Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

23 de novembro de 2022 Duração: 1h30m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.
- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. (a) Considere a função $f(x) = 1 + \ln(x-3)$.

i) Faça a representação gráfica da função $f(x)$.

ii) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

(b) i) Calcule o valor numérico da expressão $\arccos\left(-\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right)$.

ii) Resolva a equação $2\sin(3x) + 1 = 0$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $x - \cos(x) = 0$ tem apenas uma solução real, pertencente ao intervalo $[0,1]$.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Partindo da aproximação inicial $x_0 = 1$, efectue 2 iterações do método de Newton para estimar a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize 2 casas decimais em todos os cálculos que realizar.

Nota: $\frac{46}{184} \simeq 0.25$, $\frac{2}{168} \simeq 0.01$

[1.5 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{9+4x^2}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x^2)}{2x}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

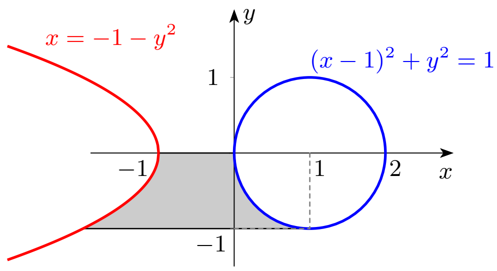
$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Considere o integral definido $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx$.

i) Determine uma estimativa para o integral, recorrendo à regra de Simpson e a uma partição em 4 sub-intervalos.

ii) Recorrendo à alínea (a), determine o valor exacto do integral.

[4.5 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Defina a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le y \le b \ \wedge\ f(y) \le x \le g(y)\}$.

(b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada para a área de $\mathcal{A}$.

(c) Usando integrais, indique expressões simplificadas para o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno

i. do eixo Oy;

ii. do eixo Ox.

(d) Identifique, justificando, a expressão $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{1+4t^2}\,dt$, no contexto da região dada.

Coimbra Institute of Engineering
Department of Physics and Mathematics

Calculus I - Informatics Engineering - test 1

November 23rd, 2022 1h30m

1. (a) Consider the function $f(x) = 1 + \ln(x-3)$.
   i. Plot the grap of the function $f(x)$.
   ii. Define the inverse function f^{-1} (domain, codomain and analytical expression).

   (b) i. Perform the numerical value of $\arccos\left(-\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right)$.
   ii. Solve the equation $2\sin(3x) + 1 = 0$.

[1.0 *val.*] 2. The equation $x - \cos(x) = 0$ as only one solution, on the interval $[0,1]$.

   (a) Using graphical method, prove the previous statement.

   (b) Using the initial approximation $x_0 = 1$, perform 2 iterations of Newton's method to estimate the solution of the equation. Present the error of this estimate and use 2 decimal places on all your calculations.
   Remark: $\frac{46}{184} \simeq 0.25$, $\frac{2}{168} \simeq 0.01$

[1.5 *val.*] 3. Perform the following indefinite integrals:

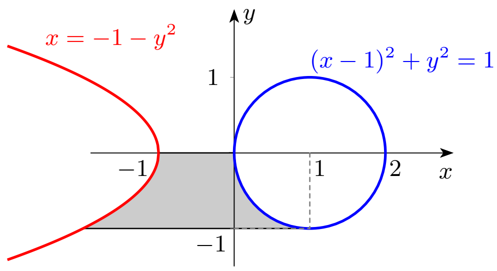
   a) $\displaystyle\int \frac{1}{9+4x^2}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x^2)}{2x}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. (a) Using indefinite integral definition, prove that

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

   (b) Consider the definite integral $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx$.
   i) Using Simpson's rule and 4 sub-intervals, determine an estimate for the definite integral.
   ii) Using result from paragraph (a), determine the exact value of the definite integral.

[4.5 *val.*] 5. Consider the region $\mathcal{A}$ presented in the following figure.



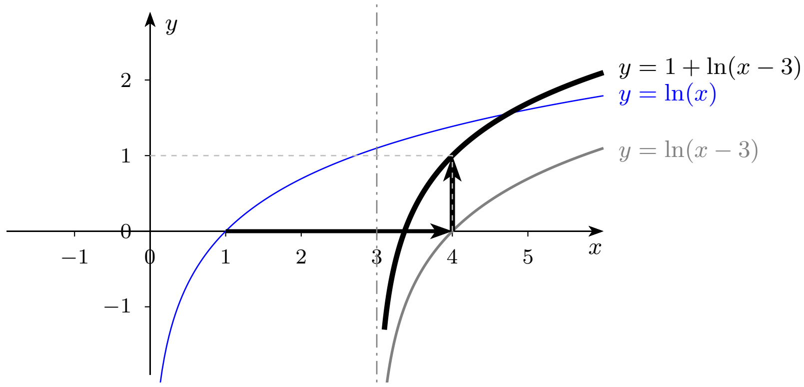
   (a) Define the region $\mathcal{A}$ using the analytical form $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le y \le b \wedge f(y) \le x \le g(y)\right\}$.

