de X e Y.

(c) Calcule $P(X = x/Y = 0)$.

(d) Mostre que $cov(X, Y) = 0$ mas as variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

30. Seja $f(x, y) = \frac{x+y}{32}$, $x = 1, 2$ e $y = 1, 2, 3, 4$ a função de probabilidade conjunta do par de variáveis aleatórias (X, Y).

(a) Deduza as funções de probabilidade marginais de X e Y.

(b) Calcule $P(X > Y), P(Y = 2X), P(X + Y = 3), P(X \leq 3 - Y)$, $P(X \geq 1)$ e $P(0 \leq Y \leq 3)$.

(c) Calcule $P(Y = y/X = 2)$.

(d) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique.

31. Numa dada loja de componentes para computadores, as vendas diárias de discos rígidos das marcas 1 e 2, respetivamente X_1 e X_2, têm a seguinte função de probabilidade conjunta:

X_2 \ X_1	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

(a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X_1 e X_2.

(b) Compare o número médio de vendas diárias de discos das duas marcas.

(c) Calcule a probabilidade de, num dia, a marca 1 ser a mais vendida.

(d) Calcule a função de probabilidade de X_2, nos dias em que não há vendas de discos da marca 1.

(e) As vendas diárias de discos das duas marcas são independentes?

32. De um vetor aleatório discreto (X, Y) sabe-se que: X e Y são independentes;

$$X \sim B(2, 0.3); \quad P(Y = y) = \begin{cases} 0.5^y\, 0.5^{1-y} & \text{se} \quad y = 0 \vee y = 1 \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Construa a tabela representativa da função de probabilidade conjunta do vetor (X, Y).

(b) Determine $P(X > Y)$.

33. Seja X a variável aleatória que representa o número total de alunos que frequentaram o horário de atendimento e Y o número de questões/dúvidas, em 3 possíveis, que um aluno não consegue esclarecer até ao dia da frequência. A função de probabilidade conjunta do vetor (X, Y) é representada pela tabela,

Y X	0	1	2	3
5	0.08	0.07	0.02	0.00
10	0.12	0.11	0.06	0.04
20	0.17	0.15	0.1	0.08

(a) Determine as leis marginais de X e Y.

(b) Considere os acontecimentos: $A = \{X = 5\}$, $B = \{X = 10\}$ e $C = \{Y \geq 3\}$.
Calcule e interprete $P(C/A \cup B)$.

(c) **Analise** as seguintes afirmações, fundamentando **sempre** a sua análise em linguagem matemática e apresentando os cálculos efetuados.

i. Mais de 60% dos alunos fica com menos de uma questão por esclarecer.

ii. A probabilidade de um aluno ficar com dúvidas por esclarecer diminui se o número de alunos presentes no horário de atendimento passar de 20 para 5.

iii. Existe uma correlação linear fraca e positiva entre X e Y. ($\mathbf{E(Y) = 1.05}$, $\mathbf{V(Y) = 1.1025}$)

iv. O número de questões que um aluno não consegue esclarecer náo é independente do número de alunos presentes no horário de atendimento.

34. Considere o vetor aleatório (X, Y), em que X representa o número de ocorrências de erro detetadas por um colaborador num determinado teste, e Y representa o tipo de colaborador (0 se o colaborador é não experiente ou 1 se o colaborador é experiente) caracterizado pela seguinte função de probabilidade conjunta.

X Y	0	1	2
0	0.28	0.08	0.04
1	0.18	0.06	0.36

(a) Determine as leis de probabilidade marginal do número de ocorrências de erro detetadas por um colaborador e do tipo de colaborador.

(b) Construa a função de probabilidade do número de ocorrências de erro detetadas por um colaborador sabendo que este é experiente.

(c) Concorda com a afirmação "A probabilidade de serem detetadas 2 ocorrências de erro é igual à probabilidade de um colaborador não ser experiente."? Justifique.

(d) Justifique que existe uma relação linear positiva moderada entre o tipo de colaborador e o número de ocorrências de erro detetadas?

35. Considere o vetor aleatório (X, Y), em que X representa o número de ocorrências de erro detetadas por um colaborador num determinado teste, e Y representa o tipo de colaborador (0 se o colaborador é não experiente ou 1 se o colaborador é experiente) caracterizado pela seguinte função de

probabilidade conjunta

Y \ X	0	1	2	$\sum$
0	0.28	a	0.04	b
1	c	d	e	0.6
$\sum$	0.46	f	0.4	

(a) Determine as leis de probabilidade marginal do número de ocorrências de erro detetadas por um colaborador e do tipo de colaborador.

(b) Determine a probabilidade do colaborador não ser experiente dado que se detetaram ocorrências de erro.

