Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Teste 1 de Análise Matemática I - Engenharia Informática

17 de fevereiro de 2021 Duração: 1h15m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.

- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = \log_2(-4x^2 + 36)$.

a) Determine o domínio de f e verifique se a função é injetiva.

b) Tendo em conta a alínea anterior, e restringindo o domínio de f a um subconjunto conveniente, caracterize a função inversa de f correspondente.

c) Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + x\right) = 1$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $x - \arccos(x) = 0$ tem uma apenas solução real.

(a) Recorrendo ao método gráfico, indique um intervalo de amplitude 1 que contenha a solução da equação.

(b) Partindo do intervalo indicado na alínea anterior, efectue 3 iterações do método da bissecção para estimar a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize a tabela numérica, fornecida no formulário, em todos os cálculos que realizar.

[2.0 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int x\,\frac{1-x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$;

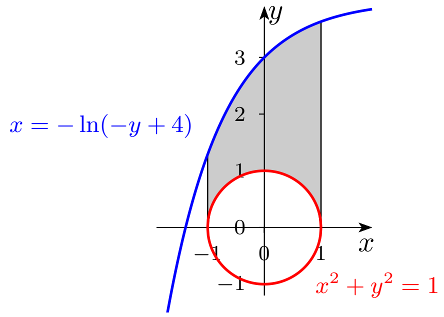
(b) $\displaystyle\int \frac{3x}{4+x^4}\,dx$.

[1.0 *val.*] 4. Determine uma estimativa para o integral definido

$$\int_{-1}^{1} \arccos(x)\,dx\,,$$

recorrendo à regra de Simpson e a 4 sub-intervalos. Utilize a tabela numérica, fornecida no formulário, em todos os cálculos que realizar.

[5.0 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular a área de $\mathcal{A}$.

(b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume da região que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

(c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.

Nota: Além de integrais, também pode utilizar geometria elementar.

1. (a) O domínio de f é definido por

$$D_f = \{x \in \mathrm{I\!R} : -4x^2 + 36 > 0\} = \{x \in \mathrm{I\!R} : x^2 < 9\} =]-3, 3[$$

A função não é injetiva pois, por exemplo, as as abicssas $x = 1-$ e $x = 1$ têm a mesma imagem:

$$f(-1) = f(1) = \log_2(-4+36) = \log_2(32) = 5\,.$$

(b) Uma vez que a função f não é injectiva, a sua inversa só pode ser definida numa restrição que garanta que a função é injectiva. Consideraremos a restrição principal.

Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = ? & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & y = f(x) = \log_2(-4x^2+36) \end{array}$$

O contradomínio da função inversa coincide com a restrição principal da função original pelo que, tendo em conta a restrição do seno, tem-se

$$CD_{f^{-1}} = [0, 3[$$

A função inversa tem expressão analítica dada por

$$\begin{aligned} y = \log_2(-4x^2+36) \quad &\Leftrightarrow \quad 2^y = -4x^2 + 36 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^y - 36 = -4x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{36 - 2^y}{4} = x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{9 - \frac{2^y}{4}} = x \\ &\Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{9 - \frac{2^y}{2^2}} = x \\ &\Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{9 - 2^{y-2}} = x \\ &\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt{9 - 2^{y-2}} = x \end{aligned}$$

e, consequentemente, tem domínio

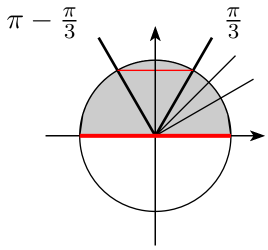
$$D_{f^{-1}} = \{y \in \mathrm{I\!R} : 9 - 2^{y-2} \geq 0\} = \{y \in \mathrm{I\!R} : y \leq 2 + \log_2(9)\} 2 + \log_2(9) = [2 + \log_2(9), +\infty[\,.$$

Tem-se então

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = [0, 3[& \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = [2 + \log_2(9 \\ \sqrt{9 - 2^{y-2}} = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = \log_2(-4x^2+36) \end{array}$$

(c) Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$\tan\Big(\arccos\big(-\frac{1}{2}\big)+x\Big) \;=\; 1$$

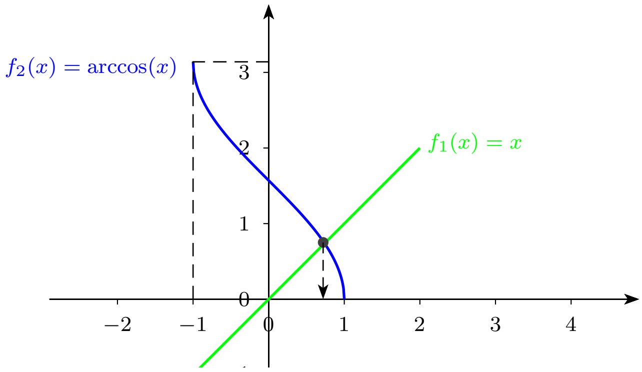


$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \tan\big(\pi - \tfrac{\pi}{3} + x\big) \;=\; 1\\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{2\pi}{3} + x \;=\; \tfrac{\pi}{4} + k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad x \;=\; -\tfrac{2\pi}{3} + \tfrac{\pi}{4} + k\,\pi\\
&\Leftrightarrow \quad x \;=\; -\tfrac{5\pi}{12} + k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

2. (a) Tendo em conta que

$$x - \arccos(x) \;=\; 0 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \;=\; \arccos(x)$$

as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = \arccos(x)\,.$



Então, a equação tem apenas uma solução, que pertence ao intervalo $[0,\,1]$.

