**Instituto Superior de Engenharia de Coimbra**
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Teste 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

26 de novembro de 2021 Duração: 1h30m

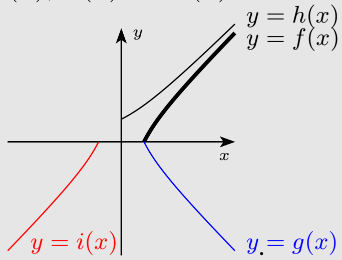
**- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.**

- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. (a) Das simplificações seguintes, identifique as erradas:

i) $\dfrac{2+x}{x} = 2$; ii) $\sqrt{x^2} = |x|$; iii) $\arccos(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

(b) Qual das funções $g(x)$, $h(x)$ ou $i(x)$ é a inversa da função $f(x)$?




(c) Determine o domínio e a expressão analítica da função inversa de $f(x) = 1 + 2\arcsin(3x)$.

(d) Calcule o valor numérico da expressão $\arccos\left(2\sin\left(\dfrac{59\pi}{6}\right)\right)$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $\sin(x) = -x+1$ tem apenas uma solução real, pertencente ao intervalo $[0,1]$.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Partindo da aproximação inicial $x_0 = 0$, efectue 2 iterações do método de Newton para estimar a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize 2 casas decimais em todos os cálculos que realizar.

**Nota:** $\frac{2}{188} \simeq 0.01$, $\frac{84}{154} \simeq 0.55$

[1.5 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{4+9x}{16+25x^2}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

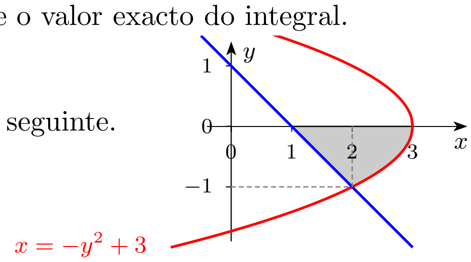
$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Considere o integral definido $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin(x)\,dx$.

i) Determine uma estimativa para o integral, recorrendo à regra dos trapézios e a uma partição em 4 sub-intervalos.

ii) Recorrendo à alínea (a), determine o valor exacto do integral.

[4.5 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.




(a) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{A}$

i) em função da variável $x$; ii) em função da variável $y$.

(b) Usando integrais, calcule o volume da região que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo $Ox$.

(c) Identifique, justificando, a medida explicitada pela expressão $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4(-x+3)}}\,dx$.

**Coimbra Institute of Engineering**
DEPARTMENT OF PHYSICS AND MATHEMATICS

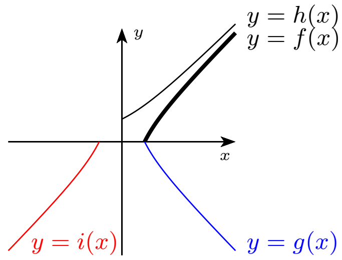
CALCULUS I - Informatics Engineering - test 1

November 26th, 2021 1h30m

[2.0 *val.*] 1. (a) From the following sentences, identify the wrong ones:

i) $\dfrac{2+x}{x} = 2$;  ii) $\sqrt{x^2} = |x|$;  iii) $\arccos(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

(b) Which of the functions $g(x)$, $h(x)$ or $i(x)$ is the inverse function of $f(x)$?




(c) Define the domain and the analytical expression of the inverse function of

$$f(x) = 1 + 2\arcsin(3x).$$

(d) Perform the numerical value of $\arccos\left(2\sin\left(\dfrac{59\pi}{6}\right)\right)$.

[1.0 *val.*] 2. The equation $\sin(x) = -x+1$ has only one solution, on the interval $[0,1]$.

(a) Using graphical method, prove the previous statement.

(b) Using the initial approximation $x_0 = 0$, perform 2 iterations of Newton's method to estimate the solution of the equation. Present an upper bound for the error of this estimate and use 2 decimal places on all your calculations.
**Remark:** $\frac{2}{188} \simeq 0.01$, $\frac{84}{154} \simeq 0.55$

[1.5 *val.*] 3. Perform the following indefinite integrals:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx$;  b) $\displaystyle\int \frac{4+9x}{16+25x^2}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. (a) Using indefinite integral definition, prove that

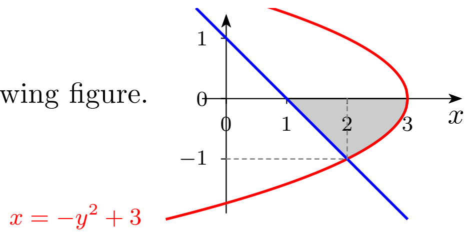
$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consider the definite integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin(x)\,dx$.

i) Using trapezoidal rule and 4 sub-intervals, determine an estimate for the definite integral.

ii) Using result from paragraph (a), determine the exact value of the definite integral.

