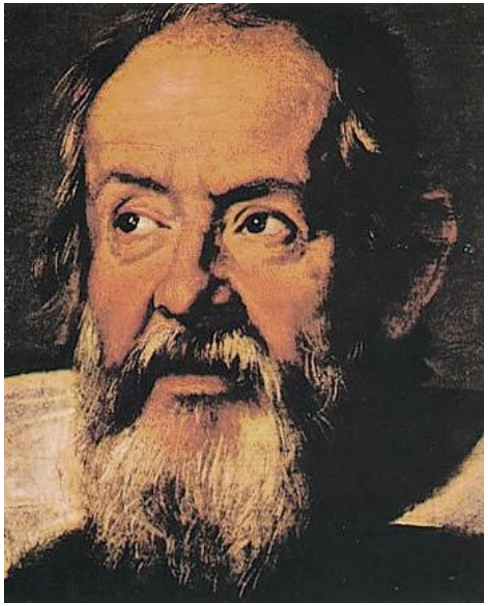
# 谓词逻辑

# 引 例 —— 苏格拉底三段论

- 所有的人都是要死的；
- 苏格拉底是人；
- 苏格拉底是要死的。

—— by Aristotle



亚里士多德
(公元前384—前322年)

# 引例

- 有的运动员是大学生；
- 所以有的大学生是运动员。

Conclusion

使用命题逻辑无法解决上述推理问题；

需要对原子命题进一步分解，从而分析其逻辑结构。

# 个体词

1 在谓词逻辑中，我们将所有可以被研究的对象称为**个体。**

2 把表示个体的词称为**个体词**，通常用**小写字母**表示。

3 表示确定个体的个体词称为**个体常元**。 a:李明

4 表示一类对象中的任意一个个体的个体词称为**个体变元**。x:人

用字母表中排在前面的小写字母表示个体常元，后面的表示个体变元。

5 个体变元的取值范围称为**个体域**。

# 谓 词

表示一个个体的属性或两个以及两个以上个体之间的关系的词称为**谓词**。通常用**大写字母**表示。

**P**：是大学生

**a**：李明

**b**：张华

**P(a)**：李明是大学生。

**P(b)**：张华是大学生。

# n元谓词 —— 例

Q：…比…大

R：…坐在…和…之间

a：张三

b：李四

c：王五

Q(a,b)：张三比李四大。Q是二元谓词。

R(c,a,b)：王五坐在张三和李四之间。R是三元谓词。

# n元谓词

1. n 个个体变元$x_1$，$x_2$，…，$x_n$和谓词P所组成的命题$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，称为n元原子谓词或n元命题函数。
2. $x_1$，$x_2$，…，$x_n$的排列顺序是意义的。
3. 命题函数不是命题，但若对$x_1$，$x_2$，…，$x_n$都代之以确定的个体时，就表示了一个命题。

(1) 设 $P(x)$：$x>3$，问$P(4)$，$P(2)$的值是什么?

(2) 设 $Q(x,y)$：$x=y+3$，问$Q(1,2)$，$Q(3,0)$的值是什么?

(3) 设 $R(x,y,z)$：$x+y=z$，问$R(1,2,3)$，$R(0,0,1)$的值是什么?

# 量 词

当命题函数中所有个体变元均被代之以确定的个体，也即被赋值时，得到的命题有一个真值。

还有另一重要方式，也可以从命题函数产生命题，这就是量化，即**全称量化**和**存在量化**。

# 全称量词

1. 某一性质对个体变元在某一特定域内的所有值都为真，这一特定域称为**个体变元的论域**。

2. 符号“∀”称为全称量词符,表达“对所有的”、“每一个”、“对任何一个”

3. **“∀x”**称为**全称量词**,x为指导变元

4. **∀xP(x)** 是P(x)的全称量化，表达命题“P(x)对x在其论域的所有值为真”。

# 用全称量化表示下列语句

1 所有的自然数都是整数。

设 $P(x)$： x是自然数。

$Q(x)$： x是实数。

则本语句可以写成：$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$。

若规定个体变元x的论域由自然数组成，则这一语句也可以写成：$\forall xQ(x)$。

## 2 每个学生都要参加资格考试。

设 **P(x)：x**是学生。

**Q(x)：x**要参加资格考试。

则本语句可以写成：$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$。

若规定个体变元**x**的论域是所有的学生，则这一语句也可以写成：$\forall x Q(x)$。

# 全称量化的真值

量化语句$\forall xP(x)$的真值是什么?

