

# Mapas de Karnaugh



# Introdução

Os **mapas de Karnaugh** constituem outro tipo de representação das **funções lógicas**. Estes mapas permitem obter, de forma quase totalmente sistemática e relativamente expedita, as **expressões mínimas** das mesmas.

Se a função lógica a representar no **mapa de Karnaugh** tiver  **$n$  variáveis**, o mapa terá  **$2^n$  células**.

As células são dispostas de modo a possibilitar a aplicação mecânica do **teorema da adjacência lógica (T12)**. Ou seja, os termos aos quais é possível aplicar o referido teorema, são colocados em células adjacentes.

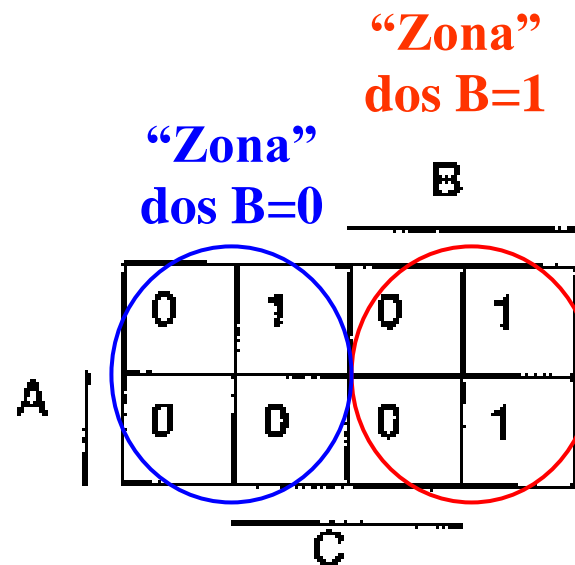


## Exemplo

Considere-se a seguinte função expressa na **forma canónica soma de produtos**:

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.B.\overline{C}$$

A sua representação no mapa é a seguinte:





Os dois últimos termos desta função podem simplificar-se pelo teorema T12:

$$\overline{A}.B.\overline{C} + A.B.\overline{C} = B.\overline{C}$$

No mapa, corresponde a associar estes termos da seguinte forma:

	<b>B</b>			
	0	1	0	1
<b>A</b>	0	0	0	1
	<b>C</b>			

Este 1 não pode ser associado a mais nenhum  $\Rightarrow$  A adjacência lógica não pode ser aplicada outra vez na função dada. A função simplificada pode agora ler-se do mapa:

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + B.\overline{C}$$



No mapa anterior, a correspondência entre as células e os possíveis termos da função na forma canónica soma de produtos, é a seguinte:

		<b>B</b>				
		<hr/>				
		$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$	$\bar{A}.\bar{B}.C$	$\bar{A}.B.C$	$\bar{A}.B.\bar{C}$	
<b>A</b>		$A.\bar{B}.\bar{C}$	$A.\bar{B}.C$	$A.B.C$	$A.B.\bar{C}$	
		$A.\bar{B}.\bar{C}$	$A.\bar{B}.C$	$A.B.C$	$A.B.\bar{C}$	
		<hr/>				
		<b>C</b>				

Podem numerar-se as células dos **mapas de Karnaugh** e atribuir números às representações dos termos nas tabelas de verdade  $\Rightarrow$  facilita o preenchimento dos mapas a partir destas últimas.



## Regra (1, 2, 4, 3)

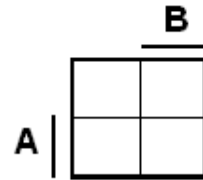
	A	B	C	F
<b>1</b>	0	0	0	0
<b>2</b>	0	0	1	1
<b>3</b>	0	1	0	1
<b>4</b>	0	1	1	0
<b>5</b>	1	0	0	0
<b>6</b>	1	0	1	0
<b>7</b>	1	1	0	1
<b>8</b>	1	1	1	0

