Lições de Análise Matemática I: teoria e exemplos

Licenciatura em Engenharia Informática

João Ricardo Branco
DFM - ISEC • 2023-24

Para todos os meus alunos, com a esperança os ajude a ser ainda melhores estudantes no presente, para que possam construir uma melhor sociedade no futuro.
João Ricardo Branco, Setembro de 2023.

Este texto não foi escrito ao abrigo do novo Acordo Ortográfico.

Índice

Capítulo 1

Funções

1.1 Funções reais de variável real

Uma **função** f é uma lei que a cada elemento x de um conjunto A faz corresponder exactamente um elemento $f(x)$ de um conjunto B. Esquematicamente, uma função pode ser representada por

$$\begin{array}{rcl} f: A & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

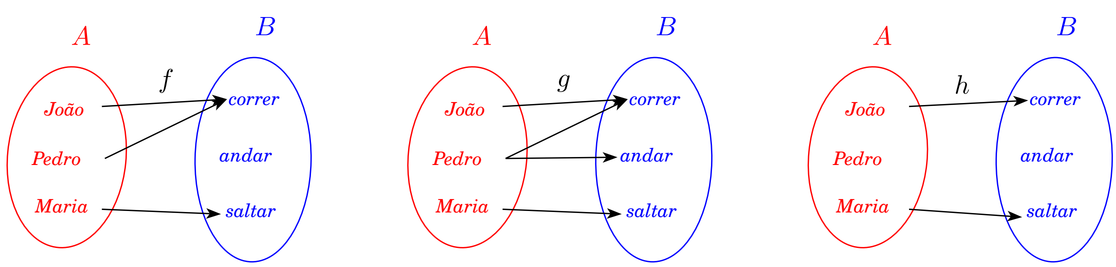
O conjunto A é designado o **domínio** da função e o conjunto B **conjunto de chegada**. Chama-se **contradomínio** (ou conjunto imagem) de f ao conjunto $f(A)$ definido por

$$f(A) = \{y \in B : \quad y = f(x),\ x \in A\}.$$

Quando A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ diz-se que f é uma **função real de variável real** e representa-se por

$$f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemplo 1.1. *Relativamente às correspondências da figura seguinte,*



f é uma função (porque foi atribuída exactamente uma tarefa a cada uma das pessoas do domínio), mas g não é uma função (porque foi atribuída mais do que uma tarefa ao Pedro) e h também não é uma função (porque não foi atribuída qualquer tarefa ao Pedro).

Observação 1.1. *Quando o domínio da função não é dado, assume-se que o mesmo é definido pelo* <u>*maior subconjunto*</u> *de $\mathbb{R}$ no qual a expressão algébrica $f(x)$ tem significado. Os casos mais relevantes,* *que habitualmente impõem restrições ao domínio, são aqueles em que a expressão algébrica envolve quocientes, raízes de índice par ou logaritmos:*

1. $\dfrac{\bullet}{\blacksquare}$, $D = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare \neq 0\}$ *Nota: o numerador não impõe qualquer restrição ao domínio!*

2. $\sqrt[n]{\blacksquare}$, n *par*, $D = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare \geq 0\}$

3. $\log_a(\blacksquare)$, $a > 0$, $D = \{x \in \mathbb{R} : \blacksquare > 0\}$

4. $\arcsin(\blacksquare)$ *e* $\arccos(\blacksquare)$, $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \blacksquare \leq 1\}$

A notação $\{x \in \mathbb{R} :$ *condição*$\}$ *significa que* x *é um número real que obedece à condição apresentada. Os casos referentes ao logaritmo e às funções trigonométricas inversas serão desenvolvidos em secções posteriores.*

Exemplo 1.2.

1. *O domínio da função* $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x-3}$ *é dado por*

$$D = \{x \in \mathbb{R} :\ x - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

2. *A função* $f(x) = \sqrt{x-3}$ *tem domínio*

$$D = \{x \in \mathbb{R} :\ x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 3\} = [3, +\infty[.$$

3. *O domínio da função* $f(x) = \sqrt[5]{x-3}$ *é* $D = \mathbb{R}$.

4. *A função* $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \sqrt{x-3}$ *tem domínio dado por*

$$D = \{x \in \mathbb{R} :\ x - 3 \neq 0 \ \wedge\ x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 3 \ \wedge\ x \geq 3\} =]3, +\infty[.$$

5. *O domínio da função* $f(x) = \ln(x-3)$ *é*

$$D = \{x \in \mathbb{R} :\ x - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 3\} =]3, +\infty[.$$

1.1.1 Funções e curvas de referência

No que se segue vamos fazer uma revisão de algumas funções, que servirão de referência para estudos posteriores.

Tipo de função	Expressão analítica
constante	$y = a_0$
afim	$y = a_0 + a_1 x$
quadrática	$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
polinomial	$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$
trigonométrica	$y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = \mathrm{tg}\,(x)$ etc.
exponencial	$y = a^x$
logarítmica	$y = \log_a(x)$

Também é importante saber trabalhar com algumas variantes das funções anteriores, tais como as funções definidas por ramos

$$f(x) = \begin{cases} \text{expressão 1} & , \text{ condição 1} \\ \text{expressão 2} & , \text{ condição 2} \\ \dots & \\ \text{expressão n} & , \text{ condição n} \end{cases}$$

e a função módulo

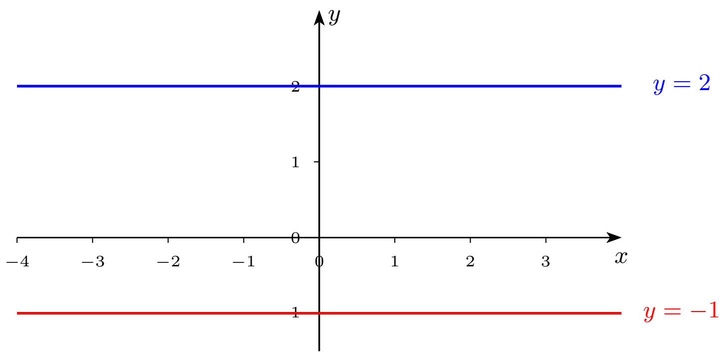
$$|\text{expressão}| = \begin{cases} -\text{expressão} & , \text{ se} \quad \text{expressão} < 0 \\ \text{expressão} & , \text{ se} \quad \text{expressão} \geq 0 \end{cases}.$$

Faremos ainda uma breve incursão nas circunferências de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio R (que não são funções!), cuja equação reduzida é dada por

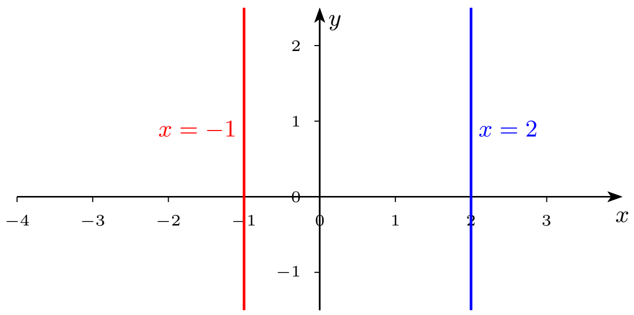
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$

Função constante

Uma função constante é uma função com a forma $y = a_0$, com $a_0 \in \mathbb{R}$. Graficamente, estas funções correspondem a rectas horizontais, como é ilustrado na figura seguinte.



Observação 1.2. *As curvas correspondentes a rectas verticais têm expressão $x = a_0$, com $a_0 \in \mathbb{R}$, conforme a figura seguinte.*



Estas curvas não definem funções, uma vez que o objecto $x = a_0$ tem mais do que uma imagem!

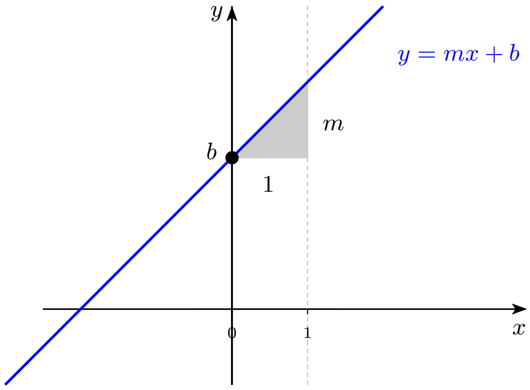
Função afim

Uma função afim é definida por um polinómio de grau um, $y = a_1x + a_0$, com $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Graficamente estas funções correspondem a rectas e a forma habitualmente utilizada é $y = mx + b$, onde m

representa o declive da recta e b corresponde à ordenada na origem. Quando $m = 0$ as rectas correspondem a rectas horizontais, já identificadas no caso anterior. O declive m corresponde à variação em y quando x aumenta uma unidade pelo que, por semelhança de triângulos, tem-se

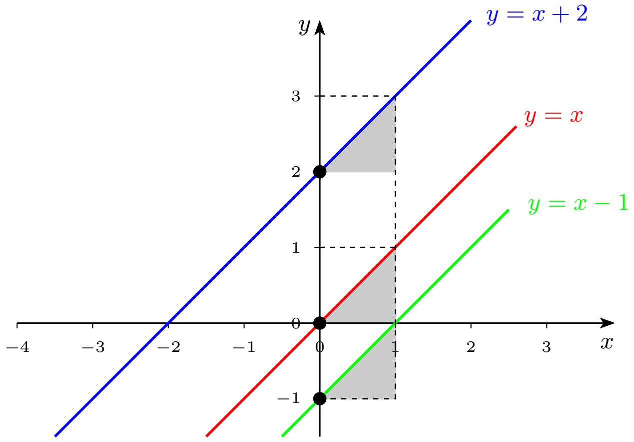
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

onde $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são dois quaisquer pontos da recta.

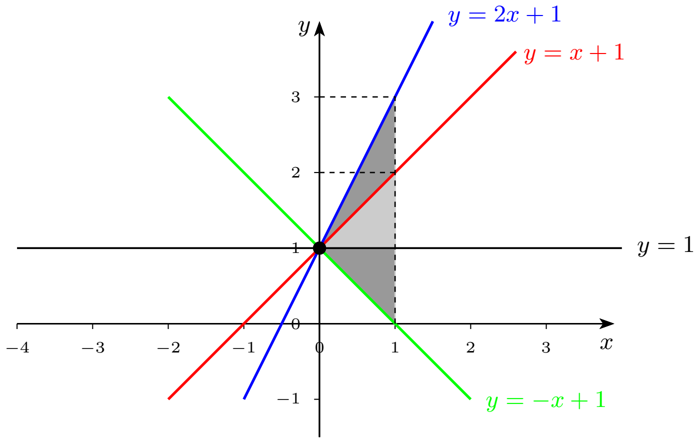


Note-se que para representar graficamente uma recta, basta determinar dois dos seus pontos.

Na figura seguinte estão representadas três rectas com o mesmo declive ($m = 1$) e diferentes ordenadas na origem.



Na figura seguinte estão representadas três rectas com a mesma ordenada na origem ($b = 1$) e diferentes declives.

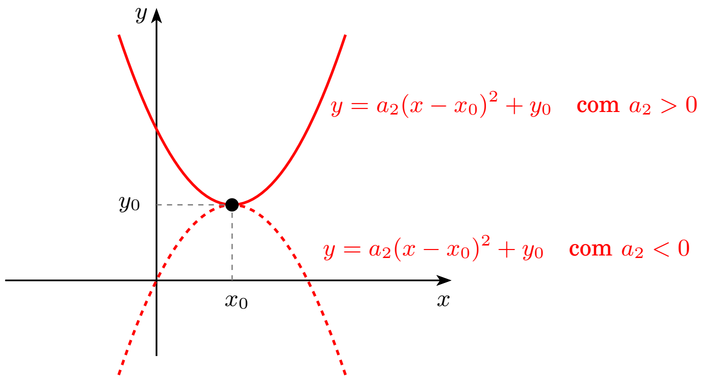


Função quadrática

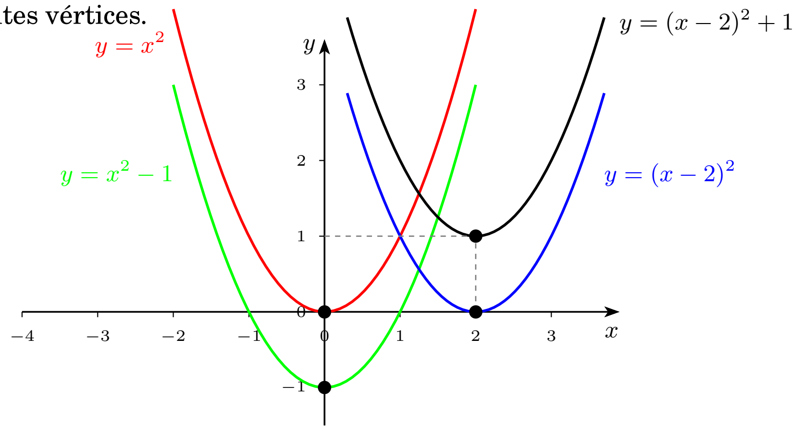
Uma função quadrática é definida por um polinómio de grau 2, $y = a_2x^2+a_1x+a_0$, com $a_2,\, a_1,\, a_0 \in \mathbb{R}$. Graficamente estas funções correspondem a parábolas. Completando o quadrado, é possível reescrever a equação na forma

$$y \;=\; a_2(x-x_0)^2 + y_0 \,,$$

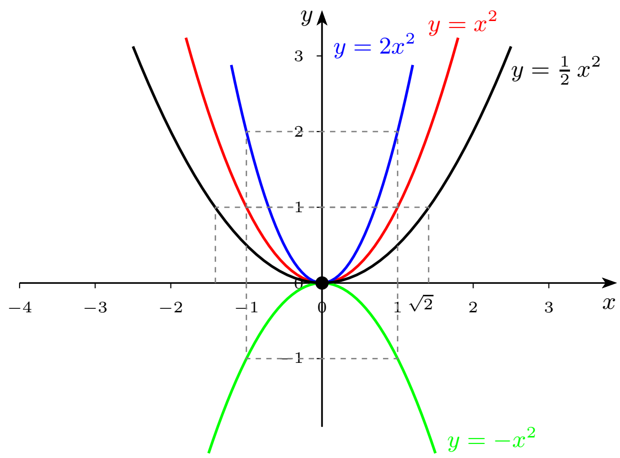
o que permite evidenciar o vértice da parábola, $V = (x_0, y_0)$. O sinal de a_2 permite identificar o sentido da concavidade,tendo a forma $\bigcup$ quando a_2 é positivo e a forma $\bigcap$ quando a_2 é negativo, conforme ilustrado na figura seguinte.



Na figura seguinte representamos parábolas com o mesmo valor do coeficiente associado ao termo x^2 $(a_2 = 1)$ e diferentes vértices.



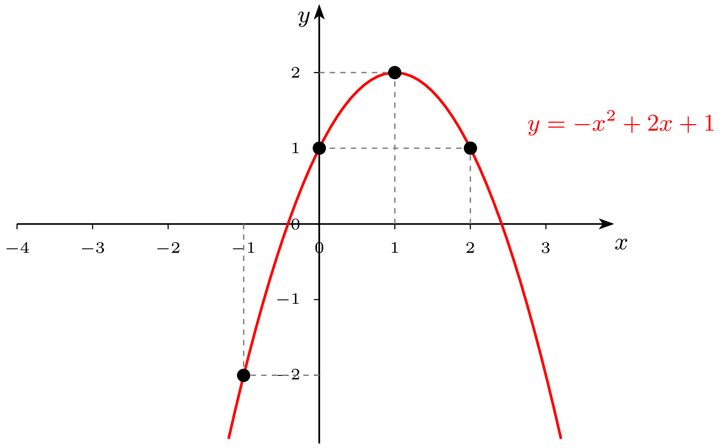
O coeficiente a_2 associado ao termo x^2 influencia a abertura da parábola e o sentido da concavidade, conforme ilustrado na figura seguinte para parábolas com o mesmo vértice $V(0,0)$.



Exemplo 1.3. *Existem várias técnicas que podem servir de suporte à representação gráfica de uma parábola, como sejam a determinação do vértice, o sinal do coeficiente de* x^2 *(que determina o sentido da concavidade) ou a determinação dos zeros (quando existem!). Note-se, porém, que essas técnicas são facultativas, pois basta considerar um conjunto de (pelo menos) três pontos para obter um esboço da função. Por exemplo, relativamente à parábola* $y = -x^2 + 2x + 1$*, se considerarmos o conjunto de pontos*

x	$y = -x^2 + 2x + 1$
-1	-2
0	1
1	2
2	1

permite intuir o gráfico da parábola, conforme ilustrado na figura seguinte.



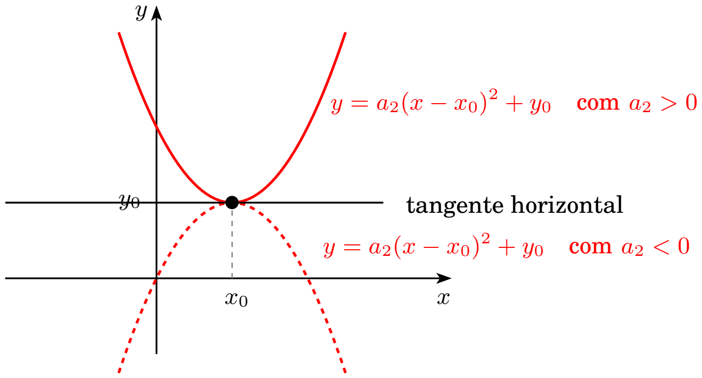
A representação anterior permite intuir a posição do vértice $V(1,2)$ *e até a posição relativa dos zeros. Porém, acima de tudo, pretende-se evidenciar que para representar a parábola não é necessário recorrer a nenhuma técnica específica como, por exemplo, reescrever a equação na forma reduzida. Logicamente que essas técnicas são possíveis e bastante eficientes, mas têm a desvantagem de serem regras "de alfaiate", na medida em que só são válidas para este tipo de funções! Neste texto daremos preferência a técnicas de "pronto a vestir", por serem mais flexíveis e adaptáveis a diversos tipos de funções. Ainda assim, no que se segue, vamos ilustrar algumas dessas técnicas, recorrendo ao exemplo anterior.*

Para reescrever a equação na forma reduzida é necessário complementar o quadrado referente a $a_2(x - x_0)^2$ *, isto é,* $a_2(x^2 - 2xx_0 + x_0^2)$*. Então,*

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 2x + 1 \\
&= -(\underbrace{x^2 - 2x}_{x^2 - 2xx_0} - 1)\,, \quad 2xx_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1 \\
&= -(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{x^2 - 2xx_0 + x_0^2} - 1 - 1) \\
&= -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 1 \\
&= \underbrace{-(x-1)^2 + 2}_{V(1,2)}\,,
\end{aligned}
$$

A forma reduzida permite, em particular, evidenciar as coordenadas do vértice $V(1,2)$ *da parábola.*

A manipulação algébrica necessária para evidenciar o quadrado não é trivial, mas existem outras formas de identificar o vértice. Uma delas consiste em determinar o ponto da parábola que tem derivada nula, uma vez que nesse ponto a tangente ao gráfico é horizontal, conforme ilustrado na figura seguinte.



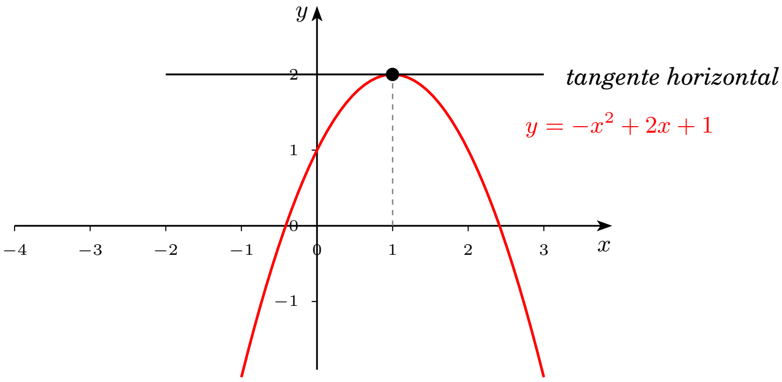
Exemplo 1.4. *Aplicando esta técnica ao exemplo anterior, tem-se*

$$y' = -2x + 2\,,$$

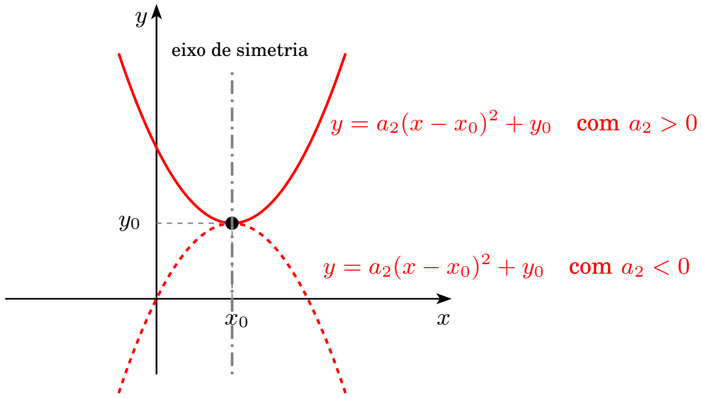
pelo que

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

e, portanto, o vértice tem coordenadas $V(1, f(1)) = (1, 2)$.



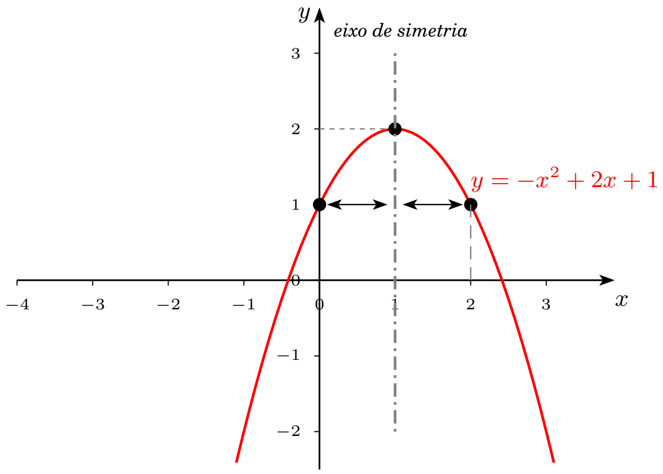
Outra forma, mais empírica, de determinar as coordenadas do vértice consiste em tentar determinar duas abcissas que tenham a mesma ordenada. Determinados dois pontos nessas condições, a abcissa do vértice corresponde à média das abcissas desses dois pontos, pois o vértice marca o eixo de simetria da parábola.



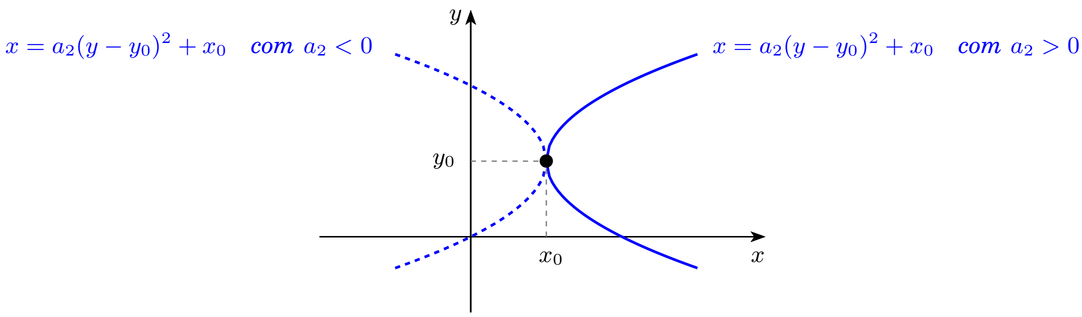
Exemplo 1.5. *Regressemos ao exemplo da parábola* $y = -x^2 + 2x + 1$. *Recordamos que obter a representação gráfica da parábola, recorremos aos pontos*

x	$y = -x^2 + 2x + 1$
-1	-2
0	$\boxed{1}$
1	2
2	$\boxed{1}$

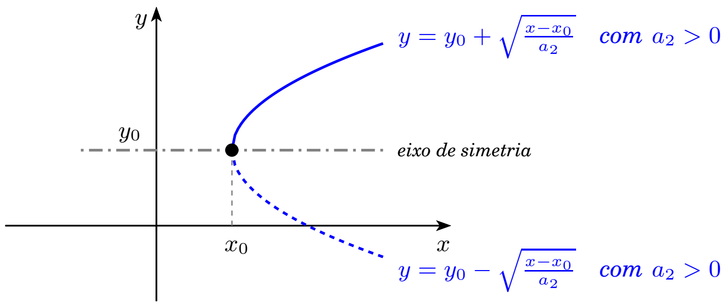
Uma vez que os pontos de abcissas $x = 0$ *e* $x = 2$ *têm a mesma ordenada, então o vértice da parábola tem abcissa dada por* $x = \frac{0+2}{2} = 1$, *o valor médio das abcissas dos pontos anteriores. Logo o vértice é dado por* $V(1, f(1)) = (1, 2)$.



Observação 1.3. *As parábolas também podem ter concavidade* $\subset$ *ou* $\supset$. *Nesse caso a equação é definida em função da variável* y *e tem a forma* $x = a_2y^2 + a_1y + a_0$, *com* $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. *Todo a análise que foi apresentada anteriormente, para as parábolas que são função da variável* x, *é generalizável para as parábolas que são função da variável* y. *Por exemplo, o sinal de* a_2 *continua a definir o sentido da concavidade, tendo a forma* $\subset$ *quando* a_2 *é positivo e a forma* $\supset$ *quando* a_2 *é negativo, conforme ilustrado na figura seguinte.*



Estas parábolas não definem funções de x, *pois existem abcissas com duas imagens, mas podemos considerar que a parábola define duas funções, uma referente à parte superior e outra referente à parte inferior.*

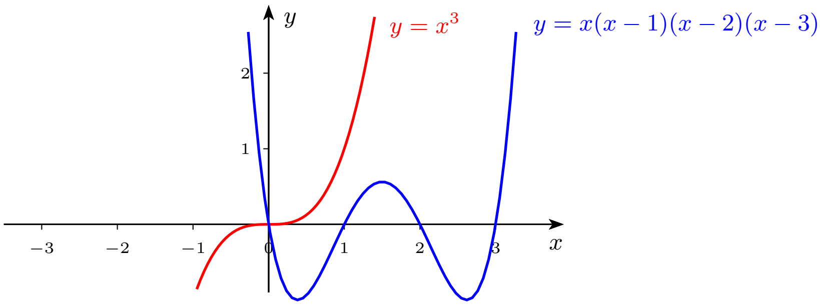


Função polinomial

Uma função polinomial é definida por um combinação linear de potências inteiras e não negativas de x, ou seja, tem a forma $y = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_n, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Quanto maior for o grau n do polinómio (a função constante é um polinómio de grau zero, a função afim é um polinómio de grau um e a parábola é um polinómio de grau dois) mais concavidades pode apresentar o gráfico e maior é o carácter oscilatório do mesmo. Por exemplo, o gráfico de uma parábola apresenta uma concavidade, o gráfico de uma função cúbica apresenta duas concavidades distintas e o gráfico de um polinómio de grau quatro pode apresentar até três concavidades.

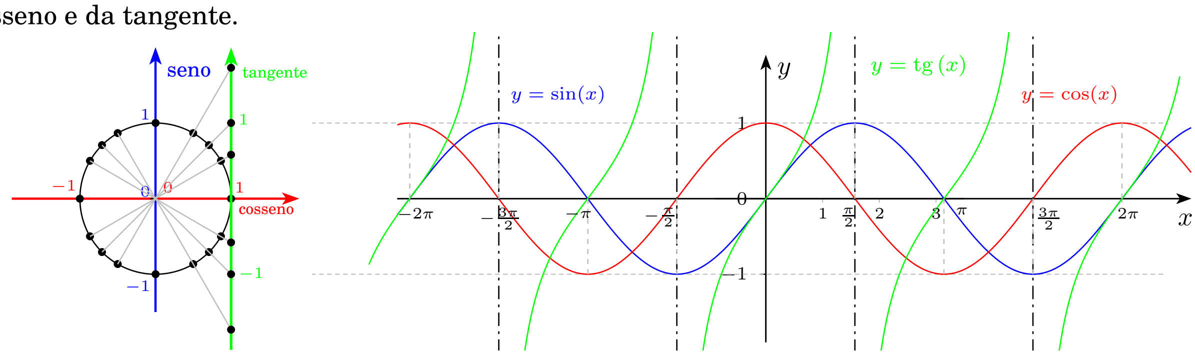
Tal como ilustrámos para o caso da função quadrática, para obter o gráfico de uma função polinomial é suficiente determinar um conjunto vasto de pontos. O número de pontos está, em geral, relacionado com o grau do polinómio. Por exemplo, para um polinómio de grau um basta considerar dois pontos, para um polinómio de grau dois já será conveniente considerar, pelo menos, três pontos e para um polinómio de grau três já poderão ser necessários, pelo menos, quatro pontos.

Na figura seguinte estão representadas os gráficos de um polinómio de grau três e de um polinómio de grau quatro.



Funções trigonométricas

A representação gráfica das funções trigonométricas será devidamente analisada no Capítulo 2, pelo que sugerimos o estudo do mesmo. Apresentamos, a título de exemplo, os gráficos do seno, do cosseno e da tangente.



Funções definidas por ramos

Uma função definida por ramos assume diferentes expressões, consoante a parte do domínio considerado:

$$f(x) = \begin{cases} \text{expressão 1} & , \text{ condição 1} \\ \text{expressão 2} & , \text{ condição 2} \\ \dots & \\ \text{expressão n} & , \text{ condição n} \end{cases}$$

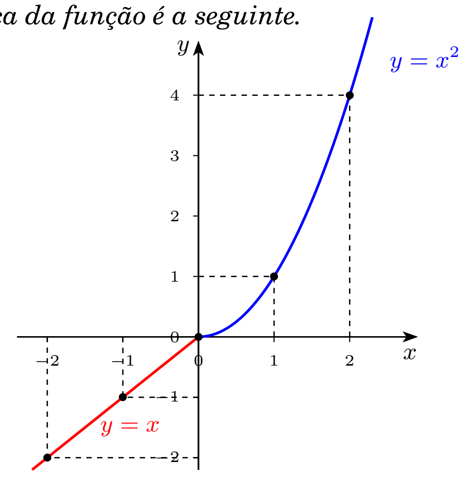
Exemplo 1.6. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ x < 0 \\ x^2 & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

é definida por uma semi-recta no intervalo $]-\infty, 0[$ *e por parte de uma parábola no intervalo* $[0, +\infty[$ *. Então, por exemplo,*

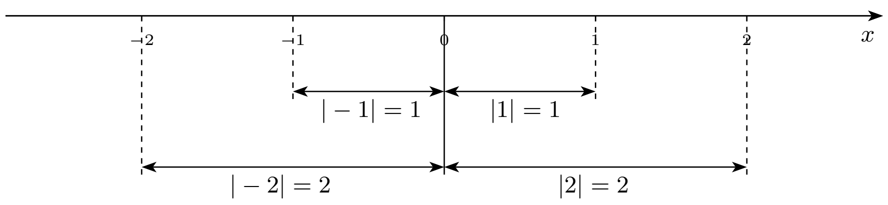
x	$f(x)$
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	4

pelo que a representação gráfica da função é a seguinte.



Função módulo

O módulo define uma distância, pelo que o resultado é sempre não negativo. Assim, no caso de um número não negativo, o módulo é o próprio número, mas no caso de um número negativo o módulo é o simétrico desse número.



Genericamente, tem-se

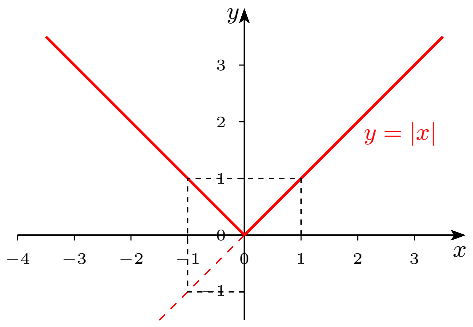
$$|\text{expressão}| = \begin{cases} -\text{expressão} & , \text{ se } \text{ expressão} < 0 \\ \text{expressão} & , \text{ se } \text{ expressão} \geq 0 \end{cases} ,$$

pelo que a função módulo corresponde a um caso particular de uma função por ramos.

Exemplo 1.7. *A função*

$$|x| = \begin{cases} -x & , \text{ se } x < 0 \\ x & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases} ,$$

tem a representação gráfica apresentada na figura seguinte.



Note-se que sempre que a expressão assume valores (resultados!) negativos, o módulo determina que o resultado seja positivo, pelo que o gráfico corresponde a uma simetria do gráfico da expressão original (sem módulo) relativamente ao eixo horizontal Ox.

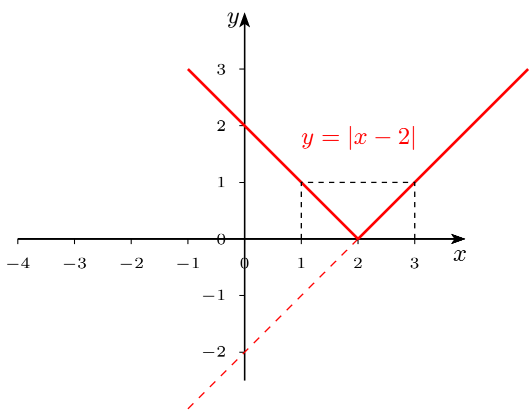
Observação 1.4. *Um erro muito comum entre os estudantes é desenvolver o módulo tendo como referência a variável x em vez da expressão referente ao módulo. Por exemplo,*

$$|x-2| \overset{\text{erro!}}{=} \begin{cases} -(x-2) & , \text{ se } x < 0 \\ x-2 & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

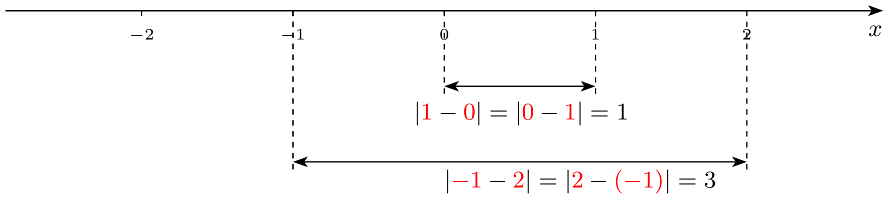
está errado, pois o desenvolvimento é dado por

$$|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & , \text{ se } x-2 < 0 \\ x-2 & , \text{ se } x-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+2 & , \text{ se } x < 2 \\ x-2 & , \text{ se } x \geq 2 \end{cases} ,$$

como se verifica na figura seguinte.



Note-se que a expressão $|a-b| = |b-a|$ representa a distância de a a b, como ilustramos na figura seguinte:

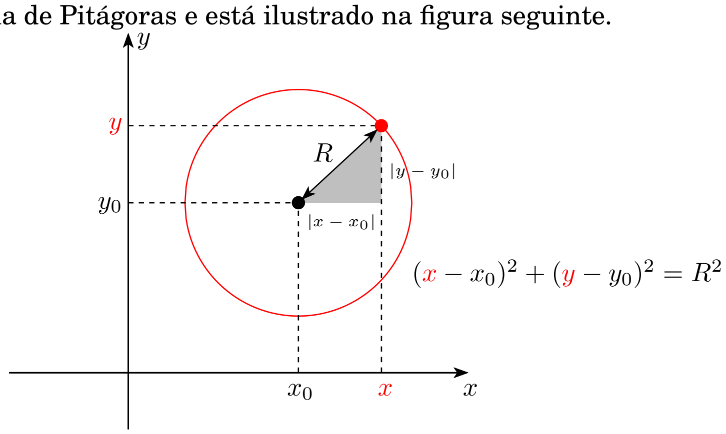


Circunferências

As circunferências não são funções, uma vez que, com excepção dos seus extremos esquerdo e direito, todas as abcissas têm associadas duas ordenadas. No entanto, este tipo de curvas também tem um carácter prático relevante. A equação reduzida de uma circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio R é dada por

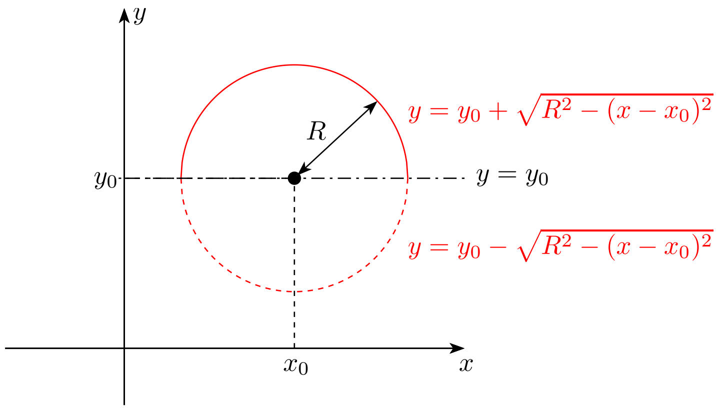
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \,,$$

como determina o teorema de Pitágoras e está ilustrado na figura seguinte.



Embora a circunferência não seja uma função de x, podemos considerar que define duas funções de x, uma associada à semi-circunferência superior e outra associada à semi-circunferência inferior. De facto,

$$\begin{aligned}
(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (y-y_0)^2 = R^2 - (x-x_0)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad y - y_0 = \pm\sqrt{R^2 - (x-x_0)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}
\end{aligned}$$



Analogamente, também podemos considerar que a circunferência define duas funções de y, uma associada à semi-circunferência direita e outra associada à semi-circunferência esquerda, definidas pelas expressões

$$\begin{aligned}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-x_0)^2=R^2-(y-y_0)^2\\ &\Leftrightarrow \quad x-x_0=\pm\sqrt{R^2-(y-y_0)^2}\\ &\Leftrightarrow \quad x=x_0\pm\sqrt{R^2-(y-y_0)^2}\,.\end{aligned}$$

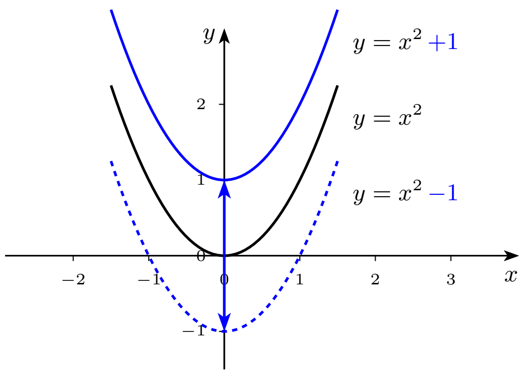
1.1.2 Transformações gráficas de funções

Nesta secção vamos definir um conjunto de transformações que permitem obter gráficos, de forma simples, a partir das funções de referência. No que se segue consideraremos c como sendo uma constante positiva.

Translações

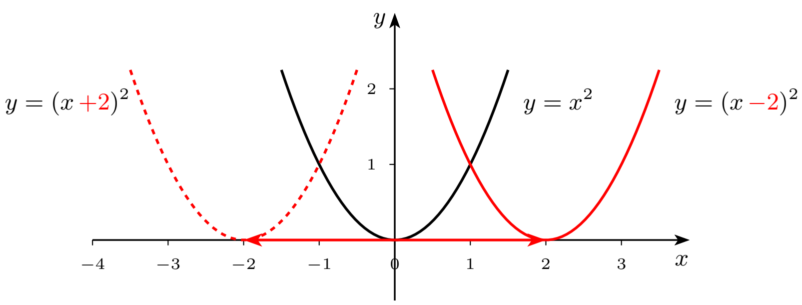
O gráfico de $y=f(x)\pm c$ obtém-se do gráfico de $y=f(x)$ efectuando uma **translação vertical** de c unidades, **para cima** no caso $y=f(x)+c$ e **para baixo** no caso $y=f(x)-c$.

Na figura seguinte representamos os gráficos de $y=x^2-1$ e $y=x^2+1$, a partir do gráfico de $y=x^2$.



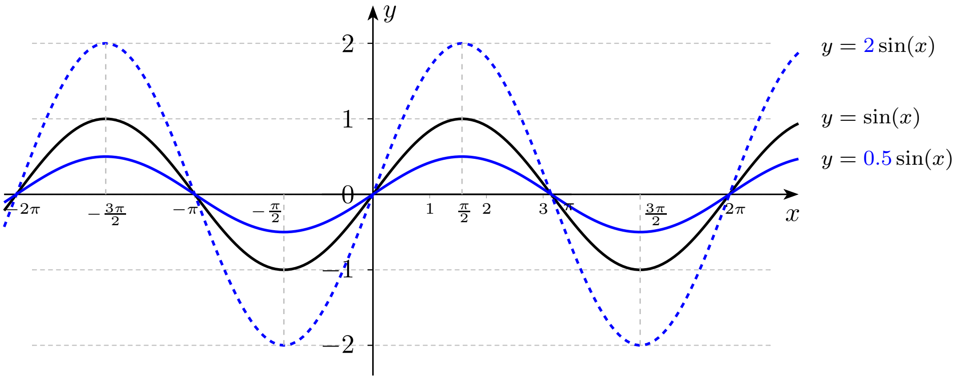
O gráfico de $y=f(x\pm c)$ obtém-se do gráfico de $y=f(x)$ efectuando uma **translação horizonal** de c unidades, **para a direita** no caso $y=f(x-c)$ e **para a esquerda** no caso $y=f(x+c)$.

Na figura seguinte representamos os gráficos de $y=(x-2)^2$ e $y=(x+2)^2$, a partir do gráfico de $y=x^2$.

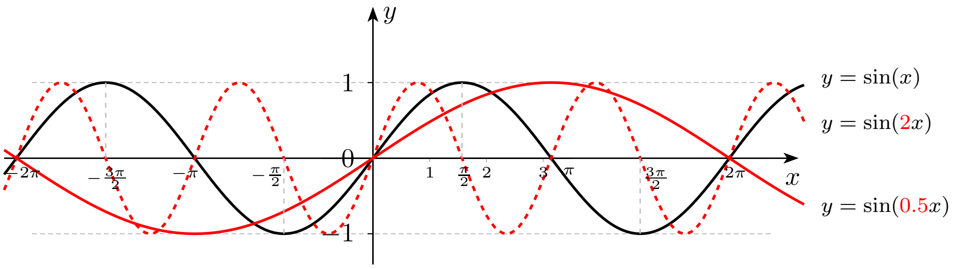


Dilatações e contracções

O gráfico de $y = c\,f(x)$ obtém-se do gráfico de $y = f(x)$ efectuando uma **dilatação vertical** (se $c > 1$) ou uma **contracção vertical** (se $0 < c < 1$). Na figura seguinte representamos os gráficos de $y = 2\sin(x)$ e $y = 0.5\sin(x)$, a partir do gráfico de $y = \sin(x)$.

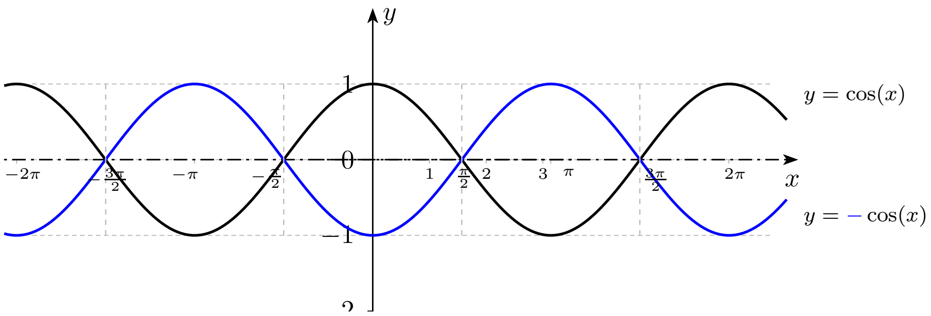


O gráfico de $y = f(c\,x)$ obtém-se do gráfico de $y = f(x)$ efectuando uma **dilatação horizontal** (se $0 < c < 1$) ou uma **contracção horizontal** (se $c > 1$). Na figura seguinte representamos os gráficos de $y = \sin(2\,x)$ e $y = \sin(0.5\,x)$, a partir do gráfico de $y = \sin(x)$.

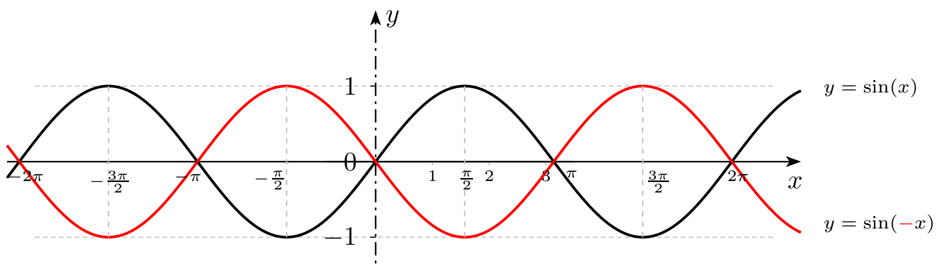


Reflexões

O gráfico de $y = -f(x)$ obtém-se do gráfico de $y = f(x)$ efectuando uma **reflexão** vertical **relativamente ao eixo** Ox. Na figura seguinte representamos o gráfico de $y = -\cos(x)$, a partir do gráfico de $y = \cos(x)$.



O gráfico de $y = f(-x)$ obtém-se do gráfico de $y = f(x)$ efectuando uma **reflexão** horizontal **relativamente ao eixo** Oy. Na figura seguinte representamos o gráfico de $y = \sin(-x)$, a partir do gráfico de $y = \sin(x)$.



Observação 1.5. *Na tabela seguinte apresentamos um resumo das Transformações gráficas ($c > 0$), a partir de uma função de referência $y = f(x)$:*

$y = f(x \pm c)$	*translação horizontal*	$\rightarrow$ *se* $-c$,	$\leftarrow$ *se* $+c$
$y = f(x) \pm c$	*translação vertical*	$\uparrow$ *se* $+c$,	$\downarrow$ *se* $-c$
$y = f(c\,x)$	*contração / dilatação horizontal*	*dilatação se* $0 < c < 1$,	*contração se* $c > 1$
$y = c\,f(x)$	*contração / dilatação vertical*	*contração se* $0 < c < 1$,	*dilatação se* $c > 1$
$y = f(-x)$	*reflexão relativamente ao eixo* Ox		
$y = -f(x)$	*reflexão relativamente ao eixo* Oy		

1.1.3 Composição de funções

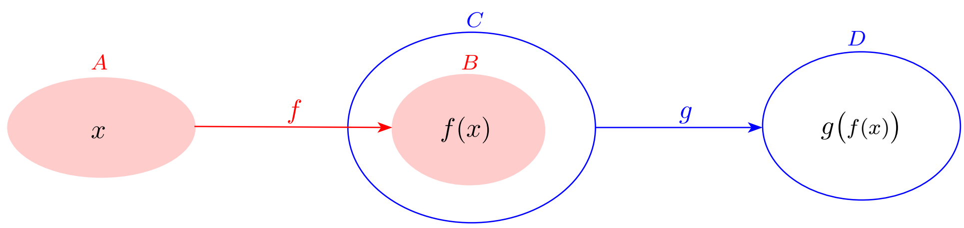
Considerem-se as funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ com $B \subseteq C$. A função $g \circ f : A \to D$, definida por

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \quad x \in A$$

é designada a **função composta** de g com f.

A composição $g \circ f$ define uma sequência de operações, de acordo com a qual primeiro é calculada f e depois é calculada g (sobre o resultado de f):

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & B \subseteq C & \xrightarrow{\qquad g \qquad} & D \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g\big(f(x)\big) \end{array}$$



Exemplo 1.8. *Sejam* $f(x) = x + 3$ *e* $g(x) = x^2$. *A composição* $g \circ f$ *é dada por*

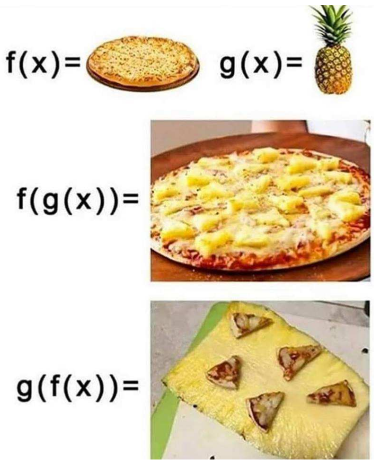
$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+3) = (x+3)^2$$

e corresponde a efectuar a operação f *e* <u>*depois*</u> *a operação* g. *Já a composição* $f \circ g$ *é dada por*

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 3\,,$$

uma vez que neste caso começa-se por efectuar a operação g *e só depois é que se efectua a operação* f.

A ordem da composição é extremamente importante, como ilustra, de forma divertida, a figura seguinte.



1.2 Propriedades

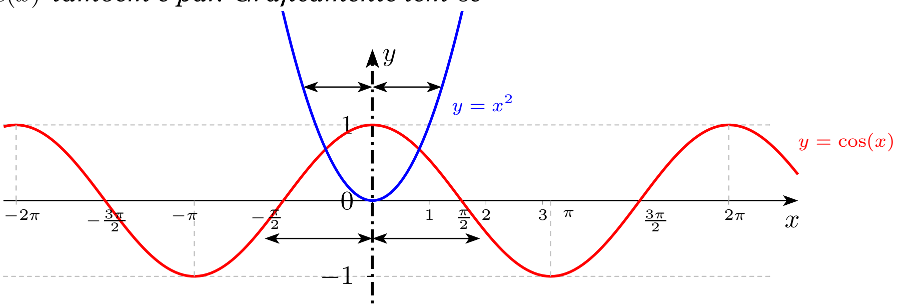
1.2.1 Paridade

Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ um domínio simétrico em relação à origem. Uma função f, definida em D, é **par** se $f(-x) = f(x)$, para qualquer $x \in D$. Graficamente, uma função é par se o gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy.

Exemplo 1.9. *A função* $f(x) = x^2$ *é par, porque*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

A função $g(x) = \cos(x)$ *também é par. Graficamente tem-se*

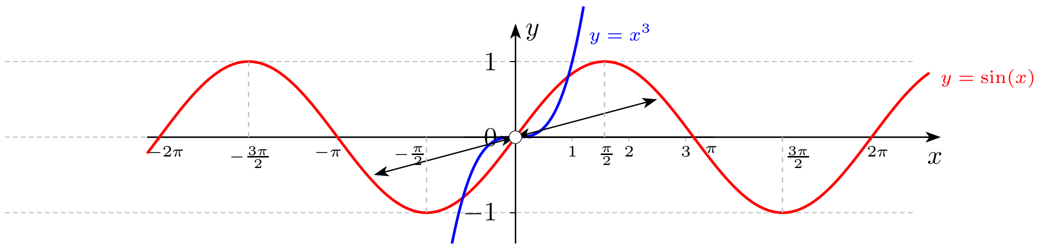


Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ um domínio simétrico em relação à origem. Uma função f, definida em D, é **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in D$. Graficamente, uma função é ímpar se o gráfico é simétrico em relação à origem.

Exemplo 1.10. *A função* $f(x) = x^3$ *é ímpar, porque*

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

A função $g(x) = \sin(x)$ *também é ímpar. Graficamente tem-se*

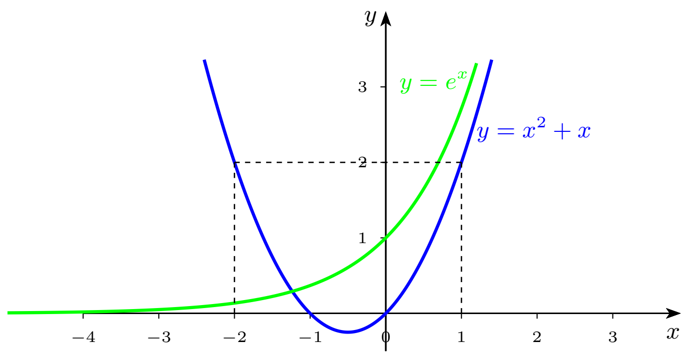


Há funções que não são pares nem ímpares.

