Álgebra de Boole

Introdução

Conforme referido anteriormente, a maioria dos circuitos digitais opera em modo binário, ou seja, os dados de entrada e de saída são **0**s ou **1**s.

Esta característica dos circuitos digitais, permite a utilização da **álgebra de Boole** como uma ferramenta de análise e projecto de sistemas digitais.

Trata-se de uma ferramenta matemática relativamente simples, que permite descrever as relações entre as entradas e saídas dos referidos circuitos, na forma de equações algébricas.

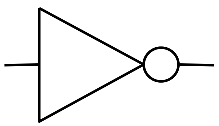
Variáveis e funções lógicas

Variável lógica - tem por domínio 2 valores lógicos distintos: **0** e **1**.

Função lógica - função de variáveis lógicas, que tem como contradomínio o conjunto lógico {**0**,**1**}.

Funções lógicas elementares

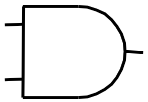
- **Negação ou Inversão**



$$F(A) = \overline{A}$$

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

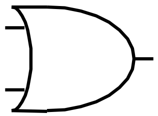
Intersecção ou Produto Lógico



$$F(A,B) = A.B$$

A	B	A . B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

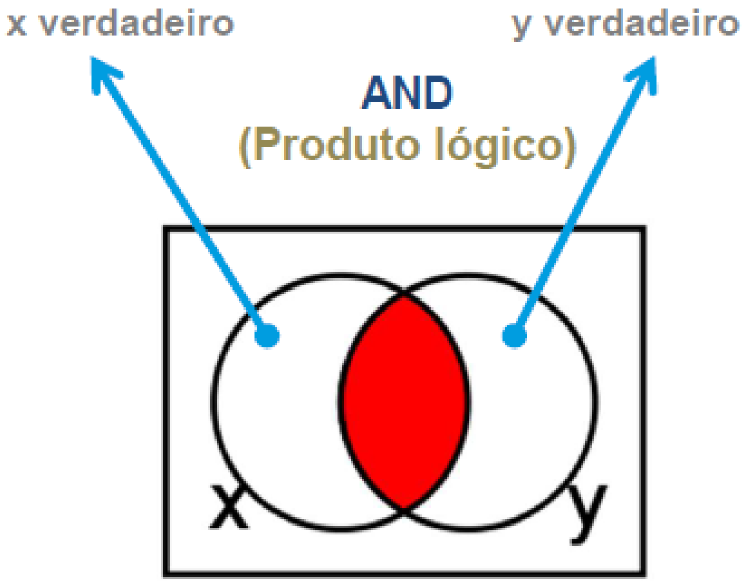
Reunião ou Soma Lógica



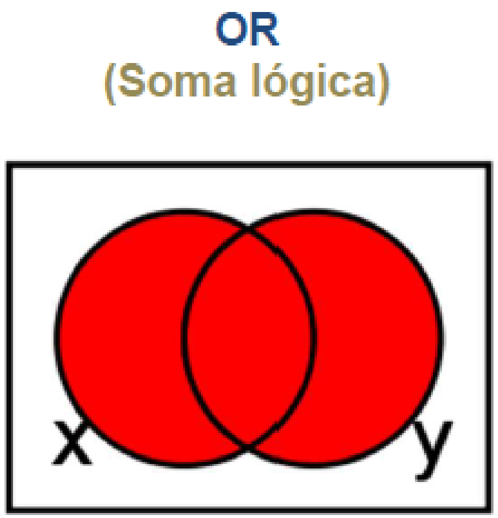
$$F(A,B) = A + B$$

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Funções lógicas elementares



O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **E (AND)** Y for verdadeiro



O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **OU (OR)** Y for verdadeiro

Negação **(NOT)** da afirmação.

Descrição das funções lógicas

As funções lógicas podem ser descritas por:

- Expressões lógicas
- Tabelas de verdade
- Mapas de Karnaugh

Expressões lógicas

As expressões lógicas ligam variáveis e constantes lógicas através das funções elementares, como por exemplo:

$$F(A,B,C) = \overline{A}.B + C$$

$$F(A,B,C) = \overline{A}.B + 0 + \overline{B.C}$$

Formas de expressões lógicas

Soma de produtos: Quando a expressão é composta por somas lógicas de produtos lógicos.

$$A.B.C + \overline{A}.D + B.D$$

Produto de somas: Quando a expressão é composta por produtos lógicos de somas lógicas.

$$(A + B + C).(\overline{A} + D).(B + D)$$

Há quatro formas particulares:

Forma canónica soma de produtos: Quando a expressão é composta por somas lógicas de produtos lógicos <u>que contêm todas as variáveis da função</u>.