（1） 设 $P(x)$： $x+1>x$，其中论域是实数集合。

（2） 设 $P(x)$： $x^2<10$，其中论域是不超过4的正整数。

# 存在量词

1. 符号"∃"称为全称量词符,表达"有些"、 "至少有一个"、 "某个"
2. **"∃x"**称为**存在量词**,x为指导变元
3. **∃xP(x)** 是P(x)的存在量化，表达命题"**论域中存在一个元素x使P(x)为真**"。

# 用存在量化表示下列语句

1 有些自然数是素数。

设 P(x)： x是自然数。

Q(x)： x是素数。

则本语句可以写成：$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$。

若规定个体变元x的论域由自然数组成，则这一语句也可以写成：$\exists x Q(x)$。

2 有的学生学习刻苦。

设 P(x)： x是学生。

Q(x)： x学习刻苦。

则本语句可以写成：$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$。

若规定个体变元x的论域是学生，则这一语句也可以写成：$\exists xQ(x)$。

# 存在量化的真值

量化语句∃xP(x)的真值是什么?

（1）设 P(x)： $x=x+1$，其中论域是实数集合。

（2）设 P(x)： $x^2>10$，其中论域是不超过4的正整数。

# 全称量化和存在量化的含义总结

| 命 题 | 何时为T | 何时为F |
|---|---|---|
| ∀xP(x) | 对每一个x，P(x)都为T | 有一个x，使P(x)为F |
| ∃xP(x) | 有一个x，使P(x)为T | 对每一个x，P(x)都为F |

# 原子谓词公式

不出现命题联结词的命题函数$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$称为谓词逻辑的原子公式。当$n=0$时，$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$即为原子命题公式P。

# 谓词公式

合式谓词公式（简称公式）可按如下法则生成：

1. 每个原子谓词公式都是谓词公式；
2. 如果A是谓词公式，则$\neg$A也是谓词公式；
3. 如果A和B是谓词公式，则(A$\wedge$B)，(A$\vee$B)，(A$\rightarrow$B)，(A$\leftrightarrow$B)都是谓词公式；
4. 如果P是谓词公式，x是P中的自由变元，则$\forall$xP和$\exists$xP也是谓词公式；
5. 只有使用以上法则有限次所得结果才是谓词公式。

Conclusion

**命题公式是谓词公式的特例**。事实上，**命题逻辑是谓词逻辑系统的一个子系统**，命题逻辑所使用的手段和所获得的结论，在谓词逻辑中是作为不证自明的正确形式而直接使用的。

# 谓词公式的翻译

1 火车比汽车跑得快。

设 P(x)： x是火车。

Q(y)： y是汽车。

R(x,y)： x比y跑得快。

$$\forall x \forall y(P(x) \land Q(y) \rightarrow R(x,y))$$

**2** 有的火车比所有的汽车跑得快。

设 $P(x)$： x是火车。

$Q(y)$： y是汽车。

$R(x,y)$： x比y跑得快。

$$\exists x\,(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(x,y)))$$

3 并不是所有的火车比所有的汽车跑得快。

设 P(x)：x是火车。

Q(y)：y是汽车。

R(x,y)：x比y跑得快。

$$\exists x\, \exists y\, (P(x) \land Q(y) \land \neg R(x,y))$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg \forall x\, (P(x) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow R(x,y)))$$

