

1 洛伦兹变换

在本题中，你将重走爱因斯坦的道路，推导狭义相对论中的时空变换（又称洛伦兹变换），并由此推导一些有意思的结论。以下所有推导均在惯性系中进行。

1.1 准备工作

1. 在正式推导开始前，请简单阐述洛伦兹变换和牛顿力学中伽利略变换的区别
2. 人类是如何意识到伽利略变换失效的？

1.2 伽利略变换

在推导洛伦兹变换前，有必要先了解下伽利略变换。这有助于理解变换是什么，并提取些推导思路。

首先我们了解下什么是变换，考虑两个坐标系 S 系和 S' 系。伽利略变换提供了两个坐标系之间坐标 (x, y, z, t) 与 (x', y', z', t') 的转换公式。

请你推导经典理论中的伽利略变换。

提示：考虑两个坐标轴平行的参考系，在 $t = 0$ 时，两坐标系原点重合， S' 系相对 S 系有一个朝 $+x$ 方向的速度 v 。

1.3 洛伦兹变换

推导完伽利略变换后，下面你将推导洛伦兹变换。同样考虑两个坐标轴平行的参考系，在 $t = 0$ 时，两坐标系原点重合， S' 系相对 S 系有一个朝 $+x$ 方向的速度 v 。

1. 洛伦兹变换中， y 和 y' 以及 z 和 z' 的关系是什么？
2. 下面你要建立 (x, t) 和 (x', t') 的关系，请列出 x 与 x' 和 t' 以及 t 与 x' 和 t' 的关系，你应该列出一个四元一次方程（但是方程不一定有四条），这些方程的系数是我们想求的变换系数。

提示：狭义相对论认为时间和空间都是线性变化的，换句话说 S 系中的坐标增量 Δx 正比于 S' 系中的坐标增量 $\Delta x'$ ，对于时间也是同理。

3. 根据运动的相对性， S' 系的坐标转换成 S 系也应该有类似的形式，请写出 S' 系坐标和 S 系坐标的转换式，并根据此列出两个关于转换系数的方程。

提示：狭义相对论中， x 和 t 是相互独立的。

4. 仿照伽利略变换的思路，推导第三个关于转换系数的方程
5. 现在我们列最后一个方程，根据光速不变，列出第四个关于转换系数的方程
6. 列完方程后，请你解这四个方程，求出洛伦兹变换的4个系数

1.4 狭义相对论的应用

本题中，你将用洛伦兹变换推导些有意思的结论

1. 高速运动的尺子在相对论效应下会缩短，请证明这个结论
2. 高速运动的钟在相对论效应下时间会变长，请证明这个结论
3. 相对论提出的早期，有人提出了相对论效应产生的悖论。考虑一个高速运动的火车，即将穿过一个和火车静长度相同的隧道，隧道两边有可以关闭的门。在地面系中，火车会变短，故可以被关进隧道内；在火车系中，隧道会变短，故不可以被关进隧道内，一个火车不可能即被关在隧道内，又不能不被关在隧道内，这就产生了悖论。请你解释这个悖论。
4. 考虑一对双生子，一位留在地球上，一位乘坐宇宙飞船高速离开地球并在20年后返回。在地球上的双生子认为宇宙飞船上的兄弟以高速运动离开，因此他的时间过得慢，故相见时宇宙飞船上的兄弟更年轻；而宇宙飞船上的兄弟认为是地球在高速远离他，故地球上时间过得更慢，相见时地球上的兄弟应该更年轻。这个悖论又称双生子悖论，请你解释这个悖论

1.5 参考答案

1.5.1 准备工作

1. 伽利略变换假设的是绝对的时空，换句话说时间和空间在任意一个参考系下都是不变的，而洛伦兹变换没有这种特性。
2. 迈克耳孙-莫雷实验指出了光速在任意参考系下都是不变的，伽利略变换中，光速不变是不成立的。

1.5.2 伽利略变换

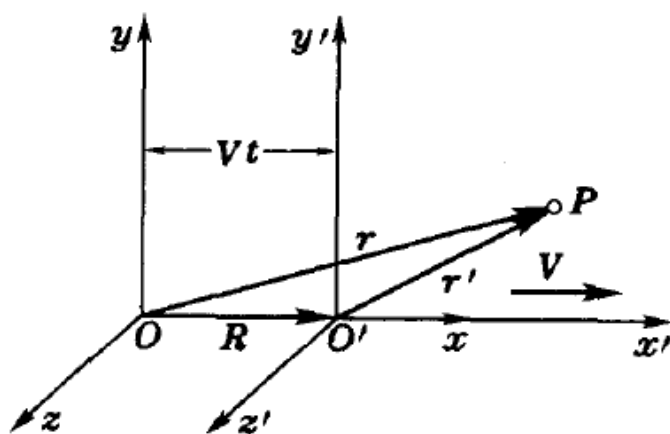


图 1: 伽利略变换

很明显， y 和 y' 坐标以及 z 和 z' 坐标是不改变的。同样，根据牛顿力学的时空观，两个坐标系下的时间坐标 t 和 t' 也相同。

因此变换的关键是求出 x 和 x' 的转换公式，不难看出 S' 系的原点在 S 系中的坐标为 vt ，因此可以得出 $x' = x - vt$ ，至此，我们完整的推导了伽利略变换。

