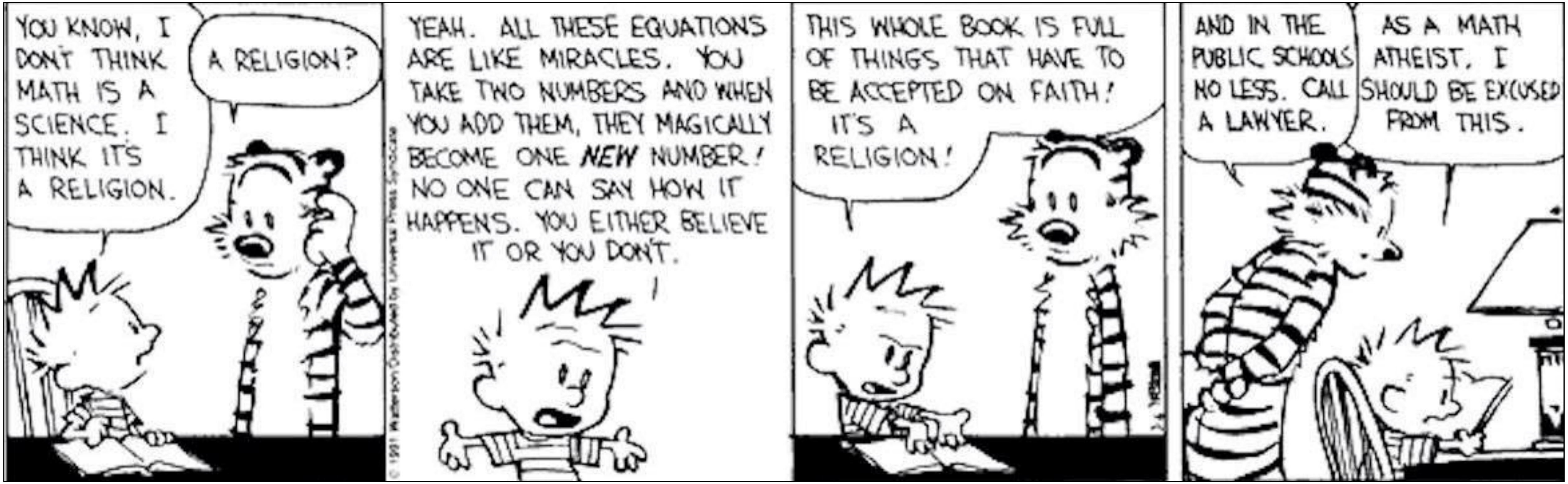


FUNDAMENTOS DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA

MODELAÇÃO GEOMÉTRICA

isec Engenharia

ESPAÇOS VETORIAIS, AFINS E EUCLIDIANOS

Partindo do zero no processo de criação do mundo 3D, é preciso definir um espaço onde este mundo exista.

Matematicamente, podem ser explorados espaços abstratos como os:

- Espaços vetoriais;
- Espaços afins;
- Espaços Euclidianos.

ESPAÇOS VETORIAIS

Um espaço vetorial contém duas entidades distintas:

- o vetor;
- o escalar.

Criar um mundo 3D neste espaço tornar-se-ia difícil, pois ele tem as características dos vetores, isto é, não tem uma posição fixa.

- Tornaria a sua criação complicada devido a não existir origem.

ESPAÇOS AFINS

Um espaço afim é uma extensão de um espaço vetorial, que inclui um tipo de dados adicional:

- o Ponto (a origem que faltava).

Criar um mundo 3D no espaço afim continua a ser difícil, pois ele não lida com medidas.

- Não tem um sistemas de coordenadas associado e não lhe é possível adicionar um.

ESPAÇOS EUCLIDIANOS

Um espaço Euclidiano é uma extensão de um espaço afim que adiciona medidas de tamanho ou de distâncias.

- No entanto, para que este espaço funcione é necessário criar um sistema de coordenadas.

SISTEMA DE COORDENADAS

- Para se poder criar um sistema de coordenadas é necessário usar o conceito fundamental de representar um qualquer vetor em termos de uma base de vetores básicos.
- Assim, é necessário usar as tais três entidades básicas referidas atrás, o escalar, o ponto e o vetor.
- Podemos representar qualquer vetor de forma única, em termos de três vetores linearmente independentes (v1, v2, v3), como:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$$

- Os escalares $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ são os componentes de v em relação à base v1, v2 e v3.

SISTEMAS DE COORDENADAS

O que leva a representar o vetor v como:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Pensamos habitualmente nos vetores base v1, v2 e v3 como formando um sistema de coordenadas.

SISTEMAS DE COORDENADAS

Mas a representação de um vetor pode levar a uma confusão na representação de um ponto, pois iria coincidir com a representação de um vetor.

O que é que representa cada uma destas matrizes se não estivesse assinalada?

$$\text{Ponto: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \qquad \text{Vector: } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE COORDENADAS

Tendo em conta que o espaço tem uma origem (P_0), um vetor pode manter a mesma representação:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$$

E um ponto já pode ser representado de forma não ambígua como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \beta_3 \mathbf{v}_3$$

SISTEMAS DE COORDENADAS

Assim, define-se um Sistema de Coordenadas, especificado por ($v1$,$v2$,$v3$,P_0), em que qualquer ponto pode ser especificado por

$$\mathbf{P} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad 1] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \beta_3 \mathbf{v}_3$$

e qualquer vetor passa a ser representado como:

$$\mathbf{v} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad 0] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$$

SISTEMAS DE COORDENADAS

As coordenadas no espaço são designadas como coordenadas homogéneas, em que são usadas 4 coordenadas para representar pontos e vetores em 3D

Todas as transformações geométricas (translação, rotação e escalonamento) passam a ser representadas por multiplicações de matrizes em coordenadas homogéneas, trazendo uma uniformidade às operações

GEOMETRIA

Em CG, os fundamentos da criação de qualquer mundo 3D passam pela utilização de três entidades geométricas básicas:

- escalares;
- pontos;
- vetores.

Com estas entidades pode-se definir qualquer elemento necessário ao mundo 3D.

ESCALARES, PONTOS E VETORES

Os escalares são números reais e não entidades geométricas.

- Precisos, como unidades de medida.

O ponto é a entidade geométrica fundamental.

- Pode ser definido matematicamente como uma posição no espaço;
- Para ser representado, tem de ter atributos, como a posição referida a um sistema de coordenadas e a cor.

Um vetor é definido como um segmento de reta orientado.

- Tem comprimento, direção e sentido, mas não tem uma posição fixa.

Os tipos de dados ponto e vetor são abstrações das entidades geométricas "ponto no espaço" e "segmento de reta orientada".

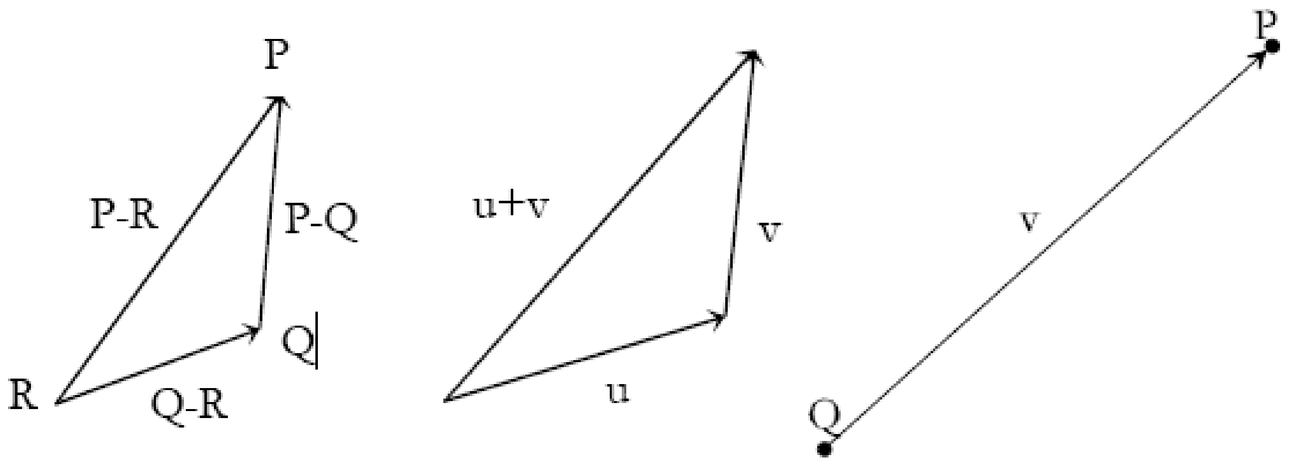
ESCALARES, PONTOS E VETORES

A construção geométrica de qualquer mundo 3D necessita das seguintes operações básicas:

- A subtração de dois pontos, que é um vetor ($v = P - Q$);
- A soma de um vetor a um ponto, que é um ponto ($P = Q + v$);
- A adição de dois vetores ($u + v$);
- Produto escalar ou interno ($u \cdot v$);
- Produto vetorial ou externo ($u \times v$).

isec Engenharia

ESCALARES, PONTOS E VETORES



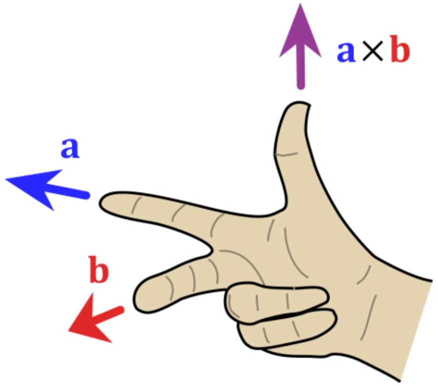
Operações com pontos e vetores

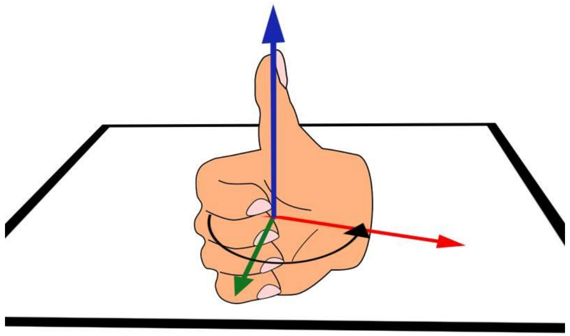
VETOR NORMAL

O vetor normal é bastante usado na CG porque permite perceber a orientação de uma face

- Por definição, é o vetor perpendicular, a uma dada superfície num determinado ponto.

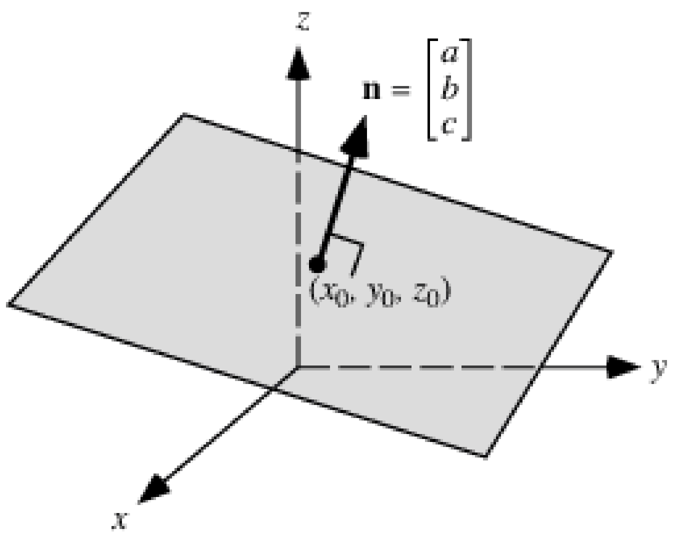
É calculado usando o produto interno de vetores (se u . v = 0 $\Rightarrow$ u $\perp$ v)
ou o produto externo de vetores (n = u $\times$ v).

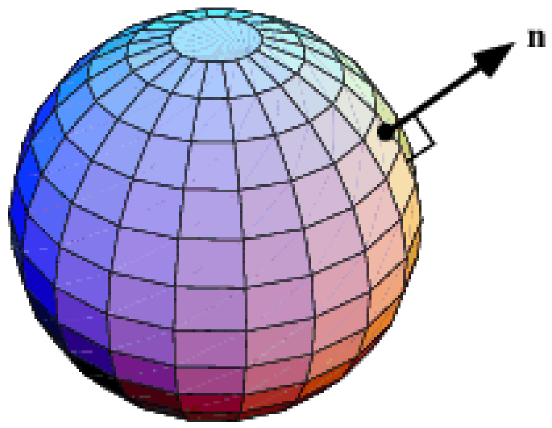




VETOR NORMAL

O vetor normal dá informação sobre a forma do objeto.





TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Uma transformação geométrica é uma forma de mover para novas posições um grupo de pontos que descrevem um ou mais objetos

- Translação
- Rotação
- Escalonamento (ou mudança de escala)

TRANSLAÇÃO

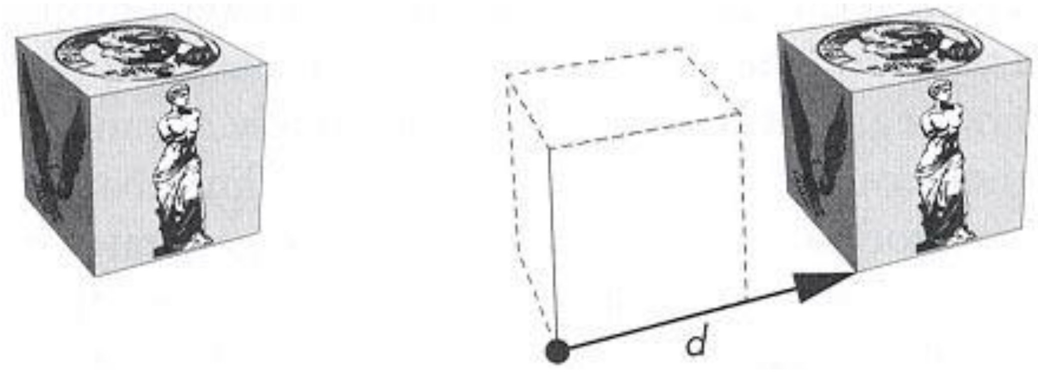
Translação é uma operação que desloca pontos numa dada direção usando uma distância fixa.

Para especificar uma translação só necessitamos de especificar um vetor de deslocamento ***d*** para todos os pontos

$$\mathbf{P' = P + d}$$

TRANSLAÇÃO

A translação tem tantos graus de liberdade quantas as dimensões do espaço de trabalho que especificam as componentes do vetor ***d*** (ou as direções por onde pode haver deslocamento).



Translação de um objeto.

TRANSLAÇÃO

Assim, com base nas coordenadas homogéneas, considere-se que:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto implica que a translação é dada por:

$$\begin{cases} x' = x + \alpha_x \\ y' = y + \alpha_y \\ z' = z + \alpha_z \end{cases}$$

TRANSLAÇÃO

Finalmente, com base na equação anterior, pode-se descrever a translação sob a forma de uma multiplicação de matrizes através de:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}.\mathbf{P}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

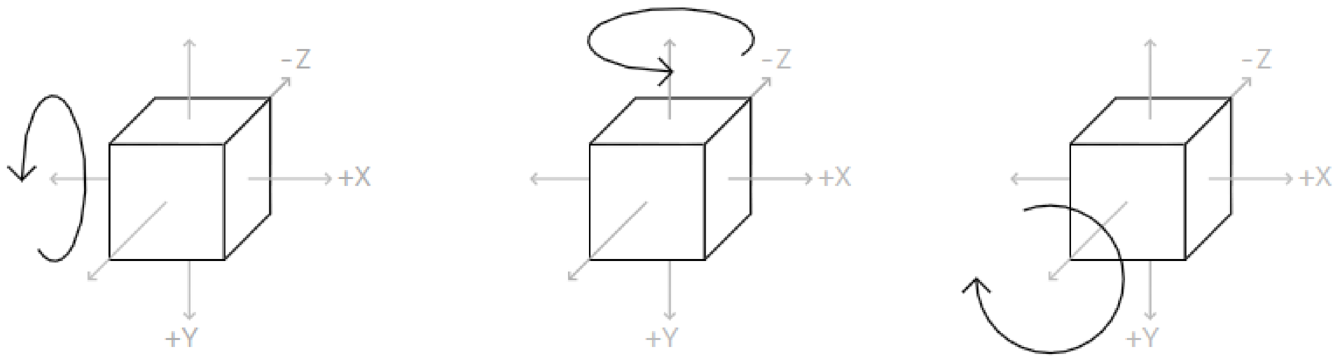
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

A utilização de coordenadas homogéneas permite que o cálculo da translação, feito através da adição de matrizes colunas, se possa transformar numa multiplicação de matrizes 4D.

Este processo é generalizado a todas as transformações geométricas.

ROTAÇÃO

A rotação faz com que um objeto mude de orientação em relação ao original, alterando a orientação do sistema de eixos onde o objeto foi criado.



Exemplo de rotações feitas na origem.

ROTAÇÃO

As rotações podem ser feitas:

- Na origem
  - Usando os eixos do sistema de coordenadas
- Num qualquer ponto fixo
  - Faz primeiro uma translação do objeto para a origem, seguido de uma rotação feita como no caso anterior e, por fim, uma translação em sentido contrário à que foi feita inicialmente.
- Sobre um eixo arbitrário
  - Faz uma operação de alinhamento com os eixos do sistema de coordenadas, seguido de uma rotação feita como no caso anterior e, por fim, uma rotação em sentido contrário à que foi feita inicialmente.