Mintermos

$$F(A,B,C) = A.B.C + \overline{A}.B.C + A.B.\overline{C}$$

Forma canónica produto de somas: Quando a expressão é composta por produtos lógicos de somas lógicas <u>que contêm todas as variáveis da função</u>.

Maxtermos

$$F(A,B,C) = (A+B+C).(\overline{A}+B+C).(A+B+\overline{C})$$

Forma mínima soma de produtos: Quando a expressão é composta por somas de produtos em que o número de termos e de variáveis é mínimo.

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}.\overline{B}.C.D + B.\overline{C}$$

Forma mínima produto de somas: Quando a expressão é composta por produtos de somas em que o número de factores e de variáveis é mínimo.

$$F(A,B,C,D) = (\overline{B} + \overline{C}).(B + C).(\overline{A} + \overline{C})$$

Geralmente, a implementação de circuitos digitais faz-se a partir de **formas mínimas**:

- Não são necessariamente únicas
- Não implicam necessariamente a realização lógica mais simples em termos de *hardware*

Postulados da álgebra de Boole

P1	**X = 0 ou X = 1**	
P2	**0 . 0 = 0**	**1 . 1 = 1**
P3	**0 . 1 = 1 . 0 = 0**	**0 + 1 = 1 + 0 = 1**
P4	**1 + 1 = 1**	**0 + 0 = 0**
P5	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$

Teoremas da álgebra de Boole

T1	A.0=0	A+1=1	
T2	A.1=A	A+0=A	***Identidade***
T3	A.A=A	A+A=A	***Idempotência***
T4	$A.\overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$	
T5	$\overline{\overline{A}} = A$		
T6	A.B=B.A	A+B=B+A	***Comutatividade***

T7	$A.B.C=A.(B.C)=(A.B).C$	$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$	***Associatividade***
T8	$A.(B+C)=A.B+A.C$	$A+B.C=(A+B).(A+C)$	***Distributividade***
T9	$\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$	***De Morgan***
T10	$A+A.B=A$	$A.(A+B)=A$	***Absorção***
T11	$A+\overline{A}.B=A+B$	$A.(\overline{A}+B)=A.B$	***Termo/Factor Menor***
T12	$A.B+A.\overline{B}=A$	$(A+B).(A+\overline{B})=A$	***Adjacência Lógica***
T13	$A.B+\overline{A}.C+B.C=A.B+\overline{A}.C$	$(A+B).(\overline{A}+C).(B+C)=(A+B).(\overline{A}+C)$	***Termo/Factor Incluído***

Demonstração das leis de DeMorgan

$$\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$$

$$\overline{x.y} = \overline{x}+\overline{y}$$

Verificação por Tabelas da Verdade

x	y	$x+y$	$\overline{x+y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}\cdot\overline{y}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

- Generalização para n variáveis:

$$\overline{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \ldots \overline{x_n}$$
$$\overline{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n}$$

Simplificação de expressões pelos teoremas

A simplificação de expressões lógicas pelos teoremas é um **processo heurístico:**

Progredimos no sentido que **parece melhor** mas **não há a certeza** de ser atingida a melhor solução (expressão mais simples)

Exemplos:

☞ **Aplicação do Teorema T10**

$$X + X.Y = X$$

Se um termo ou expressão (X) ocorre num termo "maior" (XY), o termo "maior" é redundante!

$$F = C.D + A.\overline{B}.\overline{C} + B.C.D \Leftrightarrow$$

Considerando X=C.D e Y=B, pode-se aplicar o teorema T10, obtendo-se:

$$\Leftrightarrow \ F = C.D + A.\overline{B}.\overline{C}$$

☞ **Aplicação do Teorema T11**

$$X + \overline{X}.Y = X + Y$$

Se uma variável ou expressão (X) ocorre num termo "maior" (XY) mas na forma negada, essa variável ou expressão na forma negada é redundante!

$$F = A.B + B.E.F + \overline{A}.C.D + \overline{B}.C.D \Leftrightarrow$$

Pelo teorema da Distributividade (T8), coloca-se o termo C.D em evidência:

$$\Leftrightarrow F = A.B + B.E.F + C.D.(\overline{A} + \overline{B}) \Leftrightarrow$$

