集合论

集合论的起源

- 集合论是**现代数学的基础**，与现代数学的各个分支都有着密切联系，并且渗透到所有科技领域，是不可缺少的**数学工具和表达语言**。

- 集合论的起源：

- 可以追溯到16世纪末期，为了追寻微积分的坚实基础，开始时人们仅进行了有关数集的研究。
- 1879～1884年，**康托尔**(George Cantor)发表了一系列有关集合论研究的文章，奠定了集合论的深厚基础，
- 以后**策墨罗**(Zermelo)在1904～1908年列出了第一个集合论的公理系统，并逐步形成**公理化集合论**。

集合的用途

- 集合不仅可以表示**数**、而且还可以象数一样进行运算，更可以用于**非数值信息**的表示和处理，如数据的**增加、删除、排序以及数据间关系**的描述；有些很难用传统的数值计算来处理，但可以用集合运算来处理。

- 集合论在**程序语言、数据结构、编译原理、数据库与知识库、形式语言和人工智能**等领域都得到了广泛的应用，并且还得到了发展。

本章对集合论本身及其公理化系统不作深入探讨，主要是介绍集合、子集的**基本概念及相关性质**；**集合间的各种运算和它们满足的运算性质**；**有限集、无限集以及可数集的基本概念**。

1.0 内容提要

1.1 本章学习要求

重点掌握

1

1 集合的概念及集合间关系
2 集合的表示
3 集合运算及定律
4 幂集P(A)

一般掌握

2

1 集合的归纳法表示
2 集合的对称差运算

了解

3

1 集合的递归指定法表示
2 了解无限集的基本概念

1.2 集合——集合的概念

- **集合**（SET）：是由指定范围内的满足给定条件的所有对象聚集在一起构成的。

- 指定范围内的每一个对象称为这个**集合的元素**(element)

