# 1 高年组简答题：疲倦的光子

在大爆炸模型提出的早期，有人为了反对大爆炸模型同时解释哈勃定律，提出了“疲倦的光子”假说。该假说认为宇宙是静态的，而光子会随着自己在宇宙中穿梭而失去能量。单位距离内损失的能量由下式表达：

$$\frac{dE}{dr} = -kE$$

其中$k$为一常数，$E$为光子的能量。

请证明当$z << 1$，上述假说会给出一个线性的红移-距离关系（即哈勃定律），并求出满足这个条件的$k$。

## 1.1 参考答案

解微分方程，有：

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dr} &= -kE \\ \frac{dE}{E} &= -kdr \\ \int_{E_0}^{E} \frac{dE}{E} &= -k\int_0^r dr \\ \ln\frac{E}{E_0} &= -kr \\ E(r) &= E_0 e^{-kr}\end{aligned}$$

其中$E_0$为光子初始的能量，$r$是光子走过的距离。

红移和能量也有关系：

$$\begin{aligned}z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} &= \frac{\frac{hc}{E} - \frac{hc}{E_0}}{\frac{hc}{E_0}} \\ &= \frac{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0}}{\frac{1}{E_0}} \\ &= E_0 \cdot \frac{E_0 - E}{EE_0} \\ &= \frac{E_0 - E}{E}\end{aligned}$$

带入能量的表达式，有：

$$\begin{aligned} z &= \frac{E_0 - E_0 e^{-kr}}{E_0 e^{-kr}} \\ &= e^{kr}\left(1 - e^{-kr}\right) \\ &= e^{kr} - 1 \end{aligned}$$

当$z << 1$，即$kr << 1$时，有

$$z \approx kr$$

同时带入多普勒效应($v = cz$)

$$\begin{aligned} cz &= H_0 r \\ ckr &= H_0 r \\ k &= \frac{H_0}{c} = 2.267 \cdot 10^{-4}\mathrm{Mpc}^{-1} \end{aligned}$$

# 2 普通单选题：第四宇宙速度

定义第四宇宙速度为从地球发射的卫星逃逸银河系的速度，请求出第四宇宙速度的数值，假设太阳位于银河系的边缘，取银河系质量为$M_{Gal} = 1 \times 10^{12} M_{Sun}$，半径为$R_{Gal} = 33$ kpc

A. 493.927 km/s

B. 510.628 km/s

C. 150.483 km/s

D. 149.559 km/s

## 2.1 参考答案

为了求出第四宇宙速度，先求出第三宇宙速度，地球轨道处逃逸太阳的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2GM_s}{R}} = 42.127 \text{ km/s}$$

考虑到卫星在逃逸的过程中，卫星会获得地球绕转太阳的轨道速度，故在脱离地球引力后，逃离太阳引力所需的速度为

$$v'_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_s}{R}} - \sqrt{\frac{GM_s}{R}} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{GM_s}{R}} = 12.339 \text{ km/s}$$

设此时探测器的动能为$E_f$，为了逃离地球，探测器需要达到第二宇宙速度，记探测器逃离地球所需的动能为$E_2$，那么探测器从地球出发，逃离太阳需要的总动能为

$$E_3 = E_f + E_2$$

三者的速度则有如下关系

$$v_3^2 = v'^2_{esc} + v_2^2$$

其中$v_3$为第三宇宙速度，$v_2$为第二宇宙速度，$v_2 = 11.187$ km/s，因此第三宇宙速度为

$$v_3 = \sqrt{v'^2_{esc} + v_2^2} = 16.655 \text{ km/s}$$

同理我们可以求出第四宇宙速度，考虑到太阳绕转银河系带来的速度后，银河系边缘的逃逸速度为

$$v_{esc} = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{GM_{gal}}{R_{gal}}} = 149.559 \text{ km/s}$$

因此第四宇宙速度为

$$v_4 = \sqrt{v_{esc}^2 + v_3^2} = 150.483 \text{ km/s}$$

答案为C。

# 3 低年组单选题：太阳还是黑洞

如果太阳突然被一个质量相同的黑洞替代，地球的轨道会如何的变化？

A. 什么都不会发生

B. 地球会立刻飞出太阳系

C. 地球会被立刻吸入黑洞

D. 地球的轨道会变成一个离心率更大的椭圆

## 3.1 参考答案

牛顿万有引力定律给出

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

其中$M$为中央天体质量，题中说明该质量不变，因此地球受黑洞的引力和受太阳的引力相同，故地球的轨道不会变化。

答案是A。

# 4 高年组单选：核聚变

已知恒星的能源来自于核聚变，假设氢原子的动能全部由热运动提供，估算经典条件下发生核聚变的最低温度，假设两个氢原子发生聚变时最近距离为$r = 10^{-15}$ m。