Exemplo 1.11. *As funções $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = e^x$ não são pares nem ímpares. Por exemplo,*

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x\,,$$

que é diferente de $f(x)$ e também de $-f(x)$, sempre que $x \neq 0$. Graficamente verifica-se que não existe simetria relativamente ao eixo Oy nem relativamente à origem, como é ilustrado na figura seguinte.



1.2.2 Periodicidade

Uma função f de domínio $\mathbb{R}$ é **periódica** de período $P > 0$ se $f(x) = f(x + P)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

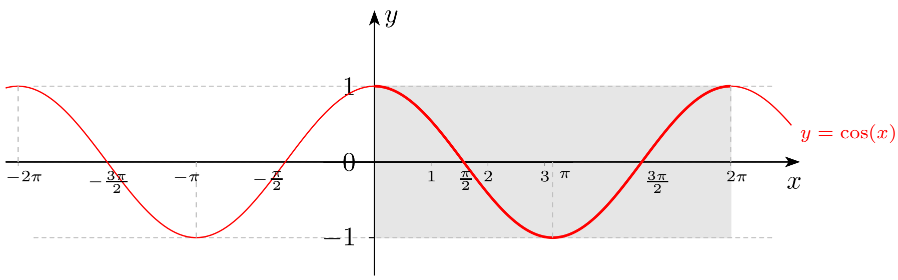
Exemplo 1.12. *As funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \sin(2x)$ são periódicas de período 2π e π, respectivamente, porque*

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x) = f(x)$$

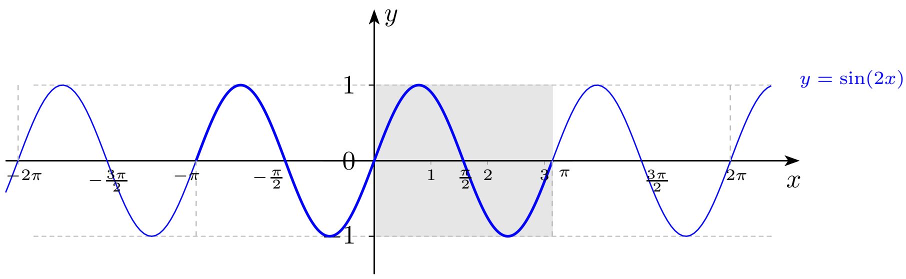
e também

$$g(x + \pi) = \sin\big(2(x + \pi)\big) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = g(x)\,.$$

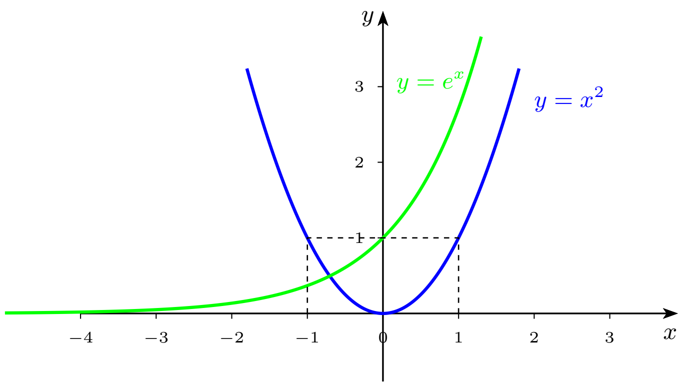
Isso significa que o gráfico de $f(x) = \cos(x)$ corresponde a uma repetição sucessiva da representação num qualquer intervalo de amplitude 2π (por exemplo, $[0, 2\pi]$)



e o gráfico de $g(x) = \sin(2x)$ *corresponde a uma repetição sucessiva da representação num qualquer intervalo de amplitude* π *(por exemplo,* $[0,\, \pi]$*).*



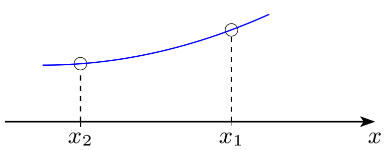
As funções $y = x^2$ *e* $y = e^x$ *não são periódicas, como se verifica graficamente.*



1.2.3 Monotonia

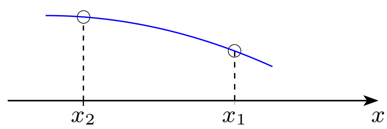
Uma função $f(x)$ diz-se **estritamente crescente** se

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,, \quad x_1,\, x_2 \in D_f\,,$$



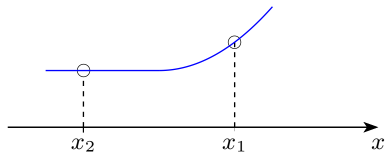
e **estritamente decrescente** se

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,, \quad x_1,\, x_2 \in D_f\,.$$



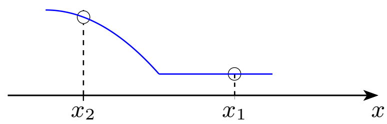
Observação 1.6. *Alguns autores definem a monotonia no sentido lacto. Nesse caso assume-se que uma função é crescente se*

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,, \quad x_1,\, x_2 \in D_f\,,$$



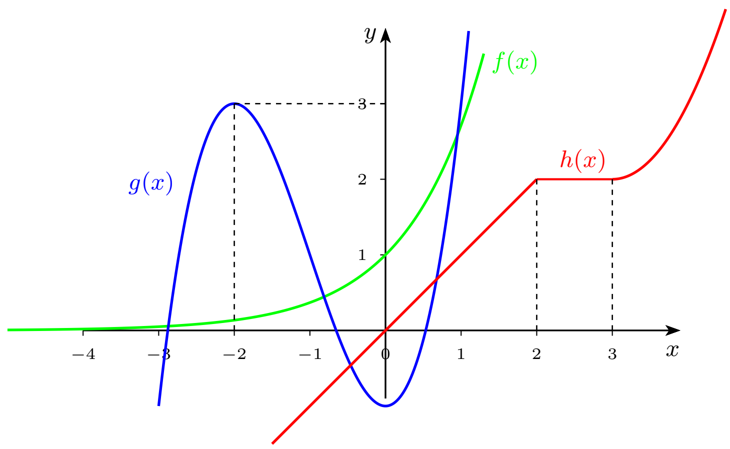
e decrescente se

$$x_1 > x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,, \quad x_1,\, x_2 \in D_f\,.$$



Exemplo 1.13. *Relativamente às funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ representadas na figura seguinte, tem-se*

- $f(x)$ *estritamente crescente em todo o seu domínio* ($\mathbb{R}$)*;*
- $g(x)$ *estritamente crescente em* $]-\infty,-2[$ *e em* $]0,+\infty[$ *e estritamente decrescente em* $]-2,0[$;
- $h(x)$ *estritamente crescente em* $]-\infty,2[$ *e em* $]3,+\infty[$ *e constante em* $]2,3[$. *Neste caso também podemos dizer que* $g(x)$ *é crescente (em sentido lacto) em todo o seu domínio* ($\mathbb{R}$).



1.2.4 Continuidade

Seja f uma função real de variável real definida no intervalo aberto $]x_0-R, x_0+R[$. A função f é **contínua** em $x = x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Também se pode definir a continuidade lateral. Nesse caso, dizemos que

- f **contínua à esquerda** de x_0 se $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$;

- f **contínua à direita** de x_0 quando $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Se uma função não é contínua num ponto, diz-se descontínua nesse ponto.

Observação 1.7. *Só se analisa a continuidade em pontos que pertençam ao domínio!*

Exemplo 1.14.

1. *Consideremos a função* $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2+1 & , x < 3 \\ -x+5 & , x \geq 3 \end{cases}$.

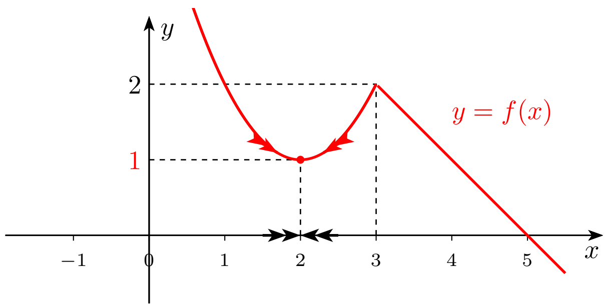
   f *é contínua em* $x = 2$*, pois*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left((x-2)^2 + 1\right) = 1$$

   e

$$f(2) = (2-2)^2 + 1 = 1$$

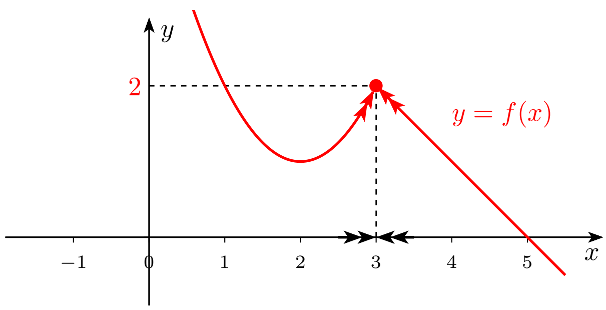
   são iguais, conforme ilustrado na figura seguinte.



   Analisemos agora a continuidade da função no ponto de mudança de ramos, $x = 3$*. Relativamente ao limite, tem-se*

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2,$$

   porque os limites laterais $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left((x-2)^2+1\right) = 2$ *e* $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-x+5) = 2$ *são iguais. Como* $f(3)$ *também é igual a* 2 *então a função é contínua em* $x = 3$*, conforme ilustrado na figura seguinte.*



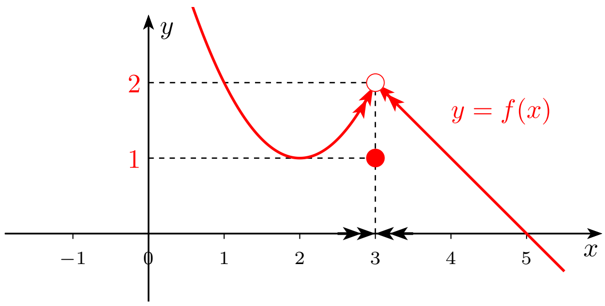
2. *Consideremos a função* $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2+1 & , x < 3 \\ 1 & , x = 3 \\ -x+5 & , x > 3 \end{cases}$.

   A única alteração relativamente à função do exemplo anterior é o valor no ponto $x = 3$*, pelo que esta função também é contínua em* $x = 2$*.*

Analisemos agora a continuidade no ponto $x = 3$. *Tal como no caso anterior, tem-se*

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2,$$

porque o limite depende do comportamento da função na vizinhança do ponto $x = 3$ *mas não do valor da função nesse ponto, isto é, continua a ter-se* $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \big((x-2)^2+1\big) = 2$ *e* $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(-x+5) = 2$. *Porém, agora tem-se* $f(3) = 1$ *pelo que os valores de* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *e* $f(3)$ *são diferentes e portanto a função não é contínua em* $x = 3$, *conforme ilustrado na figura seguinte.*



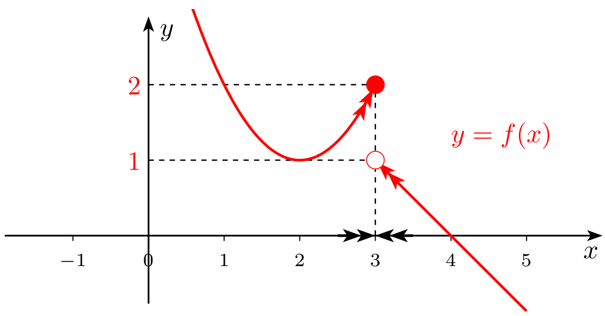
3. *Consideremos a função* $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2+1 & , x \le 3 \\ -x+4 & , x > 3 \end{cases}$.

Tal como nos dois exemplos anteriores, a função é contínua no ponto $x = 2$, *pois numa vizinhança suficientemente próxima desse ponto a função é exactamente igual às anteriores.*

No que respeita ao ponto $x = 3$, *verifica-se que*

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

não existe, pois $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \big((x-2)^2+1\big) = 2$ *e* $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(-x+4) = 1$ *são diferentes. Logo* f *não é contínua em* $x = 3$ *(mas é contínua à esquerda de* $x = 3$*), conforme ilustrado na figura seguinte.*

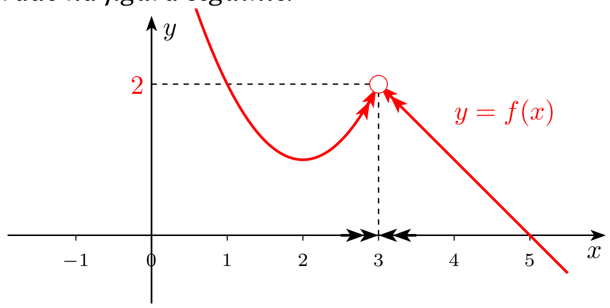


Observação 1.8. *De acordo com a definição, uma descontinuidade corresponde a um ponto onde o limite não coincide com a imagem do ponto. Intuitivamente isso significa que nesse ponto o gráfico apresenta um "salto". Muitas vezes esta situação é referida como um ponto no qual é necessário "levantar o lápis" ao desenhar o gráfico. Note-se, porém, que esta ideia tem uma condição subjacente e sem a qual não é válida: o ponto em causa tem que pertencer ao domínio da função! De facto, se o ponto não pertencer ao gráfico teremos sempre que levantar o lápis ao passar da esquerda para a direita do*

mesmo e no entanto não faz sentido falar de descontinuidade nesse ponto, já que ele não faz parte da função! Por exemplo, o ponto $x = 3$ *não pertence ao domínio da função*

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + 1 & , x < 3 \\ -x + 5 & , x > 3 \end{cases}$$

pelo que não faz sentido falar de continuidade de f *nesse ponto. Note-se porém que podemos analisar o limite* $\lim_{x \to 3} f(x)$, *que é igual a* 2, *só que esse limite não pode ser comparado com o valor de* $f(3)$ *pois ele não existe, conforme ilustrado na figura seguinte.*



Uma função é **contínua num intervalo** aberto $]a, b[$ se for contínua em todos os pontos desse intervalo. Uma função é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ se for

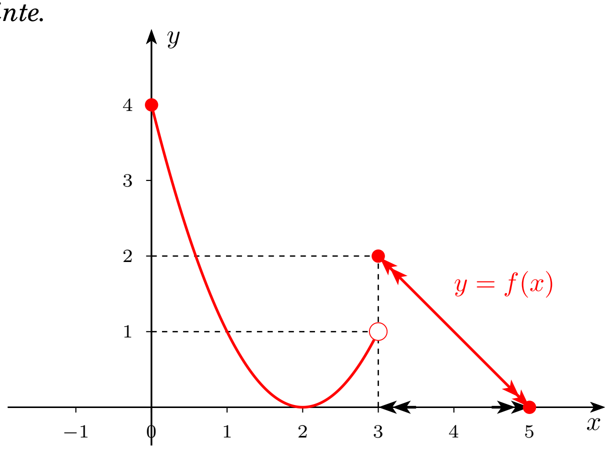
- contínua no intervalo aberto $]a, b[$;
- contínua à direita do ponto a;
- contínua à esquerda do ponto b.

Exemplo 1.15. *Considere a função* $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & , 0 \leq x \leq 3 \\ -x + 5 & , 3 < x < 5 \end{cases}$.

f *não é contínua em todo o seu domínio, porque não é contínua em* $x = 3$, *mas, por exemplo, é contínua em* $[3, 5]$, *porque*

- *é contínua à direita de* $x = 3$;
- *é contínua no intervalo aberto* $]3, 5[$;
- *é contínua à esquerda de* $x = 5$,

conforme ilustrado na figura seguinte.



Propriedades

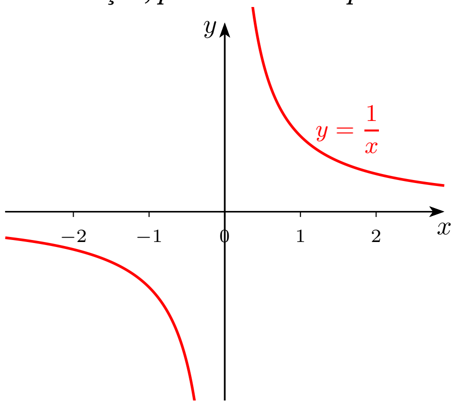
A esmagadora maioria das funções utilizadas na prática são funções contínuas. De facto, percebe-se facilmente, dos próprios gráficos, que todas as funções de referência anteriormente estudadas (polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, etc.) são funções contínuas, nos respectivos domínios. Recorrendo a essas funções e às propriedades que se seguem, é possível estender a continuidade a outras funções.

Teorema 1.1. *Sejam f e g funções contínuas num ponto x_0 pertencente aos domínios de ambas as funções. Então as funções*

$$f+g$$
$$f-g$$
$$f \cdot g$$
$$f^n, \quad \textit{com } n \in \mathbb{N}$$
$$\frac{f}{g}, \quad \textit{com } g(x_0) \neq 0$$
$$\sqrt[n]{f}, \quad \textit{com } n \in \mathbb{N}$$

também são contínuas no ponto x_0.

Exemplo 1.16. *A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todo o seu domínio, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, porque é definida pelo quociente de duas funções contínuas (a função constante $y = 1$ e a função polinomial $y = x$). Apesar de a função ser contínua em todo o domínio, não é possível desenhar o seu gráfico sem levantar o lápis! Não existe qualquer contradição, pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função.*



Teorema 1.2. *Sejam $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(A) \subset B$.*

Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua no ponto x_0, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} \big(g \circ f\big)(x) \;=\; \big(g \circ f\big)(x_0) \;=\; g(y_0)\,.$$

Decorre do teorema anterior que, por exemplo, as funções $y = \sqrt{x+1}$ e $y = \sin(3x)$ são contínuas nos respectivos domínios, por serem definidas recorrendo à composição de funções contínuas (no primeiro caso é a composição do polinómio $f(x) = x+1$ e do radical $g(y) = \sqrt{y}$ e no segundo é a composição do polinómio $f(x) = 3x$ e da função trigonométrica $g(y) = \sin(y)$).

Que funções é que podem não ser contínuas num determinado ponto? Tendo em conta os resultados anteriores, apenas as funções que são definidas por ramos e a descontinuidade só pode ocorrer nos pontos de mudança de ramo e se esse ponto pertencer ao domínio!

Exemplo 1.17.

1. *Consideremos a função* $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ \cos(x) & , x > 0 \end{cases}$.

   f é contínua em todo o domínio, $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *. De facto:*

   - *f é contínua em* $]-\infty, 0[$*, por ser definida por um polinómio;*
   - *f é contínua em* $]0, +\infty[$*, por ser definida por uma função trigonométrica.*

   O ponto $x = 0$ não pertence ao domínio e portanto não faz sentido falar de continuidade nesse ponto.

2. *Consideremos a função* $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ \cos(x) & , x \geq 0 \end{cases}$.

   Esta função acresce o ponto $x = 0$ à do exemplo anterior, pelo que também é contínua em $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

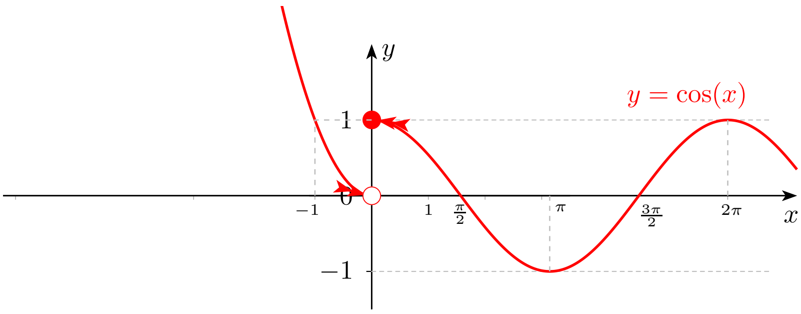
   Uma vez que o ponto $x = 0$ também pertence ao domínio, é necessário analisar a continuidade nesse ponto. Começamos por notar que

   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 ,$$

   e

   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1 ,$$

   pelo que não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ *e portanto f não é contínua em $x = 0$. Esta situação está ilustrada na figura seguinte.*



3. *Consideremos a função* $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x < 0 \\ \cos(x) & , x \geq 0 \end{cases}$.

   f tem domínio $\mathbb{R}$.

   - *A função é contínua em* $]-\infty, 0[$*, por ser definida por um polinómio;*
   - *f é contínua em* $]0, +\infty[$*, por ser definida por uma função trigonométrica.*
   - *Falta analisar a continuidade no ponto $x = 0$. Nesse caso, tem-se*

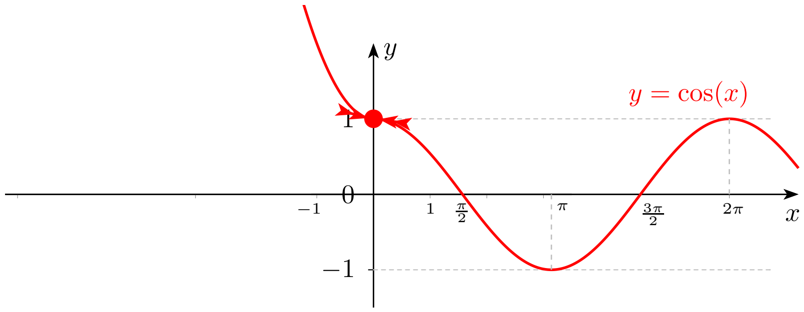
     $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1$$

     e também

     $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1 ,$$

     pelo que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ *. Como* $f(0) = \cos(0) = 1$ *então* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *e* $f(0)$ *são iguais e portanto f também é contínua em $x = 0$.*

Logo f é contínua em todo o seu domínio. Esta situação está ilustrada na figura seguinte.



4. *Consideremos a função* $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x<0 \\ 0 & , x=0 \\ \cos(x) & , x>0 \end{cases}$.

f tem domínio $\mathbb{R}$. No que respeita à continuidade da função, tem-se que:

- *f é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ pelas razões já apontadas no exemplo anterior;*
- *Relativamente ao ponto $x = 0$, continua a ter-se (tal como no exemplo anterior)*

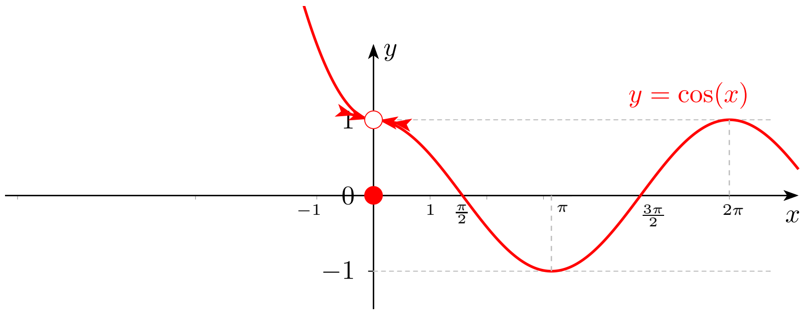
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1$$

e também

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$$

pelo que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Porém, agora $f(0) = 0$ e portanto $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $f(0)$ são diferentes, pelo que f não é contínua em $x = 0$.

Logo f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Esta situação está ilustrada na figura seguinte.

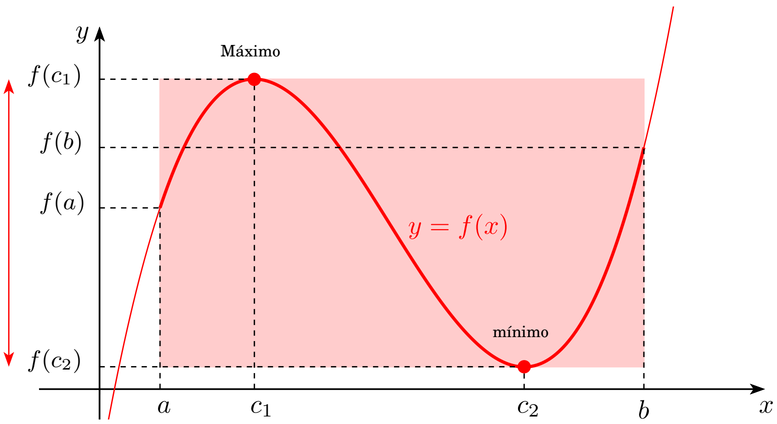


Teorema de Weierstrass

O Teorema de Weierstrass garante que toda a função contínua num intervalo fechado e limitado é limitada. Este resultado será de grande utilidade na secção de integrais impróprios.

Teorema 1.3. *Se $f(x)$ for uma função contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então tem um máximo e um mínimo absolutos nesse intervalo (ou seja, é limitada).*

O teorema anterior está ilustrado na figura seguinte.

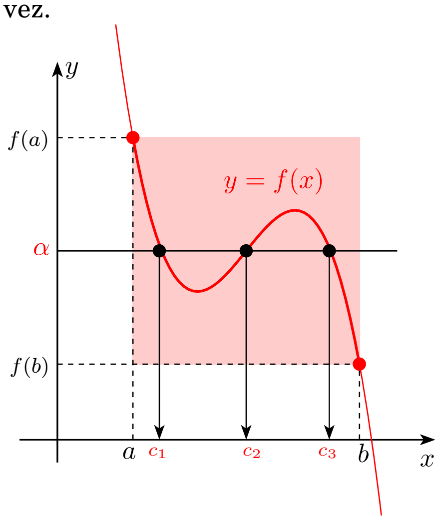


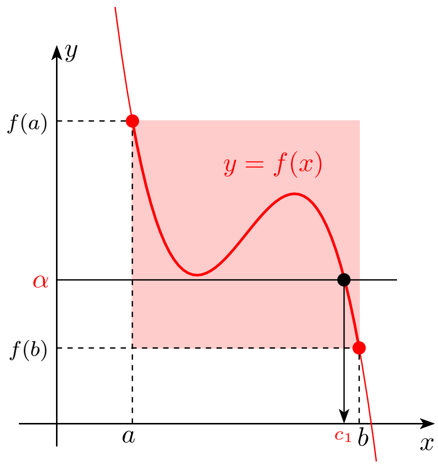
Teorema de Bolzano (ou Teorema do valor intermédio)

O Teorema de Bolzano garante que não é possível ligar continuamente dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ sem passar por todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema 1.4. *Se $f(x)$ for uma função contínua num intervalo $[a,b]$ e α for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe, pelo menos, um ponto c no intervalo $]a,b[$ tal que $f(c) = \alpha$.*

Note-se que o teorema nada garante sobre a quantidade de vezes que cada valor é atingido, pelo que esse cenário pode ocorrer uma ou várias vezes, dependendo do comportamento da função e do valor intermédio considerado, conforme ilustrado nas figuras seguintes. No primeiro caso existem três pontos nos quais a função atinge o valor intermédio α, enquanto no segundo caso esse valor é atingido uma única vez.



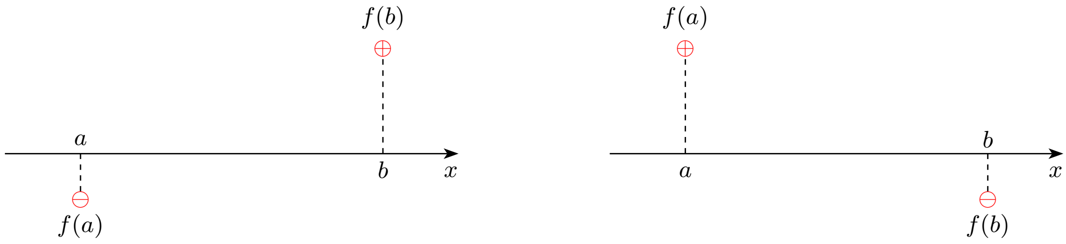


O teorema de Bolzano pode, em particular, ser aplicado para confirmar a existência de zeros de funções.

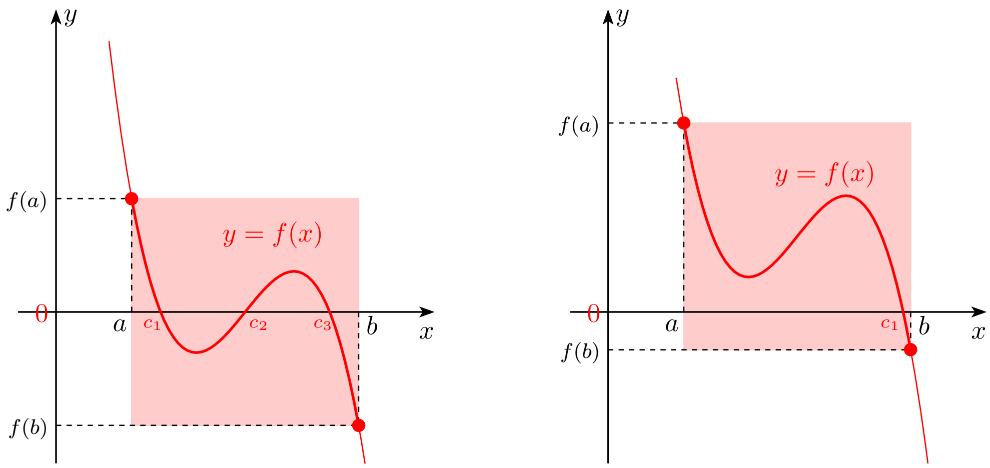
Teorema 1.5 (Corolário do Teorema de Bolzano).

Se f for uma função contínua em $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários (isto é, um tem valor positivo e o outro tem valor negativo) então existe, pelo menos, um c no intervalo $]a,b[$ tal que $f(c) = 0$, (isto é, a função tem pelo menos uma raiz, c, em $]a,b[$).

O resultado anterior está ilustrado na figura seguinte e garante que não é possível unir continuamente um ponto de resultado negativo com um ponto de resultado positivo sem passar, pelo menos uma vez, em zero!



Note-se que, tal como no caso geral, nada é dito quanto ao número de vezes em que a situação se verifica, apenas garante que ocorre!



1.2.5 Injectividade e sobrejectividade

Uma função $f:\ D_f \to \mathbb{R}$ é **injectiva** se

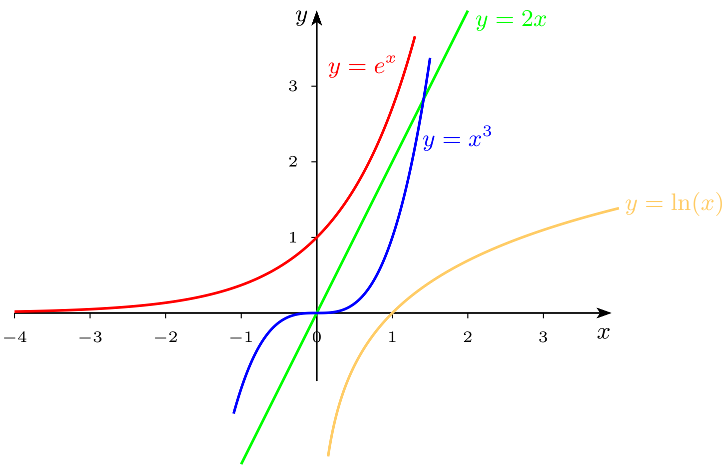
$$x_1,\, x_2 \in D_f:\ x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)\,,$$

isto é, se a objectos diferentes correspondem imagens diferentes. Este conceito pode ser analisado numa forma mais conveniente, se recorremos à forma contra-recíproca $(\,p \ \Rightarrow\ q$ é equivalente a $\sim p \Leftarrow\sim q\,)$. De facto, a função é injectiva se

$$x_1,\, x_2 \in D_f:\ f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2\,.$$

Graficamente, uma função é injectiva se nenhuma recta horizontal intersecta o gráfico em mais do que um ponto.

Exemplo 1.18. *As funções* $y = 2x,\ y = x^3,\ y = e^x,\ y = \ln(x)$ *são injectivas.*



Uma função $f : A \to B$ é **sobrejectiva** se para todo $y \in B$ existir pelo menos um $x \in A$ tal que $y = f(x)$, ou seja, quando o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Observação 1.9. *A sobrejectividade não é uma propriedade intrínseca da função, pois só depende da escolha que é feita para o conjunto de chegada (o que não altera em nada a correspondência definida). Por exemplo, a função*

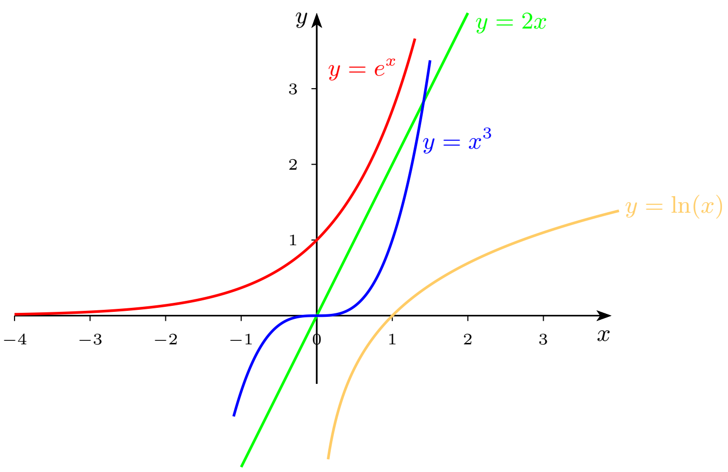
$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{seno}} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \sin(x) \end{array}$$

não é sobrejectiva, mas a função

$$\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{seno}} & [-1, 1] \\ x & \longrightarrow & y = \sin(x) \end{array}$$

já é sobrejectiva!

Exemplo 1.19. *As funções $y = 2x$, $y = x^3$ e $y = \ln(x)$ são sobrejectivas em $\mathbb{R}$. A função $y = e^x$ não é sobrejectiva em $\mathbb{R}$, mas é sobrejectiva em $\mathbb{R}^+$.*



Uma função **injectiva** e **sobrejectiva** diz-se **bijectiva**.

1.2.6 Função inversa

Seja f uma função injectiva de domínio D. À função $f^* : f(D) \to D$ que satisfaz as condições

$$
\begin{aligned}
(f \circ f^*)(y) &= y\,, \quad y \in f(D)\\
(f^* \circ f)(x) &= x\,, \quad x \in D\,,
\end{aligned}
$$

chama-se **função inversa** de f.

Note-se que, nestas condições, tem-se

$$
\begin{array}{ccccc}
D & \xrightarrow{\quad f \quad} & f(D) & \xrightarrow{\quad f* \quad} & D \\
x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & f^*\big(f(x)\big)
\end{array}
$$

e ainda

$$
\begin{array}{ccccc}
f(D) & \xrightarrow{\quad f* \quad} & D & \xrightarrow{\quad f \quad} & f(D) \\
y & \longrightarrow & f^*(y) & \longrightarrow & f\big(f^*(y)\big)
\end{array}
$$

que pode ser resumido num único esquema (circular):

$$
\begin{array}{ccc}
D & \underset{f^{-1} \equiv f^*}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & f(D) \\
x = f^*(y) & \longleftrightarrow & y = f(x)
\end{array}
$$

Note-se ainda que $\quad y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^*(y)\,.$

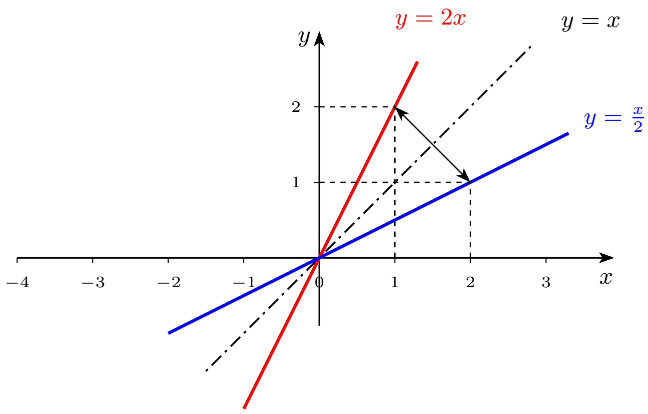
Observação 1.10.

1. *A função inversa f^* é habitualmente denotada por f^{-1}.*

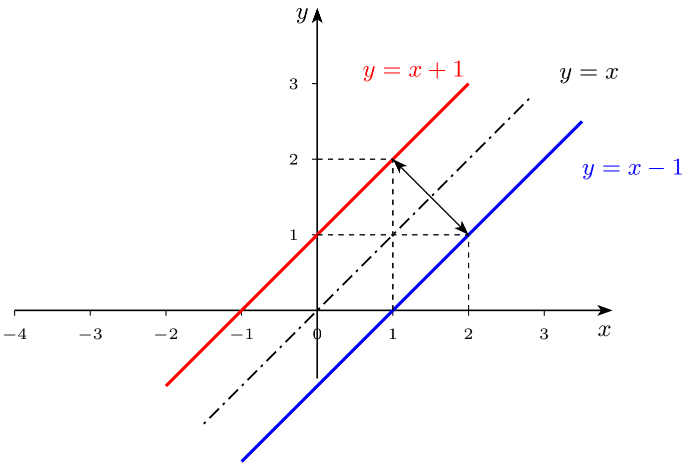
2. *Não se deve confundir a notação f^{-1} com $\frac{1}{f}$! Embora as notações f^{-1} e a^{-1} em funções e em números, respectivamente, sejam idênticas, os seus significados são diferentes: em números a notação a^{-1} representa o $\frac{1}{a}$, enquanto em funções a notação f^{-1} representa a função inversa (que pode não ser dada pela divisão $\frac{1}{f}$)! Por exemplo, a função inversa de $f(x) = x+3$ é $f^{-1}(y) = y-3$ (e não $f^{-1}(y) = \frac{1}{y+3}$!).*

Exemplo 1.20.

1. *A função inversa de $f(x) = 2x$ é $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$.*



2. *A função inversa de* $f(x) = x + 1$ *é* $f^{-1}(y) = y - 1$.



Os gráficos de uma função e da sua inversa são simétricos relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, $y = x$.

Exemplo 1.21. *A função* $f(x) = \frac{2}{x-1}$ *é injectiva no respectivo domínio* ($D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$)*. De facto, se* x_1 *e* x_2 *forem dois objectos com a mesma imagem, então*

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{x_2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 1 = x_2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2\,,$$

ou seja, x_1 *e* x_2 *terão que ser o mesmo objecto!*

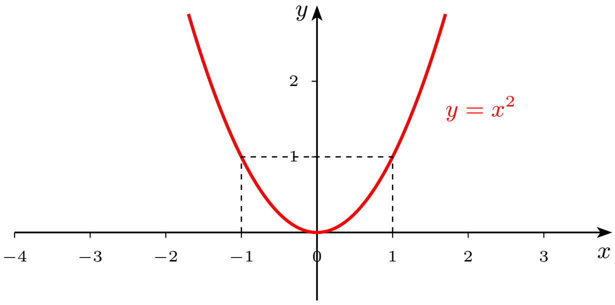
Sendo f *uma função injectiva então é invertível (para que seja sobrejectiva basta ajustar o conjunto de chegada de modo a que seja coincidente com o contradomínio). Para caracterizar a função inversa de* f *temos que determinar o domínio, o contradomínio e a expressão analítica dessa função. Comecemos por determinar a expressão analítica. Como*

$$y = \frac{2}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad y(x-1) = 2 \;\Leftrightarrow\; yx - y = 2 \;\Leftrightarrow\; yx = y + 2 \;\Leftrightarrow\; x = 1 + \frac{2}{y}\,,$$

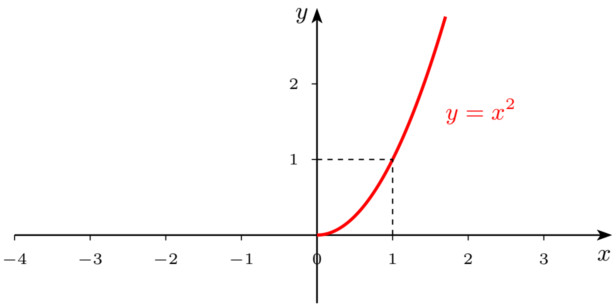
então $f^{-1}(y) = 1 + \frac{2}{y}$*. O domínio desta função é* $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *e o contradomínio coincide com o domínio de* f*, pelo que* $CD_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$*. Então,*

$$\begin{array}{rcl} D_f = CD_{f^{-1}} & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} \\ x = 1 + \dfrac{2}{y} & \longleftrightarrow & y = \dfrac{2}{x-1} \end{array}$$

Toda a função injectiva num subconjunto do seu domínio é invertível nesse mesmo conjunto. Assim, embora a função possa não ser naturalmente invertível (se não for injectiva no seu domínio), podemos sempre considerar uma restrição na qual a função é injectiva e, nessas condições, já podemos inverter a função. Embora este processo pareça artificial, é de grande aplicação prática. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ não é injectiva (por exemplo, os objectos $x = -1$ e $x = 1$ têm a mesma imagem) e portanto não é invertível.



Porém, é vulgar referir que "$\sqrt{y}$ é a inversa de x^2"! Essa afirmação é verdadeira, mas carece de contextualização, pois a inversa só deve ser considerada num domínio onde a função seja injectiva! Embora a função $f(x) = x^2$ não seja injectiva em $\mathbb{R}$, ela é injectiva em $]-\infty, 0]$ e também em $[0, +\infty[$. A restrição de injectividade normalmente utilizada para efeitos de invertibilidade é a restrição principal, isto é, o subconjunto do domínio que minimiza a distância à origem, preferencialmente na parte positiva do eixo, no qual a função é injectiva e de tal modo que seja preservado o contradomínio da função original. Então, no exemplo considerado, a restrição principal é dada por $[0, +\infty[$.

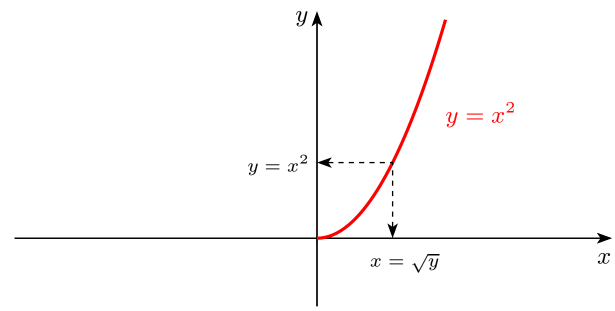


Nestas condições $f(x) = x^2$ já é invertível e a sua inversa é dada por $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, pelo que

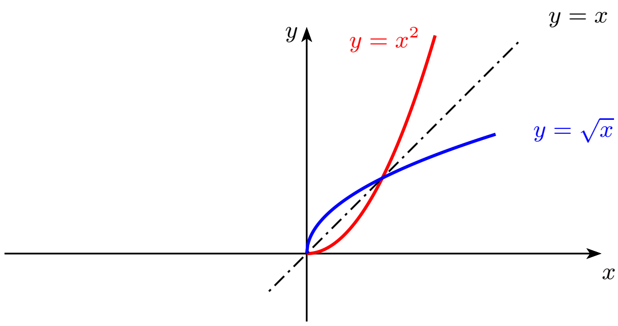
$$\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & [0,+\infty[\\ x = \sqrt{y} & \longleftrightarrow & y = x^2 \end{array}$$

Tem-se então

$$y = x^2 \,, \quad x \in [0, +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y} = x \,.$$



Se recorrermos a representação simultânea dos gráfico de f e da sua inversa, obtemos a situação representada na figura seguinte.



Note-se que a equivalência

$$y = x^2 \quad \overset{\text{erro!}}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt{y} = x\,.$$

não é verdadeira, pois é verdade que

$$y = x^2 \quad \Leftarrow \quad \sqrt{y} = x\,.$$

mas <u>não é verdade</u> que

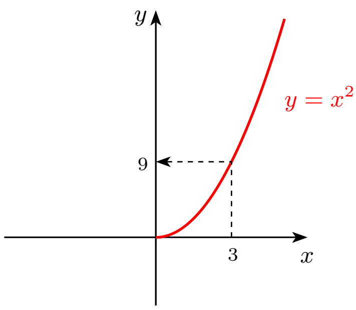
$$y = x^2 \quad \overset{\text{erro!}}{\Rightarrow} \quad \sqrt{y} = x\,.$$

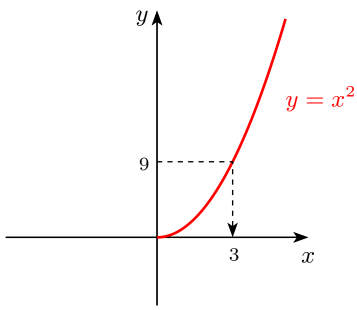
Repare-se, pois, na importância da definição da restrição que garante a invertibilidade da função:

$$y = x^2\,, \quad x \in [0, +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y} = x\,.$$

Não há nada de contraditório nas equivalências anteriores. De facto, sendo x é um valor real arbitrário, ao aplicar a função inversa a $f(x)$ o resultado corresponderá ao representante de x na restrição principal e esse representante é dado por $|x|$, que só coincide com o valor original caso x seja positivo. Por exemplo,

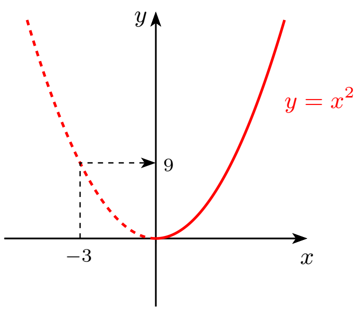
$$\sqrt{3^2} \;=\; \sqrt{9} \;=\; 3\,,$$

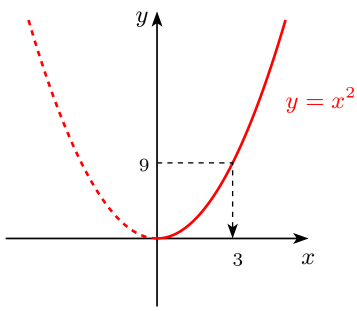




mas

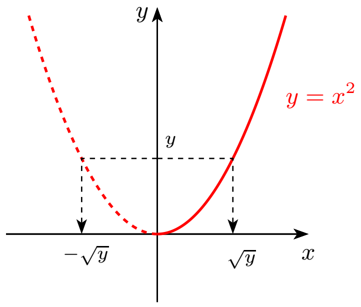
$$\sqrt{(-3)^2} \;=\; \sqrt{9} \;=\; 3\,!$$





Assim, na prática, podemos considerar a função inversa associada à restrição principal e depois estender o resultado a todo o domínio original. No caso anterior isso significa que

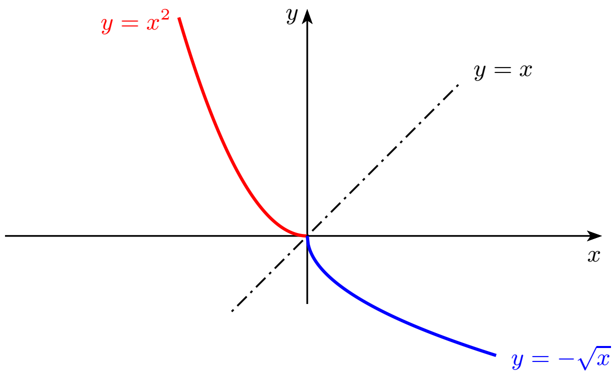
$$y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{y} = x\,.$$



Observação 1.11. *Embora as restrições de injectividade tenham habitualmente por base a restrição principal, nada impede que a inversa seja definida tendo por base outro subconjunto do domínio no qual a função seja injectiva e onde seja preservado o contradomínio original, pelo que também poderíamos definir a função inversa de* $f(x) = x^2$ *tendo por base a restrição* $]-\infty, 0]$ *. Nesse caso ter-se-ia* $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ *, e portanto o ciclo que relaciona a função original com a sua inversa seria dado por*

$$\begin{array}{ccc}]-\infty, 0] & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & [0, +\infty[\\ x = -\sqrt{y} & \longleftrightarrow & y = x^2 \end{array}$$

A representação gráfica associada a esta situação é a apresentada na figura seguinte.



1.3 Exponencial e logaritmo

1.3.1 Potências de números reais

Comecemos por recordar, de forma sucinta, as leis e propriedades dos números reais. Fazemo-lo, porque sabermos que este é uma das principais fontes de erro por parte dos estudantes.

Potências de expoente inteiro

Definição $(n \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	Exemplos
$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factores}}$	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
$a^0 = 1$	2^0
$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3, \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3$

Propriedades de potências de expoente inteiro

Lei $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ m, n \in \mathbb{Z})$	Exemplos
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{12} = 4096$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$2^3 \cdot 10^3 = (2 \cdot 10)^3 = 20^3 = 8000$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{2^3}{10^3} = \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

Potências de expoente racional

Definição $(n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z},\ \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R})$	Exemplos
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$	$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Observação 1.12.

1. *Tal como foi definido na secção da função inversa, a raiz quadrada de x (que se denota por $\sqrt{x}$) é o número **não negativo** que multiplicado por si próprio é igual a x, isto porque a função foi definida a tendo por base a restrição $[0, +\infty[$ da função $f(x) = x^2$. Por exemplo, $\sqrt{9} = 3$ porque $3 \times 3 = 9$ e 3 é não negativo. Embora também se tenha $(-3) \times (-3) = 9$, a raiz quadrada de 9 não é -3 porque -3 é negativo e portanto não pertence à restrição de injectividade da função original. Logo, é errado escrever $\sqrt{9} = \pm 3$!*

   A observação anterior é generalizável a qualquer raiz de índice par. No caso de raízes de índice ímpar, já não se exige que o número seja não negativo (a raiz índice n, ímpar, de x é o número que multiplicado por si próprio n vezes, é igual a x), já que a função original $f(x) = x^n$ é injectiva (e portanto invertível) em $\mathbb{R}$.

$$n \text{ par:} \qquad \sqrt[n]{x} = \square \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\square \times \cdots \times \square}_{n \text{ vezes}} = x \ \wedge\ \square \geq 0$$

$$n \text{ ímpar:} \qquad \sqrt[n]{x} = \square \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\square \times \cdots \times \square}_{n \text{ vezes}} = x$$

2. *No conjunto dos números reais, não existe a raiz quadrada (nem qualquer raiz de índice par) de números negativos, pois o produto de um número por si próprio nunca é negativo! Por exemplo,* $\sqrt{-4}$ *não está definida, pois não existe nenhum número real não negativo* $\square$ *(nem negativo!) tal que* $\square \times \square = -4$:

   se $\square$ *é positivo, então* $\square \times \square = \oplus \times \oplus$ *também é positivo (e portanto diferente de* -4*);*

   se $\square$ *é negativo, então* $\square \times \square = \ominus \times \ominus$ *é positivo (e portanto diferente de* -4*).*

   Este problema não se coloca em raízes de índice ímpar. Por exemplo, $\sqrt[3]{-8}$ *existe e é igual a* -2, *porque* $(-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.

Propriedades de radicais de índice natural

Lei $(m, n \in \mathbb{N};\ \sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{b} \in \mathbb{R};\ b \neq 0)$	Exemplos
$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert, \quad n$ é par	$\sqrt{3^2} = 3, \quad \sqrt{(-3)^2} = 3$
$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad n$ é ímpar	$\sqrt[5]{2^5} = 2, \quad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2, \quad \left(\sqrt[3]{-8}\right)^3 = -8$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Observação 1.13.

1. *Note-se, por exemplo, que* $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$, *pelo que convém ter especial atenção a erros do tipo*

$$\sqrt{(-4)^2} \overset{erro!}{=} -4 \quad \textit{(a raiz quadrada nunca é negativa!)}.$$

2. *De acordo com a definição de raiz quadrada, a equivalência*

$$x^2 = 9 \quad \overset{erro!}{\Leftrightarrow} \quad x = \sqrt{9}$$

   está errada, pois na primeira igualdade x *pode ser negativo mas na segunda não pode! Ora* $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$ *(e não* $\sqrt{x^2} = x$ *!) garante que o resultado é não negativo e portanto a equação pode ser resolvida da forma seguinte:*

$$x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \quad \Leftrightarrow \quad \lvert x \rvert = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3\,.$$

3. *As propriedades apresentadas são referentes a produtos e a quocientes. No caso de somas ou subtracções nunca é possível efectuar simplificações imediatas, pelo que o cálculo requer a simplificação sucessiva. Por exemplo, em geral tem-se*

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

   como se verifica do exemplo

$$\underbrace{\sqrt{9+16}}_{=5} \neq \underbrace{\sqrt{9}+\sqrt{16}}_{=7}\,.$$

1.3.2 Função exponencial

A função $f(x) = a^x$, onde a é uma constante positiva, é chamada função exponencial pois a variável, x, é o expoente.