(b) Consideremos a função $f(x) \;=\; x - \arccos(x)\,.$

Recorrendo ao método da bissecção, tem-se

n	$[a,\,b]$	x_n	erro máximo	$f(a)$	$f(x_n)$	$f(b)$
1	$[0,\,1]$	0.5	0.5	$f(0) = 0 - \arccos(0) \simeq -1.57$	$f(0.5) = 0.5 - \arccos(0.5) \simeq -0.55$	$f(1) = 1$
2	$[0.5,\,1]$	0.75	0.25	$f(0.5) \simeq -0.55$	$f(0.75) \simeq 0.03$	$f(1) = 1$
3	$[0.5,\,0.75]$	0.625	0.125			

Então, $\overline{x} \;=\; 0.625$ é uma aproximação para a solução, com erro máximo $0.125\,.$

3. (a) Recorrendo às regra R2 das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int x\,\frac{1-x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx \;&=\; \int x\,\frac{1-x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}\,dx\\
&=\; \int x\,(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx\\
&=\; -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x\,(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}_{R2}\,dx\\
&=\; -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c\\
&=\; -\frac{3}{10}\,\sqrt[3]{(1-x^2)^5} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à regra R19 das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x}{4+x^4}\,dx &= \int \frac{3x}{4+(x^2)^2}\,dx \\
&= \int \frac{3x}{4\left(1+\frac{(x^2)^2}{4}\right)}\,dx \\
&= \int \frac{3x}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{3}{4}\underbrace{\int \frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\,dx}_{R19} \\
&= \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

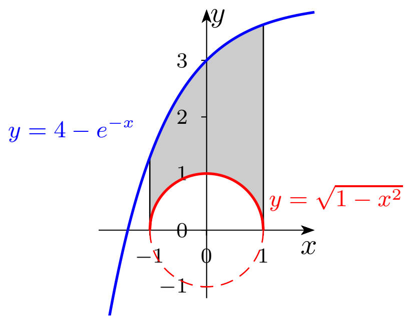
4. Considerando a regra de Simpson e uma partição uniforme do intervalo $[-1,1]$ em 4 sub-intervalos, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{\arccos(x)}_{f(x)}\,dx &\simeq \frac{0.5}{3}\Big(f(-1)+4\,f(-0.5)+2\,f(0)+4\,f(0.5)+f(1)\Big) \\
&= \frac{1}{6}\Big(3.14+4\times 2.09+2\times 1.57+4\times 1.05+0\Big) \\
&\simeq 3.14
\end{aligned}$$

5. (a) Comecemos por determinar as funções que delimitam a região:

- $x=-\ln(-y+4) \quad \Leftrightarrow \quad 4-e^{-x}=y)$
- $x^2+y^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2=1-x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{1-x^2}$

Então



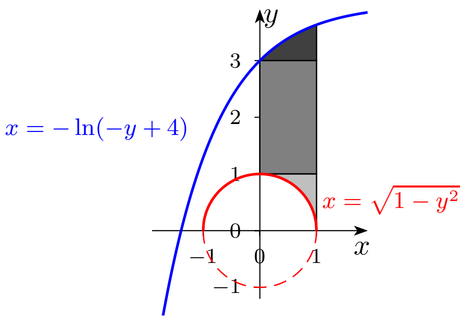
e portanto

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_{-1}^{1} \underbrace{5-e^{-x}}_{f_{sup}} - \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{f_{inf}}\,dx$$

(b) Comecemos por explicitar as curvas que delimitam a região, em função da variável y:

- $x=-\ln(-y+4)$
- $x^2+y^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=1-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{1-y^2}$

Na rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy o sólido gerado pela parte esquerda vai ficar embutida no sólido gerado pela parte direita, pelo que temos que considerar apenas a rotação desta última:

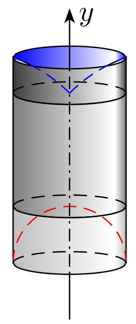


Atendendo a que

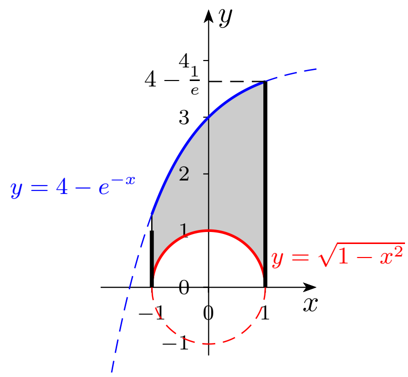
$$x = 1: \quad x = 4 - e^{-1}$$

tem-se então

$$\begin{aligned}
&\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) \\
= \;& \pi \int_0^1 (\underbrace{1}_{R_{ext}})^2 - (\underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{R_{int}})^2 \, dy + \pi \int_1^3 (\underbrace{1}_{R_{ext}})^2 \, dy + \pi \int_1^{4-e^{-1}} (\underbrace{1}_{R_{ext}})^2 - \Big(\underbrace{-\ln(-y+4)}_{R_{ext}}\Big)^2 dy \\
= \;& \pi \int_0^1 y^2 \, dy + \pi \int_1^3 1 \, dy + \pi \int_1^{4-e^{-1}} 1 - \ln^2(-y+4) \, dy \,.
\end{aligned}$$



(c) Tendo em conta a alínea (a) e as fórmulas de geometria elementar, tem-se



Então

$$\begin{aligned}
&\text{Perímetro}(\mathcal{A}) \\
= \;& 1 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[(4 - e^{-x})'\right]^2} \, dx + 4 - e^{-1} + \frac{2\pi \times 1}{2} \\
= \;& 1 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[e^{-x}\right]^2} \, dx + 4 - e^{-1} + \pi \\
= \;& \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + e^{-2x}} \, dx + 5 - e^{-1} + \pi \,.
\end{aligned}$$