ROTAÇÃO

A rotação 3D sobre a origem, segundo cada um dos eixos do sistema de coordenadas, pode ser definida em coordenadas homogéneas por ***P' = R P***, com ***R = RzRyRx***

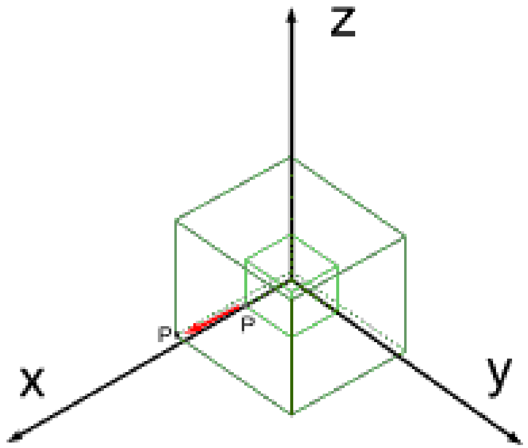
$$\mathbf{R}_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

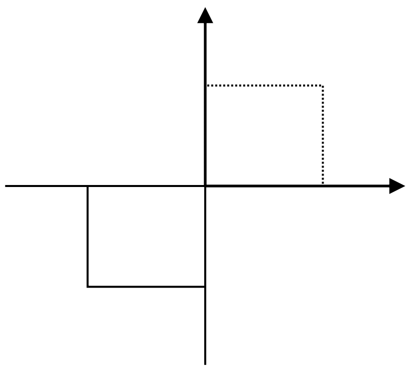
ESCALONAMENTO

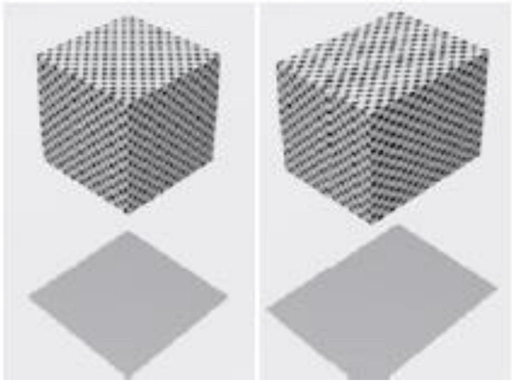
O escalonamento:

- Pode fazer com que um objeto se torne maior ou menor que o original;
- Pode fazer com que um objeto se deforme em relação ao original
  - Sendo por causa disso conhecida como uma transformação não rígida, uma vez que pode tomar valores diferentes segundo cada um dos eixos.
- Permite o “reflexo” de um objeto em relação aos eixos.

ESCALONAMENTO







Exemplos de vários escalonamentos em 2D e 3D.

ESCALONAMENTO

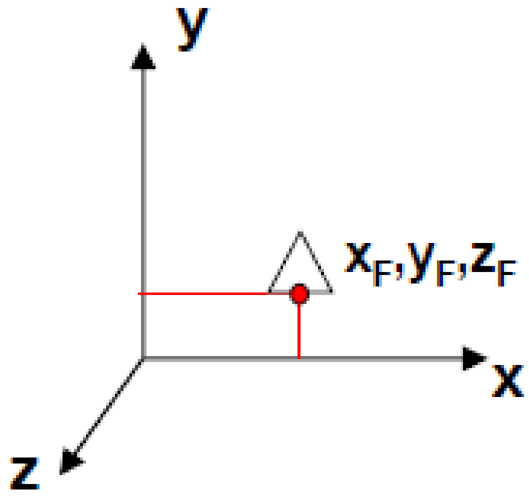
No escalonamento há um ponto fixo (a origem do objeto) que não sofre qualquer transformação.

Considerando que a origem do objeto é a origem do sistema de coordenadas, um escalonamento 3D, em coordenadas homogéneas, é dado por

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S}\,.\mathbf{P}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}(\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \begin{bmatrix} \beta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESCALONAMENTO

Considerando que a origem do objeto não é a origem do sistema de coordenadas tem que se fazer primeiro uma translação do objeto para a origem do sistema de coordenadas, seguido do escalonamento feito como no caso anterior e, por fim, uma translação em sentido contrário à que foi feita inicialmente



$$\boldsymbol{T}(x_F,y_F,z_F).\boldsymbol{S}(s_x,s_y,s_z).\boldsymbol{T}(-x_F,-y_F,-z_F)=$$

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & (1-S_x).x_F \\ 0 & S_y & 0 & (1-S_y).y_F \\ 0 & 0 & S_z & (1-S_z).z_F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Em resumo, qualquer transformação geométrica, usando coordenadas homogéneas, pode ser descrita por:

P' = M P, em que,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas transformações estão sob a restrição de linearidade.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

A matriz M tem 12 graus de liberdade:

- Número de elementos que não é constante;
- Na representação de vetores intervêm 9 graus de liberdade;
- Na representação de pontos intervêm os 12 graus de liberdade.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Dado que qualquer transformação geométrica básica pode ser definida por uma matriz de 4x4, uma sequência de transformações pode ser obtida pela multiplicação (ou concatenação) de todas elas.

No entanto, a multiplicação de matrizes é associativa mas **não é comutativa**. Por isso tem de ser considerada a sequência das operações.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

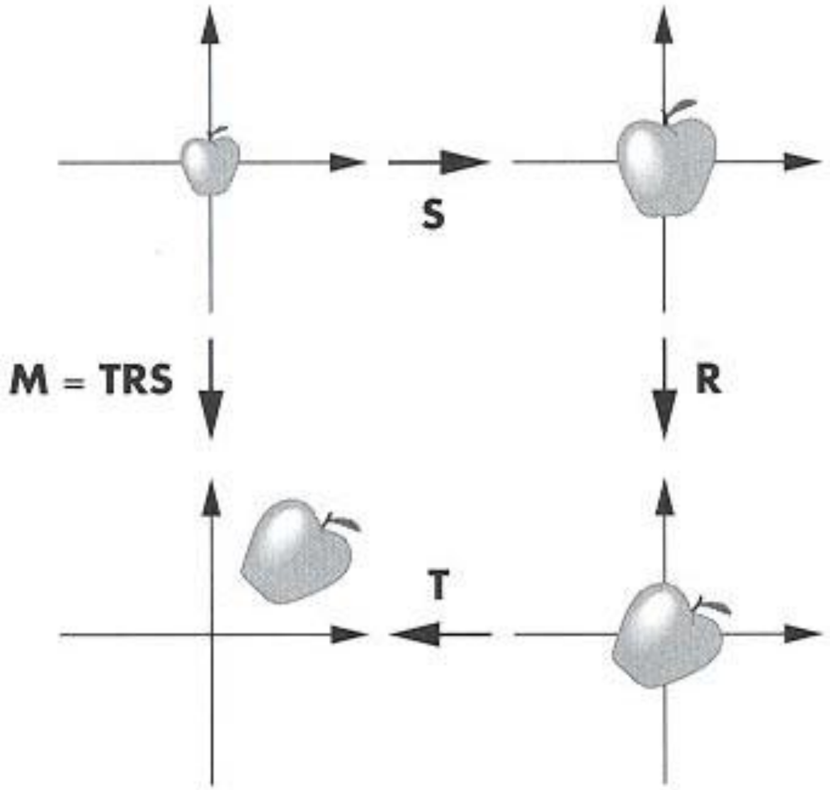
Suponhamos que um ponto P sofre transformações sucessivas para criar um novo ponto Q

$$P \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow \boxed{B} \longrightarrow \boxed{C} \longrightarrow Q$$

Assim, é feito primeiro o produto das três matrizes 4x4, e depois multiplica-se o ponto pela matriz resultado:

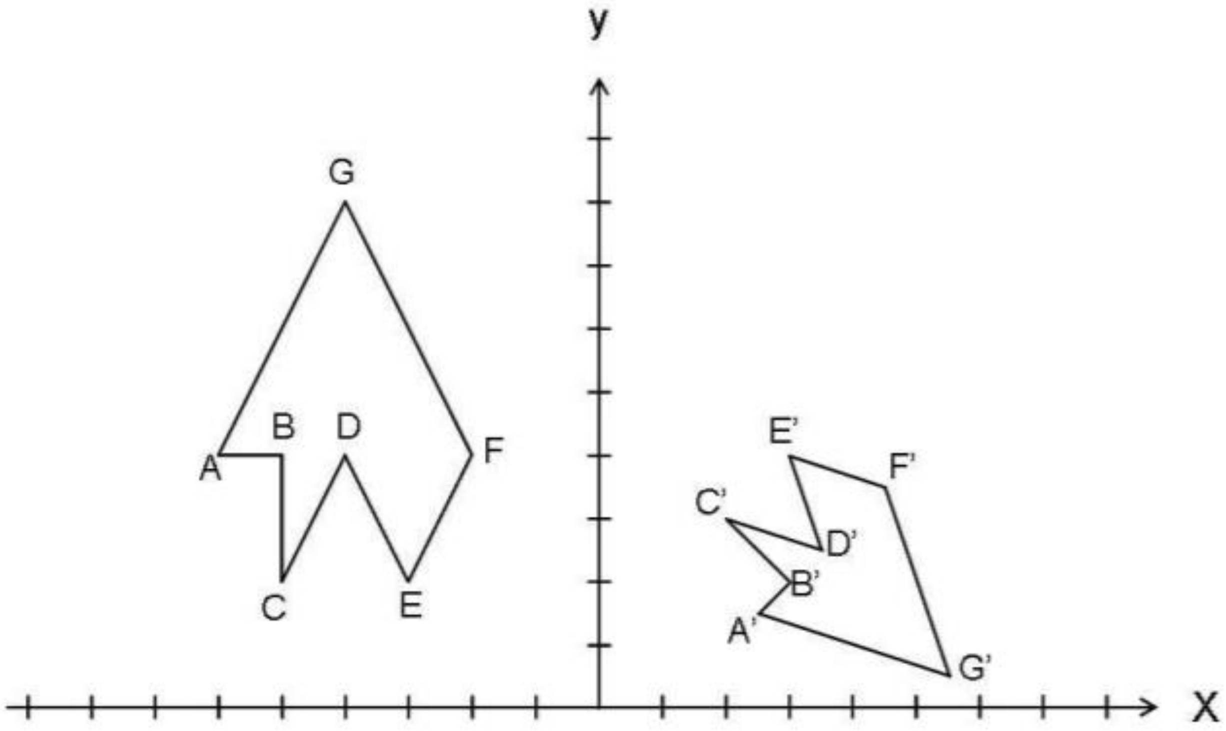
$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$$

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS



Exemplo de uma concatenação.

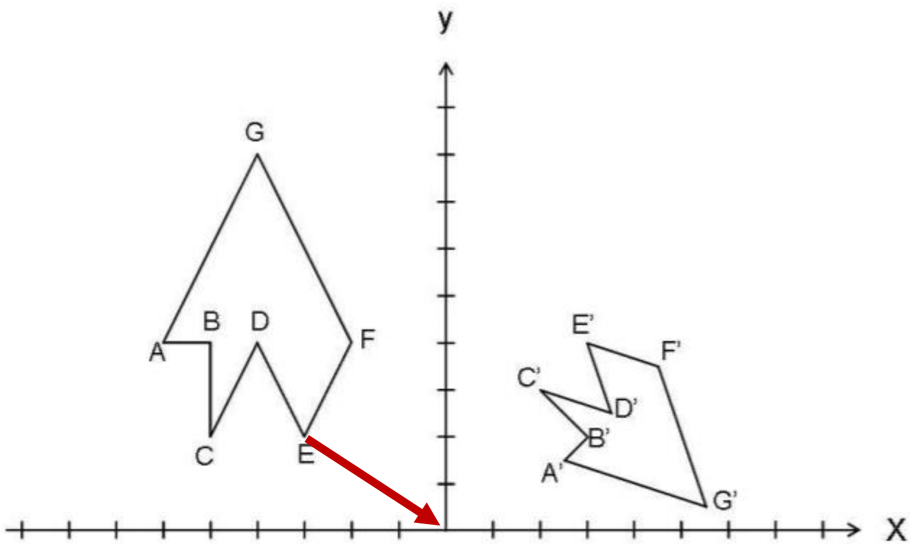
EXERCÍCIO



EXERCÍCIO

1. Passar o ponto E para a origem

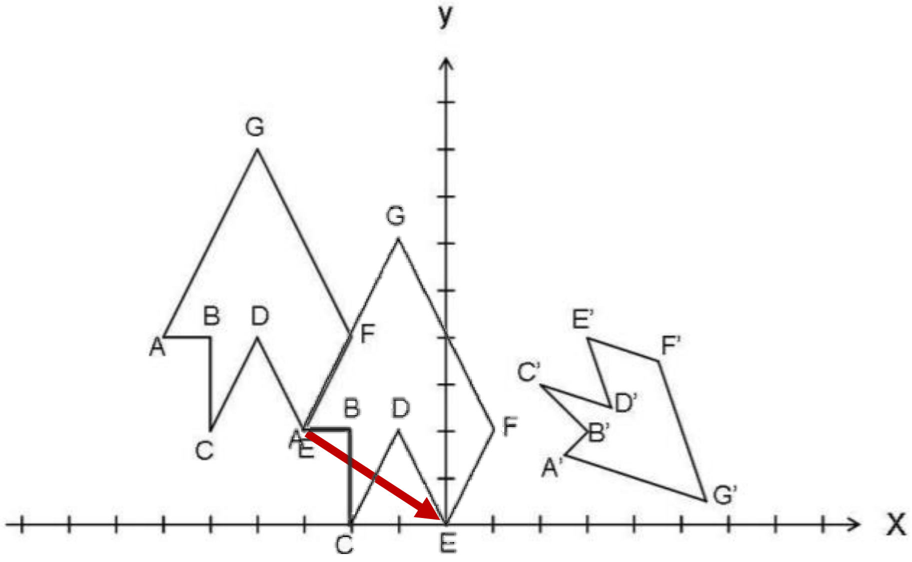
$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



EXERCÍCIO

1. Passar o ponto E para a origem

$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

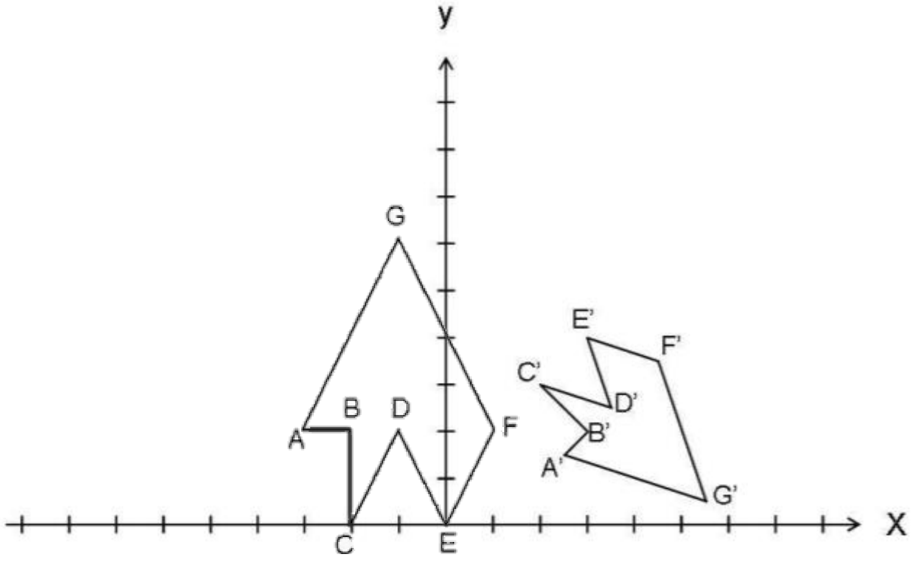


EXERCÍCIO

$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Passar o ponto E para a origem
2. Rodar o objeto 45°, ou seja 315° no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio

$$\mathbf{T}_2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

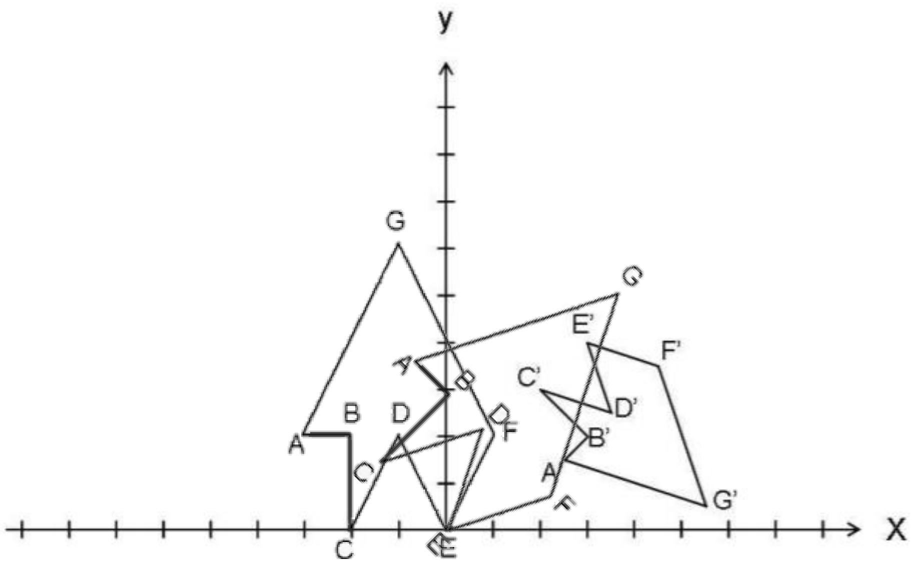


EXERCÍCIO

$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Passar o ponto E para a origem
2. Rodar o objeto 45°, ou seja 315° no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio

$$\mathbf{T}_2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

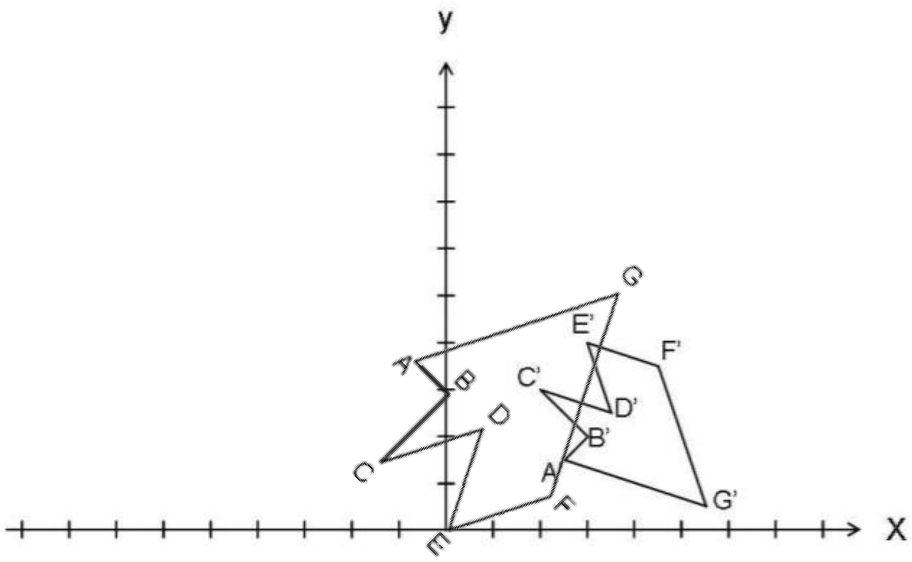


EXERCÍCIO

$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Passar o ponto E para a origem
2. Rodar o objeto 45°, ou seja 315° no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio
3. Fazer espelho segundo o eixo dos X

