典型的代数系统

半群

设$V = \langle S, \circ \rangle$是一个代数系统，$\circ$是一个二元运算，如果$\circ$是可结合的，则称$\langle S, \circ \rangle$是**半群**。

例如 $\langle N,+\rangle$，$\langle N,\cdot\rangle$，$\langle [0,1],\cdot\rangle$都是半群，但$\langle N,-\rangle$不是半群。其中$+$，$\cdot$，$-$是通常的加法，乘法，减法。

www.znufe.edu.cn

可交换半群

设V = <S, ∘> 是一个半群， 若运算∘是可交换的，则称<S, ∘ > 是**可交换半群**。

例如 **<N,＋>**，**<N,·>**，**<[0,1],·>**都是可交换半群。

www.znufe.edu.cn

子半群

设<S,∘>是一个半群，若<H, ∘ >是<S,∘> 的子代数（H 是S 的非空子集，且H 在运算∘下是封闭的），则称<H,∘>是<S,∘>的**子半群**。

<N,＋>是半群**<Z,＋>**的子半群，**<N,·>**是半群**<Z,·>**的子半群。

www.znufe.edu.cn

半群中元素的幂

在一个半群<S,∘>中，元素a 的幂可定义为：

$a^1 = a$ ，

$a^{n+1} = a^n \circ a$ ，$n = 1,2,3,\ldots$

因为运算∘满足结合律，所以有：

$a^m \circ a^n = a^{m+n}$ ，$(a^m)^n = a^{mn}$。

显然，半群**<S,∘>**的元素**a**若是幂等元，则

$$a^n = a\text{，}n = 1,2,3,\ldots\text{。}$$

www.znufe.edu.cn

循环半群

设有半群<S,∘>，若它的每一元素均为S 中某一元素a 的幂，则称此半群为**由a 生成的循环半群**，a 称为此半群的**生成元素**。

如半群**<N⁺,＋>**是一个循环半群，其生成元素是**1**，半群**<N,·>**，**<[0,1], ·>**都不是循环半群。

www.znufe.edu.cn

定理 一个循环半群一定是一个可交换半群。

证明 设半群<S,°>是一循环半群，其生成元素为a，则对$\forall x,y \in S$，

必存在$m,n \in N^+$，使得$x = a^m$，$y = a^n$，则

$x \circ y = a^m \circ a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n \circ a^m = y \circ x$

∴运算°满足交换律，也即一个循环半群一定是可换半群。

www.znufe.edu.cn

循环子半群

一个半群<S,°>内的任一元素a和它的所有幂组成一个集合H，则<H,°>是<S,°>的由a所生成的**循环子半群**。

证明

$H = \{a^n \mid n \in N^+\} \subseteq S$，对于$\forall a^r, a^s \in H$，

$a^r \circ a^s = a^{r+s} \in H$，

∴H在运算°下是封闭的。

又∵H中每一元素都是a的幂，

∴<H,°>是<S,°>的由a所生成的循环子半群。

www.znufe.edu.cn

独异点(含幺半群)

若半群<S,°>对于运算°有幺元e，则称该半群为**独异点（含幺半群）**，有时也记为< S,° ,e>。

半群<[0,1],·>具有幺元1， 所以<[0,1],·>是独异点。

半群<P(U),∪>， <P(U),∩> 分别具有幺元Φ，U， 所以它们都是独异点。

半群<(0,1),·>，<N^+,+>不具有幺元，所以都不是独异点。

www.znufe.edu.cn

可换独异点(含幺半群)

如果独异点<S,°>的运算°是可交换的，则称<S, ° >是可换独异点。

如<[0,1],·>，<P(U),∪>， <P(U),∩> 都是可换独异点。

例 设R_A表示集合A上所有关系的集合，o表示求复合关系的运算，则< R_A,o> 是独异点，幺元为I_A。因为复合运算是不满足交换律的，所以< R_A,o> 不是可换独异点。

www.znufe.edu.cn

子独异点（含幺半群）

设<S, * >是一个独异点，H⊆S，幺元e∈H ，且H 在运算 * 下是封闭的，则<H, * >也是一个独异点，且称<H, * >是<S, * >的**子独异点**。

证明

∵独异点**<S, * >**是半群， ∴ **<H, * >**也是一个半群，而幺元**e∈H**， ∴**<H, * >**也是一个独异点。

例如，**<[0,1],·>**，**<N,·>**，**<Z,·>**都是独异点**<R,·>**的子独异点。

www.znufe.edu.cn

循环独异点(含幺半群）

设有独异点<S,∘>，若它的每一元素均为S 中某一元素a 的幂（规定$a^0 = e$，则幺元也可表示为a 的幂），则称此独异点为由a 生成的**循环独异点**，a 称为此独异点的生成元素。

例如，独异点**<Z,＋>**是循环独异点，其幺元为**0**，生成元素为**1**。

www.znufe.edu.cn

例 设<S, * >是一独异点，其中S＝｛1,a,b,c,d｝，运算 * 的运算表如下：

*	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	a	b	d	d
b	b	b	*d*	*a*	a
c	c	d	a	b	b
d	d	d	a	b	b

试证明<S, * >是循环独异点。

证明 由以上运算表可得：

$1=c^0$，$c=c^1$，$b=c*c=c^2$，$d=b*b=c^4$，$a=c*b=c^3$，

∴<S, * >是一循环独异点。

www.znufe.edu.cn

定理

一个循环独异点一定是可换独异点。

www.znufe.edu.cn

一个可换独异点<S,∘>内的所有幂等元组成一个集合H，则<H, ∘>是<S, ∘>的一个子独异点。

证明 设$\forall$**a,b**$\in$**H**，则有**a**$\circ$**a**$=$**a**，**b**$\circ$**b**$=$**b**，而运算∘是可交换，可结合的，

$\therefore a\circ b=a\circ a\circ b\circ b=a\circ(b\circ a)\circ b=(a\circ b)\circ(a\circ b)$

$\therefore$ **a**∘**b**也是等幂元素，也即**a**∘**b**$\in$**H**，**H**在运算∘下是封闭的。

而幺元**e**∘e$=$**e**，则**e**$\in$**H**，

$\therefore$ **<H, * >**是**<S, * >**的一个子独异点。

www.znufe.edu.cn

思考与练习

1. 设有自然数集N上的二元运算*，定义为：n1*n2=n1与n2的最小公倍数。试证明：运算*是可交换的和可结合的，求出幺元，并指出哪些元素是幂等元。

2. 设给出一个半群，它有左幺元和右零元，但它不是独异点。

3. 设<S,*>是可换半群，证明：若S中有元素a,b,使得a*a = a, b*b=b，则(a*b)*(a*b)=a*b。

4. 证明：在一个独异点中左可逆元的集合构成一个子独异点。

www.znufe.edu.cn


本章完！