4 在美国留学的学生未必都是亚洲人。

设 $P(x)$： x是在美国留学的学生。

$Q(x)$： x是亚洲人。

$$\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$$

# 思考与练习：

1. 并非每个自然数都是素数。
2. 某些人对某些食物过敏。
3. 每人恰有一个最好的朋友。
4. 这个人正在看那本书。
5. 尽管有黑郁金香，但并非所有郁金香都是黑的。

# 思考与练习

设S(x,y):x爱y。其中，x，y的论语是所有人的集合。翻译下列语句：

1. 每个人都爱Jerry。
2. 每个人都爱某个人。
3. 有个人人都爱的人。
4. 没有人爱所有人。
5. 有个Linda不爱的人。
6. 有个人人都不爱的人。
7. 恰有一个人人都爱的人。
8. Tom爱的人恰有两个。
9. 有人除自己以外谁都不爱。

# 思考与练习

设M(x):x能上因特网。N(x,y):x和y在因特网上交谈过。其中x,y的论语都是班上所有学生的集合。翻译下列语句。

1. 班上并非人人都上过因特网。
2. 班上恰有一人上过因特网。
3. 班上除一个学生外都上过因特网。
4. 班上上因特网的人在网上至少与班上另一名学生交谈过。
5. 班上有人上过因特网，但从未与班上其他人交谈过。
6. 班上有两个学生没做过网上交谈。
7. 班上有个学生与班上每个人都做过网上交谈。
8. 班上至少有两个学生没有与同一个人做过网上交谈。
9. 班上有两个学生，他们当中有一个与班上其余每个人都交谈过。

# 约束变元与自由变元

1 紧接在量词之后的原子公式或出现在量词后面的括号内的公式叫做量词的辖域。

2 给定一个谓词公式A，在$\forall x$或$\exists x$辖域内的个体变元x的出现，称为x在A中的约束出现，公式中约束出现的变元叫约束变元。

3 在A中除去约束变元以外所出现的变元称为自由变元。

指出下列各式中量词的辖域，变元的约束情况。

1. $\forall x P(x) \to Q(x)$
2. $\exists x(P(x) \to Q(x))$
3. $\exists x(P(x,y) \to Q(x,y)) \vee R(x,z)$
4. $\forall x((P(x) \wedge \exists x Q(x,z)) \to \exists y R(x,y)) \vee Q(x,y)$

由上例可知，在同一个公式中，一个变元既可约束出现，又可自由出现，为避免引起概念上的混乱，我们可对约束变元改名，**改名的规则**如下：

【1】若要改名，则该变元在量词及其辖域中的所有出现均须一起改名，其余部分不变。

【2】改名时所选用的符号，最好是公式中未出现的符号。

指出下列公式中量词的辖域，变元的约束情况，并对在公式中可能引起混乱的约束变元改名。

$$\forall x(P(x)\rightarrow R(x))\vee\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$$

第一个量词$\forall x$的辖域为$P(x)\rightarrow R(x)$，$x$为约束变元；

第二个量词$\forall x$的辖域为$P(x)\rightarrow Q(x)$，$x$为约束变元。

公式可改名为：$\forall x(P(x)\rightarrow R(x))\vee\forall y(P(y)\rightarrow Q(y))$

# 谓词公式的分类

在谓词公式中，包含有谓词变元和个体变元，当个体变元用确定的个体来取代，谓词变元用确定的谓词所取代时，就称作对谓词公式赋值。一个谓词公式经过赋值后，就成为有确定真值的命题。