$$\mathbf{T}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

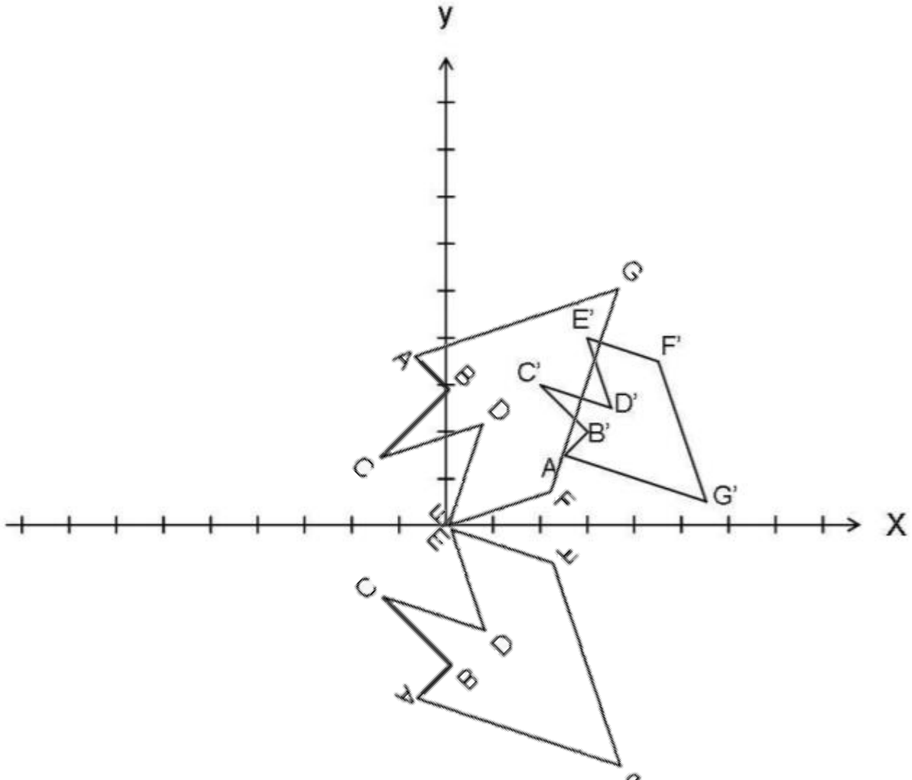


EXERCÍCIO

$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Passar o ponto E para a origem
2. Rodar o objeto 45°, ou seja 315° no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio
3. Fazer espelho segundo o eixo dos X

$$\mathbf{T}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

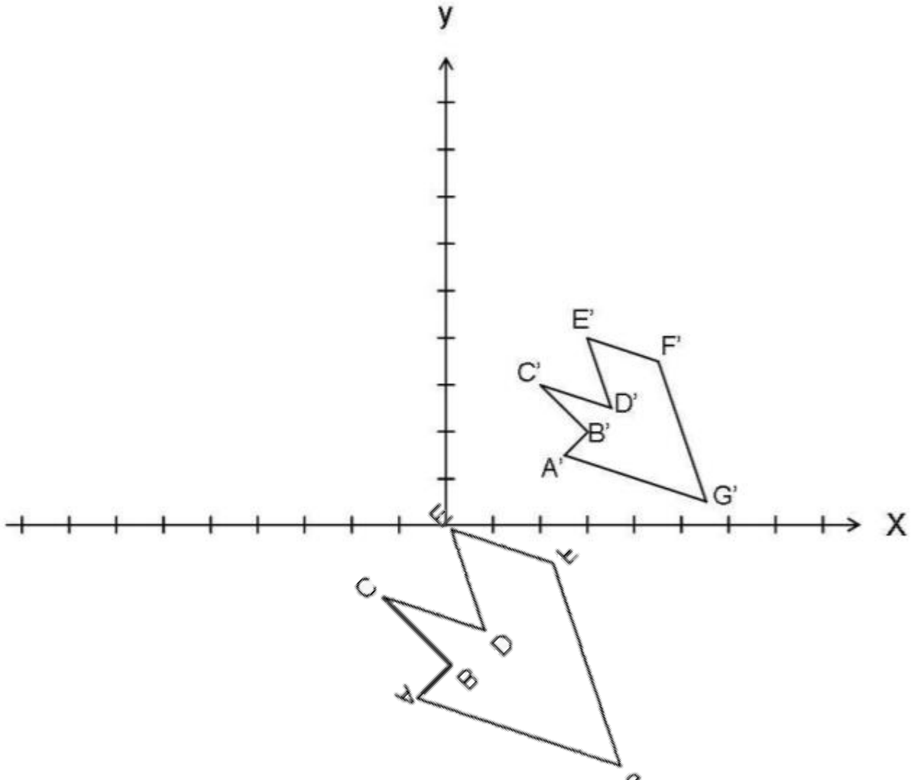


EXERCÍCIO

$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

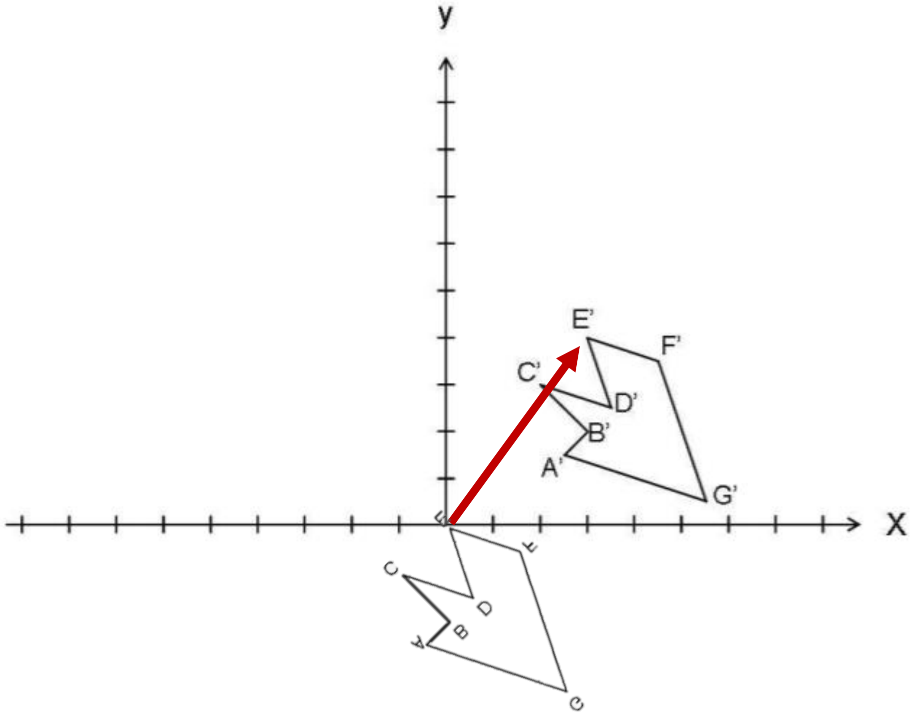
1. Passar o ponto E para a origem
2. Rodar o objeto 45°, ou seja 315° no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio
3. Fazer espelho segundo o eixo dos X
4. Fazer mudança de escala por um factor de $1/\sqrt{2}$

$$\mathbf{T}_4 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_4 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Passar o ponto E para a origem
2. Rodar o objeto 45°, ou seja 315° no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio
3. Fazer espelho segundo o eixo dos X
4. Fazer mudança de escala por um fator de $1/\sqrt{2}$
5. Fazer uma translação $\mathbf{T}_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

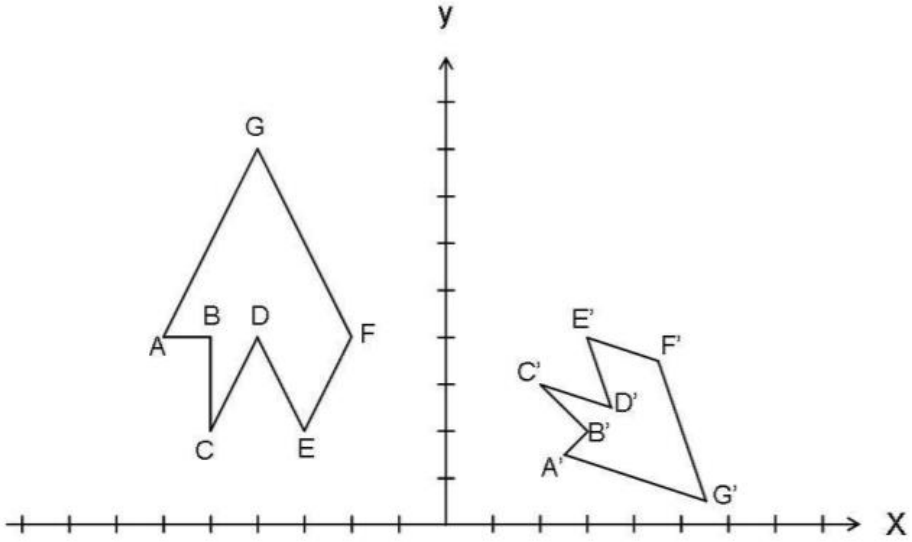


EXERCÍCIO

$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_4 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} := \mathbf{T}_5\mathbf{T}_4\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



OBJETOS 3D

Os objetos que serão colocados no mundo 3D, deverão ser definidos independentemente de qualquer representação particular.

- Esses objetos, conforme se demonstra a seguir, também são criados a partir de escalares, pontos e vetores.

O elemento básico ponto dá origem ao primeiro elemento possível de se ter no mundo 3D, o vértice ou ponto 3D.

Assumindo uma hierarquia entre elementos gráficos, do mais básico ao mais complexo, o que se segue ao ponto 3D é uma reta 3D.

- A particularização deste elemento dará origem às arestas dos objetos.

RETA

Uma reta pode ser definida como uma extensão de um ponto

Assim, da soma de um ponto a um vetor pode-se definir uma reta 3D dada por,

$$\boldsymbol{P(\alpha) = P_0 + \alpha\, v}$$

Onde $\boldsymbol{P_0}$ é um ponto arbitrário, **v** é um vetor arbitrário e α é um escalar.

$\boldsymbol{P(\alpha)}$ é um ponto para qualquer valor de α, e o conjunto de todos os pontos correspondentes à variação de α entre $[-\infty,+\infty]$ estão sobre uma linha reta, sendo a equação acima a forma paramétrica da reta.

PLANO

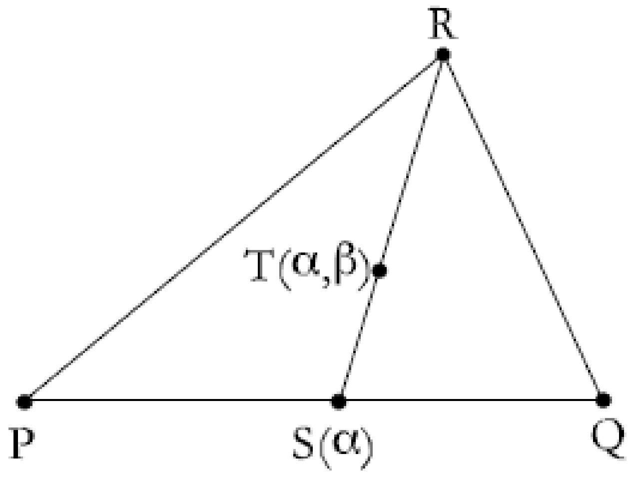
Continuando o raciocínio, um plano (o elemento gráfico seguinte na hierarquia) pode ser definido como uma extensão da reta.

- A particularização deste elemento dará origem às faces dos objetos.

$$\mathbf{T}(\alpha, \beta) = \mathbf{P} + \gamma\,\mathbf{u} + \delta\,\mathbf{v}$$

Um plano é determinado por:

- Três pontos não colineares;
- Um ponto e dois vetores não paralelos.



OBJETOS 3D

Também se pode encontrar a normal ao plano fazendo o produto vetorial:

$$n = u \times v$$

E, assim, com base no vetor n e no produto interno, definir o plano da seguinte forma:

$$n \cdot (P - P_0) = 0$$

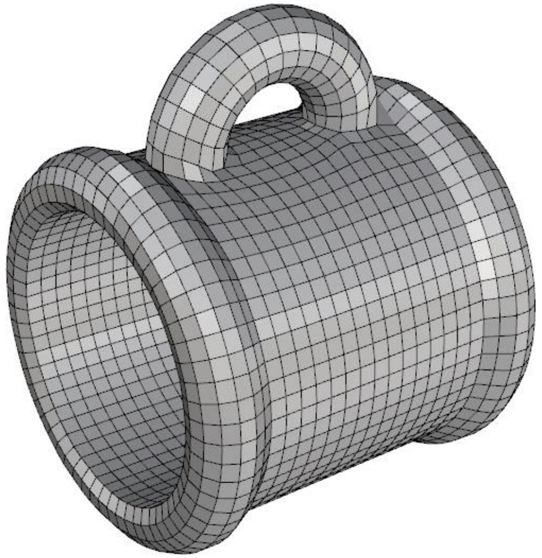
OBJETOS 3D

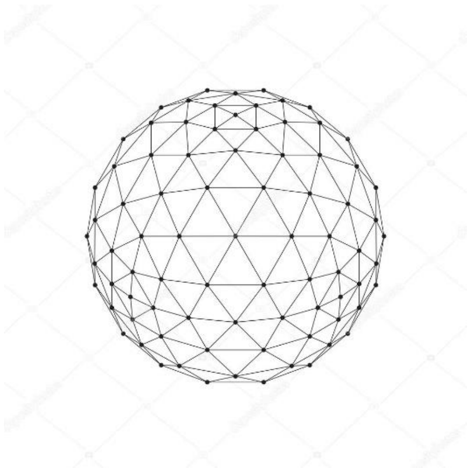
A partir da definição de pontos, de retas e de planos, podem-se juntar, num mesmo conjunto, vértices, arestas e faces.

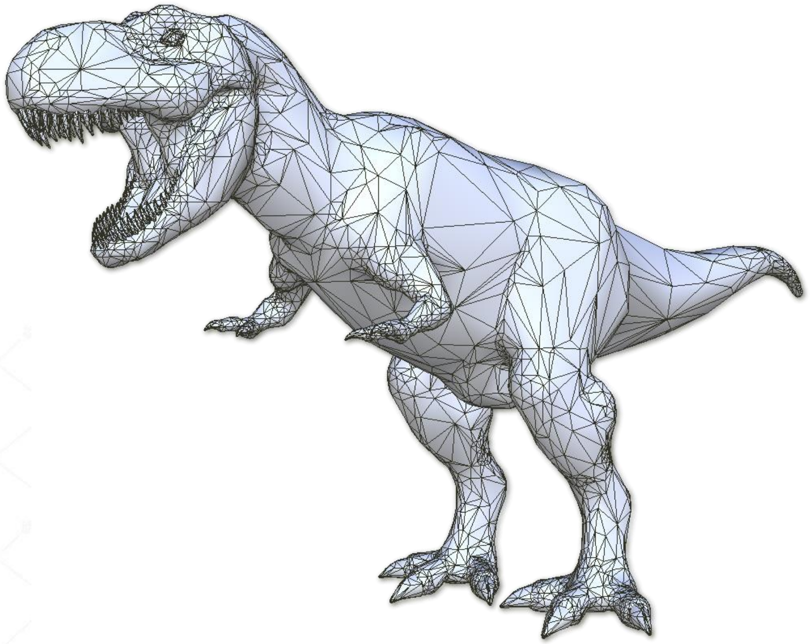
Este conjunto com os elementos descritos acima é conhecido na CG como **malha de vértices** ou ***mesh***.

Estas malhas podem ser definidas e usadas para modelar qualquer tipo de objeto 3D, normalmente com volume.

OBJETOS 3D







Várias malhas de vértices.

OBJETOS 3D

O mundo 3D também pode conter todos os objetos geométricos definidos em 2D (linhas e polígonos), que estão limitados a um só plano.

- As linhas curvas tornam-se em curvas no espaço, e os polígonos com interior transformam-se em superfícies no espaço.

OBJETOS 3D

Existem alguns problemas ao expandir o sistema gráfico (ou API) para incorporar objetos 3D:

- As definições matemáticas desses objetos podem tornar-se complexas;
- Só interessam os objetos que levam a uma implementação eficiente.

Para que os objetos 3D se ajustem bem ao hardware e ao software existentes, terão de ter três características:

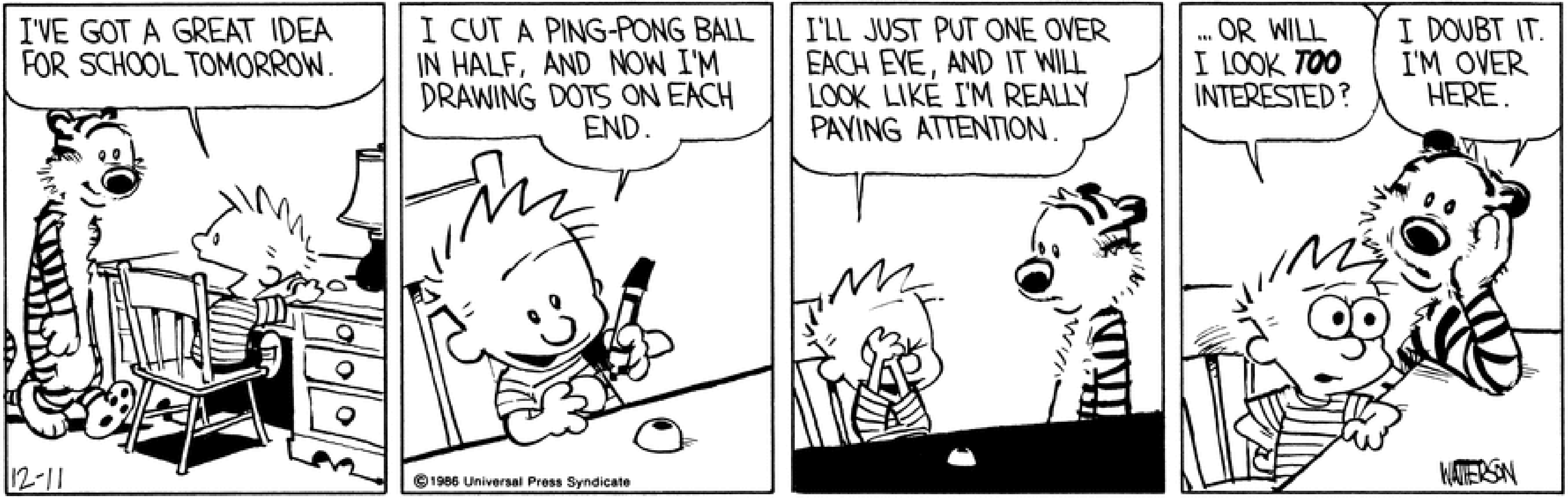
- ser ocos e descritos pelas suas superfícies;
- ser especificados por um conjunto de vértices em 3 dimensões;
- poder ser aproximados por polígonos convexos planos.