A. $10^8$ K

B. $10^9$ K

C. $10^{10}$ K

D. $10^{11}$ K

## 4.1 参考答案

气体热运动的平均动能为

$$K = \frac{3}{2}kT$$

聚变过程中，氢原子需要克服库伦力势能从而发生聚变，由于库伦力和引力均为平方反比力，其势能形式应该相同。

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r}$$

其中$Q$为氢原子的电荷，$Q = e$为基本电荷，如果聚变要发生，动能必须大于势能，否者两原子无法接近彼此，因此边界条件为

$$\frac{3}{2}kT_{min} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = 0$$

解出$T_{min}$, 有

$$T_{min} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{kr} \approx 10^{10}\ \mathrm{K}$$

答案是C。

可以发现经典条件下聚变所发生的最低温度远大于太阳核心温度，经典理论在此处失效了。量子隧穿效应可以解释为何太阳核心会发生核聚变，在量子隧穿效应中，一个原子有可能穿过库伦势能构造的势能壁垒，故所需的动能相比经典理论中会大大降低。

# 5 高年组单选：距离

通过哈勃定律和多普勒效应，估算$z = 1$处的距离

A. 4282 Mpc

B. 2569 Mpc

C. 7138 Mpc

D. 退行速度为光速，没有对应的物理背景，该问题无意义

## 5.1 参考答案

首先该问题肯定是有意义的，宇宙星体的退行速度是可以超过光速的，因为超光速运动的是膨胀的宇宙，而不是星体，这个假设不违反相对论的基本假设，即物体运动速度不能超过光速。

求这个问题需要引入相对论修正后的红移与速度的关系：

$$1 + z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

解$v$，有

$$v = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}c$$

带入$z = 1$，有

$$v = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1}c = \frac{3}{5}c$$

求出退行速度后，带入哈勃定律

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{3}{5}\frac{c}{H_0} = 2569\ \mathrm{Mpc}$$

答案是B

# 6 普通简答题：太阳核心

假设太阳保持流体静力平衡，并且太阳核心是理想气体，估算

1. 太阳核心的压强
2. 太阳核心的粒子数密度
3. 太阳核心的粒子数密度与地球大气粒子数密度的比

太阳核心温度为$T_c = 10^7$ K。

提示：流体静力平衡方程为：

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

等式左端本质上这是一个导数（可以理解为斜率），但是在粗略近似（意味着你可以忽略掉某些系数）情况下，取$dP \approx P_c - P_s$为太阳核心压力与表面压力的差，$dr \approx r_c - r_s$为太阳核心半径与表面半径的差，取$M$为恒星的质量，$\rho$为恒星的平均密度

如果你不会，考虑从量纲方面下手，压力与引力常数$G$，恒星质量$M$和恒星半径$R$相关

## 6.1 参考答案

1. 注意到$P_s = 0$且$r_c = 0$（恒星的压力由引力提供，恒星表面没有物质，因此没有压力）于是，有
$$\frac{P_s}{-R} \approx -\frac{GM\rho}{R^2}$$
带入密度的定义，有
$$\frac{P_s}{R} \approx \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{M}{4/3\pi R^3}$$
化简得出
$$P_c \approx \frac{GM^2}{R^4} = 1.135 \cdot 10^{15} \text{ Pa}$$
这里的系被忽略掉了（导数都被近似成了斜率还留着系数干啥），提示中说了忽略系数，因此系数必须忽略掉，用量纲的角度就会直接得到这个式子。

2. 根据理想气体方程
$$PV = Nk_BT$$
数密度定义为$n = \dfrac{N}{V}$，为单位体积内粒子的数量，可以得出：
$$n = \frac{P}{k_BT} = 8.221 \cdot 10^{30}/m^3$$

3. 假设地球大气为理想气体地球大气压$P_E = 10^5$ Pa，地球大气温度取$T_E = 300$ K，根据理想气体方程
$$n_Ev = \frac{P_E}{k_BT_E} = 2.414 \cdot 10^{25}/m^3$$
两个数密度相比，有：
$$\frac{n}{n_E} = 340555$$

# 7 普通简答题：变轨

考虑一颗卫星，在一个椭圆轨道上绕地球公转，半长轴$a_1 = 15000\text{km}$，偏心率$e_1 = 0.2$（称其为旧轨道）。卫星需要变轨到一个新的椭圆轨道，半长轴为$a_2 = 25000\text{km}$，偏心率为$e_2 = 0.4$（称其为新轨道），两轨道共面。

已知第一次变轨位于旧轨道的近日点，第二次变轨位于新轨道的半短轴处，请求出两次变轨需要的速度增量，以及速度增量与速度矢量的夹角

提示：变轨时速度矢量不一定共线

## 7.1 参考答案

假设变轨时，卫星的轨道也为椭圆，我们可以通过这个求出变轨轨道的极坐标方程。

设变轨轨道的极坐标方程为

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

这个轨道近日点与旧轨道近日点重合，即

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos 0} = a_1(1-e_1) = 12000 \text{ km}$$

该轨道的另外一点位于新轨道的半短轴处，我们需要先求出来第二次变轨瞬间的卫星的极坐标。

位于椭圆半短轴处的点距离椭圆焦点的距离是椭圆的半长轴，因此$r_2 = a_2 = 25000\text{km}$，此时其极角的余弦值为

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{e_2}\frac{a_2(1-e_2^2)}{r_2} - 1 = -\frac{2}{5}$$