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

1.5.3 洛伦兹变换

1. $y' = y$, $z' = z$, 因为在这两个坐标轴中没有相对运动。

2.

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}t' \\ t = a_{21}x' + a_{22}t' \end{cases}$$

这样的假设保证了变换前后的线性时空

3. 根据运动的相对性, S' 相对于 S 系沿 $+x$ 轴的方向运动等价于 S 系相对于 S' 系沿 $-x'$ 轴运动

$$\begin{cases} (-x') = a_{11}(-x) + a_{12}t \\ t' = a_{21}(-x) + a_{22}t \end{cases}$$

将本问求出的方程组带入上问求出的方程组的第一个式子, 得到:

$$(a_{11}^2 - a_{12}a_{21} - 1)x' + (a_{11}a_{12} - a_{12}a_{22})t' = 0$$

时间和空间是相互独立的, 不然会产生同样坐标系下不同位置时间不同的谬误, 因此有

$$\begin{cases} a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = 1 \\ a_{11} = a_{22} \end{cases}$$

4. 不难发现 S' 系的原点在 S 系中坐标为 $x = vt$, 带入第三问求出的方程组的第一个式子, 有必要先了解下伽利略变换

$$a_{12} = va_{11}$$

5. 根据光速不变原理, 有

$$c = \frac{x}{t} = \frac{a_{11}x' + a_{12}t'}{a_{21}x' + a_{22}t'}$$

稍微化简下, 有

$$\frac{x'}{t'} = \frac{ca_{22} - a_{12}}{a_{11} - ca_{21}} = c$$

再次化简, 并带入 $a_{11} = a_{22}$, 得出

$$a_{12} = c^2 a_{21}$$

6. 先联立各个方程

$$\begin{cases} a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = 1 \\ a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = va_{11} \\ a_{12} = c^2 a_{21} \end{cases}$$

解方程，有

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ a_{12} = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ a_{21} = \frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$ ，为了以后的方便，记 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

1.5.4 狭义相对论的应用

1. 定义尺子长度为同一时刻测量尺子两端的坐标差。尺子相对地面观测者以 v 的速度运动，记地面系为 S 系，尺子系为 S' 系，根据之前推算的变换，有

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δt 为测量尺子两端坐标的时间差， $\Delta t = 0$ ， $\Delta x'$ 为尺子系中尺子长度，即尺子静长度 L_0 ， Δx 为地面系中尺子长度，即尺子动长度 L ，因此有

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$

可以发现 $\sqrt{1-\beta^2} < 1$ ，即运动的尺子永远比其静止的长度短

2. 定义钟测量的时间为同一地点两个时间点测量的时间差。钟相对地面观测者以 v 的速度运动，记地面系为 S 系，钟系为 S' 系，根据洛伦兹变换，有

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δx 为钟在两个测量时刻的两个坐标差， $\Delta x = 0$ ， $\Delta t'$ 为钟系中钟测量的时间长度，即静止钟测量的时间 t_0 ， Δt 为地面系中钟测量的时间差，即运动钟测量的时间 t ，因此有

$$t = t_0\sqrt{1-\beta^2}$$

可以发现 $\sqrt{1-\beta^2} < 1$ ，即运动的钟测量的时间永远比其静止钟测量的时间慢。

3. 本题的关键时抓住同时的相对性，记地面系为 S 系，火车系为 S' 系，火车系中隧道关门发生的时间差为 $\Delta t'$ ，地面系中隧道关门的时间差为 $\Delta t = 0$ ，二者的关系为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

其中 Δx 为关门发生的坐标，两坐标明显不同，即 $\Delta x \neq 0$ ，因此 $\Delta t' \neq 0$ ，故在火车系中，关门发生于不同时间，不存在关不关进去的问题

4. 宇宙飞船中的兄弟至少经历了一次加速（例如从调转速度矢量的方向，从远离地球到指向地球），因此飞船上的兄弟并不处于一个惯性参考系中，故狭义相对论在此失效，需要考虑广义相对论。