OBJETOS 3D

Pode-se entender essas condições se considerarmos que o que os sistemas gráficos fazem melhor é apresentar (ou renderizar) triângulos ou outros polígonos planos.

Como para preencher interiores é conveniente que uma superfície esteja num mesmo plano, é comum os sistemas gráficos fornecerem um método para que um polígono possa ser dividido em triângulos.

Com triângulos temos a garantia de ter todos os pontos no mesmo plano.



CONTINUA NA PRÓXIMA AULA

Curvas e Superfícies
Representação de Sólidos

isec Engenharia

CURVAS E SUPERFÍCIES

As curvas e as superfícies desempenham um papel importante na modelação geométrica de objetos 3D.

Na área da CG, as curvas são a base para a criação de formas simples (como círculos ou elipses) e de formas mais complexas (como automóveis ou bonecos).

REPRESENTAÇÃO DE CURVAS

As curvas podem ser representadas:

- Por um conjunto de pontos ligados por segmentos de reta;
- Pela sua forma analítica:
  - Utiliza-se uma ou mais equações;
  - É mais precisa, compacta e não requer área de armazenamento;
  - Facilita o cálculo de novos pontos;
  - Simplifica o processo de aplicação de transformações geométricas.

REPRESENTAÇÃO DE CURVAS

A representação analítica das curvas podem ser do tipo:

- Não paramétrico;
  - Quando uma das coordenadas é dada em função das outras.
  - Pode ser explícita – *y=f(x)*
  - Ou implícita – **F1(x,y,z)=0 ∧ F2(x,y,z)=0.**
- Paramétrico :
  - Quando se usa um parâmetro (t, ϴ ou outro qualquer) para definir as coordenadas dos pontos da curva – **x=at2 ∧ y=2at.**

REPRESENTAÇÃO DE CURVAS

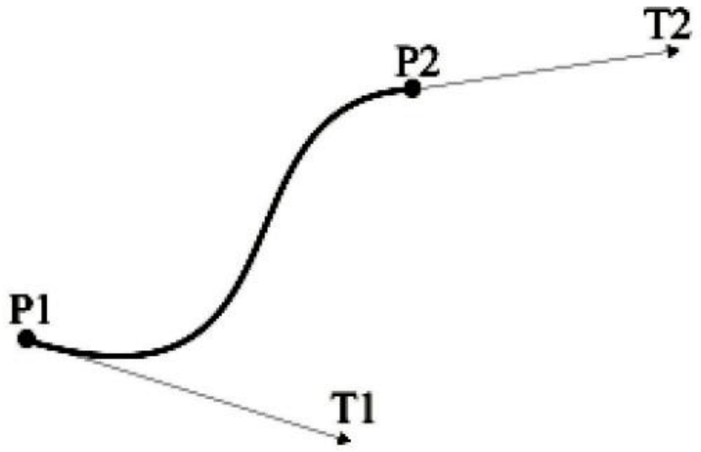
Hermite (1822-1901) foi um dos investigadores que trabalhou nos polinómios de ajuste de curvas.

Para gerar uma curva de Hermite são necessários:

- O ponto inicial (P1) da curva;
- O ponto final (P2) da curva;
- Dois vetores que descrevem as tangentes e pesos desses pontos na curva.

CURVA DE HERMITE

Um dos vetores (T1) indicará como a curva deixa o ponto inicial e o outro vetor (T2) indicará como a curva chega ao ponto final.



Curva de Hermite

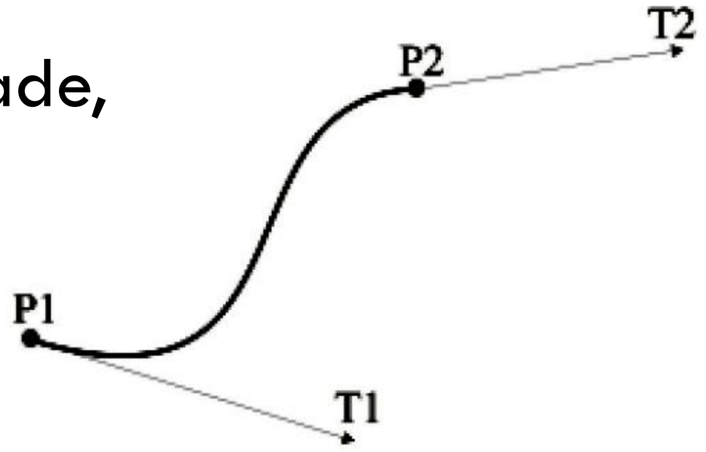
CURVA DE HERMITE

Hermite usou o módulo, direção, sentido e ponto de aplicação para ampliar o controlo da curva em relação ao uso das tangentes.

- Usando só as tangentes apenas teria no máximo a direção e sentido;
- O módulo dos vetores funciona como um peso que muda completamente a curva;

Esta definição dá à curva uma grande versatilidade, permitindo:

- Formas suaves e homogéneas;
- Formas mais bruscas, como ruturas ou "*loops*";
- Formar linhas retas.



REPRESENTAÇÃO DE CURVAS

A curva de Bézier foi desenvolvida por Pierre Bézier enquanto desenvolvia projetos para a Renault francesa (1960).

Baseou-se nos trabalhos de Hermite.

A diferença básica está na utilização de pontos de controlo para a determinação das tangentes nos pontos inicial e final, em vez de usar os vetores.

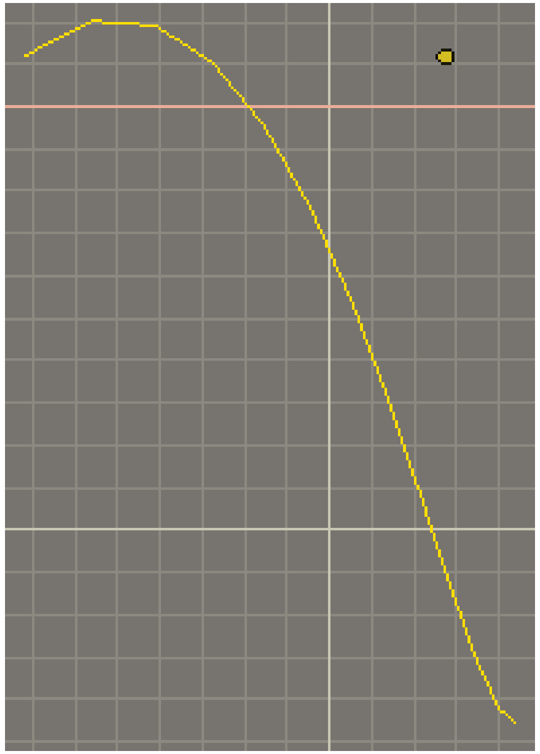
CURVAS DE BÉZIER

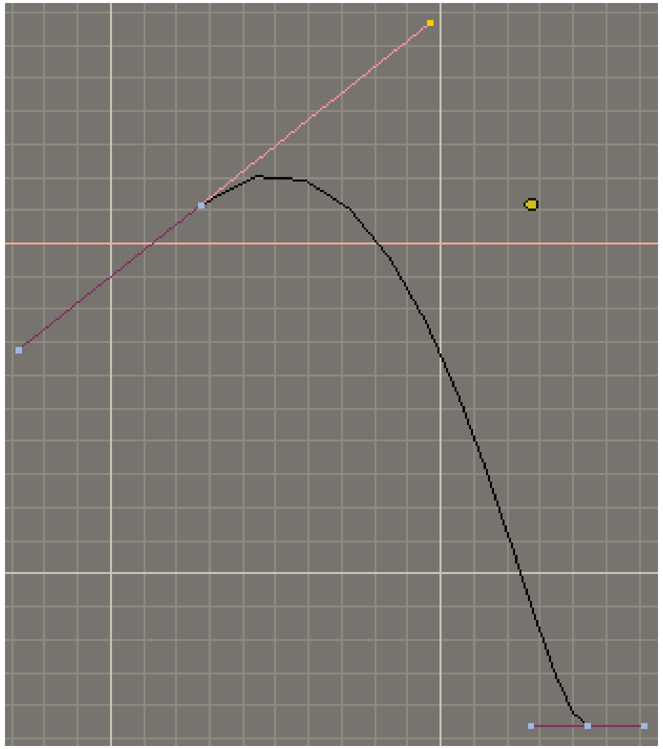
São muitos os softwares de Computação Gráfica que utilizam as curva de Bézier.

A obtenção do polinómio de grau n que gera a curva pode usar desde 3 pontos de controlo até n+1.

- O OpenGL utiliza curvas de Bézier com 4 pontos de controlo;
  - Sai do primeiro ponto e termina no último. Os dois do meio são usados para obter as tangentes.

CURVAS DE BÉZIER





Curvas de Bézier

SPLINES

As curvas denominadas por Splines foram introduzidas por Schoenberg em 1967.

Usam conceitos semelhantes às curvas de Bézier.

- A diferença está no facto de uma alteração em qualquer um dos pontos de controlo resultar na alteração de toda a curva.
- Não se podem usar as *Splines* para gerar interactivamente as curvas.

SPLINES

A curva Spline mais conhecida é a B-Spline.

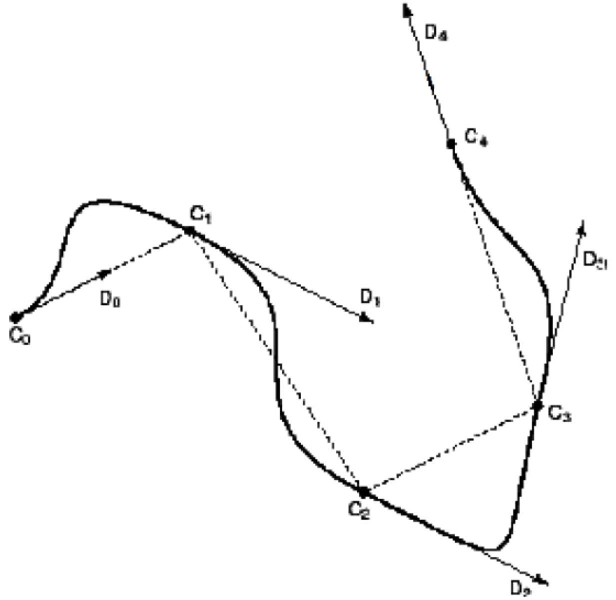
- Tem um controlo local, isto é, as alterações nos seus pontos de controlo propagam-se apenas para os vizinhos mais próximos;
- Pode ser gerada para qualquer número de pontos de controlo e grau de polinómio;
- A curva gerada por ela não passa pelos pontos de controlo.

SPLINES

A Catmull-Rom Spline é uma interpolação local das curvas Spline desenvolvida para Computação Gráfica.

- A curva gerada por esta representação passa através de todos os pontos de controlo.

Curva Spline



SUPERFÍCIES

- Têm um papel importante na CG;
- São uma generalização das curvas;
- Podem ser geradas por conjuntos de pontos;
- Podem ter uma representação analítica (paramétrica, não paramétrica, explícita ou implícita).

REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS

Existem vários tipos de representação para a modelação geométrica de sólidos em que cada forma pode ainda apresentar variantes.

Esta multiplicidade tem origem nos requisitos particulares decorrentes dos objetivos de cada tipo de representação.

No caso do fabrico de peças é necessário, por exemplo, minimizar a distância entre a representação da peça e o seu processo de fabrico de forma a evitar a conversão entre representações.

Mas o fabrico de uma peça por vazamento em molde ou por corte por arranque de apara são diferentes. A representação por instanciação de primitivas pode ser a melhor representação para o primeiro processo, enquanto a representação por varrimento parece ser a mais adequada para o segundo.

Em qualquer dos casos a modelação dos objetos deve ser a mais exata possível para que o tipo de representação não introduza quaisquer artefactos indesejáveis.

CARACTERÍSTICAS DA REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS

Universalidade

Fidelidade

Unicidade

Precisão

REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS

As representações devem ser **universais**, isto é, devem poder representar todos os objetos imagináveis e não apenas um número restrito.

Como tal é impossível na prática, as representações deverão então poder representar o maior número possível de objetos.

Os objetos devem também ser fielmente representados.

A **fidelidade** na representação significa que a representação deve ser obtida para que não possam existir ambiguidades de interpretação quanto ao objeto representado. Uma representação sem ambiguidades é uma representação completa se não forem omitidos quaisquer detalhes.

REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS

As representações devem ser únicas.

A **unicidade** da representação implica que cada tipo de representação não possa representar um objeto por mais do que uma forma.

A unicidade de representação permite simplificar operações tais como a comparação entre dois objetos.

Se não houvesse uma representação única, poder-se-ia concluir que dois objetos eram diferentes embora se tratasse do mesmo objeto representado de duas maneiras.

A representação de objetos deve ser **precisa**, isto é, não deve conter aproximações pois disto depende o realismo da sua visualização (um cone com a aparência de pirâmide) e a correção com que poderá ser manufaturado.

REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS

Para garantir os objetivos atrás enunciados, os processos de criação de representações dos modelos geométricos de sólidos devem ainda ser tais que tornem difícil a criação de representações inválidas e, por outro lado, seja fácil criar representações válidas.

No fundo, o que se exige é que os processos de criação de representações apresentem menores probabilidades de ocorrência de erros.

Este requisito tem igualmente a ver com a necessidade de que as representações criadas continuem a ser válidas mesmo depois de quaisquer transformações que lhes sejam aplicadas.

Finalmente, o processamento de representações dos modelos geométricos de sólidos requer que estas sejam compactas para que os processamentos sejam rápidos e que estes possam igualmente ser realizados através de algoritmos eficientes.

TIPOS DE REPRESENTAÇÃO

Instanciação de Primitivas

Representação por Varrimento

Representação de Fronteira

Representação por Partição do Espaço

Representação por Geometria Construtiva de Sólidos

INSTANCIAÇÃO DE PRIMITIVAS

A representação de objetos por instanciação de primitivas é uma das representações mais usadas devido à sua grande simplicidade e flexibilidade de emprego.

Este tipo de representação tem por base a definição de objetos geométricos tridimensionais, as **primitivas**, que possuem atributos, os **parâmetros**, cujos valores são definidos pelo utilizador no momento da criação de uma nova instância.

INSTANCIAÇÃO DE PRIMITIVAS

Um exemplo simples de uma primitiva é o de um paralelepípedo com três parâmetros: comprimento, largura e altura. Ao variar os valores destes parâmetros, obter-se-ão paralelepípedos diferentes que são instâncias da mesma forma geométrica primitiva.

O conceito de parâmetro não está confinado às dimensões. Assim, a primitiva pirâmide regular pode ter como parâmetro o número de faces laterais para além de parâmetros tipicamente geométricos como a sua altura e o raio da sua base.

Pode-se alargar o conceito de parâmetro para englobar propriedades dos objetos reais a modelar tais como a definição dos materiais constituintes dos objetos e o acabamento das suas superfícies.

INSTANCIAÇÃO DE PRIMITIVAS

A instanciação de primitivas torna-se extremamente conveniente e simples quando:

- as primitivas definem formas geométricas complexas,
- de definição difícil e morosa,
- e que não podem ser obtidas por operações lógicas tais como a adição ou subtração de volumes.

INSTANCIAÇÃO DE PRIMITIVAS

Por exemplo, nos casos de parafusos e rodas dentadas, estes encontram-se normalizados e agrupados em séries também normalizadas.

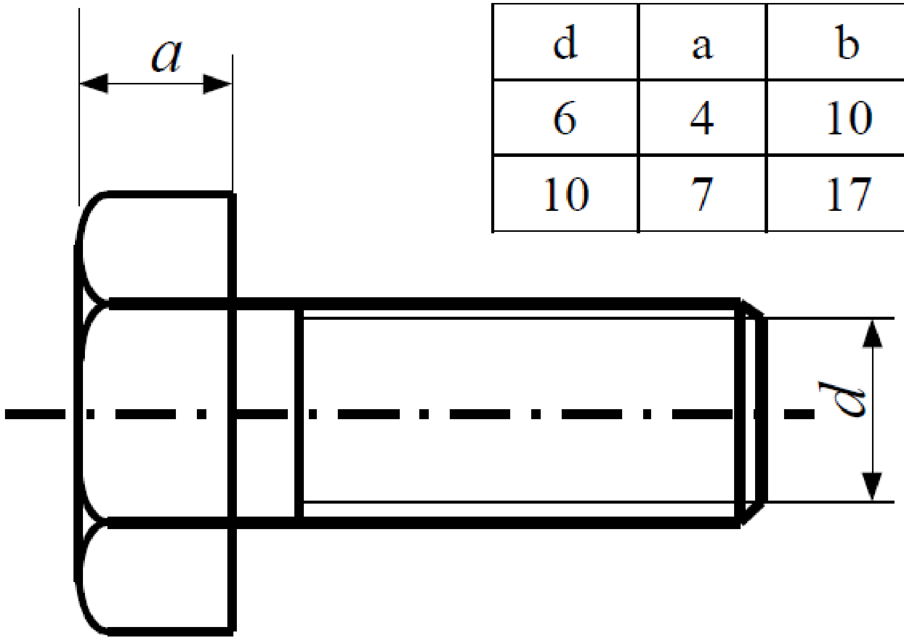
As séries definem características como a forma da cabeça dos parafusos ou dos dentes das rodas dentadas. No caso de parafusos, uma designação como:

- "parafuso M10 de aço com cabeça sextavada“

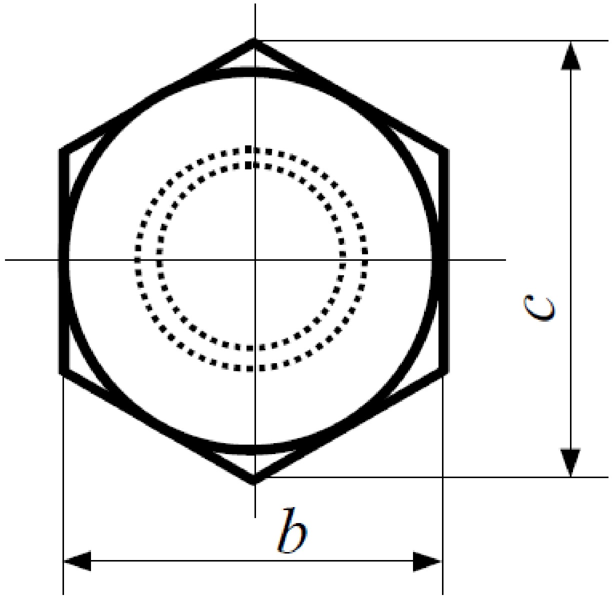
identifica imediatamente todas as características geométricas de uma instância da primitiva "parafuso métrico".