Observação 1.14. *A função exponencial a^x não deve ser confundida com a função potência x^a! Na primeira a variável é o exponente enquanto na segunda a variável é a base. Por exemplo, $f(x) = x^2$ corresponde a multiplicar o número x por ele próprio, enquanto $f(x) = 2^x$ corresponde a multiplicar o número 2 uma quantidade x de vezes (no caso em que x é inteiro e positivo).*

Exemplo 1.22. *Se for feita uma poupança 5000 euros a 3 anos com uma TANL de 1% e juros capitalizáveis, no final do primeiro ano o capital será de (o capital acrescido do juro do mesmo)*

$$5000 + 5000 \times 1\% \;=\; 5000\,(1 + 0.01) \;=\; 5000 \times 1.01\,,$$

no final do segundo ano o capital será de (o capital no final do primeiro ano acrescido do juro do mesmo)

$$5000 \times 1.01 + 5000 \times 1.01 \times 1\% \;=\; 5000 \times 1.01\,(1 + 0.01) \;=\; 5000 \times 1.01 \times 1.01 \;=\; 5000 \times 1.01^2$$

e no final do terceiro ano o capital será de (o capital no final do segundo ano acrescido do juro do mesmo)

$$5000 \times 1.01^2 + 5000 \times 1.01^2 \times 1\% \;=\; 5000 \times 1.01^2\,(1 + 0.01) \;=\; 5000 \times 1.01^3\,,$$

ou seja, no final dos 3 anos, o capital será aproximadamente igual a 5151.5 euros.

Recorde que a^x , quando

i) x é inteiro e positivo ($x = n$), é igual a $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ factores}}$;

ii) x é nulo ($x = 0$), corresponde a $a^0 = 1$;

iii) x é inteiro e negativo ($x = -n$), é igual a $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;

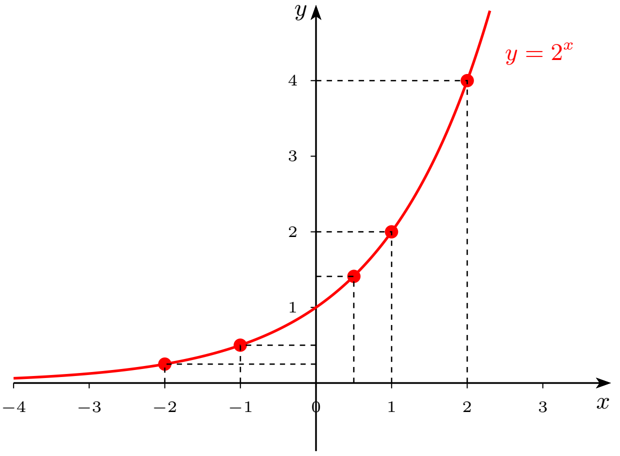
iv) x é racional ($x = \frac{p}{q}$), corresponde a $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\,\right)^p$.

Mas como calculamos a^x , quando x é irracional? Por exemplo, qual é o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou de 2^{π}? Nesse caso o valor de a^x é obtido pela aproximação sucessiva recorrendo a enquadramentos de x na forma $r_1 < x < r_2$, em que r_1 e r_2 são números racionais. Desse modo (no caso em que $a > 1$) tem-se $a^{r_1} < a^x < a^{r_2}$.

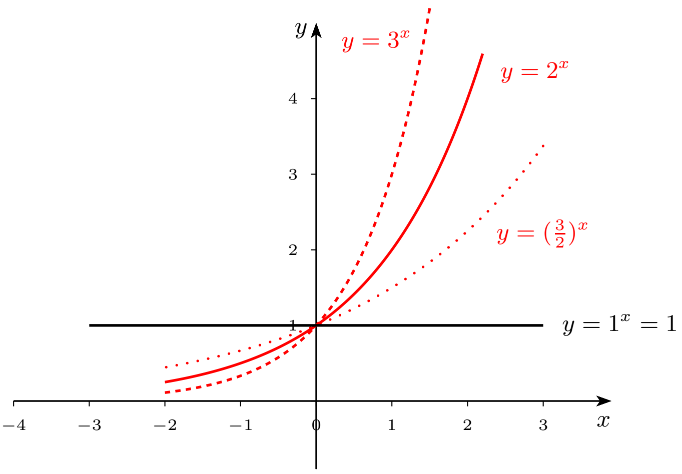
Consideremos, a título de exemplo, a função $f(x) = 2^x$. Para obter um esboço do gráfico desta função, basta considerar um conjunto suficientemente grande de pontos. Por exemplo, se considerarmos os pontos

x	$y = 2^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$
0	$2^0 = 1$
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
1	$2^1 = 2$
1.2	$2^{1.2} = 2^{\frac{12}{10}} = 2^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt{2}$
2	$2^2 = 4$

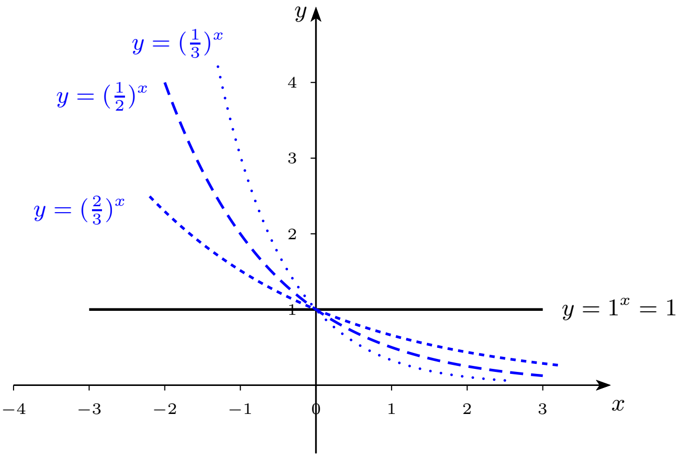
é fácil intuir que o gráfico de $y = 2^x$ é dado por



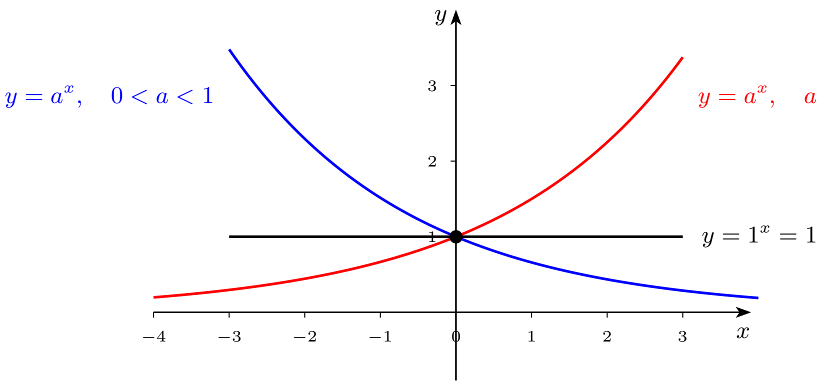
Genericamente, verifica-se que o comportamento de $y = a^x$, quando $a > 1$, é dado por



e de $y = a^x$, quando $0 < a < 1$, é dado por



pelo que as funções exponenciais resumem-se, basicamente, a dois tipos: as de base (positiva e) inferior a 1 e as de base superior a 1.



As exponenciais de maior interesse prático são as de base $a > 1$.

Como não podia deixar de ser, as potências de expoente real preservam as propriedades de potências de expoente inteiro ou fraccionário. Assim,

Lei $(a, b \in \mathbb{R}^+;\ x, y \in \mathbb{Z})$	Exemplos
$a^x \times a^y = a^{x+y}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{1}{a^{y-x}}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{12} = 4096$
$a^x \cdot b^x = (ab)^x$	$2^3 \cdot 10^3 = (2 \cdot 10)^3 = 20^3 = 8000$
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\frac{2^3}{10^3} = \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

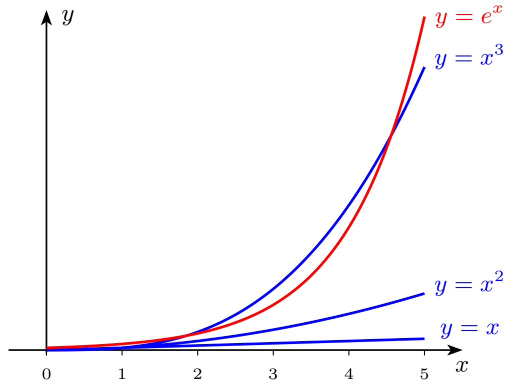
O crescimento exponencial

Uma das características mais marcantes das funções exponenciais a^x de base $a > 1$ é o designado **crescimento exponencial**, isto é, o facto de apresentarem um crescimento muito rápido. Por exemplo, quando comparadas com qualquer potência x^p, verifica-se que a exponencial **tem um cres-**

cimento mais acentuado, na medida em que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty\,,$$

qualquer que seja o valor de $p \in \mathbb{R}$, conforme ilustrado na figura seguinte.



A exponencial de base e

Uma exponencial com grande aplicação prática é a exponencial de base e, onde e representa o número de Euler. Tal como o número π, o número de Euler também é irracional e vale

$$2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\ldots$$

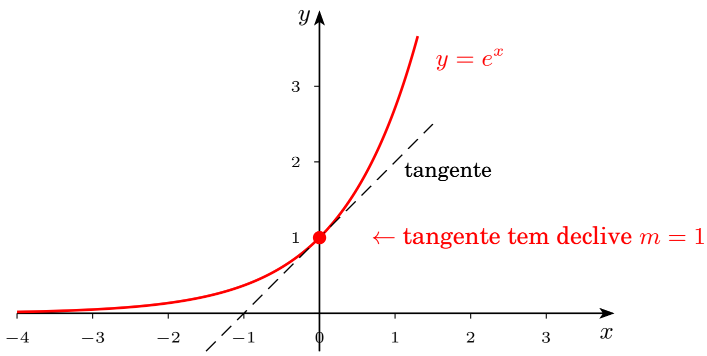
Este valor é o resultado do limite notável

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Mais geralmente, tem-se que

$$\lim_{\blacksquare \to +\infty} \left(1 + \frac{k}{\blacksquare}\right)^{\blacksquare} = e^k .$$

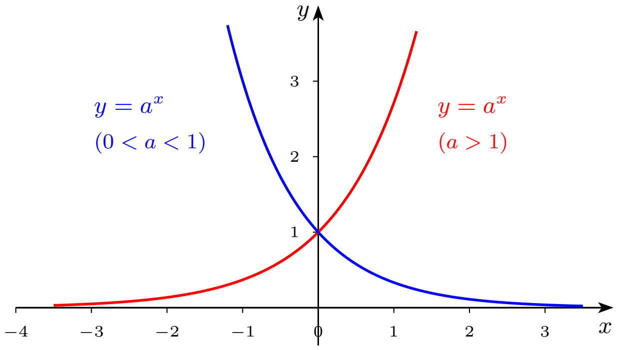
A exponencial de base e é a única para a qual a tangente em $x = 0$ tem declive igual a 1.



1.3.3 Função logarítmica

A função exponencial $f(x) = a^x$ de base $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ define uma função crescente (se $a > 1$) ou decrescente (se $0 < a < 1$) pelo que, em qualquer dos casos, é uma função injectiva. Assim, considerando o conjunto de chegada conveniente (coincidente com o contradomínio!), a função é bijectiva e portanto invertível.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad exponencial \quad} & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & y = a^x \end{array}$$



A função inversa f^{-1} é chamada **função logarítmica de base** a e denotada por $\log_a(\cdot)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \underset{\text{logaritmo}}{\overset{\text{exponencial}}{\rightleftarrows}} & [0, +\infty[\\ x = \log_a(y) & \longleftrightarrow & y = a^x \end{array}$$

Usando a formulação de inversa, tem-se então

$$\boxed{\log_a(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x}$$

o que significa que para $x > 0$, $\log_a(x)$ é o expoente ao qual se deve elevar a de modo a obter x.

Observação 1.15. *Note-se a diferença entre o radical* $\sqrt[a]{x}$ *e o logaritmo* $\log_a(x)$. *O primeiro é relativo à base enquanto o segundo é relativo ao expoente. Por exemplo,*

$$\sqrt{16} = 4\,, \ \textit{porque} \ 4^2 = 16\,.$$

Por sua vez

$$\log_2(8) = 3\,, \ \textit{porque} \ 2^3 = 8\,.$$

Exemplo 1.23.

1. $\log_2(16) = 4$, *porque* $2^4 = 16$.

2. $\log_8(2) = \frac{1}{3}$, *porque* $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

3. $\log_{10}(0.001) = -3$, *porque* $10^{-3} = 0.001$.

Decorre da própria definição de logaritmo (inversa da exponencial) que

1. $\log_a(a^x) = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$;

2. $a^{\log_a(x)} = x$, qualquer que seja $x > 0$.

É habitual usar a notação $\log(x)$ para representar $\log_{10}(x)$ e $\ln(x)$ para representar o logaritmo de base natural $\log_e(x)$, pelo que

1. $\ln(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = e^y$;
2. $\ln(e^x) = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$;
3. $e^{\ln(x)} = x$, qualquer que seja $x > 0$;
4. $\ln(e) = 1$

Exemplo 1.24.

1. $\log_5(25) = \log_5(5^2) = 2$;

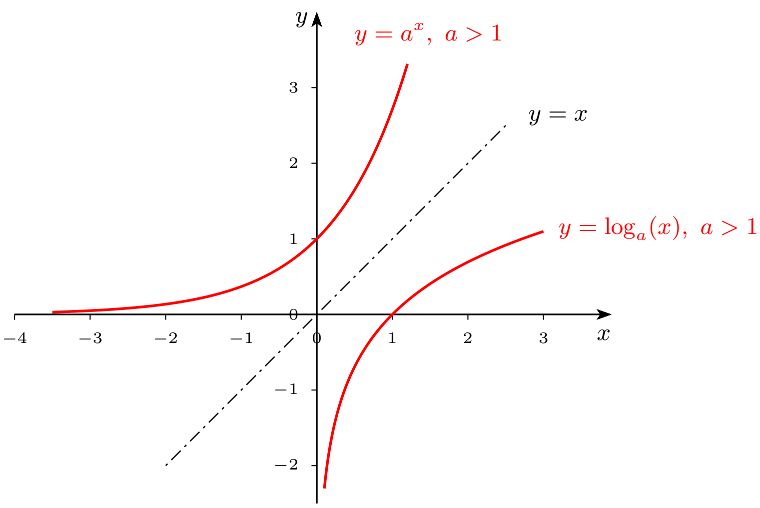
2. $\ln\left(e^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$;

3. $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$;

4. $10^{\log(5)} = 5$.

No que se segue consideraremos apenas o caso da exponencial de base superior a 1.

O gráfico da função logaritmo pode obter-se através da simetria do gráfico da exponencial (com a mesma base) relativamente à recta $y = x$.



O gráfico anterior permite verificar alguns aspectos relevantes. Por exemplo, o domínio de uma função logarítmica é $D =]0, +\infty[$ e o contradomínio é $CD = \mathbb{R}$. Além disso, $\log_a(1) = 0$, pelo que o gráfico de qualquer função logarítmica passa pelo ponto $(1, 0)$.

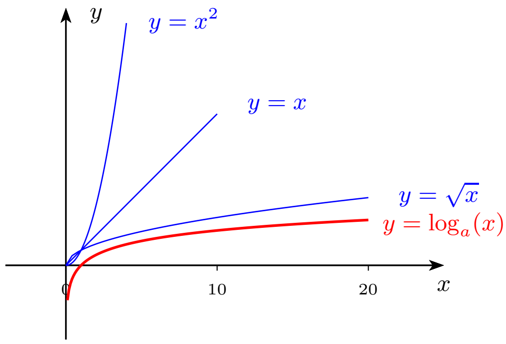
Tal como as funções exponenciais, as funções logarítmicas mais importantes têm base $a > 1$.

O crescimento logarítmico

Recordamos que uma das características mais marcantes da função exponencial é o seu crescimento rápido. Tendo em conta que a função logarítmica é a função inversa da exponencial e as características daí decorrentes (nomeadamente que o gráfico do logaritmo é uma simetria do gráfico da exponencial relativamente à recta $y = x$), é fácil intuir que um logaritmo $y = \log_a(x)$ é uma função de crescimento lento. Por exemplo, $\log_a(x)$ **cresce mais lentamente do que qualquer potência** (positiva) de x (e portanto que qualquer polinómio), pelo que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a(x)}{x^p} = 0\,,$$

qualquer que seja $p \in \mathbb{R}^+$, conforme ilustrado na figura seguinte.



O logaritmo verifica algumas propriedades no que respeita às operações de multiplicação e de divisão. que obedecem ao padrão habitual (produtos dão origem a somas, divisões dão origem a subtracções...)

Lei $(a \in \mathbb{R}^+,\ x, y \in \mathbb{R}^+)$	Exemplos
$\log_a(x\times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\ln(2e) = \ln(2) + \ln(e) = \ln(2) + 1$
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(1) - \ln(e) = -1$
$\log_a\left(x^k\right) = k\log_a(x), \quad k \in \mathbb{R}$	$\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2$

Mudança de base

Em algumas calculadoras só é possível determinar logaritmos de base e ou base 10. Nessas condições, para calcular um logaritmo de outra base, basta recorrer à fórmula da mudança de base

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

para quaisquer bases $a, b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ e qualquer $x > 0$. Da fórmula anterior decorre, em particular, que (logaritmos de base e e base 10)

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\log(x)}{\log(a)}\,.$$

Exemplo 1.25. *Para calcular* $\log_3(5)$ *recorrendo a uma calculadora na qual apenas estejam disponíveis os logaritmos de base* e *ou base* 10 *podemos considerar, por exemplo,*

$$\log_3(5) = \frac{\ln(5)}{\ln(3)}\,.$$

A fórmula de mudança de base também é útil para simplificar expressões numéricas. Por exemplo,

$$\log_8(2) = \frac{\log_2(2)}{\log_2(8)} = \frac{1}{\log_2(2^3)} = \frac{1}{3}\,.$$

Capítulo 2

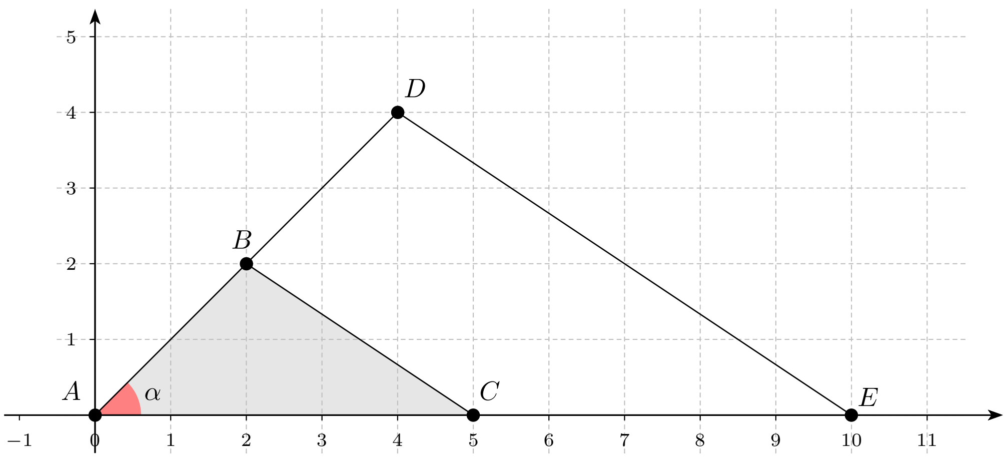
Trigonometria

2.1 Noções de trigonometria

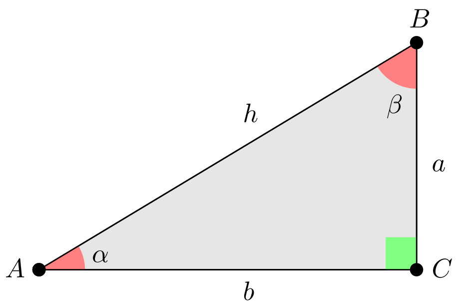
Neste capítulo vamos explorar algumas noções de trigonometria.

A trigonometria é o ramo da Matemática que estuda as relações existentes entre os ângulos e os lados de um triângulo, de modo a determinar os elementos desconhecidos recorrendo aos já conhecidos. Esse estudo tem por base o conceito de semelhança, que por sua vez assenta na forma e no tamanho, de modo a que sejam preservadas a forma e a proporção. Assim, dois triângulos são ditos semelhantes se um puder ser obtido pela expansão uniforme do outro, isto é, se os ângulos correspondentes forem iguais. Em triângulos semelhantes os comprimentos dos seus lados são proporcionais pelo que se, por exemplo, o lado maior de um triângulo é duas vezes maior que o lado do triângulo que lhe é semelhante, então o menor lado também será duas vezes maior que o menor lado do outro triângulo e o comprimento do lado médio será duas vezes o valor do lado correspondente do outro triângulo. Então, por exemplo, a razão entre os lados maior e menor do primeiro triângulo será a mesma razão dos lados maior e menor de qualquer triângulo que lhe seja semelhante. Os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ da figura seguinte são semelhantes pelo que, por exemplo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$$



O maior ângulo de um triângulo rectângulo é sempre o ângulo recto. De facto, como a soma dos três ângulos internos de um triângulo é 180 graus (independentemente do triângulo ser ou não um triângulo rectângulo), então a soma dos dois ângulos não rectos perfaz 90 graus e portanto cada um deles terá uma amplitude inferior a 90 graus. Sendo o ângulo recto o maior do triângulo rectângulo, então o lado que lhe é oposto é o maior lado do triângulo (facto que se justifica recorrendo ao teorema dos senos). Esse lado é chamado hipotenusa, sendo os outros lados (menores) designados de catetos.



Dois triângulos rectângulos que compartilham um segundo ângulo são obrigatoriamente triângulos semelhantes pelo que a razão (isto é, a divisão!) entre o comprimento do lado oposto a esse ângulo e o comprimento da hipotenusa será a mesma nos dois triângulos. Esse valor é um número entre 0 e 1 e é designado **seno** do ângulo. De modo análogo, a razão entre o comprimento do lado adjacente a esse ângulo e o comprimento da hipotenusa também será constante. Essa razão é designada de **cosseno**.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h},$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

Estas são as duas razões trigonométricas mais importantes e todas as outras podem ser definidas tomando as razões dos outros lados do triângulo retângulo, mas também podem ser expressas em termos de seno e cosseno. São elas a tangente, secante, cotangente e cossecante.

A **tangente** de α é a proporção entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo α e o comprimento do cateto adjacente, pelo que também pode ser obtida pela razão entre seno e cosseno,

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{h\,\sin(\alpha)}{h\,\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

A **cotangente** de α é a proporção entre os comprimentos dos catetos adjacente e oposto, pelo que também pode ser expressa através da razão entre cosseno e seno, ou ainda pelo inverso da tangente,

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{h\,\cos(\alpha)}{h\,\sin(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}.$$

A secante e a cossecante são definidas pelo inverso do cosseno e do seno, respectivamente, pelo que também podem ser expressas pelas razões entre a hipotenusa e os catetos adjacente e oposto, respectivamente.

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}},$$
$$\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}.$$

As funções trigonométricas anteriores estão definidas para ângulos entre 0 e 90 graus. Porém, recorrendo ao círculo unitário é possível estender as definições para todos argumentos positivos e negativos, como será explicado mais à frente.

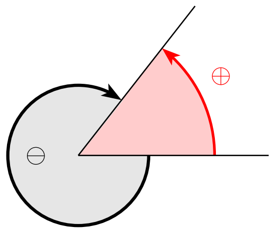
Recorrendo a ábacos, a calculadoras ou a um computador pode-se responder a qualquer questão sobre triângulos arbitrários, eventualmente recorrendo às leis dos senos e dos cossenos. Estas leis podem ser usadas para calcular os ângulos e lados de qualquer triângulo (não necessariamente rectângulo), desde que sejam conhecidos dois lados e um ângulo, dois ângulos e um lado ou três lados.

A todo o valor do ângulo α corresponde um e um só valor para cada uma das seis razões consideradas, pelo que estas razões são funções do ângulo α. Tais funções são chamadas funções circulares ou **funções trigonométricas**.

2.1.1 Ângulos

Sentido dos ângulos

Existem dois sentidos para marcação dos arcos no círculo. O sentido positivo (ou anti-horário) corresponde àquele que se dá a partir do eixo Ox e com sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. O sentido negativo (ou horário) é o contrário ao anterior.



Unidades de medida

As unidades de medida dos ângulos são radianos, graus e grados. A escala de radianos é a escala natural (adimensional) mas tem a dificuldade de, na maior parte dos casos, recorrer a valores não inteiros e, em alguns casos, até irracionais pelo que é habitual referenciar os ângulos em graus. A conversão de graus para radianos faz-se com base na correspondência

$$90^o \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

Os ângulos de 30^o, 45^o e 60^o são denominados ângulos de referência e são os mais usados em termos académicos. Uma vez que 180 graus correspondem a π radianos, estes ângulos correspondem a $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ radianos.

graus	0	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o	360^o
radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

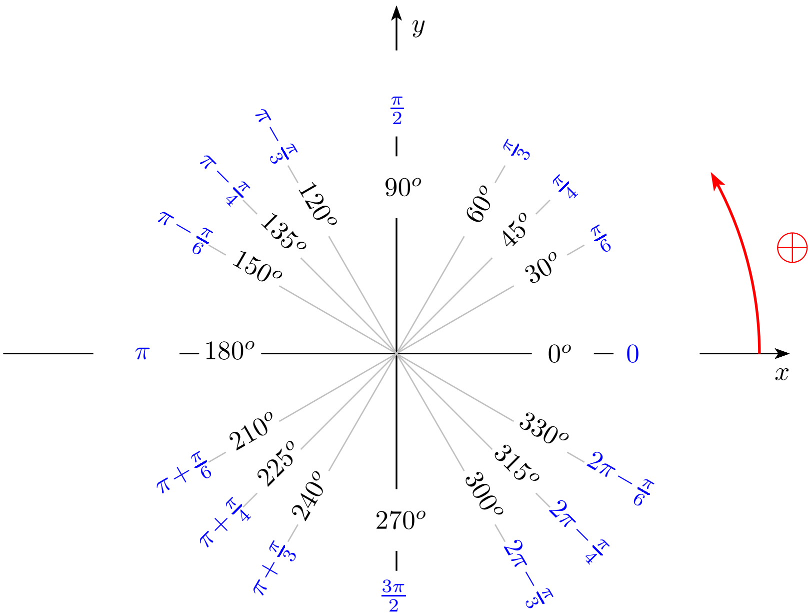
Recorrendo aos ângulos de referência podemos obter outros ângulos que os têm como complementos, isto é, ângulos da forma

$$k \cdot \pi \pm x\,,$$

onde k é inteiro e x é um dos ângulos de referência. Numa volta completa obtêm-se então ângulos

1^o quadrante	$0+\frac{\pi}{6}$	$0+\frac{\pi}{4}$	$0+\frac{\pi}{3}$
2^o quadrante	$\pi-\frac{\pi}{6}$	$\pi-\frac{\pi}{4}$	$\pi-\frac{\pi}{3}$
3^o quadrante	$\pi+\frac{\pi}{6}$	$\pi+\frac{\pi}{4}$	$\pi+\frac{\pi}{3}$
4^o quadrante	$2\pi-\frac{\pi}{6}$	$2\pi-\frac{\pi}{4}$	$2\pi-\frac{\pi}{3}$

que estão representados na figura seguinte.



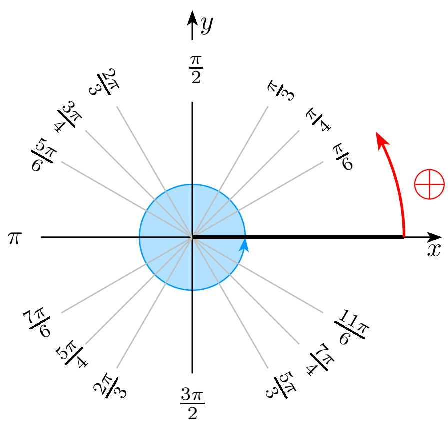
Exemplo 2.1. *No que se segue vamos representar os ângulos*

1. 6π ;
2. $\dfrac{31\pi}{3}$;
3. $\dfrac{31\pi}{6}$;
4. $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. *Uma vez que*

$$6\pi = \underbrace{3 \cdot 2\pi}_{\textit{3 voltas}},$$

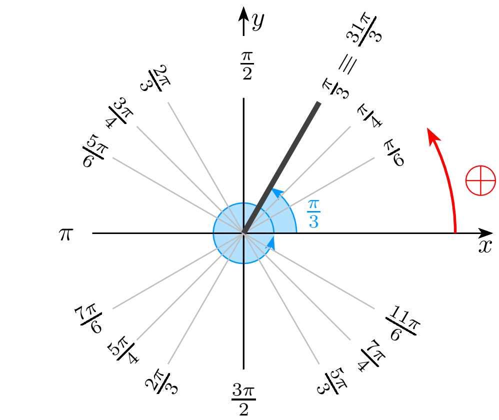
então o ângulo corresponde a 3 *voltas completas no sentido positivo.*



2. *Uma vez que*

$$\frac{31\,\pi}{3} = \frac{30\,\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \underbrace{10\pi}_{\textit{5 voltas}} + \frac{\pi}{3}\,,$$

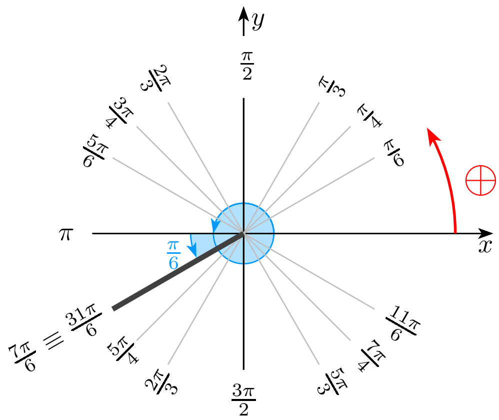
então



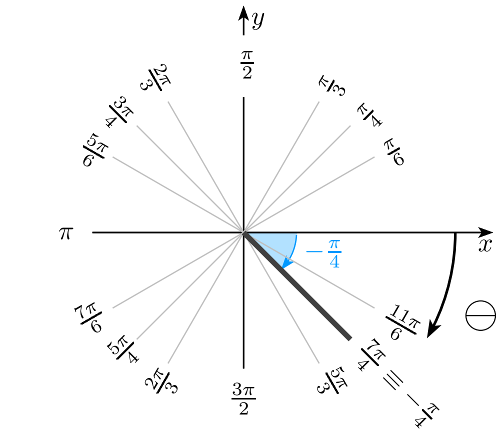
3. *Uma vez que*

$$\frac{31\,\pi}{6} = \frac{30\,\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \underbrace{5\pi}_{\substack{\textit{2 voltas}\\ \textit{e meia}}} + \frac{\pi}{6}\,,$$

então



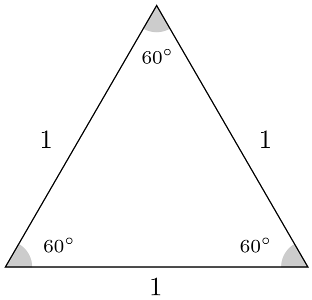
4. *Atendendo a que o sentido negativo é o sentido horário, tem-se imediatamente*



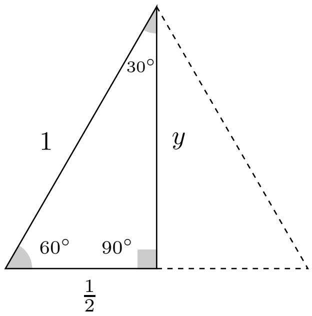
O seno e o cosseno nos ângulos de referência

No que se segue vamos determinar os valores exactos do seno e do cosseno, as razões trigonométricas de referência, nos ângulos $30°$, $45°$ e $60°$.

Consideremos um triângulo equilátero de lado com comprimento igual a uma unidade. Uma vez que o triângulo é equilátero, então os seus ângulos internos são todos iguais e, portanto, medem todos $60°$.



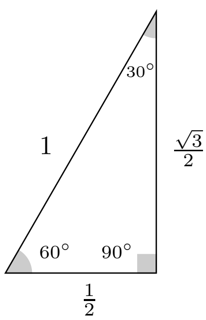
Consideremos agora o triângulo que se obtém do triângulo anterior por divisão ao meio de um dos seus lados. Esse triângulo é rectângulo, tem ângulos internos de amplitude $30°$, $60°$ e $90°$, hipotenusa de comprimento 1 e um dos catetos de comprimento $\frac{1}{2}$, conforme ilustrado na figura seguinte.



Uma vez que o triângulo é rectângulo, a medida do outro cateto pode ser determinada recorrendo ao teorema de Pitágoras. Assim,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como se trata de uma medida, então y é positivo e portanto $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



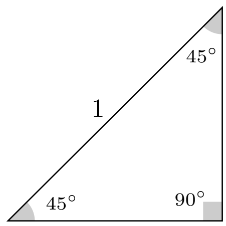
Recorrendo ao triângulo rectângulo anterior e às definições de seno e cosseno, tem-se então

$$\sin(60°) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos(60°) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

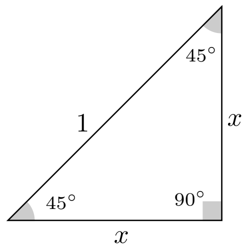
e ainda

$$\sin(30°) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$
$$\cos(30°) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Para determinar os valores exactos de seno e cosseno no ângulo de $45°$, vamos considerar o triângulo rectângulo isósceles com hipotenusa de comprimento 1 da figura seguinte.



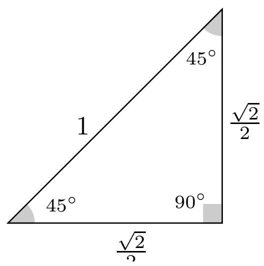
Sendo o triângulo isósceles então os catetos têm os dois o mesmo comprimento x.



Esse comprimento pode ser determinado recorrendo, novamente, ao teorema de Pitágoras. Assim,

$$x^2 + x^2 = 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uma vez que se trata de uma medida, então x é positivo e portanto $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim,

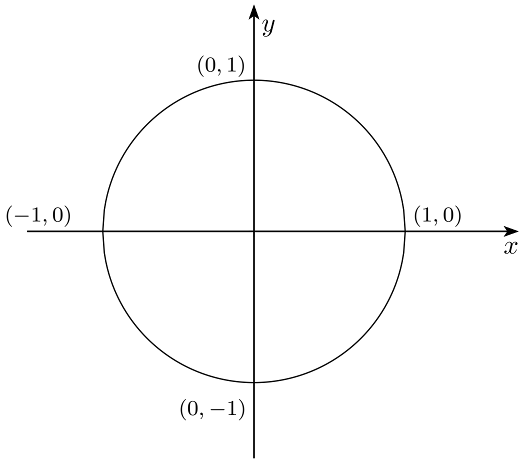


Recorrendo ao triângulo rectângulo anterior e às definições de seno e cosseno, tem-se então

$$\sin(45°) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos(45°) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.1.2 O círculo trigonométrico

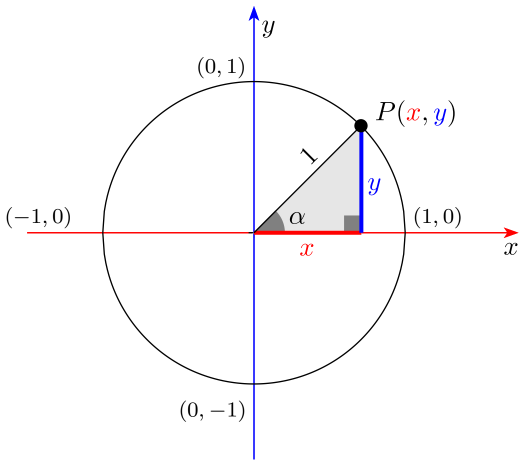
O círculo trigonométrico é um recurso criado para facilitar a visualização das proporções trigonométricas e corresponde a uma circunferência de centro na origem dos eixos (do plano cartesiano ortogonal) e raio 1, conforme representado na figura seguinte.



As razões trigonométricas no círculo trigonométrico

As razões trigonométricas do ângulo α podem ser identificadas no círculo trigonométrico. No que se segue vamos dar destaque especial ao seno e ao cosseno, uma vez que todas as outras razões podem descrever-se a partir daquelas. Também é possível interpretar no círculo trigonométrico a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante, mas como essas razões podem descrever-se recorrendo a senos e cossenos, o recurso directo ao círculo é desnecessário.

Se $P(x,y)$ é um ponto da circunferência então podemos definir o triângulo rectângulo que tem como hipotenusa o segmento que une a origem $(0,0)$ ao ponto P e como catetos os lados definidos pelas coordenadas x e y do ponto, conforme a figura seguinte.

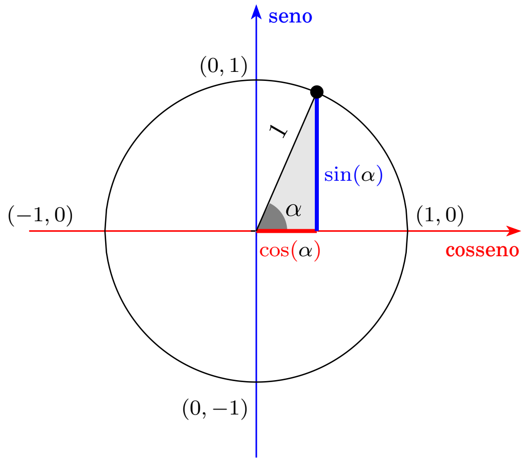


Considerando o ângulo α definido pela hipotenusa e pelo cateto horizontal, tem-se

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x\,,$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y\,,$$

ou seja, o cosseno e o seno do ângulo correspondem à abcissa e à ordenada do ponto P, respectivamente. Note-se que, se pudermos recorrer a um instrumento de mediação suficientemente preciso (o que não é o caso de uma régua tradicional, graduada em milímetros!) ou a uma representação de dimensões suficientemente generosas, para obter o seno e o cosseno de um ângulo bastaria medir, com rigor suficiente, os comprimentos indicados, conforme ilustrado na figura seguinte.



O círculo trigonométrico é uma ferramenta fundamental em trigonometria, pela forma como permite interpretar resultados e sugerir simplificações, pelo que a sua utilização facilita o uso das razões trigonométricas, como ilustraremos ao longo deste texto. Por exemplo, podemos recorrer ao círculo trigonométrico para intuir a fórmula fundamental da trigonometria. Como, na figura anterior, o triângulo é rectângulo, se aplicarmos o teorema de Pitágoras e a interpretação dadas às coordenadas x e y, tem-se

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

ou seja,

$$\big(\cos(\alpha)\big)^2 + \big(\sin(\alpha)\big)^2 = 1\,.$$

Observação 2.1. *A notação $\cos^2(\alpha)$ é equivalente a $\big(\cos(\alpha)\big)^2$, mas tem a vantagem de evitar o uso de parênteses. Recorrendo a essa notação, a fórmula fundamental da trigonometria pode ser apresentada na forma*

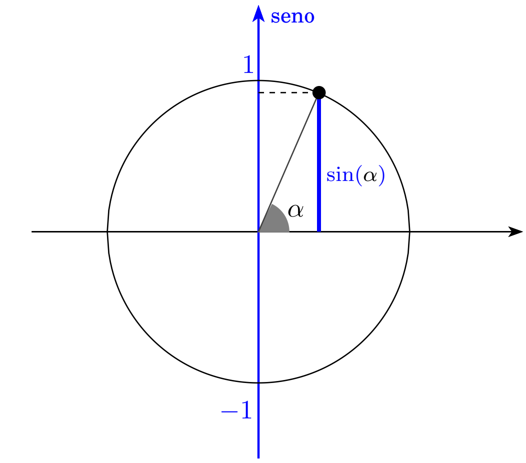
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1\,.$$

O círculo trigonométrico também permite intuir que o seno e cosseno são razões periódicas. De facto, como os ângulos α e $\alpha + k \cdot 2\pi$ têm a mesma terminação, qualquer que seja o número inteiro k, então

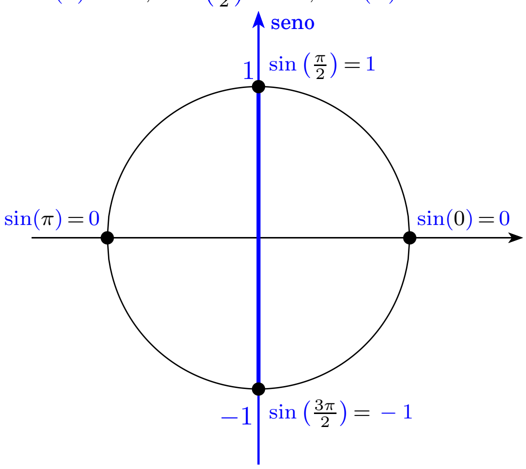
$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$$
$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)\,.$$

Seno

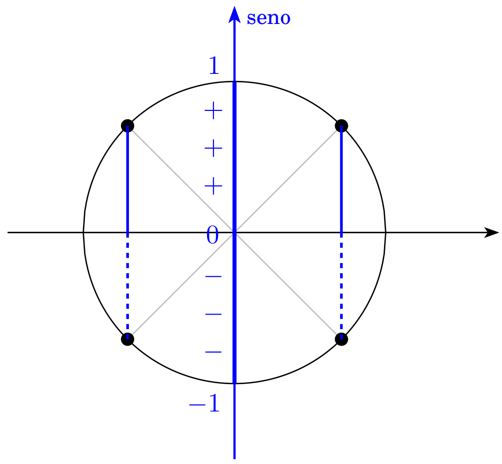
No que se segue vamos recorrer ao círculo trigonométrico para intuir os valores do seno associados aos ângulos de referência. Começamos por recordar que no círculo o seno do ângulo corresponde à ordenada (y) do ponto de intersecção da circunferência com o segmento que define o ângulo.



Daqui decorre, por exemplo, que $\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin(\pi) = 0$ e $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$,



e que o seno de um ângulo é sempre um valor entre -1 e 1, positivo para ângulos com extremidade no primeiro e no segundo quadrantes e negativo para ângulos com extremidade nos terceiro e quarto quadrantes.

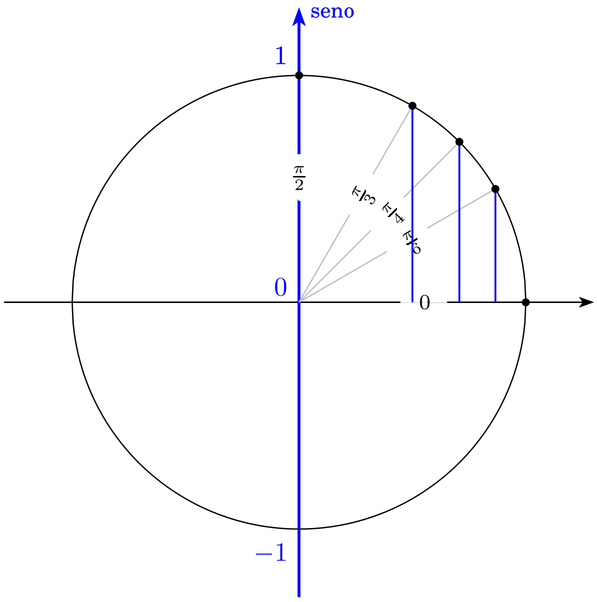


Provámos anteriormente que os valores do seno nos ângulos de referência, de $30°$, $45°$ e $60°$, são $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectivamente. Vamos agora ilustrar como podemos recorrer ao círculo trigonométrico para intuir a correspondência entre os ângulos de referência e os valores anteriores.

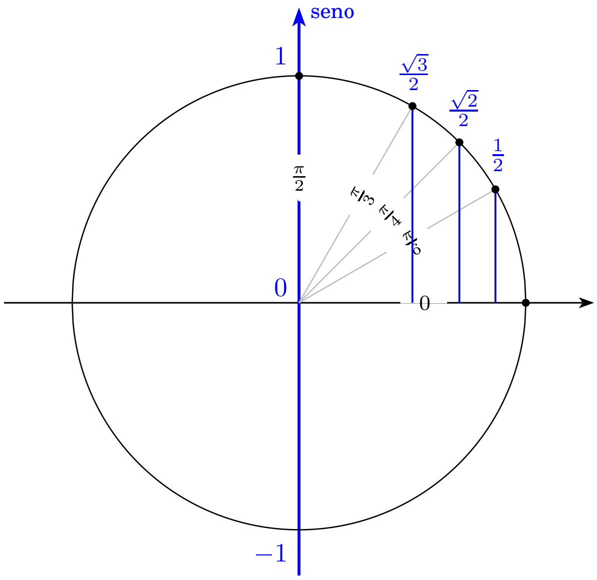
Atendendo à grandeza relativa das medidas,

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e à representação dos senos dos ângulos de referência no círculo trigonométrico,



intui-se imediatamente

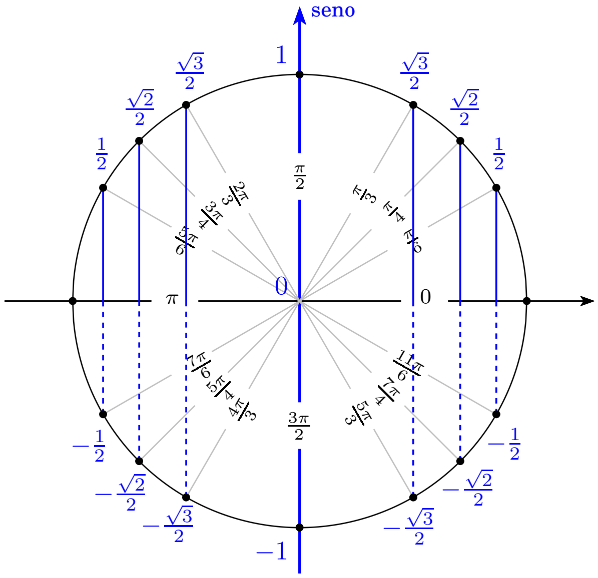


graus	0	30	45	60	90	180	270
radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

O mesmo pode ser feito para qualquer ângulo da forma

$$k \cdot 2\pi + x\,,$$

em que x seja um dos ângulos de referência. Nesse caso, numa volta completa ao círculo (tendo em conta as dimensões relativas e os sinais do seno em cada quadrante), tem-se



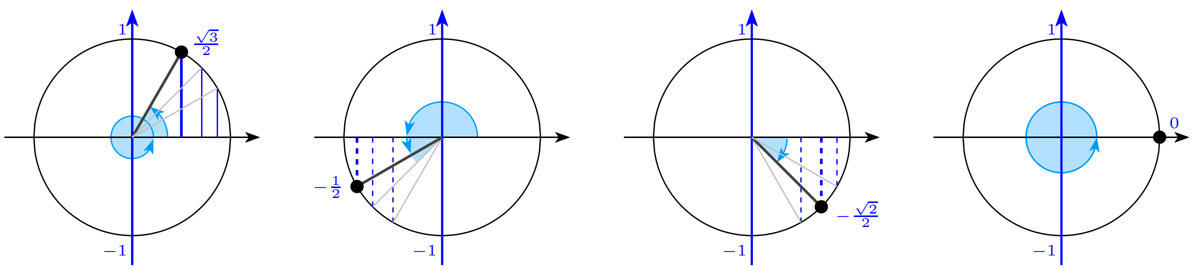
Exemplo 2.2. *Vamos calcular o valor da seguinte expressão numérica, ilustrando no círculo trigonométrico os cálculos realizados,*

$$\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{31\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{31\pi}{6}\right) + \sqrt{2}\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin(6\pi)\,.$$

Todos os ângulos envolvidos no cálculo já foram representados no exemplo 2.1, pelo que recorrendo ao círculo trigonométrico e aos valores nos ângulos de referência, tem-se

$$\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{31\pi}{3}\right) \qquad + \sin\left(\frac{31\pi}{6}\right) \qquad + \sqrt{2}\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \qquad + \sin(6\pi)$$

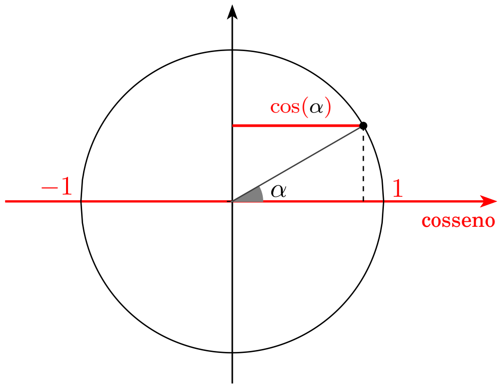
$$\begin{aligned}\frac{31\,\pi}{3} &= \frac{30\,\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\\ &= 10\pi + \frac{\pi}{3}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{31\,\pi}{6} &= \frac{30\,\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\\ &= 5\pi + \frac{\pi}{6}\end{aligned} \qquad -\frac{\pi}{4} \qquad 6\pi$$



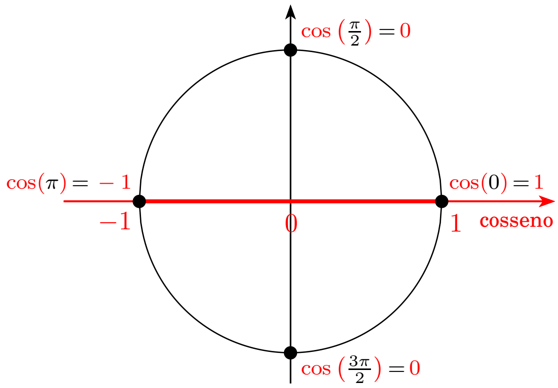
$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Cosseno

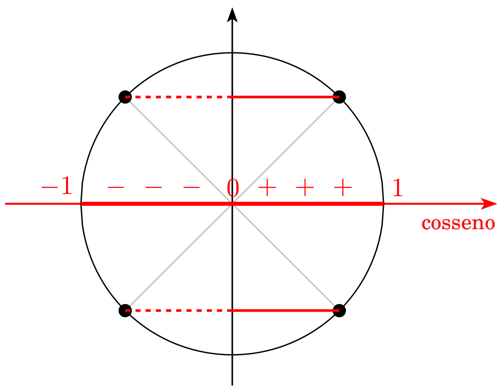
Seguindo o raciocínio anterior, vamos agora analisar o comportamento do cosseno. Recordamos que no círculo o cosseno do ângulo corresponde à abcissa (x) do ponto de intersecção da circunferência com o segmento que define o ângulo.



Daqui decorre, por exemplo, que $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$ e $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$,



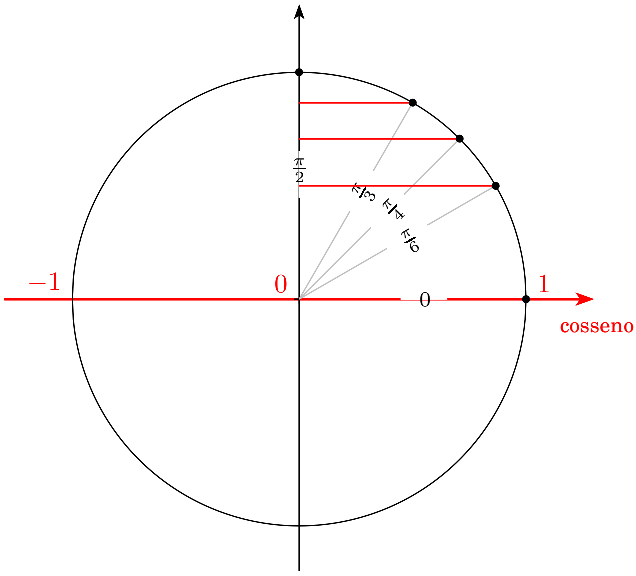
e ainda que o cosseno de um ângulo é sempre um valor entre -1 e 1, positivo para ângulos com extremidade no primeiro e no quarto quadrantes e negativo para ângulos com extremidade nos segundo e terceiro quadrantes.