[4.5 *val.*] 5. Consider the region $\mathcal{A}$ presented in the following figure.




(a) Using definite integrals, determine simplified analytical expressions that allow to determine the area of the region $\mathcal{A}$

i) using the variable $x$;  ii) using the variable $y$.

(b) Using definite integrals, determine the volume of the solid obtained by rotating the region $\mathcal{A}$ about $x$-axis.

(c) Identify the measure defined by the definite integral $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{1+\frac{1}{4(-x+3)}}\,dx$. Justify.

1. (a) As simplificações (i) e (iii) estão erradas.

   (b) O gráfico da função inversa de $f(x)$ é $h(x)$, porque é o gráfico simétrico do de $f(x)$, relativamente à recta $y = x$.

   (c) Começamos por notar que a função $f$ é injectiva e portanto é invertível. A função inversa tem expressão analítica dada por

$$\begin{aligned} y = 1 + 2\arcsin(3x) &\Leftrightarrow y - 1 = 2\arcsin(3x) \\ &\Leftrightarrow \frac{y-1}{2} = \arcsin(3x) \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{y-1}{2}\right) = 3x\,, \quad \text{desde que } \frac{y-1}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sin\left(\frac{y-1}{2}\right) = x\,. \end{aligned}$$

   e, consequentemente, tem domínio

$$D_{f^{-1}} = \{y \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} \leq \frac{y-1}{2} \leq \frac{\pi}{2}\} = \{y \in \mathbb{R} : -\pi \leq y - 1 \leq \pi\} = [1-\pi,\, 1+\pi]\,.$$

   (d) Tendo em conta a periodicidade da função seno e respectiva restrição principal, tem-se

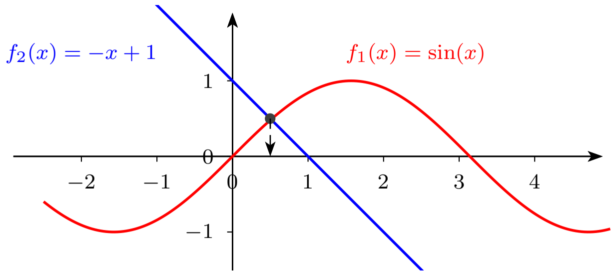
$$\begin{aligned} \arccos\left(2\sin\left(\frac{59\pi}{6}\right)\right) &= \arccos\left(2\sin\left(10\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \arccos\left(2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \arccos\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \arccos(-1) \\ &= \pi\,. \end{aligned}$$

   .

2. (a) Tendo em conta que

$$\sin(x) = -x + 1$$

   as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x) = \sin(x)$ e $f_2(x) = -x + 1$.




   (b) Consideremos a função $f(x) = \sin(x) + x - 1$. Então, $f'(x) = \cos(x) + 1$, pelo que

| $n$ | $x_n$ | erro |
|---|---|---|
| 0 | $x_0 = 0$ | – |
| 1 | $x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{\sin(0)+0-1}{\cos(0)+1} = 0.5$ | 0.5 |
| 2 | $x_2 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} = 0.5 - \frac{\sin(0.5)+0.5-1}{\cos(0.5)+0.5} \simeq 0.5 - \frac{0.48-0.5}{0.88+1} = 0.5 + \frac{0.02}{1.88} \simeq 0.51$ | 0.01 |

   Então, $\overline{x} = 0.51$ é uma aproximação para a solução, com erro aproximado de $0.01$.

3. (a) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx \;=\; \int \underbrace{\frac{1}{x}\Big(\ln(x)\Big)^{\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \;=\; \frac{\Big(\ln(x)\Big)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c \;=\; \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3(x)}+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

