Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (parte 1) - Engenharia Informática

28 de janeiro de 2022 Duração: 1h15m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta aos grupos 1 a 4.
- A resposta às questões do grupo 1 não carece de justificação e será atribuída cotação de zero valores caso o aluno erre 3 ou mais alíneas.
- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[0.5 *val.*] 1. (a) Identifique a igualdade que é válida em $\mathbb{R}$:

i) $\dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}$;

ii) $\sqrt{1-x^2} = 1-x$;

iii) $(a+b)^2 = a^2+b^2$;

iv) $\sqrt{x^4} = x^2$.

[0.5 *val.*] (b) Identifique a proposição verdadeira:

i) $\arcsin(1) = \dfrac{1}{\sin(1)}$;

ii) $\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \arcsin(1)$;

iii) $\arccos(0.5) = -\dfrac{\pi}{3}$;

iv) $\arccos(-0.5) = \dfrac{2\pi}{3}$;

[0.5 *val.*] (c) A função inversa de $f(x) = 3+\ln(2x-5)$ é:

i) $g(x) = \dfrac{1}{3+\ln(2x-5)}$;

ii) $g(x) = -3-\ln(-2x+5)$;

iii) $g(x) = \dfrac{1}{2}(5+e^{x-3})$;

iv) nenhuma das anteriores.

[0.5 *val.*] (d) (CORRIGIDO) A restrição principal da função $f(x) = \sin(2x-\pi)$ é:

i) $]-\infty, +\infty[$;

ii) $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

iii) $]0, \pi[$;

iv) $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $\sqrt{x} - \cos(x) = 0$ tem apenas uma solução real, pertencente ao intervalo $[0, 1]$.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Efectue 2 iterações do método da bisseção, para determinar uma estimativa para a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize 2 casas decimais em todos os cálculos que realizar.

[2.0 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{36-9x^2}}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

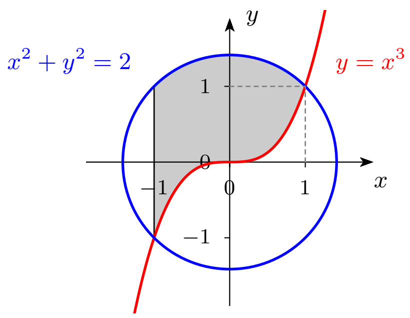
$$\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Considere o integral definido $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arccos(x)\,dx$.

i) Determine uma estimativa para o integral, recorrendo à regra de Simpson (simples).

ii) Recorrendo à alínea (a), determine o valor exacto do integral.

[4.0 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Usando integrais, indique uma expressão simplificada para a área de $\mathcal{A}$.

(b) Usando integrais, calcule o volume da região que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox.

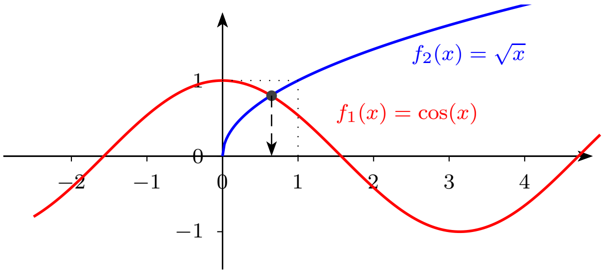
(c) Identifique, justificando, uma expressão simplificada para o comprimento da curva definida por $y = x^3$ entre os pontos de abcissas $x = -1$ e $x = 1$.

1. (a) Opção (iv).
   (b) Opção (iv).
   (c) Opção (iii).
   (d) Opção (iv).

2. (a) Tendo em conta que

$$\sqrt{x} - \cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \cos(x)$$

as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x) = \sqrt{x}$ e $f_2(x) = \cos(x)$.



(b) Consideremos a função $f(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$. Então

n	$[a,b]$	x_n	erro	$f(a)$	$f(x_n)$	$f(b)$
1	$[0,1]$	$x_1 = 0.5$	0.5	$f(0) = -1$	$f(0.5) = -0.17$	$f(1) = 0.46$
2	$[0.5,1]$	$x_2 = 0.75$	0.25	$f(0.5) = -0.17$	$f(0.75) = 0.13$	$f(1) = 0.46$

Então, $\overline{x} = 0.75$ é uma aproximação para a solução, com erro máximo de 0.25.