   (b) Using definite integrals, define a simplified analytical expression that allow to determine the area of the region $\mathcal{A}$.

   (c) Using definite integrals, define simplified analytical expressions that allow to determine the volume of the solid obtained by rotating the region $\mathcal{A}$ about
   i. y-axis;
   ii. x-axis.

   (d) Identify the measure defined by the definite integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{1+4t^2}\,dt$. Justify.

1. (a) i. Tendo como referência o gráfico do logaritmo e as transformações gráficas elementares, tem-se



ii. Do gráfico da alínea anterior, verificamos que a função f é injectiva (objectos diferentes têm imagens diferentes) e portanto é invertível. Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = ? & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 1 + \ln(x-3) \end{array}$$

O contradomínio da função inversa coincide com o domínio da função original pelo que, tendo em conta o domínio do logaritmo, tem-se

$$CD_{f^{-1}} = D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\} =]3, +\infty[.$$

A função inversa tem expressão analítica dada por

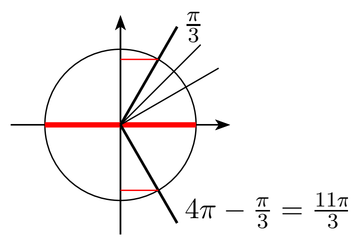
$$\begin{aligned} y = 1 + \ln(x-3) &\Leftrightarrow y - 1 = \ln(x-3) \\ &\Leftrightarrow e^{y-1} = x - 3 \\ &\Leftrightarrow 3 + e^{y-1} = x . \end{aligned}$$

e, consequentemente, tem domínio

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} .$$

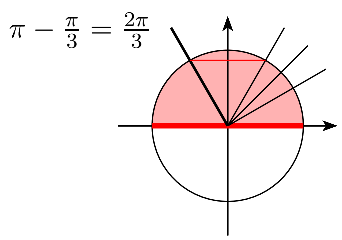
(b) i. Tendo em conta a restrição principal do cosseno, tem-se

$$\arccos\left(-\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(-\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$



$$= \arccos\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

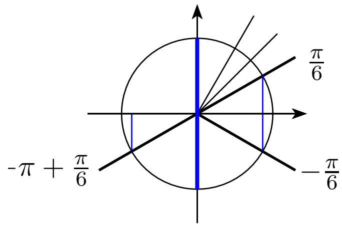


$$= \frac{2\pi}{3} .$$

.

ii. Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$2\sin(3x)+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin(3x) \;=\; -\frac{1}{2}$$



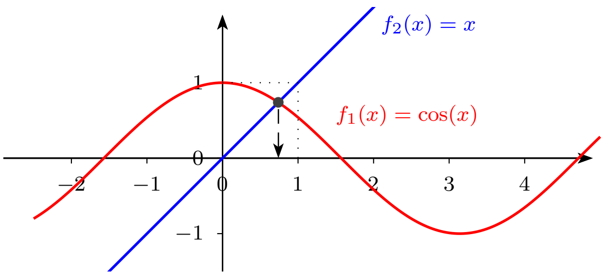
$$\Leftrightarrow \quad 3x \;=\; -\frac{\pi}{6}+k\,2\pi \;\vee\; 3x \;=\; -\frac{5\pi}{6}+k\,2\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \;=\; -\frac{\pi}{18}+k\,\frac{2\pi}{3} \;\vee\; x \;=\; -\frac{5\pi}{18}+k\,\frac{2\pi}{3}\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

2. (a) Tendo em conta que

$$x-\cos(x) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; \cos(x)\,,$$

as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x)=x$ e $f_2(x)=\cos(x)$.



(b) Consideremos a função $f(x)=x-\cos(x)$. Então $f'(x)=1+\sin(x)$.

n	x_n	erro
0	$x_0=1$ (dado)	
1	$x_1 = 1-\frac{f(1)}{f'(1)} = 1-\frac{1-\cos(1)}{1+\sin(1)} \simeq 1-\frac{1-0.54}{1+0.84} \simeq 0.75$	0.25
2	$x_2 = 0.75-\frac{f(0.75)}{f'(0.75)} = 0.75-\frac{0.75-\cos(0.75)}{1+\sin(0.75)} \simeq 0.75-\frac{0.75-0.73}{1+0.68} \simeq 0.74$	0.01

Logo, $\overline{x} \;=\; 0.74$ é uma aproximação para a solução, com erro aproximado de 0.01.