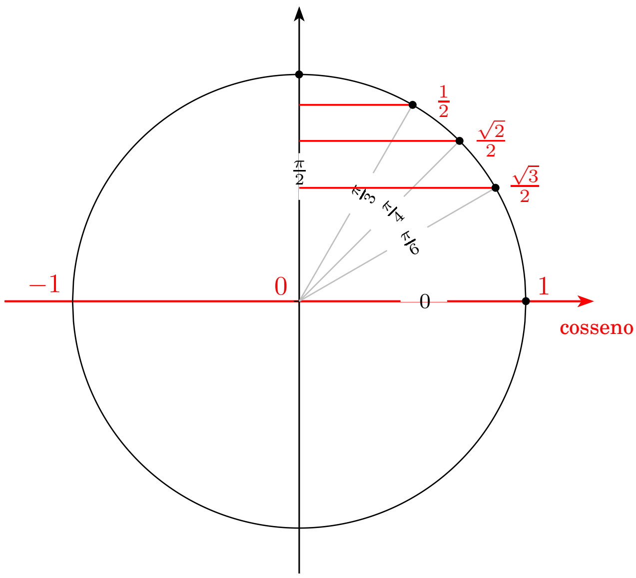
Os valores de cosseno associados aos ângulos de referência são exactamente os mesmos do seno mas, como é notório do círculo, obedecem a uma correspondência diferente. De facto, atendendo à grandeza relativa das medidas

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e à representação dos cossenos dos ângulos de referência no círculo trigonométrico,



intui-se imediatamente

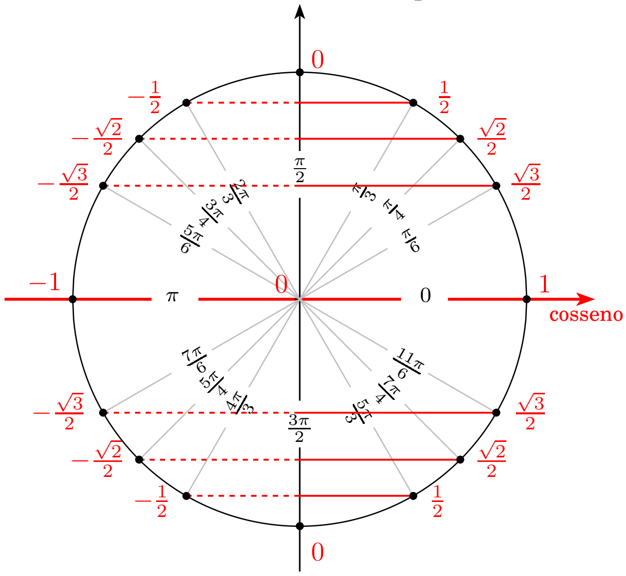


graus	0	30	45	60	90	180	270
radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

O mesmo pode ser feito para qualquer ângulo da forma

$$k \cdot 2\pi + x\,,$$

em que x seja um dos ângulos de referência. Nesses casos, numa volta completa ao círculo (tendo em conta as dimensões relativas e os sinais do cosseno em cada quadrante), tem-se

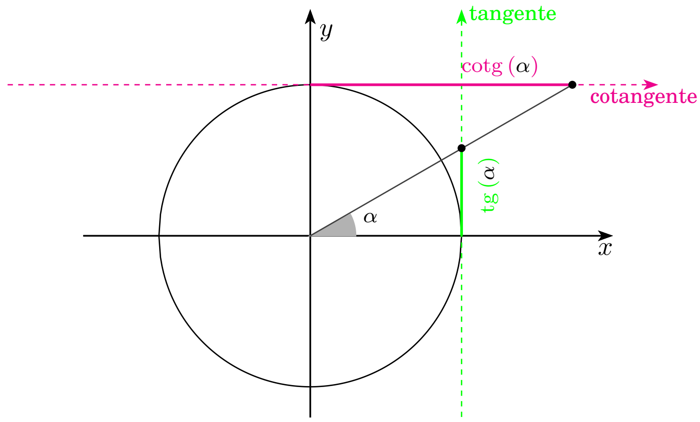


Tangente e cotangente

Recordamos que, dado um triângulo rectângulo, a tangente de um dos seus dois ângulos agudos é a razão entre o comprimento do cateto oposto a esse ângulo e o comprimento do cateto adjacente ao mesmo. Observamos que uma razão é definida pela divisão de um valor por outro. Porém a tangente também corresponde à razão entre o seno e o cosseno desse ângulo, pelo que o cálculo é mera consequência daqueles. Nessa óptica, o recurso ao círculo trigonométrico não é necessário, pelo que será apresentado apenas a título de curiosidade. O mesmo sucede relativamente à cotangente.

No círculo trigonométrico, o valor da tangente de um ângulo pode ser visualizado na recta (vertical) que é tangente ao círculo no ponto $(1,0)$. Nesta recta, o valor da tangente do ângulo corresponde ao segmento que vai do ponto em que ela corta o eixo horizontal até ao ponto em que ela corta o segmento definido pelo ângulo, ou seja, corresponde à ordenada do ponto de intersecção do ângulo com a tangente vertical.

No caso da cotangente a interpretação é idêntica, mas recorrendo à recta (horizontal) que é tangente ao círculo $(0,1)$. Nesta recta, o valor da cotangente do ângulo corresponde ao segmento que vai do ponto em que ela corta o eixo vertical até o ponto em que ela corta o segmento definido pelo ângulo, ou seja, corresponde à abcissa do ponto intersecção do ângulo com a tangente horizontal.



Da análise da figura anterior decorre que:

- o seno e o cosseno nunca são superiores ao raio do círculo trigonométrico, isto é, não são superiores a 1, mas a tangente pode assumir qualquer valor real;

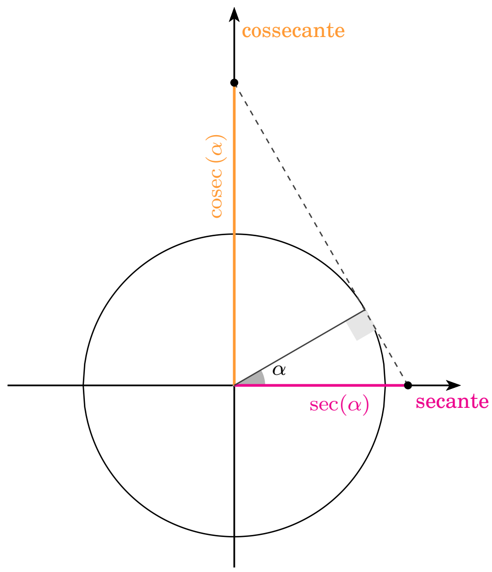
- a tangente não está definida nos ângulos 90 e 270 graus (e, por periodicidade, em ângulos da forma $90 + k \cdot 180$, para qualquer k inteiro), uma vez que o ângulo tem eixo paralelo à tangente vertical e, portanto, nunca intersecta essa tangente; Analiticamente, esta situação corresponde a uma divisão por zero, já que o cosseno nestes ângulos é igual a zero;

- a cotangente não está definida nos ângulos 0 e 180 graus (e por, periodicidade, em ângulos da forma $k \cdot 180$, para qualquer k inteiro), uma vez que o ângulo tem eixo paralelo à tangente horizontal e, portanto, não intersecta essa tangente; Analiticamente, esta situação corresponde a uma divisão por zero, já que o seno nestes ângulos é igual a zero.

Secante e cossecante

Recordamos que a secante e a cossecante são definidas como o inverso (não confundir com a função inversa!) do cosseno e de seno, respectivamente, pelo que todos os cálculos podem ser feitos recorrendo àqueles. Nessa óptica, e tal como acontece no caso da tangente e da cotangente, o recurso ao círculo trigonométrico não é necessário, pelo que será novamente apresentado a título de curiosidade.

No círculo trigonométrico, marca-se o ângulo α e a tangente à circunferência no ponto onde o ângulo a intersecta. A secante corresponde à abcissa do ponto de intersecção dessa recta tangente com o eixo Ox enquanto a cossecante corresponde à ordenada do ponto de intersecção dessa tangente com o eixo Oy, conforme ilustrado na figura seguinte.



Da análise da figura anterior decorre que:

- a secante não está definida nos ângulos 90 e 270 graus (e, por periodicidade, em ângulos da forma $90 + k \cdot 180$, para qualquer k inteiro), uma vez que o ângulo tem tangente à circunferência paralela ao eixo Ox e portanto essa tangente nunca intersecta o eixo Ox; Analiticamente, esta situação corresponde a uma divisão por zero, já que o cosseno nestes ângulos é igual a zero;

- a cossecante não está definida nos ângulos de 0 e 180 graus (e, por periodicidade, em ângulos da forma $k \cdot 180$, para qualquer k inteiro), uma vez que o ângulo tem tangente à circunferência paralela ao eixo Oy e portanto essa tangente nunca intersecta o eixo Oy; Analiticamente, esta situação corresponde a uma divisão por zero, já que o seno nestes ângulos é igual a zero.

Recorrendo às definições de tangente e cotangente, secante e cossecante e aos valores do seno e do cosseno nos ângulos de referência, obtém-se a seguinte tabela:

graus	0	30	45	60	90	180	270
radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$N.D.$	0	$N.D.$
cotangente	$N.D.$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$N.D.$	0
secante	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$N.D.$	-1	$N.D.$
cossecante	$N.D.$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$N.D.$	-1

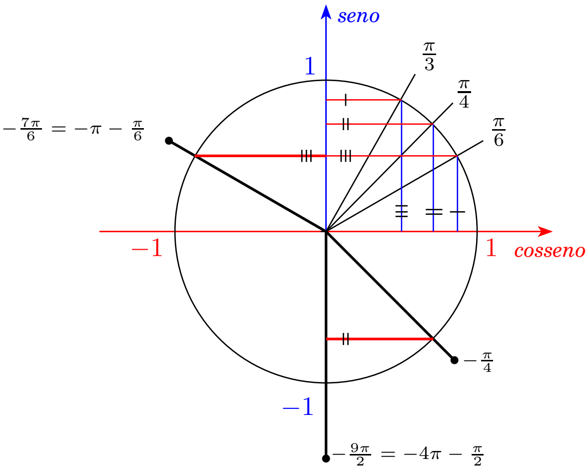
Exemplo 2.3. *Vamos calcular o valor da expressão numérica*

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{cosec}\left(-\frac{9\pi}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência.

Reescrevendo a expressão recorrendo apenas às funções seno e cosseno e tendo em conta os ângulos de referência, tem-se

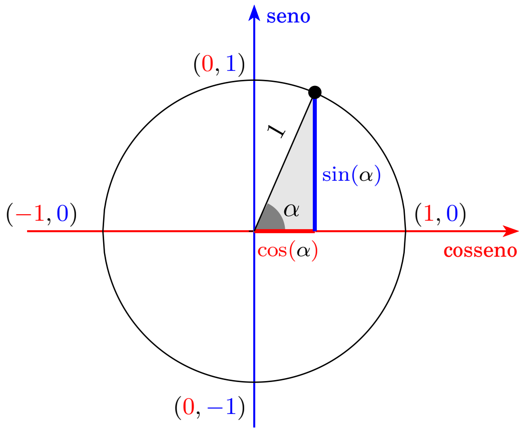
$$\begin{aligned}
& \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{cosec}\left(-\frac{9\pi}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
= \; & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \frac{1}{\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{1} + \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{6\sqrt{3}}{6} - \frac{4\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{6} \\
= \; & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{7\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$



2.2 Identidades trigonométricas

Algumas equações envolvendo funções trigonométricas são verdade para todos os ângulos e, por isso, são conhecidas como identidades trigonométricas. Muitas delas expressam relações geométricas importantes e podem ser ilustradas recorrendo ao círculo trigonométrico. Por exemplo, vimos anteriormente que recorrendo à interpretação do seno e do cosseno no círculo trigonométrico e ao teorema de Pitágoras obtemos a **fórmula fundamental da trigonometria**,

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \ = \ 1}.$$



Esta identidade relaciona o seno e o cosseno de um ângulo pelo que, conhecida uma das razões podemos usá-la para calcular a outra.

Recorrendo à fórmula fundamental e a manipulações algébricas simples, podemos obter novas identidades. Por exemplo, dividindo ambos os membros da fórmula fundamental por $\cos^2(\alpha)$, tem-se

$$\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \ = \ \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \, ,$$

pelo que, recorrendo às definições de tangente e de secante,

$$\boxed{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha) \ = \ \sec^2(\alpha)}.$$

Por outro lado, se dividirmos ambos os membros da fórmula fundamental da trigonometria por $\sin^2(\alpha)$, tem-se

$$\frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)},$$

ou seja, recorrendo às definições de cotangente e de cossecante,

$$\boxed{\operatorname{cotg}^2(\alpha) + 1 = \operatorname{cosec}^2(\alpha)}.$$

Exemplo 2.4. *Utilizemos as identidades trigonométricas anteriores para resolver os seguintes problemas:*

1. *Sabendo que* α *é um ângulo do primeiro quadrante tal que* $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$, *determine* $\cos(\alpha)$.
2. *Sabendo que* α *é um ângulo do segundo quadrante tal que* $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$, *determine* $\operatorname{tg}(\alpha)$.

O primeiro problema é mais simples que o segundo, porque o valor do seno é um dos valores de referência.

1. *Neste caso o problema é simples e nem sequer são necessárias identidades trigonométricas para o resolver. De facto, sendo* α *um ângulo do primeiro quadrante tal que* $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$, *então* α *é o ângulo notável* $\alpha = \frac{\pi}{6}$ *e portanto* $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. *Neste caso* α *não é um ângulo notável, não só porque não é um ângulo do primeiro quadrante mas principalmente porque* $\frac{3}{5}$ *não é um dos valores de referência, pelo que não é possível resolver este problema como o anterior. Note-se, porém, que não é importante (nem requerido) determinar o ângulo* α, *desde que seja possível determinar o valor de* $\operatorname{tg}(\alpha)$. *Uma vez que*

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

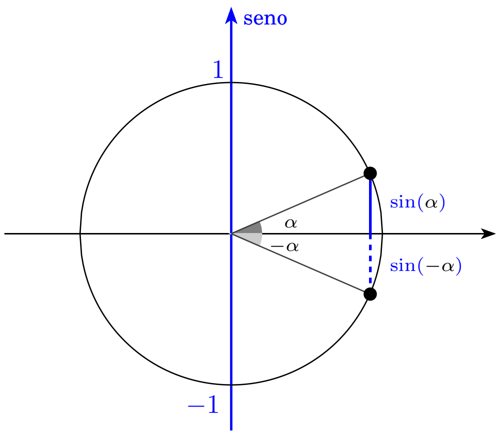
e já conhecemos o valor de $\sin(\alpha)$, *se conseguirmos determinar o valor de* $\cos(\alpha)$ *também conseguimos determinar o valor da tangente. Como a fórmula fundamental da trigonometria relaciona o seno com o cosseno, no mesmo ângulo, podemos usá-la para efectuar o cálculo pretendido. Assim,*

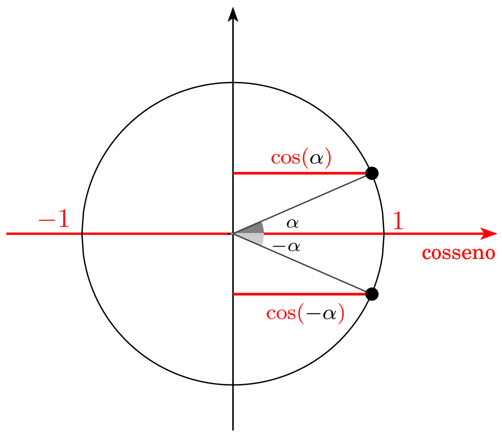
$$\begin{aligned} & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2(\alpha) + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2(\alpha) = 1 - \tfrac{9}{25} \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2(\alpha) = \tfrac{16}{25} \\ \Leftrightarrow\ & \cos(\alpha) = \pm\tfrac{4}{5}. \end{aligned}$$

A escolha do sinal é efectuada tendo em conta que α *é um ângulo do segundo quadrante, pelo que o cosseno é negativo. Então* $\cos(\alpha) = -\frac{4}{5}$ *e consequentemente*

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Regressemos ao círculo trigonométrico para intuir mais algumas identidades trigonométricas. Do círculo decorre imediatamente que





$\sin(\,-\,\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\qquad$ $\cos(\,-\,\alpha) = \cos(\alpha)$

isto é, as funções seno e cosseno são ímpar e par, respectivamente.

Uma vez que os ângulos α e $\alpha + 2\pi$ têm o mesmo lado extremidade, tem-se também

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha)\,, \end{aligned}$$

o que mostra que estas funções são periódicas de período 2π.

Outras fórmulas de grande importância são as identidades da soma e da diferença de dois ângulos (seno e cosseno).

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

A interpretação destas identidades no círculo não é imediata e a sua dedução pode ser efectuada recorrendo a argumentos geométricos ou a análise complexa.

Observação 2.2. *A demonstração das identidades anteriores recorrendo a argumentos geométricos não é elementar pelo que apresentamos, apenas a título de curiosidade, a demonstração das identidades*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

e

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

recorrendo a análise complexa. Atendendo a que

$$e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\,,$$

tem-se

$$e^{(\alpha+\beta)i} = \cos(\alpha + \beta) + i\,\sin(\alpha + \beta)\,.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} e^{\alpha i}\,e^{\beta i} &= \big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big)\big(\cos(\beta) + i\sin(\beta)\big) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + i\cos(\alpha)\sin(\beta) + i\sin(\alpha)\cos(\beta) + \underbrace{(i)^2}_{=-1}\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + i\cos(\alpha)\sin(\beta) + i\sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\,\big(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\big)\,. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$e^{(\alpha+\beta)i} = e^{\alpha i+\beta i} = e^{\alpha i}\, e^{\beta i}\,,$$

decorre das expressões anteriores que

$$\cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right)$$

e da igualdade entre as partes reais dos dois números complexos resulta que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\,,$$

enquanto da igualdade entre as partes imaginárias resulta que

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\,.$$

As identidades trigonométricas seguintes decorrem das definições das funções envolvidas, das fórmulas anteriores e da fórmula fundamental da trigonometria.

- Soma ou diferença de dois ângulos (tangente e cotangente):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\ \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)-\operatorname{tg}(\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha)\ \operatorname{tg}(\beta)}$$

- Fórmulas de duplicação dos ângulos (seno e cosseno):

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

- Fórmulas da bissecção (seno e cosseno):

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2\alpha)\Big)$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(1-\cos(2\alpha)\Big)$$

Exemplo 2.5. *Pretende-se simplificar a expressão*

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}(\alpha+\pi)\,.$$

A simplificação pretendida corresponde àquilo que vulgarmente se designa por redução ao primeiro quadrante, na medida em que o objectivo é simplificar a expressão de modo a ficar com ângulos de menor amplitude possível (de primeiro quadrante, se o parâmetro α definir um ângulo nessas condições).

Existem duas formas de resolver o problema. A primeira consiste em aplicar as identidades associadas à soma e subtracção de ângulos. A segunda consiste em recorrer ao círculo trigonométrico para intuir as simplificações que decorrem da aplicação dessas identidades. No que se segue vamos apresentar as duas resoluções.

Resolução 1: *Recorrendo às identidades*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

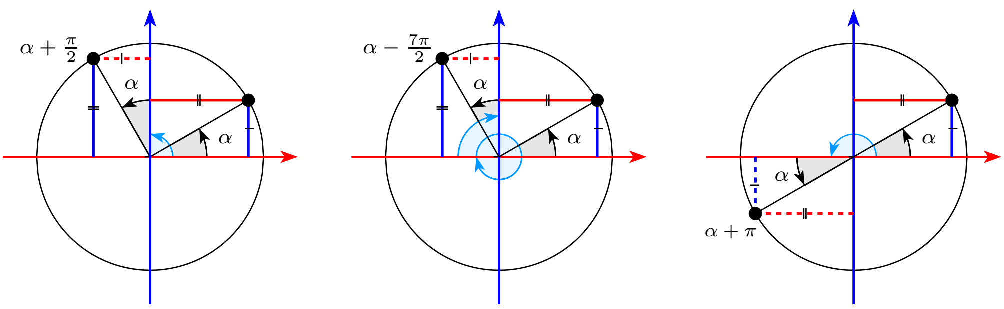
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\ \operatorname{tg}(\beta)}$$

obtém-se

$$
\begin{aligned}
& \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}(\alpha+\pi) \\
= \; & \sin(\alpha)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}+\cos(\alpha)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}+\cos(\alpha)\underbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)}_{=0}+\sin(\alpha)\underbrace{\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)}_{=-1}-\frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\overbrace{\operatorname{tg}(\pi)}^{=0}}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\underbrace{\operatorname{tg}(\pi)}_{=0}} \\
= \; & \cos(\alpha)-\sin(\alpha)-\operatorname{tg}(\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

Resolução 2: *Também podemos simplificar a expressão recorrendo ao círculo trigonométrico. Nesse caso começamos por reescrevê-la recorrendo a senos e cossenos (essa manipulação não é necessária caso o leitor domine a interpretação das outras razões trigonométricas no círculo). Este tipo de resolução, baseada no círculo, requer um pequeno "truque". Sendo α um ângulo arbitrário, então o ângulo pode ser arbitrariamente grande ou arbitrariamente pequeno, por exemplo. No entanto, para representação e interpretação no círculo trigonométrico vamos considerar o ângulo α da ordem de 30 graus ($\frac{\pi}{6}$ radianos). Na verdade, para que seja possível utilizar o círculo para motivar as simplificações que iremos apresentar, o ângulo só não deve ser considerado da ordem de 45 graus (embora na realidade o possa ser!), porque isso impossibilita a distinção visual das grandezas associadas ao seno e ao cosseno (a representação deve ser tal que uma das quantidades deve ser claramente superior à outra, o que não acontece quando o ângulo é da ordem de 45 graus). Depois de arbitrado e representado o ângulo α representa-se o ângulo dado na expressão e que dele depende. Para terminar, basta relacionar a quantidade pretendida (o seno ou o cosseno) com o seno e o cosseno do ângulo α original, tendo em conta a grandeza absoluta e também o sinal. Então,*

$$
\begin{array}{ccc}
\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) & +\cos\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right) & -\operatorname{tg}(\alpha+\pi) \\
=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) & +\cos\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right) & -\dfrac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} \\
 & \boxed{-\frac{7\pi}{2}=-\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)} &
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{ccc}
=\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & -\dfrac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} \\
=\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & -\operatorname{tg}(\alpha)
\end{array}
$$

As identidades trigonométricas anteriores também podem ser utilizadas para calcular os valores exactos das razões trigonométricas em ângulos diferentes dos ângulos de referência, em condições particulares.

Exemplo 2.6. *Calculemos o valor exacto de* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Como podemos obter o valor pretendido, se o ângulo $\frac{\pi}{12}$ (15^o) não corresponde a nenhum dos ângulos de referência? Uma vez que o ângulo é inferior a todos os ângulos de referência e os únicos valores exactos conhecidos para as razões trigonométricas (sem calculadora) são os correspondentes aos ângulos de referência, vamos recorrer a uma identidade trigonométrica que relacione $\cos(\frac{\pi}{12})$ com qualquer outra razão trigonométrica num ângulo superior e de referência.

Resolução 1: *Por exemplo, recorrendo à identidade*

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2\alpha)\Big),$$

tem-se

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\,\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

e portanto

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}},$$

porque $\frac{\pi}{12}$ é um ângulo do primeiro quadrante e aí o cosseno é positivo.

Resolução 2: *Existem outras formas de efectuar a dedução anterior. Por exemplo, se atendermos que*

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

e recorrermos à identidade trigonométrica

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta),$$

tem-se

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

2.3 Funções trigonométricas

Nesta secção vamos descrever as funções trigonométricas, indicando domínio, contradomínio e expressão analítica, bem como as respectivas representações gráficas.

2.3.1 Seno

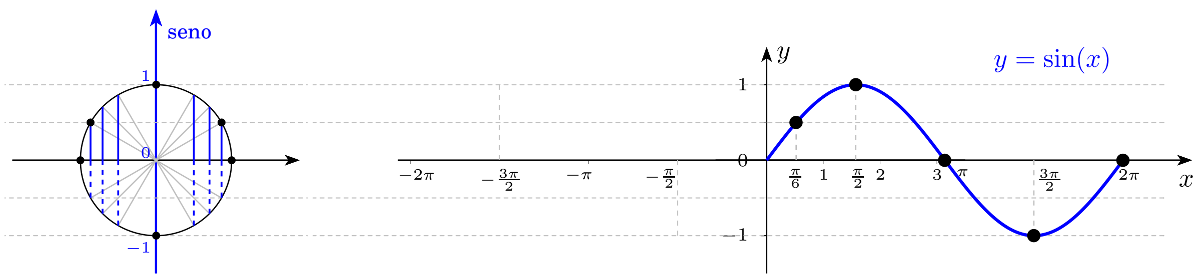
Comecemos pela função seno. O seno tem domínio $\mathbb{R}$ (pode ser calculado em qualquer ângulo) e contradomínio (resultados) $[-1,1]$, pelo que a função é caracterizada por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{seno}} & [-1,\, 1] \\ x & \longrightarrow & y \,=\, \sin(x) \end{array}$$

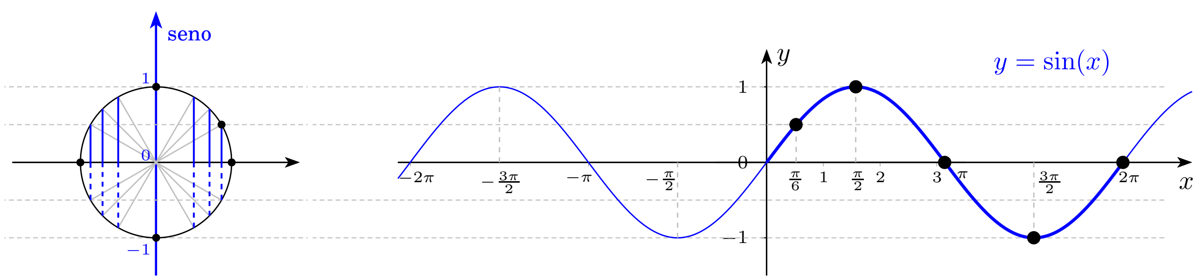
A representação gráfica será feita em escala natural, isto é, em radianos. Além disso, iremos recorrer a uma escolha adequada de ângulos, uma vez que nem todos os ângulos de referência são favoráveis para esta tarefa. Por exemplo, os ângulos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$, têm valores de seno iguais a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectivamente, que são dízimas infinitas e portanto a sua representação não é trivial. Porém, os senos dos ângulos 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, correspondem a dízimas finitas e portanto são mais simples de utilizar.

x	$y = \sin(x)$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Utilizando estes pontos, tem-se



Atendendo à periodicidade do seno, de período 2π, podemos extender a $\mathbb{R}$ o gráfico do intervalo $[0, 2\pi]$:



2.3.2 Cosseno

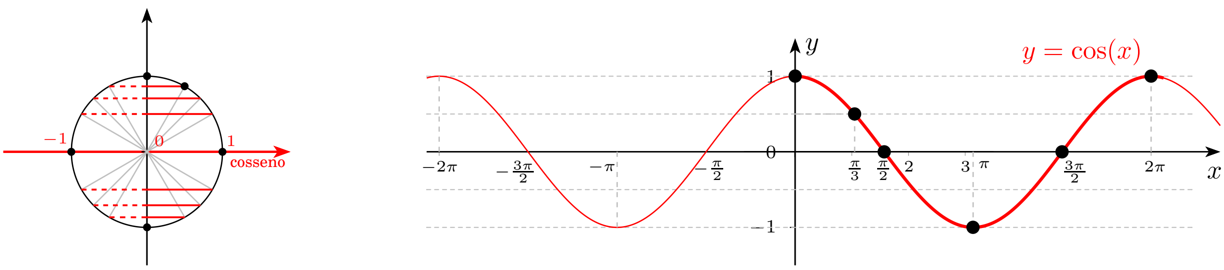
O comportamento qualitativo da função cosseno é análogo ao da função seno, do tipo sinusoidal. Também neste caso o domínio é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $[-1, 1]$, pelo que a função é caracterizada por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{cosseno}} & [-1,\, 1] \\ x & \longrightarrow & y \,=\, \cos(x) \end{array}$$

Para efectuar a representação gráfica da função podemos seguir uma estratégia análoga à que foi utilizada para representar a função seno. Neste caso recorreremos aos ângulos $0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ e 2π, pelo facto de o cosseno de qualquer um destes ângulos corresponder a uma dízima finita:

x	$y = \cos(x)$
0	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Recorrendo a estes valores e ao facto de a função cosseno ser periódica de período 2π, obtém-se a seguinte representação.



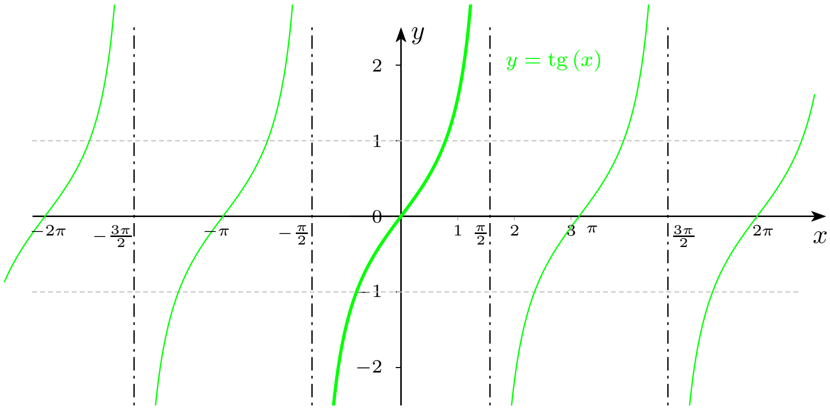
2.3.3 Tangente e cotangente

A análise e a representação gráfica da tangente e da cotangente podem ser realizadas de modo análogo ao que foi feito anteriormente para o seno e o cosseno. Porém e uma vez que a estratégia definida neste texto passa por dominar as funções seno e cosseno e definir as restantes em função destas, vamos apresentar a caracterização da tangente e da contangente e os respectivos gráficos sem qualquer discussão.

A tangente é uma função periódica de período π, definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} & \xrightarrow{\text{tangente}} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y \,=\, \operatorname{tg}(x) \end{array}$$

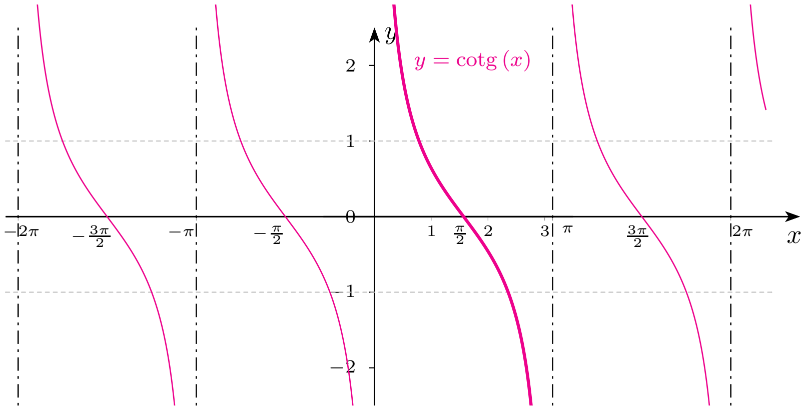
e a representação gráfica é a apresentada na figura seguinte.



A cotangente é uma função periódica de período π , definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} & \xrightarrow{\text{cotangente}} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = \text{cotg}\,(x) \end{array}$$

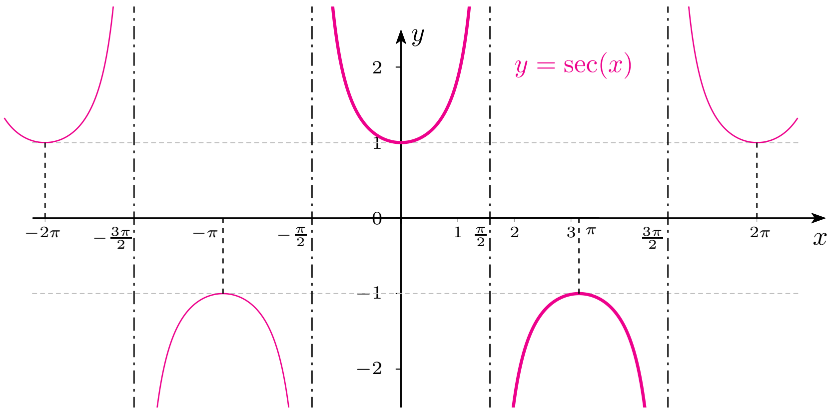
e a representação gráfica é a apresentada na figura seguinte.



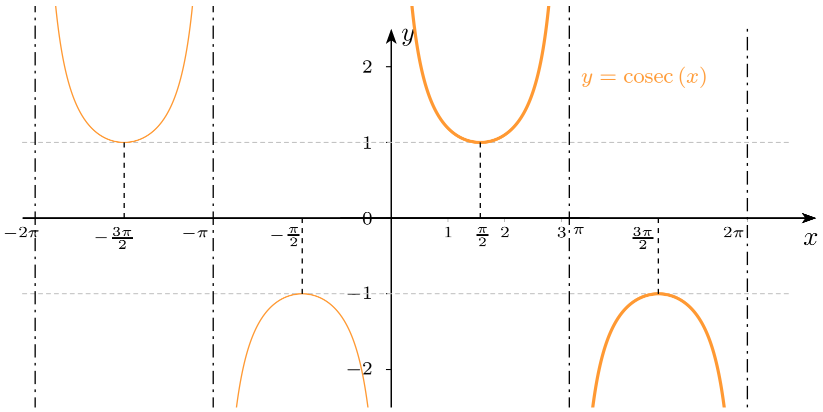
2.3.4 Secante e cossecante

Atendendo à reduzida importância das funções secante e cossecante, vamos apenas apresentar as representações gráficas das mesmas, sem qualquer discussão. Deixamos a eventual caracterização dos domínios e contradomínios a cargo do leitor.

A representação gráfica da secante é a seguinte.



A representação gráfica da cossecante é a seguinte.



Exemplo 2.7. *Caracterizemos a função* $f(x) = 3\sin(2x - \pi) + 1$*, definindo o domínio e o contradomínio (a expressão analítica já é conhecida).*

A função seno está definida em qualquer valor real. Além disso, como a expressão analítica não envolve quocientes nem radicais de índice par, então não existem restrições adicionais ao domínio, pelo que $D_f = \mathbb{R}$.

Relativamente ao contradomínio e tendo em conta o contradomínio do seno, tem-se

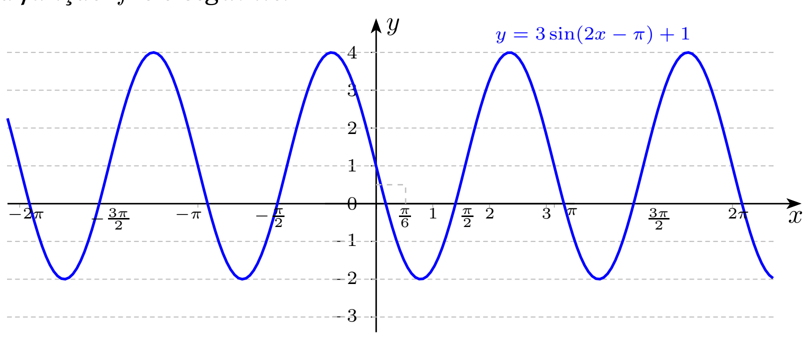
$$\begin{aligned} & -1 \le \sin(\cdot) \le 1 \\ \Leftrightarrow\ & -3 \le 3\sin(\cdot) \le 3 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \le 3\sin(\cdot) + 1 \le 4\,, \end{aligned}$$

pelo que $CD_f = [-2, 4]$. *Na representação anterior, a notação* $\sin(\cdot)$ *significa que a expressão associada ao argumento (do seno) não é relevante, pois o argumento está associado ao domínio.*

A caracterização completa da função f *é então a seguinte:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad f \quad} & [-2,\, 4] \\ x & \longrightarrow & y = 3\sin(2x - \pi) + 1 \end{array}$$

O gráfico da função f *é o seguinte.*



O gráfico da função f *pode ser obtido a partir do gráfico do seno, recorrendo a operações básicas de translação (horizontal e vertical) e dilatação/contracção. A sequência utilizada é a seguinte:*

i) $f(x) = \sin x$

contração horizontal (aumento da frequência)

ii) $f(x) = \sin(2x)$

translação horizontal (de π unidades para a direita)

iii) $f(x) = \sin(2x - \pi)$

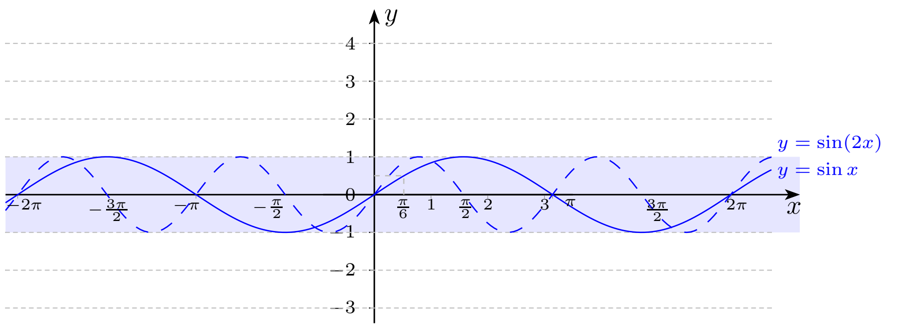
dilatação vertical

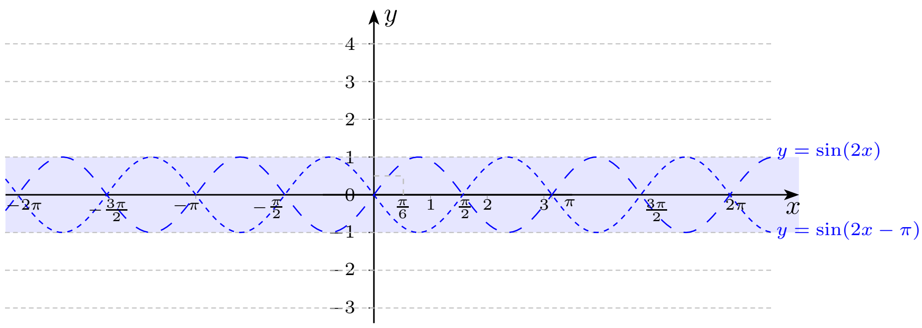
iv) $f(x) = 3\sin(2x - \pi)$

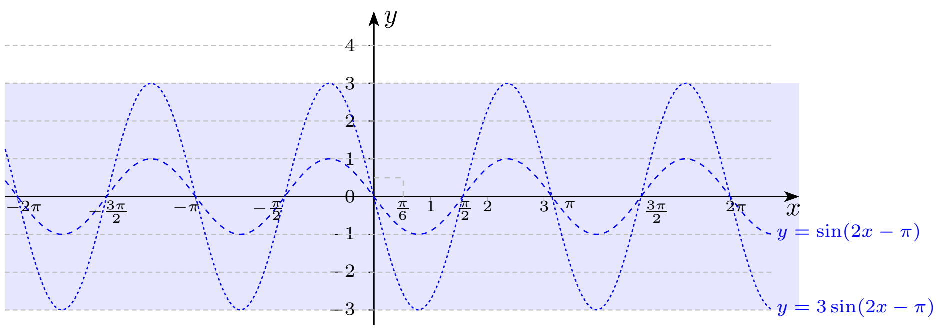
translação vertical

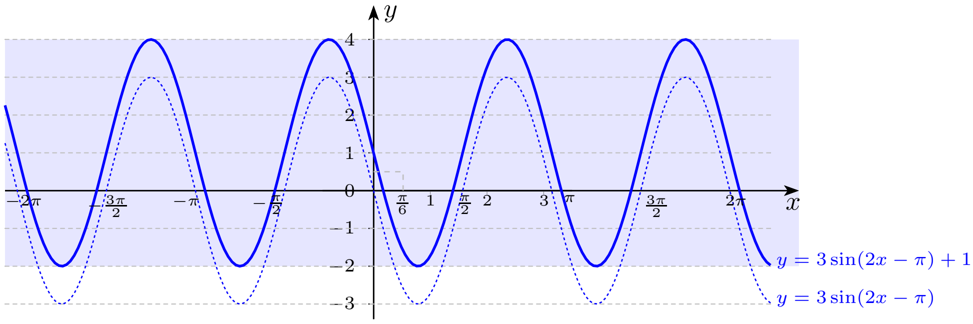
v) $f(x) = 3\sin(2x - \pi) + 1$

Compare-se o contradomínio dos gráficos sucessivos com a resolução que permitiu determinar o contradomínio de f.









2.4 Equações trigonométricas

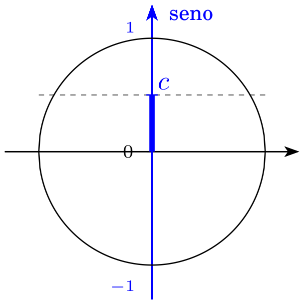
Nesta última secção vamos analisar a resolução de equações trigonométricas. Começaremos com a análise de casos envolvendo apenas uma das funções trigonométricas e no final generalizaremos para casos envolvendo várias funções, uma função com ângulos distintos e potências de uma mesma função.

2.4.1 Seno

Comecemos por analisar as equações da forma

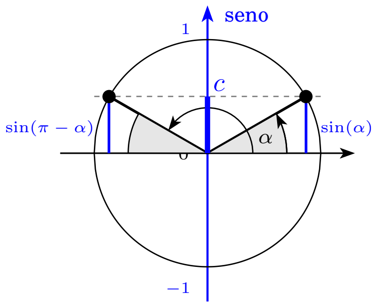
$$\sin(x) = c\,, \quad c \in [-1, 1]\,.$$

Resolver esta equação é dar resposta à seguinte questão: quais as amplitudes x para as quais o seno é igual a c?



Obviamente que a equação só é possível se c for um valor entre -1 e 1. Nessas condições, numa volta completa ao círculo encontramos as seguintes soluções:

$$x = \alpha \;\vee\; x = \pi - \alpha\,.$$



Uma vez determinando um ângulo α nas condições pretendidas, isto é, tal que $\sin(\alpha) = c$ tem-se, por periodicidade da função seno,

$$\begin{aligned} & \sin(x) = c \\ \Leftrightarrow\ & \sin(x) = \sin(\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & x = \alpha + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

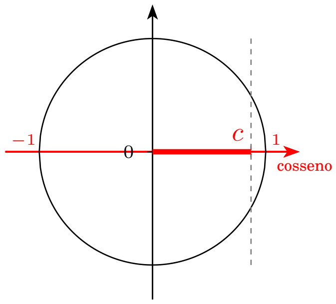
Observamos que 2π representa uma volta completa ao círculo, pelo que $k \cdot 2\pi$ com k um número inteiro, representa k voltas ao círculo, no sentido anti-horário se k for positivo ou no sentido horário se k for negativo.

2.4.2 Cosseno

Analisemos agora as equações da forma

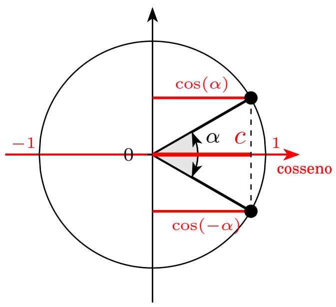
$$\cos(x) = c\,, \quad c \in [-1, 1]\,.$$

Resolver esta equação é dar resposta à seguinte questão: quais as amplitudes x para as quais o cosseno é igual a c?



Tal como no caso anterior, a equação só é possível se c for um valor entre -1 e 1 e, nessas condições, numa volta completa ao círculo encontramos as seguintes soluções:

$$x = \alpha \quad \vee \quad x = -\alpha\,.$$



Uma vez determinando um ângulo α nas condições pretendidas, isto é, tal que $\cos(\alpha) = c$ tem-se, por periodicidade da função cosseno,

$$\begin{aligned} & \cos(x) = c \\ \Leftrightarrow\ & \cos(x) = \cos(\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & x = \alpha + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\alpha + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

2.4.3 Tangente e cotangente

De modo análogo aos acasos anteriores, pode deduzir-se que no caso de equações envolvendo tangentes, tem-se

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(x) = c \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & x = \alpha + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e no caso de equações envolvendo cotangentes, tem-se

$$\begin{aligned} & \operatorname{cotg}(x) = c \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{cotg}(x) = \operatorname{cotg}(\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & x = \alpha + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

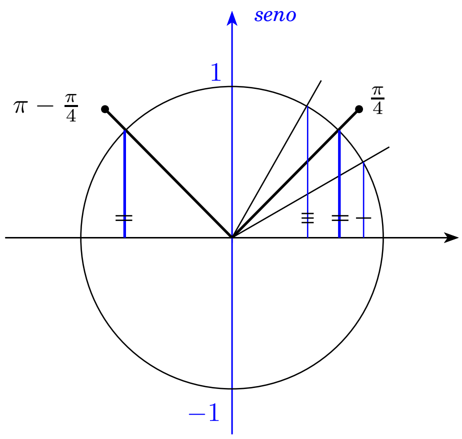
Observação 2.3. *As expressões anteriores estão na página 1 das* ***Tabelas de Matemática*** *do DFM (fórmulas 20, 21, 22 e 23), mas são dispensáveis se recorrermos directamente ao círculo trigonométrico para resolver a equação!*

Exemplo 2.8. *Vamos resolver a equação trigonométrica* $\sqrt{2}\,\sin(x) = 1\,.$

Começamos por notar que

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}\,\sin(x) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sin(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\times\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

Uma vez que o seno só é positivo no primeiro e no segundo quadrantes, vamos procurar os ângulos dessas regiões que verificam a igualdade anterior. Recorrendo ao círculo trigonométrico, tem-se



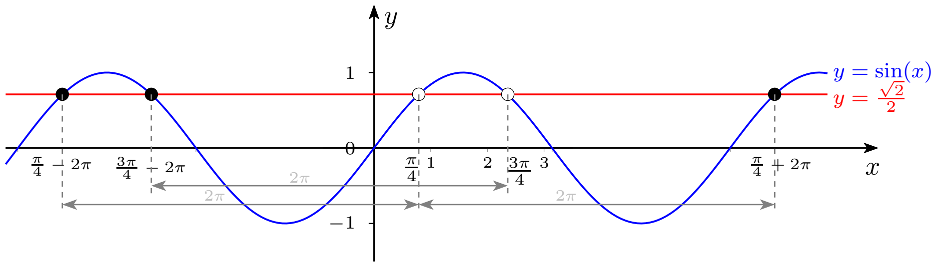
pelo que, atendendo à periodicidade do seno,

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Na resolução anterior recorremos à análise directa da situação através do círculo. No entanto a equação também pode ser resolvida utilizando as expressões determinadas nas páginas anteriores. Nesse *caso teremos que reescrever a equação na forma* $\sin(x) = \sin(\alpha)$ *, pelo que basta determinar* <u>*um*</u> *ângulo no qual* $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e depois todos os outros serão dados pela expressão determinada anteriormente.*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\,\sin(x) \;=\; 1\\
\Leftrightarrow\quad &\sin(x) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &\sin(x) \;=\; \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \textit{porque } \sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &x = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi\,, \quad \textit{pela fórmula apresentada na secção 2.4.1}\\
\Leftrightarrow\quad &x = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi,\; k\in\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Para finalizar, note-se que graficamente a equação corresponde a determinar as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico das funções $f(x) = \sin(x)$ *e* $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *. Este problema tem um número infinito de soluções, duas delas de referência e obtidas numa volta completa ao círculo e as restantes obtidas por periodicidade, conforme representado na figura seguinte.*



Na resolução de equações trigonométricas, é vulgar ser necessário recorrer a identidades trigonométricas para reescrever as equações numa das formas anteriores. Isso acontece quando a equação envolve funções trigonométricas com diferentes argumentos (por exemplo, $\sin(x) = -\sin(2x)$), potências diversas da mesma ou de diferentes funções trigonométricas (por exemplo, $\cos^2(x) - 3\cos(x) = -2$) ou diversas funções trigonométricas (por exemplo, $\sin^2(x) + 3\cos(x) = 3$). Também é frequente o recurso a técnicas como mudanças de variável ou até a técnicas de cálculos numérico para determinar aproximações para as soluções deste tipo de equações. Esse último caso será estudado no Capítulo 4. Os outros casos são ilustrados no exemplo que se segue.

Exemplo 2.9. *Resolva as seguintes equações trigonométricas:*

1. $\sin(x) = -\sin(2x)$;
2. $\cos^2(x) - 3\cos(x) = -2$;
3. $\sin^2(x) + 3\cos(x) = 3$;
4. $\sin(x) = \cos(x)$.

1. *Note-se que existem dois termos em seno, mas têm argumentos distintos. No entanto, recorrendo à identidade trigonométrica*

$$\sin(2x) \;=\; 2\sin(x)\cos(x)\,,$$

tem-se

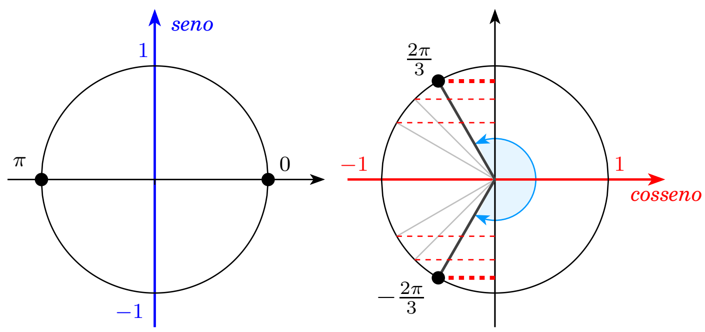
$$\begin{aligned} & \sin(x) \;=\; -\underbrace{\sin(2x)}_{2\sin(x)\cos(x)} \\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x) \;=\; -2\sin(x)\cos(x)\,. \end{aligned}$$

Uma vez que existe um factor comum nos termos da direita e da esquerda, podemos evidenciá-lo e resolver a equação recorrendo à lei do anulamento do produto:

$$\begin{aligned} & \sin(x) \;=\; -\sin(2x) \\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x) \;=\; -2\sin(x)\cos(x) \\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x)\,\big(1 + 2\cos(x)\big) \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x) \;=\; 0 \;\vee\; 1 + 2\cos(x) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

As duas equações resultantes das manipulações anteriores já podem ser resolvidas recorrendo às técnicas estudadas nas páginas anteriores. Assim,

$$\begin{aligned} & \sin(x) \;=\; -\sin(2x) \\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x) \;=\; 0 \qquad \vee \qquad 1 + 2\cos(x) \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x) \;=\; 0 \qquad \vee \qquad \cos(x) \;=\; -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow\quad x \;=\; k\cdot\pi \qquad \vee \qquad \left(x \;=\; \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x \;=\; -\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

2. *Neste caso, a dificuldade da equação reside no facto de existirem dois termos em cosseno com potências distintas. No entanto, se recorrermos a uma mudança de variável conveniente, podemos reescrever a equação como uma equação polinomial e aplicar a fórmula resolvente correspondente.*

$$\begin{aligned} & \cos^2(x) - 3\cos(x) \;=\; -2 \\ \Leftrightarrow\quad & \cos^2(x) - 3\cos(x) + 2 \;=\; 0 \end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável

$$mv\text{:}\quad y = \cos(x)$$

tem-se

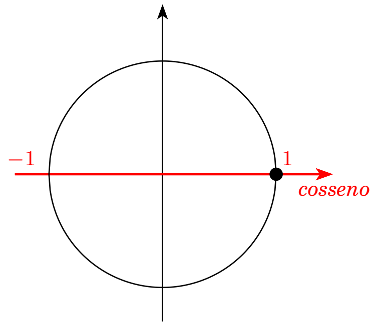
$$\begin{aligned} & y^2 - 3\,y + 2 \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\quad & y \;=\; \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \\ \Leftrightarrow\quad & y \;=\; \frac{3 \pm 1}{2} \\ \Leftrightarrow\quad & y \;=\; 1 \qquad \vee \qquad y \;=\; 2\,. \end{aligned}$$

Tendo em conta a mudança de variável anterior, as soluções determinadas significam que

$$\cos(x) \;=\; 1 \qquad \vee \qquad \cos(x) = 2$$

e agora já podemos terminar a resolução recorrendo às técnicas anteriormente estudadas. Assim,

$$\begin{aligned} & \cos^2(x) - 3\,\cos(x) + 2 \;=\; 0 \\ \overset{mv}{\Leftrightarrow}\quad & y^2 - 3\,y + 2 \;=\; 0\,, \quad \textit{considerando a mv } y = \cos(x) \\ \Leftrightarrow\quad & y \;=\; 1 \qquad \vee \qquad y \;=\; 2 \\ \overset{mv}{\Leftrightarrow}\quad & \cos(x) \;=\; 1 \qquad \vee \qquad \underbrace{\cos(x) = 2}_{\textit{impossível!}}\,, \quad \textit{considerando a mv } y = \cos(x) \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow\quad x \;=\; k \cdot 2\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

3. *Neste caso, a maior dificuldade da equação reside no facto de envolver simultaneamente termos em seno e em cosseno. No entanto, se corrermos à fórmula fundamental da trigonometria,*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) \;=\; 1\,,$$

conseguimos obter uma equação que envolve apenas a função cosseno. Assim,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)} + 3\cos(x) \;=\; 3 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 - \cos^2(x) + 3\cos(x) \;=\; 3 \\ \Leftrightarrow\quad & -\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2 \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \cos^2(x) - 3\cos(x) + 2 \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

e esta equação já foi resolvida na alínea (b).

