狭义相对论

勾陈一

2025/08/18

本题中，你将应用狭义相对论解决一些实际问题，下面是狭义相对论中的时空变换，又称洛伦兹变换，你会频繁的用到它。注意：狭义相对论只在惯性系中成立。

考虑一个坐标系，其中有3个空间坐标，1个时间坐标，即(x, y, z, t)。这样，在坐标系中发生的一个事件就可以完整的被记录下来。为了完成下面的题目，你将了解狭义相对论下的坐标转换公式。

如图1所示，考虑两个坐标系，S系与S'系，S'系相对S系的$+x$轴有v的相对速度，两个参考系的坐标转换公式由下式给出

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

其中$\beta = \dfrac{v}{c}$。

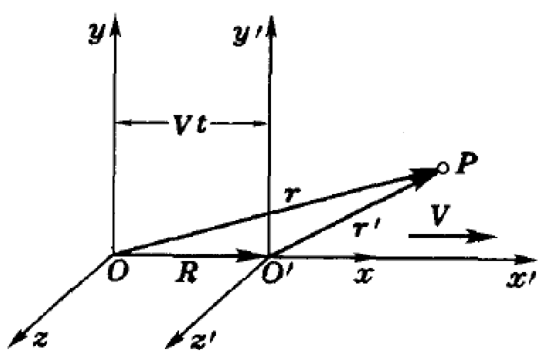


图 1: S系与S'系示意图

1 试题

完成下面问题：

1. 以下哪个实验说证明了以太不存在，同时也证明了相对论基本原理（即光速不变）？

   (a) 迈克耳孙-莫雷实验

   (b) 卡文迪什扭秤实验

   (c) 托里拆利水银柱实验

   (d) 油滴实验

2. 考虑一辆高速行驶的火车，火车在进入隧道时的速度为$v = 0.8c$，隧道长50m，地面的隧道管理员在火车完全进入隧道时同时关闭隧道两边的大门，在火车驾驶员眼中，两扇门关闭的时间差是什么？火车进入隧道的门称为前门，火车离开隧道的门称为后门，哪扇门先关闭？

   (a) 222.376 ns，前门

   (b) 222.376 ns，后门

   (c) 222.376 μs，前门

   (d) 222.376 μs，后门

3. 尺缩钟慢是狭义相对论一个重要的效应。定义尺子的长度为一个参考系（S系）内两个地点同一时刻的坐标差，在一个相对于S系运动的系中测量尺子，会发现尺子的长度会发生改变。同理，定义时钟测量的时间差为同一坐标不同时刻的差，在一个运动的参考系中测量时间差也会发现时间差发生了改变。请根据洛伦兹变换求出这个改变量。记L_0为尺子的静长度，t_0为静止钟测量的时间；L为尺子的动长度，t为运动钟测量的时间，请给出它们二者的关系

   (a) $L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$，$t_0 = t\sqrt{1-\beta^2}$

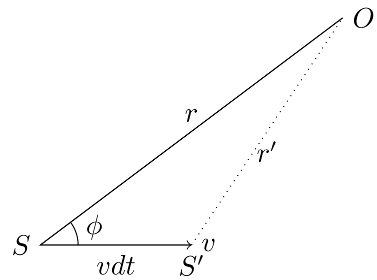
   (b) $L = L\sqrt{1-\beta^2}$，$t = t_0\sqrt{1-\beta^2}$

   (c) $L_0 = L\sqrt{1-\beta^2}$，$t_0 = t\sqrt{1-\beta^2}$

   (d) $L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$，$t = t_0\sqrt{1-\beta^2}$

4. 狭义相对论中，多普勒效应也会发生改变，请推导出完整的狭义相对论多普勒效应的公式。

   提示：考虑一个以v速度运动的源，观测者位于ϕ方位角处，在源参考系和观测者参考系中，单位时间接受到的波峰数一样，即$\nu_0 dt_s = \nu dt_{obs}$，你应该求出$dt_s$与$dt_{obs}$的关系