3. a) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\int \frac{\sqrt{4x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 2\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = 2\int \underbrace{x^{\frac{1}{6}}}_{R2}\,dx = 2\,\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + c = \frac{12}{7}\sqrt[6]{x^7} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

b) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{\sqrt{36-9x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{36-9x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{36-9x^2}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{36\left(1-\frac{9x^2}{36}\right)}}\,dx + \int x\left(36-9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{6}\int \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}_{R18}\,dx - \frac{1}{18}\int \underbrace{-18x\left(36-9x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{18}\,\frac{\left(36-9x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
&= \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{9}\sqrt{36-9x^2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4. (a) Basta verificar que a derivada de $\quad x\,\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+c \quad$ é $\quad \arccos(x):$

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\Big(x\,\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+c\Big)'}_{R4+R3}\\
=\ &\underbrace{\Big(x\,\arccos(x)\Big)'}_{R5}-\underbrace{\Big(\sqrt{1-x^2}\Big)'}_{R7}+\underbrace{(c)'}_{R1}\\
=\ &\underbrace{(x)'}_{R2}\,\arccos(x)+x\,\underbrace{\big(\arccos(x)\big)'}_{R19+R2}-\frac{1}{2}\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\;+\;0\\
=\ &\arccos(x)+x\,\Big(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big)+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\
=\ &\arccos(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\
=\ &\arccos(x)\quad\checkmark
\end{aligned}
$$

(b) i) Considerando a regra de Simpson (simples) no intervalo $[-1,1]$, tem-se $h=1$ e

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\underbrace{\arccos(x)}_{f(x)}\,dx\\
\simeq\ &\frac{1}{3}\Big(f(-1)+4\,f(0)+f(1)\Big)\\
=\ &\frac{1}{3}\Big(\arccos(-1)+4\,\arccos(0)+\arccos(1)\Big)\\
=\ &\frac{1}{3}\Big(\pi+4\,\frac{\pi}{2}+0\Big)\\
=\ &\pi\,.
\end{aligned}
$$

ii) Tendo em conta o resultado da alínea (a), tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\arccos(x)\,dx\ &=\ \Big[x\,\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}\Big]_{-1}^{1}\\
&=\ \arccos(1)-\sqrt{0}-\Big(-\arccos(-1)-\sqrt{0}\Big)\\
&=\ \pi\,.
\end{aligned}
$$

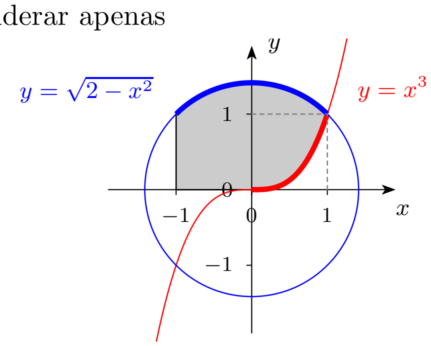
5. (a) Começamos por notar que a recta que delimita um dos sectores da fronteira é definida por

- $x^2+y^2=2 \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{2-x^2} \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{2-x^2}$

Então,

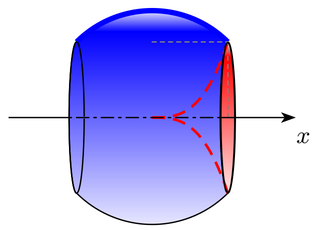
$$
\text{Área}(\mathcal{A}) \;=\; \int_{-1}^{1}\underbrace{\sqrt{2-x^2}}_{f_{sup}}-\underbrace{x^3}_{f_{inf}}\,dx\,.
$$

(b) Uma vez que na rotação em torno do eixo Ox existirá uma sobreposição parcial da parte esquerda, vamos considerar apenas

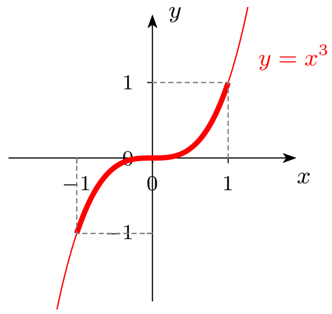


Então, o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \pi \int_{-1}^{0} \Big(\underbrace{\sqrt{2-x^2}}_{R_{ext}}\Big)^2 - \Big(\underbrace{0}_{R_{ext}}\Big)^2 dx \,+\, \pi \int_{0}^{1} \Big(\underbrace{\sqrt{2-x^2}}_{R_{ext}}\Big)^2 - \Big(\underbrace{x^3}_{R_{ext}}\Big)^2 dx \\
&= \pi \int_{-1}^{0} 2 - x^2 \, dx \,+\, \pi \int_{0}^{1} 2 - x^2 - x^6 \, dx \\
&= \pi \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} \,+\, \pi \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right]_{0}^{1} \\
&= \pi \Big(0 - \big(-2 + \frac{1}{3}\big)\Big) \,+\, \pi \Big(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - 0\Big) \\
&= \pi \, \frac{5}{3} + \pi \, \frac{32}{21} \\
&= \frac{67}{21}\, \pi \, .
\end{aligned}$$



(c) O comprimento da linha pretendida, representada na figura seguinte, é



$$\text{comprimento} \;=\; \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[\left(x^3\right)'\right]^2}\, dx \;=\; \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[3x^2\right]^2}\, dx \;=\; \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 9x^4}\, dx \, .$$