



# BenchQC - Anwendungsfälle der Optimierung

OptWare GmbH

13. März 2024

## **Zusammenfassung**

Das Forschungsprojekt BenchQC, Anwendungsgetriebenes Benchmarking von Quantencomputern, befasst sich mit echten Anwendungsfällen der Industrie aus Machine Learning, Simulation und Optimierung. In diesem Dokument sollen die folgenden industriellen Anwendungsfelder der Optimierung betrachtet werden:

- Fließbandabstimmung
- Reihenfolgeplanung
- Testfahrzeugkonfiguration
- ...

Die einzelnen Anwendungsfälle werden zunächst definiert, ihre klassischen Algorithmen erarbeitet und anschließend für die Anwendung auf Quantencomputern modifiziert. Abschließend werden die klassischen und QC Lösungen mithilfe eines Benchmarking Frameworks (QUARK) verglichen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Anwendungsfälle</b>	<b>2</b>
1.1	Fließbandfertigung . . . . .	2
1.1.1	Anwendungsfall Fließbandabstimmung . . . . .	3
1.1.2	Anwendungsfall Reihenfolgeplanung (Sequencing) . . . . .	5
1.2	Anwendungsfall Testfahrzeugkonfiguration . . . . .	9
1.2.1	Transformation Testinkompatibilitäten . . . . .	11
1.2.2	Transformation zu Bin Packing mit Konflikten . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundprobleme</b>	<b>13</b>
2.1	Bin Packing . . . . .	14
2.1.1	Assembly Line Balancing Problem . . . . .	15
2.1.2	Bin Packing mit Konflikten . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Problem mappings</b>	<b>18</b>
3.1	Bin packing with conflicts - QUBO model . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Metriken</b>	<b>20</b>
4.1	Metriken Kategorie 1 . . . . .	20
4.2	Metriken Kategorie 2 . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Versionshistorie</b>	<b>21</b>
	<b>Liste der noch zu erledigenden Punkte</b>	<b>23</b>

## 1 Anwendungsfälle

Im Folgenden sollen zunächst die industriellen Anwendungsfälle vorgestellt werden.

### 1.1 Fließbandfertigung

Moderne Produktion, wie zum Beispiel die Automobilproduktion, erfolgt oft mithilfe der Fließbandfertigung. Bei der Fließbandfertigung durchläuft das zu fertigende Produkt auf dem Weg zur Fertigstellung zahlreiche Arbeitsstationen, in denen die einzelnen Arbeitsschritte zur Fertigstellung des Produktes ausgeführt werden.

Die Beplanung einer Fertigungsline erfolgt dabei in zwei Schritten: Die Fließbandabstimmung (cf. Abschnitt 1.1.1) und die Reihenfolgeplanung (cf. Abschnitt 1.1.2).

Die Fließbandabstimmung (*Assembly Line Balancing*) beschäftigt sich damit, Arbeitsschritte nach ihrem mittleren Zeitbedarf auf Arbeitsstationen zu verteilen. In der Reihenfolgeplanung (*Sequencing*) werden konkrete Folgen von Aufträgen gebildet, die in Form einer operativen Feinplanung zu große Abweichung von den in der Fließbandabstimmung verwendeten Mittelwerten auf den einzelnen Stationen verhindern sollen. Die Fließbandabstimmung liefert somit eine taktische Grobplanung, auf der die operative Reihenfolge(fein)planung basiert.

Der mittlere Zeitbedarf der Arbeitsschritte, die als Ausgangsbasis der Fließbandabstimmung dient, ergibt sich aus dem tatsächlichen Zeitbedarf für einen Arbeitsschritt multipliziert mit der erwarteten Häufigkeit des Auftretens dieses Schrittes. Dauert z.B. die Montage einer Anhängerkupplung 100 Sekunden, und ist eine Anhängerkupplung nur bei jedem zehnten Fahrzeug zu erwarten, beträgt der mittlere Zeitbedarf 10 Sekunden.

### 1.1.1 Anwendungsfall Fließbandabstimmung

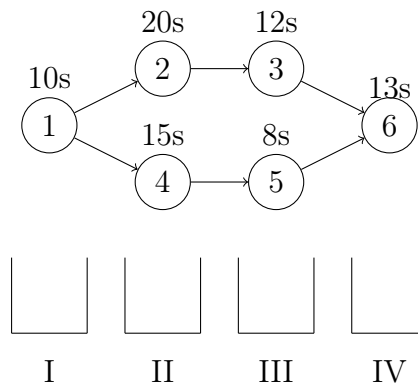


Abbildung 1: Beispiel für Fließbandabstimmung: Die einem Reihenfolgegraph unterliegenden Arbeitsschritte (1-6) sollen nach Zeitbedarf gleichmäßig auf Arbeitsstationen (I-IV) verteilt werden. Dabei darf die Arbeitslast pro Station 25 Sekunden nicht überschreiten.

Gegeben ist bei dem Problem der Fließbandabstimmung eine Reihe von Arbeitsschritten, die Arbeitsstationen zugeordnet werden sollen. Dabei soll eine

möglichst geringe Anzahl und eine im Mittel gleichmäßige Auslastung der Arbeitsstationen angestrebt werden. Pro Arbeitsstation steht maximal ein Takt zur Verfügung. Zum Taktschlag sollen die Arbeitsaufträge auf der nächsten Station bearbeitet werden. Somit darf die summierte durchschnittliche Arbeitszeit der Arbeitsschritte die Taktzeit nicht überschreiten.