	<b>B</b>			
	1	2	4	3
<b>A</b>	5	6	8	7
	<b>C</b>			

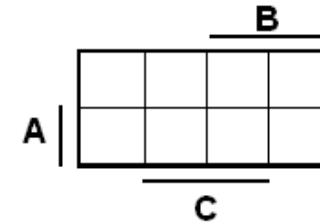


# Mapas para funções de 2, 3, 4 e 5 variáveis

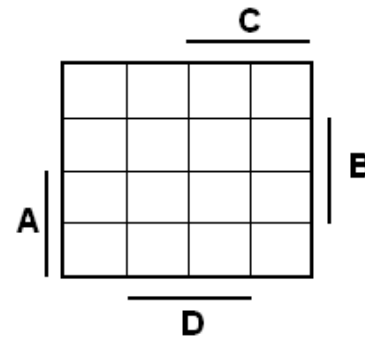
**2 variáveis**



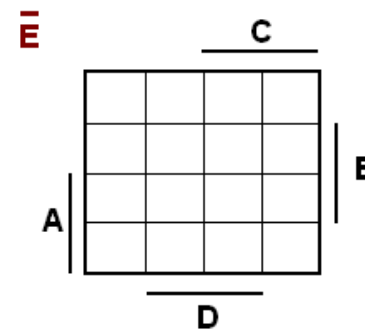
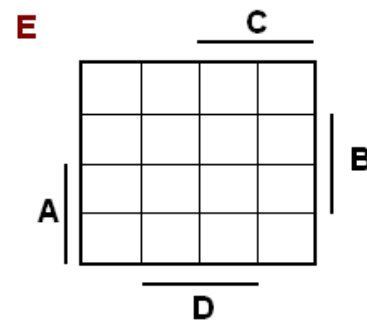
**3 variáveis**



**4 variáveis**



**5 variáveis**





## Simplificação de funções

Antes de mais, considere-se a seguinte definição:

**Grupo de adjacência** - grupo de termos que contém ocorrências idênticas de uma parte das variáveis, tomando as restantes, todas as possíveis combinações de ocorrências.

Devido ao modo como um mapa está organizado, um **grupo de adjacência** é composto por **1's** em posições justapostas e em número de uma **potência de 2**.

Apresentam-se em seguida alguns exemplos de **grupos de adjacência** em mapas com **4** e **5** variáveis.