指定范围

特定对象

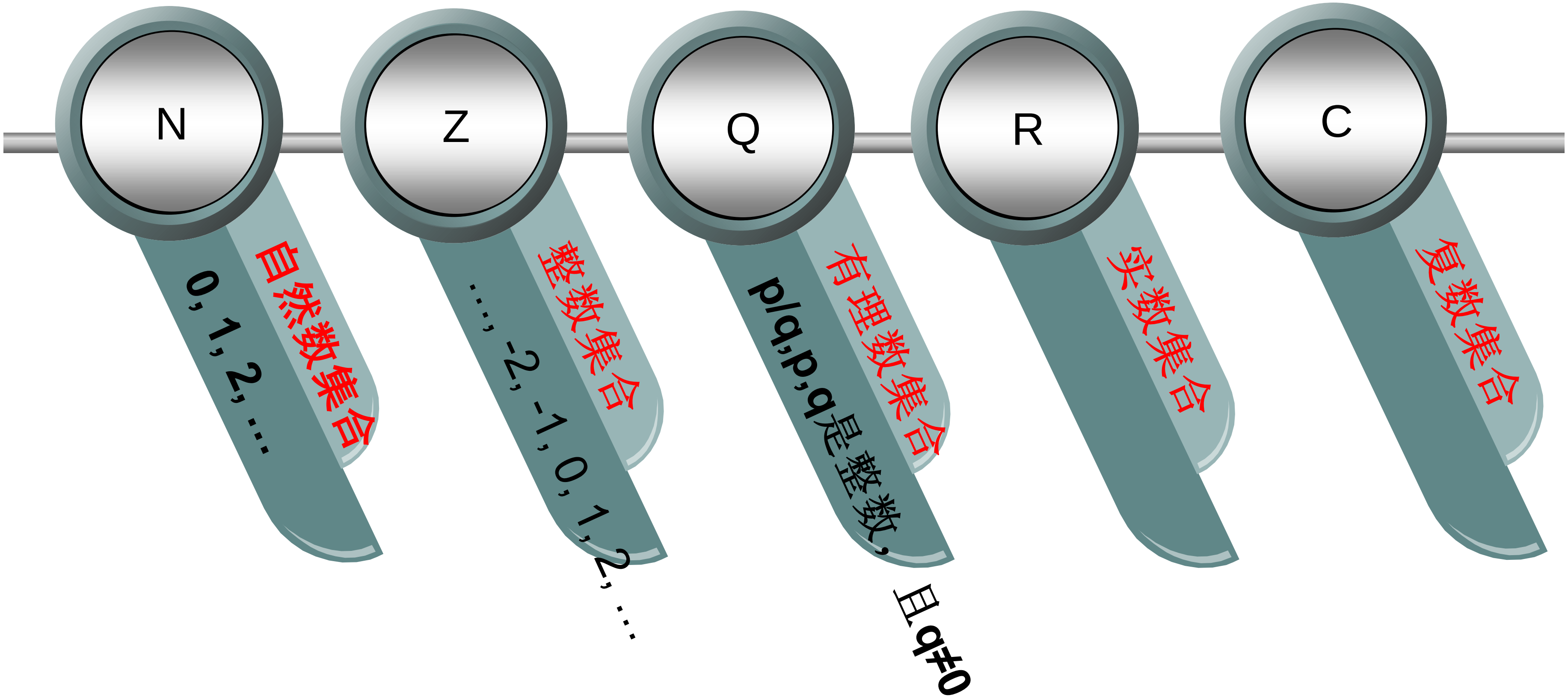
中国*所有真皮沙发*的聚集

1.2 集合——集合的记法

- 通常用带(不带)标号的大写字母A、B、C、…、A_1、 B_1、C_1、…、X、Y、Z、…表示**集合**；

- 通常用带（不带）标号的小写字母a、b、c、…、a1、 b1 、c1 、…、x、y、z、…表示**元素**。

固定的符号



1.2.1 集合的表示方法

集合是由它包含的元素完全确定的，为了表示一个集合，通常有：

- 枚举法
- 隐式法（叙述法）
- 归纳法
- 递归指定
- 文氏图

1、枚举法（显示法）

- 列出集合中全部元素或部分元素且能看出其他元素规律的方法叫**枚举法**
- **适用场景：**
  - 一个集合仅含有限个元素
  - 一个集合的元素之间有明显关系

例1.2.1

（1）$A = \{a，b，c，d\}$

（2）$B = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\}$

枚举法的优缺点

是一种显式表示法。

- 优点：具有**透明性**
- 缺点：在表示具有某种特性的集合或集合中元素过多时受到了一定的**局限**，而且，从计算机的角度看，**显式法是一种“静态”表示法**，如果一下子将这么多的“数据”输入到计算机中去，那将占据大量的“内存”。

2、叙述法（隐式法）

- 通过刻画集合中**元素所具备的某种特性**来表示集合的方法称为叙述法（隐式法）

- 一般表示方法：$A = \{x | P(x)\}$

x所具有的性质P

x是代表元

- 适用场景：
  - 一个集合含有很多或无穷多个元素；
  - 一个集合的元素之间有容易刻画的共同特征。

- 其突出**优点**是原则上不要求列出集合中全部元素，而只要给出该集合中元素的特性。

例1.2.2

1. $A = \{x|x$是“discrete mathematics”中的所有字母$\}$；
2. $Z = \{x|x$是一个整数$\}$；
3. $S = \{x|x$是整数，并且$x^2+1=0\}$；
4. $Q^+ = \{x|x$是一个正有理数$\}$。

3、归纳法

归纳法是通过归纳定义集合，主要由三部分组成：

- 第一部分：**基础**。指出某些最基本的元素属于某集合；
- 第二部分：**归纳**。指出由基本元素造出新元素的方法；
- 第三部分：**极小性**。指出该集合的界限。