Die Arbeitsschritte müssen teilweise in einer vorgegebenen Reihenfolge abgearbeitet werden. Abbildung 1 zeigt im oberen Teil einen beispielhaften Reihenfolgegraphen mit den Tätigkeiten (1-6) zu denen auch jeweils eine mittlere Dauer (z.B. 10 Sekunden bei Tätigkeit 1) angegeben ist. Tätigkeit 2 hängt von Tätigkeit 1 ab und kann deshalb erst durchgeführt werden, wenn Tätigkeit 1 bereits abgeschlossen ist. Gleiches gilt für Tätigkeit 3, sie hängt wiederum von Tätigkeit 2 ab. Tätigkeit 4 im Beispiel kann parallel zu Tätigkeit 2 erfolgen, da sie nur von Tätigkeit 1 abhängig ist und nicht etwa von Tätigkeit 2 oder 3.

In Abb. 1 sind im unteren Teil Arbeitsstationen (I-IV) als offene Behälter angedeutet. Den Arbeitsstationen sollen nun, unter Achtung des Reihenfolgegraphen, Tätigkeiten zugeteilt werden. Die Taktzeit beträgt 25 Sekunden. Die Zuordnung in Abb. 2 wäre denkbar, während die Zuordnung in Abb. 3 nicht möglich ist, da sie dem Reihenfolgegraphen widerspricht und Station III die Taktzeit überschreitet.

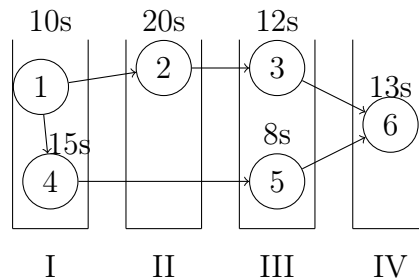


Abbildung 2: Mögliche Lösung für das Ausgangsproblem aus Abb. 1

## Transformation zu Bin Packing

Das Fließbandabstimmungsproblem lässt sich klassisch als Assembly Line Balancing Problem aus Abschnitt 2.1.1 aufstellen und lösen. Die Arbeitsschritte sind dabei die Aufgaben und die Arbeitsstationen die Stationen des

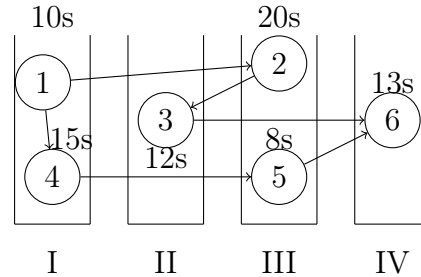


Abbildung 3: Unzulässige Lösung für das Ausgangsproblem aus Abb. 1

klassischen Problems. Die Taktzeit wird durch die maximale Zeit pro Station dargestellt.

Zusammengefasst, lässt sich die Fließbandabstimmung wie folgt auf die Notation aus Abschnitt 2.1.1 mappen:

Symbol	Bedeutung	Definitionsbereich
<b>Mengen</b>		
$T$	Menge der Arbeitsschritte	$\mathbb{N}$
$S$	Menge der Arbeitsstationen	$\mathbb{N}$
$R$	Menge an Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den Arbeitsschritten	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
<b>Konstanten</b>		
$c$	Taktzeit	$\mathbb{N}$
$v_t$	Benötigte Zeit für Arbeitsschritt $t \in T$	$\mathbb{N}$
<b>Variablen</b>		
$x_{ts}$	Genau dann, wenn $x_{ts} = 1$ wird Arbeitsschritt $t \in T$ der Station $s \in S$ zugeteilt	$\{0, 1\}$




Tabelle 1: Notation Fließbandabstimmung

### 1.1.2 Anwendungsfall Reihenfolgeplanung (Sequencing)






Wie bereits in Abschnitt 1.1 beschrieben, folgt in modernen Produktionen auf die Fließbandabstimmung, in der die benötigten Arbeitsschritte auf Arbeitsstationen verteilt wurden, häufig die operative Reihenfolge(fein)planung, auch *Sequencing* genannt. Hierbei geht es nun darum, konkrete Arbeitsauf-

träge, die die einzelnen Stationen durchlaufen müssen, in die optimale Reihenfolge zu bringen. Wir legen hier eine sogenannte *mixed-model assembly line* zugrunde, was bedeutet, dass die Aufträge die Herstellung verschiedener Modelle eines Basisprodukts beschreiben. Die benötigten Arbeitsschritte und die Zeit für deren Erledigung unterscheiden sich somit pro Auftrag. Die operative Feinplanung muss daher u.a. dafür sorgen, dass zu keinem Zeitpunkt zu große Abweichungen (Drift) von den in der Fließbandabstimmung verwendeten Mittelwerten pro Station entstehen.

Eine Probleminstance für das Sequencing besteht aus einem Fließband, einer Liste an Aufträgen und einer Liste an Anforderungen bzw. Regeln für die Reihenfolge. Das Ziel ist es, die Aufträge in eine Reihenfolge zu bringen, die diese Regeln beachtet und eine vorher definierte Zielfunktion optimiert. Im Folgenden werden nun die Eingabeparameter und die verschiedenen Komponenten der Zielfunktion und einer validen Lösung genauer erläutert.

Taktzeit: 10s			Bearbeitungszeit			
Station 1	Station 2	Station 3	Auftragsart	Stat. 1	Stat. 2	Stat. 3
Max Drift: 3s	Max Drift: 6s	Max Drift: 2s		13s	12s	10s
Max Takte: 1	Max Takte: 1	Max Takte: 1		10s	9s	10s
				5s	5s	10s

a) Ein Fließband mit drei Stationen,

Auftragsliste:     

(a) Ein Fließband mit drei Stationen, die jeweils aus einem Arbeitsplatz bestehen, einen Takt dauern und eine maximale Driftzeit erlauben. Ein Auftrag an Station 1 muss vollständig abgearbeitet sein, bevor er an Station 2 weiterbearbeitet werden kann (durchgezogene Linie).