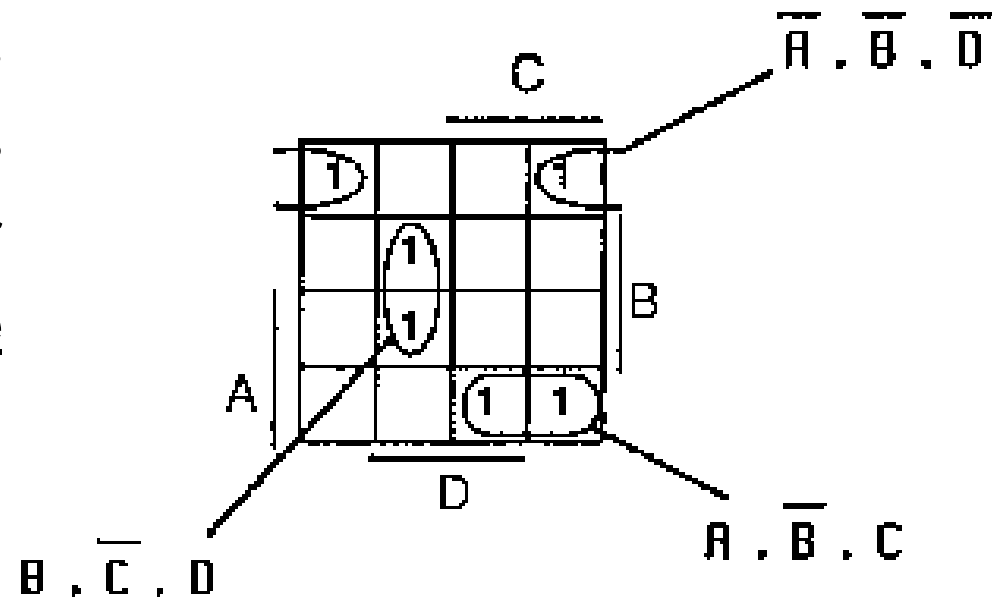




## Exemplos de grupos de adjacência em mapas de 4 variáveis

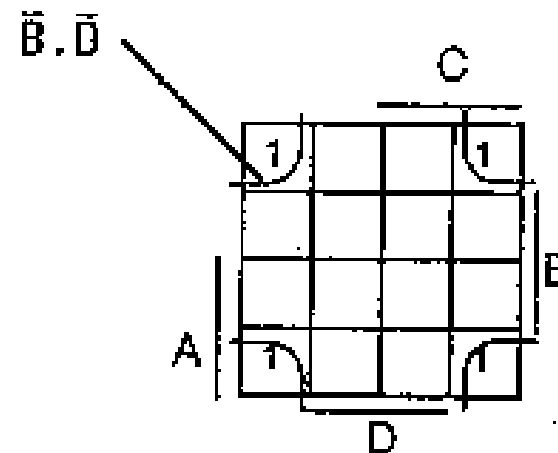
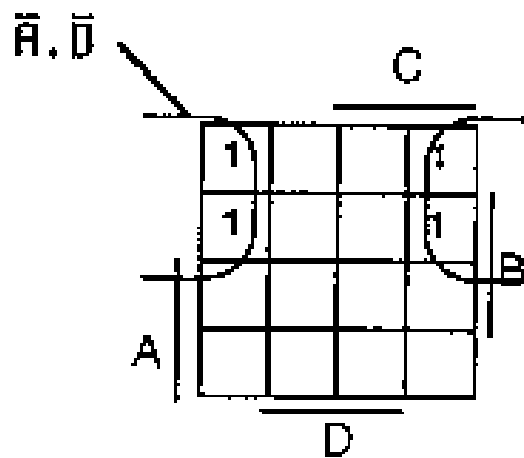
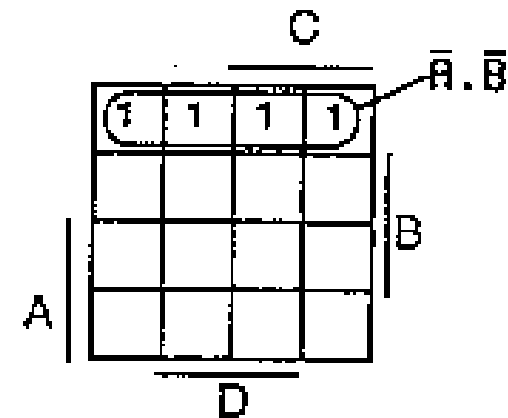
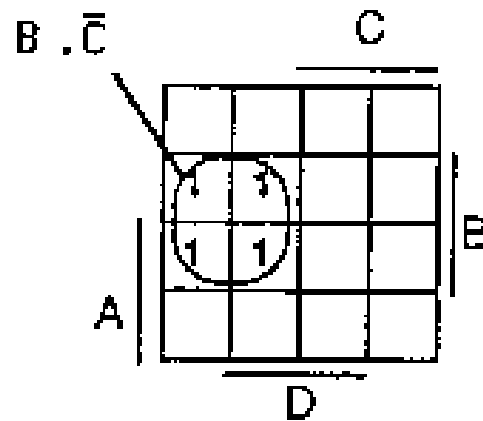
### ➤ Grupos de 2 células:

Os 1's situados nos cantos são adjacentes uns aos outros: um mapa tem de ser visto como “enrolado sobre si próprio” transversal e longitudinalmente.



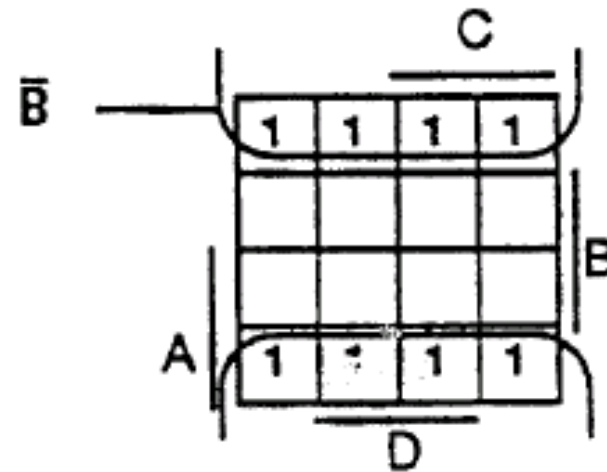
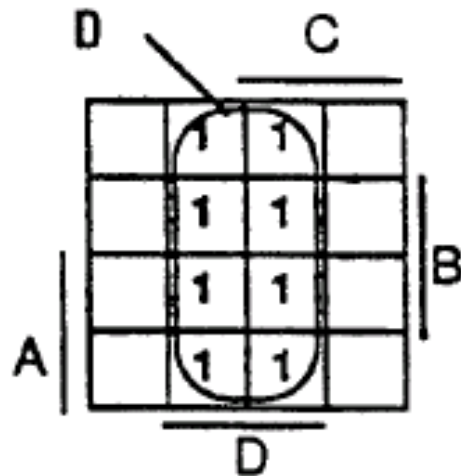


➤ Grupos de 4 células:



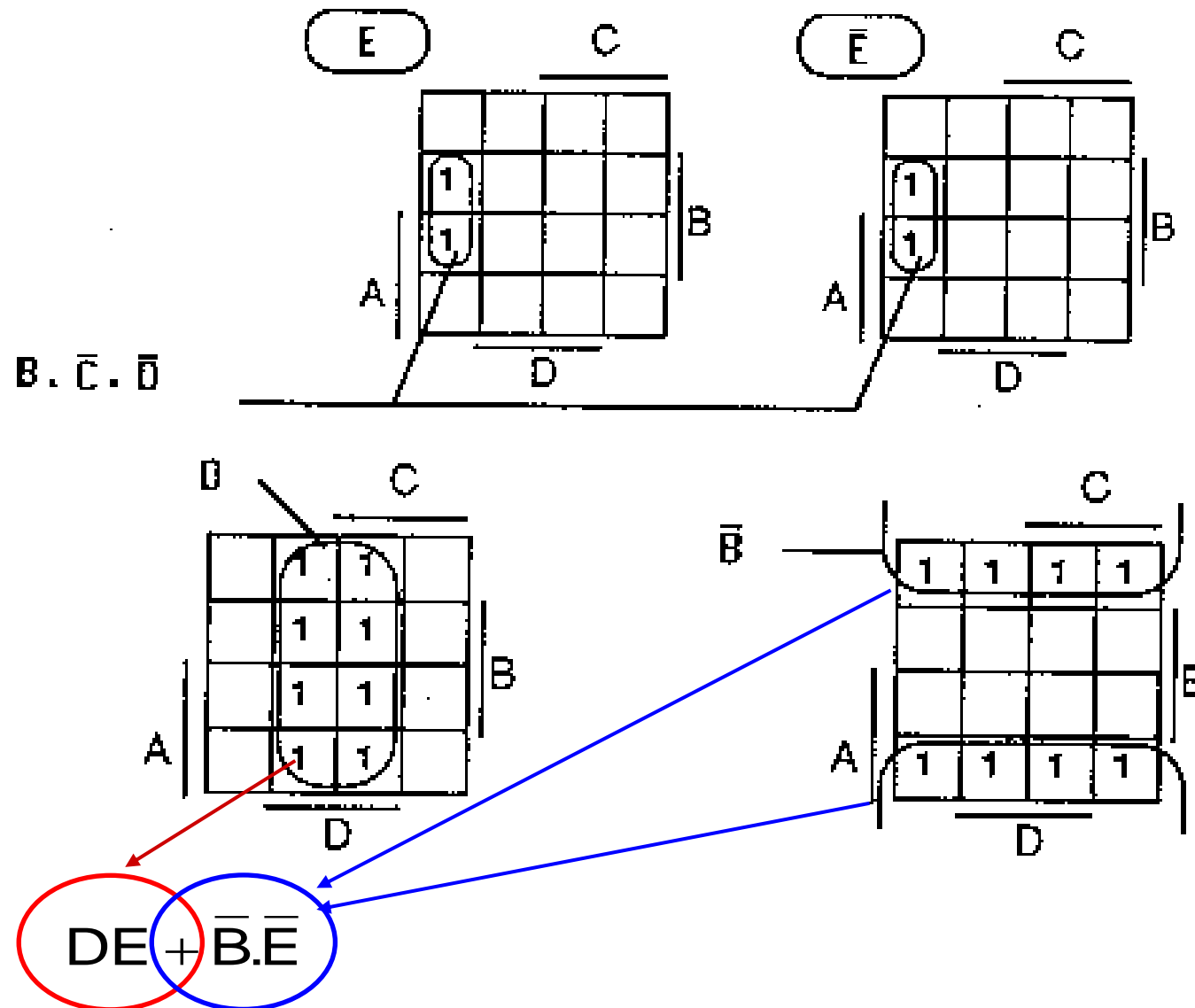


➤ Grupos de 8 células:





## Exemplos de grupos de adjacência em mapas de 5 variáveis





## Obtenção da forma mínima soma de produtos

A utilização mais comum dos **mapas de karnaugh**, é na obtenção da **forma mínima soma de produtos** para uma função.

Para tal, os **1's** existentes no mapa devem ser agrupados em **grupos de adjacência** (cujo tamanho é igual a uma potência de 2), tendo em conta os seguintes aspectos:

- Quanto **maior for o grupo de adjacência**, mais **simplificada** fica a expressão lógica correspondente;
- Quanto **menor for o número de grupos de adjacência**, menos **termos** terá a correspondente expressão.



## Condições indiferentes (*Don't care conditions*)

Algumas funções lógicas podem, por vezes, assumir indiferentemente o valor **0** ou **1**, para algumas combinações das suas variáveis de entrada:



Ou porque essas combinações nunca podem ocorrer;

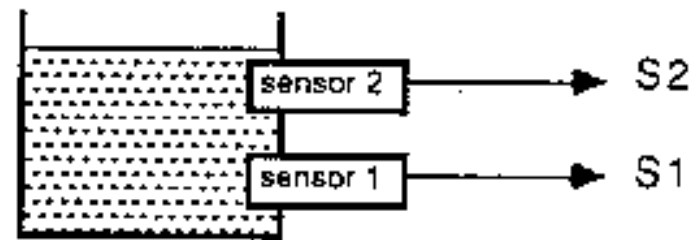


Ou porque as saídas do circuito, para essas combinações, nunca são utilizadas.

### Exemplos

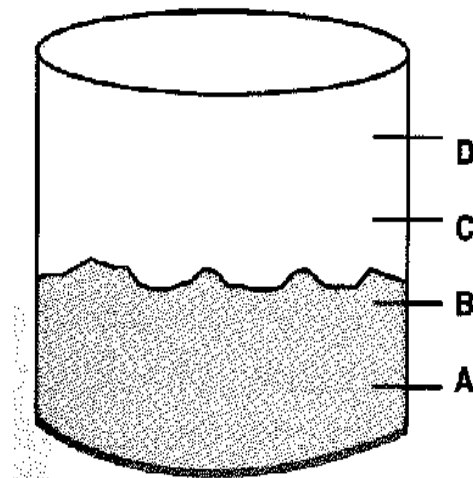
#### Tanque com sensores de nível

→ A combinação  $S1=0$  e  $S2=1$  nunca pode ocorrer.