4. *Tal como no exemplo anterior, esta equação envolve simultaneamente termos em seno e em cosseno. Porém, neste caso não é possível aplicar, por agora, a fórmula fundamental da trigonometria para*

obter uma equação envolvendo apenas senos ou cossenos, pois nenhum dos termos envolve um quadrado. No entanto, se elevarmos ao quadrado ambos os membros da equação, obtém-se

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(x) \\ \Rightarrow \quad \sin^2(x) &= \cos^2(x) \end{aligned}$$

Note-se que este processo gera um conjunto de soluções que são solução da nova equação mas não são soluções da equação original, pelo que no final é necessário validar todas as soluções!

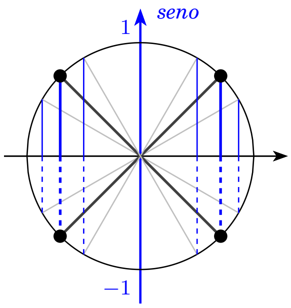
Observação 2.4. *O processo anterior é equivalente ao seguinte,*

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ \Rightarrow \quad x^2 &= 1 \end{aligned}$$

A primeira equação só tem uma solução ($x = 1$) mas a segunda tem duas soluções ($x = 1$ e $x = -1$), sendo que apenas uma delas é também solução da equação original.

Agora já podemos aplicar a fórmula fundamental da trigonometria para reescrever a equação apenas em senos ou em cossenos. Uma vez que ambos os termos envolvem uma potência de grau dois e não existem outros termos (de outras potências), é indiferente o termo no qual se aplica a identidade. Assim,

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(x) \\ \Rightarrow \quad \sin^2(x) &= \underbrace{\cos^2(x)}_{1-\sin^2(x)} \\ \Leftrightarrow \quad \sin^2(x) &= 1 - \sin^2(x) \\ \Leftrightarrow \quad \sin^2(x) &= \tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad \sin(x) &= \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como já foi adiantado, nem todas as soluções determinadas são soluções da equação original, pelo que é necessário validá-las. Começamos por observar que as soluções encontradas correspondem a

$$\begin{aligned} & x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{4} + k\, 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

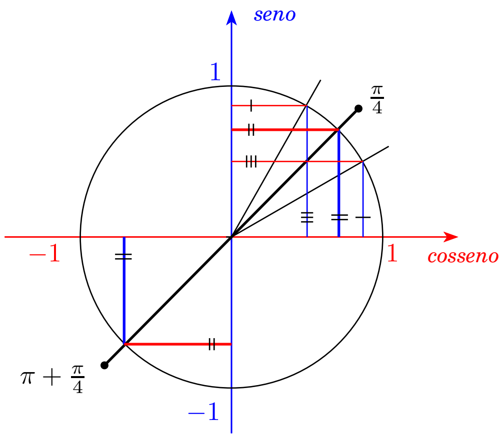
Por substituição directa na equação, verifica-se que apenas

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

são soluções da equação original, pois nas restantes o seno e o cosseno são simétricos e portanto não são iguais (embora os respectivos quadrados sejam iguais). Como as soluções apresentadas diferem de meia volta, então ainda podem ser apresentadas na seguinte forma:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esta equação também pode ser resolvida recorrendo directamente ao círculo trigonométrico. De facto, de acordo com a equação, pretende-se determinar "todos os ângulos onde o seno e o cosseno têm o mesmo valor". Logicamente que não existem nenhuns ângulos nessas condições nos segundo e quarto quadrantes, pois aí o seno e o cosseno têm sinais diferentes. Então, a existirem, os ângulos pertencerão ao primeiro ou ao terceiro quadrante. Recorrendo ao círculo trigonométrico, podemos localizar directamente todos os ângulos nessas condições:



Então

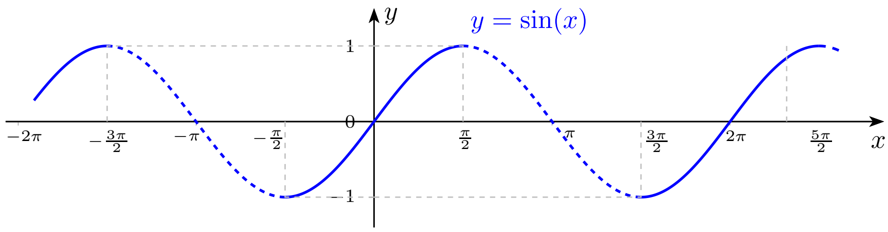
$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(x) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

2.5 Funções trigonométricas inversas

Começamos por que recordar que as funções trigonométricas não são injectivas, pelo que não são naturalmente invertíveis! Para definirmos as funções trigonométricas inversas, temos que recorrer a restrições apropriadas. Usualmente, as funções trigonométricas inversas são designadas de função de arco, pois retornam o arco correspondente a certa função trigonométrica.

2.5.1 Arco seno

A função seno tem domínio $\mathbb{R}$ e como $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, então a função não é injectiva (existem dois objectos distintos com a mesma imagem). No entanto, é possível considerar restrições do domínio de tal modo que a função resultante é injectiva e o contradomínio inicial é preservado. Na verdade, existem múltiplas escolhas possíveis! Por exemplo, se restringirmos o domínio do seno a um dos intervalos $[-\frac{3\pi}{2},\, -\frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}]$ ou $[\frac{\pi}{2},\, \frac{3\pi}{2}]$, a função resultante já é injectiva e contínua a ter contradomínio $[-1,\, 1]$ (o mesmo da função original).



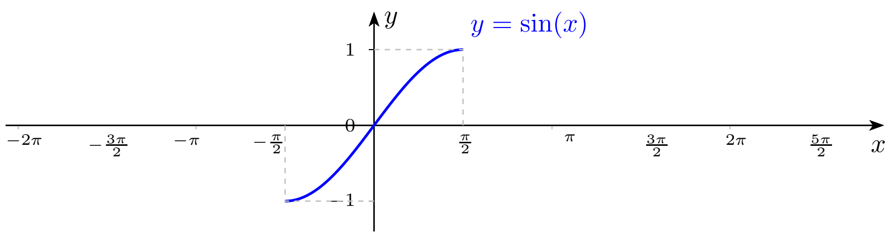
Nessas condições, a função resultante (uma restrição do seno!) já é injectiva e sobrejectiva (isto é, é bijectiva) e portanto é invertível. E qual das restrições devemos considerar, quando pretendemos inverter a função? Poderíamos considerar qualquer uma, mas para que a escolha não seja subjectiva recorre-se a um dos seguintes critérios:

- o intervalo associado ao **argumento mínimo positivo**, isto é, o primeiro intervalo contido em $[0, +\infty[$ que garante a injectividade e que preserva o contradomínio original;

- o intervalo associado ao **argumento principal**, isto é, o intervalo mais próximo da origem que garante a injectividade e que preserva o contradomínio original. Se existirem dois intervalos nessas condições à mesma distância da origem, um positivo e outro negativo, escolhe-se o intervalo positivo.

As funções trigonométricas inversas são definidas tendo por base o intervalo associado ao argumento principal, razão pela qual as restrições que lhes dão origem são designadas de restrições principais.

Voltando ao exemplo do seno, a restrição principal é o intervalo $[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}]$, pelo que ficamos com a função



Nestas condições, a função já é bijectiva e portanto é invertível.

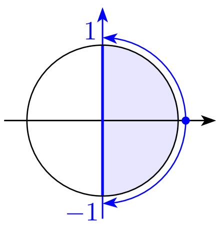
$$\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}] & \xrightarrow{\quad f \quad} & [-1,\, 1] \\ x & \longrightarrow & y = \sin(x) \end{array}$$

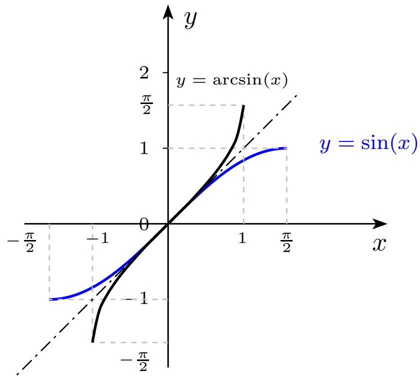
A função inversa é chamada de **arco seno** e denota-se por $\arcsin(x)$. Podemos então completar o diagrama anterior:

$$\left[-\tfrac{\pi}{2},\, \tfrac{\pi}{2}\right] \underset{f^{-1}\,\equiv\, f^*}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [-1,\, 1]$$

$$\arcsin(y) = x \longleftrightarrow y = \sin(x)$$

O gráfico da função arco seno pode ser obtido do gráfico da restrição do seno recorrendo a um reflexão relativamente à bissectriz $y = x$:





Observação 2.5.

1. *A notação* $\sin^{-1}(x)$ *deve ser evitada pois* $\arcsin(x)$ *não é definido pelo inverso de* $\sin(x)$*! Esta "confusão", habitual, resulta do facto de se utilizar a notação de expoente* -1 *com dois significados diferentes: em números representa o número inverso, isto é,*

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

e em funções representa a função inversa! Para evitar essa confusão, podemos considerar que a função inversa é denotada por f^**. No caso em que se considera a função* $f(x) = \sin(x)$ *definida na restrição principal, a função inversa é então definida por* $f^*(y) = \arcsin(y)$*. Isto significa que, na restrição principal, tem-se*

$$f^* \circ f(x) = f^*\big(f(x)\big) = \arcsin\big(\sin(x)\big) = x$$

e ainda

$$f \circ f^*(y) = f\big(f^*(y)\big) = \sin\big(\arcsin(y)\big) = y\,.$$

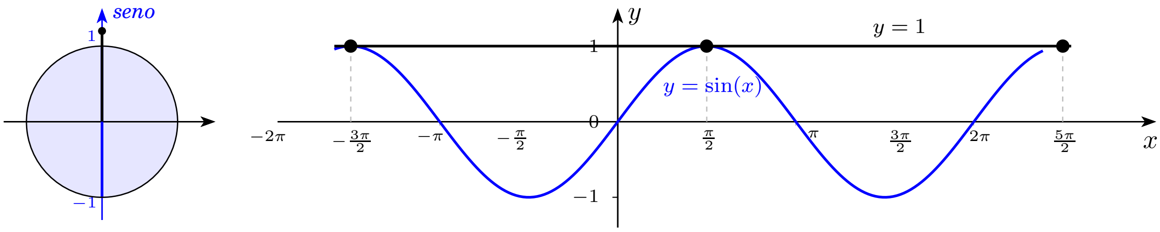
2. *O domínio original da função seno é* $\mathbb{R}$ *e não a restrição principal! Só se considera a função definida na restrição principal quando se pretende definir a função inversa.*

3. *Como a função arco seno está associada a uma restrição do domínio do seno, a equivalência*

$$\sin(x) = 1 \overset{\textit{erro!}}{\Leftrightarrow} x = \arcsin(1)$$

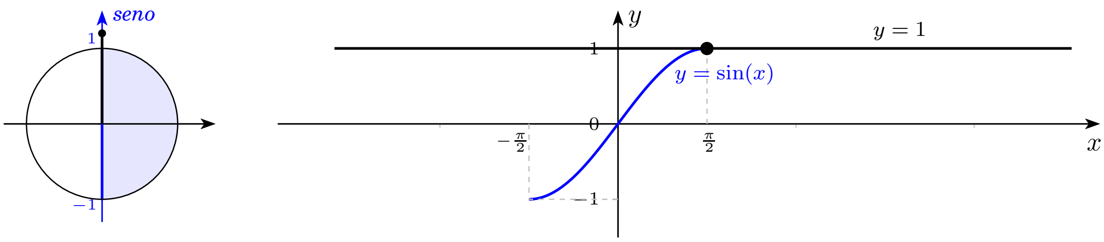
***é falsa**! De facto, a primeira igualdade tem uma quantidade infinita de soluções (porque tem subjacente o domínio natural do seno, isto é,* $\mathbb{R}$*)*

$$\sin(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\,2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$



enquanto a segunda só tem uma solução (porque têm implícita a restrição principal do seno, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*)*

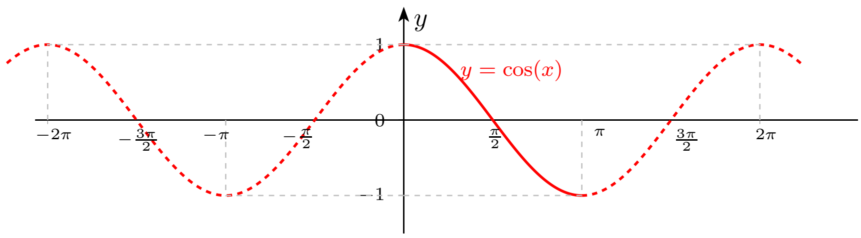
$$x = \arcsin(1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}\,.$$



2.5.2 Arco cosseno

De modo análogo ao que foi efectuado na secção anterior para o seno, podemos definir restrições para as restantes funções trigonométricas, que permitam depois definir as respectivas funções trigonométricas inversas.

No caso do cosseno, a restrição principal é dada por $[0, \pi]$,



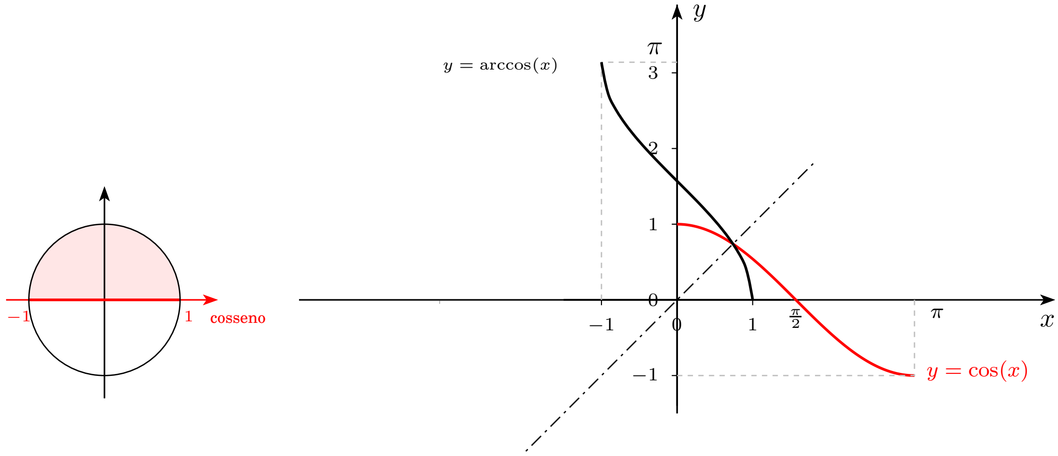
A função assim considerada, uma restrição do cosseno, já é injectiva e sobrejectiva (isto é, é bijectiva) e portanto é invertível.

$$\begin{array}{ccc} [0,\ \pi] & \xrightarrow{\quad f \quad} & [-1,\ 1] \\ & & \\ x & \longrightarrow & y = \cos(x) \end{array}$$

Nestas condições, a função inversa é chamada de **arco cosseno** e denota-se por $\arccos(x)$. Podemos então completar o diagrama anterior:

$$\begin{array}{ccc} [0,\,\pi] & \underset{f^{-1}\,\equiv\, f^{*}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & [-1,\,1] \\ \arccos(y) = x & \longleftrightarrow & y = \cos(x) \end{array}$$

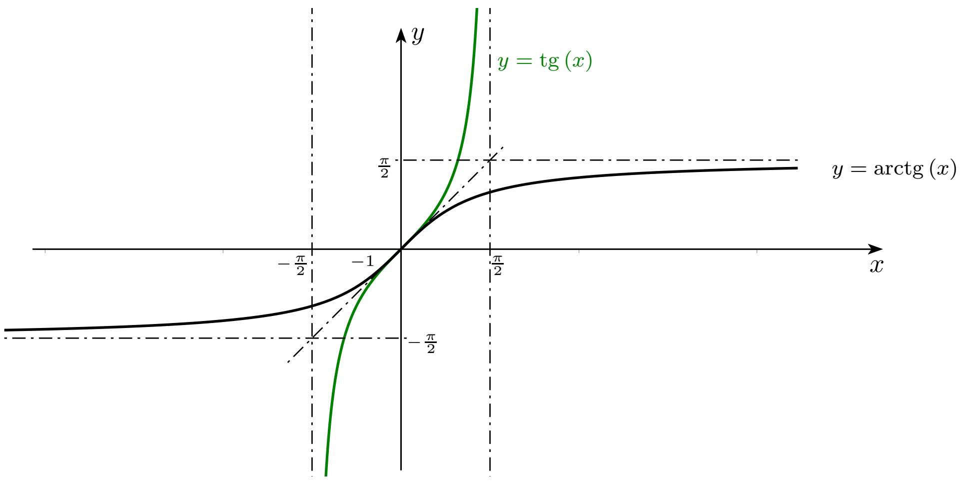
Mais uma vez, o gráfico da função inversa pode obter-se a partir do gráfico da restrição do cosseno recorrendo a um reflexão relativamente à bissectriz $y = x$:



2.5.3 Arco tangente e arco cotangente

O mesmo pode ser feito para todas as outras funções trigonométricas, nomeadamente a tangente e a cotangente. As restrições principais associadas são os intervalos $]-\pi/2,\ \pi/2[$ para a função tangente e $]0,\ \pi[$ para a função cotangente. Nestas condições, as respectivas inversas são designadas de **arco tangente** e **arco cotangente** e denotadas por $\operatorname{arctg}(x)$ e $\operatorname{arcotg}(x)$. Por exemplo, no caso da tangente tem-se

$$\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[& \underset{f^{-1}\,\equiv\, f^{*}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & \mathbb{R} \\ \operatorname{arctg}(y) = x & \longleftrightarrow & y = \operatorname{tg}(x) \end{array}$$



Capítulo 3

Derivadas

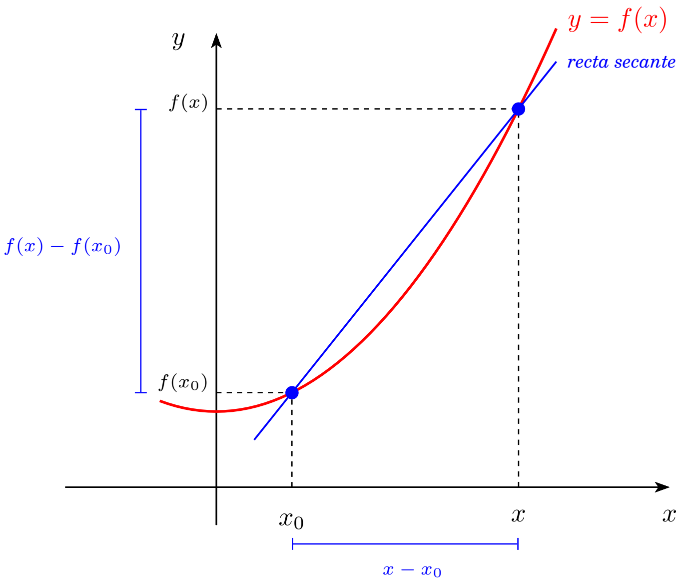
3.1 Introdução

Seja f uma função definida num intervalo aberto $]x_0 - R, x_0 + R[$ (uma vizinhança de x_0, aberta e não vazia). Diz-se que f é **derivável** em x_0 se existe e é finito o limite da razão incremental $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quando x tende para x_0. Ao valor desse limite chama-se derivada de f no ponto x_0 e denota-se por $f'(x_0)$, isto é,

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Observação 3.1.

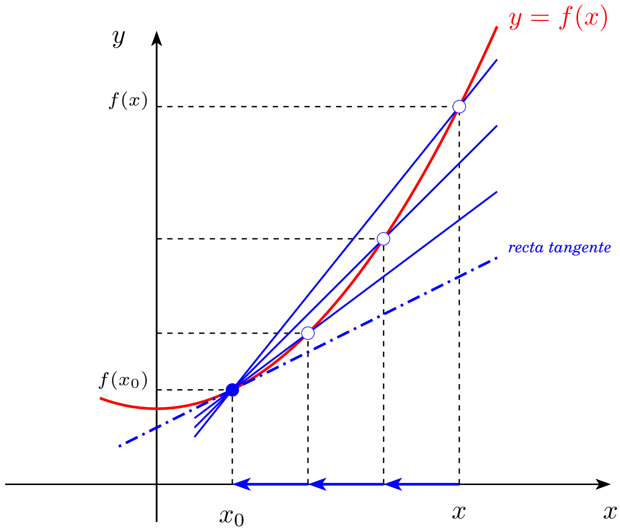
1. *Recordamos que o declive de uma recta que passa nos pontos* $A = (x_A, y_A)$ *e* $B = (x_B, y_B)$ *é dado por*
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,.$$
Então a recta secante ao gráfico de f *nos pontos* $(x_0, f(x_0))$ *e* $(x, f(x))$ *tem declive*
$$m_{secante} \;=\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$



Quando o ponto $(x, f(x))$ *se aproxima do ponto* $(x_0, f(x_0))$, *a recta secante aproxima-se da recta tangente e o seu declive é dado por*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

pelo que a derivada de f *no ponto* x_0 *representa o declive da recta tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(x_0, f(x_0))$, *conforme ilustrado na figura seguinte.*



2. *Considerando* $x = x_0 + h$, *onde* h *é a distância entre os pontos* x_0 *e* x, *tem-se*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

pelo que a derivada de f *no ponto* x_0 *também pode ser apresentada na forma*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

A função f é derivável no intervalo $]a, b[$ quando é derivável em todos os pontos desse intervalo. Assim, tem sentido definir em $]a, b[$ a função derivada, a qual se denota por f', como sendo a função que associa a cada ponto de $]a, b[$ o valor da derivada nesse ponto.

Recta tangente e recta normal

De acordo com a definição de derivada, $f'(x_0)$ corresponde ao declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, pelo que a equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ nesse ponto é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Se a tangente não for horizontal (isto é, se $f'(x_0) \neq 0$) então a recta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ não é vertical e tem declive $-\frac{1}{m_t}$, onde m_t é o declive da recta tangente no mesmo ponto. Nessas condições, a equação da recta normal à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{sempre que } f'(x_0) \neq 0.$$

3.2 Continuidade vs derivabilidade

A derivabilidade de uma função num ponto garante que a função é suficientemente suave numa vizinhança desse ponto. Nessas condições, a função não poderá ter descontinuidades (irregularidades traduzidas por saltos) nessa vizinhança. Note-se, porém, que o recíproco não é verdadeiro, na medida em que a função pode ser continua numa vizinhança de um ponto e não ser derivável nesse ponto (basta que se trate de um ponto anguloso!).

Teorema 3.1. *Se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.*

3.3 Derivadas de funções elementares

No que se segue vamos recorrer à definição de derivada para deduzir regras de cálculo para a função constante e para potências do tipo x^p. Exploraremos as regras de derivação do produto de uma função por uma constante, do produto de funções e da soma ou subtracção de funções. Estas regras serão apresentadas sem demonstração, mas a sua dedução decorre também da definição de derivada.

Derivada da função constante

Comecemos por determinar a derivada da função constante $f(x) = k$, em que $k \in \mathbb{R}$, como por exemplo $f(x) = 8$ ou $f(x) = -3$.

Recorrendo à definição de derivada, tem-se

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

pelo que a derivada de uma função constante é sempre 0, isto é,

$$\boxed{(k)' = 0, \quad \text{para qualquer } k \in \mathbb{R}}.$$

Exemplo 3.1.

1. *A derivada da função constante $f(x) = 6$ é*

$$f'(x) = (6)' = 0.$$

2. *A derivada da função constante $f(x) = -15$ é*

$$f'(x) = (-15)' = 0.$$

Derivada da potência

Vamos agora ilustrar a regra de derivação de potências do tipo $f(x) = x^p$, para qualquer expoente real <u>não nulo</u>. Não demonstraremos a regra geral, uma vez que isso implica recorrer a algumas técnicas algébricas que saem do âmbito deste estudo, pelo que ilustraremos a regra para alguns casos particulares em que o expoente é inteiro e positivo e concluiremos com a apresentação da regra geral.

Comecemos por calcular a derivada da função $f(x) = x$. Recorrendo novamente à definição de derivada, tem-se

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1,$$

pelo que

$$\boxed{(x)' = 1}.$$

Se aplicarmos esta definição para determinar a derivada da função $f(x) = x^2$, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(x+h)^2}^{x^2+2xh+h^2} - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \big(2x + \underbrace{h}_{\to 0}\big) = 2x\,.
\end{aligned}$$

Concluímos assim que

$$\big(x^2\big)' = 2x\,.$$

De modo análogo, se a função for definida por $f(x) = x^3$ a derivada é dada por

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(x+h)^3}^{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3} - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \big(3x^2 + \underbrace{3xh + h^2}_{\to 0}\big) = 3x^2\,.
\end{aligned}$$

Então

$$\big(x^3\big)' = 3x^2\,.$$

Mais geralmente, tem-se

$$\boxed{\big(x^p\big)' = p\,x^{p-1}},$$

não só quando o expoente é inteiro e positivo, mas para qualquer expoente real <u>não nulo</u>.

Exemplo 3.2.

1. *Começamos por ilustrar que a regra de derivada da potência de x serve, em particular, para o cálculo da derivada da função $f(x) = x$. Como*

$$x = x^1\,,$$

então

$$(x)' = \big(x^1\big)' = 1\,x^{1-1} = x^0 = 1\,.$$

2. *Vamos agora determinar a derivada da função $f(x) = x^4$. Neste caso o expoente é dado por $p = 4$, pelo que aplicando a regra de derivação da potência obtemos*

$$\big(x^4\big)' = 4\,x^{4-1} = 4\,x^3\,.$$

3. *A derivada da função $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ pode ser determinada recorrendo à mesma regra. Neste caso o expoente tem valor $p = \frac{1}{3}$ pelo que, aplicando a regra de derivação da potência, tem-se*

$$\big(x^{\frac{1}{3}}\big)' = \frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}\,.$$

Atendendo às propriedades de potências, a derivada também pode ser apresentada nas seguintes formas alternativas:

$$\big(x^{\frac{1}{3}}\big)' = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

4. *A derivada da função* $f(x) = \sqrt{x}$ *também pode ser calculada recorrendo à regra da potência pois, de acordo com as propriedades de potências, tem-se* $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. *Então*

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Tal como no exemplo anterior, a derivada também pode ser apresentada nas seguintes formas alternativas:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Note-se que a regra de derivação da potência é aplicável ao cálculo da derivada de qualquer raiz e não apenas no caso da raiz quadrada, pois qualquer radical, independentemente do seu índice, pode ser interpretado como uma potência, de modo análogo ao que foi efectuado neste exemplo. De facto,

$$\boxed{\sqrt[n]{f} = f^{\frac{1}{n}}\,, \quad n \in \mathbb{N}}\,.$$

5. *Vamos agora determinar a derivada da função* $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *Começamos por notar que*

$$\frac{1}{x} = x^{-1},$$

pelo que a função pode ser interpretada como uma potência de x *de expoente não nulo (neste caso* $p = -1$ *) e portanto a derivada pode ser calculada aplicando a regra de derivação da potência. Então,*

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\,x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Note-se que quando função é definida por uma fracção de numerador constante, a derivada pode sempre ser calculada recorrendo à regra da potência. De facto, basta recordar que

$$\boxed{\frac{1}{f^p} = f^{-p}\,, \quad p \in \mathbb{R}}\,.$$

Derivada do produto de uma função por uma constante

De forma análoga ao que foi feito nos casos anteriores, podemos recorrer à definição de derivada para deduzir a regra de derivação para o produto de uma função por uma constante. Nesse cálculo concluiremos que sempre que a função é do tipo $f(x) = c\,g(x)$, com $c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\boxed{\Big(k \cdot f(x)\Big)' = k\,f'(x)}.$$

O cálculo da derivada resume-se então a evidenciar a constante k e calcular a derivada do factor não constante.

Conjugando esta regra com as anteriores, podemos calcular a derivada de novas funções, como as funções lineares $f(x) = kx$, por exemplo.

Exemplo 3.3.

1. *Consideremos a seguinte função linear* $g(x) = 8x$. *Neste caso tem-se* $k = 8$ *e* $f(x) = x$, *pelo que a derivada de* g *pode ser calculada recorrendo à regra da derivada do produto de uma função por uma constante e depois à regra de derivação da potência:*

$$\big(8x\big)' = 8\,(x)' = 8 \cdot 1 = 8\,.$$

2. *Vamos agora determinar a derivada da função* $g(x) = -x$*. Esta função é análoga à do exemplo anterior só que agora a constante é negativa. Então, seguindo o mesmo raciocínio, tem-se*

$$\big(-x\big)' = -(x)' = -1\,.$$

3. *A função não necessita de ser linear para podemos recorrer à regra de derivação do produto de uma função por uma constante. Por exemplo, a função* $g(x) = 3x^5$ *não é linear mas a sua derivada é calculada de modo análogo à dos exemplos anteriores:*

$$\big(3x^5\big)' = 3\big(x^5\big)' = 3\left(5\,x^{5-1}\right) = 15\,x^4\,.$$

4. *Vamos agora determinar a derivada da função* $g(x) = \dfrac{1}{4x}$*. Comecemos por notar que*

$$\frac{1}{4x} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{4}\,x^{-1},$$

pelo que a função é definida pelo produto da constante $k = \frac{1}{4}$ *e da função* $f(x) = x^{-1}$*. Então*

$$\left(\frac{1}{4x}\right)' = \frac{1}{4}\left(x^{-1}\right)' = \frac{1}{4}\left(-1\,x^{-1-1}\right) = -\frac{1}{4}\,x^{-2} = -\frac{1}{4x^2}\,.$$

Este exemplo ilustra que quando a fracção tem denominador constante, a derivada pode ser calculada recorrendo à regra do produto de uma função por uma constante. De facto, como

$$\boxed{\frac{f}{k} = \frac{1}{k}\,f}\;,$$

então

$$\left(\frac{f}{k}\right)' = \left(\frac{1}{k}\,f\right)' = \frac{1}{k}\,(f)'\,.$$

Derivada da soma ou subtracção de funções

Mais uma vez, podemos recorrer à definição de derivada para deduzir a regra de derivação para a soma ou subtracção de funções. Nesse caso concluiremos que sempre que a função é do tipo $f_1(x) \pm f_2(x)$, tem-se

$$\boxed{\Big(f_1(x) \pm f_2(x)\Big)' = \big(f_1(x)\big)' \pm \big(f_2(x)\big)'}$$

O cálculo da derivada resume-se então a derivar cada um dos termos da soma (ou subtracção) e somar (ou subtrair) os respectivos resultados.

Esta regra permite calcular a derivada de funções que relacionam, por meio de soma ou subtracção, funções dos tipos anteriormente estudados. Em particular, permite calcular a derivada de funções afins $f(x) = a_1x + a_0$.

Exemplo 3.4.

1. *Consideremos a função afim* $f(x) = 2x - 9$*. A derivada de* f *é dada por*

$$\big(2x-9\big)' = (2x)' - (9)' = 2\,(x)' - 0 = 2\cdot 1 = 2\,.$$

2. *Consideremos agora a função afim* $f(x) = -\frac{2}{5}\,x + \sqrt{3}$*. Então a derivada de* f *é*

$$\left(-\frac{2}{5}\,x + \sqrt{3}\right)' = \left(-\frac{2}{5}\,x\right)' + \big(\sqrt{3}\,\big)' = -\frac{2}{5}\,(x)' + 0 = -\frac{2}{5}\cdot 1 = -\frac{2}{5}\,.$$

Atendendo aos exemplos anteriores e às regras de derivação da soma de funções, do produto de uma função por uma constante, da potência e da função constante, é fácil deduzir que a derivada de uma função afim é tal que

$$\big(a_1 x + a_0\big)' = a_1 \,.$$

A regra de derivação da soma ou subtracção é facilmente generalizável à soma ou subtracção de um número finito (n) de funções, caso em que se tem

$$\Big(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\Big)' = \big(f_1(x)\big)' \pm \big(f_2(x)\big)' \pm \cdots \pm \big(f_n(x)\big)' \,.$$

Exemplo 3.5.

1. *A função polinomial* $f(x) = 6x^3 - 12x + 5$ *tem derivada dada por*

$$\begin{aligned} \big(6x^3 - 12x + 5\big)' &= (6x^3)' - (12x)' + (5)' \\ &= 6\,\big(x^3\big)' - 12\,(x)' + 0 \\ &= 6\,\big(3x^2\big) - 12 \cdot 1 \\ &= 18x^2 - 12 \,. \end{aligned}$$

2. *Consideremos a função* $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x + \sqrt{x}$. *Antes de determinarmos a derivada de* f, *começamos por recordar que*

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \quad e \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} .$$

Recorrendo às diversas regras de derivação estudadas anteriormente, tem-se então

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} + 2x + \sqrt{x}\right)' &= \left(x^{-1} + 2x + x^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \big(x^{-1}\big)' + (2x)' + \big(x^{\frac{1}{2}}\big)' \\ &= -x^{-2} + 2\,(x)' + \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{x^2} + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{x^2} + 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \,. \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma, podemos deduzir um conjunto de regras de derivação para outras operações como o produto e o quociente, bem como para outras funções elementares como o seno, o cosseno, a tangente e cotangente, por exemplo. Na tabela seguinte apresentamos todas essas regras, que podem ser utilizadas na resolução de exercícios e serão generalizadas numa secção posterior.

Sejam f e g funções reais de variável real e a, k e p constantes reais

	Função: $h(x)$	**Derivada:** $h'(x)$
funções de base		
D1.	$k, \quad k \in \mathbb{R}$	0
D2.	x	1
operações elementares		
D3.	$k\,f, \quad k \in \mathbb{R}$	$k\,f'$
D4.	$f \pm g$	$f' \pm g'$
D5.	$f \times g$	$f'\,g + f\,g'$
D6.	$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$
potências		
	$x^p, \quad p \in \mathbb{Q}$	$p\,x^{p-1}$
exponencial e logaritmo		
	$a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+$	$a^x \ln(a)$
	$\log_a(x), \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\dfrac{1}{x \ln(a)}$
funções trigonométricas		
	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	$\operatorname{tg}(x)$	$\sec^2(x)$
	$\operatorname{cotg}(x)$	$-\operatorname{cosec}^2(x)$
	$\sec(x)$	$\sec(x)\operatorname{tg}(x)$
	$\operatorname{cosec}(x)$	$-\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x)$

3.4 Regras de base

Nesta secção vamos explorar as derivadas da função composta e da função inversa. A conjugação destas regras com as regras de derivação já deduzidas na secção anterior permite generalizá-las a um conjunto mais vasto de funções.

Derivada da função composta

Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(I) \subseteq J$.

Se f é derivável em I e g é derivável em J, a função composta $g \circ f$ é derivável em I e tem-se que

$$\boxed{\Big[g\Big(f(x)\Big)\Big]' = f'(x) \times g'\Big(f(x)\Big)}.$$

Exemplo 3.6. *Consideremos a função* $h(x) = \sin(2x)$, *de domínio* $\mathbb{R}$.

A função h *é o resultado da composição das funções* $f(x) = 2x$ *e* $g(y) = \sin(y)$:

$$x \quad \xrightarrow{f} \quad 2x = y \quad \xrightarrow{g} \quad \sin(2x)$$

A derivada de h *é então dada por*

$$h'(x) \ = f'(x) \times g'\Big(f(x)\Big)\,,$$

em que $f'(x) = 2$ *e* $g'(y) = \cos(y)$. *Assim,*

$$h'(x) \ = \ 2 \times \cos(y)\big|_{y=2x} \ = \ 2\cos(2x)\,.$$

Derivada da função inversa

Seja f uma função injectiva e contínua no intervalo aberto I e com derivada não nula no ponto $x_0 \in I$. Se a derivada de f não se anula em I, a função inversa é derivável em $f(I)$ e tem-se

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}}\,.$$

Exemplo 3.7. *Consideremos a função* $f(x) = \sqrt{x}$, *definida em* $]0, +\infty[$. *A derivada de* f *pode ser calculada recorrendo ao teorema da derivada da função inversa e a regra de derivação da potência. De facto, como* $f^{-1}(y) = y^2$, *então*

$$f'(x) = \left.\frac{1}{(f^{-1})'(y)}\right|_{y=\sqrt{x}} = \left.\frac{1}{2y}\right|_{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

3.5 Outras regras de derivação

A aplicação das regras de derivação elementares e dos teoremas da derivada da função composta e da função inversa permite deduzir um conjunto de regras de derivação, para os diversos tipos de funções. Essas regras estão resumidas na tabela da página seguinte. Não faremos a sua dedução, mas utilizá-las-emos sob a forma de uma tabela que faz parte do conjunto de formulários que os alunos poderão consultar nas aulas e nas provas de avaliação.

Sejam f e g funções reais de variável real e k, a e p constantes reais

	Função: $h(x)$	**Derivada:** $h'(x)$
funções de base		
D1.	$k, \quad a \in \mathbb{R}$	0
D2.	x	1
operações elementares		
D3.	$k\,f, \quad a \in \mathbb{R}$	$k\,f'$
D4.	$f \pm g$	$f' \pm g'$
D5.	$f \times g$	$f'\,g + f\,g'$
D6.	$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$
regras de base		
	$f^{-1}(y)$	$\left.\dfrac{1}{f'(x)}\right\rvert_{x=f^{-1}(y)}$
	$(g \circ f)(x)$	$f'(x) \cdot \left[g'(y)\right]_{y=f(x)}$
potências		
D7.	$f^p, \quad p \in \mathbb{Q}$	$p\,f^{p-1}\,f'$
exponencial e logaritmo		
D8.	$a^f, \quad a \in \mathbb{R}^+$	$f'\,a^f\,\ln(a)$
D9.	$\log_a(f), \quad a \in \mathbb{R}^+$	$\dfrac{f'}{f\,\ln(a)}$
funções trigonométricas		
D10.	$\sin(f)$	$f'\,\cos(f)$
D11.	$\cos(f)$	$-f'\,\sin(f)$
D12.	$\mathrm{tg}\,(f)$	$f'\,\sec^2(f)$
D13.	$\mathrm{cotg}\,(f)$	$-f'\,\mathrm{cosec}^2(f)$
D14.	$\sec(f)$	$f'\,\sec(f)\,\mathrm{tg}\,(f)$
D15.	$\mathrm{cosec}\,(f)$	$-f'\,\mathrm{cosec}\,(f)\,\mathrm{cotg}\,(f)$
D16.	$\arcsin(f)$	$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
D17.	$\arccos(f)$	$-\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
D18.	$\mathrm{arctg}\,(f)$	$\dfrac{f'}{1+f^2}$
D19.	$\mathrm{arcotg}\,(f)$	$-\dfrac{f'}{1+f^2}$

Derivadas de ordem superior

Seja f uma função definida e derivável num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$. Tem sentido definir em I a função derivada de f. Suponha-se que esta nova função f' é derivável em $x_0 \in I$, isto é, existe e é finito o limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$. Diz-se então que f é duas vezes derivável em x_0 e denota-se a sua segunda derivada no ponto x_0 por $f''(x_0)$ ou $f^{(2)}(x_0)$. Tem-se então

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Observação 3.2. *Por convenção, toma-se a derivada de ordem zero de f como sendo a própria função.*

A função f diz-se n vezes derivável no intervalo I se estão definidas em I as funções $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ e se $f^{(n-1)}$ é derivável em I. Diz-se que a função f é infinitamente derivável no intervalo I se para todo o $n \in \mathbb{N}$, f é n vezes derivável no intervalo I.

Exemplo 3.8. *A função $f(x) = e^{3x}$ é infinitamente derivável em $\mathbb{R}$. De facto, tendo em conta que $(e^x)' = e^x$ e aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se $f'(x) = 3e^{3x}$. Então,*

$$\begin{aligned} &f''(x) = 3^2 e^{3x} \\ &f'''(x) = 3^3 e^{3x}, \\ &\ldots \\ &f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x} \end{aligned}$$

Esta expressão da derivada de ordem n pode ser confirmada por indução matemática *(sai do âmbito deste texto!)*

3.6 Derivada vs monotonia

A monotonia de uma função está relacionada com a sua derivada, pois a função é crescente numa vizinhança de um ponto se a tangente ao gráfico nesse ponto tiver declive positivo. Assim, uma função é crescente num intervalo aberto $]a,b[$ se nesse intervalo $f'(x)$ for positiva. Analogamente, a função é decrescente num intervalo aberto $]a,b[$ se as tangentes ao gráfico nesse intervalo tiverem declive negativo, isto é, se $f'(x)$ for negativa.

Teorema 3.2. *Seja f uma função derivável em $]a,b[$.*

- *Se $f'(x) > 0$ em $]a,b[$, então f é crescente em $]a,b[$;*
- *Se $f'(x) < 0$ em $]a,b[$, então f é decrescente em $]a,b[$.*

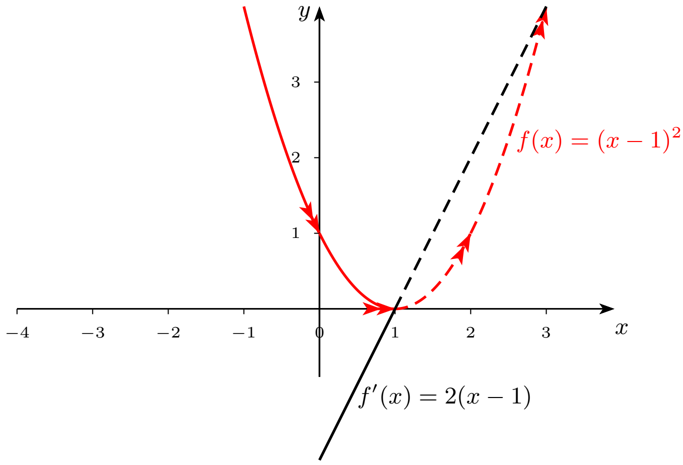
Exemplo 3.9. *Analisemos a monotonia da função $f(x) = (x-1)^2$, recorrendo à derivada. Como*

$$f'(x) = \left((x-1)^2\right)' = 2(x-1)$$

então

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x) = 2(x-1)$	$-$	0	$+$
$f(x) = (x-1)^2$	$\searrow$	*mínimo*	$\nearrow$

conforme ilustrado na figura seguinte.



3.7 Derivada vs concavidade

A concavidade do gráfico de uma função está relacionada com a sua segunda derivada, pois o gráfico tem concavidade voltada para cima, num intervalo aberto $]a,b[$, se a segunda derivada por positiva nesse intervalo . Analogamente, o gráfico terá concavidade voltada para baixo, num intervalo aberto $]a,b[$, se a segunda derivada for negativa nesse intervalo.

Teorema 3.3. *Seja f uma função duas vezes derivável em $]a,b[$.*

- *Se $f''(x) > 0$ em $]a,b[$, então f tem concavidade voltada para cima em $]a,b[$;*
- *Se $f''(x) < 0$ em $]a,b[$, então f tem concavidade voltada para baixo em $]a,b[$.*

3.8 Levantamento de indeterminações

Nos casos em que a aplicação do limite conduz a resultados do tipo

$$\boxed{\frac{0}{0}\,; \quad \frac{\infty}{\infty}\,; \quad \infty - \infty\,; \quad 0 \times \infty; \quad \infty^0\,; \quad 0^0\,; \quad 1^\infty}$$

diz-se que estamos perante uma indeterminação. Numa indeterminação aparecem expressões que conjugam infinitésimos com infinitamente grandes, infinitésimos com infinitésimos ou infinitamente grandes com infinitamente grandes, de tal forma que não podemos aferir de imediato o valor desse limite. **Isso não significa que não é possível determinar o limite**, mas sim que temos que redefinir o limite de modo a eliminar pelo menos um infinitésimo ou um infinitamente grande! Nesses casos dever-se-á proceder à manipulação da expressão analítica, por forma a averiguar a existência, ou não, desse limite.

Uma das formas mais simples de resolver indeterminações, é recorrer ao Teorema de Cauchy.

Teorema 3.4 (Regra de Cauchy ou de L' Hôpital)**.**

Sejam f e g funções diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ numa vizinhança de a (excepto, eventualmente, em $x = a$).

Se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

desde que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *exista.*

Observação 3.3.

1. *A regra de Cauchy (R.C.) garante que o limite de um quociente é igual ao limite do quociente da derivadas (e não da derivada do quociente!), desde que as condições dadas sejam satisfeitas. É especialmente importante verificar a validade das condições relativamente aos limites de f e de g antes de usar a regra.*

2. *A R.C. continua válida para limites laterais e para limites no infinito, isto é, $x \to a$ pode ser substituído por $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.*

3. *No caso das indeterminações do tipo $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞, pode transformar-se a expressão analítica de modo a aplicar a R.C..*

Exemplo 3.10.

1. *O limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{x-1}$$

corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Uma vez que o limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{1} = +\infty\,,$$

existe, então podemos aplicar a regra de Cauchy para concluir que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-x)'}{(x-1)'} = +\infty\,.$$

2. *O limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{x^3-1}$$

também corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Como o limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-x)'}{(x^3-1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{3x^2}$$

também corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, ainda não podemos aplicar a regra de Cauchy. Mas o limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2-1)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{6x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

existe pelo que, de acordo com a regra de Cauchy, afirmar que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-x)'}{(x^3-1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-x)''}{(x^3-1)''} = 1\,.$$

3. *O limite*
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1}$$
corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. *Uma vez que o limite*
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$
existe, então podemos aplicar a regra de Cauchy para concluir que
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-x)'}{(x^2-1)'} = \frac{1}{2}.$$

4. *O limite*
$$\lim_{x\to +\infty} (5x-x^3)$$
corresponde a uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$. *Para usarmos a Regra de Cauchy, temos que reescrever a indeterminação na forma* $\frac{\infty}{\infty}$ *ou* $\frac{0}{0}$. *Então, multiplicando e dividindo por* x^3, *que corresponde à potência de maior grau, tem-se*
$$\lim_{x\to +\infty} (5x-x^3) = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{x^3}_{\to +\infty} \underbrace{\frac{5x-x^3}{x^3}}_{(\frac{\infty}{\infty})}$$
pelo que agora podemos aplicar a Regra de Cauchy para calcular o limite da fracção:
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(5x-x^3)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5-3x^2}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \left(\underbrace{\frac{5}{3x^2}}_{\to 0} - 1\right) = -1.$$
Então
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x-x^3}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(5x-x^3)'}{(x^3)'} = -1$$
e consequentemente
$$\lim_{x\to +\infty} (5x-x^3) = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{x^3}_{\to +\infty} \underbrace{\frac{5x-x^3}{x^3}}_{\to -1} = -\infty.$$

5. *O limite*
$$\lim_{x\to +\infty} e^{2x}\frac{1}{x}$$
corresponde a uma indeterminação do tipo $\infty\times 0$. *Para usarmos a Regra de Cauchy, temos novamente que reescrever a indeterminação na forma* $\frac{\infty}{\infty}$ *ou* $\frac{0}{0}$. *Neste caso, basta reescrever o produto como um fracção, tendo-se*
$$\lim_{x\to +\infty} e^{2x}\frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x},$$
que corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *e portanto este limite já pode ser calculado recorrendo à Regra de Cauchy. Como*
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(e^{2x})'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\,e^{2x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} 2\,e^{2x} = +\infty,$$
então
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^{2x})'}{(x)'} = +\infty.$$

6. *O limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

corresponde a uma indeterminação do tipo 1^∞. *Para usarmos a Regra de Cauchy, temos novamente que reescrever a indeterminação na forma* $\frac{\infty}{\infty}$ *ou* $\frac{0}{0}$. *Nestes caso (note que a indeterminação é do tipo exponencial) basta ter em conta que*

$$f = e^{\ln(f)} \quad \textit{(desde que } f>0\textit{)}$$

e aplicar a propriedade dos logaritmos

$$\log_a(f^k) = k\log_a(f), \quad \textit{(desde que } f>0 \textit{ e para qualquer } k\in\mathbb{R}\textit{)}$$

Então,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}.$$

Uma vez que o limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, *o cálculo desse limite já pode ser efectuado recorrendo à Regra de Cauchy. Como*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(1+\frac{1}{x})'}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

então

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 1$$

e portanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}} = e^1.$$

Observamos que este limite corresponde a um caso particular do limite notável

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x,$$

que tem valor e^k, *e pode ser justificado, como no caso apresentado, recorrendo à Regra de Cauchy.*

Observação 3.4. *O limite*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x-1}$$

tem valor 8, *de forma imediata. Uma vez que não há nenhuma indeterminação do tipo* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ *associada ao cálculo, não podemos aplicar a regra de Cauchy! Note-se que se o fizéssemos, iríamos considerar que*

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^3)'}{(x-1)'} \overset{\textit{erro!}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1} = 12,$$

o que está errado!

Capítulo 4

Raízes de equações não lineares

4.1 Introdução

Neste capítulo vamos analisar o problema da determinação das soluções x de uma equação

$$f(x) = 0 \,.$$

Em condições particulares este problema pode ser resolvido analiticamente, como vimos na secções relativas à função exponencial, à função logarítmica e às funções trigonométricas. O mesmo acontece, por exemplo, nos casos em que $f(x)$ é definido por um polinómio de grau não superior a três, em que podemos aplicar fórmulas resolventes perfeitamente estabelecidas.

Exemplo 4.1.

1. $e^x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \ln(3)\,;$

2. $\cos(x) - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; x = k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,;$

3. $2x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{2}\,.$

4. $x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3\pm 3}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 2 \,\vee\, x = 3\,.$

A resolubilidade algébrica de uma equação está condicionada ao tipo de funções que nela intervêm. Muitas vezes a equação pode não ser resolvida analiticamente, porque envolve diversos termos não lineares com funções distintas ou, por exemplo, porque se trata de uma função polinomial com grau superior a 3! De facto, a resolução analítica está limitada a casos muito específicos e em condições muito especiais.

Exemplo 4.2.

