Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 1 de Análise Matemática I - Engenharia Informática

10 de novembro de 2023 Duração: 1h30m

- A avaliação do portfólio de actividades do CeaMatE substitui a resposta ao grupo 1.
- Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova.

[2.0 *val.*] 1. (a) Considere a função $f(x) = 3 + 2^{x-1}$.

i) Faça a representação gráfica da função $f(x)$.

ii) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

(b) i) Calcule o valor da expressão $\arccos\left(\sin\left(\dfrac{67\pi}{6}\right)\right)$.

ii) Resolva a equação $\sin(2x) + \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $x + \cos(x) = 0$ tem apenas uma solução real.

(a) Recorrendo ao método gráfico, justifique a afirmação anterior.

(b) Partindo da aproximação inicial $x_0 = 0$, efectue 2 iterações do método de Newton para estimar a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa e utilize 2 casas decimais em todos os cálculos que realizar.

Nota: $\frac{46}{184} \simeq 0.25$, $\frac{2}{168} \simeq 0.01$

[2.0 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

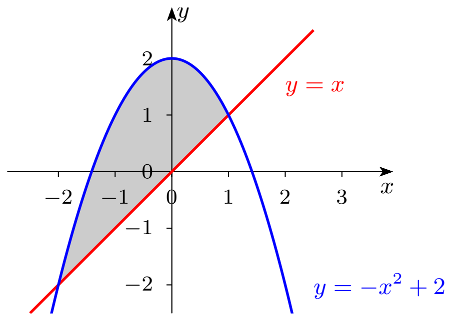
(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3} + \cos\left(\ln(x)\right)}{x}\, dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{x-2}}{9 + e^{2x}}\, dx$.

[1.0 *val.*] 4. Recorrendo à regra de Simpson e a uma partição em 4 sub-intervalos, determine uma estimativa para o integral definido

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\, dx.$$

[5.0 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Usando integrais, determine uma expressão simplificada para a área de $\mathcal{A}$,

i. em função da variável x;

ii. em função da variável y.

(b) Calcule a área de $\mathcal{A}$.

(c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada para o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

(d) Identifique, justificando, o que representa a expressão $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$, no contexto da figura dada.

Coimbra Institute of Engineering
DEPARTMENT OF PHYSICS AND MATHEMATICS

CALCULUS I - Informatics Engineering - test 1

November 10th, 2023 1h30m

[2.0 *val.*] 1. (a) Consider the function $f(x) = 3 + 2^{x-1}$.

i. Plot the graph of the function $f(x)$.

ii. Define the inverse function f^{-1} (domain, codomain and analytical expression).

(b) i. Determine the value of $\arccos\left(\sin\left(\frac{67\pi}{6}\right)\right)$.

ii. Solve the equation $\sin(2x) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

[1.0 *val.*] 2. The equation $x + \cos(x) = 0$ as only one solution.

(a) Using the graphical method, prove the previous statement.

(b) Using the initial approximation $x_0 = 0$, perform 2 iterations of Newton's method to estimate the solution of the equation. Present the error of this estimate and use 2 decimal places on all your calculations.

Remark: $\frac{46}{184} \simeq 0.25$, $\frac{2}{168} \simeq 0.01$

[2.0 *val.*] 3. Calculate the following indefinite integrals:

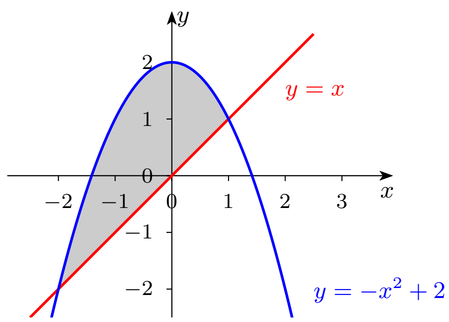
(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3} + \cos\big(\ln(x)\big)}{x}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{x-2}}{9 + e^{2x}}\,dx$.

[1.0 *val.*] 4. Use Simpson's rule and 4 sub-intervals, to determine an estimate for the definite integral

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx.$$

[5.0 *val.*] 5. Consider the region $\mathcal{A}$ presented in the following figure.



(a) Using definite integrals, determine a simplified expression for the area of the region $\mathcal{A}$,

i. with respect to x;

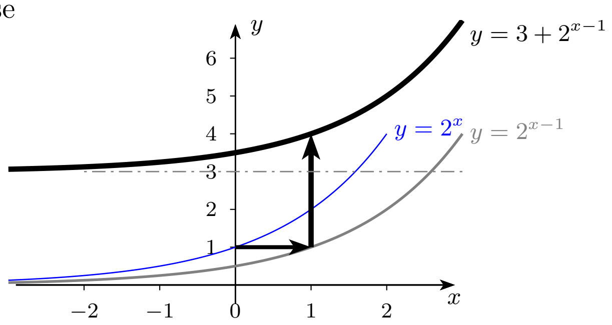
ii. with respect to y.