## Circuito para detectar quando o nível de líquido se encontra entre B e C



**DCBA**

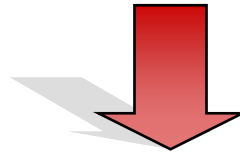
0 0 0 0  
0 0 0 1  
0 0 1 1  
0 1 1 1  
1 1 1 1

*Um detector é activado  
(=1) quando o líquido  
atinge o nível do mesmo.*

D	C	B	A	OUT
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	X
0	0	1	1	1
0	1	0	0	X
0	1	0	1	X
0	1	1	0	X
0	1	1	1	0
1	0	0	0	X
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	0



No exemplo anterior verificou-se que, para certas combinações de entradas, a **saída era indiferente** - o valor da saída nestas condições não afecta a funcionalidade do circuito.

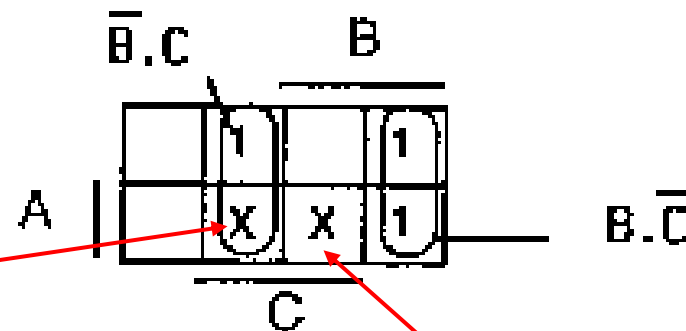


A uma saída de valor indiferente pode atribuir-se o valor **0** ou **1**, consoante seja mais vantajoso para a simplificação da função.





Os **valores indiferentes** das saídas representam-se por um “X” no **mapa de Karnaugh** ou na **tabela de verdade**.



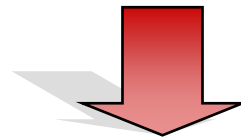
Este **X** considerou-se como sendo **1** para ficar adjacente ao outro **1**, permitindo uma redução na variável **A**.

Se este **X** fosse considerado como **1** geraria um termo adicional desnecessário. Portanto, considera-se como **0** para não ter de ser associado.



## Mapas reduzidos

Os mapas de Karnaugh com mais de 5 variáveis são difíceis de manipular pois precisam de ser representados em vários “planos”.



Os **mapas reduzidos** (ou *variable-entered maps* – **VEM**) permitem ultrapassar esta dificuldade: são mapas de Karnaugh em que o nº de células é ainda uma potência de 2 mas inferior a  $2^n$  ( $n$  = nº de variáveis da função).



Se “entrar” uma variável no mapa → **redução** do nº de células para **metade**



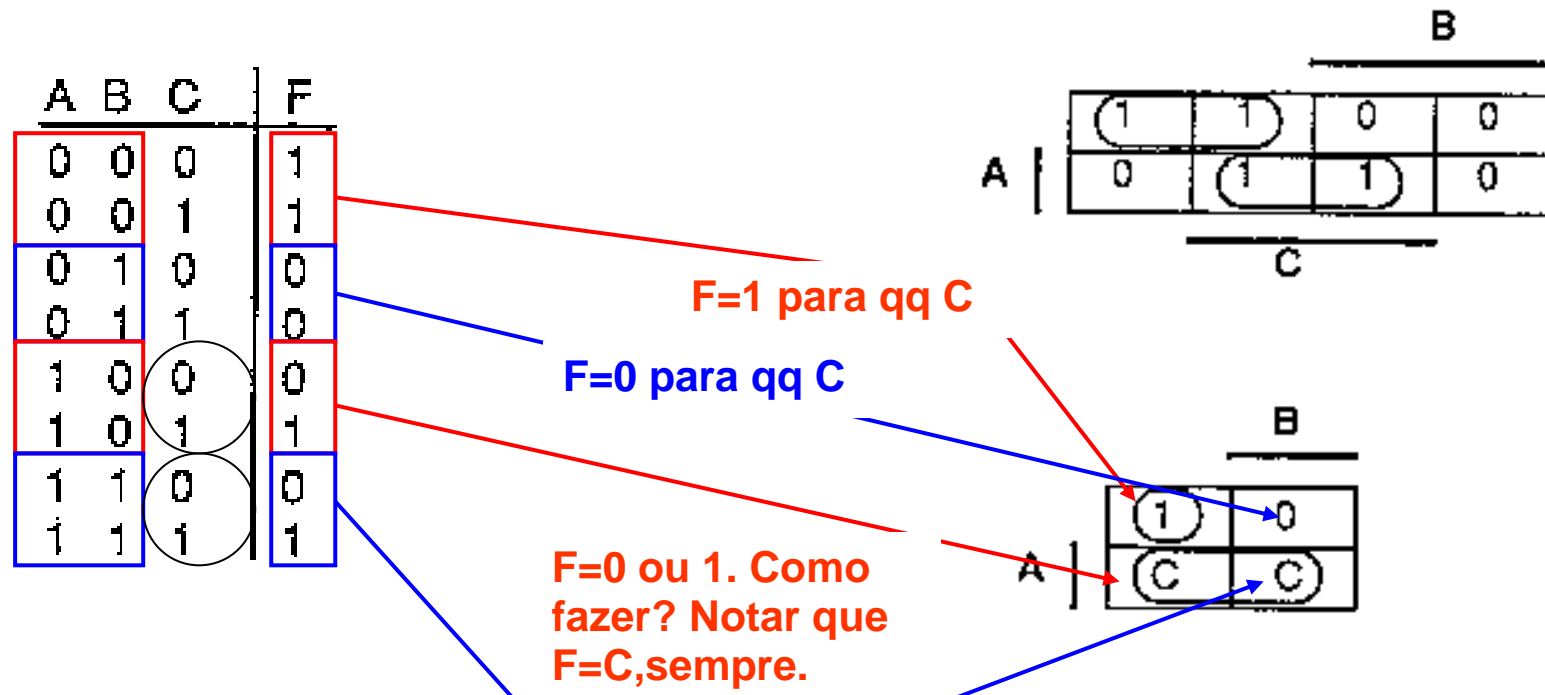
Se “entrarem” duas variáveis no mapa → **redução** do nº de células para **um quarto**