1. $x + e^x = 0 \;\Leftrightarrow\; x =?$

2. $x + \cos(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x =?$

Dada a impossibilidade de resolver qualquer equação de forma analítica, neste capítulo também estudaremos alguns métodos numéricos que permitem calcular o valor aproximado das soluções.

O problema geral, de resolução de uma equação, consiste em, dada uma função $f(x)$, determinar os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Notemos que existem diversos cenários possíveis:

- a equação pode não ter solução. Por exemplo, $\sin(x) - 2 = 0$ não tem soluções.
- a equação pode ter um número finito de soluções; Por exemplo,
  - $x + e^x = 0$ tem uma única solução.
  - $x^2 - x + 5 = 0$ tem duas soluções distintas.
  - $e^{2x} - e^x + 5 = 0$ também tem duas soluções (a equação pode ser reduzida à equação polinomial anterior, recorrendo à mudança de variável $e^x = y$).
  - $(x-1)^2 \ln(x) = 0$ tem três soluções, uma das quais é múltipla.
- a equação pode ter um número infinito de soluções. Por exemplo, $\sin(x) - 1 = 0$ tem uma quantidade infinita de soluções.

Assim, o problema pode ser impossível ou possível e, neste último caso, pode ter um número variável de soluções. Mesmo nos casos em que é possível determinar analiticamente as soluções, esse processo pode não ser simples!

4.2 Resolução analítica

Uma equação $f(x) = 0$ diz-se **resolúvel algebricamente** quando as raízes podem ser determinadas mediante um conjunto finito de operações racionais.

No Capítulo 1 já analisámos alguns exemplos de equações que são possíveis de resolver analiticamente, envolvendo funções funções exponenciais ou logarítmicas e no Capítulo 2 analisámos alguns exemplos envolvendo funções trigonométricas. No que se segue vamos recordar o exemplo mais corrente, que envolve as equações polinomiais.

As raízes de um polinómio desempenham um papel importante, nomeadamente na factorização do mesmo, pelo que no que se segue vamos explorar alguns aspectos relativos à forma de as determinar e caracterizar.

Se $\bigstar$ é uma raiz do polinómio $p(x)$, de grau n, então o polinómio $p(x)$ pode ser factorizado na forma

$$p(x) \,=\, (x - \bigstar)\, q_{n-1}(x)\,,$$

onde $q_{n-1}(x)$ é um polinómio de grau $n-1$. Se $\bigstar$ não for uma raiz de $q_{n-1}(x)$ então $\bigstar$ diz-se uma raiz simples de $p(x)$, mas se $\bigstar$ também for uma raiz de $q_{n-1}(x)$ então a factorização de $p(x)$ ainda pode assumir a forma

$$p(x) \,=\, (x - \bigstar)^2\, q_{n-2}(x)\,,$$

onde $q_{n-2}(x)$ é um polinómio de grau $n-2$. Mais geralmente, $\bigstar$ diz-se uma raiz de $p(x)$ com multiplicidade m, com $1 \le m \le n$, se pudermos factorizar $p(x)$ na forma

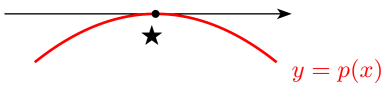
$$p(x) \,=\, (x - \bigstar)^m\, q_{n-m}(x)\,,$$

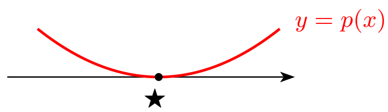
onde $q_{n-m}(x)$ é um polinómio de grau $n-m$ e $q_{n-m}(\bigstar) \neq 0$. Quando $m = 1$, a raiz diz-se simples. Decorre da definição anterior que a raiz $\bigstar$ é uma raiz de multiplicidade m do polinómio $p(x)$ se e só se

$$p(\bigstar) \,=\, p'(\bigstar) \,=\, \ldots \,=\, p^{(m-1)}(\bigstar) \,=\, 0 \quad \text{e} \quad p^{(m)}(\bigstar) \,\neq\, 0\,,$$

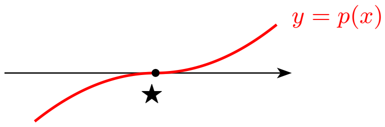
pelo que se $\bigstar$ é uma raiz simples então $p'(\bigstar) \neq 0$ e portanto a tangente ao gráfico de $p(x)$ em $\bigstar$ não é horizontal. Se $\bigstar$ é uma raiz múltipla, então $p(\bigstar) \,=\, p'(\bigstar) \,=\, 0$ e portanto a tangente ao gráfico em

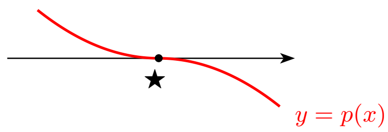
★ é horizontal. Mais geralmente, pode provar-se que quando ★ é uma raiz de multiplicidade m e m é par, o comportamento gráfico do polinómio $p(x)$ na vizinhança dessa raiz é de um dos seguinte tipos,





e quando ★ é uma raiz de multiplicidade m e m é ímpar, então o comportamento gráfico do polinómio $p(x)$ na vizinhança dessa raiz é de um dos seguinte tipos:





De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, todo o polinómio de grau n tem exactamente n raízes, podendo algumas delas ser imaginárias (complexas) e contando cada raiz de multiplicidade m como m raízes simples. Sabe-se também que se $a + bi$ é uma raiz imaginária do polinómio $p(x)$ então $a - bi$ também é uma raiz de $p(x)$, pelo que existindo raízes imaginárias elas são sempre em número par.

Se $\bigstar_1, \blacktriangle_2, \ldots, \blacklozenge_n$ forem as n raízes (reais ou imaginárias) do polinómio $p(x)$, então o polinómio pode ser factorizado na forma

$$p(x) = a_n\,(x - \bigstar_1)(x - \blacktriangle_2) \cdots (x - \blacklozenge_n)\,.$$

Uma vez que as raízes imaginárias existem sempre em pares conjugados e como $i^2 = -1$, então

$$\big(x - (a + bi)\big)\big(x - (a - bi)\big) = \big((x - a) - bi\big)\big((x - a) + bi\big) = (x - a)^2 - b^2 \underbrace{i^2}_{-1} = (x - a)^2 + b^2\,,$$

pelo que o polinómio é decomponível num produto de factores de grau um (de monómios correspondentes às raízes reais) e de factores de grau dois (de polinómios correspondentes aos pares de raízes imaginárias conjugadas), cada um deles elevado ao grau de multiplicidade da raiz correspondente.

Exemplo 4.3.

1. *Determinemos a factorização real do polinómio* $p(x) = x^2 - 3x + 2$. *Recorrendo à fórmula resolvente para polinómios de grau dois, tem-se*

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3 - 1}{2} = 1 \;\vee\; x = \frac{3 + 1}{2} = 2\,,$$

   pelo que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

2. *Para determinar a factorização do polinómio* $p(x) = x^2 - 2x + 1$, *podemos seguir o mesmo processo da alínea anterior.*

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{2 - 0}{2} = 1 \;\vee\; x = \frac{2 + 0}{2} = 1\,.$$

   Neste caso o polinómio tem uma raiz de multiplicidade dois, pelo que a factorização é dada por $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$.

3. *O polinómio* $p(x) = x^3 - 2x^2 + x$ *é de grau três, pelo que a determinação das suas raízes é, teoricamente, mais complicada. No entanto, neste caso é possível evidenciar a incógnita* x *(o que significa que* $x = 0$ *é uma das raízes do polinómio),*

$$p(x) \;=\; x^3 - 2x^2 + x \;=\; x\,(x^2 - 2x + 1)$$

pelo que as raízes em falta podem agora ser determinadas recorrendo novamente à fórmula resolvente para polinómios de grau dois. Uma vez que essas raízes já fora determinadas na alínea anterior, então a decomposição final do polinómio é dada por $x^3 - 2x^2 + x = x\,(x^2 - 2x + 1) = x\,(x-1)^2$.

4. *O polinómio* $p(x) = x^3 + x$ *é de grau três e pode ser factorizado na forma*

$$p(x) \;=\; x^3 + x \;=\; x\,(x^2 + 1)\,.$$

Uma vez que o polinómio de grau dois resultante da factorização anterior não tem raízes reais,

$$x^2 + 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = -1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\sqrt{-1} \quad\Leftrightarrow\quad x = i \;\vee\; x = -i\,,$$

então não é possível decompor mais a factorização apresentada.

Um algoritmo particularmente importante na determinação de raízes de polinómios é a regra de Ruffini, que não é mais do que uma versão simplificada da divisão de polinómios para o caso particular em que o divisor é um polinómio de grau 1. Para qualquer $x = \bigstar$, tem-se

$$p(x) \;=\; (x - \bigstar)\,q(x) + r(x)\,,$$

podendo os polinómios quociente e resto, $q(x)$ e $r(x)$, respectivamente, ser determinados recorrendo à divisão de polinómios ou à regra de Ruffini. Se o resto $r(x)$ for igual a zero então $x = \bigstar$ é uma raiz do polinómio.

Exemplo 4.4. *Determinemos a factorização real do polinómio* $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. *Uma vez que o polinómio é de grau três e não é possível evidenciar a incógnita* x *sem recorrer a potências de expoente negativo (note-se que o termo independente é não nulo, ao contrário do que aconteceu nos exemplos 3 e 4, do caso anterior), vamos recorrer à regra de Ruffini para tentar determinar uma raiz do polinómio. Começamos por notar que os únicos números inteiros que poderão ser raiz do polinómio são* $x = \pm 1$ *e* $x = \pm 2$ *(justifique!). Uma vez que*

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & + & + & + & + \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline \times & 1 & -3 & 2 & |\underline{0} \end{array}$$

então $x = 1$ *é uma raiz do polinómio e tem-se já a factorização*

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \;=\; (x-1)(x^2 - 3x + 2)\,.$$

As duas raízes em falta podem agora ser determinadas recorrendo à fórmula resolvente para polinómios de grau dois, pelo que

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3-1}{2} = 1 \;\vee\; x = \frac{3+1}{2} = 2\,,$$

e então a factorização final do polinómio é $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \;=\; (x-1)(x-1)(x-2) \;=\; (x-1)^2(x-2)$.

4.3 Resolução numérica

A impossibilidade de resolução algébrica de algumas equações deu origem ao estudo de métodos aproximados de resolução de equações. É importante realçar que esses métodos não são absolutos, pois não basta programar a função para se obter as suas raízes.

Exemplo 4.5. *Analisemos a equação* $x + e^x = 0$ *e as seguintes tentativas de resolução, todas infrutíferas:*

$$\begin{aligned} x + e^x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = -e^x \\ &\Leftrightarrow \quad -x = e^x \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(-x) = x \,, \end{aligned}$$

É fácil de constatar que não é possível isolar a incógnita x *no primeiro membro, pois não é possível juntar o* x *do termo linear com o* x *do termo exponencial.*

O insucesso das tentativas apresentadas no exemplo anterior resulta do facto de a equação envolver diversos termos não lineares de diferentes tipos, para os quais não é conhecida nenhuma fórmula resolvente. O melhor que conseguiremos fazer, nas equações que revelam este tipo de dificuldade, é determinar aproximações para cada uma das suas soluções. Porém, os métodos utilizados permitem que essas aproximações tenham uma qualidade tão boa quanto pretendido, pelo que essa limitação não é relevante do ponto de vista prático.

A aproximação de cada umas das raízes da equação pode ser feita recorrendo a um método iterativo como o método da bissecção ou o método de Newton, por exemplo.

A resolução numérica da equação $f(x) = 0$ passa por duas fases, que estudaremos no que se segue.

1. **Localização e separação das raízes reais:** identificam-se todas as soluções existentes e, para cada solução x^* determina-se um intervalo limitado $[a, b]$ que a contenha exclusivamente.

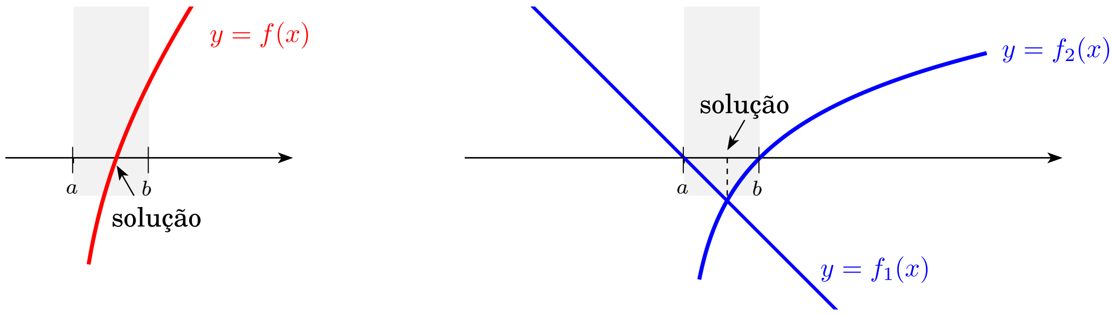
2. **Determinação de um valor aproximado de cada solução e quantificação do erro dessa aproximação:** para cada solução x^*, determina-se uma aproximação $\overline{x}$, recorrendo a um algoritmo conveniente. Essa aproximação deve ser acompanhada de uma estimativa para o erro.

4.3.1 Localização e separação das soluções

Método gráfico

Um dos métodos mais simples para analisar, delimitar e localizar as soluções da equação $f(x) = 0$ é o método gráfico. As soluções da equação $f(x) = 0$ correspondem às abcissas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo Ox pelo que, se representarmos graficamente a função $f(x)$, podemos localizar e separar todas as suas raízes.

Na sua versão original, o método gráfico consiste em reescrever a equação na forma $f_1(x) = f_2(x)$. Neste caso, as soluções da equação $f(x) = 0$ correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Esta abordagem pode ser especialmente interessante nos casos em que não pudermos recorrer a uma calculadora gráfica.

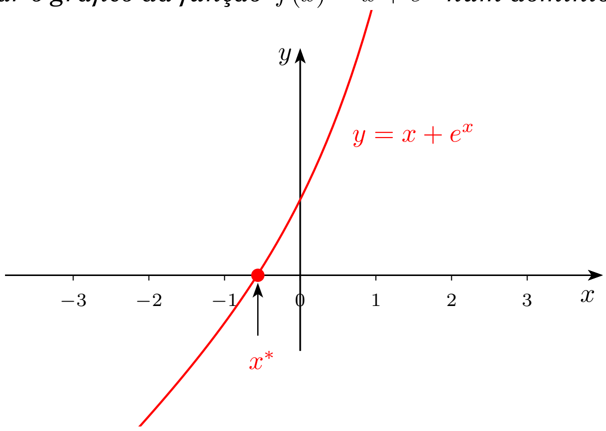


Note-se ainda que a reescrita da equação na forma $f_1(x) = f_2(x)$ não é única, pelo que é conveniente, quando se recorre ao método gráfico na sua forma original, escolher uma interpretação conveniente, isto é, uma interpretação em que as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ tenham, efectivamente, representação gráfica simples.

Observação 4.1. *A equivalência das equações só é válida se não existir alteração dos domínios das funções envolvidas!*

É importante notar que o traçado do gráfico da função $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ não permite tirar conclusões sobre a eventual existência de raízes fora desse intervalo, pelo que o estudo gráfico deverá ser acompanhado de um estudo analítico que permita delimitar as raízes reais da equação. Uma possibilidade é fazer a representação gráfica da função num intervalo suficientemente abrangente e complementar essa representação com o estudo da monotonia e limites. Outra possibilidade é limitar previamente o intervalo onde a função poderá ter raízes, o que pode, em alguns casos, ser feito com recurso ao teorema de Newton, que sai fora do âmbito deste curso.

Exemplo 4.6. *Se pretendermos analisar a existência de soluções da equação* $x + e^x = 0$, *podemos começar por representar o gráfico da função* $f(x) = x + e^x$ *num domínio suficientemente vasto.*

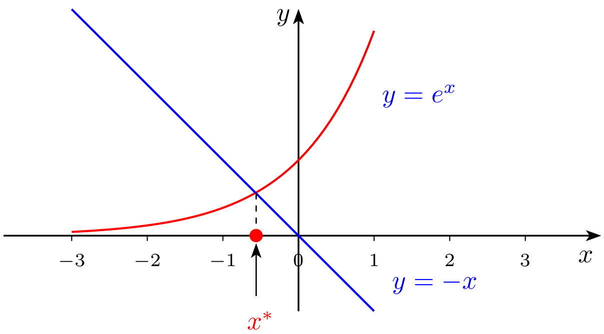


Do gráfico anterior, podemos concluir que a equação tem uma solução e podemos até estimar, de forma grosseira, o valor dessa solução. Por agora, podemos afirmar que a solução pertence ao intervalo $[-1, 0]$, *mas podemos refinar esse intervalo recorrendo a ampliações do gráfico no intervalo que contém a solução. Note-se, porém, que esse procedimento pode ser demorado e requer o traçado de vários gráficos, correspondentes a ampliações sucessivas da região onde se situa a solução da equação. Além disso, requer o suporte de um computador ou de uma calculadora gráfica. Por essas razões, vamos aproximar a solução recorrendo a um método numérico e não a estratégias gráficas. Este exemplo será mantido ao longo do capítulo, de modo apresentar a análise numérica completa da equação e a podermos efectuar algumas comparações dos diferentes métodos que estudaremos.*

Se pretendermos recorrer ao método gráfico na sua forma original podemos, por exemplo, interpretar a equação das seguintes formas:

$$\begin{aligned} x + e^x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^x = -x \quad (i) \\ &\Leftrightarrow \quad -e^x = x \quad (ii) \end{aligned}$$

Qual das interpretações, (i) ou (ii), devemos utilizar? Partindo do pressuposto que a análise gráfica é feita sem recurso a calculadora ou computador, a análise (i) é a mais conveniente, uma vez que faz intervir duas funções sobejamente conhecidas: a exponencial (na sua forma original) e uma função afim. Ainda assim, neste caso, a interpretação (ii) também não é particularmente exigente, pelo que também pode ser utilizada e, obviamente, conduzirá às mesmas conclusões.



Quando a equação tem mais do que uma solução é conveniente separá-las, ou seja, é conveniente que cada intervalo indicado contenha exactamente uma solução da equação. Essa facto pode ser confirmado analiticamente recorrendo ao corolário do teorema de Bolzano (existência de solução) e ao teorema de Rolle, ao estudo da monotonia da função ou a uma análise cuidada do gráfico (unicidade de solução). Note-se que a separação das soluções pode implicar a determinação de intervalos de amplitude pequena, pelo que devemos ter o cuidado de fazer uma representação gráfica com qualidade suficiente para determinar intervalos nessas condições.

Exemplo 4.7. *Regressemos ao exemplo da equação* $\underbrace{x + e^x}_{f(x)} = 0$.

Confirmemos analiticamente que a equação tem ***exactamente uma*** *solução no intervalo* $[-1, 0]$. *Para provar a existência de solução, basta recorrer ao corolário do teorema de Bolzano. Como*

i) $f(x)$ *é contínua no intervalo* $[-1, 0]$, *por ser definida pela soma de duas funções contínuas (uma função afim e uma função exponencial);*

ii) $f(-1) \simeq -0.6321$ *e* $f(0) = 1$ *têm sinais contrários,*

então a função $f(x)$ *tem, pelo menos, uma solução no intervalo* $[-1, 0]$.

Para provar que não existe mais do que uma solução, podemos ter em conta a monotonia da função. Como $f'(x) = 1 + e^x$, *então* $f'(x)$ *é positiva para qualquer* x *real e portanto, em particular,* $f'(x) > 0$ *no intervalo* $[-1, 0]$. *Então* $f(x)$ *é crescente em* $[-1, 0]$ *e, como tal, a função não pode tomar duas vezes o valor zero nesse intervalo! Logo não pode existir mais do que uma raiz de* $f(x)$ *em* $[-1, 0]$. *Como já provámos que a equação tem solução nesse intervalo (os zeros da função* $f(x)$*), então podemos afirmar que* $f(x) = 0$ ***tem exactamente uma*** *solução no intervalo* $[-1, 0]$.

Os métodos que iremos estudar são métodos iterativos (por oposição aos métodos directos), isto é, são métodos que fornecem uma sucessão de valores $\{x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3, \dots\}$ que, em caso de convergência da sucessão, irão aproximar-se da solução x^* pretendida. A cada passo do processo iterativo chama-se iteração. Pretende-se que o processo iterativo gere uma sucessão de aproximações que tenha por limite a raiz x^*, isto é, tal que

$$x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \dots \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^* .$$

Uma vez que do ponto de vista prático não é possível efectuar um número infinito de iterações, teremos que parar ao fim de um determinado número n de vezes, pelo que coloca-se o problema da escolha de um critério de paragem. Os critérios de paragem habituais são os seguintes:

- fixar o número de iterações;
- fixar um majorante M para o erro da aproximação x_n, pelo que o processo de cálculo pára no índice n tal que $\Delta x < M$.

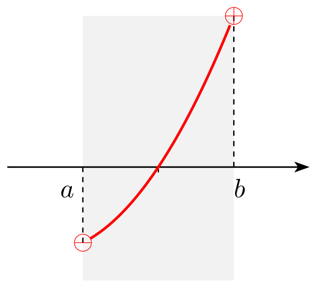
Em qualquer dos casos, toma-se depois $\overline{x} = x_n$, isto é, a solução x^* é aproximada por x_n.

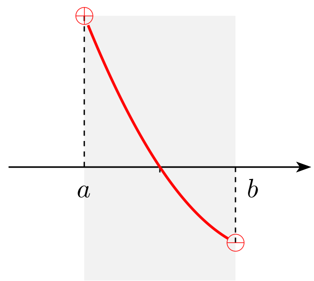
A escolha do intervalo onde se localiza a solução que se pretende determinar está sujeita a várias condições, que dependem do método numérico a utilizar.

4.3.2 Aproximação das soluções

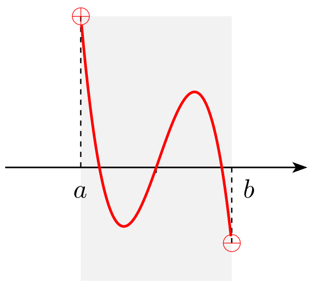
Método da bissecção

O método da bissecção resulta da aplicação sucessiva do corolário do teorema de Bolzano.





O teorema garante que ao unir continuamente dois pontos em que um tem resultado positivo e outro tem resultado negativo, é obrigatório passar **pelo menos uma vez** no valor zero, mas não garante que essa passagem é única (ver figura seguinte), razão pela qual, quando a equação tem mais do que uma solução é necessário separá-las, ou seja, é necessário determinar intervalos que contenham exactamente uma solução.

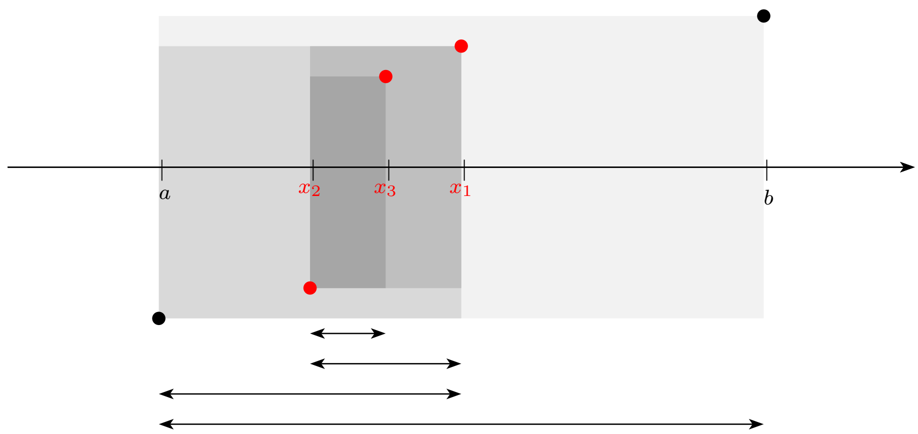


Teorema 4.1. *Seja $f(x) = 0$ uma equação tal que no intervalo $[a, b]$ existe uma única raiz x^*,* ***simples****. Se*

i) $f(x)$ *é contínua em* $[a, b]$*;*

ii) $f(a)$ *e* $f(b)$ *têm sinais contrários, isto é,* $f(a) \times f(b) < 0$*,*

então a sucessão de pontos médios, determinada a partir do intervalo $[a, b]$ *e de tal modo que cada ponto médio pertence a um intervalo no qual a função tem sinais contrários nos respectivos extremos, converge para a raiz* x^**.*



Se a equação $f(x) = 0$ tiver uma raiz separada no intervalo $[a, b]$, o algoritmo da bissecção assegura sempre a convergência da sucessão de aproximações, pelo que o método diz-se **globalmente convergente.** De facto, na iteração n tem-se:

- $f(x_n) = 0$ e nesse caso x_n é a solução pretendida, ou
- $f(x_n) \neq 0$ e nesse caso a sucessão $\{x_1, x_2, \ldots\}$ converge para a solução pretendida, pois o majorante do erro da aproximação reduz-se a metade e então
$$\Delta x \leq \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\,,$$
pelo que (note que $\Delta x = |x^* - x_n|$)
$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^*\,.$$

Exemplo 4.8. *Regressemos à equação* $\underbrace{x + e^x}_{f(x)} = 0,.$

Verificámos anteriormente que a equação tem uma raiz, separada, no intervalo $[-1, 0]$ *e ainda que* $f(-1) < 0$ *e* $f(-0.5) > 0$*, onde* $f(x) = x + e^x$*. No que se segue vamos efectuar quatro iterações do método da bissecção, para aproximar a solução* x^**.*

- $x_1 = \dfrac{-1+0}{2} = -0.5$

  $f(-0.5) \simeq 0.107$ *é diferente de zero, pelo que* x_1 *não é a solução procurada. Mas como* $f(-0.5)$ *tem sinal contrário de* $f(-1)$*, então essa solução está localizada no sub-intervalo* $[-1, -0.5]$;

- $x_2 = \dfrac{-1+(-0.5)}{2} = -0.75$

  $f(-0.75) \simeq -0.277$ *é diferente de zero, pelo que* x_2 *ainda não é a solução procurada. Mas como* $f(-0.75)$ *e* $f(-0.5)$ *têm sinais contrários, então essa solução está localizada no sub-intervalo* $[-0.75, -0.5]$;

- $x_3 = \dfrac{-0.75 + (-0.5)}{2} = -0.625$

  $f(-0.625) \simeq -0.089$ *é diferente de zero, pelo que* x_3 *não é a solução procurada. Mas como* $f(-0.625)$ *e* $f(-0.5)$ *têm sinais contrários, então essa solução está localizada no sub-intervalo* $[-0.625,\ -0.5]$;

- $x_4 = \dfrac{-0.625 + (-0.5)}{2} = -0.5625$

  $f(-0.5625) \simeq 0.008$ *é diferente de zero, pelo que* x_4 *ainda não é a solução procurada.*

Os cálculos anteriores estão resumidos no quadro seguinte:

iteração n	*intervalo* $[a_n, b_n]$	x_n	*Majorante para* Δx_n	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(b_n)$
1	$[-1,\ 0]$	-0.5000	0.5000	$\ominus$	$\oplus$	$+$
2	$[-1,\ -0.5]$	-0.7500	0.2500	$-$	$\ominus$	$\oplus$
3	$[-0.75,\ -0.5]$	-0.6250	0.1250	$-$	$\ominus$	$\oplus$
4	$[-0.625,\ -0.5]$	-0.5625	0.0625	$\ominus$	$\oplus$	$+$

A aproximação $\overline{x} \simeq x_4 = -0.5625$ *é tal que* $\Delta x_3 \le 0.0625$, *pelo que ainda não há garantia de que esta aproximação tenha alguma casa decimal correcta.*

O método da bissecção apresenta alguns pontos fortes:

- simplicidade;
- exige pouca regularidade à função $f(x)$,

mas também alguns inconvenientes:

- em geral, a velocidade de convergência é lenta;
- quando a raiz tem multiplicidade par, a convergência não está garantida;
- o processo de cálculo dá origem a muitos algarismos não significativos.

Método de Newton

A baixa velocidade de convergência do método da bissecção está directamente relacionada com a sua simplicidade, já que pouco mais requer do que a informação acerca do intervalo que contém a raiz da equação. Existem outros métodos que, adicionalmente, consideram informações sobre a função nesse intervalo. No que se segue estudaremos o método de Newton. A sua forma simples e a rapidez de convergência fazem deste um dos métodos mais populares para resolução numérica de equações.

O método consiste em aproximar a função $f(x)$ recorrendo a sucessivas rectas tangentes, já que na vizinhança do ponto de tangência a função e a recta produzem valores bastante próximos.

Consideremos um ponto $(x_0,\ f(x_0))$ e a recta tangente ao gráfico de $f(x)$ nesse ponto. Numa vizinhança suficientemente próxima do ponto de tangência, a função e a recta produzem valores bastante próximos, isto é,

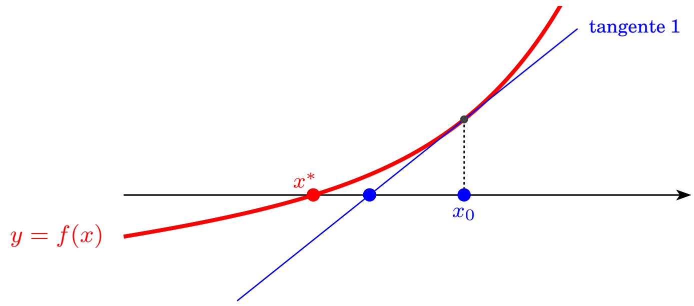
$$\underbrace{f(x)}_{\text{função}} \simeq \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}_{\text{recta tangente}},$$

pelo que a equação

$$f(x) = 0$$

poderá, nessas condições, ser substituída pela equação

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0\,.$$



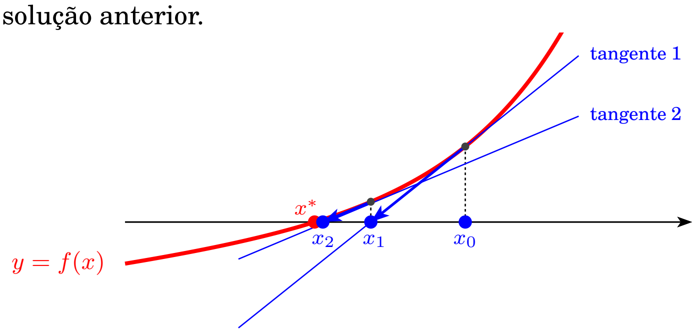
A vantagem desta aproximação é que dá origem a uma equação que é bastante simples de resolver, pois

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0) \\ &\Leftrightarrow \quad x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &\Leftrightarrow \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,. \end{aligned}$$

Denotemos por x_1 a solução anterior. Repetindo o processo de aproximação através da recta tangente no ponto $\big(x_1,\, f(x_1)\big)$, tem-se agora

$$f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\,.$$

Denotemos por x_2 a solução anterior.



Este processo pode ser repetido sucessivamente e, na condição de $f'(x)$ não se anular em nenhuma das iterações, obtemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

que define a fórmula iteradora do método de Newton, ou método da tangente, atendendo à sua interpretação geométrica.

Em condições convenientes, o processo anterior gera uma sucessão $\{x_0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots\}$ que converge para a solução x^* da equação $f(x) = 0$.

Note-se que:

- A sucessão de aproximações será interrompida, se a derivada se anular em alguma iteração x_n !

  Nesse caso a tangente ao gráfico no ponto $\big(x_n,\, f(x_n)\big)$ é paralela ao eixo das abcissas e portanto nunca intersecta o eixo Ox, pelo que a aproximação x_{n+1} não fica definida.

- A sucessão de aproximações pode alternar entre dois valores, $\{x_0,\, x_1,\, x_0,\, x_1,\, x_0,\, x_1,\, \ldots\}$!

  Esta sucessão não tem limite e portanto não converge para x^*. Este cenário só é possível se existir mudança de concavidade entre x_0 e x_1, ou seja, se a segunda derivada mudar de sinal. Nesse caso o processo de cálculo das aproximações torna-se cíclico, pois a aproximação x_0 origina a aproximação x_1 e esta devolve o valor anterior!

Então, ao contrário do método da bissecção, a existência de uma raiz separada no intervalo $[a, b]$ não é suficiente para assegurar a convergência do algoritmo de Newton. Neste caso, as condições de convergência são as apresentadas no teorema seguinte.

Teorema 4.2. *Seja $f(x) = 0$ uma equação com uma raiz real separada, x^*, no intervalo $[a, b]$. Se*

i) $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ são contínuas em $[a, b]$;

ii) $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários;

iii) $f'(x)$ não se anula em $[a, b]$;

iv) $f''(x)$ tem sinal constante em $[a, b]$,

então o método de Newton gera uma sucessão de aproximações que converge para a raiz x^*.

A aproximação inicial x_0 não tem que ser um dos extremos do intervalo $[a, b]$. De facto, x_0 pode ser definida por qualquer ponto do intervalo $[a, b]$ tal que $f(x_0)$ tem o mesmo sinal da segunda derivada $f''(x)$.

As condições (i) e (ii) são comuns ao método da bissecção e garantem que a equação $f(x) = 0$ tem solução no intervalo $[a,\, b]$. Adicionalmente, a condição (iii) garante a unicidade de solução nesse intervalo, mas principalmente que as sucessivas tangentes intersectam sempre o eixo Ox. A condição (iv) garante que o processo nunca se torna cíclico.

Exemplo 4.9. *Regressemos ao exemplo da equação $x + e^x = 0$, que sabemos ter uma solução isolada no intervalo $[-1,\, 0]$. Analisemos a validade das condições de convergência do método de Newton em $[-1,\, 0]$. Seja $f(x) = x + e^x$. Então*

i) $f(x) = x + e^x$, $f'(x) = 1 + e^x$ e $f''(x) = e^x$ são contínuas no intervalo $[-1,\, 0]$, por serem definidas por somas de funções contínuas (polinómios e exponenciais);

ii) $f(-1) \simeq -0.6321 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$ têm sinais contrários;

iii) $f'(x) = 1 + \underbrace{e^x}_{>0}$ é sempre positiva, por ser definida pela soma de uma constante positiva com uma função positiva (a exponencial). Logo $f'(x)$ não se anula em $[-1,\, 0]$;

iv) $f''(x) = \underbrace{e^x}_{>0}$ é sempre positiva, por ser definida por uma exponencial. Logo o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para cima, em $[-1,\, 0]$;

Escolha do extremo favorável: como vimos em (iv), a segunda derivada é positiva em $[-1,\, 0]$. Uma vez que $f(0)$ também é positivo, então consideraremos $x_0 = 0$.

Recordamos que as condições (i) e (ii) já haviam sido verificadas aquando da aplicação do método da bissecção. Além disso, verificámos também que $f'(x) = 1 + e^x$ nunca se anula no intervalo $[-1,\, -0.5]$, pelo só faltava verificar a condição (iv) e fazer a escolha do extremo favorável, (v).

Das condições anteriores concluímos que o método de Newton converge para x^* , *a solução isolada da equação* $x + e^x = 0$ *no intervalo* $[-1, 0]$. *Vamos agora determinar uma aproximação com, pelo menos, três casas decimais correctas para essa raiz. O critério de paragem será então definido por* $\Delta x \leq 0.0005$ *e vamos utilizar quatro casas decimais em todos os cálculos, para atenuar o efeito de propagação dos erros. Então*

- $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \dfrac{f(0)}{f'(0)} = -0.5 \quad \rightarrow \; \Delta x_1 \simeq |x_1 - x_0| \simeq 0.5$
- $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.5 - \dfrac{f(-0.5)}{f'(-0.5)} \simeq -0.5663 \quad \rightarrow \; \Delta x_1 \simeq |x_2 - x_1| \simeq 0.0663$
- $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0.5663 - \dfrac{f(-0.5663)}{f'(-0.5663)} \simeq -0.5671 \quad \rightarrow \; \Delta x_2 \simeq |x_3 - x_2| \simeq 0.0008$
- $x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}, \simeq -0.5671 \quad \rightarrow \; \Delta x_4 \simeq |x_4 - x_3| \simeq 0.0000*$

Assim, $\overline{x} = x_4 - 0.5671$ *com* $\Delta x_4 \simeq 0.0000* < 0.0005$.
Os cálculos anteriores podem ser apresentados na forma de uma tabela:

iteração n	x_n	Δx_n
0	0	0.5000
1	-0.5000	0.5000
2	-0.5663	0.0663
3	-0.5671	0.0008
4	-0.5671	0.0000*

Para terminar, deixamos algumas observações importantes:

- As condições (i)-(iv) são suficientes, mas não necessárias, para garantir a convergência da sucessão de aproximações.
- A análise do sinal das derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ não pode ser feita recorrendo exclusivamente aos extremos do intervalo! Por exemplo, não se pode concluir que $f'(x)$ é positiva apenas porque $f(a)$ e $f(b)$ são ambos positivos.
- As condições de convergência podem ser analisadas directamente do gráfico da função $f(x)$:
  - As condições (i)-(ii) são óbvias;
  - Como $f'(x)$ dá informação ao declive das tangentes ao gráfico, (iii) é verdadeira se e só se o gráfico de $f(x)$ não tiver tangentes horizontais em $[a, b]$.
  - Como $f''(x)$ dá informação da concavidade do gráfico de $f(x)$, (iv) é verdadeira se e só se o gráfico de $f(x)$ ter concavidade constante em $[a, b]$.

4.3.3 Raízes múltiplas

- O que é uma raiz de múltipla?
- Como é que se identifica, graficamente, uma raiz múltipla?
- Quais são as dificuldade associadas à determinação de aproximações de raízes múltiplas?

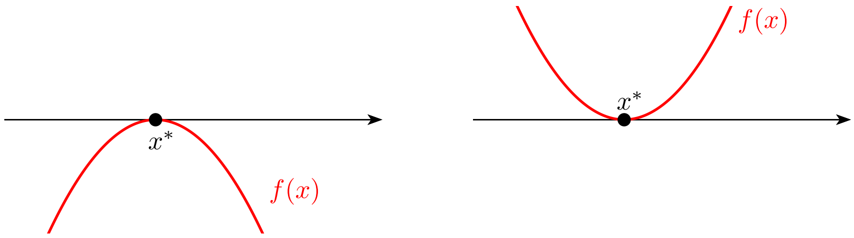
Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$, no qual existe uma raiz separada da equação $f(x)=0$. Suponhamos agora que essa **raiz é múltipla**, isto é, $f(x^*)=0$ mas também $f'(x^*)=0$ e, eventualmente, ainda outras derivadas. Seja m a multiplicidade dessa raiz.

Definição 4.1. *x^* é uma raiz de multiplicidade $m=2,3,\ldots$, de $f(x)$, se*

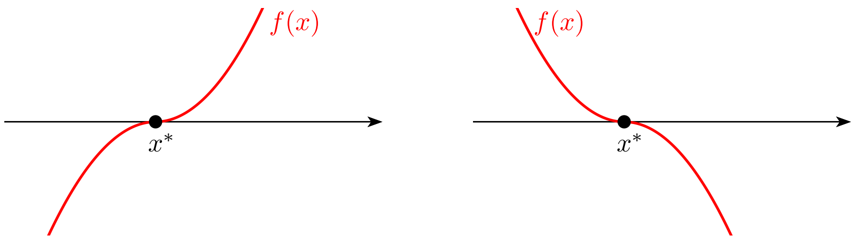
$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(m-1)}(x^*) = 0 \quad e \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0\,.$$

Se x^* é uma raiz <u>simples</u>, então $f'(x^*)\neq 0$ e portanto a tangente ao gráfico de $f(x)$ em x^* não é horizontal.

Se x^* é uma raiz <u>múltipla</u>, tem-se $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ e portanto a tangente ao gráfico em x^* é horizontal. É possível provar que quando x^* é uma raiz de multiplicidade $m>1$ e m é par, o andamento da função é de um dos seguinte tipos:



Por outro lado, quando x^* é uma raiz de multiplicidade $m>1$ e m é ímpar, então o andamento da função é de um dos seguinte tipos:



O **algoritmo da bissecção** pode ser aplicado para determinar uma aproximação da solução, desde que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários.

- Se a raiz tiver multiplicidade ímpar, é fácil de obter um intervalo nas condições pretendidas.

- Se a raiz tiver multiplicidade par, não é possível determinar um intervalo $[a,b]$ que contenha uma única solução e no qual $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários, pelo que o método da bissecção não deve ser aplicado!

No **método de Newton**, a exigência de que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários não é absolutamente necessária. Porém, se a raiz for múltipla, o método vai apresentar problemas crescentes à medida que x_n se aproxima da solução x^*, já que $f(x^*)=0$ mas também $f'(x^*)=0$ e portanto o denominador de $\frac{f(x)}{f'(x)}$ aproxima-se de zero! Nestes casos, a velocidade de convergência é mais baixa do que o habitual, mas o método continua a gerar uma sucessão de aproximações que converge para a solução da equação.

método da bissecção	**método de Newton**
vantagens	
- simplicidade	- elevada velocidade de convergência
- exige pouca regularidade à função $f(x)$	- quando as raízes não são simples, continua a convergir
desvantagens	
- baixa velocidade de convergência	- exige o conhecimento da derivada $f'(x)$ em cada ponto
- a aproximação tem muitos algarismos não significativos	- pode divergir se x_0 estiver demasiado longe da raiz x^*
- em raízes de multiplicidade par, a convergência não está garantida	- em raízes múltiplas, a velocidade de convergência diminui

4.3.4 Comandos Geogebra

No que se segue, apresentamos alguns comandos relativos à resolução, analítica e numérica, de equações no software Geogebra. Em todos eles, deverá utilizar a janela CAS.

- resolver analiticamente uma equação: `resolver(equação)`
- resolver numericamente uma equação: `nresolver(equação)`
- representar graficamente uma função: `f(x):=expressão em x`
- calcular o majorante do erro de uma estimativa: `abs(`$x_n - x_{n-1}$`)`
- definir o número de casas decimais: Opções ► Arredondamento

O cálculo numérico pode ser acompanhado da respectiva ilustração gráfica. Por exemplo, no caso do método de Newton, efectue as seguinte operações na Folha Gráfica 2D e utilizando as opções disponíveis na barra superior:

1. represente o gráfico da função;
2. localize as raízes da função;
3. defina a aproximação inicial x_0 ;
4. marque a recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $\big(x_0, f(x_0)\big)$;
5. determine a raiz x_1 da recta tangente;
6. repita os passos (4)-(5) o número desejado de vezes.

Capítulo 5

Primitivas

5.1 Introdução

A primitivação é a operação inversa da derivação.

Definição 5.1. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $h(x)$ *uma função real de variável real definida em* I.
Uma primitiva de $h(x)$ *em* I *é uma função derivável* $H(x)$, *tal que* $H'(x) = h(x)$ *em* I.
A primitiva $H(x)$ *pode ainda representar-se por* $P\{h(x)\}$ *ou por* $\displaystyle\int h(x)\,dx$.

Exemplo 5.1.

1. *Como* $\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$, *então* $\cos(x)$ *é uma primitiva de* $\sin(x)$;
2. *Como* $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$, *então* $\dfrac{x^3}{3}$ *é uma primitiva de* x^2;
3. *Como* $(e^x)' = e^x$, *então* e^x *é uma primitiva de* e^x.

Observação 5.1.

1. *A primitiva de uma função não é única. De facto, se* $H(x)$ *é uma primitiva de* $h(x)$ *num intervalo I, então* $H(x) + c$ *(com* c *uma constante) também é uma primitiva de* $h(x)$ *no intervalo I, já que*

$$\big(H(x) + c\big)' = H'(x) + 0 = h(x).$$

Por exemplo,

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

e também

$$\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = x^2$$

e, mais geralmente,

$$\left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2 \quad (\textit{qualquer que seja } c \in \mathbb{R}),$$

pelo que

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. *Se* $H(x)$ *é uma primitiva de* $h(x)$, *num intervalo I, então* $H(x)$ *é contínua em* I, *pois é uma função derivável (isto é, tem derivada finita). Recorde que uma função derivável num ponto é contínua nesse ponto.*

3. *Nem todas as funções $h : I \to \mathbb{R}$ tem primitiva. De facto, pelo teorema de Darboux, dada uma função $H : I \to \mathbb{R}$ derivável em I, a sua derivada $H'(x)$ verifica o Teorema do valor intermédio (isto é, não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios). Portanto, se $h(x)$ não verifica a condição do valor intermédio também não tem primitiva.*

Atendendo ao ponto 1 da observação anterior, de agora em diante escreveremos

$$\int h(x)\,dx = H(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

em que $H(x)$ é uma primitiva de $h(x)$, num intervalo I, e c é uma constante real arbitrária.

5.2 Primitivas imediatas

As primitivas imediatas são aquelas que se deduzem directamente das regras de derivação. Por exemplo:

1. $\int 1\,dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad$ pois $(x)' = 1$;
2. $\int f^p(x)\,f'(x)\,dx = \dfrac{f^{p+1}(x)}{p+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \ (p \neq -1), \quad$ pois $\left(\dfrac{f^{p+1}(x)}{p+1}\right)' = f^p(x)\,f'(x)$;
3. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad$ pois $\left(\ln|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

De modo análogo, podemos deduzir as regras apresentadas na tabela da página seguinte.

5.3 Primitivas por decomposição

Tendo em conta as regras de derivação D3 e D4,

$$\begin{aligned} &D3. \quad \big(k\,f(x)\big)' = k\,f'(x), \quad k \in \mathbb{R} \\ &D4. \quad \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)' = f_1'(x) \pm f_2'(x), \end{aligned}$$

tem-se imediatamente,

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$$

ou seja, a primitivação verifica a propriedade da linearidade

$$\int \big(k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x)\big)\,dx = k_1\int f_1(x)\,dx \pm k_2\int f_2(x)\,dx, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Observação 5.2. *É importante realçar que a igualdade*

$$\int f_1(x) \times f_2(x)\,dx \overset{erro!}{=} \int f_1(x)\,dx \times \int f_2(x)\,dx$$

não é válida, já que também não é verdade que

$$\big(f(x) \times g(x)\big)' \overset{erro!}{=} f'(x) \times g'(x)$$

Sejam f e g funções reais de variável real e k, p, a e c constantes reais

	Função: $h(x)$	**Primitiva:** $H(x)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}$
constantes		
P1.	$k,\quad k\in\mathbb{R}$	$k\,x+c$
potências, produtos e quocientes		
P2.	$f'\,f^{\,p},\quad p\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{f^{\,p+1}}{p+1}+c$
P3.	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert+c$
P4.	$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arctg}(f)+c$ **ou** $-\operatorname{arcotg}(f)+c$
P5.	$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin(f)+c$ **ou** $-\arccos(f)+c$
exponencial		
P6.	$f'\,a^f$	$\dfrac{a^f}{\ln(a)}+c$
funções trigonométricas		
P7.	$f'\cos(f)$	$\sin(f)+c$
P8.	$f'\sec(f)\;=\;\dfrac{f'}{\cos(f)}$	$\ln\lvert\sec(f)+\operatorname{tg}(f)\rvert+c$
P9.	$f'\sec^2(f)\;=\;\dfrac{f'}{\cos^2(f)}$	$\operatorname{tg}(f)+c$
P10.	$f'\sin(f)$	$-\cos(f)+c$
P11.	$f'\operatorname{cosec}(f)\;=\;\dfrac{f'}{\sin(f)}$	$\ln\lvert\operatorname{cosec}(f)-\operatorname{cotg}(f)\rvert+c$
P12.	$f'\operatorname{cosec}^2(f)\;=\;\dfrac{f'}{\sin^2(f)}$	$-\operatorname{cotg}(f)+c$
P13.	$f'\sec(f)\operatorname{tg}(f)\;=\;\dfrac{f'\sin(f)}{\cos^2(f)}$	$\sec(f)+c$
P14.	$f'\operatorname{cosec}(f)\operatorname{cotg}(f)\;=\;\dfrac{f'\cos(f)}{\sin^2(f)}$	$-\operatorname{cosec}(f)+c$

5.4 Problemas de valor inicial

Teorema 5.1. *Sejam $h:\,I=[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função primitivável no intervalo I, $x_0\in I$ e $y_0\in\mathbb{R}$. Então, existe uma única primitiva $H(x)$ da função $h(x)$ que satisfaz a condição $H(x_0)\;=\;y_0$.*

Exemplo 5.2.

1. *Determine a solução do seguinte problema de valor inicial* $\quad y'=1+\dfrac{1}{x},\quad y(1)=3\,.$

   Uma vez que

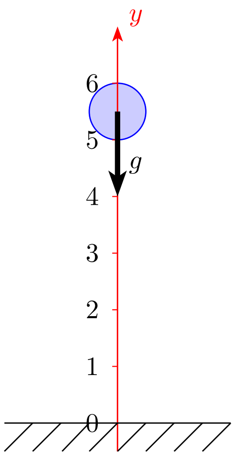
$$y'=1+\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad y=x+\ln|x|+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,,$$

então a única primitiva que verifica a condição inicial dada é a verifica

$$y(1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 1 + \ln(1) + c \Leftrightarrow c = 2\,,$$

ou seja, a função pretendida é $y(x) = x + \ln|x| + 2\,.$

2. *Determine o tempo que demora um corpo livre a atingir o solo, se o mesmo for largado de uma altura de 5 metros. Considere que o corpo parte do repouso, que* $g \simeq 10\,m \cdot s^{-2}$ *e despreze a resistência do ar.*



Atendendo a que a aceleração é determinada pela gravidade, tem-se

$$\underbrace{y''(t)}_{a(t)} \;=\; -g \;=\; -10 \quad \Rightarrow \quad y'(t) \;=\; \int -10\,dt \;=\; -10\,t + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Uma vez que a velocidade inicial é nula, então

$$\underbrace{y'(0)}_{v(0)} \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -10 \times 0 + c_1 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 0\,.$$

Primitivando a expressão da velocidade, obtemos a expressão para a posição,

$$y'(t) \;=\; -10\,t \quad \Rightarrow \quad y(t) \;=\; \int -10\,t\,dt \;=\; -5t^2 + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Como, inicialmente, o objecto estava a 5 metros do solo, então

$$y(0) \;=\; 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \;=\; -5 \times 0 + c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = 5\,.$$

Concluímos assim que o movimento do corpo é definido pela lei $y(t) \;=\; -5t^2 + 5$ *e portanto o corpo atinge o solo quando*

$$y(t) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5t^2 + 5 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1\,.$$

Capítulo 6

Integral definido

6.1 Integral de Riemann ou integral definido

Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado. Uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo I é um subconjunto finito de elementos de I que contém os extremos do intervalo,

$$\mathcal{P} = \{x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n\},$$

onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. A partição, com $n+1$ pontos, divide o intervalo em n sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, cada um de comprimento $h_i = x_i - x_{i-1}$, em que $i = 1, \ldots, n$.

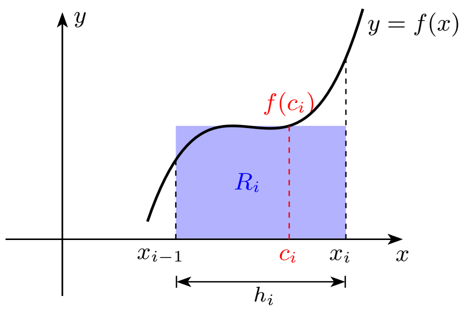
Definição 6.1. *Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$ e seja $\mathcal{P} = \{x_0,\, x_1, \ldots,\, x_n\}$ uma partição do intervalo I. Uma* ***soma de Riemann de** f* *associada à partição $\mathcal{P}$ é qualquer expressão da forma*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, h_i,$$

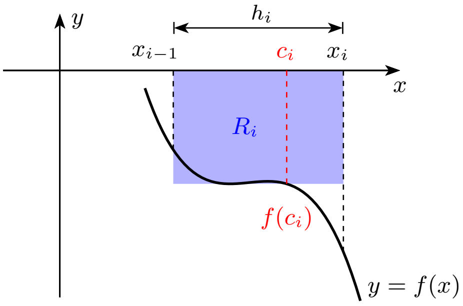
onde c_i é um valor arbitrário do intervalo $[x_{i-1},\, x_i]$, com $i = 1, \ldots, n$.