因此得出第二个关于变轨轨道的方程

$$r_2 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_2} = 25000 \text{ km}$$

联立两方程，有

$$\begin{cases} \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos 0} = a_1(1-e_1) = 12000 \text{ km} \\ r_2 = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_2} = 25000 \text{ km} \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} a = 29333 \text{ km} \\ e = 0.591 \end{cases}$$

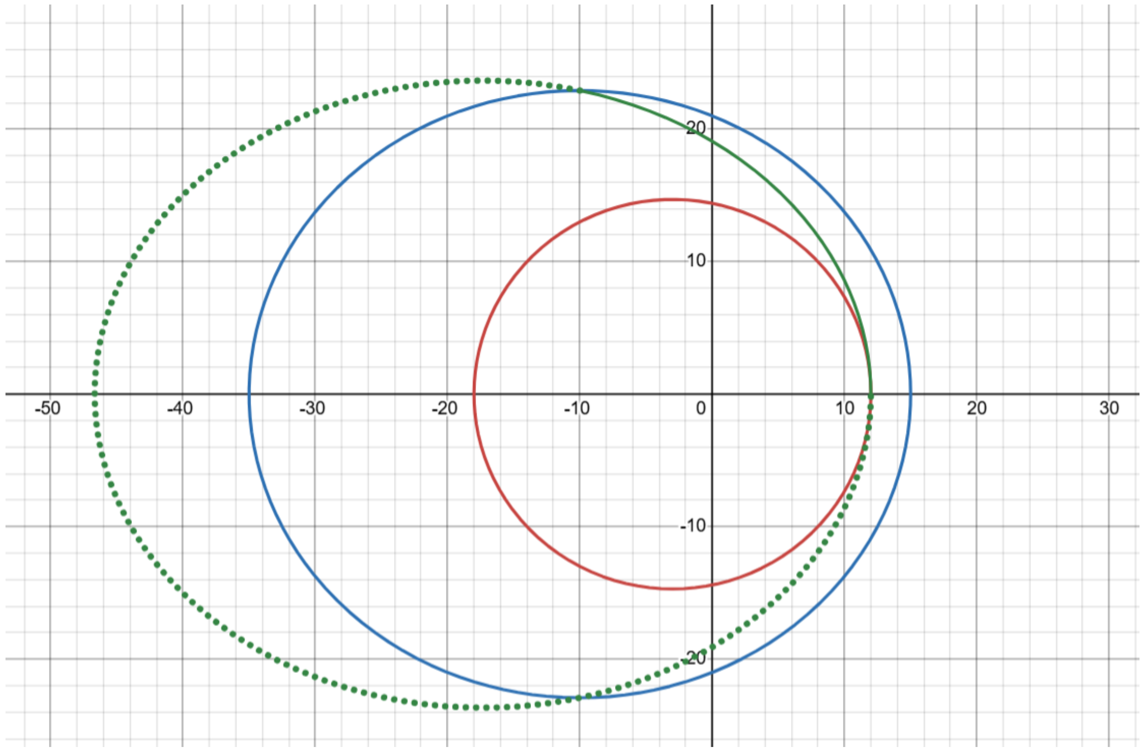


图 1: 变轨示意图

上图是变轨示意图，红色的是旧轨道，蓝色的是新轨道，实线绿色的是卫星实际上走过的变轨轨道，虚线绿色是卫星完整的变轨轨道

根据活力公式可以解出第一次变轨所需的速度

$$v_1 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1}\right)} = 6314.02 \text{ m/s}$$

$$v_{peri} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)} = 7270.050 \text{ m/s}$$

速度增量为

$$\Delta v_1 = v_{peri} - v_1 = 956.030 \text{ m/s}$$

此时速度矢量共线，故速度增量与速度矢量的夹角为0

同样可以求出第二次变轨所需的速度，但是需要注意到这次变轨时，速度矢量并不重合

$$v_2 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2}\right)} = 3993.337 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a}\right)} = 4378.125 \text{ m/s}$$

现在需要求出来两个速度矢量的夹角，最直观的想法当然是通过求导求出来夹角的大小，但是我们可以用角动量守恒来处理（及开普勒第二定律）

$$L = mv_{peri}r_1 = mvr_2\sin\alpha$$

其中$\alpha$是第二次变轨前速度矢量和位置矢量的夹角，因此可以解出$\alpha$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{v_{peri}}{v}\cdot\frac{r_1}{r_2}\right) = 52.850^\circ$$

因此速度矢量和位置矢量的夹角为

$$\beta = \pi - \alpha = 127.15^\circ$$

两个速度矢量的夹角为

$$\gamma = \beta - \frac{\pi}{2} = 37.15^\circ$$

根据余弦定理，变轨所需的速度为

$$\Delta v_2 = \sqrt{v^2 + v_2^2 - 2vv_2\cos\gamma} = 2691.522 \text{ m/s}$$

考虑到卫星在此处需要减速，$\Delta v = -2691.522$ m/s 与$v$的夹角为

$$\sin i = \frac{v_2}{\Delta v}\sin\gamma$$

解出$i = 63.637^\circ$