Um **mapa reduzido** contém, para além de valores **0** e **1**, **variáveis lógicas** da função ou mesmo uma **expressão de várias variáveis**.

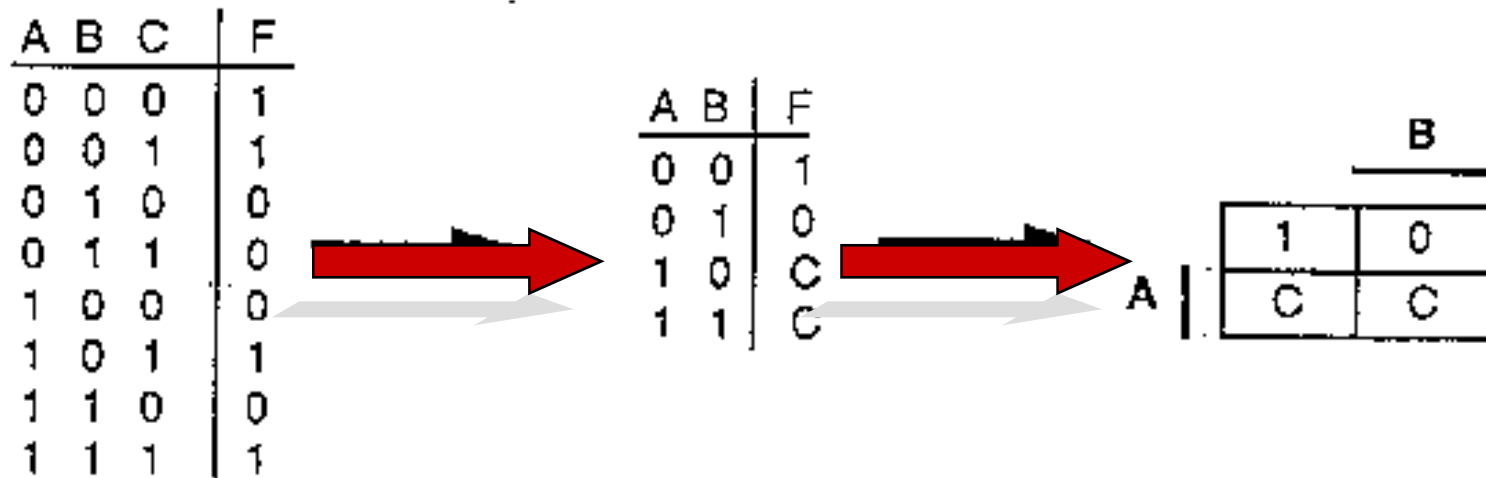
## Exemplo

Redução do mapa de 8 células para metade, fazendo a variável **C** “entrar” no mapa:



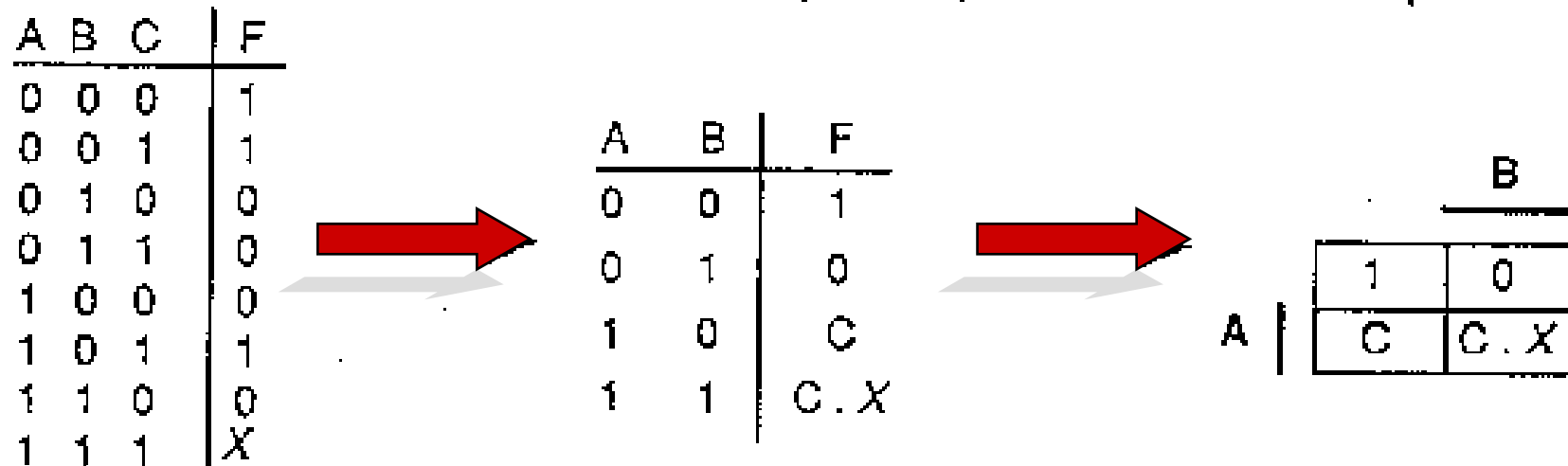


Para preencher um **mapa reduzido**, pode começar-se por construir uma **tabela de verdade reduzida**:





Obtenção de um mapa reduzido quando a tabela original contém **condições indiferentes**:



C.X: Se  $C = 1$ , F tem um valor opcional  
Se  $C = 0$ , F tem valor 0



Obtenção de um **mapa reduzido** com 2 variáveis (**C** e **D**) a “entrarem” no mapa:

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



A	B	F
0	0	$\overline{C} \cdot D$
0	1	$\overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot D + C \cdot \overline{D}$
1	0	$\overline{C} \cdot D$
1	1	$\overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot D + C \cdot D$



## Leitura de mapas reduzidos na forma mínima soma de produtos

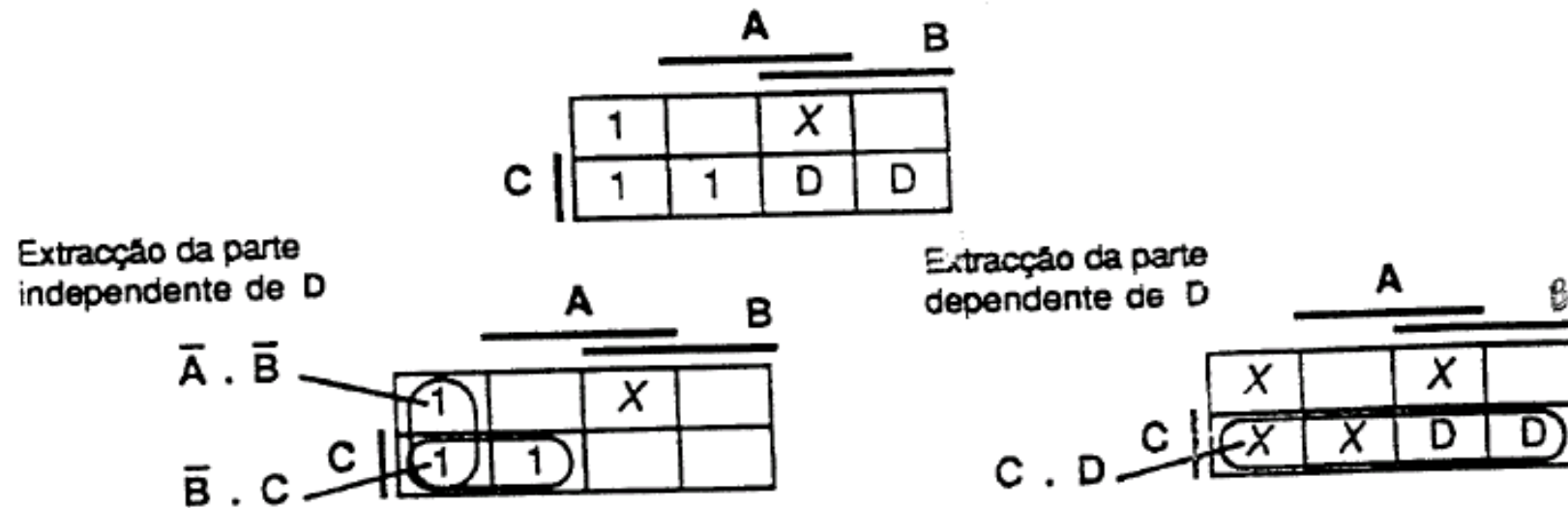
- **Caso em que existe apenas uma variável “entrada” no mapa, com todas as ocorrências da mesma polaridade**