   (a) $\nu = \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\phi}\nu_0$

   (b) $\nu = \dfrac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}\nu_0$

   (c) $\nu = (1-\beta\cos\phi)\sqrt{1-\beta^2}\nu_0$

   (d) $\nu_0 = (1-\beta\cos\phi)\sqrt{1-\beta^2}\nu$

5. 考虑一个面向观测者以$v = 0.99c$运动的Hα源，观测者眼中的Hα线波长为多少（实验室系中Hα发射线的波长为$\lambda = 656.28$nm）

   (a) 9528 nm

   (b) 465.224 μm

   (c) 46.522 nm

   (d) 0.926 nm

6. 考虑两个坐标系，S'系相对S系有u的相对速度，如果一个物体在S系x轴的速度分量为v，求S'系中该物体x'轴的速度分量v'。提示：求出$\dfrac{dx}{dt}$和$\dfrac{dx'}{dt'}$，并尝试联立二者。

   (a) $v' = \dfrac{v+u}{1-\dfrac{uv}{c^2}}$

   (b) $v' = \dfrac{v+u}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$

   (c) $v' = \dfrac{v-u}{1-\dfrac{uv}{c^2}}$

(d) $v' = \dfrac{v-u}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$

7. 推导狭义相对论中动质量和静质量的关系式。

   提示：考虑两个小球，一个小球以v的速度撞上了一个静止的小球，整个过程质量和动量守恒，碰撞为完全非弹性碰撞。

   (a) $m = m_0\sqrt{1-\beta^2}$

   (b) $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

   (c) $m = (1-\beta)m_0$

   (d) $m = \dfrac{m_0}{1-\beta}$

8. 想必你一定知道相对论的双生子悖论。考虑一对双胞胎，一位兄弟乘坐飞船以$0.99c$的速度远离地球，10年后转向并再花10年回到地球。此时地球上的兄弟认为飞船上的兄弟在高速运动，因此飞船上的兄弟经历的时间更慢；而飞船上的兄弟认为地球上的兄弟在高速远离自己，因此地球上的兄弟经历的时间更慢。这就产生了悖论，请解释悖论为什么不合理

   (a) 年龄是以大部分人类所经历的时间定义的，所以飞船上兄弟对于时间流速的观点不成立

   (b) 因为飞船要转向，所以飞船上的兄弟不一直处于一个惯性系，因此狭义相对论不适用

   (c) 因为在极高速情况下，狭义相对论失效了，需要考虑广义相对论

   (d) 因为光速有限，A 看到 B 的钟走得慢，B 看到 A 的钟走得快

2 参考答案

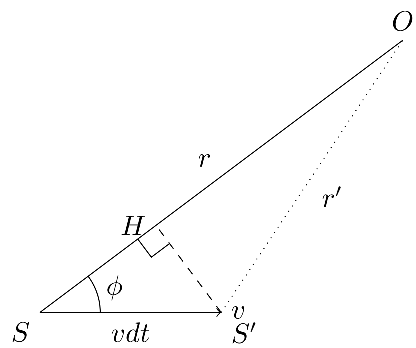
1. 迈克耳孙-莫雷实验证明了以太不存在，从而引出光速不变，答案是A。卡文迪许扭秤实验测出了万有引力常数值，托里拆利水银柱实验测出了大气压，油滴实验实验测出了基本电荷的大小

2. 在地面系中，记前门关闭的坐标为(x_1, t_1)，记后门关闭的坐标为(x_2, t_2)，根据时间的变换式，有
$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
地面系中，两事件同时发生，即$t_2 - t_1 = 0$，而$x_2 - x_1 = 50$，因此，在火车参考系中，两扇门关闭的时差为
$$\Delta t' = \frac{v}{c^2}\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 222.376\text{ns}$$
$\Delta t' > 0$说明$t_1' < t_2'$，也就是后门先关，答案是B。

3. 定义尺子为两个地点同一时刻的坐标差，假设尺子相对一参考系有v的速度，因此有
$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
其中$L_0 = x_2' - x_1'$是尺子系中尺子的长度，即尺子的静长度，$L = x_2 - x_1$是静止系中尺子的长度，即尺子的动长度，因此
$$L_0 = \frac{L - v(t_1 - t_2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
因此有
$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$
可以发现$\sqrt{1-\beta^2} < 1$，因此尺子的动长度永远比静长度短。