(b) Die Aufträge symbolisieren durch die verschiedenen Formen die Herstellung verschiedener Varianten eines Basisprodukts und haben eine individuelle Bearbeitungszeit pro Station. Die zu erledigenden Aufträge sind vorgegeben.

Abbildung 4: Eine einfache Probleminstance für das Sequencing. Das Ziel ist eine optimale Abarbeitungsreihenfolge für die Auftragsliste zu finden.

**Das Fließband** ist üblicherweise bereits durch die Fließbandabstimmung (siehe Abschnitt 1.1.1) konfiguriert worden und hat somit eine feste Anzahl an *Arbeitsstationen*—denen die verschiedenen Arbeitsschritte, die an einem Produkt ausgeführt werden müssen, zugeteilt wurden—und eine feste *Taktzeit*. Ein einfaches Beispiel für ein Fließband mit drei Stationen ist in Abb. 4a illustriert.

Fließband:  
Taktzeit  
Stationen

Jede Station hat eine vordefinierte Anzahl an *Takten*, für die ein Produkt auf dieser Station verweilen kann, und ist selbst wieder in eine Menge an *Arbeitsplätze* aufgeteilt. Jeder Arbeitsplatz kann das Produkt selbst wieder für eine feste Anzahl an Takten bearbeiten (was auch dazu führen kann, dass sich ein Arbeitsplatz über mehrere Stationen erstreckt) und hat eine Liste an Vorgängerarbeitsplätzen, an denen ein Produkt schon vollständig bearbeitet worden sein muss, bevor es an dem aktuellen Arbeitsplatz bearbeitet werden kann.

*Station:*  
Takte  
Plätze

*Arbeitsplatz:*  
Takte  
Vorgänger  
Drifts

Des Weiteren können für jeden Arbeitsplatz erlaubte *Drifts* festgelegt werden: Die Arbeit an diesem Platz darf dann um diese Zeiteinheit früher beginnen bzw. über das Ende der Taktzeit hinausdauern. Bei der ersten Arbeitsstation kann es zudem zu einem initialen Drift kommen, der z.B. durch Verspätungen aus einer vorangegangenen Schicht (mit eigener Reihenfolgeplanung) entstanden ist. Die Driftgrenzen dürfen nie überschritten werden, da das Produkt dann beispielsweise außerhalb des Arbeitsradius bestimmter Werkzeuge gelangt und das Fließband gestoppt werden müsste. Wenn der maximale Drift an einem Arbeitsplatz überschritten würde, muss daher eine sogenannte *Springerin* eingesetzt werden, die dann pünktlich den Folgeauftrag übernimmt, während die Person an dem Arbeitsplatz ihren aktuellen Auftrag beendet. Diese Person kann dann den Folgeauftrag, der ja bereits von der Springerin bearbeitet wird, überspringen und pünktlich zum Taktschlag mit dem nächsten Auftrag fortfahren.

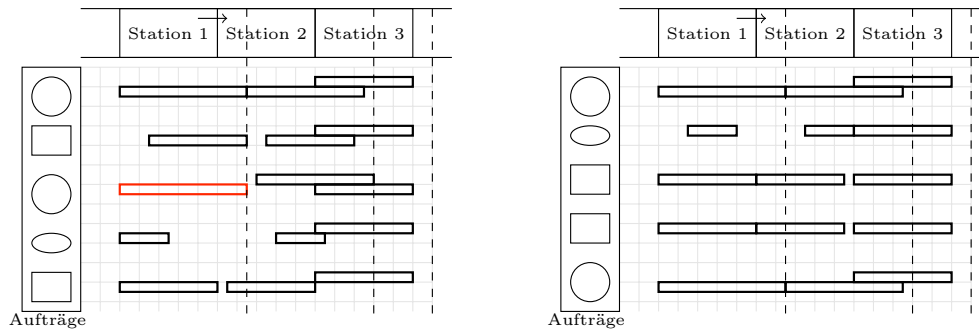
**Die Aufträge** bestehen aus einer Auflistung verschiedener Arbeitsschritte, die auf den Arbeitsstationen ausgeführt werden müssen, um ein konkretes Produkt herzustellen. Pro Auftrag kennen wir die benötigte *Arbeitszeit* pro Arbeitsplatz und eine Liste von *Attributen*, anhand derer Regeln für die Reihenfolge bestimmt werden können. Ein vereinfachtes Beispiel ohne Attribute ist in Abb. 4b dargestellt.

*Auftrag:*  
Zeit  
Attribute

**Die Regeln** schränken den Lösungsraum, also die Anzahl zulässiger Reihenfolgen für die Aufträge, zusätzlich ein. So lässt sich beispielsweise festlegen, dass Aufträge mit einem bestimmten Attribut einen gewissen zeitlichen Mindestabstand haben. Die Regeln stellen jedoch keine starren Vorschriften dar, sondern sollen so gut es geht erfüllt werden.