Se for **D** essa variável:

- **1ª Fase:** Extração da **parte não dependente** de **D** (substituir a variável “entrada” por “0”)
- **2ª Fase:** Extração da **parte dependente** de **D** (“1s” e “Xs” passam a ser considerados opcionais)



## Exemplo



A expressão de **F** na **forma mínima soma de produtos** é:

$$F = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot C + C \cdot D$$





- **Caso em que existe apenas uma variável “entrada” no mapa, com ocorrência das duas polaridades**

Se for **E** essa variável:

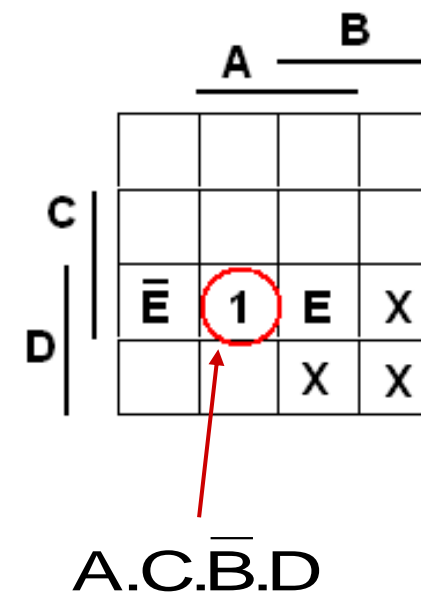
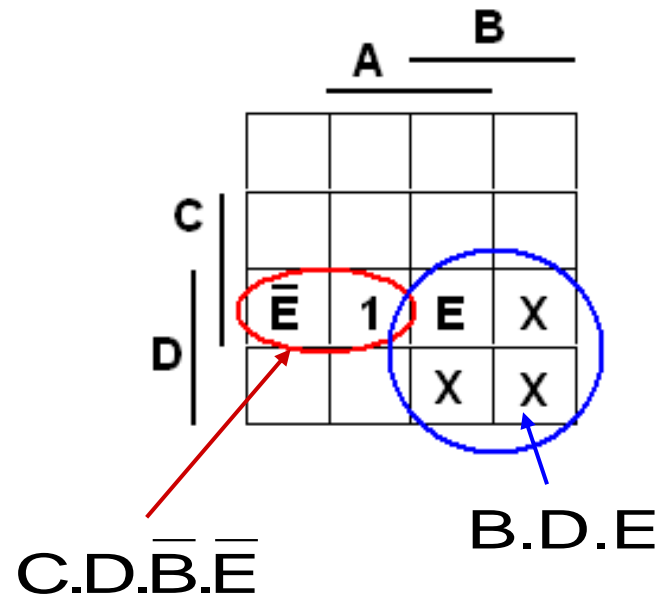
- **1ª Fase:** Extrair primeiro a **parte dependente** dessa variável
- **2ª Fase:** Extrair a **parte não dependente** de **E** (substituir a variável “entrada” por “0”)



## Exemplo

Parte dependente de E

		A		B
C	D			
		$\bar{E}$	1	E
				X
			X	X



$$F = C.D.\bar{B}.\bar{E} + B.D.E + A.C.\bar{B}.D$$

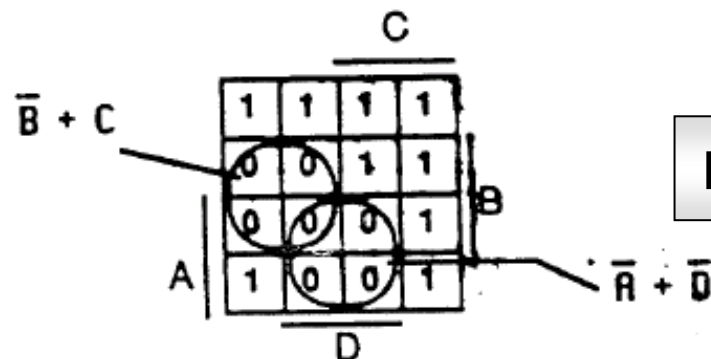


# Leitura de mapas de Karnaugh na forma mínima produto de somas

A partir dos **mapas de Karnaugh**, também é possível extrair uma função na **forma mínima produto de somas**:

- Agrupam-se os **0's** (da mesma forma que se agrupam os **1's** na **forma mínima soma de produtos**)
- Resultam factores em que as ocorrências das variáveis aparecem negadas

## Exemplo



$$F = (\overline{B} + C).(\overline{A} + \overline{D})$$