

1 疲倦的光子（高年组）

在大爆炸模型提出的早期，有人为了反对大爆炸模型同时解释哈勃定律，提出了“疲倦的光子”假说。该假说认为宇宙是静态的，而光子会随着自己在宇宙中穿梭而失去能量。单位距离内损失的能量由下式表达：

$$\frac{dE}{dr} = -kE$$

其中 k 为一常数， E 为光子的能量。

请证明当 $z \ll 1$ ，上述假说会给出一个线性的红移-距离关系（即哈勃定律），并求出满足这个条件的 k 。

1.1 参考答案

解微分方程，有：

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dr} &= -kE \\ \frac{dE}{E} &= -kdr \\ \int_{E_0}^E \frac{dE}{E} &= -k \int_0^r dr \\ \ln \frac{E}{E_0} &= -kr \\ E(r) &= E_0 e^{-kr}\end{aligned}$$

其中 E_0 为光子初始的能量， r 是光子走过的距离。

红移和能量也有关系：

$$\begin{aligned}z &= \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{hc}{E} - \frac{hc}{E_0}}{\frac{hc}{E_0}} \\ &= \frac{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0}}{\frac{1}{E_0}} \\ &= E_0 \cdot \frac{E_0 - E}{EE_0} \\ &= \frac{E_0 - E}{E}\end{aligned}$$

带入能量的表达式，有：

$$\begin{aligned} z &= \frac{E_0 - E_0 e^{-kr}}{E_0 e^{-kr}} \\ &= e^{kr} (1 - e^{-kr}) \\ &= e^{kr} - 1 \end{aligned}$$

当 $z \ll 1$ ，即 $kr \ll 1$ 时，有

$$z \approx kr$$

同时带入多普勒效应($v = cz$)

$$cz = H_0 r$$

$$ckr = H_0 r$$

$$k = \frac{H_0}{c} = 2.267 \cdot 10^{-4} \text{Mpc}^{-1}$$