# 给下列谓词公式一组赋值，以得到一个命题。

(1) $\exists x(E(x) \wedge D(x,6))$

令E(x)为语句“x是偶数”，D(x,6)为语句“x>6”。x=8。

则谓词公式代表命题“8是偶数并且8大于6”。

(2) $\forall x(B(x) \vee M(x))$

令B(x)为语句“x是偶数”，M(x)为语句“x是奇数”。x为整数。则谓词公式代表命题“任意一个整数要么是奇数要么是偶数”。

给定谓词公式A，若对于A的所有赋值，公式对应的真值总为T，则称该谓词公式为**永真公式**。

给定谓词公式A，若对于A的所有赋值，公式对应的真值总为F，则称该谓词公式为**永假公式**。

给定谓词公式A，若对于A至少存在一组赋值，公式对应的真值为T，则称该谓词公式为**可满足的公式**。

# 谓词公式的等价和重言蕴含式

设A和B是两个谓词公式，如果对A和B的任何一组赋值，两者的真值都相同，则称公式A和公式B是等价的。记作**A $\Leftrightarrow$ B**。

设A和B是两个谓词公式，当且仅当A→B为永真式时，叫做公式A蕴含公式B。记作**A $\Rightarrow$ B**。

# 常见的等价式和重言蕴含式

事实上，命题演算中的等价公式和重言蕴含式都可推广到谓词演算中使用，除此之外，谓词演算还补充了常见等价公式和重言蕴含式。

# 常见等价公式和重言蕴含式

| 等价或蕴含关系 |
| --- |
| $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ |
| $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ |
| $\neg \exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$ |
| $\neg \forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ |
| $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$ |
| $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ |

# 验证等价公式 $\exists x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$

$\boxed{\exists x(P(x)\vee Q(x))}$

$\Updownarrow$

“有一个x，使得P(x)或Q(x)成立”。

$\Updownarrow$

“有一个x，使得P(x)成立或有一个x，使得Q(x)成立”。

$\Updownarrow$

$\boxed{\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)}$

# 验证等价公式：$\neg\exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$。

$\neg\exists xP(x)$

$\Updownarrow$

“并非存在一个x，使P(x)成立”。

$\Updownarrow$

“对每一个x，P(x)都不成立”。

$\Updownarrow$

$\forall x\neg P(x)$

# 验证重言蕴含式 $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x)\vee Q(x))$。

假设前件$\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$为T，则有$\forall xP(x)$为T或$\forall xQ(x)$为T。

① 若$\forall xP(x)$为T：

$\forall xP(x)$为T $\Leftrightarrow$ "对每一个x，P(x)成立"

$\Downarrow$

"对每一个x，P(x)∨Q(x)成立"

$\Updownarrow$

$\forall x(P(x)\vee Q(x))$为T

② 若$\forall xQ(x)$为T，用类似①的方法可以证明$\forall x(P(x)\vee Q(x))$也为T。

$$\therefore \forall xP(x)\vee\forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x)\vee Q(x))。$$

| 等价关系 |
| --- |
| $\forall x(P \lor Q(x)) \Leftrightarrow P \lor \forall x Q(x)$ |
| $\forall x(P \land Q(x)) \Leftrightarrow P \land \forall x Q(x)$ |
| $\exists x(P \lor Q(x)) \Leftrightarrow P \lor \exists x Q(x)$ |
| $\exists x(P \land Q(x)) \Leftrightarrow P \land \exists x Q(x)$ |
| $\forall x P(x) \to Q \Leftrightarrow \exists x(P(x) \to Q)$ |
| $\exists x P(x) \to Q \Leftrightarrow \forall x(P(x) \to Q)$ |
| $P \to \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P \to Q(x))$ |
| $P \to \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x(P \to Q(x))$ |

# 前束范式

一个谓词公式，如果量词均在公式的开头，且它们的辖域一直延伸到公式之末，则称该公式为**前束范式**。

例如，$\forall x \forall y \exists z (G(x,y,z) \rightarrow A)$，$\forall y \exists z (\neg P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$都是前束范式。

# 任何一个谓词公式均可转化为与之等价的前束范式。转化步骤如下：

① 消去多余量词；

② 将公式中的联结词→，↔转化为¬，∨，∧；

③ 将¬深入到谓词变元前；

④ 利用改名使得所有约束变元，自由变元的名字均不相同；

⑤ 利用之前常用等价公式将扩大量词辖域至整个公式。

将公式$\neg(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))$化为前束范式。

$$\neg(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)) \Leftrightarrow \neg\forall x\, P(x)\wedge\neg\forall xQ(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\neg P(x)\wedge\exists x\neg Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\neg P(x)\wedge\exists y\neg Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(\neg P(x)\wedge\neg Q(y))$$

