Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

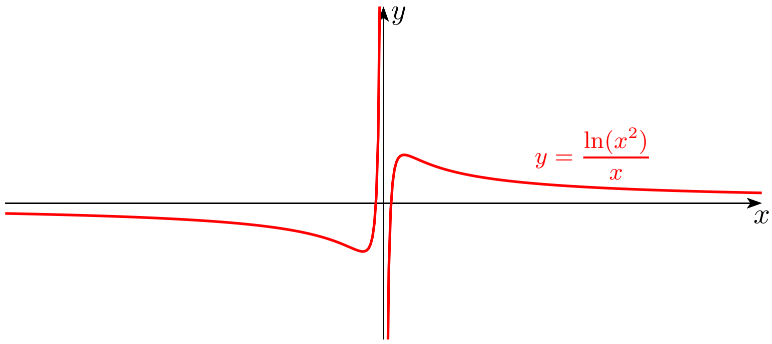
Teste 2 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

17 de fevereiro de 2021 Duração: 1h15m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x}$, com o gráfico seguinte.



(a) Classifique, justificando, os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx$.

(b) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.

[2.0 *val.*] 2. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sec^3(x)}\,dx$.

(a) Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas.

(b) Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação por partes.

[2.0 *val.*] 3. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x\left(1+\ln^2(x)\right)}\,dx$.

(a) Calcule a primitiva, recorrendo apenas às regras de primitivação imediata.

(b) Calcule a primitiva, recorrendo mudança de variável $\boxed{t = \ln(x)}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

[2.0 *val.*] 4. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$.

(a) Calcule a primitiva, sem decompor a função em frações simples.

(b) Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação de frações racionais.

(c) Mostre que as soluções das alíneas anteriores constituem a mesma família de funções.

[1.0 *val.*] 5. Utilize a definição de convergência de uma série numérica para verificar se a série seguinte é convergente e, em caso afirmativo, calcule a respectiva soma.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{3^n}$$

1. (a) Começamos por notar que $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f(x)$ é contínua no seu domínio.

   (I) $I = [0,\, 1]$ é limitado mas não está contido em D_f, porque $x = 0$ não pertence a D_f. Uma vez que o limite
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$
não é finito, então a função $f(x)$ é ilimitada em $I = [0,\, 1]$. Logo o integral é impróprio de 2ªespécie (I é limitado mas $f(x)$ é ilimitada).

   (II) $I = [1,\, +\infty[$ não é limitado mas está contido em D_f. Como $f(x)$ é contínua em I, então o integral é impróprio de 1ª espécie (I é ilimitado mas $f(x)$ é limitada em intervalos fechados e limitados).

   (III) Uma vez que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}\, dx = \int_0^{1} \frac{\ln(x^2)}{x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}\, dx\,,$$
atendendo aos integrais (I) e (II), concluímos que (III) é um integral impróprio de 3Âª espécie.

   (b) O integral impróprio de 1ª espécie é (I) e tem-se
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2} \int_1^{t} \underbrace{\frac{2}{x}\, \ln(x^2)}_{R2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{\ln^2(x^2)}{2}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{4} \ln^2(t^2) = +\infty\,,$$
pelo que o integral é divergente.

2. (a) Tendo em conta a definição de secante e recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas (página 7 das Tabelas de Matemática), tem-se
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sec^3(x)}\, dx &= \int \cos^3(x)\, \sin^{\frac{1}{2}}(x)\, dx \\
&= \int \cos(x) \cos^2(x)\, \sin^{\frac{1}{2}}(x)\, dx \\
&= \int \cos(x)\, \left(1 - \sin^2(x)\right)\, \sin^{\frac{1}{2}}(x)\, dx \\
&= \int \cos(x) \left(\sin^{\frac{1}{2}}(x) - \sin^{\frac{5}{2}}(x)\right) dx \\
&= \int \underbrace{\cos(x)\, \sin^{\frac{1}{2}}(x)}_{R2}\, dx - \int \underbrace{\cos(x) \sin^{\frac{5}{2}}(x)}_{R2}\, dx \\
&= \frac{\sin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}} - \frac{\sin^{\frac{7}{2}}(x)}{\frac{7}{2}}\, (x) + c \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3(x)} - \frac{2}{7} \sqrt{\sin^7(x)} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Tendo em conta a definição de secante e recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sec^3(x)}\,dx &= \int \cos^3(x)\,\sin^{\frac{1}{2}}(x)\,dx \\ &= \int \underbrace{\cos^2(x)}_{v}\,\underbrace{\cos(x)\sin^{\frac{1}{2}}(x)}_{u}\,dx\end{aligned}$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet \displaystyle\int \cos(x)\sin^{\frac{1}{2}}(x)\,dx = \frac{\sin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}}+c \\ \bullet \big(\cos^2(x)\big)' = -2\sin(x)\cos(x)\end{array}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}}\cos^2(x) - \int \frac{\sin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}}\cdot\big(-2\sin(x)\cos(x)\big)\,dx \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3(x)}\,\cos^2(x) + \frac{4}{3}\int \underbrace{\sin^{\frac{5}{2}}(x)\cos(x)}_{R2}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3(x)}\,\cos^2(x) + \frac{4}{3}\frac{\sin^{\frac{7}{2}}(x)}{\frac{7}{2}}+c \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3(x)}\,\cos^2(x) + \frac{8}{21}\sqrt{\sin^7(x)}+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