Ao utilizador bastará então selecionar o material (aço), o tipo de cabeça ("sextavada"), o tipo de rosca (M de métrica) e o diâmetro característico (10 mm) para que a instância a criar esteja completamente definida e não se tenha que demorar e preocupar com a definição de detalhes geométricos ou construtivos do parafuso.

INSTANCIAÇÃO DE PRIMITIVAS



d	a	b	c
6	4	10	11,5
10	7	17	19,6



INSTANCIAÇÃO DE PRIMITIVAS

O mesmo se passará quando for necessário instanciar uma porca para aquele parafuso ou um furo onde o parafuso deverá enroscar.

É claro que a instanciação de primitivas obriga à sua definição prévia, mas esta definição é feita uma única vez.

As primitivas serão então postas à disposição dos utilizadores em bibliotecas ou reportórios, mais ou menos complexos, mas sempre adequados aos fins em vista.

INSTANCIAÇÃO DE PRIMITIVAS

Os objetos modelados por instanciação de primitivas são agrupáveis para construir objetos mais complexos.

Um exemplo disto é um trem de engrenagens em que instâncias diferentes de uma mesma primitiva (roda dentada) são colocadas sobre um eixo comum. Este trem pode então ser associado a outro trem e, se se providenciarem os apoios dos dois trens, uma caixa envolvente e um comando de posicionamento dos trens, obteremos uma caixa de velocidades. Esta é o nível mais elevado de uma hierarquia construída a partir das rodas dentadas

A hierarquização é a propriedade importante da representação da modelação de sólidos por instanciação de primitivas.

INSTANCIAÇÃO DE PRIMITIVAS

Os sistemas de CAD (Projeto Assistido por Computador) baseiam-se, na sua generalidade, na instanciação de primitivas devido à sua flexibilidade, simplicidade e hierarquização.

Numa hierarquia de objetos, cada uma das instâncias continua a ser um objeto independente, mantendo os valores atribuídos aos seus parâmetros no momento da instanciação.

Não é então possível definir uma nova primitiva com parâmetros próprios à custa das primitivas existentes. Para criar uma nova primitiva é necessário criar um novo objeto e definir os seus parâmetros e os procedimentos de cálculo de propriedades como o volume e o centro de massa.

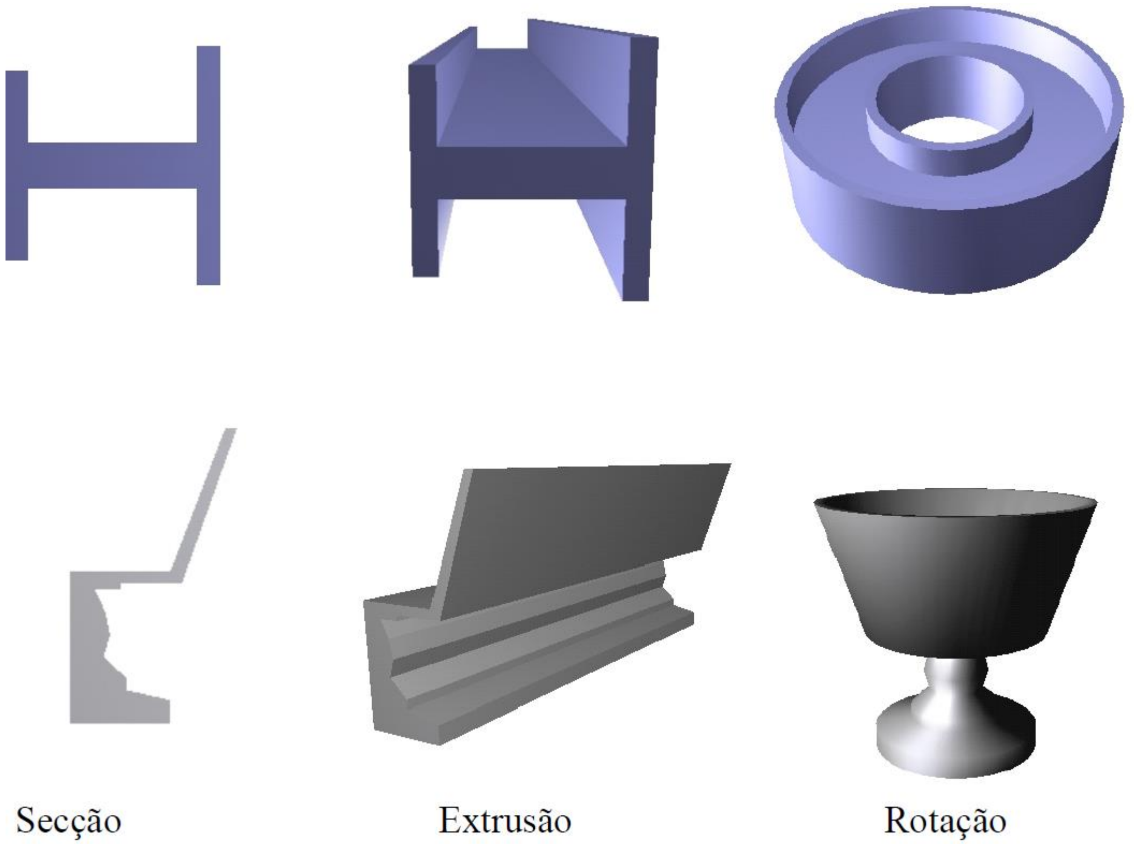
REPRESENTAÇÃO POR VARRIMENTO

A representação de sólidos tridimensionais por varrimento ("*sweep*") tem por base a descrição do volume gerada quando um objeto é deslocado segundo uma dada trajetória e varre um dado volume.

O exemplo mais simples é o de um círculo deslocado segundo uma trajetória linear perpendicular ao círculo. O volume varrido resultante é um cilindro obtido por translação. Um processo de fabrico em que um material plástico é obrigado a passar por um crivo com um orifício circular produz um resultado idêntico. O material toma a forma de um cilindro à saída do crivo e o volume descrito resulta de um varrimento por extrusão.

Se o círculo considerado descrever uma trajetória circular, o volume varrido pelo círculo toma a forma de um toro, obtido por um varrimento por rotação.

REPRESENTAÇÃO POR VARRIMENTO



Representação por varrimento.
A partir de duas secções
(à esquerda), constroem-se
representações por extrusão (ao centro)
e por rotação (à direita).

REPRESENTAÇÃO POR VARRIMENTO

Em qualquer dos casos apresentados, os varrimentos produzem volumes com propriedades geométricas fáceis de calcular. Esta facilidade complica-se um pouco se as secções bidimensionais que varrem os volumes apresentarem formas irregulares.

O cálculo das propriedades de volumes varridos torna-se bastante mais difícil nos chamados volumes varridos gerais. Nestes, a secção bidimensional que varre os volumes pode variar de ponto para ponto da trajetória, normalmente de forma contínua.

O volume pode também ser varrido por um objeto tridimensional. A representação da modelação torna-se então complexa bem como o cálculo das propriedades geométricas do volume varrido, nomeadamente o cálculo do seu volume.

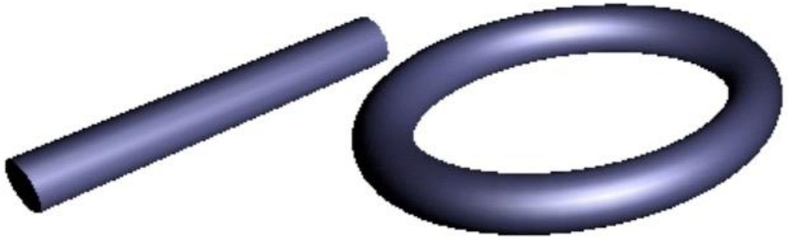
Embora a interface ao utilizador seja simples dado que se trata de primeiro definir a secção ou volume que vai realizar o varrimento seguida da definição da trajetória de varrimento, a descrição obtida é complexa e, muitas vezes, é necessário convertê-la para outro tipo de representação para a poder armazenar de forma compacta.

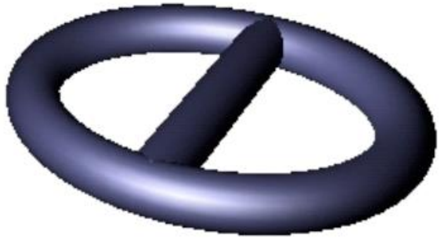
REPRESENTAÇÃO POR VARRIMENTO

Uma outra desvantagem deste tipo de representação é a dificuldade em aplicar operações a objetos modelados por varrimento.

Existem muitos casos em que não é possível descrever por varrimento a união de dois volumes descritos por varrimento como é o caso da união de um toro com um cilindro em que o cilindro está disposto segundo um diâmetro do toro.

Em geral, a realização de operações entre volumes descritos por varrimento implica a conversão prévia das representações dos operandos para representações em que as operações sejam fáceis de realizar.





REPRESENTAÇÃO POR VARRIMENTO

A representação da modelação de sólidos por varrimento não deixa, no entanto, de ter atrativos, nomeadamente a sua **simplicidade** e **naturalidade**. Estas derivam da semelhança entre a descrição do varrimento de volumes e os processos de fabrico como a extrusão ou o corte por arranque de apara.

Este último transforma peças em bruto nas peças desejadas retirando camadas sucessivas de material, a apara, por meio de uma ferramenta de corte em máquinas como as fresadoras e os tornos.

Neste arranque de camadas sucessivas, a ferramenta de corte segue uma trajetória que varre um volume correspondente ao volume de material a retirar.

Existe assim uma correspondência direta entre o processo de fabrico e a representação da sua modelação por varrimento.

REPRESENTAÇÃO DE FRONTEIRA

A modelação geométrica de sólidos por representação de fronteira (também designada por ***b-rep***, abreviatura de "***boundary representation***") descreve os objetos a representar por meio das superfícies que os limitam e das arestas e vértices que estas superfícies apresentam.

As superfícies limitam os objetos mas não indicam de que lado da superfície estes se encontram. Esta distinção é feita através da forma como cada elemento da superfície é definido.

Em geral, poderemos considerar representações de fronteira em que os elementos das superfícies que a constituem podem assumir qualquer forma geométrica, mas isto significa passar os problemas derivados de formas complexas para cada um dos elementos constituintes da fronteira.

REPRESENTAÇÃO DE FRONTEIRA

Na prática, a maioria das representações de fronteira restringe estes elementos geométricos a formas simples como superfícies cónicas, cilíndricas, esféricas ou poligonais, regulares ou não, ou ainda impõem que tais elementos sejam planos.

Restrições ainda mais severas, mas que aumentam a flexibilidade e simplicidade das representações de fronteira, podem obrigar a que os polígonos considerados sejam convexos ou, mesmo ainda, que sejam triângulos. Neste último caso limite, as representações de superfícies curvas serão sempre aproximadas. A precisão da aproximação dependerá do número e dimensão dos polígonos empregues na sua descrição.

REPRESENTAÇÃO DE FRONTEIRA

De entre os vários tipos de representação de fronteira consideraremos os seguintes:

- representação por poliedros
- representação por arestas estendidas ou arestas com alas (*winged-edge*)
- representações não poliédricas

REPRESENTAÇÃO POR POLIEDROS

Os poliedros são sólidos geométricos cuja superfície é constituída por polígonos unidos por arestas, em que cada aresta pertence a um número par de polígonos. Um poliedro simples, ou seja, um poliedro sem furos, obedece à fórmula de Euler

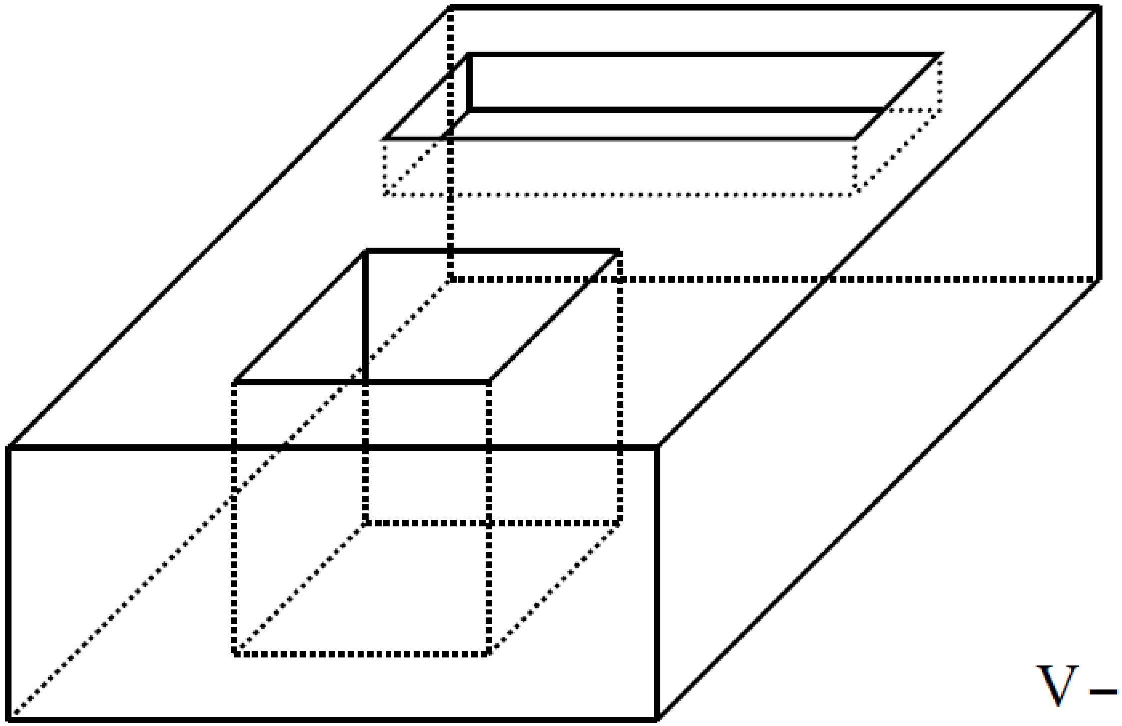
$$V - A + F = 2$$

que estabelece uma relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e o número de faces (F) de um qualquer poliedro simples. Para poliedros gerais, a fórmula de Euler modificada passa a ser

$$V - A + F - FP = 2(C - P)$$

em que FP é o número de furos nas faces, C o número de componentes distintos do poliedro e P o número de furos que atravessam completamente o poliedro.

REPRESENTAÇÃO POR POLIEDROS



$$V - A + F - FP = 2(C - P)$$

REPRESENTAÇÃO POR POLIEDROS

A representação de fronteira por malha poligonal é a representação mais comum de modelação de sólidos por poliedros.

Cada polígono de uma malha poligonal é descrito através da localização espacial dos seus vértices e arestas e possui informação sobre a localização do volume do sólido descrito pela malha em relação ao polígono.

A convenção mais usual é a de enumerar os vértices do polígono em sentido direto (contrário aos sentido dos ponteiros do relógio) quando se visualiza o polígono a partir do exterior do sólido.

REPRESENTAÇÃO POR POLIEDROS

A representação por malha poligonal tem a vantagem adicional de permitir a visualização rápida do sólido modelado através da representação das suas arestas.

Este tipo de representação, denominado **modelo de arames**, permite verificar visualmente e de forma rápida a correção da malha poligonal e transmite ainda uma imagem bastante aproximada dos sólidos modelados

REPRESENTAÇÃO POR ARESTAS ESTENDIDAS OU ARESTAS COM ALAS

A realização de operações sobre sólidos modelados por representação de fronteira pode ser ineficiente se a representação não possuir informação que seja rapidamente acessível e que permita executar as operações pretendidas de forma simples e direta.

A situação mais comum consiste em, dada uma aresta de uma dada face, determinar que outra face (ou outras faces) da fronteira com ela partilha essa aresta.

Se a informação da malha não se encontrar devidamente organizada, há então que percorrer toda a lista de faces e, para cada face, verificar se a face contém ou não a aresta procurada. Esta operação torna-se imediata se cada aresta tiver a si associada uma estrutura de dados contendo informação sobre as faces a que a aresta pertence.

REPRESENTAÇÃO POR ARESTAS ESTENDIDAS OU ARESTAS COM ALAS

A representação por arestas estendidas ou arestas com alas (*winged-edge*) resolve este problema associando estruturas de dados a cada aresta, vértice e face da malha poligonal.

A estrutura de dados associada a uma aresta contém referências a cada um dos dois vértices da aresta, às faces a que pertence e às outras arestas que com ela concorrem (e, portanto, partilham) nos seus vértices.

Cada vértice tem a si associada uma estrutura de dados referindo as arestas a que pertence. A estrutura de dados associada a cada face contém a lista de referências às arestas que possui.

Cada uma destas estruturas encontra-se ordenada segundo a noção de antecessor e sucessor estabelecida segundo a direção dos ponteiros do relógio. A criação destas estruturas ordenadas implica um esforço adicional do cálculo inicial que é posteriormente compensado no processamento da representação, pois as relações de adjacência passam a ser explícitas e removem a necessidade de efetuar buscas em listas mais ou menos longas.

REPRESENTAÇÕES NÃO POLIÉDRICAS

A representação poliédrica da fronteira para a modelação geométrica de sólidos conduz a representações aproximadas da fronteira quando os objetos a modelar apresentam faces não planas.