(b) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{4+9x}{16+25x^2}\,dx &= 4\int \frac{1}{16+25x^2}\,dx + 9\int \frac{x}{16+25x^2}\,dx \\
&= 4\int \frac{1}{16\left(1+\frac{25x^2}{16}\right)}\,dx + \frac{9}{50}\int \underbrace{\frac{50x}{16+25x^2}}_{R2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{4}{5}\int \underbrace{\frac{\frac{5}{4}}{1+\left(\frac{5x}{4}\right)^2}}_{R19}\,dx + \frac{9}{50}\,\ln(16+25x^2)+c \\
&= \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{5x}{4}\right) + \frac{9}{50}\,\ln(16+25x^2)+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4. (a) Basta verificar que a derivada de $x\,\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+c$ é $\arcsin(x)$:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\Big(x\,\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+c\Big)'}_{R4+R3} \\
&= \underbrace{\Big(x\,\arcsin(x)\Big)'}_{R5} + \underbrace{\Big(\sqrt{1-x^2}\Big)'}_{R7} + \underbrace{(c)'}_{R1} \\
&= \underbrace{(x)'}_{R2}\,\arcsin(x) + x\,\underbrace{\big(\arcsin(x)\big)'}_{R19+R2} + \frac{1}{2}\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\;+\;0 \\
&= \arcsin(x) + x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \arcsin(x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

(b) i) Considerando a regra dos trapézios e uma partição uniforme do intervalo $[-1,1]$ em 4 sub-intervalos, tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \underbrace{\arcsin(x)}_{f(x)}\,dx \\
&\simeq \frac{0.5}{2}\Big(f(-1)+2\,f(-0.5)+2\,f(0)+2\,f(0.5)+f(1)\Big) \\
&= 0.25\Big(\arcsin(-1)+2\,\arcsin(-0.5)+2\,\arcsin(0)+2\,\arcsin(0.5)+\arcsin(1)\Big) \\
&= 0.25\Big(-\frac{\pi}{2}+2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+0+2\,\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\Big) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

ii) Tendo em conta o resultado da alínea (a), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \arcsin(x)\,dx &= \Big[x\,\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}\Big]_{-1}^{1} \\
&= \arcsin(1)+0-\Big(-\arcsin(-1)+0\Big) \\
&= \frac{\pi}{2}+\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

5. (a) i) Começamos por notar que a recta que delimita um dos sectores da fronteira é definida por

- $y = -x + 1$

Então,

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_1^2 \underbrace{0}_{f_{sup}} - \underbrace{\big(-x+1\big)}_{f_{inf}}\, dx + \int_2^3 \underbrace{0}_{f_{sup}} - \underbrace{\big(-\sqrt{-x+3}\big)}_{f_{inf}}\, dx \\
&= \int_1^2 x - 1\, dx + \int_2^3 \sqrt{-x+3}\, dx\,.
\end{aligned}
$$

ii) Comecemos por explicitar as curvas que delimitam a região, em função da variável $y$:

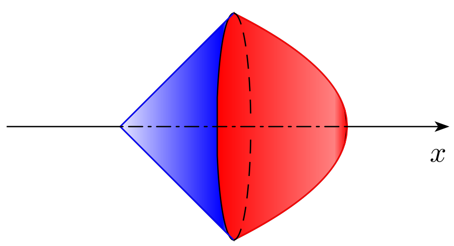
- $y = -\sqrt{-x+3} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = -x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 - y^2$
- $y = -x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - y$

Então

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-1}^0 \underbrace{3 - y^2}_{f_{sup}} - \underbrace{(1-y)}_{f_{inf}}\, dy \\
&= \int_{-1}^0 -y^2 + y + 2\, dy
\end{aligned}
$$

(b) O volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo $Ox$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \pi \int_1^2 \Big(\underbrace{-x+1}_{R_{ext}}\Big)^2 dx \;+\; \pi \int_2^3 \Big(\underbrace{-\sqrt{-x+3}}_{R_{ext}}\Big)^2 dx \\
&= -\pi \int_1^2 -(-x+1)^2\, dx \;+\; \pi \int_2^3 -x + 3\, dx \\
&= -\pi \left[\frac{(-x+1)^3}{3}\right]_1^2 \;+\; \pi \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_2^3 \\
&= -\frac{\pi}{3}\Big(-1+0\Big) \;+\; \pi\left(\frac{-9}{2} + 9 - (-2+6)\right) \\
&= \frac{5\pi}{6}\,.
\end{aligned}
$$




A expressão representa o comprimento da lado referente à parábola, que delimita a região $\mathcal{A}$:

$$
\begin{aligned}
\text{comprimento} &= \int_2^3 \sqrt{1 + \Big[\big(-\sqrt{-x+3}\big)'\Big]^2}\, dx \\
&= \int_2^3 \sqrt{1 + \Big[\frac{1}{2}(-x+3)^{-\frac{1}{2}}\Big]^2}\, dx \\
&= \int_2^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4(-x+3)}}\, dx\,.
\end{aligned}
$$