(b) Determine the area of the region $\mathcal{A}$.

(c) Using definite integrals, define a simplified analytical expression that allow to determine the volume of the solid obtained by rotating the region $\mathcal{A}$ around the y-axis.

(d) Identify the measure defined by the definite integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\,dt$, in the context of the given figure. Justify.

1. (a) i. Tendo como referência o gráfico do logaritmo e as transformações gráficas elementares, tem-se



ii. Do gráfico da alínea anterior, verificamos que a função f é injectiva (objectos diferentes têm imagens diferentes) e portanto é invertível. Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = ? & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 3 + 2^{x-1} \end{array}$$

O contradomínio da função inversa coincide com o domínio da função original pelo que, tendo em conta o domínio do logaritmo, tem-se

$$CD_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$$

A função inversa tem expressão analítica dada por

$$\begin{aligned} & y = 3 + 2^{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & y - 3 = 2^{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(y-3) = x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 + \log_2(y-3) = x\,. \end{aligned}$$

e, consequentemente, tem domínio

$$D_{f^{-1}} = \left\{ y \in \mathbb{R} :\ y - 3 > 0 \right\} =]3, +\infty[\,.$$

Tem-se então

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = \mathbb{R} & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} =]3, +\infty[\\ 1 + \log_2(y-3) = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 3 + 2^{x-1} \end{array}$$

(b) i. Tendo em conta a restrição principal do cosseno, tem-se

$$\begin{aligned} \arccos\left(\sin\left(\frac{67\pi}{6}\right)\right) &= \arccos\left(\sin\left(11\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \arccos\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

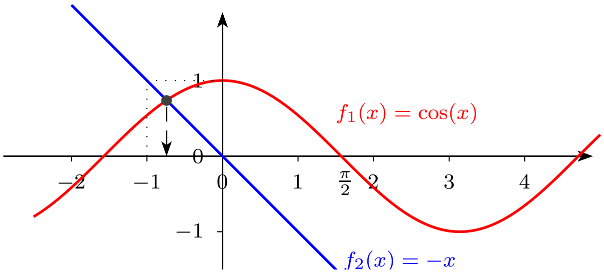
ii. Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$\begin{aligned}
\sin(2x)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = -\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{6}+k\,2\pi \ \vee \ 2x = \frac{7\pi}{6}+k\,2\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{12}+k\,\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{12}+k\,\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

2. (a) Tendo em conta que

$$x+\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = -x\,,$$

as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x)=\cos(x)$ e $f_2(x)=-x$.



(b) Consideremos a função $f(x)=x+\cos(x)$. Então $f'(x)=1-\sin(x)$.

n	x_n	erro
0	$x_0=0$ (dado)	
1	$x_1 = 0-\frac{f(0)}{f'(0)} = 0-\frac{0+\cos(0)}{1-\sin(0)} = -1$	1.00
2	$x_2 = -1-\frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1-\frac{-1+\cos(-1)}{1-\sin(-1)} \simeq 1-\frac{-1+0.54}{1+0.84} = -1+\frac{0.46}{1.84} \simeq -0.75$	0.25

Logo, $\overline{x} = -0.75$ é uma aproximação para a solução, com erro aproximado de 0.25.

3. (a) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^3}+\cos\left(\ln(x)\right)}{x}\,dx \;&=\; \int\frac{\sqrt{x^3}}{x}\,dx+\int\frac{\cos\left(\ln(x)\right)}{x}\,dx \;=\; \int\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x}\,dx+\underbrace{\int\frac{1}{x}\cos\left(\ln(x)\right)dx}_{P7}\\
&=\; \int\underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{P2}\,dx+\sin\left(\ln(x)\right)+c \;=\; \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\sin\left(\ln(x)\right)+c\\
&=\; \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\sin\left(\ln(x)\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