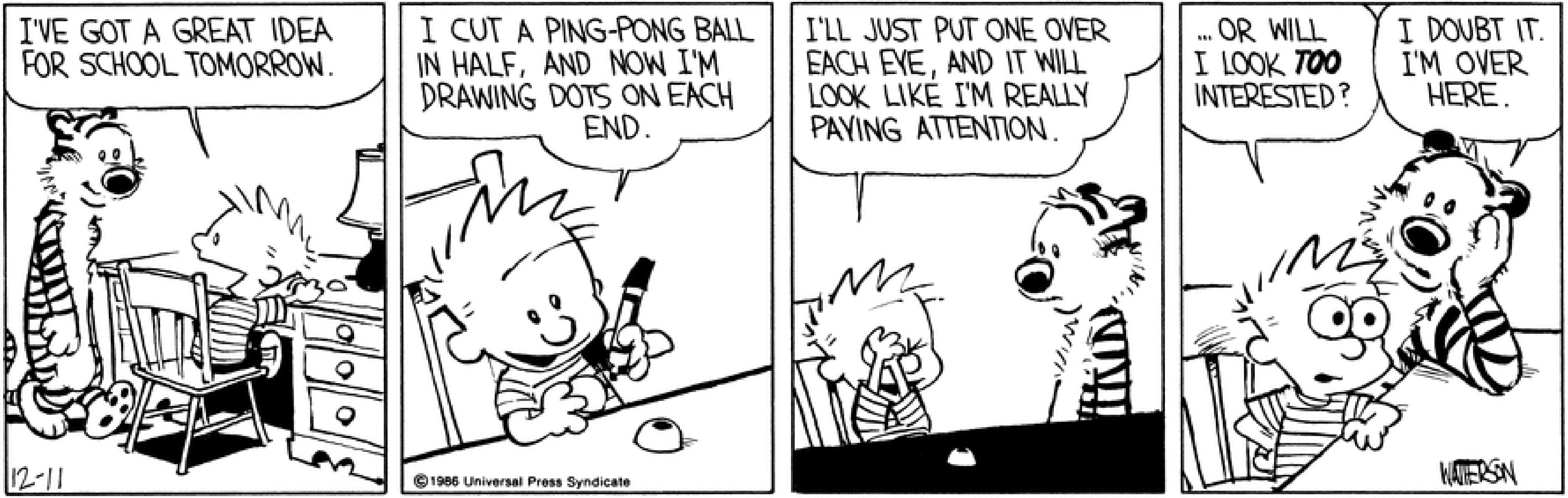
Um exemplo simples desta aproximação consiste na representação poliédrica de uma superfície cilíndrica que é realizada pela substituição da superfície cilíndrica original por uma superfície prismática regular. Esta aproximação será tanto mais precisa quanto maior for o número de faces do prisma que realiza a aproximação. Em situações em que seja necessário calcular (e prever) colisões de um cilindro assim aproximado com um furo que também apresenta forma cilíndrica, iremos obter colisões que não deveriam ocorrer.

Pode inclusive acontecer que a simples inserção do modelo do cilindro no modelo do furo nem sequer seja possível. Se, mesmo assim, o cilindro puder encaixar no furo, a animação da rotação do cilindro poderá não ser possível porque será detetada uma colisão com o modelo do furo logo que o modelo aproximado do cilindro (um prisma) seja rodado.

REPRESENTAÇÕES NÃO POLIÉDRICAS

A solução para estes problemas passa por representações de fronteira não planas com o emprego de técnicas especiais que fazem apelo a representações matemáticas como os NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines).

- Non-Uniform significa que a influência de um ponto de controlo sobre os vértices não precisa ser de intervalos iguais, podendo variar (é bom para a modelação de superfícies irregulares).
- Rational significa que a superfície é representada pela divisão de dois polinómios.



CONTINUA NA PRÓXIMA AULA

Representação de Sólidos (cont.)
Operações Booleanas

REPRESENTAÇÃO POR PARTIÇÃO DO ESPAÇO

A representação geométrica de sólidos por partição do espaço consiste em representar sólidos por meio de conjuntos de sólidos elementares que, quando justapostos e sem se intersectarem, reproduzem o volume ocupado pelos sólidos a representar.

Os sólidos elementares, as primitivas, podem ser de muitos e variados tipos como paralelepípedos regulares ou prismas triangulares irregulares e podem assumir diferentes posições, orientações e dimensões e operações de escalamento.

REPRESENTAÇÃO POR PARTIÇÃO DO ESPAÇO

Em geral, poderemos considerar quatro tipos de representação de sólidos por partição do espaço:

- Decomposição em células
- Enumeração da ocupação do espaço
- Árvore de octantes (ou de quadrantes, quando a duas dimensões)
- Árvore binária de decomposição do espaço (Binary space-partitioning - BSP tree)

REPRESENTAÇÃO POR PARTIÇÃO DO ESPAÇO

Em geral, poderemos considerar quatro tipos de representação de sólidos por partição do espaço:

- **Decomposição em células**
- Enumeração da ocupação do espaço
- Árvore de octantes (ou de quadrantes, quando a duas dimensões)
- Árvore binária de decomposição do espaço (Binary space-partitioning - BSP tree)

DECOMPOSIÇÃO EM CÉLULAS

A representação de sólidos por decomposição em células tem por base a decomposição dos objetos a representar em células ou elementos primitivos paramétricos.

Podem apresentar superfícies curvas.

Tipo de representação semelhante à representação facultada pela linguagem VRML, embora esta linguagem permita que as primitivas se interpenetrem.

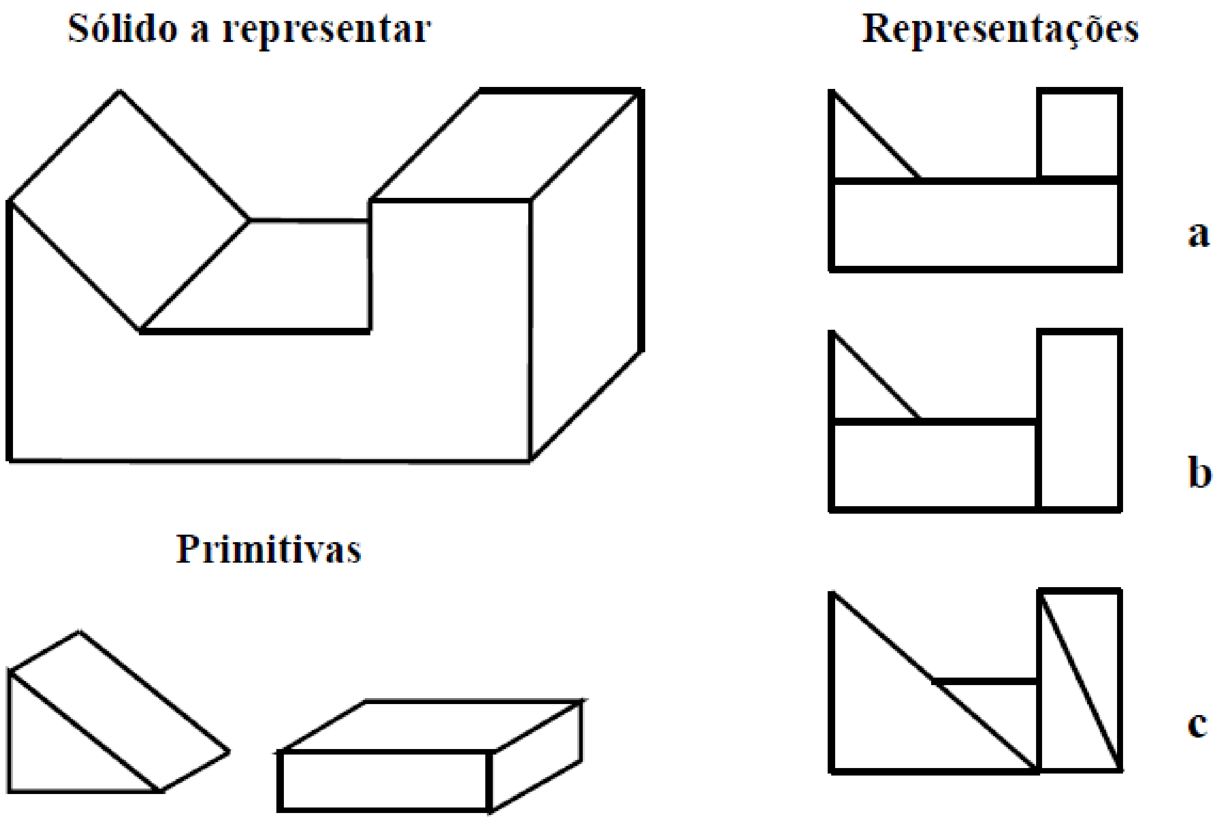
DECOMPOSIÇÃO EM CÉLULAS

A decomposição do espaço proíbe expressamente a intersecção e impõe a justaposição das primitivas que partilham pontos, arestas ou faces.

Esta é também a diferença essencial entre a decomposição do espaço em células e a representação por instanciação de primitivas.

A representação de sólidos por decomposição do espaço em células não permite qualquer ambiguidade, mas pode não ser única, isto é, podem existir várias representações para um dado sólido.

DECOMPOSIÇÃO EM CÉLULAS

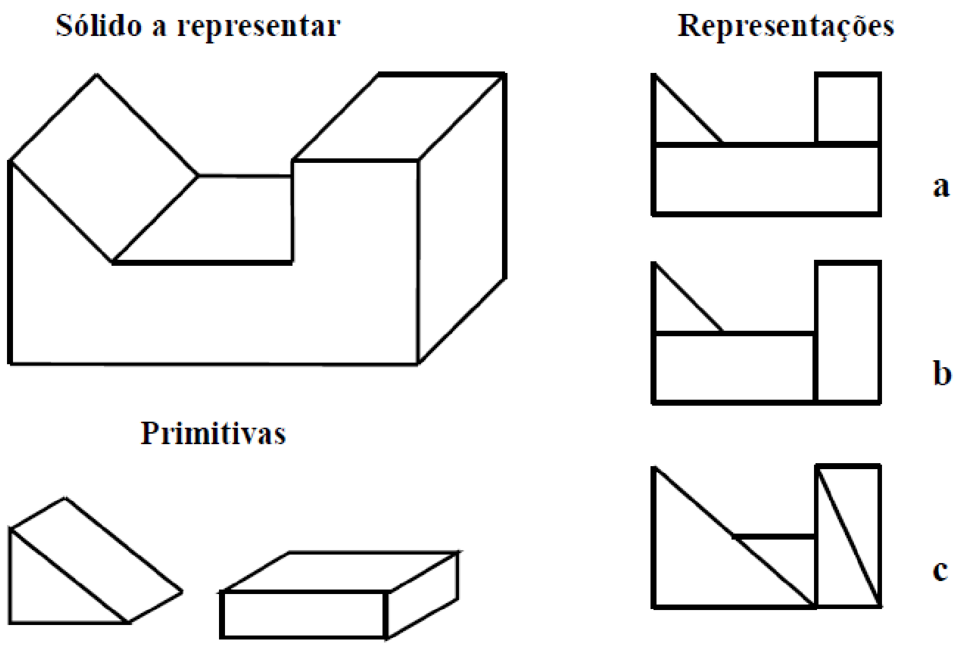


DECOMPOSIÇÃO EM CÉLULAS

A figura apresenta três representações diferentes de um mesmo objeto que foram obtidas por decomposição do espaço a partir de várias formas primitivas.

É até possível obter uma descrição à custa de uma única primitiva.

É claro que as representações obtidas à custa de uma primitiva única serão sempre soluções menos compactas do que as representações que empreguem mais do que uma primitiva.



REPRESENTAÇÃO POR PARTIÇÃO DO ESPAÇO

Em geral, poderemos considerar quatro tipos de representação de sólidos por partição do espaço:

- Decomposição em células
- **Enumeração da ocupação do espaço**
- Árvore de octantes (ou de quadrantes, quando a duas dimensões)
- Árvore binária de decomposição do espaço (Binary space-partitioning - BSP tree)

ENUMERAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO

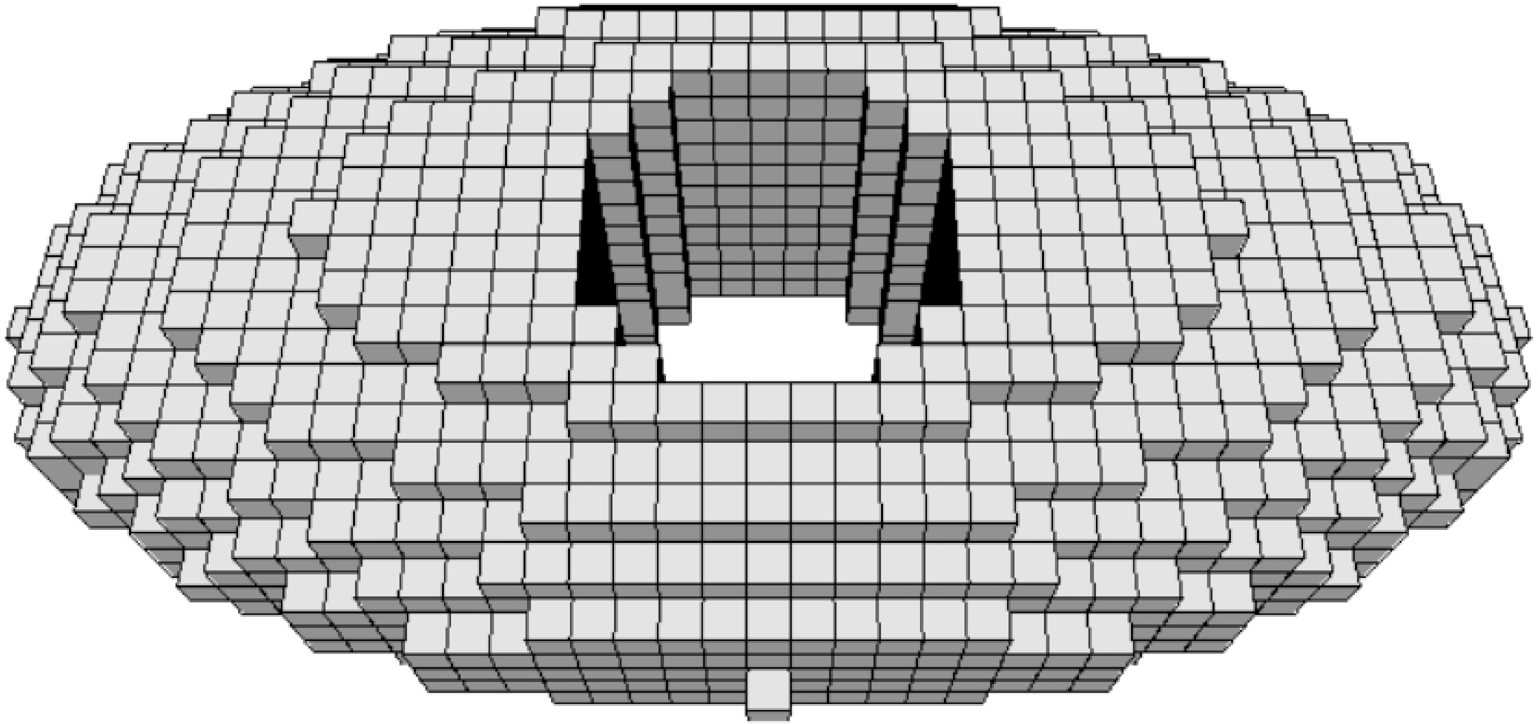
Na representação de sólidos por Enumeração da decomposição do espaço ou enumeração da ocupação do espaço cada sólido é representado por um conjunto de volumes idênticos que, conjuntamente, representam o volume ocupado pelo sólido a representar.

A enumeração da ocupação do espaço decompõe o espaço segundo uma grelha tridimensional composta por volumes de forma e dimensões idênticos, os volumes elementares, também denominados por vóxeis.

A representação de um sólido consiste então em arbitrar a discretização pretendida, ou seja, determinar a dimensão dos vóxeis, e, seguidamente, enumerar quais os vóxeis ocupados pelo sólido a representar.

Uma tal representação é única e não contem quaisquer ambiguidades.

ENUMERAÇÃO DA OCUPAÇÃO DO ESPAÇO



Representação de um elipsóide, que apresenta um furo central, por enumeração da ocupação do espaço. Note-se a pouca precisão da descrição da fronteira.

ENUMERAÇÃO DA OCUPAÇÃO DO ESPAÇO

Esta aproximação minimalista permite efetuar de uma forma expedita todas as operações lógicas entre modelos de sólidos devido à sua simplicidade.

Assim, é fácil determinar se um volume elementar pertence ou não a um objeto e qual é a sua fronteira.

A simplicidade desta representação permite ainda detetar colisões entre objetos e a sua adjacência de forma explícita, através da inspeção das células contíguas às células das fronteiras dos objetos.

ENUMERAÇÃO DA OCUPAÇÃO DO ESPAÇO

No entanto, este tipo de representação apresenta alguns inconvenientes.

O mais grave consiste no número elevado de volumes elementares necessários, uma vez que este número cresce segundo uma lei cúbica quando se diminui a dimensão dos volumes elementares para aumentar a discretização do espaço, na tentativa de obter representações mais precisas dos sólidos.

Com efeito, a redução para metade das dimensões dos vóxeis implica $2^3=8$ mais vóxeis do que anteriormente.

A forma dos vóxeis impede igualmente a correta representação da superfície dos objetos.

O emprego de vóxeis cúbicos não permite a representação exata de fronteiras existentes em planos oblíquos pois esta representação não contempla o conceito de ocupação parcial dos vóxeis.

Um voxel está sempre completamente ocupado ou vazio.

ENUMERAÇÃO DA OCUPAÇÃO DO ESPAÇO

A representação de objetos por enumeração da ocupação do espaço é muito usada na visualização de dados de carácter espacial, nomeadamente em aplicações biomédicas.

Os dados obtidos em tomografia axial computorizada (TAC) ou imagens por ressonância magnética (IRM), representam propriedades dos volumes varridos e não de pontos, devido à resolução espacial permitida pelos equipamentos de tomografia.

Isto torna ideal a sua representação por enumeração da ocupação do espaço.

REPRESENTAÇÃO POR PARTIÇÃO DO ESPAÇO

Em geral, poderemos considerar quatro tipos de representação de sólidos por partição do espaço:

- Decomposição em células
- Enumeração da ocupação do espaço
- **Árvore de octantes** (ou de quadrantes, quando a duas dimensões)
- Árvore binária de decomposição do espaço (Binary space-partitioning - BSP tree)

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE OCTANTES

A representação de sólidos por árvore de octantes (***octree***) tem por objetivo eliminar a desvantagem principal da representação por enumeração da ocupação do espaço.