Observação 6.1. *E importante compreender o significado geométrico de uma soma de Riemann.*

- *Se $f(c_i) > 0$, a parcela* $f(c_i)\, h_i$ *representa a área de um rectângulo R_i*



- *Se $f(c_i) < 0$, a parcela* $f(c_i)\, h_i$ *representa o simétrico da área do rectângulo R_i*



Definição 6.2. *Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo fechado e limitado $[a,b]$. O integral de Riemann (ou integral definido) de $f(x)$ em $[a,b]$ é dado por*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} S(f,\mathcal{P}),$$

caso o limite exista.

Na definição anterior, $\mathcal{P}$ é uma partição do intervalo de integração $[a,b]$ e $h = \max_{i=1,\ldots,n} h_i$ é a amplitude da partição, dada pelo maior comprimento dos subintervalos definidos por $\mathcal{P}$.

Observação 6.2. *Existe o limite*

$$\lim_{h\to 0} S(f,\mathcal{P}) = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,h_i,$$

se o valor é independente da partição $\mathcal{P}$ e dos valores c_i em $[x_{i-1},x_i]$.

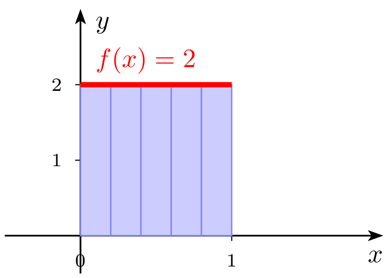
Definição 6.3. *$f(x)$ diz-se integrável num intervalo $[a,b]$, se existe o integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Exemplo 6.1.

1. *Determinemos o integral da função $f(x) = 2$, em $[0,1]$.*

   Considere-se uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[0,1]$. Uma vez que $f(x)$ é constante, a soma de Riemann é dada por

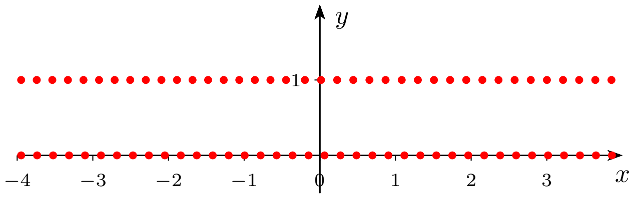
$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot h_i = 2\sum_{i=1}^{n} h_i = 2\,(x_n - x_0) = 2\,(1-0) = 2.$$



   Então,

$$\int_0^1 2\,dx = \lim_{h\to 0} S(f,\mathcal{P}) = \lim_{h\to 0} 2 = 2.$$

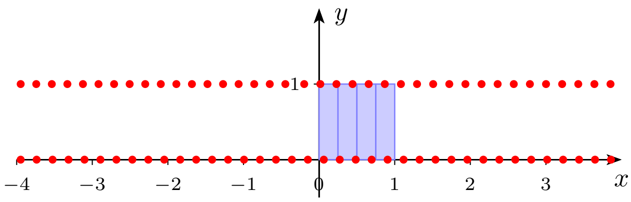
2. *A função de Dirichlet, dada por* $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ *, não é integrável.*



Seja $\mathcal{P}$ *uma partição do intervalo* $[0, 1]$.

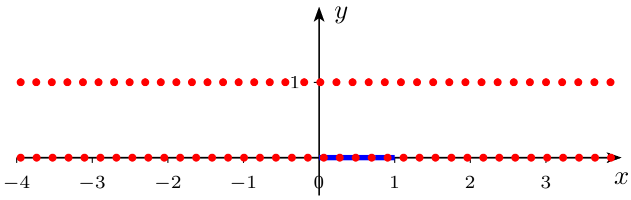
i) Considerando uma soma de Riemann em que os valores c_i *são* *<u>racionais</u>, tem-se* $f(c_i) = 1$*, logo*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot h_i = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1.$$



ii) Por outro lado, se os valores c_i *forem* *<u>irracionais</u>, tem-se* $f(c_i) = 0$ *e*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot h_i = 0 .$$



Portanto não existe $\lim_{h \to 0} S(f, \mathcal{P})$*, o que significa que a função de Dirichlet não é integrável em* $[0, 1]$.

Teorema 6.1 (Corolário do Teorema Fundamental do Cálculo)**.**
Se $f(x)$ *é contínua em* $[a, b]$ *e* $F(x)$ *é* *<u>uma</u>* *primitiva de* $f(x)$ *em* $[a, b]$*, então*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

6.2 Propriedades

O integral definido verifica a propriedade da linearidade:

1. $\displaystyle\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R}\,;$

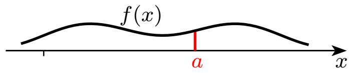
2. $\displaystyle\int_a^b f_1(x) \pm f_2(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx\,.$

ou seja,

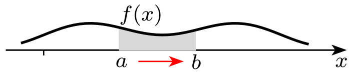
$$\int_a^b k_1\, f_1(x) \pm k_2\, f_2(x)\, dx \;=\; k_1 \int_a^b f_1(x)\, dx \pm k_2 \int_a^b f_2(x)\, dx\,.$$

Sejam $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Tem-se:

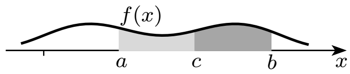
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx \;=\; 0\,;$



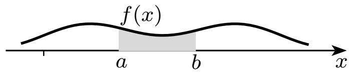
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \;=\; -\int_b^a f(x)\, dx\,;$



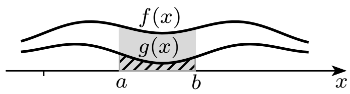
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_a^c f(x) \;+\; \int_c^b f(x)\, dx\,,$ **para todo o** $c \in [a,b]\,;$



- se $f(x) \geq 0$ em $[a,b]\,,$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0\,;$

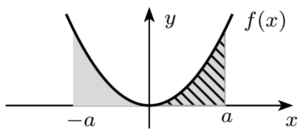


- se $f(x) \geq g(x)$ em $[a,b]\,,$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \;\geq\; \int_a^b g(x)\, dx\,.$

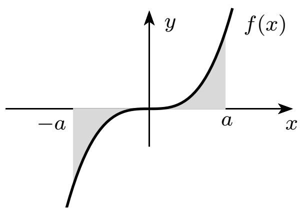


Seja $f\; :\; [-a,a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

- Se a função $f(x)$ é <u>par</u>, então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx \;=\; 2\int_0^a f(x)\, dx\,;$



- Se a função $f(x)$ é <u>ímpar</u>, então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx \;=\; 0\,.$



6.3 Condições suficientes de integrabilidade

- Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é **contínua**, então é integrável em $[a,b]$.

  Nota: De acordo com o teorema de Weierstrass, visto no Capítulo 1, toda a função contínua num intervalo fechado e limitado é também limitada.

- Se $f(x)$ é tal que o conjunto de pontos de $[a,b]$ onde a função <u>não</u> está definida ou <u>não</u> é contínua é FINITO e a função é **limitada** (ie, os limites laterais nesses pontos são finitos), então $f(x)$ é integrável em $[a,b]$.

Observação 6.3. *A verificação de que* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é um integral definido passa pelas seguintes etapas:*

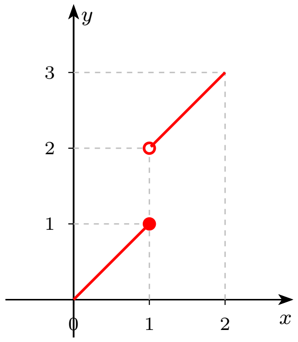
i) verificação que $D_{int} = [a,b]$ *é* ***limitado****;*

ii) verificação que $f(x)$ *está definida e é contínua no* $D_{int} = [a,b]$ *ou, pelo menos, o conjunto de pontos onde a função* <u>*não*</u> *está definida ou* <u>*não*</u> *é contínua é FINITO e a função é* ***limitada*** *(ie, os limites laterais nesses pontos são finitos).*

Exemplo 6.2. *Mostremos que a função*

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x \le 1 \\ x+1\,, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

é integrável em $[0,2]$ *e determinemos* $\int_0^2 f(x)\,dx$.



Começamos por notar que $D_{int} = [0,2]$ *é limitado. Além disso,* $f(x)$ *está definida em todo o* D_{int} ($D_{int} = [0,2] \subseteq D_f = [0,2]$) *e embora a função não seja contínua em todo o intervalo de integração, só existe uma descontinuidade (em* $x=1$*). Uma vez que os limites laterais nesse ponto são finitos, então a função é limitada no intervalo* $D_{int} = [0,2]$. *Logo, a função é integrável e tem-se*

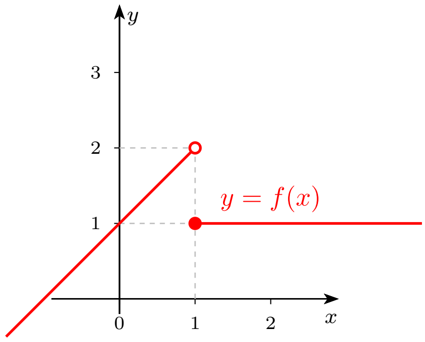
$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x+1\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}-0\right) + \left(2+2-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

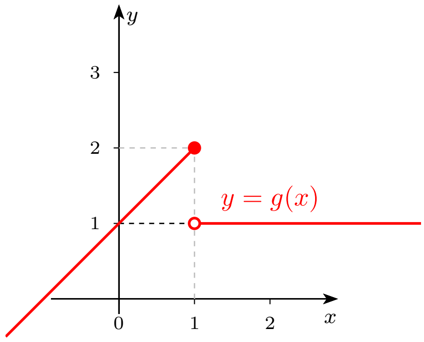
Observação 6.4. *Dadas duas funções integráveis* $f(x)$ *e* $g(x)$ *num intervalo* $[a,b]$*, tais que* $f(x) \neq g(x)$ ***num conjunto finito de pontos*** *de* $[a,b]$*, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Exemplo 6.3. *Consideremos as funções*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \qquad e \qquad g(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$





No intervalo $[0,2]$*, tem-se*

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^1 x+1\,dx + \int_1^2 1\,dx = \frac{5}{2}.$$

6.4 Aplicações do integral definido

Nesta secção vamos estudar algumas aplicações do integral definido, ao cálculo de áreas de regiões planas, de volume de sólidos de revolução e de comprimentos de curvas planas.

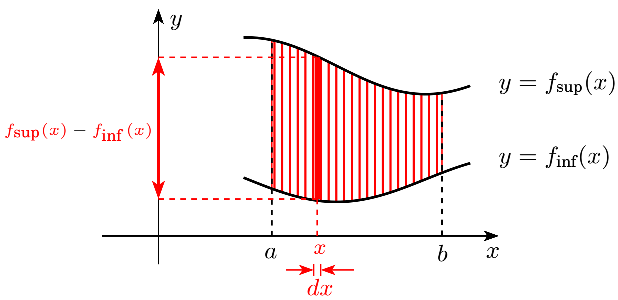
6.4.1 Cálculo de áreas de regiões planas

Dadas duas funções contínuas $f_{\text{inf}}(x)$ e $f_{\text{sup}}(x)$, definidas num intervalo $[a,b]$, a área da região plana

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ f_{\text{inf}}(x) \leq y \leq f_{\text{sup}}(x)\right\},$$

é dada por

$$\boxed{\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_a^b \Big(f_{\text{sup}}(x) - f_{\text{inf}}(x)\Big)\,dx}$$



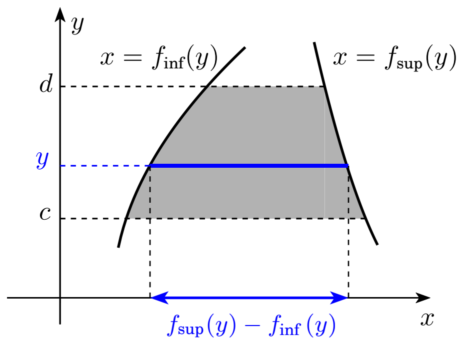
Note-se que, na fórmula anterior, a expressão $\Big(f_{\text{sup}}(x) - f_{\text{inf}}(x)\Big)\,dx$ representa a área do rectângulo elementar, de largura infinitesimal dx e altura $f_{\text{sup}}(x) - f_{\text{inf}}(x)$, conforme ilustrado na figura anterior.

Em alguns casos, pode ser conveniente descrever a região recorrendo à variável y. Nesse caso, dadas duas funções contínuas $f_{\text{sup}}(y)$ e $f_{\text{inf}}(y)$, definidas num intervalo $[c,d]$, a área da região plana

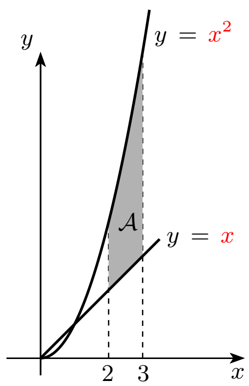
$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; f_{\text{inf}}(y) \leq x \leq f_{\text{sup}}(y) \;\wedge\; c \leq y \leq d\right\},$$

é dada por

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_c^d \big(f_{\text{sup}}(y) - f_{\text{inf}}(y)\big)\, dy\,.$$

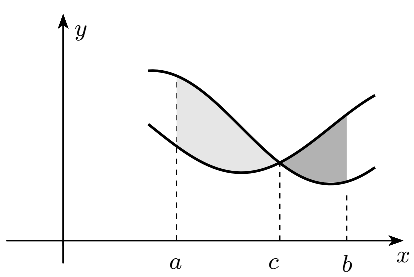


Exemplo 6.4. *A área da região* $\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 2 \leq x \leq 3 \;\wedge\; x \leq y \leq x^2\right\}$ *é dada por*



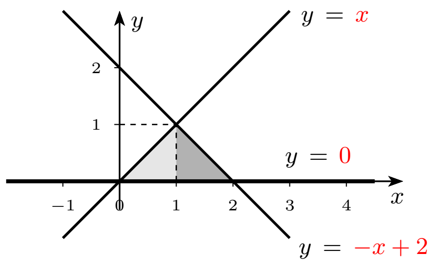
$$\textit{Área}(\mathcal{A}) = \int_2^3 \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{23}{6}\,.$$

Observação 6.5. *No caso de os contornos da região* $\mathcal{A}$ *não serem constantes no intervalo* $[a,b]$*, temos que determinar os pontos onde os gráficos onde as funções se intersectam e decompor o intervalo* $[a,b]$ *em sub-intervalos onde esse sinal é constante.*



O valor da área é dado pela soma das áreas em cada um desses sub-intervalos.

Exemplo 6.5. *Utilizando integrais, a área da região limitada pelas rectas* $y = 0$, $y = -x + 2$ *e* $y = x$ *é dada por*



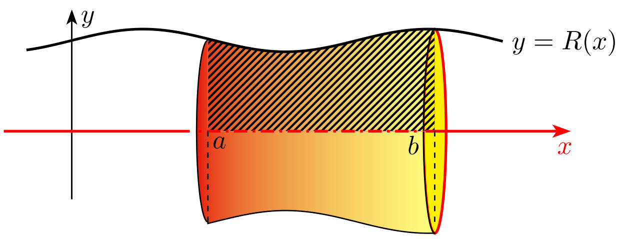
$$\text{Área} = \int_0^1 x - 0\,dx + \int_1^2 (-x+2) - 0\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = 1\,.$$

6.4.2 Cálculo de volumes de sólidos de revolução

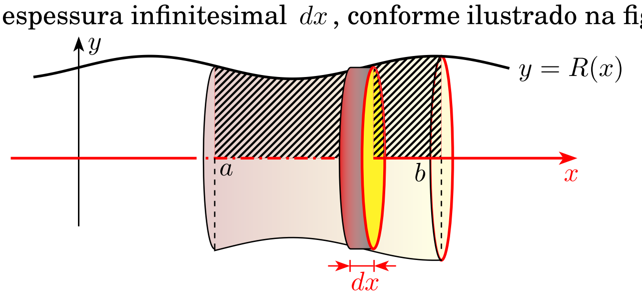
Considere o sólido obtido por **rotação em torno do eixo das abcissas**, de uma região plana definida pelo gráfico de uma função contínua $R(x)$ e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

O volume do sólido de revolução entre os planos $x = a$ e $x = b$ é dado por

$$\boxed{V_{Ox} = \int_a^b \pi R^2(x)\,dx}$$



Note-se que, na fórmula anterior, a expressão $\pi\, R^2\, dx$ representa o volume de um disco elementar, com base de raio $R(x)$ e espessura infinitesimal dx, conforme ilustrado na figura seguinte.

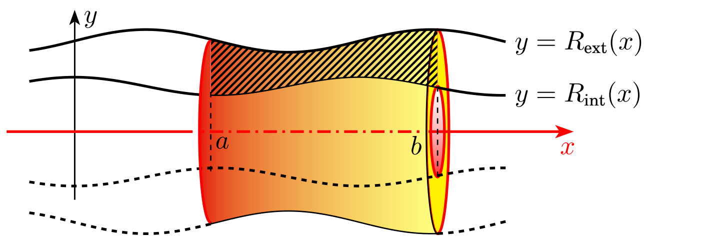


$V = \pi\, R^2\, dx$

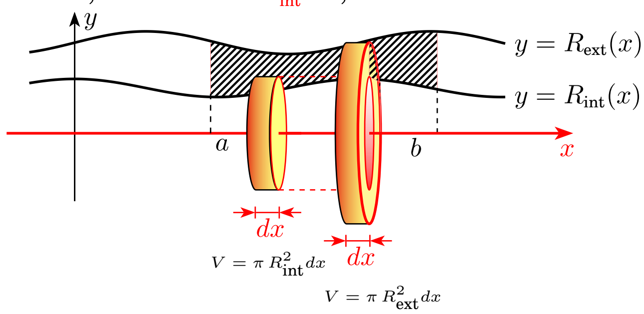
Mais geralmente, tem-se

$$V_{Ox}\,) = \int_a^b \underbrace{\pi\left(R_{\text{ext}}^2(x) - R_{\text{int}}^2(x)\right)}_{\text{área da base}}\ \underbrace{dx}_{\text{espessura}}$$

onde $R_{\text{ext}}(x)$ define o contorno exterior e $R_{\text{int}}(x)$ define o contorno interior.

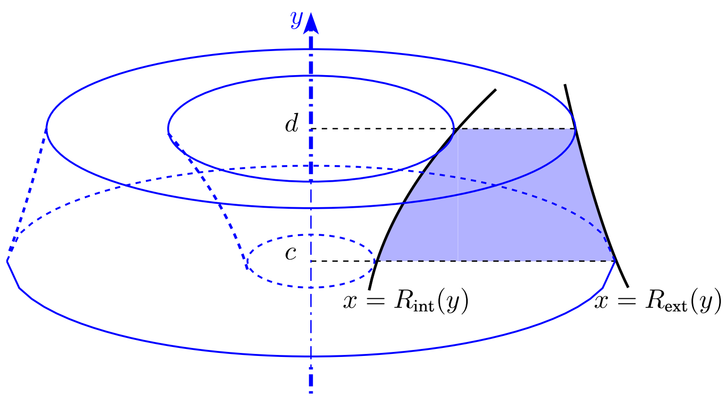


Na fórmula anterior, a expressão $\pi\, R_{\text{ext}}^2\, dx$ representa o volume de um disco elementar, ao qual é depois removida a parte interior, de volume $\pi\, R_{\text{int}}^2\, dx$, conforme ilustrado na figura seguinte.

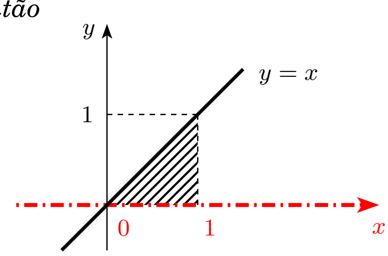


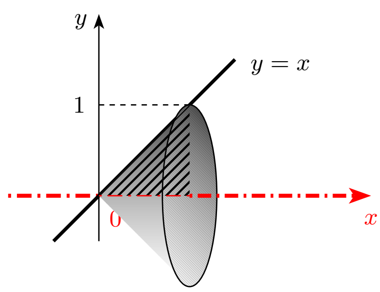
No caso de a rotação da região plana ser realizada em torno do eixo Oy, o cálculo tem que ser descrito em função dessa variável:

$$V_{Oy} = \int_c^d \pi \underbrace{\left(R_{\text{ext}}^2(y) - R_{\text{int}}^2(y)\right)}_{\text{área da base}} \underbrace{dy}_{\text{espessura}}$$



Exemplo 6.6. *Pretende-se calcular o volume de um cone de altura $h = 1$ e cuja base é um círculo de raio $r = 1$. Uma vez que o cone é um sólido de revolução, gerado pela rotação da recta $y = x$ em torno do eixo do Ox, então*



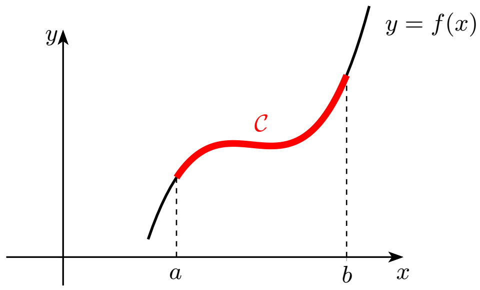


$$V_{Ox} = \int_0^1 \pi\left(x^2 - 0^2\right) dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

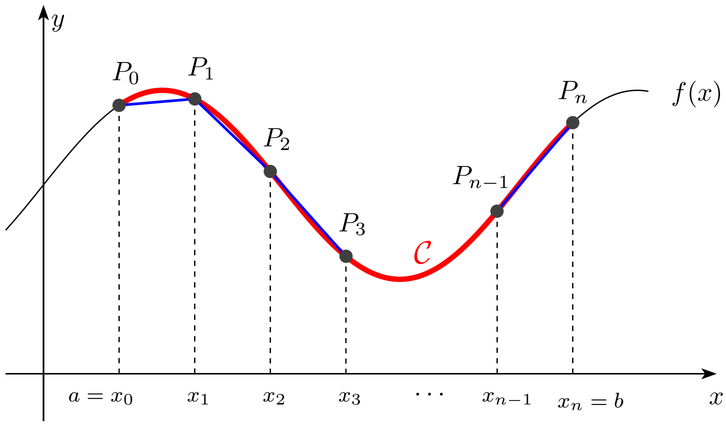
6.4.3 Cálculo do comprimento de uma curva plana

Seja $f(x)$ uma função de classe C^1 no intervalo $[a, b]$. O comprimento da curva $y = f(x)$ entre os pontos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$ é dado por

$$\boxed{\text{Comprimento}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx}$$



Observação 6.6. *Consideremos uma linha poligonal, dividindo o intervalo* $[a, b]$ *em* n *sub-intervalos com extremidades* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *e larguras* $h_i = x_i - x_{i-1}$. *Os pontos* $P_i = \big(x_i, f(x_i)\big)$ *estão em* $\mathcal{C}$ *e a linha poligonal com vértices* $P_0, P_1, \ldots, P_n$, *ilustrada na figura seguinte, é uma aproximação para* $\mathcal{C}$.



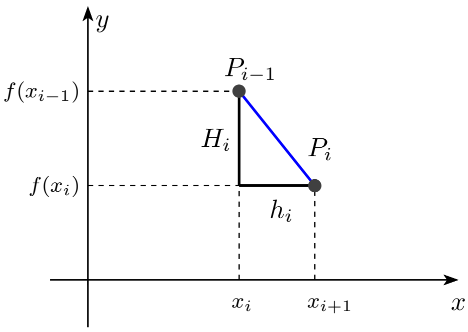
O comprimento de $\mathcal{C}$ *é aproximadamente o mesmo da linha poligonal e a aproximação fica melhor quando o número de sub-intervalos aumenta.*

Então, definimos o comprimento da curva $\mathcal{C}$ *associada à função* $f(x)$ *no intervalo* $a \le x \le b$, *como o limite do comprimento da linha poligonal*

$$\textit{Comprimento}(\mathcal{C}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}\, P_i|$$

Considerando $h_i = |x_i - x_{i-1}|$ *e* $H_i = |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, *tem-se*

$$|P_{i-1}\, P_i| = \sqrt{h_i^2 + H_i^2}\,.$$



Aplicando o Teorema do valor médio para $f(x)$*, existem* c_i *entre* x_{i-1} *e* x_i *tais que*

$$\underbrace{f(x_i) - f(x_{i-1})}_{H_i} = f'(c_i)\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{h_i},$$

isto é,

$$H_i = f'(c_i)\,h_i\,.$$

Então,

$$|P_{i-1}\,P_i| = \sqrt{h_i^2 + H_i^2} = \sqrt{h_i^2 + \big(f'(c_i)\,h_i\big)^2} = \sqrt{\Big(1 + \big[f'(c_i)\big]^2\Big)\,h_i^2} = \sqrt{1 + \big[f'(c_i)\big]^2}\;h_i\,,$$

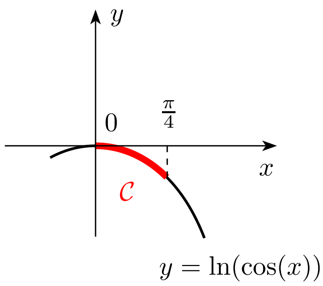
pelo que

$$\textit{Comprimento}(\mathcal{C}) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}\,P_i| = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + \big[f'(c_i)\big]^2}\;h_i = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\,dx\,,$$

pela definição de integral.

Note-se que o integral anterior existe, porque a função $\sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}$ *é contínua em* $[a,\,b]$.

Exemplo 6.7. *Qual o comprimento da curva* $y = \ln(\cos(x))$ *no intervalo* $[0, \frac{\pi}{4}]$*?*



$$\begin{aligned}
Comp(\mathcal{C}) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left[\Big(\ln\big(\cos(x)\big)\Big)'\right]^2}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left[\operatorname{tg}(x)\right]^2}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x)\,dx \\
&= \Big[\ln|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \ln\Big(\sec\big(\tfrac{\pi}{4}\big)+\operatorname{tg}\big(\tfrac{\pi}{4}\big)\Big) - \ln\big(\sec(0)+\operatorname{tg}(0)\big) \\
&= \ln(\sqrt{2}+1) \\
&\simeq 0.88137
\end{aligned}$$

6.5 Integração numérica

O cálculo de um integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ recorrendo a primitivas (corolário do Teorema Fundamental do Cálculo),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

nem sempre é possível, porque:

- **existem funções que não têm primitiva elementar**, isto é, cuja primitiva não pode ser explicitada recorrendo a um número finito de operações elementares (soma, subtracção, multiplicação, divisão, composição e raiz) de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas ou trigonométricas inversas. É o que acontece, por exemplo, com as funções

$$e^{-x^2}\,, \quad \sin(x^2)\,, \quad \cos(x^2)\,, \quad \frac{\sin(x)}{x}\,, \quad \frac{\cos(x)}{x}\,, \quad \frac{1}{\ln(x)}\,.$$

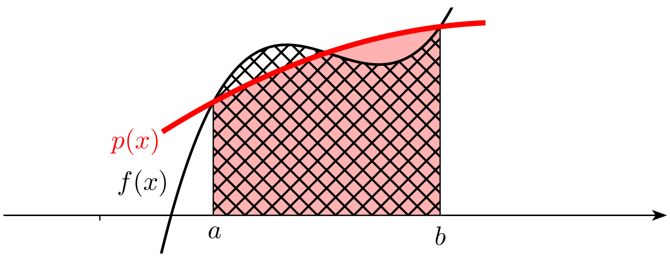
- **nem sempre é conhecida a expressão analítica de** $f(x)$, (por exemplo, quando a função é estimada recorrendo a medições).

O uso de métodos de integração numérica permite determinar um valor aproximado do integral sem determinar a primitiva da função integranda. A ideia subjacente à integração numérica consiste em aproximar, no intervalo $[a,b]$, a função $f(x)$ através de uma função $p(x)$ com primitiva elementar,

$$f(x) \simeq p(x), \quad \text{em } [a,b]\,,$$

considerando-se depois a aproximação

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p(x)\,dx\,.$$



A escolha da função $p(x)$ origina diferentes famílias de fórmulas de integração numérica: regra dos trapézios, regra de Simpson, etc.

No que se segue vamos considerar $p(x) = p_n(x)$, o polinómio interpolador de grau $\leq n$ da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, recorrendo a $n+1$ pontos igualmente espaçados no intervalo de integração. O intervalo $[a, b]$ ficará assim dividido em n sub-intervalos de igual amplitude, h, dada por

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$

Note-se que o grau do polinómio originará diferentes fórmulas de integração numérica mas, em qualquer caso, a primitivação do polinómio $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ não levantará qualquer dificuldade do ponto de vista algébrico, pois

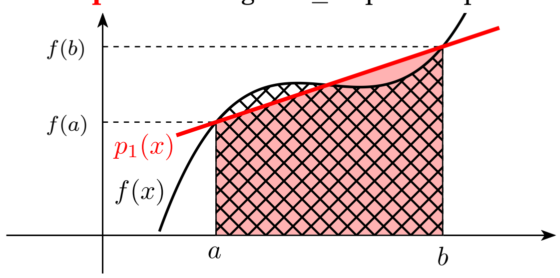
$$\int a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n \, dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

6.5.1 Regra dos trapézios

Consideremos a aproximação

$$f(x) \simeq p_1(x), \quad \text{em } [a, b],$$

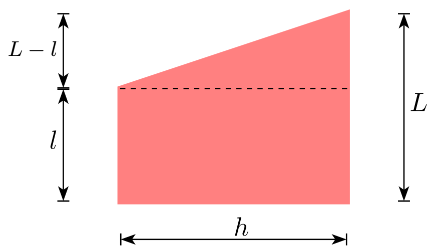
onde $p_1(x)$ é o **polinómio interpolador** de grau ≤ 1 que tem por base os pontos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$:



Então,

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \int_a^b p_1(x)\, dx = \underbrace{\frac{b-a}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big)}_{\text{Área do trapézio}}.$$

Observação 6.7. *Recordamos que a área de um trapézio é dada por*



$$\begin{aligned} \textit{Área(trapézio)} &= \textit{Área(rectângulo)} + \textit{Área(triângulo)} \\ &= h \times l + \frac{h \times (L-l)}{2} \\ &= \frac{h}{2}(l + L). \end{aligned}$$

Esta regra numérica também pode, obviamente, ser deduzida analiticamente. Atendendo a que a recta secante que passa pelos pontos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b,\, f(b)\big)$ é dada por

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)\,,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\simeq \int_a^b f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)\,dx \\
&= \left[f(a)\,x + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^b \\
&= f(a)\,b + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{(b-a)^2}{2} - f(a)\,a \\
&= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{2}(b-a) \\
&= (b-a)\Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2} \Big) \\
&= (b-a)\Big(\frac{2f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} - \frac{f(a)}{2} \Big) \\
&= \frac{b-a}{2}\,\Big(f(a) + f(b) \Big)\,.
\end{aligned}$$

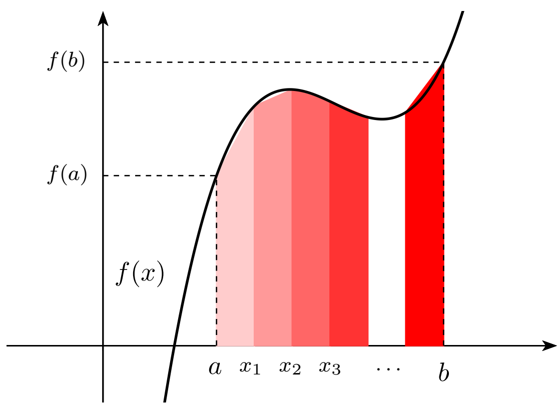
Para melhorar a aproximação podemos dividir o intervalo de integração $[a, b]$ num número suficientemente elevado de sub-intervalos, nos quais se aplica depois a regra dos trapézios. O resultado obtido é designado a regra dos trapézios composta.

Consideremos então uma partição do intervalo $[a, b]$ recorrendo a pontos igualmente espaçados

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

com $h = x_i - x_{i-1}$ (constante) e apliquemos a regra dos trapézios a cada um dos sub-intervalos

$$[x_0,\, x_1]\,, \quad [x_1,\, x_2]\,, \quad \cdots \quad [x_{n-1},\, x_n]\,.$$



Aplicando a regra dos trapézios em cada um dos sub-intervalos, obtemos a aproximação

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \;+\; \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \;+\; \ldots \;+\; \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \\
&\simeq \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_1) \Big) + \frac{h}{2}\Big(f(x_1) + f(x_2) \Big) + \cdots + \frac{h}{2}\Big(f(x_{n-1}) + f(x_n) \Big) \\
&= \boxed{\frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \Big)}
\end{aligned}$$

Note-se que os pontos intermédios têm peso 2, por intervirem como extremo superior num sub-intervalo e como extremo inferior no sub-intervalo seguinte.

O facto de as abcissas dos pontos serem igualmente espaçadas não constitui uma limitação à aplicação da regra dos trapézios uma vez que, no caso de as abcissas não serem igualmente espaçadas, podemos recorrer à aplicação sucessiva da regra dos trapézios simples em cada sub-intervalo.

Erro da regra dos trapézios

Prova-se que o erro que se comete ao aproximar o integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ recorrendo à regra dos trapézios é majorado através da desigualdade

$$\Delta x \;\leq\; \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,\max_{[a,b]}|f''(x)|\,.$$

Observação 6.8.

1. *Quando aumentamos o número de sub-intervalos, o intervalo $[a,b]$ permanece inalterado pelo que os valores de $(b-a)^3$ e do máximo da segunda derivada também permanecem inalterados. Mas como o valor de n aumenta, então o erro da aproximação diminui.*

$$\Delta x \;\leq\; \frac{(b-a)^3}{12\,\underbrace{n^2}_{\checkmark}}\,\max_{[a,b]}|f''(x)|\,.$$

2. *A regra dos trapézios fornece resultados exactos sempre que a função $f(x)$ é um polinómio de grau ≤ 1.*

$$\Delta x \;\leq\; \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,\underbrace{\max_{[a,b]}|p_1''(x)|}_{=0}\,.$$

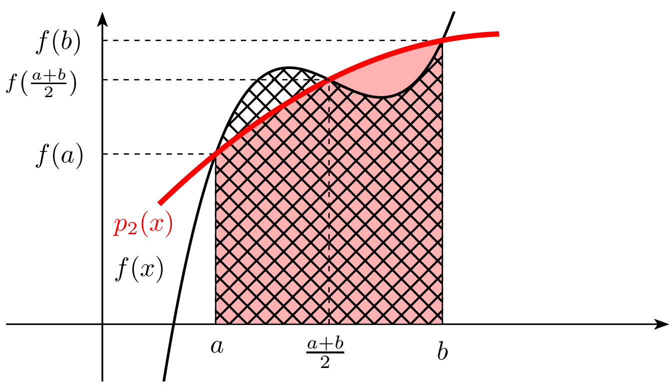
6.5.2 Regra de Simpson

Consideremos a aproximação

$$f(x) \simeq p_2(x)\,, \quad \text{em } [a,b]\,,$$

onde $p_2(x)$ é o **polinómio interpolador** de grau ≤ 2 que tem por base os três pontos

$$\Big(a, f(a)\Big), \quad \Big(\frac{a+b}{2}, f\big(\frac{a+b}{2}\big)\Big), \quad \Big(b, f(b)\Big):$$



Após algumas manipulações matemáticas, verifica-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\simeq\; \int_a^b p_2(x)\,dx \;=\; \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(b)\Big)\,,$$

onde $h = \frac{b-a}{2}$ é a distância entre 2 abcissas consecutivas.

A estratégia que foi usada para construir a regra dos trapézios composta também pode ser usada para construir a regra de Simpson composta. Considera-se uma partição do intervalo $[a, b]$ recorrendo a um **número ímpar de pontos** igualmente espaçados (ou seja, a um **número par de intervalos**),

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

com $h = x_i - x_{i-1}$ (constante) e aplica-se a regra de Simpson a cada um dos sub-intervalos

$$[x_0,\, x_2]\,,\quad [x_2,\, x_4]\,,\quad \cdots\quad [x_{n-2},\, x_n]\,.$$

Tem-se então

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \;+\; \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \;+\; \ldots \;+\; \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \\
&\simeq \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big) + \frac{h}{3}\Big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big) + \cdots + \frac{h}{3}\Big(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big) \\
&= \boxed{\frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big)}
\end{aligned}$$

Os pesos dos pontos intermédios são alternadamente 4 e 2, começando e acabando em 4.

Note-se que h é o espaçamento entre pontos e não a amplitude de cada intervalo onde foi aplicada a regra de Simpson simples!

Tal como na regra dos trapézios, a limitação de que as abcissas dos pontos sejam igualmente espaçadas não constitui uma limitação à aplicação da regra de Simpson, desde que existam trios de pontos igualmente espaçados e sucessivos.

Erro da regra de Simpson

Prova-se que o erro que se comete ao aproximar o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ através da regra de Simpson é majorado através da seguinte desigualdade:

$$\Delta x \;\leq\; \frac{(b-a)^5}{180\, n^4}\, \max_{[a,b]} |f''''(x)|\,.$$

Observação 6.9.

1. *Quando aumentamos o número de sub-intervalos, o intervalo $[a, b]$ permanece inalterado pelo que os valores de $(b-a)^5$ e do máximo da derivada de quarta ordem permanecem também inalterados. Mas como o valor de n aumenta, então o erro da aproximação diminui.*

$$\Delta x \;\leq\; \frac{(b-a)^5}{180\,\underbrace{n^4}_{\checkmark}}\, \max_{[a,b]} |f''''(x)|\,.$$

2. *A fórmula de Simpson **é exacta para polinómios de grau** ≤ 3. Este resultado é surpreendente, uma vez que a fórmula de Simpson resulta da aproximação da função $f(x)$ recorrendo a polinómios p_2 de grau ≤ 2!*

$$\Delta x \;\leq\; \frac{(b-a)^5}{180\, n^4}\, \underbrace{\max_{[a,b]} |p_3''''(x)|}_{=0}\,.$$

Exemplo 6.8. *Calculemos o valor exacto do integral* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ *e comparemos esse valor com as aproximações que se obtêm usando:*

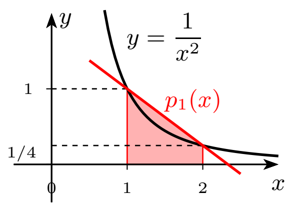
1. *a regra dos trapézios;*
2. *a regra dos trapézios com* $h = 0.25$*;*
3. *a regra de Simpson.*

O valor exacto do integral é

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 0.5$$

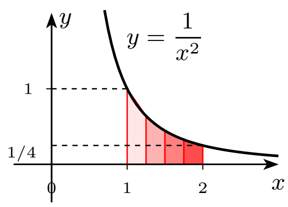
1. *Regra dos trapézios:*

   O número mínimo de intervalos que podemos considerar para aplicar a regra dos trapézios é 1. Nessas condições, tem-se



$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \simeq \frac{1}{2}\Big[f(1) + f(2)\Big] = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 0.625$$

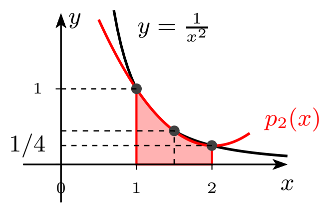
2. *Regra dos trapézios com* $h = 0.25$



$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \simeq \frac{0.25}{2}\Big[f(1) + 2\,f(1.25) + 2\,f(1.5) + 2\,f(1.75) + f(2)\Big] \simeq 0.50899$$

3. *Regra de Simpson.*

   O número mínimo de intervalos que podemos considerar para aplicar a regra de Simpson é 2, uma vez que tem que ser par. Nessas condições, tem-se



$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \simeq \frac{0.5}{3}\Big[f(1) + 4\,f(1.5) + f(2)\Big] \simeq 0.50463$$

Tendo em conta o valor exacto do integral, calculado anteriormente, verificamos que a regra de Simpson recorrendo a 2 sub-intervalos permite obter uma melhor aproximação do que a regra dos trapézios recorrendo a 4 sub-intervalos!

Comandos Geogebra

No que se segue, apresentamos alguns comandos relativos ao cálculo, analítico e numérico, de integrais no software Geogebra. Em todos eles, deverá utilizar a janela CAS.

- calcular a primitiva $\int f(x)\,dx$: `integral(função f)`
- calcular o integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$: `integral(função f, a, b)`
- calcular a derivada $f^{(n)}(x)$: `derivada(função f, n)`
- calcular a soma trapezoidal: `somatrapezoidal(função, a, b, # de sub-intervalos)`
- definir o número de casas decimais: Opções ▶ Arredondamento

Capítulo 7

Integral impróprio

De acordo com a observação 6.3, a verificação de que um integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é **definido** passa pelas seguintes etapas:

i) verificação que $D_{int} = [a, b]$ é **limitado**;

ii) verificação que $f(x)$ está definida e é contínua no $D_{int} = [a, b]$ ou, pelo menos, que o conjunto de pontos onde a função não está definida ou não é contínua é FINITO e a função é **limitada** (ie, os limites laterais nesses pontos são finitos).

No caso dos integrais **impróprios**, não se verifica pelo menos uma das condições (i) ou (ii).

i) $D_{int} = [a, b]$ **não** é **limitado**. $\longrightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx\,, \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

ou

ii) o conjunto de pontos de $D_{int} = [a, b]$ onde a função não está definida ou não é contínua é finito, mas a função **não** é **limitada**. $\longrightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty\,,$ em algum c no intervalo $[a, b]$

7.1 Integral impróprio de 1ª espécie (ou tipo I)

Num integral impróprio de 1ª espécie não se verifica a condição (i), na medida em que D_{int} **não** é limitado: $D_{int} = [a, +\infty[$ ou $D_{int} =]-\infty, b]$ ou $D_{int} =]-\infty, +\infty[$.

Definição 7.1. *Seja* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua em qualquer intervalo fechado e limitado* $[a, t]$*, para todo o* $t > a$.

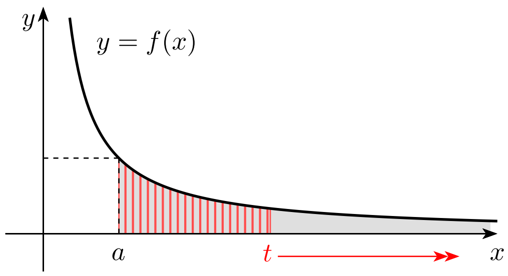
O integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^{t} f(x)\,dx\,,$$

se o limite do segundo membro é finito. Caso o limite não exista ou seja infinito, o integral impróprio diz-se divergente.



Observação 7.1.

1. *O integral impróprio* $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ *estuda-se de forma semelhante.*
2. *Estudar a natureza de um integral impróprio consiste em determinar se este é convergente ou divergente.*

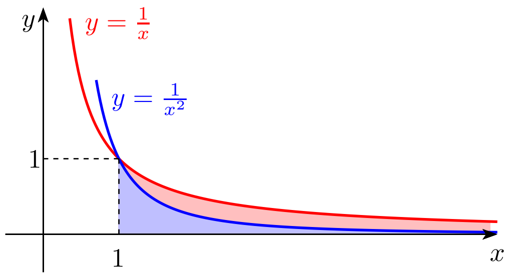
Exemplo 7.1.

1. *O integral impróprio* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ *é convergente, pois*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1\,.$$

2. *O integral impróprio* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ *é divergente, pois*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[\ln|x|\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \Big(\ln|t| - 0\Big) = +\infty\,.$$



Observação 7.2. *Dado o integral impróprio* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$*, escolhe-se um ponto* c *e estuda-se a natureza de cada um dos integrais impróprios*

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

O integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *é convergente se os integrais anteriores são ambos convergentes e escreve-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Basta que um dos integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ *ou* $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ *seja divergente, para concluir que o integral impróprio* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *é divergente. Prova-se que a natureza do integral impróprio é independente do valor* c *considerado.*

7.2 Integral impróprio de 2ª espécie (ou tipo II)

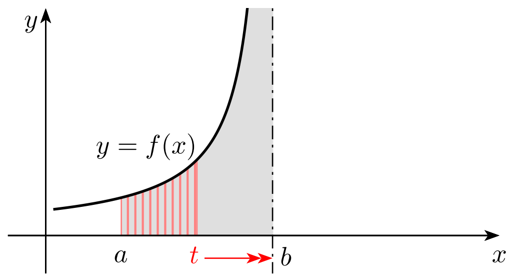
Num integral impróprio de 2ª espécie não se verifica a condição (ii), na medida em que a função $f(x)$ **não** é limitada em $D_{int} = [a,b]$.

Definição 7.2. *Seja* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua e tal que* $\lim\limits_{t\to b^-} f(t) = \infty$.

O integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *diz-se convergente, e escreve-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx\,,$$

se o limite do segundo membro é finito. Caso o limite não exista ou seja infinito o integral impróprio diz-se divergente.



Observação 7.3. *Estuda-se de forma semelhante o integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, *no qual* $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = \infty$.

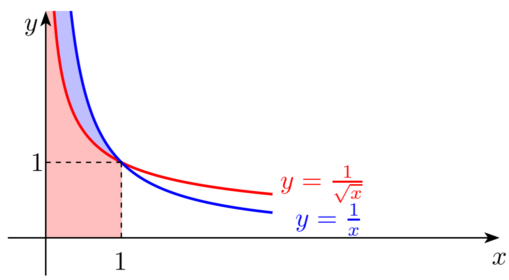
Exemplo 7.2.

1. *O integral impróprio* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ *é divergente, pois*

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \Big[\ln|x|\Big]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \Big(0 - \ln|t|\Big) = +\infty$$

2. *O integral impróprio* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ *é convergente, pois*

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} 2\Big(1-\sqrt{t}\Big) = 2\,.$$



Observação 7.4. *Seja* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua e tal que* $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = \infty$ *e* $\lim\limits_{t\to b^-} f(t) = \infty$. *Para analisar a natureza do integral impróprio*

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

escolhe-se um valor c *no intervalo* $]a, b[$ *e estuda-se a natureza de cada um dos integrais impróprios*

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \textit{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

O integral impróprio é convergente se os integrais anteriores são ambos convergentes e escreve-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Basta que um dos integrais impróprios seja divergente para concluir que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ *é divergente. Prova-se que a natureza do integral é independente do valor* c *considerado.*

7.3 Integral impróprio de 3$^{\underline{a}}$ espécie (ou tipo III)

Um integral é impróprio de 3$^{\underline{a}}$ espécie se for, simultaneamente, impróprio de 1$^{\underline{a}}$ e de 2$^{\underline{a}}$ espécies. Num integral impróprio de 3$^{\underline{a}}$espécie, não se verificam as condições (i) e (ii).

Exemplo 7.3. *O integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ *é impróprio de 3*$^{\underline{a}}$ *espécie, pois*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx}_{1^{\underline{a}}\text{espécie}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx}_{2^{\underline{a}}\text{espécie}}$$

Como, por exemplo, o integral impróprio de 1$^{\underline{a}}$ *espécie é divergente, então o integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ *também é divergente.*

Capítulo 8

Técnicas de primitivação

As regras de primitivação imediata estudadas no Capítulo 5 só permitem calcular a primitiva de um conjunto muito limitado de funções. Neste capítulo estudaremos outras técnicas de primitivação, que permitirão determinar a primitiva de um conjunto bastante mais alargado de funções.

8.1 Primitivação por substituição

Como motivação para o que se segue nesta secção, comecemos por recordar como podemos resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. O método mais simples consiste em efectuar a mudança de variável $t = e^x$ e resolver a equação $t^2 + t - 2 = 0$, recorrendo à fórmula resolvente para polinómios de graus dois. A partir daí, podemos então determinar as soluções na variável original.

$$\begin{aligned}
& e^{2x} + e^x - 2 = 0\,, \qquad \text{mudança de variável } t = e^x \\
\Leftrightarrow\ & t^2 + t - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & t = \tfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & t = \tfrac{-1+3}{2} = 1 \ \vee\ t = \tfrac{-1-3}{2} = -2 \\
\Leftrightarrow\ & t = \tfrac{-1 \pm 3}{2} = 0 \qquad \text{mudança de variável } t = e^x \\
\Leftrightarrow\ & e^x = 1 \ \vee\ \underbrace{e^x = -2}_{\text{impossível!}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \ln(1) = 0\,.
\end{aligned}$$

A regra de primitivação por substituição é uma consequência da derivada da função composta.

Seja $f(x)$ primitivável num intervalo I e $x = \varphi(t)$ uma função derivável e invertível num intervalo J, tal que $\varphi(J) = I$. Seja $F = \int f(x)\,dx$ uma primitiva de f. No intervalo J verifica-se

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\,\varphi' = (f \circ \varphi)\,\varphi'\,,$$

pelo que (por definição de primitiva),

$$F \circ \varphi = \int (f \circ \varphi)\,\varphi'\,dt\,.$$

Sendo $x = \varphi(t)$ invertível, então

$$F = \int (f \circ \varphi)\,\varphi'\,dt \circ \varphi^{-1}\,,$$

ou seja,

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f\Big(\varphi(t)\Big)\cdot\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Observação 8.1.

1. *A primitiva do segundo membro é calculada em ordem à variável t, com a posterior substituição de t por $\varphi^{-1}(x)$, de modo a obter-se uma primitiva em x.*

2. *A mudança de variável numa primitiva tem como objectivo a simplificação do cálculo. A substituição adequada depende da função $f(x)$. No formulário da UC estão listados alguns dos casos mais relevantes.*

8.2 Primitivação por partes

Porque é que as funções $3\,e^x$ e $x\,e^x$ não podem ser primitivadas recorrendo à mesma técnica de primitivação? De facto, no primeiro caso tem-se

$$\int 3\,e^x\,dx = 3\int \underbrace{1\,e^x}_{P6}\,dx = 3\,e^x + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

O mesmo não pode ser efectuado no segundo caso, uma vez que o factor x não é constante e portanto não podemos recorrer à linearidade da primitivação

$$\int \underbrace{x}_{!!!}\,e^x\,dx\,.$$

Então, como podemos tratar este tipo de problemas?

A regra de primitivação por partes deduz-se da regra da derivada do produto. Sejam $\int p\,dx$ uma primitiva de $p(x)$ num certo intervalo I e $d(x)$ uma função derivável nesse intervalo. Então,

$$\Big(\int p\,dx\cdot d\Big)' = \big(\int p\,dx\big)'\cdot d + \int p\,dx\cdot(d)' = p\cdot d + \int p\,dx\cdot d'\,,$$

pelo que (por definição de primitiva),

$$\int p\cdot d + \int p\,dx\cdot d'\,dx = \int p\,dx\cdot d$$

ou seja,

$$\boxed{\int p\cdot d\,dx = \int p\,dx\cdot d - \int \int p\,dx\cdot d'\,dx}$$

Observação 8.2.

1. *Não se deve aplicar a regra de primitivação por partes sem que se tenha analisado se a primitiva é imediata!*

2. *A primitivação por partes é por vezes independente da função pela qual se começa a primitivar (função p da fórmula), mas na maior parte dos casos o êxito da aplicação deste método está relacionado com a escolha da função pela qual se começa a primitivar.*

3. *Regras práticas:*

i) Começar por primitivar a função que menos se simplifica por derivação.

ii) Sendo possível primitivar apenas um dos factores, é por este que se começa a primitivar.

iii) Quando existe uma função cuja primitiva se desconhece, podemos começar por primitivar pelo factor 1.

iv) A regra de primitivação por partes pode aplicar-se em cadeia.

v) Pela aplicação da regra de primitivação por partes obtém-se, em alguns casos, a primitiva que pretendemos calcular no segundo membro. Neste caso, isola-se a primitiva e resolve-se a igualdade como uma equação, em que a incógnita é a primitiva.