Sollen  
Attribute  
zunächst  
vernachlässigt  
werden?  
Wenn  
nicht,  
sollte das  
Beispiel  
ggf. erweitert  
werden

**Die Lösung** einer konkreten Problem Instanz beinhaltet eine hinsichtlich der Zielfunktion optimierte Reihenfolge der Aufträge. Konkret setzt sich der Zielfunktionswert aus drei Komponenten zusammen, die je nach Wichtigkeit mit einem festgelegten Faktor in die Zielfunktion eingehen: Die Anzahl an benötigten Springerinnen, der Drift und die Anzahl an verletzten Regeln. Im einfachen Beispiel (ohne Attribute und Regeln) in Abb. 5a würden dementsprechend die benötigte Springerin und die Drifts an Station 1 und 2 in die Zielfunktion eingehen. Abb. 5b stellt zudem eine Lösung der Instanz dar, die ohne Springerinnen auskommt.



- (a) Die hier angegebene (nicht optimale) Lösung erfordert eine Springerin (rot), da der dritte Auftrag sonst den zulässigen maximalen Drift an Station 1 überschritte.
- (b) Diese Lösung ist hinsichtlich der Anzahl der Springerinnen und der aufsummierten Drifts optimal.

Abbildung 5: Beispiel für zwei Lösungen der Instanz aus Abb. 4. Die festgelegte Auftragsreihenfolge liest sich von oben nach unten und die Bearbeitungszeiten der Aufträge sind durch die Länge der horizontalen Balken symbolisiert. Zudem markieren die gestrichelten Linien die maximalen Drifts an den Stationen. Da die Arbeit an Station 2 erst nach dem Arbeitsende an Station 1 beginnen kann, kann ein Drift an Station 1 den Bearbeitungsstart an Station 2 verzögern. Der Startzeitpunkt auf Station 2 ergibt sich also aus dem Maximum von dem Ende des Auftrags auf Station 1 und dem Drift des vorherigen Auftrags auf Station 2. Station 3 hingegen hat keine Vorgängerbeziehungen und kann alle Aufträge pünktlich starten, weil sich ein Drift auf Station 2 nicht auf Station 3 auswirkt, sondern die Arbeiten an diesen Stationen gleichzeitig erledigt werden können.



## Datensatz

Der Datensatz wurde mittels eines *data generators* künstlich erzeugt. Dafür wurden für die verschiedenen Parameter Werte ausgewählt bzw. ein Bereich angegeben, aus dem der Wert des Parameters gleichverteilt ausgewählt wurde, um Instanzen verschiedener realer Probleme zu simulieren.

Um die Komplexität des Problems zu verringern, wurden in Bezug auf das oben präsentierte Problem folgende Vereinfachungen vorgenommen:

### Liste von Vereinfachungen updaten!

- Jede Station besteht aus nur einem Arbeitsplatz, d.h. die Aufteilung einer Arbeitsstation in verschiedene Arbeitsplätze wurde weggelassen.
- ...

Nachdem die Parameter für den Datengenerator festgelegt wurden, sollte hier angegeben werden, wie die Parameter gesetzt wurden und wie viele Instanzen welcher Größe generiert wurden. Vielleicht kann der generierte Datensatz mit Grafiken/Tabellen dargestellt werden (wie viele Instanzen welcher Art, etc.)?!

## 1.2 Anwendungsfall Testfahrzeugkonfiguration

Bevor ein neues Fahrzeug in Serie produziert werden kann, müssen mit Vorserienfahrzeugen eine bestimmte Anzahl von Tests ausgeführt werden, um die Funktion der einzelnen Komponenten und die allgemeine Produzierbarkeit sicherzustellen. Dabei hat sich die Anzahl der zu testenden Funktionen in den letzten Jahren signifikant gesteigert. Da die Herstellung dieser Vorserienfahrzeuge sehr kostenintensiv und die Ausführung der dazugehörigen Tests sehr zeitaufwendig ist, soll für eine gegebene Anzahl an Tests die Zahl der zu produzierenden Testfahrzeuge minimiert werden.

Jeder Test gehört dabei einer bestimmten Kategorie an, die über die Reihenfolge der Ausführung entscheidet. Crashtests müssen zum Beispiel immer als letzter Test eines Vorserienautos durchgeführt werden, da diese Teile der Vorserienfahrzeuge zerstören können und somit die Ausführung der anderen Tests unmöglich machen.

Die genauen Zusammenhänge der Testkategorien können den Abb. 6 und 7

entnommen werden.

after <column>  
I can perform <line>

CAT	A	B	C	D	Z
A	✓	✗	✗	✗	✗
B	✓	✓	✗	✗	✗
C	✓	✓	✓	✗	✗
D	✓	✓	✓	✓	✗
Z	✓	✓	✓	✓	✗

before <line>  
I can perform <column>

Abbildung 6: Zusammenhang der Testkategorien als Matrix

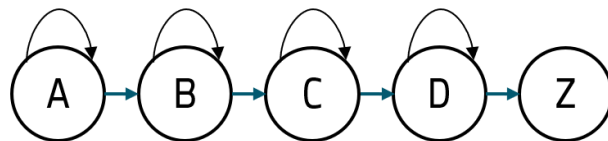


Abbildung 7: Zusammenhang der Testkategorien vereinfacht als gerichteter Graph

Die Testfahrzeuge werden in drei verschiedenen, teilweise überlappenden, Bauphasen produziert, die in Abb. 8 dargestellt sind. Jeder Test ist an Fahrzeuge einer bestimmten Bauphase gekoppelt. Eine Bauphase erstreckt sich über mehr als ein Jahr. Die Tests müssen spätestens ein Jahr nach Bau eines Fahrzeugs absolviert sein.