(c) Determine a probabilidade de serem detetadas ocorrências de erro e o trabalhador ser experiente.

(d) Verifique que X e Y não são independentes.

36. Considere o vetor aleatório (X, Y) que representa o número de discos externos das marcas A e B, respetivamente, vendidos diariamente numa loja e que é caracterizado pela seguinte função de probabilidade conjunta.

X \ Y	0	1	2
0	a	0.06	0.04
1	0.09	b	0.01
2	0.05	0.02	0.01

(a) Sabendo que em 80% dos dias não se vendem leitores da marca A, determine o valor das constantes a e b.

(b) Determine as leis de probabilidade marginal do número de discos externos das marcas A e B vendidas diariamente na loja.

(c) Calcule $P(Y = y/X = 2), \forall y \in \mathbb{R}$ e comente o seu significado.

37. Numa determinada região, o número de filhos dos sexos feminino e masculino, por casal, é bem modelado pelas variáveis aleatórias reais X e Y, respetivamente.

A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na forma de tabela, por

X \ Y	0	1	2	3
0	0.15	0.10	0.05	0.02
1	0.10	0.10	0.05	0.10
2	0.09	0.08	0.10	0
3	0.04	0.02	0	0

(a) Determine as leis de probabilidade marginal de X e Y.

(b) Determine a proporção de casais cujo número de filhos do sexo feminino é superior ao número de filhos do sexo masculino.

(c) Sabendo que um casal tem 4 filhos, determine a probabilidade de ter dois filhos do sexo feminino.

(d) Determine a covariância entre X e Y.

(e) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique.

38. Numa fábrica, há três linhas de produção de um artigo (X), sendo que o artigo é classificado quanto ao acabamento (Y), de acordo com a seguinte tabela:

Y X	1	2	Total
1	0.06	b	0.25
2	0.04	c	e
3	a	d	0.4

(a) Sabendo que $P\left(Y=1/X=3\right)=0.125$, complete a tabela.

(b) Sabendo que um artigo foi produzido na linha de produção 1, determine a probabilidade de ter sido classificado quanto ao acabamento com 1.

(c) A classificação média do acabamento do artigo é

(A) 2.00 **(B)** 1.85 **(C)** 2.15 **(D)** Nenhuma das anteriores

Capítulo II - Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade Discretas

1. (a)

x_i	0	1	2	3	c.c
$p(x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	0

(b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{1}{27} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{27} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{19}{27} & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$ (c) 0.296; 0.704

2. (a) $k = \frac{1}{6}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3} & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{8}{9} & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 4 \end{cases}$ (c) 3 (d) 2.1, 1.01

3. (b) $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{se} \quad x = 0 \\ 0.1 & \text{se} \quad x \in \{1, 3, 3.5\} \\ 0.2 & \text{se} \quad x = 2 \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}$ (c) 0.6, 0.4, 0.2, 0.2, 0.1,04 (d) 1.15, 1.7025, 1.3048

   (e) i. 0.8 ii. $E(Y) = 0$; $V(Y) = V(X)$

4. (a) $k = 2$, $m = -1$ (b) -1.75, 55.7 (c) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -2 \\ \frac{3}{8} & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ \frac{5}{8} & \text{se} \quad -1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{8} & \text{se} \quad 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 4 \end{cases}$

   (d) 0, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{6}{8}$, 1

5. (a) $k = \frac{2}{15}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -2 \\ \frac{1}{3} & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ \frac{7}{15} & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ \frac{8}{15} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{10}{15} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$ (c) 0 ; 2.93 (d) 0.5

6. B

7. Ao cuidado do aluno.

8. (a) $X \sim \mathcal{B}(6, 0.25)$ (b) 0.178, 0.4285, 0.0376, 1 (c) 1.5 (d) $X \sim \mathcal{H}(6, 20, 5)$; 0.1291

9. $X \sim \mathcal{B}(3, \frac{2}{3})$

10. (a) $X \sim \mathcal{H}(20, 100, 10)$ (b) 0.095 (c) $\displaystyle\sum_{x=6}^{10} \frac{C_x^{10}\, C_{20-x}^{90}}{C_{20}^{100}}$ (d) 30.290 euros

11. (a) $P(X = x) = C_x^{20}\, (\frac{1}{6})^x\, (\frac{5}{6})^{20-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., 20$ (b) 4.93×10^{-4}

12. B

13. 0.0055 (Hipergeométrica); 0.0055 (aproximação à Binomial)