3. (a) Recorrendo à regra 5 das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x\,(1+\ln^2(x))}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{x}\,\ln(x)}{1+\ln^2(x)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2\,\frac{1}{x}\,\ln(x)}{1+\ln^2(x)}}_{R5}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\ln^2(x)\Big)+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à mudança de variável indicada,

$$\text{m.v.}\ \boxed{t=\ln(x)}\,, \qquad x\in\mathbb{R}^+$$

tem-se

$$x=e^t \quad\rightarrow\quad x=e^t$$

pelo que

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x\,(1+\ln^2(x))}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{t}{e^t\,(1+t^2)}\,e^t\,dt \\ &= \int \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2\,t}{1+t^2}}_{R5}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+c \\ &\overset{\text{m.v}}{=} \frac{1}{2}\ln\left(1+\ln^2(x)\right)+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. (a) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{(x-1)^{-2}}_{u}\,dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \int (x-1)^{-2}\,dx = \dfrac{(x-1)^{-1}}{-1}+c \\ \bullet\ (x)' = 1 \end{array}}$$

$$= -\frac{1}{x-1}\,x - \int -\frac{1}{x-1}\cdot 1\,dx$$

$$= -\frac{x}{x-1} + \int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx$$

$$= -\frac{x}{x-1} + \ln|x-1| + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

(b) Uma vez que a fracção é própria (grau do numerador $=1$ é menor do que o grau do denominador $=2$), então não é possível realizar a divisão dos polinómios. Vamos então decompor a função em frações simples (página 8 das Tabelas de Matemática).

- factorização do denominador:

$$(x-1)^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1 \vee x=1\,.$$

Então

$$(x-1)^2 = (x-1)(x-1).$$

- decomposição da fracção:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \underbrace{\frac{A_1}{x-1}}_{\cdot(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A_1\,(x-1)+A_2}{(x-1)(x-1)}\,.$$

Da igualdade entre os numeradores resulta que

$$\begin{array}{r|rcl} & x & = & A_1\,(x-1)+A_2 \\ \hline x=1 & 1 & = & 0+A_2 \\ x=0 & 0 & = & -A_1+A_2 \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A_2 = 1 \\ A_1 = A_2 = 1 \end{array}\right.$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é definida por

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,,$$

pelo que

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx + \int \underbrace{(x-1)^{-2}}_{R2}\,dx$$

$$= \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

(c) Tendo em conta que Uma vez que a fracção é imprópria (grau do numerador $=2=$ grau do denominador), começamos por efectuar a divisão dos dois polinómios:

$$\begin{array}{rr|l} -x & & x-1 \\ \cline{3-3} -(\,-x & +1\,) & -1 \\ \cline{1-2} & -1 & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{x}{x-1} + \ln|x-1| + c\,, \quad \text{solução de (a)} \\
= \;& -1 - \frac{1}{x-1} + \ln|x-1| + c \\
= \;& -\frac{1}{x-1} + \ln|x-1| + \underbrace{c-1}_{\text{constante}}\,, \quad \text{solução de (b)}
\end{aligned}
$$

5. Comecemos por explicitar os primeiros termos da série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{3^n} \;=\; \frac{6}{3} + \frac{6}{9} + \frac{6}{27} + \frac{6}{81} + \cdots$$

Uma vez que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; \frac{\frac{6}{3^{n+1}}}{\frac{6}{3^n}} \;=\; \frac{6}{3^{n+1}}\,\frac{3^n}{6} \;=\; \frac{1}{3}$$

é constante, então a série é geométrica de razão $R = \frac{1}{3}$. Como $|R| = \frac{1}{3}$ é menor do que 1, então podemos já afirmar que a série é convergente. Vamos confirmar este facto recorrendo à definição de convergência de uma série. Uma vez que

$$S_n \;=\; \frac{6}{3} + \frac{6}{9} + \frac{6}{27} + \frac{6}{81} + \cdots + \frac{6}{3^n} \;=\; 2\,\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}} \;=\; 2\,\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \;=\; 3\left(1 - \frac{1}{3^n}\right),$$

então

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} 3\left(1 - \cancel{\frac{1}{3^n}}^{\,0}\right) \;=\; 3$$

e portanto a série é convergente e tem soma 3.