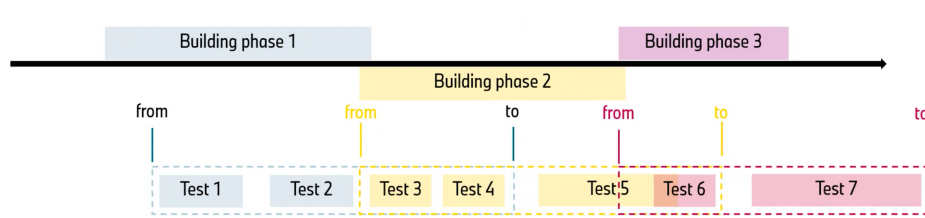


Abbildung 8: Bauphasen der Vorserienfahrzeuge

Pro konkrete Bauphase ist somit eine Menge an Tests vorgegeben, die auf  $n$  verschiedenen Testfahrzeugen durchgeführt werden müssen. Pro Test sind dabei gewisse Sonderausstattungen (SAs) vorgegeben oder ausgeschlossen. In Testfahrzeuge können je nach Modelltyp unterschiedliche Sonderausstattungen verbaut werden. Sonderausstattungen können andere Sonderausstattungen fordern oder ausschließen. Zum Beispiel kann ein Auto nicht gleichzeitig einen 4- und 8 Zylindermotor verbaut haben. Diese direkten Abhängigkeiten können auf die Tests übertragen werden, so dass eine minimale Anzahl an Testfahrzeugen gefunden werden kann.

### 1.2.1 Transformation Testinkompatibilitäten

Ziel ist es herauszufinden, welche Tests auf demselben Testfahrzeug getestet werden dürfen. Dies ergibt sich aus den folgenden Informationen:

- Abhängigkeiten und Ausschlüsse der SAs
- Verfügbare Testfahrzeugkategorien
- Forderung von unterschiedlichen Testfahrzeugen
- Zugehörigkeit zu Testkategorien

**Abhängigkeiten und Ausschlüsse der SAs** Für jeden Tests sollte bekannt sein, welche Sonderausstattung des Testfahrzeugs gefordert werden sollte. Neben den direkten Abhängigkeiten gibt es auch die indirekten, die sich aus den geforderten SAs ergeben. Wie die indirekten Abhängigkeiten auf die Tests übertragen werden können, sollen exemplarisch die nachfolgenden Regeln zeigen. Angenommen eine Sonderausstattung  $SA1$  wird gefordert.

Bedingung an SAs	Abhängigkeit im Test
$SA1 \Rightarrow SA2$	$SA2$ für Test benötigt
$SA1 \Rightarrow \sim SA2$	$\sim SA2$ für Test benötigt
$SA1 \Rightarrow SA2 \mid SA3$	$SA2$ oder $SA3$ für Test benötigt
Nur eins $SA1, SA2, SA3$	$\sim SA2$ und $\sim SA3$ für Test benötigt
$SA1 \& SA2$	$SA2$ für Test benötigt
$SA2 \Rightarrow \sim SA1$	dh. $SA1 \Rightarrow \sim SA2$ $\sim SA2$ für Test benötigt

Wenn eine benötigte *SA* oder ausgeschlossene *SA* gefunden wurde, müssen auch für diese die Regeln überprüft werden.

Am Ende ergibt sich eine Menge an Tests, für die bekannt ist, welche *SAs* auf dem Testfahrzeug sein müssen und welche *SAs* nicht erlaubt sind.

Tests, die sich ausschließende *SAs* haben, können somit nicht auf demselben Testfahrzeug getestet werden.

**Verfügbare Testfahrzeugkategorien** Des Weiteren sind auch die *SAs* auf den Testfahrzeugen eingeschränkt. Testfahrzeuge gehören unterschiedlichen Testfahrzeugkategorien an. Jede Testfahrzeugkategorie hat erlaubte *SAs*. Ein Test kann nur dann durchgeführt werden, wenn mindestens ein Testfahrzeugkategorie alle benötigten Sonderausstattungen erlaubt. Andernfalls kann dieser Test nicht ausgeführt werden und die Verteilung aller Tests ist nicht möglich.

Tests, die nicht auf demselben Testfahrzeug ausgeführt werden können, können ebenfalls gegenseitig ausgeschlossen werden.

**Forderung von unterschiedlichen Testfahrzeugen** Normalerweise müssen Tests mehr als einmal auf unterschiedlichen Testfahrzeugen durchgeführt werden. Diese Tests schließen sich somit auch gegenseitig aus.

**Zugehörigkeit zu Testkategorien** Aus den Testfahrzeugkategorien ergibt sich die Ausführungsreihenfolge der Tests. Tests, die zur Kategorie ‘Z’ gehören, dürfen allerdings nur einmal pro Fahrzeug existieren. Diese Tests sind somit gegenseitig auszuschließen, damit gewährleistet werden kann, dass nur ein Test pro Fahrzeug zugeteilt werden kann. Tests anderer Kategorien müssen nicht besonders behandelt werden.

### 1.2.2 Transformation zu Bin Packing mit Konflikten

Gegeben ist eine Liste an Tests einer konkreten Bauphase, die genau einmal durchgeführt werden müssen. Für jeden Test ist bekannt:

- welche Tests nicht am selben Fahrzeug durchgeführt werden dürfen,
- wie lange für die Durchführung benötigt wird,
- wann er frühestmöglich ausgeführt werden darf und

- bis wann er spätestens ausgeführt werden muss.

Um die Kosten möglichst gering zu halten, soll die Anzahl der Testfahrzeuge minimal gehalten werden. Alle Tests müssen ausgeführt werden.

Das Testfahrzeugkonfigurationsproblem lässt sich auf das spezielle Bin Packing Problem mit Konflikten (siehe Abschnitt 2.1.2) abbilden.