注意：第一部分和第二部分**指出一个集合至少包括的元素**，第三部分指出**一个集合至多要包含的元素。**

例1.2.3

集合A按如下方式定义：

（1）0和1都是A中的元素；

（2）如果a, b是A中的元素，则ab, ba也是A中的元素；

（3）有限次使用(1)、(2)后所得到的字符串都是A中的元素。

试指出其定义方式，并举出集合A中的3个元素。

4、递归指定集合

通过**计算规则**定义集合中的元素

例1.2.4

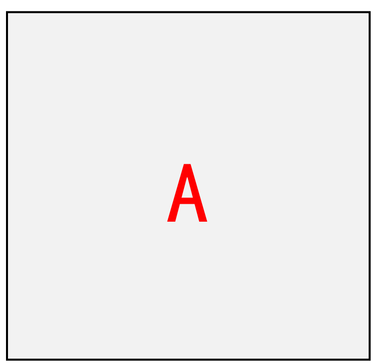
设 $a_0 = 1$，$a_{i+1} = 2a_i$（$i \geq 0$）。

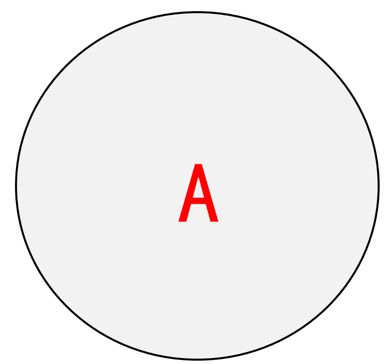
定义$S = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} = \{a_k \mid k \geq 0\}$,

试写出集合S中的所有元素。

5、文氏图解法

- **文氏图解法**是一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的**圆形或方形**表示一个集合。





1.2.2 集合与元素的关系

- 元素与集合之间的"属于关系"是"明确"的。

对某个集合A和元素a来说，a属于集合A，记为$a \in A$，a不属于集合A，记为$a \notin A$。**两者必居其一且仅居其一。**

例如，对元素2和N，就有2属于N，即 $2 \in N$，
对元素-2和N，就有-2不属于N，即 $-2 \notin N$。

罗素悖论

例 在一个很僻静的孤岛上，住着一些人家，岛上只有一位理发师，该理发师专给那些并且只给那些不自己理发的人理发。那么，谁给这位理发师理发?

解：设$C=\{x|x$是不给自己理发的人$\}$

b是这位理发师

如 $b\in C$，则 $b\notin C$;

如 $b\notin C$，则 $b\in C$。

1.2.3 集合与集合的关系——集合的三大特征

1、**互异性**　集合中的元素都是不同的，凡是相同的元素，均视为同一个元素；

$$\{1,1,2\}=\{1,2\}$$

2、**确定性**　能够明确加以“区分的”对象；

3、**无序性**　集合中的元素是没有顺序的。

$$\{2,1\}=\{1,2\}$$

1.2.3 集合与集合的关系——集合的相等

- **外延性原理：**

A = B当且仅当A与B具有相同的元素，否则，A≠B。

例1.2.5

设$E = \{x|(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}, x\in R\}$

$F = \{x|(x\in Z^+)$且$(x^2 < 12)\}$。

试指出集合E和F中的元素。

解　集合$E = \{1, 2, 3\}$，$F = \{1, 2, 3\}$。

集合E, F中的元素完全相同，我们称这样的两个集合相等。

例1.2.6　设

A = {BASIC, PASCAL, ADA},

B = {ADA, BASIC, PASCAL},

请判断A和B的关系。

根据集合元素的无序性和外延性原理可得，A = B。

因为集合A = B，所以A中的每个元素都是B中的元素，我们称**集合B包含集合A。**

1.2.3 集合与集合的关系——包含关系

定义1.2.1　设A,B是任意两个集合，如果**B的每个元素都是A的元素**，则称B是A的子集合，简称**子集(Subset)**，这时也称**A包含B**，**或B被A包含**，记作**A⊇B 或B⊆A**，称“⊆”或“⊇”为包含关系(Inclusion Relation)。