Esta desvantagem consiste no elevado número de células em que o espaço tem que ser subdividido, para que se obtenha uma descriminação suficientemente fina que permita a definição precisa dos objetos a representar e das suas fronteiras.

O número elevado de células traduz-se numa representação pouco compacta, com grupos de inúmeras células idênticas contíguas, e requer um consumo exagerado de memória.

Obter-se-iam representações muito mais compactas se cada grupo de células idênticas contíguas pudesse ser representado por uma única célula.

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE OCTANTES

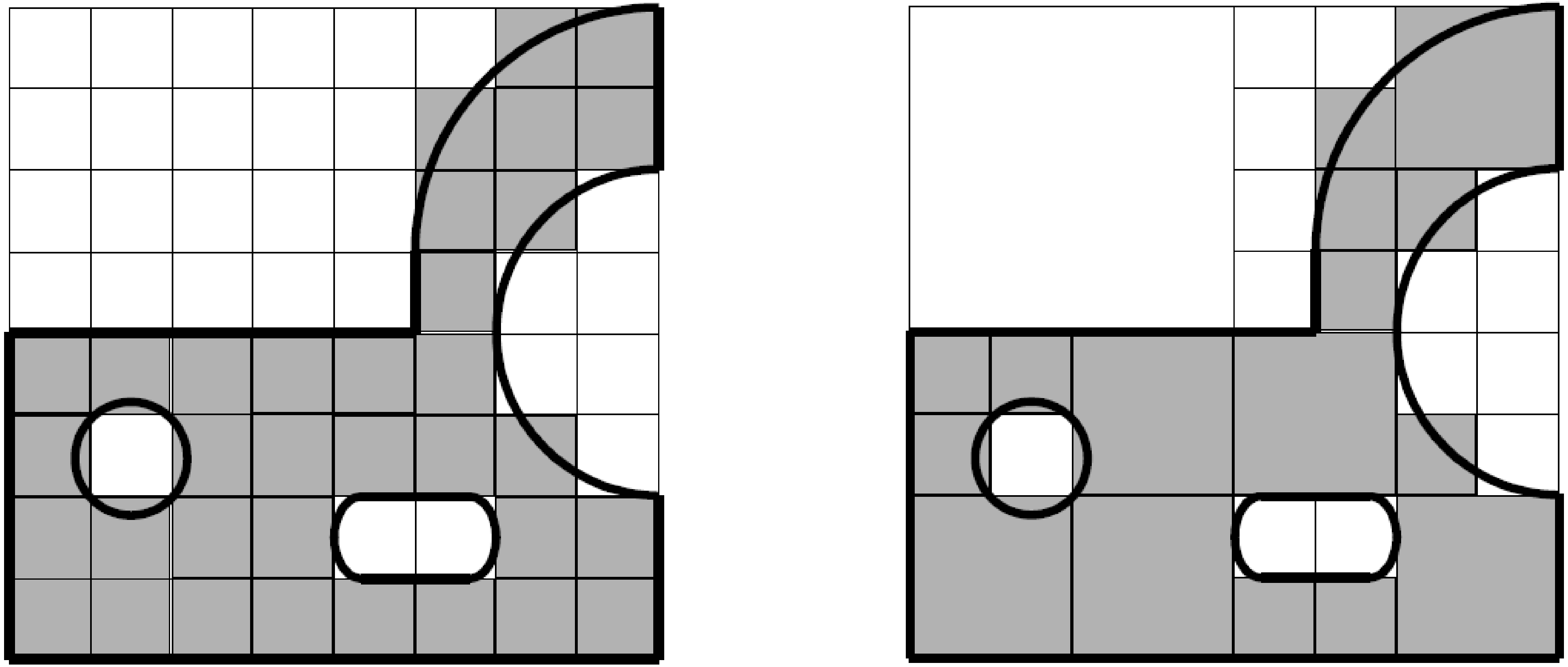
A representação por árvore de octantes aplica a estratégia de dividir para conquistar, dividindo o espaço em oito octantes pelo plano médio segundo cada direção do espaço.

Cada octante assim obtido é sucessivamente subdividido em sub-octantes até que estes se encontrem todos ocupados ou todos livres, ou ainda se atinja o nível máximo de subdivisão permitido.

Depois de uma subdivisão, se os octantes resultantes forem homogéneos (todos ocupados ou todos livres), os octantes são substituídos pelo octante que lhes deu origem e o processo de subdivisão termina para esse octante.

Este processo de subdivisão sucessiva gera uma árvore de octantes em que, em cada nível, existem oito ramos possíveis. Em geral, os ramos desta árvore terminam volumes que ou estão livres ou estão ocupados.

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE OCTANTES



Discretização de um objeto por
enumeração da ocupação do espaço (à esquerda) e por árvore de quadrantes (à direita).

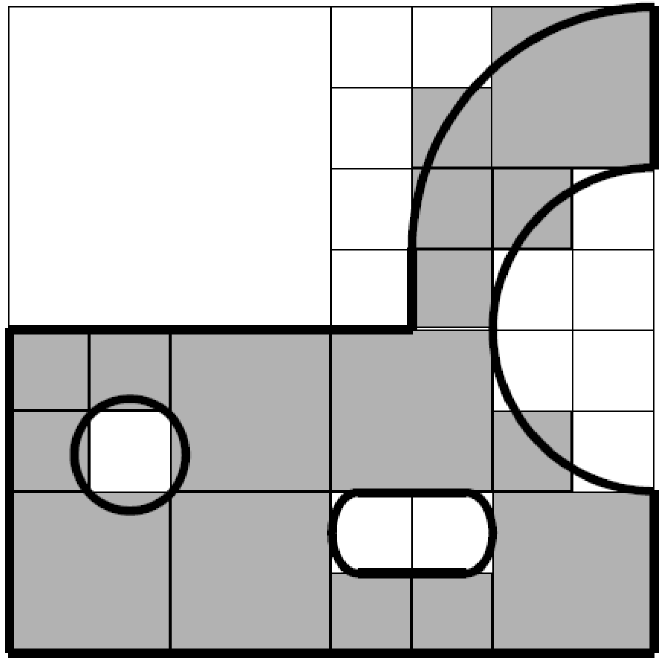
REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE OCTANTES

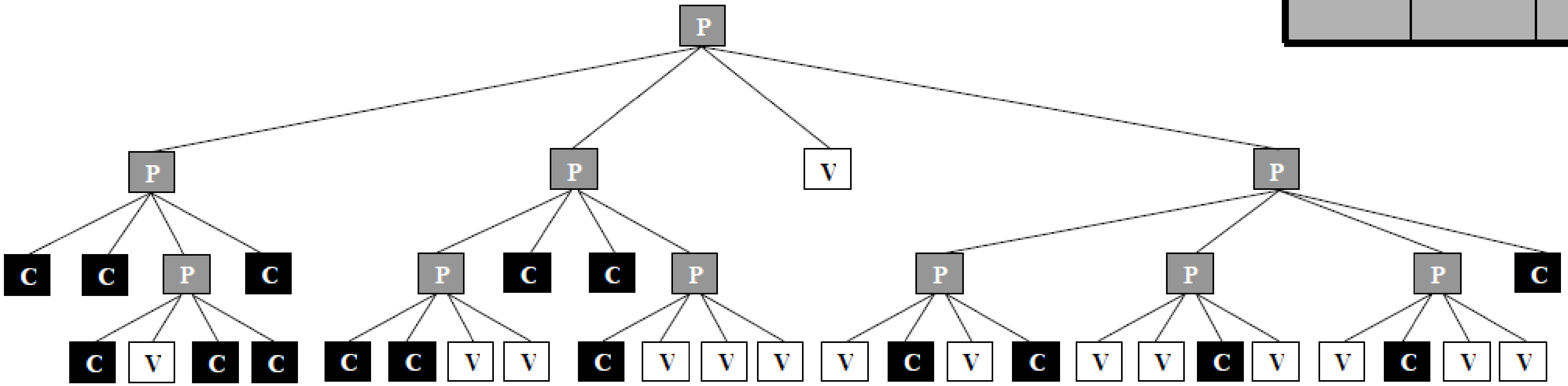
A construção de uma árvore de octantes pode ser realizada de duas formas distintas, pois o processo de construção pode ser ascendente ou descendente.

Numa árvore de octantes descendente (construída de cima para baixo) parte-se do espaço total e realizam-se subdivisões sucessivas até que só existam octantes homogéneos.

A construção ascendente da árvore parte, por sua vez, de uma enumeração espacial muito fina correspondente à maior subdivisão arbitrada e, sucessivamente, vai substituindo grupos homogéneos de octantes por um único octante, diminuindo assim a profundidade do ramo que está a ser processado.

ÁRVORE DE QUADRANTES (2D)





REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE OCTANTES

Este tipo de representação foi concebido a partir do algoritmo inicialmente desenvolvido para a compactação de objetos bidimensionais por meio de uma árvore de quadrantes (*quadtree*). Este algoritmo foi um dos primeiros algoritmos aplicados à compressão de imagens.

A realização de operações lógicas entre dois objetos representados por árvores de octantes faz-se através do atravessamento descendente simultâneo das respetivas árvores, comparando nós correspondentes das árvores de octantes dos operandos.

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE OCTANTES

No caso de uma união, se um dos dois nós se encontra ocupado, cria-se um nó ocupado na árvore do objeto resultante da união, terminando nesse nó a exploração do ramo.

Se um dos nós a comparar se encontrar livre (ou vazio), atribui-se o ramo completo do outro objeto, a partir desse nó, ao nó da árvore contendo o resultado da união.

No caso em que ambos os nós a comparar são nós parcialmente ocupados, cria-se um nó parcialmente ocupado na árvore resultante da união e passa-se ao processamento dos respetivos nós sucessores, tendo o cuidado de, após processar estes últimos, verificar se eles não resultam todos em nós totalmente ocupados.

Nesse caso, tais nós sucessores devem ser eliminados da árvore resultante da união e substituídos por um nó antecessor que deverá ser assinalado como sendo um nó totalmente ocupado.

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE OCTANTES

O processamento de uma operação de intersecção é semelhante. Se um dos dois nós em comparação se encontrar vazio, o nó resultante na árvore correspondente à intersecção é assinalado como vazio e a exploração do respetivo ramo está terminada.

Caso contrário, quando um dos nós a comparar se encontra totalmente ocupado, o ramo do nó da outra árvore é atribuído ao nó da árvore resultante da intersecção.

Finalmente, quando os nós a processar estão assinalados como estando parcialmente ocupados, cria-se um nó parcialmente ocupado na árvore resultante da intersecção e processam-se os nós descendentes.

Se deste processamento resultar que todos os nós sucessores se encontram vazios, estes devem ser eliminados e o seu antecessor deverá ser assinalado como um nó vazio.

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE OCTANTES

A determinação de adjacências a um dado nó de uma árvore de octantes é um pouco mais complicada, dado que um nó possui 26 nós adjacentes (6 ao longo das faces, 12 ao longo das arestas e 8 junto dos vértices).

O método de procura de um nó adjacente a um dado nó consiste em subir na árvore de octantes até encontrar o primeiro nó que seja antecessor comum aos dois nós e, sem seguida, atravessar descendentemente a árvore até que o nó vizinho seja encontrado.

REPRESENTAÇÃO POR PARTIÇÃO DO ESPAÇO

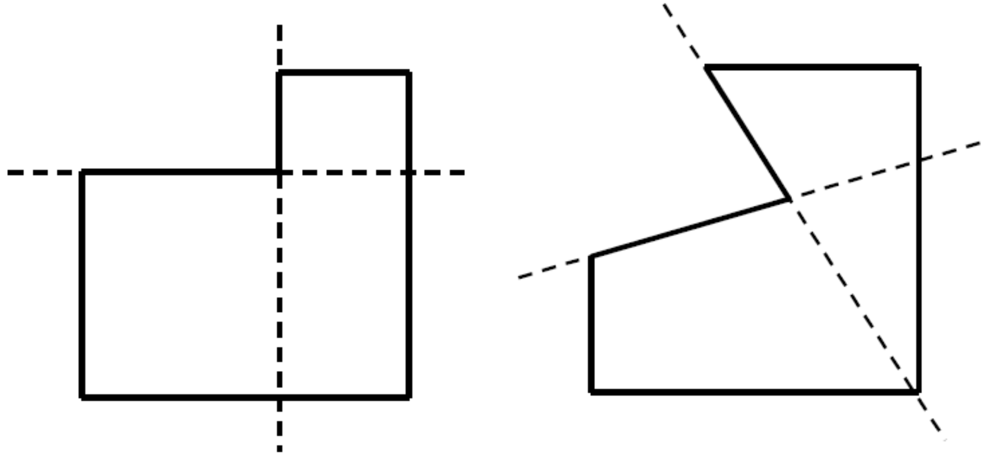
Em geral, poderemos considerar quatro tipos de representação de sólidos por partição do espaço:

- Decomposição em células
- Enumeração da ocupação do espaço
- Árvore de octantes (ou de quadrantes, quando a duas dimensões)
- **Árvore binária de decomposição do espaço** (Binary space-partitioning - BSP tree)

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE PARTIÇÃO BINÁRIA (BSP)

A representação de sólidos por árvore de partição binária (denominada binary space-partitioning ou BSP, em língua inglesa) pretende otimizar a estratégia de subdivisão aplicada na representação por árvore de octantes.

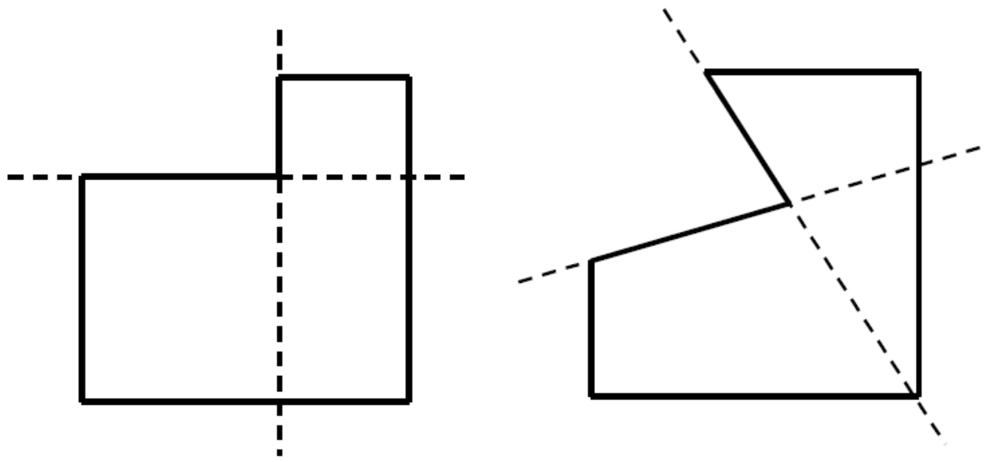
Com efeito, a subdivisão de um octante em oito octantes (ou de um quadrante em quatro quadrantes) é feita cegamente, sem qualquer critério, segundo o plano médio de cada uma das três direções do espaço, quando, por exemplo, uma melhor localização do plano bissetor (ou da linha bissetriz no caso de quadrantes) resultaria em dois subespaços em que um deles estaria ocupado pelo objeto e o outro estaria vazio.



Partição binária e localização das bissetrizes: paralelas aos eixos (à esquerda) e segundo as fronteiras (à direita)

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE PARTIÇÃO BINÁRIA (BSP)

Por outro lado, poderemos obter uma representação mais exata das fronteiras dos objetos se se fizer com que o plano bissetor (ou a linha bissetriz) coincida com a fronteira, em lugar de estar alinhado com uma das direções do espaço.



Partição binária e localização das bissetrizes: paralelas aos eixos (à esquerda) e segundo as fronteiras (à direita)

REPRESENTAÇÃO POR ÁRVORE DE PARTIÇÃO BINÁRIA (BSP)

Na repartição do espaço por árvore de partição binária, o espaço é dividido em apenas dois subespaços por um plano arbitrário colocado de forma a coincidir com a superfície ou parte da superfície do objeto a representar.

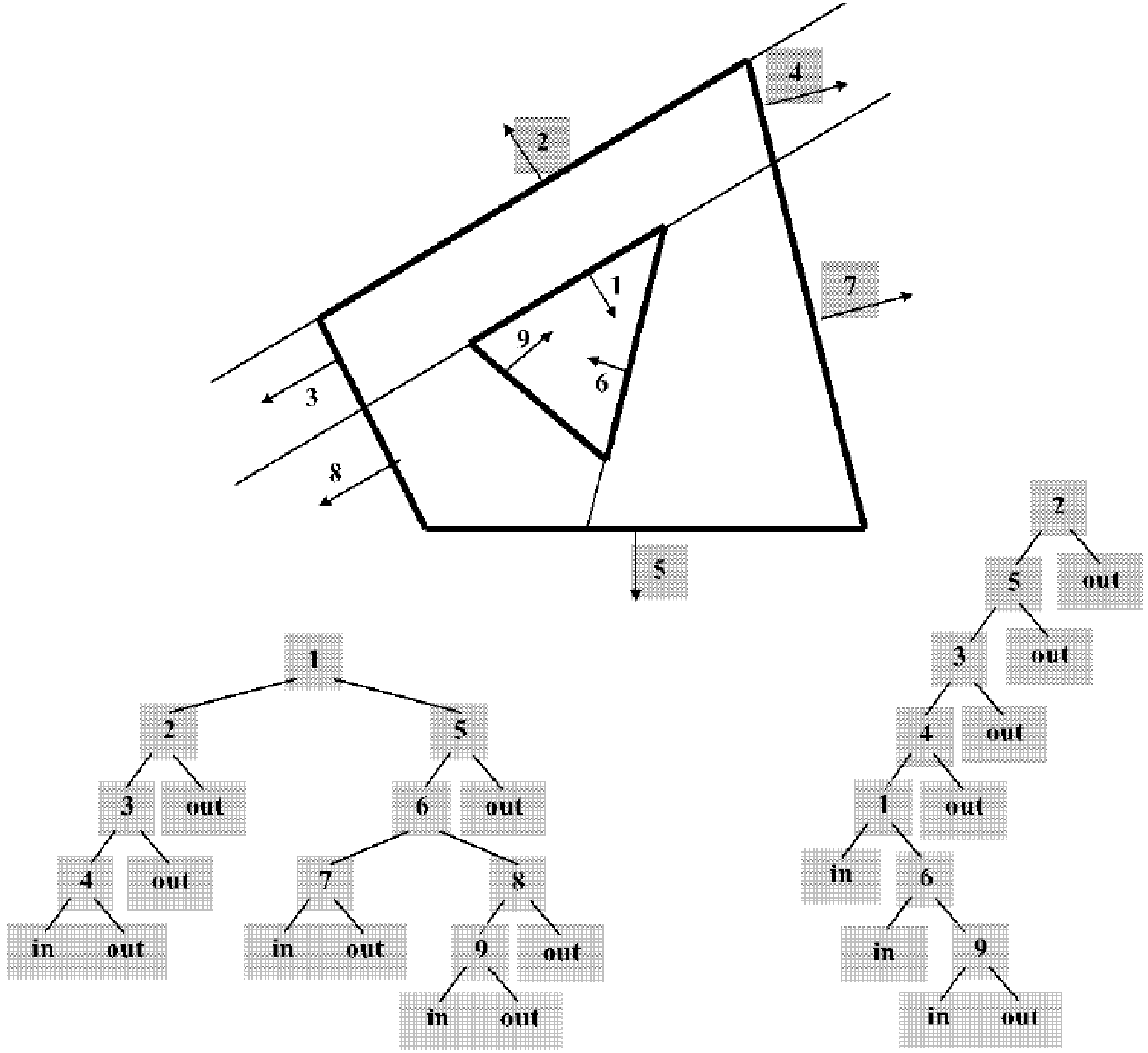
Em cada nível da árvore existirão apenas dois ramos. Podemos arbitrar que o ramo esquerdo corresponderá ao subespaço "mais dentro do objeto" e que o ramo direito corresponderá ao subespaço "mais fora do objeto". O subespaço associado a cada ramo da árvore é então subdividido sucessivamente e colocado na árvore segundo este critério até que a subdivisão produza dois subespaços homogéneos, em que um deles esteja totalmente dentro do objeto e o outro totalmente fora.