Aplicando o teorema de De Morgan (T9), transforma-se o termo $\overline{A} + \overline{B}$ em $\overline{A.B}$:

$$\Leftrightarrow F = A.B + B.E.F + C.D.(\overline{A.B}) \Leftrightarrow$$

Considerando X=A.B, Y=C.D e $\overline{X} = \overline{A.B}$, pode-se aplicar o teorema T11, obtendo-se finalmente:

$$\Leftrightarrow F = A.B + B.E.F + C.D$$

☞ Aplicação do Teorema T12

$$X.Y + X.\overline{Y} = X$$

Se dois termos de uma expressão só diferem numa variável, que num dos termos ocorre na forma directa e no outro na forma negada, essa variável é redundante em ambos!

$$F = A.B.\overline{C} + A.B.C + \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} \Leftrightarrow$$

Aplicando o Teorema T12, duas vezes, obtém-se:

$$\Leftrightarrow \; F = A.B + \overline{A}.\overline{B}$$

Situações que podem ocorrer

Na expressão seguinte, o teorema T12 seria provavelmente aplicado da seguinte forma:

$$F = A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; F = A.\overline{B} + \overline{A}.\overline{C}$$

Mas, se a mesma expressão fosse apresentada por outra ordem, aparentemente só se poderia aplicar uma única vez esse teorema:

$$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; F = \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C$$

Esta não é a expressão mais simples, no entanto, nenhum teorema lhe pode ser aplicado de forma imediata!

Aplicação sucessiva das leis de DeMorgan

$$\begin{aligned}
\overline{a\,.\left(b+z\,.\left(x+\overline{a}\right)\right)} &= \overline{a}+\overline{\left(b+z\,.\left(x+\overline{a}\right)\right)} \\
&= \overline{a}+\left(\overline{b}\,.\,\overline{\left(z\,.\left(x+\overline{a}\right)\right)}\right) \\
&= \overline{a}+\left(\overline{b}\,.\left(\overline{z}+\overline{\left(x+\overline{a}\right)}\right)\right) \\
&= \overline{a}+\left(\overline{b}\,.\left(\overline{z}+\left(\overline{x}\,.\,a\right)\right)\right) \\
&= \overline{a}+\overline{b}\,.\left(\overline{z}+\overline{x}\,.\,a\right)
\end{aligned}$$

Função Booleana (exemplo):

$$f = \overline{a}\, b + c$$

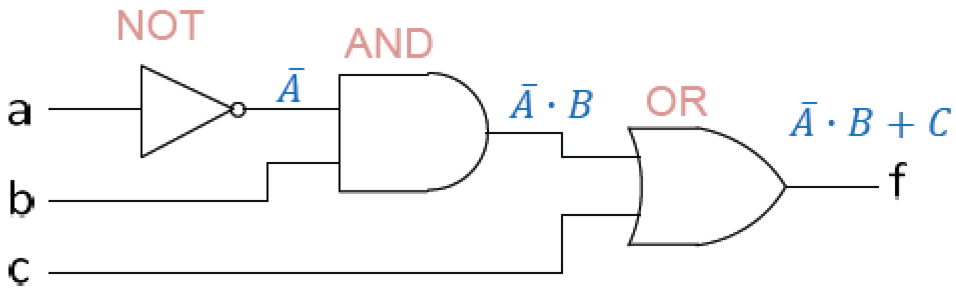
$\bar{a}\, b$ e c são os **termos** da função.

$\bar{a}$, b e c são os **literais**.

Tabela da Verdade

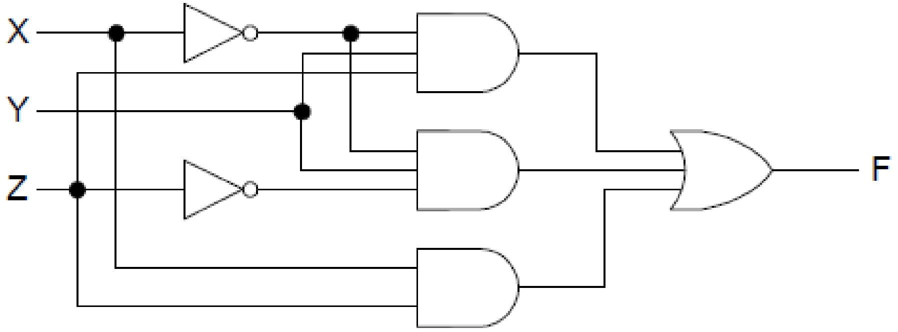
a	b	c	ā b	f
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Circuito Lógico:



Simplificação algébrica

$$f = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz$$



$$\begin{aligned} f &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz \\ &= \bar{x}y(z + \bar{z}) + xz \\ &= \bar{x}y.1 + xz \\ &= \bar{x}y + xz \end{aligned}$$