如果B不被A所包含，则记作B $\not\subseteq$ A 。

上述包含定义的数学语言描述为：

B⊆A⇔对任意x，如x∈B，则x∈A。

显然，*对任意集合*A，*都有*A⊆A。

例1.2.7 设A = {BASIC, PASCAL, ADA},

B = {ADA, BASIC, PASCAL},

请判断A和B之间的包含关系。

解 根据集合间包含关系的定义知，$A \supseteq B$且$A \subseteq B$。

又从例1.2.6知，集合A = B，于是我们有：

定理1.2.2 设A、B是任意两个集合，则

$$A \subseteq B，B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$$

1.2.3 集合与集合的关系——真包含关系

定义1.2.2　设A,B是任意两个集合，如果$B\subseteq A$并且$A\neq B$

则称**B是A的真子集**(Proper Subset)，记作$B\subset A$，

称“$\subset$”为真包含关系(Properly Inclusion Relation)。

如果B不是A的真子集，则记作$B\not\subset A$。

上述真子集的数学语言描述为：

$B\subset A \Leftrightarrow$ 对任意x，如$x\in B$，则$x\in A$，并且存在$y\in A$，但$y\notin B$

例1.2.8 判断下列集合之间是否具有真包含关系。

（1）$A = \{a, b\}$和$B = \{a, b, c, d\}$；

（2）$C = \{a, b, c, d\}$和$D = \{a, b, c, d\}$。

解 根据真子集的定义，有

（1）$A \subset B$；

（2）因为$C = D$，

所以$C \not\subset D$，$D \not\subset C$。

例1.2.9 设$A = \{a\}$是一个集合，$B = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$，试问

$$\{A\} \in B 和 \{A\} \subseteq B$$

同时成立吗?

$\because \{A\} = \{\{a\}\}$，$\{\{a\}\} \in B$

$\therefore \{A\} \in B$成立;

$\because \{A\} = \{\{a\}\}$，$\{a\} \in B$

$\therefore \{A\} \subseteq B$成立。

$\{A\} \in B$和$A \subseteq B$同时成立。

1.2.4 几个特殊集合——空集

定义1.2.3 不含任何元素的集合叫做**空集**(Empty Set)，记作Φ。

空集可以符号化为

$$\Phi = \{x | x \neq x\}$$

空集是客观存在的。

定理1.2.3

（1）空集是一切集合的子集；

（2）空集是绝对唯一的。

例1.2.10 设$A = \{x|(x \in R)且(x^2<0)\}$，试列举集合A中的所有元素。

答：$A = \Phi$。

定理1.2.3 （2）的证明

分析 对“惟一性”的证明通常采用**反证法。**
即假设“不惟一”，得出矛盾，从而说明结论正确。

假设Φ_1和Φ_2是两个空集，且$\Phi_1 \neq \Phi_2$，

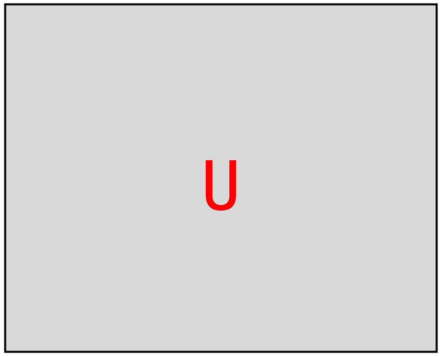
根据定理1.2.3 （1）空集是一切集合的子集
$\therefore \Phi1 \subseteq \Phi2$， $\Phi2 \subseteq \Phi1$，

根据定理1.2.2， $\Phi_1 = \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_1 \subseteq \Phi_2$，$\Phi_2 \subseteq \Phi_1$

1.2.4 几个特殊集合——全集

定义1.2.4 在一个相对固定的范围内，包含此范围内所有元素的集合，称为全集或论集(Universal Set)，用U或E表示。

用文氏图描述如下:



例1.2.12

① 在立体几何中，全集是由空间的全体点组成；

② 在我国的人口普查中，全集是由我国所有人组成。

定理1.2.5 全集是相对唯一的.