3. (a) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\int \frac{1}{9+4x^2}\,dx \;=\; \int \frac{1}{9\,(1+\frac{4x^2}{9})}\,dx \;=\; \frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int \underbrace{\frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}_{P5}\,dx \;=\; \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right)+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

(b) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\ln(x^2)}{2x}\,dx \;&=\; \int \frac{1}{2x}\,dx + \int \frac{1}{2x}\,\ln(x^2)\,dx \\ &=\; \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{P3}\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2}{x}\,\ln(x^2)}_{P2}\,dx \\ &=\; \frac{1}{2}\,\ln|x| + \frac{1}{4}\,\frac{\ln^2(x^2)}{2} + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. (a) Basta verificar que a derivada de $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$ é $\cos^2(x)$:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c\right)'}_{D3+D4} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{(x)'}_{D2} + \frac{1}{4}\underbrace{\Big(\sin(2x)\Big)'}_{D10} + \underbrace{(c)'}_{D1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,2\cos(2x) + 0 \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 + \cos(2x)\Big) \\
&= \cos^2(x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

(b) i) Considerando uma partição uniforme do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ em 4 sub-intervalos, tem-se $h = \frac{\pi}{4}$ e

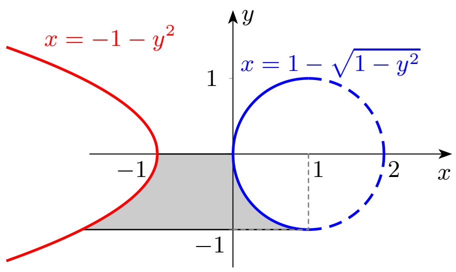
$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx &\simeq \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos^2(0) + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{12}\Big(0 + 2 + 2 + 2 + 0\Big) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

ii) Tendo em conta o resultado da alínea (a), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin(\pi) - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin(-\pi)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

5. (a) Começamos por notar que as curvas que delimitam a região são definidas (em função da variável y) por:

- $x = -1 - y^2$
- $(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 1 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$



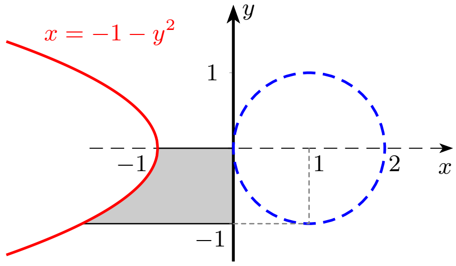
Então,

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \leq y \leq 0 \quad \wedge \quad -1 - y^2 \leq x \leq 1 - \sqrt{1-y^2}\right\}.$$

(b) A área de $\mathcal{A}$ é definida por

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_{-1}^{0} \underbrace{1 - \sqrt{1-y^2}}_{f_{sup}} - \underbrace{(-1-y^2)}_{f_{inf}}\,dy = \int_{-1}^{0} 2 + y^2 - \sqrt{1-y^2}\,dy\,.$$

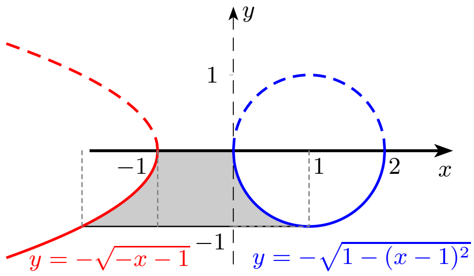
(c) i. Uma vez que na rotação em torno do eixo Oy a parte esquerda irá sobrepor-se à parte direita, iremos apenas considerar o efeito da sub-região da figura seguinte.



$$\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) \quad = \quad \pi \int_{-1}^{0} \Big(\underbrace{-1-y^2}_{R_{ext}}\Big)^2 \, dy\,.$$

ii. Começamos por notar que as curvas que delimitam a região são definidas (em função da variável x) por:

- $x=-1-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad -x-1=y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{-x-1}$
- $(x-1)^2+y^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2=1-(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{1-(x-1)^2}$



$$\begin{aligned} &\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) \\ = \quad & \pi \int_{-2}^{-1} (-1)^2 - \Big(-\sqrt{-x-1}\Big)^2 \, dx + \pi \int_{-1}^{0} (-1)^2 \, dx + \pi \int_{0}^{1} (-1)^2 - \Big(-\sqrt{1-(x-1)^2}\Big)^2 \, dx \\ = \quad & \pi \int_{-2}^{-1} 2+x \, dx + \pi \int_{-1}^{0} 1 \, dx + \pi \int_{0}^{1} (x-1)^2 \, dx\,. \end{aligned}$$

(d) A expressão define o comprimento do contorno esquerdo da região:

$$\text{comprimento} \quad = \quad \int_{-1}^{0} \sqrt{1+\Big[\big(-1-y^2\big)'\Big]^2} \, dy \quad = \quad \int_{-1}^{0} \sqrt{1+\Big[-2y\Big]^2} \, dy \quad = \quad \int_{-1}^{0} \sqrt{1+4\,y^2} \, dy\,.$$