Métodos Estatísticos

Deolinda M. L. D. Rasteiro

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra - ISEC
Departamento de Física e Matemática

Conteúdos

1. Probabilidades
   - Experiência aleatória, espaço de resultados, acontecimentos
   - Definição de probabilidade
   - Probabilidade condicionada
   - Acontecimentos independentes
   - Probabilidade total. Teorema de Bayes
2. Exercícios Complementares

Probabilidades

Definição:

Experiência aleatória é um qualquer processo ou conjunto de circunstâncias capaz de produzir pelo menos dois resultados, com incerteza quanto ao que ocorrerá.

Características principais:

- Possibilidade de repetição;
- Carácter imprevisível;
- Apresentam regularidade estatística.

Definição:

Espaço de resultados ou *espaço fundamental* é o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência aleatória.
Denota-se por Ω.

Probabilidades

Definições:

Um *acontecimento* (ou *evento*) é um subconjunto de Ω.
Acontecimento elementar é um subconjunto singular de Ω.

- Ω é denominado *acontecimento certo* (realiza-se sempre);
- $\emptyset$ é denominado *acontecimento impossível*;
- $\overline{A}$ é denominado *acontecimento complementar* de A.

Probabilidades:

Operações e relações entre acontecimentos:

1. $A \subset B$: a realização de A implica a realização de B;
2. $A = B$: $A \subset B$ e $B \subset A$; (A e B dizem-se idênticos)
3. $A \cap B$ (Acontecimento Interseção): A e B realizam-se conjuntamente;

   • Se $A \cap B = \emptyset$ então A e B dizem-se **mutuamente exclusivos**, **disjuntos** ou **incompatíveis**. Em comum
4. $A \cup B$ (Acontecimento Reunião): A ou B realizam-se (o resultado da experiência aleatória pertence a pelo menos um dos conjuntos); Soma dos dois
5. $A \setminus B$ (Acontecimento Diferença): A realiza-se e B não se realiza; Não tem em comum

Probabilidades

Propriedades:

1. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
2. $A \cup \overline{A} = \Omega$
3. Comutativa
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$
4. Associativa
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Probabilidades

Propriedades:

5. Distributiva

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6. $A \cap \Omega = A; \quad A \cup \emptyset = A$
7. $A \cup \Omega = \Omega; \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
8. $A \subset B \;\Rightarrow\; A \cup B = B$ e $A \cap B = A$
9. Leis de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Definição [Clássica]:

Admita-se que Ω é um espaço finito e que todos os acontecimentos elementares são equipossíveis. A probabilidade de um acontecimento (qualquer subconjunto de Ω) A se realizar é dada por

$$P(A) = \frac{\sharp A}{\sharp \Omega}.$$

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall A \in \Omega,\ 0 \leq P(A) \leq 1.$

Definição [Axiomática]:

Seja Ω um espaço de resultados e A e A_i, $i = 1, 2, \ldots$, acontecimentos quaisquer de Ω.
Uma probabilidade é uma aplicação P que satisfaz os seguintes axiomas:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) Para o acontecimento reunião $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ de Ω,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i), \quad \text{se } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

Nota:

A partir de Ω é possível formar várias famílias de subconjuntos deste espaço (**pensemos no caso de Ω não ser finito**). A definição axiomática de probabilidade, definida anteriormente no domínio Ω, extende-se à família (chamemos-lhe $\mathcal{F}$) de todos os subconjuntos de Ω, que verifica:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) Se $A \in \mathcal{F}$ então $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(3) Se $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Propriedades de uma probabilidade:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Se $A_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

   Caso particular:

   Se A e $B \in \Omega$ e $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3. Se A e $B \in \Omega$, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. Se A e $B \in \Omega$ e $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
5. $A \in \Omega$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Propriedades de uma probabilidade:

6. $A, B \in \Omega, \; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7. Se $A_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

8. Se $A_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, e A_i é uma sucessão monótona,

$$P\left(\lim_{i \to +\infty} A_i\right) = \lim_{i \to +\infty} P(A_i).$$

Probabilidade condicionada:

Definição:

Sejam A e B acontecimentos de Ω com $P(B) > 0$. A probabilidade de A *condicionada por* B, $P(A/B)$, é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Probabilidade condicionada:

Teorema [probabilidade composta]:

Se A e B são acontecimentos de Ω tais que $P(A)P(B) > 0$, então

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A).$$

Generalização:

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos de um mesmo espaço Ω, tais que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) > 0$. Então

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)...$$

$$P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Acontecimentos independentes:

Definição [Independência]:

Os acontecimentos A e B dizem-se *independentes* se e só se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Consequência:

Sejam A e B acontecimentos de Ω tais que $P(A)P(B) > 0$. A e B são independentes se e só se

$$P(A/B) = P(A).$$

Nota:

Não confundir acontecimentos **disjuntos** com acontecimentos **independentes**.

Probabilidade total. Teorema de Bayes:

Teorema [probabilidade total]:

Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \emptyset, \quad i \neq j \qquad (\textit{disjuntos}) \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \Omega \qquad\qquad\quad (\textit{exaustivos}) \end{aligned}$$

Seja B um acontecimento qualquer. Tem-se

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i).$$

Probabilidade total. Teorema de Bayes

Teorema [Bayes]:

Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \emptyset, \quad i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \Omega. \end{aligned}$$

Seja B um acontecimento qualquer, com $B \neq \emptyset$. Tem-se

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)}, \; i = 2, ..., n.$$

Exercícios:

Uma companhia de seguros classifica os seus segurados em três categorias: baixo risco, risco médio e risco elevado. Os seus registos indicam que a probabilidade de um segurado se envolver em pelo menos um acidente, por ano, é 0.01, 0.10, e 0.25 se o segurado pertence à categoria de baixo, médio ou risco elevado, respectivamente. Admita que a probabilidade de um segurado ser classificado na categoria de baixo risco é de 0.1 enquanto que na de risco médio é 0.6.

1. Qual a probabilidade de, num ano, um dos segurados tenha pelo menos um acidente?
2. Sabendo que um dos segurados teve pelo menos um acidente no último ano, qual a probabilidade de pertencer à categoria de risco elevado?
3. Sabendo que um dos segurados não teve acidentes no último ano, qual a probabilidade dele pertencer à categoria de risco médio?

Exercícios:

Numa fábrica as máquinas I, II e III produzem peças do mesmo comprimento na proporção de 35:25:40. Sabe-se que 2% das peças produzidas pela máquina I são defeituosas e 1% das peças produzidas pela máquina II são defeituosas. Sabe-se ainda que 1.2% das peças são produzidas pela máquina III e são defeituosas.

1. Se for escolhida aleatoriamente uma peça da produção da fábrica, qual a probabilidade de ser defeituosa?
2. Se for selecionada uma peça defeituosa, qual a probabilidade de ter sido produzida pela máquina II?