1.2.4 几个特殊集合——有限集和无限集

- 集合A中元素的数目称为集合A的基数（base number)，记为|A|。
- 如|A|是有限的，则称集合A为有限集，
- 如|A|是无限的，则称集合A为无限集。

例1.2.13　求下列集合的基数。

（1）$A = \Phi$；　　　　（2）$B = \{\Phi\}$;

（3）$C = \{a, b, c\}$；　（4）$D = \{a, \{b, c\}\}$。

解　$|A| = 0$，　$|B| = 1$，　$|C| = 3$，　$|D| = 2$。

m元子集

定义1.2.6 如果一个集合A含有n个元素，则称集合A为**n元集**，称A的含有m个($0\le m\le n$)元素的子集为**A的m元子集**。

任给一个n元集，怎样求出它的全部m元子集?

例1.2.14 设A={1,2}，求出A的全部m元子集。

$\because n=|A|=2$，$m\le n$

$\therefore m=0,1,2$。

$\therefore$当 $m=0$ 时，得到0元子集：Φ;

当 $m=1$ 时，得到1元子集：{1}, {2};

当 $m=2$ 时，得到2元子集：{1, 2}。

解 A的全部m元子集是Φ、{1}、{2}和{1, 2}。

子集总数

一般来说，对于n元集A，它的m（0≤m≤n）元子集有$\mathbf{C_n^m}$个，所以不同的子集总数有：

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

所以，n元集共有2^n个子集。

1.2.4 几个特殊集合——幂集

定义1.2.7 设A为任意集合，把**A的所有不同子集为元素**构成的集合叫做**A的幂集**(power set)，记为P(A)或2^A。

其符号化表示为

$$P(A) = \{x \mid 一切 x \subseteq A\}$$

该集合又称为**集族**(family of set)。

对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

例1.2.15 计算下列幂集

（1）$P(\Phi)$；（2）$P(\{\Phi\})$；（3）$P(\{a,\{b,c\}\})$。

解 （1）$P(\Phi) = \{\Phi\}$;

（2）$P(\{\Phi\}) = \{\Phi, \{\Phi\}\}$;

（3）$P(\{a,\{b,c\}\})=\{\Phi,\{a\},\{\{b,c\}\},\{a,\{b,c\}\}\}$。

显然，若集合A有n个元素，则集合A共有$2^{|A|}$个子集，即：

$$|P(A)| = 2^{|A|}。$$

1.2.5 集合的运算

定义1.2.8 设A、B是两个集合，

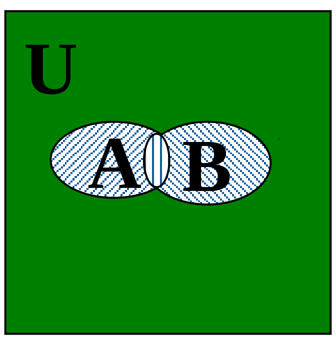
(1)并集 $A \cup B=\{x \mid x \in A 或 x \in B\}$

(2)交集 $A \cap B=\{x \mid x \in A 且 x \in B\}$

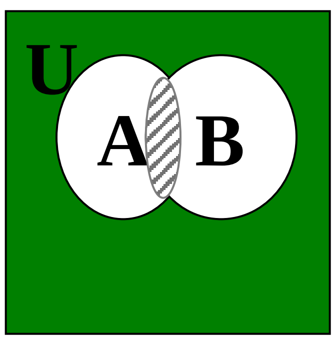
(3)差集 $A-B=\{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$