8.3 Primitivação de funções trigonométricas

As regras P7 a P14 da primitivação imediata só permitem resolver um conjunto limitado de casos. Por exemplo, a primtiva

$$\int \sin^2(x)\,dx$$

não pode ser calculada recorrendo à regra P8, por causa do expoente, nem à regra P2, porque falta a derivada da função de base! Já a primitiva

$$\int \sin(x)\cos(3x)\,dx$$

não pode ser calculada recorrendo às regras P7 e P8, por envolver sempre um factor a mais, nem à regra P2, porque a derivada de $\sin(x)$ não é $\cos(3x)$, nem a derivada de $\cos(3x)$ é $\sin(x)$, já que os argumentos das funções não coincidem!

Como podemos, então, resolver estes casos?

As técnicas que vamos apresentar têm por base o recurso a identidades trigonométricas, que permitem reescrever a função de forma conveniente. Porém, este tipo de primitivas também pode ser resolvido recorrendo à técnica de primitivação por partes.

8.3.1 Potências ou produtos de potências de seno e cosseno

Quando o problema está relacionado com o expoente dos factores, a técnica a utilizar depende da paridade dos expoentes. No caso de existir algum factor com expoente ímpar, podemos destacar uma unidade a esse factor e reescrever o factor restante recorrendo à co-função, o que permite evidenciar uma função da forma $f'\,f^p$. Se todos os factores envolvidos tiverem expoente par, podemos recorrer às fórmulas do arco duplo para baixar, sucessivamente, o grau dos mesmos até obter apenas factores de grau 1 ou 2.

1. Se seno <u>e</u> cosseno têm expoente **par**:

   Reescrevem-se as potências pares na forma $\big(\cos^2(a)\big)^p$ e $\big(\sin^2(a)\big)^p$ e aplicam-se as fórmulas do arco duplo correspondentes.

   $$\cos^2(a) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2a)\Big) \qquad \sin^2(a) = \frac{1}{2}\Big(1-\cos(2a)\Big)$$

2. Seno <u>ou</u> cosseno tem expoente **ímpar**:

   Destaca-se uma unidade à potência de expoente ímpar e ao <u>factor resultante</u>, $\big(\cos^2(a)\big)^p$ ou $\big(\sin^2(a)\big)^p$, aplica-se a fórmula fundamental da trigonometria, para passar à co-função.

$$\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a) \qquad \sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$$

8.3.2 Produtos de seno e cosseno de argumentos diferentes

Quando o problema está relacionado com a diferença dos argumentos dos factores, a técnica a utilizar consiste em reescrever o produto na forma de uma soma/substração, de modo a poder, depois, usufruir da linearidade da primitivação.

Aplica-se uma das seguintes fórmulas:

$$\sin(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$$

$$\cos(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$$

$$\sin(a)\,\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

8.3.3 Potências de tangente, cotangente, secante ou cossecante

Nas potências de tangente, cotangente, secante ou cossecante nem sempre é possível replicar o que é feito nas potências de seno e cosseno, que consiste em evidenciar uma função da forma $f'\,f^p$. Isso é possível nas potências de tangente e cotagente (independentemente da paridade), mas nas potências de secante ou cossecante só é possível se a potência for par.

1. Potência de tangente ou cotangente:

   Destaca-se $\operatorname{tg}^2(a)$ ou $\operatorname{cotg}^2(a)$ e, <u>nesse factor</u>, aplica-se a fórmula correspondente.

   $$\operatorname{tg}^2(a) = \sec^2(a) - 1 \qquad \operatorname{cotg}^2(a) = \operatorname{cosec}^2(a) - 1$$

2. Potência **ímpar** de secante ou cossecante:

   Destaca-se $\sec^2(a)$ ou $\operatorname{cosec}^2(a)$ e primitiva-se por partes, <u>primitivando o factor destacado</u>. Depois, aplica-se uma das fórmulas seguintes para obter no segundo membro a primitiva que se pretende calcular. Isola-se a primitiva e resolve-se a igualdade como uma equação, em que a incógnita é a primitiva.

   $$\operatorname{tg}^2(a) = \sec^2(a) - 1 \qquad \operatorname{cotg}^2(a) = \operatorname{cosec}^2(a) - 1$$

3. Potência **par** de secante ou cossecante:

   Destaca-se $\sec^2(a)$ ou $\operatorname{cosec}^2(a)$ e ao <u>factor resultante</u>, $\big(\sec^2(a)\big)^p$ ou $\big(\operatorname{cosec}^2(a)\big)^p$, aplica-se a fórmula correspondente.

   $$\sec^2(a) = 1 + \operatorname{tg}^2(a) \qquad \operatorname{cosec}^2(a) = 1 + \operatorname{cotg}^2(a)$$

Observação 8.3.

1. *Uma potência negativa de seno ou cosseno corresponde a uma potência positiva de cossecante ou secante, respectivamente.*

2. *Analogamente, uma potência negativa de tangente ou cotangente corresponde a uma potência positiva cotangente ou tangente, respectivamente.*

3. *As técnicas apresentadas só permitem calcular primitivas de potências em condições particulares. Por exemplo, não é possível aplicar estas técnicas para calcular a primitiva de uma potência de expoente fracionário de seno!*

8.4 Primitivação de fracções racionais

Fracção racional é qualquer função definida pelo quociente de dois polinómios,

$$\frac{p(x)}{d(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

$(a_n, b_m \neq 0,\ n, m \in \mathbb{N}_0)$, em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais o denominador é não nulo.

Uma fracção racional diz-se **imprópria** se o grau do numerador é superior ou igual ao grau do denominador (isto é, $n \geq m$), caso contrário ($n < m$) a fracção diz-se **própria**.

Exemplo 8.1.

1. $\dfrac{1}{x^2-1}$ *é uma fracção racional própria;*

2. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2+2x}$ *e* $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ *são fracções racionais impróprias.*

8.4.1 Fracções racionais impróprias

Toda a fracção racional imprópria pode decompor-se na soma de um polinómio com uma função racional própria. Para isso, efectua-se a divisão dos polinómios até que o resto, $r(x)$, tenha grau inferior ao do polinómio $d(x)$:

$$\underbrace{\frac{p(x)}{d(x)}}_{\substack{\text{fracção}\\\text{imprópria}}} = \underbrace{q(x)}_{\text{polinómio}} + \underbrace{\frac{r(x)}{d(x)}}_{\substack{\text{fracção}\\\text{própria}}},$$

Exemplo 8.2. *Para decompor a fracção racional* $f(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x^2+x}$ *na soma de um polinómio com uma função racional própria, efectuamos a divisão dos dois polinómios:*

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & +x & +1 & x^2+x \\ \cline{5-5}
-(\ x^3 & +x^2\ ) & & & x-1 \\ \cline{1-4}
 & -x^2 & +x & +1 & \\
 & -(\ -x^2 & -x\ ) & & \\ \cline{1-4}
 & & 2x & +1 &
\end{array}$$

Então $\dfrac{x^3+x+1}{x^2+x} = x - 1 + \dfrac{2x+1}{x^2+x}$.

8.4.2 Fracções racionais próprias

Quando a fracção racional é própria, podemos decompô-la numa soma de fracções simples:

(i) factoriza-se o denominador, tendo em conta as suas raízes: $d(x) = (x - \star)^m \cdots (x - \bullet)^n$

(ii) cada **raiz real** $\star$, de **multiplicidade** m, origina um factor real $(x - \star)^m$ e portanto uma soma de m fracções simples com a forma

$$\frac{A_1}{x-\star} + \frac{A_2}{(x-\star)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\star)^m},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são constantes reais a determinar.

(iii) Determinam-se os coeficientes A_i recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados ou ao método das constantes arbitrárias.

Observação 8.4.

1. *No âmbito desta Unidade Curricular, só vamos considerar o caso em que o denominador tem exclusivamente raízes reais.*

2. *Se a função racional é imprópria, começamos por decômpo-la como soma de um polinómio com uma função racional própria, efectuando a divisão dos polinómios. De seguida, decompõe-se a função racional própria resultante em elementos simples. Este passo inclui o cálculo das constantes.*

8.5 Funções sem primitiva elementar

Existem funções que não têm primitiva elementar, isto é, cuja primitiva não pode ser explicitada recorrendo a um número finito de operações elementares (soma, subtracção, multiplicação, divisão, composição e raiz) de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas ou trigonométricas inversas. É o que acontece, por exemplo, com as funções

$$e^{-x^2}, \quad \sin(x^2), \quad \cos(x^2), \quad \frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{\cos(x)}{x}, \quad \frac{1}{\ln(x)}.$$

Enquanto as regras de derivação permitem calcular a derivada de qualquer função (pelo que a derivada de uma função elementar é sempre uma função elementar), na primitivação apenas conseguimos calcular a primitiva de tipos especiais de funções (muitos, mas não todos!). Isso deve-se ao facto de a primitiva de uma função elementar poder não ser uma função elementar!

Nos casos em que precisamos de calcular o integral que envolve uma função nestas condições, não podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

já que não conseguimos determinar uma primitiva $F(x)$! Nesse casos não conseguimos calcular o valor exacto do integral, mas podemos calcular uma aproximação, recorrendo a regras de integração numérica (estudadas no Capítulo 6) ou a aproximações da função através de séries (sai fora do âmbito desta Unidade Curricular).

Capítulo 9

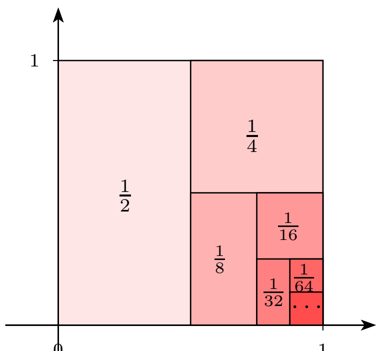
Series numéricas

9.1 Definição e convergência

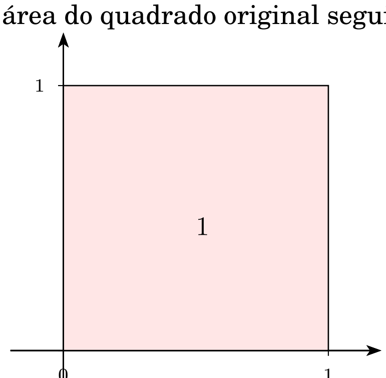
Poderá a soma de uma quantidade infinita de números ser finita?

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots \\ = \;& 0.5+0.25+0.125+0.0625+0.03125+0.015625+\dots \\ = \;& ? \end{aligned}$$

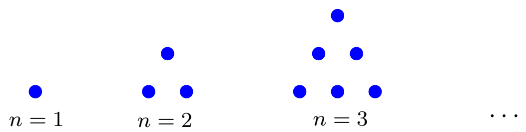
Analisemos o problema de uma perspectiva diferente: a soma anterior corresponde à soma das áreas das figuras seguintes



pelo que deverá ser igual á área do quadrado original seguinte:



Em matemática, uma sequência é um conjunto enumerável de objectos, no qual são permitidas repetições. Por exemplo,



é uma sequência. Também podemos considerar a sequência definida pela quantidade de pontos de cada um dos elementos do exemplo anterior. Nesse caso, obtemos

ordem n	1	2	3	4	...
número de pontos	1	3	6	10	...

Para o assunto que iremos abordar neste capítulo, interessa-nos apenas considerar sequências de números.

Definição 9.1. *Uma sequência é uma função real, em que o domínio é o conjunto dos números naturais.*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \rightsquigarrow & u(n) \end{array}$$

Embora uma sequência seja uma função, é usual usar uma notação diferente da que é habitualmente usada para funções, representando o objecto em índice (relativo à ordem na sequência), u_n, em vez de usar o habitual parêntesis para o fazer, $u(n)$. Também existem diferenças no que respeita à terminologia: a imagem do objecto 1 é dito o primeiro elemento da sequência, a imagem do objecto 2 é dito o segundo elemento da sequência e assim sucessivamente. Além disso, enquanto uma função é habitualmente representada por uma única letra (a menos do objecto que lhe está associado), a sequência é habitualmente representada recorrendo à notação $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou apenas (u_n).

Exemplo 9.1. *No que se segue, apresentamos exemplos de três sequências:*

1. $u_n = 2n$: $\quad u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \dots$
2. $u_n = 2^n$: $\quad u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 8,\ u_4 = 16,\ \dots$
3. $u_n = (-1)^n n$: $\quad u_1 = -1,\ u_2 = 2,\ u_3 = -3,\ u_4 = 4,\ \dots$

Dada uma sequência infinita, $u_1, u_2, u_3, \dots,$ a série que lhe está associada é, informalmente, a soma de todos esses termos da sequência, $u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$ podendo, de forma simplificada, ser representado recorrendo ao símbolo de somatório $\sum$.

Definição 9.2. *Dada uma sequência numérica $(u_n)_n$, a* ***série*** *que lhe está associada é definida pela soma ordenada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + \cdots$$

Embora a série seja a soma de uma quantidade infinita de termos, o resultado dessa soma pode, em determinadas condições, não ser infinito!

Exemplo 9.2.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots$

2. *Uma série pode começar no primeiro termo da sequência, no segundo termo ou num termo de qualquer outra ordem. Por exemplo, se considerarmos a mesma sequência do exemplo anterior, mas o primeiro termo da soma por* $n = 3$, *então a série é dada por* $\sum_{n=3}^{+\infty} 2n = 6 + 8 + 10 + \cdots$

Definição 9.3. *A sequência das somas parciais* $(S_n)_n$ *associada à série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é definida, para cada* n, *como a soma dos primeiros* n *termos da série, ie,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \\
S_1 &= u_1 \\
S_2 &= u_1 + u_2 \\
S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
&\ \ \cdots \\
S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n
\end{aligned}$$

Exemplo 9.3.

1. *Para a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

temos (confirme, usando a calculadora!)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots &&= \boxed{?} \\
S_1 &= \frac{1}{2} &&= 0.5 \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= 0.75 \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= 0.875 \\
S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= 0.9375 \\
S_5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} &&= 0.96875 \\
\cdots \\
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} &&= ?
\end{aligned}$$

2. *Para a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

temos (tente, pelo menos, até à soma parcial S_{10})

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots &&= \boxed{?}\\
S_1 &= 1 &&= 1\\
S_2 &= 1+\frac{1}{2} &&= 1.5\\
S_3 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} &&= 1.83(3)\\
S_4 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &&= 2.08(3)\\
S_5 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} &&= 2.28(3)\\
&\cdots\\
S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n} &&= ?
\end{aligned}
$$

3. *A série seguinte é semelhante à anterior, sendo a única diferença o facto de começar em $n = 2$.*

$$\sum_{n=\boxed{2}}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots$$

Neste caso, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=\boxed{2}}^{+\infty} \frac{1}{n} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots &&= \boxed{?}\\
S_1 &= \frac{1}{2} &&= 0.5\\
S_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3} &&= 0.83(3)\\
S_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &&= 1.08(3)\\
S_4 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} &&= 1.28(3)\\
S_5 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} &&= 1.45\\
&\cdots\\
S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+1} &&= ?
\end{aligned}
$$

Definição 9.4. *A série* $\sum_{n}^{+\infty} u_n$

- ***converge**, se a sequência de somas parciais $(S_n)_n$ tem limite finito S, ie, se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe e é finito ($= S$). Neste caso, o limite das somas parciais é dito a **soma da série**;*
- ***diverge**, se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ é infinito ou não existe.*

Sempre que conseguirmos obter uma expressão simplificada para S_n, podemos analisar a convergência da série recorrendo à própria definição de convergência. Este tipo de manipulação é relativamente simples quando a série for telescópica (ou de Mengoli) ou geométrica.

9.2 Séries telescópicas

Definição 9.5. $\sum_n u_n$ *é dita uma* ***série telescópica*** *(ou de Mengoli) se existirem* $p \in \mathbb{N}$ *e uma sequência* $(a_n)_n$ *tais que* $u_n = a_n - a_{n+p}$ *ou* $u_n = a_{n+p} - a_n$*, para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Observação 9.1.

1. *A série é telecópica se e só se* $u_n = \pm(a_n - a_{n+p})$.
2. *O efeito telescópico refere-se ao deslocamento temporal de um evento.*

Em séries telescópicas, as somas parciais têm um número fixo de termos, após simplificação.

Exemplo 9.4. *Use o efeito telecópico para calcular a soma da série* $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Começamos por observar que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
= \;& \left(\tfrac{1}{\sqrt{1}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \cdots && = \boxed{?} \\
S_1 = \;& \left(\tfrac{1}{\sqrt{1}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) && = 0.29 \\
S_2 = \;& \left(\tfrac{1}{\sqrt{1}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) && = 0.42 \\
S_3 = \;& \left(\tfrac{1}{\sqrt{1}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{\sqrt{4}}\right) && = 0.5 \\
& \ldots \\
S_n = \;& \left(\tfrac{1}{\sqrt{1}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) && = ?
\end{aligned}
$$

A série é telescópica, porque

$$u_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{a_{n+1}}.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{1}} - \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{4}}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{n-1}}} - \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{n}}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{n}}} - \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}},
\end{aligned}
$$

donde

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \cancelto{0}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right) = \boxed{1}.$$

Logo, a série converge e tem soma igual a 1.

Observação 9.2. *Uma série telescópica* $\sum_n \pm(a_n - a_{n+p})$ *converge se e só se a sequência* $(a_n)_n$ *converge. Neste caso, a soma da série é*

$$\boxed{S} = \pm\big(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p - p \times \lim_n a_n\big),$$

porque

$$S_n = \pm\Big(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p - \big(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{n+p}\big)\Big).$$

Observação 9.3. *Comando para somas parciais e séries no Geogebra:*
`Soma(<Expressão>,<Variável>,<Valor Inicial>,<Valor Final>)`

9.3 Séries geométricas

Em séries geométricas também conseguimos obter uma expressão simplificada para a soma parcial S_n.

Definição 9.6. *Uma **série geométrica** é uma série com razão constante entre termos consecutivos, ie,* $\sum_n u_n$ *é uma série geométrica se* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *é constante. Neste caso,* $R = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *é dita a razão da série.*

Observação 9.4. *A **soma de** n **termos consecutivos** de uma sequência geométrica é* $\boxed{1^{\underline{o}} \text{ termo} \times \frac{1-R^n}{1-R}}$.

Exemplo 9.5.

1. *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \boxed{?}$$

Começamos por observar que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots &&= \boxed{?} \\
S_1 &= \frac{1}{2} &&= 0.5 \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= 0.75 \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= 0.875 \\
S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= 0.9375 \\
S_5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} &&= 0.96875 \\
\cdots \\
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} &&= ?
\end{aligned}$$

A série é geométrica, porque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{1} = \frac{1}{2}$$

é constante. Então

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

pelo que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \cancelto{0}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = \boxed{1}.$$

Logo, a série converge e tem soma 1, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \boxed{1}$.

2. *A série*

$$\sum_{n=\boxed{0}}^{+\infty} 2^n = 1+2+4+8+16+32+\cdots+2^{n-1}+\cdots = \boxed{?}$$

também é geométrica, porque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

é constante. Observamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\boxed{0}}^{+\infty} 2^n &= 1+2+4+8+16+32+\cdots+2^{n-1}+\cdots &&= \boxed{?}\\
S_1 &= 1 &&= 1\\
S_2 &= 1+2 &&= 3\\
S_3 &= 1+2+4 &&= 7\\
S_4 &= 1+2+4+8 &&= 15\\
S_5 &= 1+2+4+8+16 &&= 31\\
\cdots\\
S_n &= 1+2+4+8+16+32+\cdots+2^{n-1} &&= ?
\end{aligned}$$

Uma vez que a série é geométrica de razão $R=2$, *então*

$$S_n = 1 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

pelo que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(2^n \xrightarrow{} {}^{+\infty} - 1\right) = \boxed{+\infty}\,.$$

Logo, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$ *diverge.*

Observação 9.5. *A série* $\sum_n u_n$ *é geométrica de razão* R *se e só se* u_n *é da forma* $a\,R^n$.

Os exemplos anteriores motivam o teorema que se segue.

Teorema 9.1. *A série geométrica* $\sum_{n=0}^{+\infty} a\,R^n \begin{cases} \textbf{\textit{converge}}, & se\ |R|<1.\ \ Neste\ caso\ S = \frac{\underline{1^{\text{o}}\ termo}}{1-R} \\ \textbf{\textit{diverge}}, & se\ |R|\geq 1 \end{cases}$.

Demonstração: Notemos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a\,R^n = a + a\,R + a\,R^2 + a\,R^3 + \cdots$$

Podemos assumir que $a \neq 0$, caso contrário $\sum_{n=0}^{+\infty} a\,R^n = 0+0+0+\cdots = 0$

a) Comecemos por considerar o caso $|R| < 1$.

Nestas condições, tem-se

$$S_n = a + aR + aR^2 + aR^3 + \cdots + aR^{n-1} = a\,\frac{1-R^n}{1-R}\,.$$

Como $|R| < 1$, então

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a\,\frac{1-\cancelto{0}{R^n}}{1-R} = \boxed{\frac{a}{1-R}}\,.$$

Logo, a série converge e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a\,R^n = \boxed{\frac{a}{1-R}}$. Note que $a = 1^{\underline{o}}$ termo .

b) Consideremos agora o caso em que $|R| \geq 1$:

i) Se $|R| > 1$:

Nestas condições, temos

$$S_n = a + aR + aR^2 + aR^3 + \cdots + aR^{n-1} = a\,\frac{1-R^n}{1-R}$$

Como $|R| > 1$, então

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a\,\frac{1-\cancelto{\infty}{R^n}}{1-R} = \boxed{\infty}$$

pelo que a série diverge;

ii) Se $R = 1$:

Neste caso, temos

$$S_n = a + a + a + a + \cdots + a = n \cdot a$$

e portanto

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \cancelto{+\infty}{n} \cdot a = \boxed{\infty}$$

pelo que a série diverge;

iii) Se $R = -1$:

Neste caso, temos

$$S_n = a - a + a - a + \cdots + a(-1)^{n-1} = \begin{cases} a & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & , \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}\,.$$

Como $a \neq 0$ então

$$\lim_{n\to+\infty} S_n$$

não existe e portanto a série diverge.

Exemplo 9.6. *Mostremos que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{2^{n+1}}$ *é geométrica e analisemos a sua convergência recorrendo ao teorema anterior.*

Começamos por observar que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{2^{n+1}} &= \frac{7}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \frac{7}{2^5} + \frac{7}{2^6} + \cdots + \frac{7}{2^{n+1}} + \cdots && = \boxed{?} \\
S_1 &= \frac{7}{2^2} && = 1.75 \\
S_2 &= \frac{7}{2^2} + \frac{7}{2^3} && \simeq 2.63 \\
S_3 &= \frac{7}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{7}{2^4} && \simeq 3.06 \\
S_4 &= \frac{7}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \frac{7}{2^5} && = 3.28 \\
S_5 &= \frac{7}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \frac{7}{2^5} + \frac{7}{2^6} && = 3.39 \\
\ldots \\
S_n &= \frac{7}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \frac{7}{2^5} + \frac{7}{2^6} + \cdots + \frac{7}{2^{n+1}} && = \ ?
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{7}{2^{n+1+1}}}{\frac{7}{2^{n+1}}} = \frac{7}{2^{n+2}} \frac{2^{n+1}}{7} = \frac{1}{2}$$

é constante, então a série é geométrica. Além disso, de acordo com o teorema 9.1, como $|R| = \frac{1}{2}$ *é inferior a* 1*, então a série converge e a soma é*

$$S = \frac{7}{2^2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} = 3.5$$

9.4 Condição necessária de convergência

A natureza da maioria das séries não pode ser analisada recorrendo à definição de convergência, já que essa análise só é possível quando for possível obter uma expressão simplificada para a soma parcial S_n. Por essa razão, são necessários outros critérios para analisar a natureza das séries.

Teorema 9.2. *Se a série* $\sum_n u_n$ *é convergente,* ***então*** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Demonstração: Se a série $\sum_n u_n$ é convergente, então $\lim_{n\to+\infty} S_n = \boxed{S}$. Como

$$S_n - S_{n-1} = \Big(\underbrace{\cancel{u_1} + \cancel{u_2} + \cdots + \cancel{u_{n-1}} + u_n}_{\text{first } n \text{ terms}}\Big) - \Big(\underbrace{\cancel{u_1} + \cancel{u_2} + \cdots + \cancel{u_{n-1}}}_{\text{first } n-1 \text{ terms}}\Big) = u_n\,,$$

então

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \Big(\cancelto{S}{S_n} - \cancelto{S}{S_{n-1}}\Big) = \boxed{S} - \boxed{S} = 0\,.$$

O resultado anterior define uma condição <u>necessária</u> de convergência de uma série. Contudo, essa condição não é suficiente! De facto, podemos ter uma série divergente tal que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. É o que acontece com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, como veremos mais à frente.

O resultado anterior não é útil na forma em que foi apresentado, uma vez que o nosso objectivo é definir critérios que nos permitam analisar a convergência da série, e não critérios que nos permitam tiram conclusões quanto à natureza das séries. Contudo, recordamos que a implicação

$$a \;\Rightarrow\; b$$

é verdadeira **se e só se** a implicação

$$\sim a \;\Leftarrow \sim b$$

também o é. Isso significa que o resultado anterior pode ser considerado na seguinte forma:

Corolário 9.1. $\boxed{\textit{Condição necessária de convergência}}$ *(CNN)*

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ***não existe*** *ou* ***é diferente de zero****, então a série* $\sum\limits_n u_n$ *é* ***divergente****.*

O resultado anterior estabelece que se o termo geral u_n não for suficientemente pequeno (próximo de zero) então a série diverge. Isso acontece porque, nessas condições, a sequência das somas parciais S_n irá variar de forma significativa de um termo para o seguinte e portanto $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ não será finito!

Observação 9.6.

1. *Os limites notáveis seguintes podem ser úteis quando se recorre à CNC:*

$$\lim_{\square\to+\infty}\left(1+\frac{k}{\square}\right)^{\square} = e^k \quad\Big|\quad \lim_{\square\to+\infty}\frac{e^{\square}}{\square^k} = +\infty \quad\Big|\quad \lim_{\square\to 0}\frac{\sin(\square)}{\square} = 1 \quad\Big|\quad \lim_{\square\to+\infty}\frac{\square^k}{\log_a(\square)} = +\infty$$

Todos estes resultados podem ser verificados recorrendo à regra de Cauchy (ou de L'Hôpital) para o levantamento de indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$*. Nesses casos, tem-se*

$$\lim_x \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_x \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots$$

2. *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*, não podemos concluir que a série* $\sum\limits_n u_n$ *é convergente!*

3. *Não se pode confundir* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *!*

Exemplo 9.7. *Recorrendo à CNC, mostremos que a série* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{\ln(n)}$ *é divergente.*

Começamos por observar que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{\ln(n)} &= \frac{2}{\ln(2)}+\frac{3}{\ln(3)}+\frac{4}{\ln(4)}+\frac{5}{\ln(5)}+\frac{6}{\ln(6)}+\cdots+\frac{n+1}{\ln(n+1)}+\cdots &&= \boxed{?}\\
S_1 &= \frac{2}{\ln(2)} &&= 2.89\\
S_2 &= \frac{2}{\ln(2)}+\frac{3}{\ln(3)} &&= 5.62\\
S_3 &= \frac{2}{\ln(2)}+\frac{3}{\ln(3)}+\frac{4}{\ln(4)} &&= 8.5\\
\ldots\\
S_5 &= \frac{2}{\ln(2)}+\frac{3}{\ln(3)}+\frac{4}{\ln(4)}+\frac{5}{\ln(5)}+\frac{6}{\ln(6)} &&= 14.96\\
\ldots\\
S_n &= \frac{2}{\ln(2)}+\frac{3}{\ln(3)}+\frac{4}{\ln(4)}+\frac{5}{\ln(5)}+\frac{6}{\ln(6)}+\cdots+\frac{n+1}{\ln(n+1)} &&= ?
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} +\infty$$

é diferente de zero, então (pela CNC) a série é divergente.

9.5 Critério do integral

Outro critério de convergência muito importante, é o critério do integral.

Teorema 9.3. $\boxed{\textit{Critério do integral}}$
Sejam $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função* ***contínua, positiva*** *e* ***decrescente*** *e* $u_n = f(n)$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}_0 \cap [n_0, +\infty[$.

A série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ *e o integral impróprio* $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ ***têm a mesma natureza*** *(ie, ambos convergem ou ambos divergem).*

O critério do integral é útil quando a função $f(x)$ é facilmente integrável. Além disso, recorrendo ao critério do integral podemos confirmar o Teorema 9.1 (apenas quando $R > 0$), para séries geométricas, e também podemos analisar a natureza das séries de Dirichlet, como apresentaremos no Teorema 9.4.

Exemplo 9.8. *Recorrendo ao critério do integral, determinemos a natureza das seguintes séries.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. *Começamos por observar que*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots &&= \boxed{?} \\
S_1 &= 1 &&= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{4} &&= 1.25 \\
S_3 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} &&\simeq 1.36 \\
\cdots & && \\
S_5 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} &&= 1.46 \\
\cdots & && \\
S_n &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2} &&= \ ?
\end{aligned}$$

Não podemos recorrer à definição de convergência de uma série, porque a série não é telescópica nem geométrica. Também não podemos recorrer à CNC porque $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{n^2}$ *é igual a zero. Tentemos,* *então recorrer ao critério do integral. Para* $x \in [1, +\infty[$*, a função* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *é contínua, positiva e decrescente (porque* $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ *é negativo). Então, pelo critério do integral, concluímos que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

e o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

têm a mesma natureza. Para o integral, tem-se

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{B \to +\infty} \int_1^B x^{-2}\, dx = \lim_{B \to +\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^B = \lim_{B \to +\infty} \left(\cancelto{0}{-\frac{1}{B}} + 1\right) = \boxed{1},$$

pelo que o integral é convergente e portanto o mesmo acontece com a série.

2. *Começamos por observar que*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots &&= \boxed{?} \\
S_1 &= 1 &&= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} &&= 1.5 \\
S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &&= 1.83 \\
\ldots \\
S_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} &&= 2.28 \\
\ldots \\
S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} &&= ?
\end{aligned}$$

Para $x \in [1, +\infty[$*, a função* $f(x) = \frac{1}{x}$ *é contínua, positiva e decrescente (porque* $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ *é negativo). Então, pelo critério do integral, concluímos que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

e o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

têm a mesma natureza. Relativamente ao integral, tem-se

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{B \to +\infty} \int_1^B \frac{1}{x}\, dx = \lim_{B \to +\infty} \Big[\ln|x|\Big]_1^B = \lim_{B \to +\infty} \left(\cancelto{+\infty}{\ln|B|} - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\right) = \boxed{+\infty},$$

pelo que o integral é divergente e, portanto, o mesmo acontece com a série.

3. *Começamos por observar que*

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots & = \ ? \\
S_1 & = 1 & = 1 \\
S_2 & = 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & \simeq 1.71 \\
S_3 & = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}} & \simeq 2.28 \\
\ldots & & \\
S_5 & = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}} & = 3.23 \\
\ldots & & \\
S_n & = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} & = \ ?
\end{array}
$$

Para $x \in [1,+\infty[$, *a função* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ *é contínua, positiva e decrescente (porque* $f'(x)=-\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}$ *é negativo). Então, pelo critério do integral, concluímos que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

têm a mesma natureza. Para o integral, tem-se

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,dx \;=\; \lim_{B\to+\infty} \int_1^B x^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^B \;=\; \lim_{B\to+\infty} 2\left(\overset{+\infty}{\cancel{\sqrt{B}}} - 1\right) \;=\; +\infty\,,$$

pelo que o integral é divergente e portanto o mesmo acontece com a série.

As três séries apresentadas no exemplo anterior são casos particulares de séries de Dirichlet, como definiremos na secção que se segue.

9.6 Séries de Dirichlet

Já definimos séries geométricas. Agora vamos definir séries de Dirichlet.

Definição 9.7. *Uma **série de Dirichlet** é uma série da forma* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^{\alpha}}$, *com* $a>0$.

Observação 9.7. *Quando* $\alpha=1$ *e* $a=1$ *a série é também é designada de **série harmónica**:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Teorema 9.4. *Uma série de Dirichlet* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^{\alpha}} \begin{cases} \textbf{\textit{converge}}\,, & se\ \ \alpha>1 \\ \textbf{\textit{diverge}}\ \ , & se\ \ \alpha\le 1 \end{cases}.$

Demonstração: Como $a > 0$, então $a \neq 0$. Notamos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^\alpha} = \frac{a}{1} + \frac{a}{2^\alpha} + \frac{a}{3^\alpha} + \frac{a}{4^\alpha} + \cdots$$

a) Comecemos por analisar o caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^\alpha}$, com $\boxed{\alpha > 0}$.

Seja $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{a}{x^\alpha}$. A função f é contínua, positiva e decrescente, em $[1, +\infty[$, pelo que podemos usar o critério do integral.

i) Se $\alpha > 1 : (\alpha - 1 > 0)$

$$\lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{a}{x^\alpha}\, dx = \lim_{B\to+\infty} a \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^B = \lim_{B\to+\infty} \frac{a}{1-\alpha}\Big(\overbrace{\frac{1}{B^{\alpha-1}}}^{0} - 1\Big) = \boxed{\frac{a}{\alpha-1}}.$$

Uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^\alpha}\, dx$ é convergente, então o mesmo acontece com a série;

ii) Se $\alpha = 1$:

$$\lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{a}{x}\, dx = \lim_{B\to+\infty} a \Big[\ln|x|\Big]_1^B = \lim_{B\to+\infty} a \Big(\overbrace{\ln|B|}^{\infty} - \ln(1)\Big) = \boxed{+\infty}.$$

Como o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^\alpha}\, dx$ é divergente, o mesmo acontece com a série;

iii) Se $0 < \alpha < 1 : (1 - \alpha > 0)$

$$\lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{a}{x^\alpha}\, dx = \lim_{B\to+\infty} a \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^B = \lim_{B\to+\infty} \frac{a}{1-\alpha}\Big(\overbrace{B^{1-\alpha}}^{\infty} - 1\Big) = \boxed{+\infty}.$$

Como o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ é divergente, o mesmo acontece com a série.

b) Analisemos agora o caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^\alpha}$, com $\boxed{\alpha \leq 0}$.

Neste caso não podemos recorrer ao critério do integral, já que a função não é decrescente. No entanto, pela CNC concluímos que a série é divergente, já que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n^\alpha}$ é diferente de zero:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} a\, n^{\overbrace{-\alpha}^{\oplus}} = \begin{cases} a & , \quad \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & , \quad \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

9.7 Álgebra de séries (operações com séries)

Nesta secção estudaremos o comportamento das séries que se obtêm através da soma ou subtracção de outras série ou através do produto de uma série por uma constante. Realçamos que não estudaremos nada relativamente ao produto de séries!

Teorema 9.5. *Sejam* $\displaystyle\sum_n u_n = S$ *e* $\displaystyle\sum_n v_n = T$ *duas **séries convergentes**. Então*

i) as séries $\displaystyle\sum_n (u_n \pm v_n)$ *também são **convergentes** e tem-se* $\displaystyle\sum_n (u_n \pm v_n) = S \pm T$*;*

ii) a série $\displaystyle\sum_n (\lambda\, u_n)$ *também é **convergente** e tem-se* $\displaystyle\sum_n (\lambda\, u_n) = \lambda\, S$.

Exemplo 9.9.

1. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3}$ *é convergente, porque é definida pela soma se duas séries de Dirichlet convergentes:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n^3} + \frac{1}{n^3}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{\substack{\text{Dirichlet, } \alpha = 2 \\ \text{convergente}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}}_{\substack{\text{Dirichlet, } \alpha = 3 \\ \text{convergente}}} .$$

2. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n^3}$ *é convergente, porque é definida pelo produto da constante* -1 *com uma série de Dirichlet:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n^3} = -1 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}}_{\substack{\text{Dirichlet, } \alpha = 3 \\ \text{convergente}}} .$$

Teorema 9.6. *Se a série* $\sum_n u_n$ *é* ***convergente*** *e a série* $\sum_n v_n$ *é* ***divergente****, então as séries* $\sum_n (u_n \pm v_n)$ *e* $\sum_n \lambda v_n$ $(\lambda \neq 0)$ *também são* ***divergentes****.*

Exemplo 9.10.

1. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2}$ *é divergente, porque é definida pela soma de uma série convergente com uma série divergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}}_{\substack{\text{Dirichlet, } \alpha = 1 \\ \text{divergente}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{\substack{\text{Dirichlet, } \alpha = 2 \\ \text{convergente}}}$$

2. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n}$ *é divergente, porque é definida pelo produto da constante* -1 *por uma série de Dirichlet divergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n^3} = -1 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}}_{\substack{\text{Dirichlet, } \alpha = 1 \\ \text{divergente}}} .$$

Observação 9.8. *Se as séries* $\sum_n u_n$ *e* $\sum_n v_n$ *forem* ***ambas divergentes****, não podemos antecipar a natureza da série* $\sum_n (u_n \pm v_n)$*! Neste caso, é necessário simplificar a série do resultado e analisar a sua natureza recorrendo a um critério conveniente.*

Exemplo 9.11. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ *é divergente, porque* $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ *é diferente de zero (CNC).*

A série definida pela soma de duas séries iguais à anterior também é divergente (pela CNC),

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\,,$$

mas a série definida pela diferença de duas dessas séries já é convergente (porque reduz-se a uma soma finita)!

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0+0+0+\cdots = 0\,,$$

9.8 Critérios de Cauchy e de D'Alembert

Quando o termo geral da série u_n têm, simultaneamente, características geométricas e de Dirichlet, poderá ser conveniente recorrer aos critérios de Cauchy ou de D'Alembert para determinar a natureza da série.

Teorema 9.7. *Critério de Cauchy*
Sejam $\sum_n u_n$ *uma série de* ***temos não negativos*** *e* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda.$

i) Se $\lambda < 1$, *a série converge;*

ii) Se $\lambda > 1$, *a série diverge.*

O critério de Cauchy é especialmente útil quando o termo geral u_n tem a forma $(\cdot)^n$. Quando u_n tem outra forma mas envolve factoriais, exponenciais e potências ou apenas exponenciais, poderá ser mais útil recorrer ao critério de D'Alembert, já que os cálculos do limite que lhe está associado são mais simples.

Teorema 9.8. *Critério de D'Alembert*
Sejam $\sum_n u_n$ *uma série de* ***termos não negativos*** *e* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda\,.$

i) Se $\lambda < 1$, *a série converge;*

ii) Se $\lambda > 1$, *a série diverge.*

Observação 9.9.

1. *Quando* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *é constante, não necessitamos (mas podemos) de usar o critério de D'Alembert, uma vez que a série é geométrica!*

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ *(constante) significa que, para os termos de ordem suficientemente elevada, a série comporta-se como uma série geométrica de razão* $R = \lambda$ *(ie, a série é quase-geométrica de razão* $R = \lambda$*).*

Exemplo 9.12. *Recorrendo ao critério de Cauchy ou ao critério de D'Alembert, determinemos se as seguinte séries convergem ou divergem.*

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}\,;$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^n$;

1. *Começamos por realçar que a série não tem termos negativos,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^1}{2^n} &= \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\cdots \\
S_1 &= \frac{1}{2} && = 0.5 \\
S_2 &= \frac{1}{2}+\frac{2}{4} && = 1.0 \\
S_3 &= \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8} && = 1.38 \\
\ldots \\
S_5 &= \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8} && = 1.78 \\
\ldots \\
S_n &= \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n} && = ?
\end{aligned}$$

Como u_n *tem, simultaneamente, características geométricas* (n^1) *e de Dirichlet* (2^n) *e não é da forma* $(\cdot)^n$ *., vamos usar o critério de D'Alembert. O limite*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\,\frac{2^n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\,\frac{\cancelto{1}{n+1}}{n} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \frac{1}{2}\,,$$

é inferior a 1*, pelo que a série (é quase-geométrica de razão* $R=\frac{1}{2}<1$ *e portanto) é convergente.*

2. *Começamos por realçar que a série não tem termos negativos,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^n &= \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{6}\right)^5+\left(\frac{1}{7}\right)^6+\cdots \\
S_1 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 && = 0.11 \\
S_2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3 && = 0.13 \\
S_3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^4 && = 0.13 \\
\ldots \\
S_5 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{6}\right)^5+\left(\frac{1}{7}\right)^6 && = 0.13 \\
\ldots \\
S_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{6}\right)^5+\left(\frac{1}{7}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2+n}\right)^{n+1} && = ?
\end{aligned}$$

Como u_n *tem a forma* $(\cdot)^n$*, vamos usar o critério de Cauchy. O limite*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\cancelto{0}{\frac{1}{1+n}} = 0\,,$$

é inferior a 1*, pelo que a série é convergente.*

9.9 Convergência absoluta e simples

Excluindo a própria definição de convergência e a a condição necessária de convergência, todos os outros resultados de convergência, que estudámos anteriormente, só são aplicáveis a séries sem termos negativos. Esses resultados continuam válidos para séries de termos não positivos, mas não para séries de termos de sinal arbitrário! O que podemos fazer nos casos em que as séries têm, simultaneamente, termos positivos e negativos?

Definição 9.8. *A série* $\sum\limits_n u_n$ *é* ***absolutamente convergente*** *se a série dos módulos* $\sum\limits_n |u_n|$ *é convergente.*

A série dos módulos $\sum\limits_n |u_n|$ é sempre uma série de termos não negativos, pelo que a sua natureza pode ser analisada recorrendo a qualquer um dos critérios estudados anteriormente.

Teorema 9.9. $\boxed{\textit{Critério de convergência absoluta}}$
Se a série dos móldulos $\sum\limits_n |u_n|$ *converge, então a série* $\sum\limits_n u_n$ *também converge.*

Observação 9.10.

1. *O Teorema 9.9 garante que, se uma série* $\sum\limits_n u_n$ *é absolutamente convergente então é convergente.*

2. *Se a série dos módulos* $\sum\limits_n |u_n|$ *diverge, <u>nada</u> se pode concluir relativamente à natureza da série* $\sum\limits_n u_n$.

O que podemos fazer para analisar a natureza de uma série com termos de sinal arbitrário cuja série dos módulos não é convergente? No caso de série alternadas, podemos recorrer ao critério de Leibniz.

Definição 9.9. *A série* $\sum\limits_n u_n$ *é* ***simplesmente convergente*** *se a série* $\sum\limits_n u_n$, *converge mas a série dos módulos* $\sum\limits_n |u_n|$ *diverge.*

Definição 9.10. *Uma* ***série alternada*** *é uma série* $\sum\limits_n u_n$ *em que o termo geral tem a forma* $u_n = (-1)^n a_n$ *ou* $u_n = (-1)^{n+1} a_n$, *com* $a_n > 0$.

A notação $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ significa que os termos alternam entre positivo e negativo ou entre negativo e positivo, dependendo do sinal primeiro termo e do expoente de -1.

Exemplo 9.13.

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ *é uma série alternada (com primeiro termo negativo),*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \cdots$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *é uma série alternada (com primeiro termo positivo),*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

O resultado seguinte pode ser aplicado para analisar a natureza de séries alternadas. Contudo, sugerimos que se comece sempre por analisar a natureza da série dos módulos que lhe está associada e só nos casos em que esta for divergente é que devemos, depois, recorrer ao critério de Leibniz.

Teorema 9.10. $\boxed{\textit{Critério de Leibniz}}$
Seja $\displaystyle\sum_n u_n$ *uma série alternada, ie,* $u_n = (-1)^n\, a_n$ *ou* $u_n = (-1)^{n+1}\, a_n$, *com* $a_n > 0$.

Se $(a_n)_n$ *é uma sequência decrescente e* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, *então a série converge. Nestas condições, a soma* $\boxed{S}$ *da série e a soma parcial* S_n *verificam* $\left|\, \boxed{S} - S_n \right| \leq a_{n+1}$.

Exemplo 9.14. *Determinemos se as séries seguintes são convergentes (absoluta ou simplesmente) ou divergentes.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

1. *Uma vez que a série têm termos de sinal arbitrário,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} &= 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{25} + \cdots \\
S_1 &= 1 && = 1 \\
S_2 &= 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) && = 0.75 \\
S_3 &= 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{9} && = 0.86 \\
\cdots \\
S_5 &= 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{25} && = 0.84 \\
\cdots \\
S_n &= 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{25} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} && = ?
\end{aligned}$$

vamos considerar a série dos módulos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Esta série é convergente, porque é uma série de Dirichlet $\alpha = 2$. *Como a série dos módulos é convergente, então a série é (absolutamente) convergente.*

2. *Uma vez que a série tem termos de sinal arbitrário,*

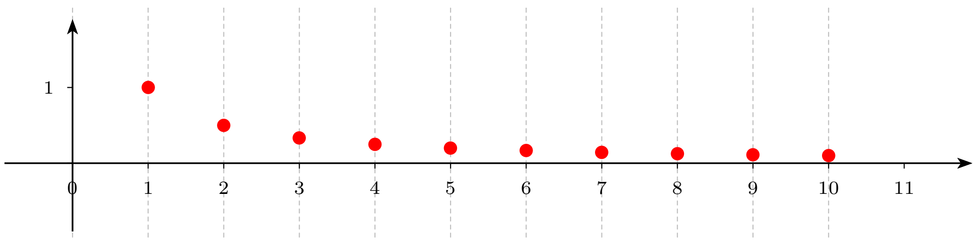
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n} &= -1+\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{4}+\Big(-\frac{1}{5}\Big)+\cdots \\
S_1 &= -1 && = -1 \\
S_2 &= -1+\frac{1}{2} && = -0.5 \\
S_3 &= -1+\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{3}\Big) && = -0.83 \\
\ldots \\
S_5 &= -1+\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{4}+\Big(-\frac{1}{5}\Big) && = -0.78 \\
\ldots \\
S_n &= -1+\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{4}+\Big(-\frac{1}{5}\Big)+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n} && = ?
\end{aligned}$$

vamos considerar a série dos módulos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

Esta série é divergente, porque é uma série de Dirichlet com $\alpha=1$. *Neste caso, ainda não podemos tirar conclusões relativamente à natureza da série inicial. Contudo, como a série é alternada, podemos tentar usar o cirtério de Leibniz.*

Como $u_n = (-1)^n\frac{1}{n}$, *então* $a_n = \frac{1}{n}$. *Na figura seguinte apresentamos os primeiros termos da sequência* (a_n).



A sequência (a_n)

i) é positiva: $a_n = \frac{1}{n} = \frac{\oplus}{\oplus} > 0$;

ii) é decrescente: $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \quad\Rightarrow\quad a_n > a_{n+1}$;

iii) converge para zero: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Então, de acordo com o critério de Leibniz, a série é convergente (mas é simplesmente convergente, uma vez que a série dos módulos é divergente.).

3. *Começamos por observar que*

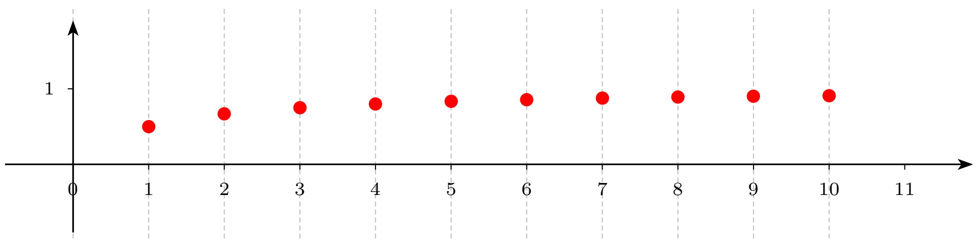
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1} &= -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{4}{5}+\left(-\frac{5}{6}\right)+\cdots \\
S_1 &= -\frac{1}{2} && = -0.5 \\
S_2 &= -\frac{1}{2}+\frac{2}{3} && = 0.17 \\
S_3 &= -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right) && = -0.58 \\
\ldots \\
S_5 &= -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{4}{5}+\left(-\frac{5}{6}\right) && = -0.62 \\
\ldots \\
S_n &= -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{4}{5}+\left(-\frac{5}{6}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{n}{n+1} && = ?
\end{aligned}$$

Embora a série tenha termos de sinal arbitrário e, na verdade, seja uma série alternada, não precisamos de considerar a série dos módulos nem sequer de recorrer ao critério de Leibniz, já que podemos aplicar imediatamente a CNC. De facto, como

$$\lim_{n\to+\infty}\underbrace{(-1)^n}_{=\begin{cases}-1, & n\text{ ímpar}\\ 1, & n\text{ par}\end{cases}}\overbrace{\frac{n}{\cancel{n}+1}}^{\nearrow 1} \quad \textit{não existe}\,,$$

então a série diverge.

Observamos que não é possível aplicar o critério de Leibniz, porque $a_n = \frac{n}{n+1}$ *não é uma sequência decrescente e porque* $\lim_n \dfrac{n}{n+1}$ *é diferente de zero, como ilustramos na figura seguinte.*



Observação 9.11.

1. *Como mostrámos no caso (3) do exemplo anterior, quando* a_n *não é decrescente ou* $\lim_n a_n$ *não é zero, não podemos aplicar o critério de Leibniz. Contudo, nessa condições, podemos recorrer à CNC, já que* $\lim_n u_n = \lim_n (-1)^n a_n$ *não será igual a zero!*

2. *Os critérios estudados anteriormente não permitem determinar a natureza de qualquer série numérica! Por exemplo, nenhum desses critérios permite tirar conclusões relativamente à natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\oplus}+\underbrace{\frac{1}{4}}_{\oplus}+0+\underbrace{\left(-\frac{1}{8}\right)}_{\ominus}+\underbrace{\left(-\frac{1}{5}\right)}_{\ominus}+\ldots$$

De facto, esta série não é geométrica nem telescópica (pelo que não podemos recorrer à definição de convergência), não é de Dirichlet, não pode ser analisada recorrendo à CNC, nem aos critérios de Cauchy ou de D'Alembert (porque a série tem termos negativos). Também não podemos recorrer ao critério de convergência absoluta (porque a série dos módulos é divergente) nem usar o critério de Leibniz (porque a série não é alternada).

Bibliografia

[1] Avelino, C.P., & Machado, L.M.F., *Primitivas. Teoria e exercícios resolvidos*, Publindústria, 1ª edição, 2010.

[2] Azenha, A. & Jerónimo, M.A., *Cálculo diferencial e integral em* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^n$, McGraw-Hill, 1ª edição, 1995.

[3] Cardoso, A.J. & Henriques, J.M., *Ferramentas de Cálculo numérico no apoio ao ensino das ciências, Volume III - Matlab*, FCTUC - Universidade de Coimbra, 1997.

[4] Chapra, S.C. & Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, fifth edition, 2006.

[5] Chapra, S.C., *Métodos Numéricos Aplicados com MatLab para engenheiros e cientistas*, McGraw-Hill, 3ª edição, 2013.

[6] Ferreira, M.A.M. & Amaral, I., *Matemática. Primitivas e integrais*, Edições Sílabo, 5ª edição, 1996.

[7] Gouveia, M.L. & Rosa, P., *Apontamentos de matemática aplicada*, ISEC, 2008.

[8] Kreyszig, E., *Advanced engineering mathematics*, John Wiley & Sons, 8th edition, 1999.

[9] Pinto, G., *Primitivas e integrais. Exercícios resolvidos*, Edições Sílabo, 1ª edição, 2011.

[10] Rasteiro, D.M., *Exercícios de apoio às aulas Teórico Práticas de Métodos Numéricos (Licenciatura em Engenharia Civil)*, DFM - ISEC, 2011/2012.

[11] Rodrigues, J.A., *Métodos Numéricos - Introdução, Aplicação e Programação*, Edições Sílabo, 1ª edição, 2003.

[12] Santos, F.M., *Fundamentos de Análise Numérica*, Edições Sílabo, 1ª edição, 2002.

[13] Saraiva, M.A.F. & Silva, M.A.C., *Primitivação*, Edições ASA, 3ª edição, 1997.

[14] Stewart, J., *Cálculo Vol. 1*, Pioneira Thomson Learning, 4ª edição, 2003.