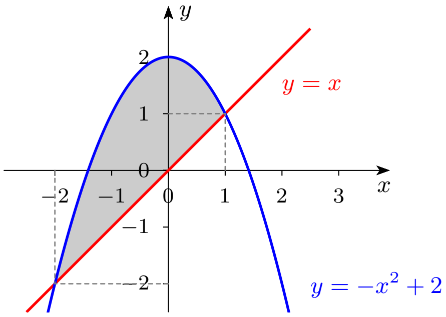
(b) Recorrendo às regras das primitivas imediatas, tem-se

$$\begin{aligned}
\int\frac{e^{x-2}}{9+e^{2x}}\,dx \;&=\; \int\frac{e^x\,e^{-2}}{9+e^{2x}}\,dx \;=\; e^{-2}\int\frac{e^x}{9+e^{2x}}\,dx \;=\; e^{-2}\int\frac{e^x}{9\left(1+\frac{e^{2x}}{9}\right)}\,dx\\
&=\; \frac{e^{-2}}{9}\int\frac{e^x}{1+\left(\frac{e^x}{3}\right)^2}\,dx \;=\; \frac{3e^{-2}}{9}\int\underbrace{\frac{\frac{e^x}{3}}{1+\left(\frac{e^x}{3}\right)^2}}_{P4}\,dx \;=\; \frac{e^{-2}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{e^x}{3}\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4. Considerando uma partição uniforme do intervalo $[0,\,\pi]$ em 4 sub-intervalos, tem-se $h=\frac{\pi}{4}$ e

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx &\simeq \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\Big(\sin^2(0)+4\sin^2\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+4\sin^2\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)+\sin^2(\pi)\Big)\\ &= \frac{\pi}{12}\Big(0+2+2+2+0\Big)\\ &= \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

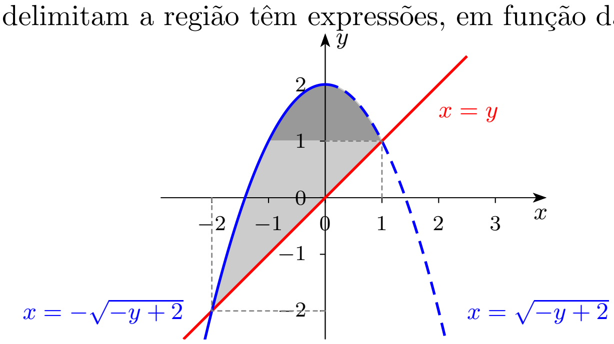
5. (a) i. Começamos por notar que as curvas $y=x$ e $y=-x^2+2$ têm interseção nos pontos $(-2,2)$ e $(1,1)$.



Em função da variável x, a área de $\mathcal{A}$ é definida por

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_{-2}^{1} \underbrace{-x^2+2}_{f_{sup}} - \underbrace{x}_{f_{inf}}\,dx\,.$$

ii. As curvas que delimitam a região têm expressões, em função da variável y, dadas por:



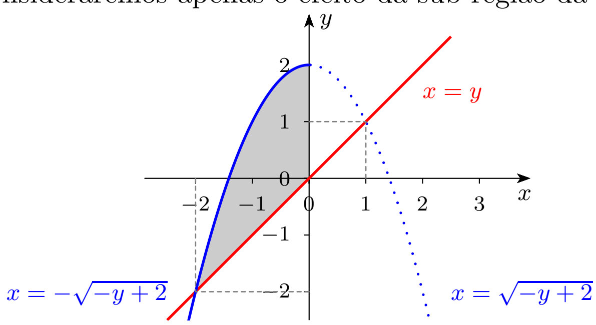
Em função da variável y, a área de $\mathcal{A}$ é definida por

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_{-2}^{1} \underbrace{y}_{f_{sup}} - \underbrace{\left(-\sqrt{-y+2}\right)}_{f_{inf}}\,dy + \int_{1}^{2} \underbrace{\sqrt{-y+2}}_{f_{sup}} - \underbrace{\left(-\sqrt{-y+2}\right)}_{f_{inf}}\,dy\,.$$

(b) Tendo em conta a expressão da alínea (a)(i), tem-se

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_{-2}^{1} -x^2+2-x\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2}-\left(\frac{8}{3}-4-2\right) = \frac{9}{2}\,.$$

(c) Uma vez que na rotação em torno do eixo Oy a parte esquerda da região irá sobrepor-se à parte direita, consideraremos apenas o efeito da sub-região da figura seguinte.



$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \pi\int_{-2}^{0} \Big(\underbrace{-\sqrt{-y+2}}_{R_{ext}}\Big)^2 - \Big(\underbrace{y}_{R_{int}}\Big)^2\,dy + \pi\int_0^2 \Big(\underbrace{-\sqrt{-y+2}}_{R_{ext}}\Big)^2\,dy\\ &= \pi\int_{-2}^{0} -y+2-y^2\,dy + \pi\int_0^2 -y+2\,dy\,.\end{aligned}$$

(d) A expressão define o comprimento da parte da contorno assinalada na figura seguinte:

$$\text{comprimento} \;=\; \int_0^1 \sqrt{1+\Big[\big(-x^2+2\big)'\Big]^2}\,dx \;=\; \int_0^1 \sqrt{1+\Big[-2x\Big]^2}\,dx \;=\; \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx\,.$$