14. 0.0355

15. (a) 0.3487 (b) 0.2639; 1

16. (a) i. C ii. 10 horas (b) 0.7790

17. C

18. (a) 0.006 (b) 0.0345

19. (a) i. 0.1126 ii. 0.0293 iii. 0.9972 iv. 0.5×10^{-4} (b) 0.0007

20. (a) 0.1847 (b) 0.9967 (c) 0.00421

21. (a) 0.0378 (b) 0.9897 (c) 0.0028

22. (a) 0.1429 (b) 2 (c) 1 ou 2 (d) $x = 4$ (mais um petroleiro)

(e)

y_i	0	1	2	3	c.c
$p(y_i)$	0.1353	0.2707	0.2707	0.3233	0

(f) 1.782

23. (a) 0.1353 (b) 0.5543 (c) 0.0038

24. 0.0198

25. D

26. (a) B (b) D

27. (a) 0.9990 (b) 0.02 (c) $S = \{2, 3, \dots\}$ e $P(Y = k) = (k-1)(0.99)^{k-2}(0.01)^2$

28. (a)

x_i	0	1	2	3	c.c
$p(x_i)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	0

y_i	1	2	c.c
$p(y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(b) $\frac{5}{16}, \frac{11}{16}, \frac{7}{16}, 0$ (c) $\frac{30}{16}$, $\frac{79}{64}$, 0.125, 0.225

(d) Não (e) 0.875

29. (a) $p = \frac{1}{4}$ (b)

x_i	-1	0	1	c.c
$p(x_i)$	0.25	0.5	0.25	0

y_i	-1	0	1	c.c
$p(y_i)$	0.25	0.5	0.25	0

(c)

x_i	-1	0	1	c.c
$P(X = x_i/Y = 0)$	0.5	0	0.5	0

30. (a)

x_i	1	2	c.c
$p(x_i)$	$\frac{14}{32}$	$\frac{18}{32}$	0

y_i	1	2	3	4	c.c
$p(y_i)$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$	0

(b) $\frac{3}{32}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{6}{32}$, $\frac{8}{32}$, 1, $\frac{21}{32}$

(c)

y_i	1	2	3	4	c.c
$P(Y = y_i/X = 2)$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$	0

(d)Não

31. (a)

x_{1i}	0	1	2	c.c
$p(x_{1i})$	0.2	0.65	0.15	0

x_{2i}	0	1	2	c.c
$p(x_{2i})$	0.5	0.36	0.14	0

(b) $0.95; 0.64$

(c) 0.39 (d)

x	0	1	2	c.c
$p(x)$	0.6	0.25	0.15	0

(e) Não

32. (a)

Y / X	0	1
0	0.245	0.245
1	0.21	0.21
2	0.045	0.045

(b) 0.3

33. (a)

x	5	10	20	c.c
$p(x)$	0.17	0.33	0.5	0

y	0	1	2	3	c.c
$p(y)$	0.37	0.33	0.18	0.12	0

(b) 0.08;

(c) i. P.V.; ii. P.V.; iii. P.F.; iv. P.F.

34. (a)

x	0	1	2	c.c
$p(x)$	0.46	0.14	0.4	0

y	0	1	c.c
$p(y)$	0.4	0.6	0

(b) $P(X = x/Y = 1) = \begin{cases} 0.3 & , \quad x = 0 \\ 0.1 & , \quad x = 1 \\ 0.6 & , \quad x = 2 \\ 0 & , \quad x \notin \{0, 1, 2\} \end{cases}$

(c) Sim, ambas são iguais a 0.4; (d) $\rho = 0.4764 \in [0.3, 0.7]$

35. (a)

x	0	1	2	c.c
$p(x)$	0.46	0.14	0.4	0

y	0	1	c.c
$p(y)$	0.4	0.6	0

(b) 0.2222;
(c) 0.4200;
(d) ...

36. (a) $a = 0.7$; $b = 0.02$;
(b)

x	0	1	2	c.c
$p(x)$	0.8	0.12	0.08	0

y	0	1	2	c.c
$p(y)$	0.84	0.1	0.06	0

(c) $P(Y = y/X = 2) = \begin{cases} \frac{5}{8} & , \quad y = 0 \\ \frac{1}{4} & , \quad y = 1 \\ \frac{1}{8} & , \quad y = 2 \\ 0 & , \quad y \notin \{0, 1, 2\} \end{cases}$

37. (a)

x	0	1	2	3	c.c
$p(x)$	0.32	0.35	0.277	0.06	0

y	0	1	2	3	c.c
$p(y)$	0.38	0.3	0.2	0.12	0

(b) 0.33;

(c) 0.4545; (d) -0.0142; (e) Não, pois a $cov(X, Y) \neq 0$

38. (a) $a = 0.05$; $b = 0.19$; $c = 0.31$: $d = 0.35$; $e = 0.35$; (b) 0.24 (c) B