REPRESENTAÇÃO POR BSP

Bissetrizes de divisão de uma figura e duas árvores de partição binária.

Notem-se as diferenças entre as duas árvores, nomeadamente a profundidade e o número de planos empregues.

Uma vantagem evidente deste tipo de representação é a maior fidelidade obtida na representação das fronteiras dos objetos.



REPRESENTAÇÃO POR GEOMETRIA CONSTRUTIVA DE SÓLIDOS (CSG)

A representação de objetos por Geometria Construtiva de Sólidos, comummente designada por CSG (*Constructive Solid Geometry*), consiste em criar representações de objetos a partir de um conjunto de primitivas hierarquicamente estruturadas.

Nesta estrutura hierárquica, os nós representam não só transformações mas também operações booleanas.

Os operandos destas operações podem tanto ser primitivas como objetos resultantes de operações anteriores.

REPRESENTAÇÃO POR GEOMETRIA CONSTRUTIVA DE SÓLIDOS (CSG)

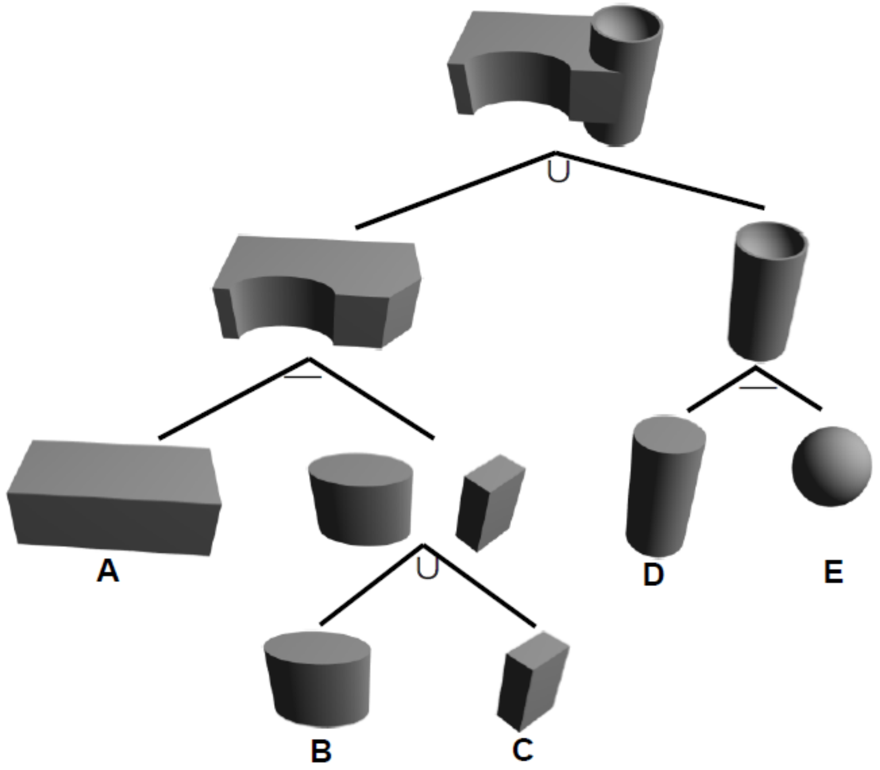
Exemplo de um objeto construído segundo CSG. As operações booleanas envolvidas são apenas duas: união e diferença.

Com estas duas operações, o sólido construído, a raiz da hierarquia, tem a expressão

$$(A - (B \cup C)) \cup (D - E)$$

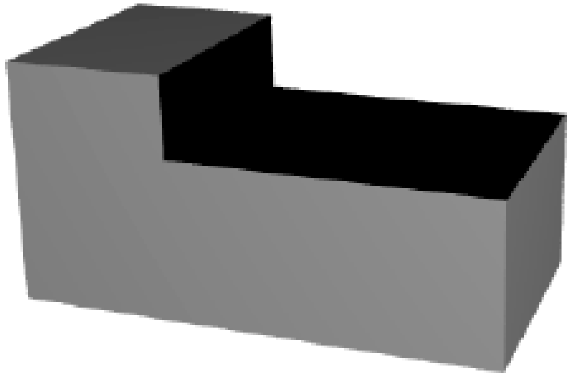
O resultado não é ambíguo, mas não é único. O mesmo resultado poderia ter sido obtido com as mesmas operações definindo o objeto pela sequência

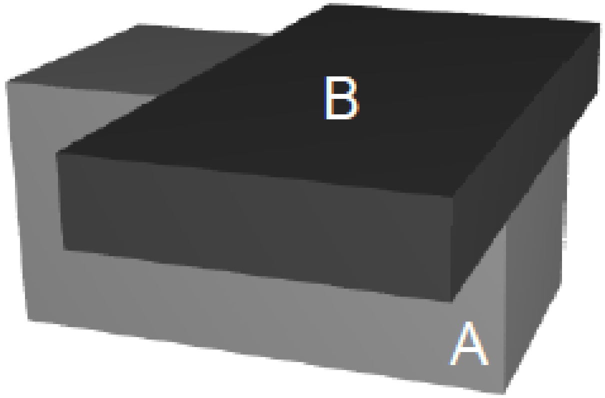
$$((A - C) \cup D) - (B \cup E)$$

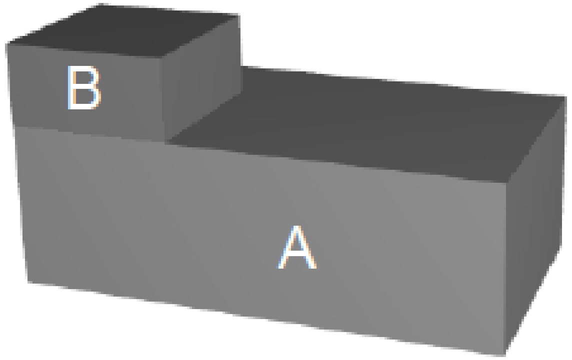


REPRESENTAÇÃO POR GEOMETRIA CONSTRUTIVA DE SÓLIDOS (CSG)

Solução não única. O sólido à esquerda pode ser representado por uma diferença (ao centro) ou por uma união (à direita)







REPRESENTAÇÃO POR GEOMETRIA CONSTRUTIVA DE SÓLIDOS (CSG)

Embora a representação de um objeto por CSG apresente algumas desvantagens, a sua simplicidade e facilidade de emprego sobrepõem-se aos inconvenientes já apontados.

Em consequência, este tipo de representação é um dos tipos mais empregues e populares, tendo sido adotado por muitos produtos de modelação e, também, visualização de cenas.

OPERAÇÕES BOOLEANAS EM MODELAÇÃO GEOMÉTRICA

A modelação geométrica de objetos emprega vários tipos de entidades como primitivas, células e malhas. A associação destas entidades permite criar novos objetos que, sucessivamente, aproximam os objetos que se pretende modelar.

Uma operação de associação não tem um resultado único pois depende de que tipo de associação se pretende efetuar.

Um prisma quadrangular pode ser obtido pela justaposição de dois cubos que possuem uma face comum, mas um cubo com um furo circular não pode ser obtido pela adição de volumes do cubo e de um cilindro.

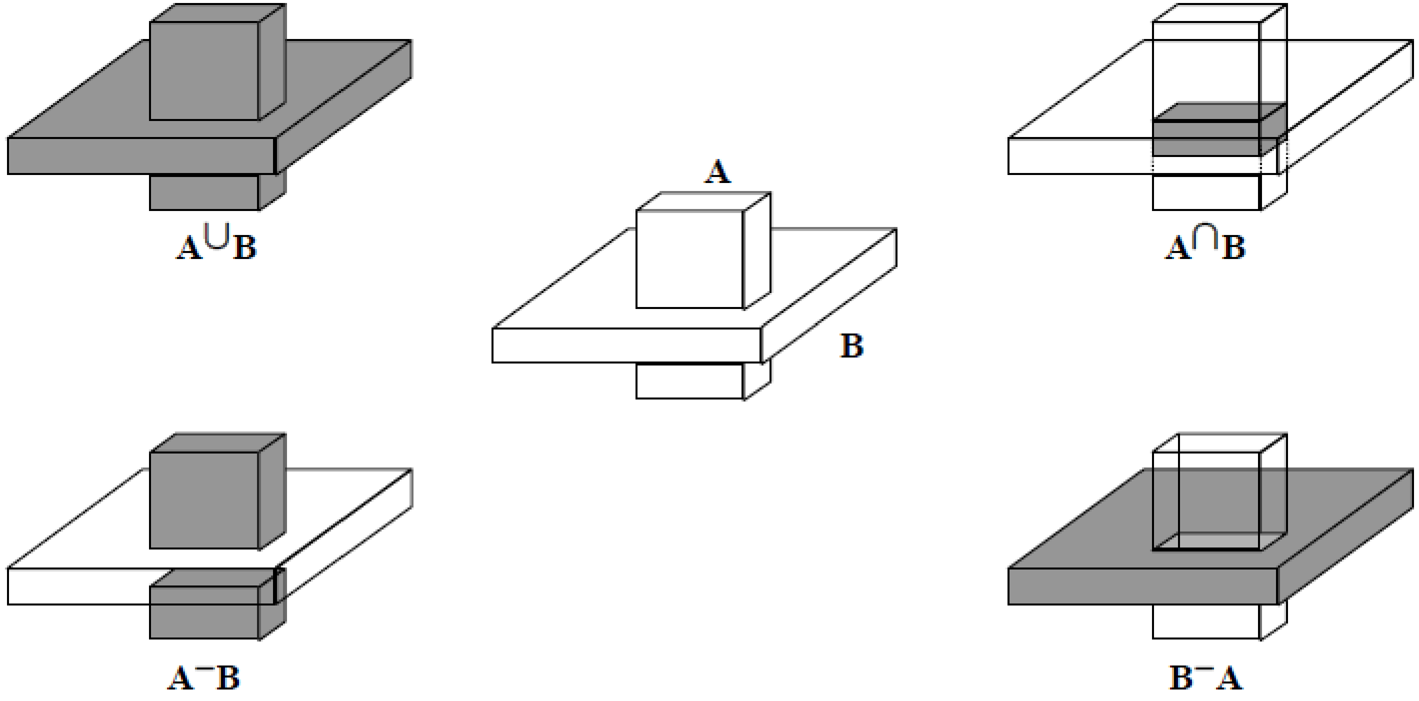
Neste caso é necessário subtrair um volume cilíndrico ao cubo. Vemos assim que a associação de sólidos para modelar um novo sólido depende do tipo de associação pretendido, isto é, depende da operação booleana a realizar entre os volumes dos operandos.

OPERAÇÕES BOOLEANAS

Os operadores booleanos empregados em modelação de sólidos permitem:

- Adicionar dois volumes, isto é, calcular a sua união (∪),
- Determinar o volume comum, ou seja, a sua intersecção (∩),
- Determinar a sua diferença (-), de que resulta um volume que é igual ao volume de um dos dois operandos menos o volume da sua intersecção e depende da ordem dos operandos.

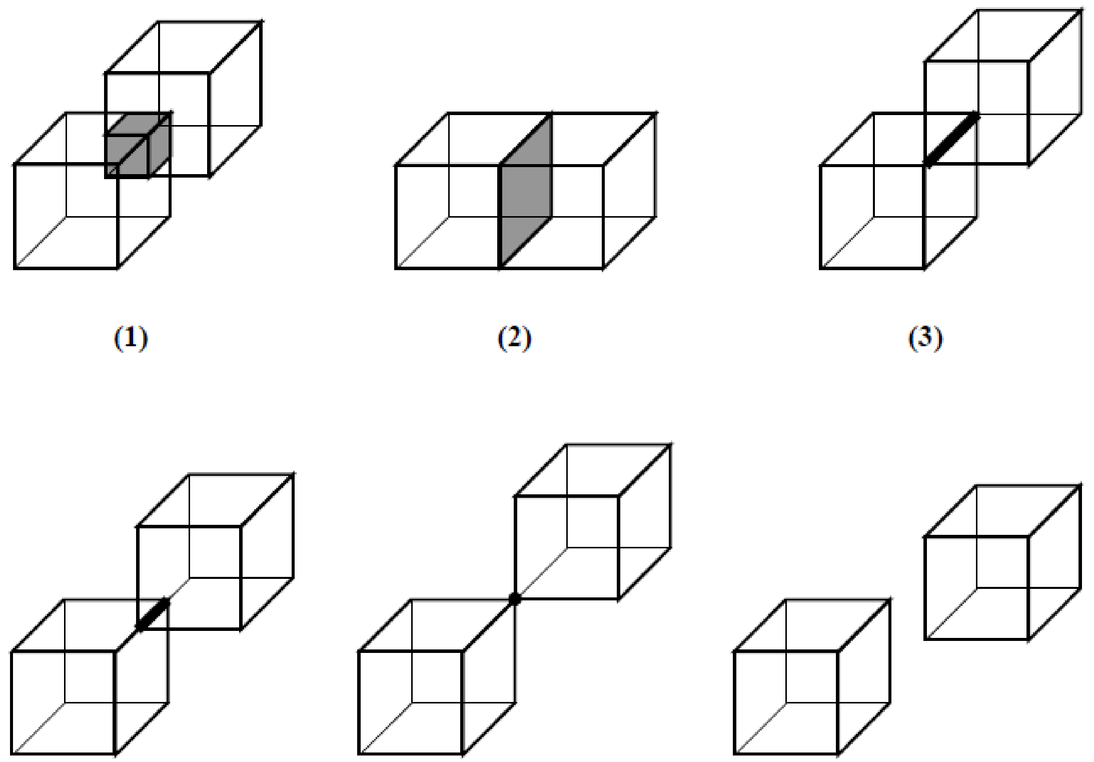
OPERAÇÕES BOOLEANAS

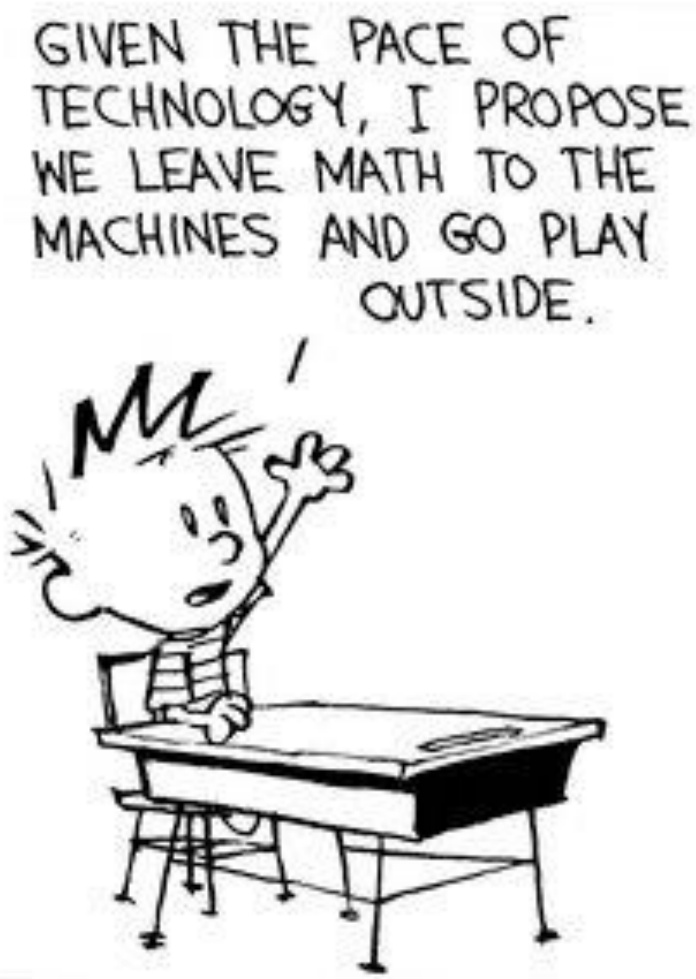


Operadores lógicos entre sólidos modelados: união, intersecção e as duas diferenças.

OPERAÇÕES BOOLEANAS

O resultado de operações booleanas sobre volumes não é necessariamente um volume e depende ainda de se considerar se a fronteira faz ou não parte do volume que limita.




GIVEN THE PACE OF TECHNOLOGY, I PROPOSE WE LEAVE MATH TO THE MACHINES AND GO PLAY OUTSIDE.