Die Testfahrzeuge sind dabei die Behälter, deren Anzahl im Optimum möglichst gering sein muss. Die Objekte sind die auszuführenden Tests, die in dieser Bauphase abgeschlossen sein müssen. Die Test-Durchführungszeit ist im klassischen Problem das Gewicht der Objekte. Die maximale Kapazität pro Testfahrzeug ist ein Jahr, da alle Tests nacheinander ausgeführt werden müssen.

Die letzten beiden Eigenschaften der Tests bezüglich der Ausführungszeit ignorieren wir zunächst.

Zusammengefasst, lässt sich die Testfahrzeugkonfiguration wie folgt auf die Notation aus Abschnitt 2.1.2 mappen:

Symbol	Bedeutung	Definitionsbereich
Mengen		
$O$	Menge der Tests	$\mathbb{N}$
$B$	Menge der Testfahrzeuge	$\mathbb{N}$
$I$	Menge der inkompatiblen Tests	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Konstanten		
$c$	Ein Jahr	$\mathbb{N}$
$w_o$	Benötigte Zeit für Test $o \in O$	$\mathbb{N}$
Variablen		
$x_{ob}$	Genau dann, wenn $x_{ob} = 1$ wird Test $o \in O$ dem Testfahrzeug $b \in B$ zugeteilt	$\{0, 1\}$

Tabelle 2: Notation zu Testfahrzeugkonfiguration

## 2 Mathematische Grundprobleme

Im Folgenden sollen die mathematischen Grundprobleme analysiert werden.

## 2.1 Bin Packing

Beim Bin Packing Problem (oder auch Behälterproblem) geht es darum, eine gegebene Anzahl an Objekten auf eine kleinstmögliche Anzahl an Behältern zu verteilen, sodass kein Behälter überläuft.

Als ganzzahliges Optimierungsproblem lässt sich das Bin Packing Problem wie folgt darstellen: Jedes Objekt muss genau einem Behälter zugeteilt werden (2). Pro Behälter darf die maximale Kapazität nicht überschritten werden (3). Das Ziel ist, die Anzahl der Behälter zu minimieren, was mithilfe der Zielfunktion (1) erreicht wird.

Symbol	Bedeutung	Definitionsbereich
Mengen		
$O$	Menge der Objekte	$\mathbb{N}$
$B$	Menge der Behälter	$\mathbb{N}$
Konstanten		
$c$	Maximale Kapazität der Behälter	$\mathbb{N}$
$w_o$	Gewicht von Objekt $o \in O$	$\mathbb{N}$
Variablen		
$x_{ob}$	$x_{ob} = 1$ gdw. Objekt $o \in O$ dem Behälter $b \in B$ zugeteilt wird	$\{0, 1\}$
$y_b$	$y_b = 1$ gdw. Behälter $b \in B$ verwendet wird	$\{0, 1\}$

Tabelle 3: Notation Bin Packing

$$\min \quad \sum_{b \in B} y_b \quad (1)$$

$$s.t. \quad \sum_{b \in B} x_{ob} = 1, \quad \forall o \in O \quad (2)$$

$$\sum_{o \in O} w_o \cdot x_{ob} \leq c \cdot y_b, \quad \forall b \in B \quad (3)$$

$$x_{ob}, y_b \in \{0, 1\}, \quad \forall o \in O, b \in B \quad (4)$$

**Alternative Zielfunktionen.** In einer früheren Version dieses Dokuments wurde als Zielfunktion statt (1)

$$\sum_{b \in B, o \in O} b \cdot x_{ob}$$

minimiert,<sup>1</sup> was auch in der Literatur (für das speziellere Assembly Line Balancing Problem) zu finden ist [BSS22]. Diese Version ermöglicht im Vergleich zu der obigen Formulierung zwar die  $y$  Variablen einzusparen, führt aufgrund der Gewichtung allerdings manchmal zu suboptimalen Lösungen in Bezug auf die Anzahl der benötigten Bins.

Um dieses Problem zu vermeiden, kann in der Zielfunktion mit einer *cost explosion* gearbeitet werden, um zusätzliche Bins stärker zu bestrafen:

$$\min \sum_{b \in B, o \in O} |O|^b \cdot x_{ob}$$

Der Exponent kann auch  $b - 1$  sein, wenn Bin 0 den Koeffizienten 0 hat.

Da die Koeffizienten, abhängig von  $|B|$ , sehr groß werden können, kommt es in der Praxis jedoch schnell zu numerischen Problemen, weshalb diese Variante hier nur von theoretischem Interesse ist.

### 2.1.1 Assembly Line Balancing Problem

Eine interessante Erweiterung des Bin Packing Problems ergibt sich durch die Einführung von Reihenfolgebeziehungen zwischen den Objekten.

In der Literatur ist das Problem auch als Simple Assembly Line Balancing Problem (SALBP) bekannt. Bei diesem geht es darum, eine Reihe von Aufgaben mit Vorrangbedingungen auf mehrere hintereinanderliegende Stationen zu verteilen [BSS22]. Bei der im Folgenden betrachteten Problemvariante SALBP-1 ist die maximale Zeit für die Ausführung aller Aufgaben, die einer Station zugeteilt werden, vorgegeben, während die Anzahl der Stationen minimiert werden soll.

Die Objekte des Bin Packing Problems sind somit nun die Aufgaben und die Behälter die Stationen des Problems.

---

<sup>1</sup>Die Constraints können fast unverändert bleiben; es müssen lediglich die  $y$  Variablen gelöscht werden.