(4)补集 $\overline{A}=U-A=\{x \mid x \in U 且 x \notin A\}$ $(A', \sim A, A^C)$

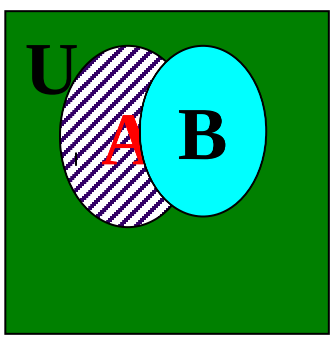
(5)对称差集 $A \oplus B=\{x \mid (x \in A)且(x \notin B)或(x \in B)且(x \notin A)\}$



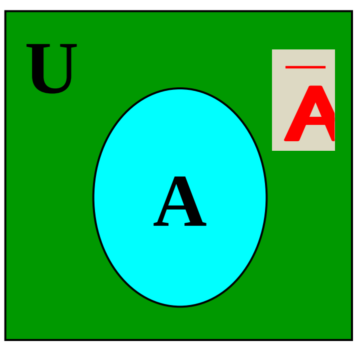
并集



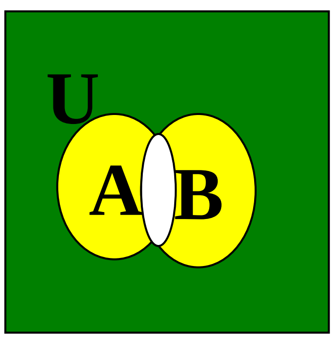
交集



差集



补集



对称差集

推广

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid (x \in A_1) \text{ 或 } (x \in A_2) \text{ 或} \ldots\ldots \text{或 } (x \in A_n)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots \cap A_n$$

$$= \{x \mid (x \in A_1) \text{且} (x \in A_2) \text{且} \ldots\ldots \text{且} (x \in A_n)\}$$

当n无限增大时，可以记为：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in Z^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in Z^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$$

定理1.2.5

- 幂等律: $A \cup A = A$;　$A \cap A = A$;
- 交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- 恒等律: $A \cup \Phi = A$;　$A \cap U = A$;
- 零　律: $A \cup U = U$;　$A \cap \Phi = \Phi$;
- 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 吸收律: $A \cap (A \cup B) = A$;　$A \cup (A \cap B) = A$;

定理1.2.5(续)

- $A - A = \Phi$;
- $A - B = A - (A \cap B)$;
- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$;
- $A \cup (B - A) = A \cup B$;
- $A - B = A \cap \overline{B}$;
- 否定律：$\overline{\overline{A}} = A$
- DeMorgan律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- 矛盾律：$A \cap \overline{A} = \Phi$;
- 排中律：$A \cup \overline{A} = U$。

选取证明

DeMorgan律：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

分析

定理1.2.2 设A、B是任意两个集合，则

$$A \subseteq B，B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

(1) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(2) $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

证明（a）：

① $\forall x \in \overline{A \cup B}$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

$\Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

② $\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$

$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

由①、②知，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明（b）：

在 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 中，用 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 分别取代A和B，则有

$$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = A \cap B$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}} = \overline{A \cap B}$$

$$\Rightarrow \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

1.3 无限集

有限集 ⟶ 无限集

量 变 ⟶ 质 变

无限集合无法用确切的个数来描述，因此，无限集合有许多有限集合所没有的一些特征，而有限集合的一些特征也不能任意推广到无限集合中去，即使有的能推广，也要做某些意义上的修改。

1.3.1 可数集合与不可数集合

问题 $\{1,2,3,\ldots\}$与$\{1^2,2^2,3^2,\ldots\}$哪个集合的元素更多?