将公式$\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z))\to\exists zQ(x,y,z))$化为前束范式。

$$\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z))\underline{\to}\exists zQ(x,y,z))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\underline{\neg\exists z}\underline{(P(x,z)\wedge P(y,z))}\vee\exists zQ(x,y,z))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\underline{\forall z(}\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z))\vee\underline{\exists z}Q(x,y,z))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\underline{\forall z(}\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z))\vee\underline{\exists u}Q(x,y,u))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z\exists u(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))$$

# 谓词演算的推理规则

命题演算中的推理规则，如P规则、T规则、CP规则等都可在谓词演算中应用，除此之外，还有以下有关量词的一些规则。

① 全称特定化规则 $\forall xP(x) \Rightarrow P(y)$

② 存在特定化规则 $\exists xP(x) \Rightarrow P(c)$

③ 全称一般化规则 $P(y) \Rightarrow \forall xP(x)$

④ 存在一般化规则 $P(c) \Rightarrow \exists xP(x)$

# 带量词的命题的推理规则，U是论域

| 推理规则 | 规则名 | 符号名 |
| --- | --- | --- |
| $\forall x P(x)$<br>$\therefore P(y)$,若$y \in U$ | 全称特定化规则 | US |
| $\exists x P(x)$<br>$\therefore P(c)$,对某个元素$c \in U$ | 存在特定化规则 | ES |
| $P(y)$，对任意$y \in U$<br>$\therefore \forall x P(x)$ | 全称一般化规则 | UG |
| $P(c)$,对某个元素$c \in U$<br>$\therefore \exists x P(x)$ | 存在一般化规则 | EG |

设 P(x)：x是教授。

Q(x)：x无知。

R(x)：x爱虚荣。

其中x的论域为所有人的集合。请将下列语句翻译成谓词公式。

（1） 没有无知的教授。 $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$

（2） 所有无知者都爱虚荣。 $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$

（3） 没有爱虚荣的教授。 $\forall x(P(x)\rightarrow\neg R(x))$

能从(1),(2)推出(3)吗?若不能,有没有一个正确的结论?

不能从（1），（2）推出（3）。

也许有爱虚荣的教授，因为前提并不排除在无知者之外还有其他爱虚荣的人。

# 证明“苏格拉底论证”。

证明前提“所有的人都是要死的”和“苏格拉底是人”蕴含着结论“苏格拉底是要死的”。

设 $P(x)$：x 是人，c：苏格拉底。

$Q(x)$：x 是要死的。

则前提为：$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$，$P(c)$。

结论为：$Q(c)$。

| | | |
|---|---|---|
| ① | $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ | P |
| ② | $P(c)\rightarrow Q(c)$ | T①US |
| ③ | $P(c)$ | P |
| ④ | $Q(c)$ | T②，③I |

# 证明下列各式:

（1）$\forall x(C(x)\rightarrow(W(x)\wedge R(x)))\wedge\exists x(C(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x)\wedge R(x))$

| | | |
|---|---|---|
| ① | $\exists x(C(x)\wedge Q(x))$ | P |
| ② | $C(c)\wedge Q(c)$ | T①ES |
| ③ | $\forall x(C(x)\rightarrow(W(x)\wedge R(x)))$ | P |
| ④ | $C(c)\rightarrow(W(c)\wedge R(c))$ | T③US |
| ⑤ | $C(c)$ | T②I |
| ⑥ | $W(c)\wedge R(c)$ | T④，⑤E |
| ⑦ | $R(c)$ | T⑥I |
| ⑧ | $Q(c)$ | T②I |
| ⑨ | $Q(c)\wedge R(c)$ | T⑦，⑧I |
| ⑩ | $\exists x(Q(x)\wedge R(x))$ | T⑨EG |