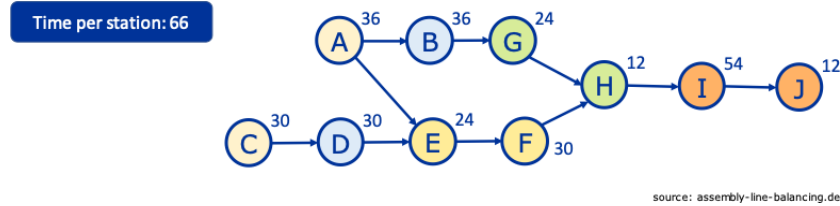


Abbildung 9: Beispiel Assembly Line Balancing Problem und Lösung

Als ganzzahliges Optimierungsproblem lässt sich SALBP-1 wie folgt darstellen: Jede Aufgabe muss genau einer Station zugeteilt werden (6). Pro Station muss die maximale Bearbeitungszeit eingehalten werden (7). Die Reihenfolgebedingungen müssen eingehalten werden. Das heißt, wenn zwischen zwei Aufgaben eine vorgegebene Reihenfolge gilt, dann darf die zweite Aufgabe nicht auf einer Station durchgeführt werden, die vor der ersten Aufgabe liegt (8). Das Ziel ist, die Anzahl der benötigten Stationen zu minimieren, was mithilfe der Zielfunktion (5) erreicht wird.

Symbol	Bedeutung	Definitionsbereich
Mengen		
$T$	Menge der Aufgaben	$\mathbb{N}$
$S$	Menge der Stationen	$\mathbb{N}$
$R$	Menge an Vorrangbedingungen zwischen zwei Aufgaben	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Konstanten		
$c$	Taktzeit	$\mathbb{N}$
$v_t$	Benötigte Zeit für Aufgabe $t \in T$	$\mathbb{N}$
Variablen		
$x_{ts}$	$x_{ts} = 1$ gdw. Aufgabe $t \in T$ Station $s \in S$ zugeteilt wird	$\{0, 1\}$
$y_s$	$y_s = 1$ gdw. Station $s \in S$ verwendet wird	$\{0, 1\}$

Tabelle 4: Notation SALBP-1



$$\min \quad \sum_{s \in S} y_s \quad (5)$$

$$s.t. \quad \sum_{s \in S} x_{ts} = 1, \quad \forall t \in T \quad (6)$$

$$\sum_{t \in T} v_t \cdot x_{ts} \leq c \cdot y_s, \quad \forall s \in S \quad (7)$$

$$\sum_{s \in S} s \cdot x_{ts} \leq \sum_{s \in S} s \cdot x_{t's}, \quad \forall (t, t') \in R \quad (8)$$

$$x_{ts}, y_s \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T, s \in S \quad (9)$$

**Alternative Zielfunktionen.** Neben den alternativen Zielfunktionen, die bereits in Abschnitt 2.1 besprochen wurden, gibt es für SALBP-1 eine weitere Möglichkeit (cf.[PA75]): Falls es in dem durch  $R$  induzierten Reihenfolgegraphen mehrere Senken gibt, wird eine fiktive Aufgabe  $t_s$  eingeführt, die nach allen anderen Aufgaben ausgeführt werden muss ( $R$  muss also für alle ursprünglichen Senken  $t$  um  $(t, t_s)$  erweitert werden). Da  $t_s$  offensichtlich auf der letzten Station ausgeführt werden muss, kann in der Zielfunktion die Stationsnummer dieser Aufgabe minimiert werden, um die Gesamtzahl an Stationen zu minimieren:

$$\min \sum_{s \in S} s \cdot x_{st_s}$$

Im Hinblick auf die Minimierung der benötigten Variablen und Constraints könnte diese Formulierung dann hilfreich sein, wenn es in einer konkreten SALBP-1 Instanz bereits wenig Senken im Reihenfolgegraphen gibt und potentiell viele Stationen benötigt werden (wodurch die ursprüngliche Formulierung viele  $y$  Variablen erfordern würde).

### 2.1.2 Bin Packing mit Konflikten

Eine weitere interessante Erweiterung des Bin Packing Problems ergibt sich durch die Einführung von inkompatiblen Objekten. Inkompatible Objekte müssen zwingend auf unterschiedliche Behälter aufgeteilt werden (13).

Dadurch ergibt sich das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem:

Symbol	Bedeutung	Definitionsbereich
Mengen		
$O$	Menge der Objekte	$\mathbb{N}$
$B$	Menge der Behälter	$\mathbb{N}$
$I$	Menge der inkompatiblen Objekte	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Konstanten		
$c$	Maximale Kapazität der Behälter	$\mathbb{N}$
$w_o$	Benötigte Größe für Objekt $o \in O$	$\mathbb{N}$
Variablen		
$x_{ob}$	Genau dann, wenn $x_{ob} = 1$ wird Objekt $o \in O$ dem Behälter $b \in B$ zugeteilt	$\{0, 1\}$
$y_b$	$y_b = 1$ gdw. Behälter $b \in B$ verwendet wird	$\{0, 1\}$

Tabelle 5: Notation zu Bin Packing mit Konflikten

$$\min \quad \sum_{b \in B} y_b \quad (10)$$

$$s.t. \quad \sum_{b \in B} x_{ob} = 1, \quad \forall o \in O \quad (11)$$

$$\sum_{o \in O} w_o \cdot x_{ob} \leq c \cdot y_b, \quad \forall b \in B \quad (12)$$

$$x_{ob} + x_{o'b} \leq 1, \quad \forall (o, o') \in I, b \in B \quad (13)$$

$$x_{ob} \in \{0, 1\}, \quad \forall o \in O, b \in B \quad (14)$$

### 3 Problem mappings

#### 3.1 Bin packing with conflicts - QUBO model

Consider the bin packing IP model from Abschnitt 2.1.2.