同理，定义钟测量的时间差为同一地点两次测量的时间差，因此有
$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
即
$$t = t_0\sqrt{1-\beta^2}$$
答案选D。

4. 当$t = 0$时，波源位于S点并发射一束光，dt_s时刻后，波源运行到了S'点并发射第二束光。在观测者O眼中，此段时间为
$$dt = \frac{dt_s}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



$t=\dfrac{r_0}{c}$时，该光束到达O点。下面我们要求在O参考系中，光束何时到达，源首先用了dt时间运动到了S'处并发射一束光，运动的距离为vdt，这束光在发射后$\dfrac{r'}{c}$被观测者接受。其中

$$r'=r-vdt\cos\phi$$

这里，我们假设vdt_s十分的小，这样r和r'几乎重合，那么在观测者眼中，两束光到达的时间差为

$$dt_{obs}=dt+\frac{r-vdt\cos\phi}{c}-\frac{r}{c}=(1-\beta\cos\phi)\,dt=\frac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}dt_s$$

因为两个参考系内接受到的波峰数不变，所以

$$\nu_0 dt_s=\nu dt_{obs}$$

则

$$\nu=\nu_0\frac{dt_s}{dt_{obs}}=\nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\phi}$$

答案选A。

5. 波频率和波速有如下关系：

$$\lambda\nu=c$$

其中c为光速，由上一问求出的多普勒效应公式

$$\lambda=\frac{1-\beta\cos\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda_0$$

带入$\lambda_0=656.28\ \text{nm}$，$\beta=0.99$，得出观测到的频率为$\lambda=46.522\ \text{nm}$，属于极紫外线。答案选C。

6. 已知

$$\begin{cases}x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\\[2ex] t'=\dfrac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$$

因此

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{d\left(\dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{d\left(\dfrac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}$$

化简后得出

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx-udt}{dt-\dfrac{u}{c^2}dx}$$

上下同除dt，得到x轴速度变换式

$$v' = \frac{\dfrac{dx}{dt}-u}{1-\dfrac{u}{c^2}\dfrac{dx}{dt}v} = \frac{v-u}{1-\dfrac{u}{c^2}v}$$

7. 这道题有点先射箭再画靶的嫌疑。首先是要证明质量真的和速度有关，然后才能去推导这个动质量和静质量的关系。不过具体证明十分麻烦，就直接当质量和速度有关就好了。

   设两个球的静质量为m_0，以v运动时，动质量为m；碰撞后的大球质量为M，以u的速度运动。

   根据质量守恒和动量守恒，有

$$\begin{aligned} m+m_0 &= M \\ mv &= Mu \end{aligned}$$

   可以解出

$$m = \frac{m_0}{\dfrac{v}{u}-1}$$

   接下来要求出v和u的关系，将两个球分别命名为A球和B球，以A球为参考系，B球以v的速度运动，碰撞后大球速度为u；如果以B球为参考系，那么A球就以$-v$的速度运动，碰撞后大球的速度为$-u$。两个参考系的相对速度为v，根据速度变换，有

$$-u = \frac{u-v}{1-\dfrac{v}{c^2}u}$$

   变形后，有

$$\frac{uv}{c^2} - 2 + \frac{v}{u} = 0$$

   令$r = \dfrac{v}{u}$，带入后有

$$
\begin{aligned}
\frac{ru^2}{c^2}-2+r=0\\
u^2=\frac{c^2}{r}-2+r\\
\frac{v^2}{r^2}=\frac{c^2}{r}(2-r)
\end{aligned}
$$

再次化简会得到一个二次方程

$$r^2-2r+\frac{v^2}{c^2}=0$$

取这个二次方程的正解

$$r=\frac{v}{u}=\frac{2+\sqrt{4-4\frac{v^2}{c^2}}}{2}=1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

因此动质量和静质量的关系为

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

答案是B。

8. 狭义相对论的前提是惯性系，换句话说洛伦兹变换只在两个有相对运动的惯性系中成立，其中飞船上的兄弟转向时改变的速度矢量，因此他不一直在一个惯性系中，所以飞船上的兄弟不能如此简单的应用狭义相对论，需要考虑广义相对论。答案是B。