（2）$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

| | | |
|---|---|---|
| ① | $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ | P |
| ② | $P(c) \wedge Q(c)$ | T①ES |
| ③ | $P(c)$ | T②I |
| ④ | $\exists x P(x)$ | T③EG |
| ⑤ | $Q(c)$ | T②I |
| ⑥ | $\exists x Q(x)$ | T⑤EG |
| ⑦ | $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ | T④，⑥I |

# 思 考:

下列推导过程有何错误？为什么？

| | | |
|---|---|---|
| ① | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| ② | $P(c) \to Q(c)$ | T①ES |
| ③ | $\exists x P(x)$ | P |
| ④ | $P(c)$ | T③ES |
| ⑤ | $Q(c)$ | T② ④ I |
| ⑥ | $\exists x Q(x)$ | T⑤EG |

## 证明前提“所有的狮子都是凶猛的”和“有些狮子不喝咖啡”蕴含着结论“有些凶猛的动物不喝咖啡”。

假定论域为所有动物的集合。

设 P(x)：x 是狮子。

Q(x)：x 是凶猛的。

R(x)：x 喝咖啡。

则前提为：$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$，$\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$。

结论为：$\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$。

$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$，$\exists x(P(x)\wedge\neg R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$

| | | |
|---|---|---|
| ① | $\exists x(P(x)\wedge\neg R(x))$ | P |
| ② | $P(c)\wedge\neg R(c)$ | T①ES |
| ③ | $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ | P |
| ④ | $P(c)\rightarrow Q(c)$ | T③US |
| ⑤ | $P(c)$ | T②I |
| ⑥ | $Q(c)$ | T④，⑤E |
| ⑦ | $\neg R(c)$ | T②I |
| ⑧ | $Q(c)\wedge\neg R(c)$ | T⑥，⑦I |
| ⑨ | $\exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$ | T⑧EG |

## 证明前提“每一个买到门票的人，都能得到座位”蕴含着结论“如果这里已没有座位，那么再没有任何人买得到门票。”

假定个体变元x的论域为所有人的集合。

设 $P(x,y)$：x买得到y。　　$Q(y)$：y是门票。

$R(x,z)$：x能得到z。　　$S(z)$：z是座位。

则前提为：$\forall x(\exists y(P(x,y)\wedge Q(y))\rightarrow\exists z(R(x,z)\wedge S(z)))$。

结论为：$\neg\exists zS(z)\rightarrow\forall x\forall y(P(x,y)\rightarrow\neg Q(y))$。

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\forall x(\exists y(P(x,y)\wedge Q(y))\rightarrow\exists z(R(x,z)\wedge S(z)))$ | P |
| (2) | $\exists y(P(v,y)\wedge Q(y))\rightarrow\exists z(R(v,z)\wedge S(z))$ | T(1)US |
| (3) | $\neg\exists zS(z)$ | P(附加前提) |
| (4) | $\forall z\neg S(z)$ | T(3)E |
| (5) | $\neg S(u)$ | T(4)US |
| (6) | $\neg S(u)\vee\neg R(v,u)$ | T(5)I |
| (7) | $\forall z(\neg S(z)\vee\neg R(v,z))$ | T(6)UG |
| (8) | $\neg\exists z(R(v,z)\wedge S(z))$ | T(7)E |
| (9) | $\neg\exists y(P(v,y)\wedge Q(y))$ | T(2)，(8)I |
| (10) | $\forall y(\neg P(v,y)\vee\neg Q(y))$ | T(9)E |
| (11) | $\forall y(P(v,y)\rightarrow\neg Q(y))$ | T(10)E |
| (12) | $\forall x\forall y(P(x,y)\rightarrow\neg Q(y))$ | T(11)UG |
| | $\neg\exists zS(z)\underline{\rightarrow}\forall x\forall y(P(x,y)\rightarrow\neg Q(y))$ | CP |