Define the QUBO cost function as

$$H(x, y) = A \cdot H_A(x, y) + B \cdot H_B(x) \quad (15)$$

The cost term  $H_B$  models the costs in eq. (10):

$$H_B(x) = \sum_{b \in B, o \in O} b \cdot x_{ob} . \quad (16)$$

The penalty term  $H_A$  encodes feasibility.

For every constraint in the IP model, a penalty term for its violation is introduced. For the bin-assignment-constraints (11):

$$\sum_{o \in O} \left( \sum_{b \in B} x_{ob} - 1 \right)^2 . \quad (17)$$

For the object-conflict-constraints (13) we introduce:

$$\sum_{b \in B} \sum_{o, o' \in I} (x_{ob} \cdot x_{o'b}) . \quad (18)$$

For the bin-capacity-constraints (12), auxiliary variables  $y$  are necessary. For  $b \in B$ , the *slack* is

$$S_b := c - \sum_{o \in O} w_o \cdot x_{ob} \geq 0 . \quad (19)$$

**Unary (one-hot) encoding of slack.** We introduce  $y_{sb} \in \{0, 1\}$ ,  $b \in B$ ,  $s \in \{0, 1, \dots, c\}$ , where  $y_{sb} = 1 \Leftrightarrow S_b = s$ . Thus,

$$S_b = \sum_{s=0}^c s \cdot y_{sb} \quad \forall b \in B . \quad (20)$$

This is modeled by introducing two additional penalty terms into  $H_A$ . First, for each  $b \in B$ , only a single  $y_{sb}$  is equal to one:

$$\sum_{b \in B} \left( 1 - \sum_{s=1}^c y_{sb} \right)^2 . \quad (21)$$

Second, for each  $b \in B$ , negative slack is penalized:

$$\sum_{b \in B} \left( \sum_{s=0}^c s \cdot y_{sb} - \sum_{o \in O} w_o \cdot x_{ob} \right)^2 . \quad (22)$$

In total, we need  $|B| \cdot (c + 1)$  additional variables.

**Binary (logarithmic) encoding of slack.** Here, we introduce a different slack-encoding with  $|B| \cdot \lceil \log_2(c+1) \rceil$  additional variables. We introduce  $y_{kb} \in \{0, 1\}$ ,  $b \in B$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, M\}$ , where

$$M := \lceil \log_2(c+1) \rceil. \quad (23)$$

Then, the slack has a binary representation

$$S_b = \sum_{k=0}^{M-2} 2^k \cdot y_{kb} + (c - 2^{M-1} + 1) \cdot y_{M-1,b}. \quad (24)$$

We add a penalty to  $H_A$  if the slack does not have such a binary representation, i.e. Constraint (12) is violated:

$$\sum_{b \in B} \left( \sum_{k=0}^{M-2} 2^k \cdot y_{kb} + (c - 2^{M-1} + 1) \cdot y_{M-1,b} - \sum_{o \in O} w_o \cdot x_{ob} \right)^2. \quad (25)$$

Now we can get  $H_A(x, y)$  by adding up

## 4 Metriken

### 4.1 Metriken Kategorie 1

Zusammenfassung der Metriken

### 4.2 Metriken Kategorie 2

Zusammenfassung der Metriken

## 5 Versionshistorie

Version	Datum	Autor(en)	Änderungen
0.0	2023-07-28	OptWare	Initiale Version: Beschreibung Use-Case, Bin Packing
0.1	2023-09-05	OptWare	Anpassung Beschreibung Testfahrzeugkonfiguration
0.2	2023-09-20	OptWare	Anpassung der Zielfunktionen
0.3	2023-12-19	OptWare	Beschreibung des Anwendungsfalls - Reihenfolgeplanung
0.4	2024-03-12	Fraunhofer IIS	Mapping des Bin Packing Problems zu QUBO Formulierung

## Literatur

- [BSS22] Nils Boysen, Philipp Schulze und Armin Scholl. “Assembly line balancing: What happened in the last fifteen years?” In: *European Journal of Operational Research* 301.3 (2022), S. 797–814. ISSN: 0377-2217. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.11.043>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221721009942>.
- [PA75] James H. Patterson und Joseph J. Albracht. “Assembly-Line Balancing: Zero-One Programming with Fibonacci Search”. In: *Operations Research* 23.1 (1975), S. 166–172. DOI: 10.1287/opre.23.1.166. URL: <https://doi.org/10.1287/opre.23.1.166>.

## Liste der noch zu erledigenden Punkte

Sollen Attribute zunächst vernachlässigt werden? Wenn nicht, sollte das Beispiel ggf. erweitert werden . . . . .	7
Liste von Vereinfachungen updaten! . . . . .	9
Nachdem die Parameter für den Datengenerator festgelegt wurden, sollte hier angegeben werden, wie die Parameter gesetzt wurden und wie viele Instanzen welcher Größe generiert wurden. Vielleicht kann der generierte Datensatz mit Grafiken/Tabellen dargestellt werden (wie viele Instanzen welcher Art, etc.)?! . . . . .	9
Liste ist nicht vollständig! . . . . .	11
Der Exponent kann auch $b - 1$ sein, wenn Bin 0 den Koeffizienten 0 hat.	15
Zusammenfassung der Metriken . . . . .	20
Zusammenfassung der Metriken . . . . .	20