

1 洛伦兹变换

在本题中，你将重走爱因斯坦的道路，推导狭义相对论中的时空变换（又称洛伦兹变换），并由此推导一些有意思的结论。

1.1 准备工作

1. 在正式推导开始前，请简单阐述洛伦兹变换和牛顿力学中伽利略变换的区别
2. 人类是如何意识到伽利略变换失效的？

1.2 伽利略变换

在推导洛伦兹变换前，有必要先了解下伽利略变换。这有助于理解变换是什么，并提取些推导思路。

首先我们了解下什么是变换，考虑两个坐标系 S 系和 S' 系。伽利略变换提供了两个坐标系之间坐标 (x, y, z, t) 与 (x', y', z', t') 的转换公式。

请你推导经典理论中的伽利略变换。

提示：考虑两个坐标轴平行的参考系，在 $t = 0$ 时，两坐标系原点重合， S' 系相对 S 系有一个朝 $+x$ 方向的速度 v 。

1.3 洛伦兹变换

推导完伽利略变换后，下面你将推导洛伦兹变换。同样考虑两个坐标轴平行的参考系，在 $t = 0$ 时，两坐标系原点重合， S' 系相对 S 系有一个朝 $+x$ 方向的速度 v 。

1. 洛伦兹变换中， y 和 y' 以及 z 和 z' 的关系是什么？
2. 下面你要建立 (x, t) 和 (x', t') 的关系，请列出 x 与 x' 和 t' 以及 t 与 x' 和 t' 的关系，你应该列出一个四元一次方程（但是方程不一定有四条），这些方程的系数是我们想求的变换系数。

提示：狭义相对论认为时间和空间都是线性变化的，换句话说 S 系中的坐标增量 Δx 正比于 S' 系中的坐标增量 $\Delta x'$ ，对于时间也是同理。

1.4 参考答案

1.4.1 准备工作

1. 伽利略变换假设的是绝对的时空，换句话说时间和空间在任意一个参考系下都是不变的，而洛伦兹变换没有这种特性。
2. 迈克耳孙-莫雷实验指出了光速在任意参考系下都是不变的，伽利略变换中，光速不变是不成立的。

1.4.2 伽利略变换

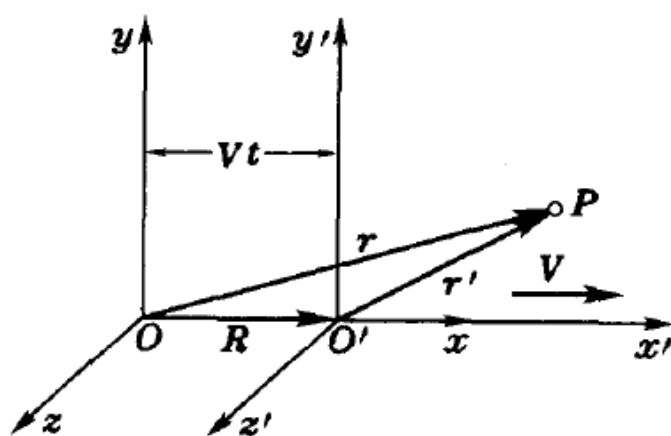


图 1: 伽利略变换

很明显， y 和 y' 坐标以及 z 和 z' 坐标是不改变的。同样，根据牛顿力学的时空观，两个坐标系下的时间坐标 t 和 t' 也相同。

因此变换的关键是求出 x 和 x' 的转换公式，不难看出 S' 系的原点在 S 系中的坐标为 vt ，因此可以得出 $x' = x - vt$ ，至此，我们完整的推导了伽利略变换。

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

1.4.3 洛伦兹变换

1. $y' = y$, $z' = z$, 因为在这两个坐标轴中没有相对运动。

2.

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}t' \\ t = a_{21}x' + a_{22}t' \end{cases}$$

这样的假设保证了变换前后的线性时空