引入：自然数集合

二十世纪初，集合成为数学的基本概念之后，由冯•诺依曼（Von Neumann，J）用集合的方式来定义自然数取得了成功，提出了用序列Φ，{Φ}，{Φ,{Φ}}，{Φ,{Φ},{Φ,{Φ}}}，……来定义自然数。

自然数集合N的定义

$\Phi \in N$,

若$n \in N$，则$n' :\equiv n \cup \{n\} \in N$。

也即：$0 :\equiv \Phi$,

$1 :\equiv \{\Phi\} = \{0\}$,

$2 :\equiv \{\Phi, \{\Phi\}\} = \{0, 1\}$

…

$n :\equiv \{0, 1, 2, 3, \ldots n-1\}$

…

故 $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

用集合的基数来定义
自然数集内的元素

等势的概念

定义1.3.1 设A，B是两个集合，若在A，B之间存在**1-1对应**的关系：

$$\psi: A \to B$$

则称A与B是**等势的**(equipotential)，记为：$A \sim B$。

也称集合A与B**等势**(equipotent)。

注意：若 $A = B$，则 $A \sim B$。 **(√)**

若 $A \sim B$，则 $A = B$ **(×)**

可数集合(可列集)

定义1.3.2 凡是与自然数集合等势的集合，均称为**可数集合**(可列集)(Countable Set)。可数集合的基数记为：$\aleph_0$ **(读作阿列夫零)**。

例1.3.1 下列集合都是可数集合：

1)$O^+ = \{x|x \in N，x是正奇数\}$;

2)$P = \{x|x \in N，x是素数\}$;

3)有理数集合Q.

解：1)

在O^+与N之间建立1-1对应的关系 f：N→O^+ 如下：

$$\begin{array}{ccccccccc} N & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \ldots \\ O^+ & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \ldots & 2n+1 & \ldots \end{array}$$

所以，O^+是可数集合。

2)

在P与N之间建立1-1对应的关系f：N→P如下：

N	0	1	2	3	4	…
f	↓	↓	↓	↓	↓	…
P	2	3	5	7	11	…

所以，P是可数集合。

3)

…-3/1[18]	-2/1[5]	-1/1[4]	0/1[0]	1/1[1]	2/1[10]	-3/1[11]…
…-3/2[17]	-2/2	-1/2[3]	0/2	1/2[2]	2/2	3/2[12]…
… -3/3	-2/3[6]	-1/3[7]	0/3	1/3[8]	2/3[9]	3/3…
-3/4[16]	-2/4	-1/4[15]	0/4	1/4[14]	2/4	3/4[13]…

所以，有理数集合必是可数集合。

定理1.3.1

- 两个有限集合等势当且仅当它们的元素个数相同；
- 有限集合不和其任何真子集等势；
- 可数集合可以和其可数的真子集等势。

不可数集合

定义1.3.3

- 开区间(0,1)称为不可数集合，其基数记为为ℵ(读作阿列夫)；
- 凡是与开区间(0,1)等势的集合都是不可数集合。

例1.3.2

(1)闭区间[0,1] 是不可数集合;

(2)实数集合R是不可数集合。

解（1）在闭区间[0, 1]和开区间(0, 1)之间建立如下对应关系:

$$R:\begin{cases} 0 \rightarrow 1/2, \\ 1 \rightarrow 1/4, \\ \dfrac{1}{2^n} \rightarrow \dfrac{1}{2^{n+2}}(n=1,2,3,L), \\ n \rightarrow n \qquad (\text{其他} n \in (0,1)). \end{cases}$$

则上述对应是一一对应的关系。 所以[0，1]与（0，1）一定是等势的，即[0，1]是不可数集合。

（2）在实数集 R 和开区间(0,1)之间建立如下对应关系：

$$x \to \tan\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

显然此对应关系是一一对应关系，即（0，1）与R之间是等势的，所以R是一个不可数集合。

1.5 本章总结

1. 与集合相关的**概念和特殊集合**：集合的定义、集合的表示、属于和不属于、子集、真子集、包含和真包含、幂集、空集、全集、基数、有限集、无限集等；

2. 与**集合运算相关的概念和定理**：集合的交、并、差、补和对称差等五种运算的定义及相关定理。

习题类型

- 基本概念题：涉及集合的表示；
- 判断题：涉及元素与集合、集合与集合间的关系；
- 计算题：涉及集合的运算和幂集的计算；
- 证明题：涉及集合相等以及集合间包含关系的证明。

本章完！