复习题一

一、基础计算题：（共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

1. 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$.求 $P(B|A\cup\overline{B})$。

2. 甲乙两人各自独立地向同一目标重复射击两次，已知每次射击，甲命中的概率为 0.5，乙命中的概率是 0.6,求甲乙两人命中目标的次数相等的概率。

3. 若随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中 X_1 在 $[0,6]$ 服从均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,4)$，X_3 服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布，记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，求 EY,DY。

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，求 $P\{\min(X,Y)\le 1\}$。

二、简答题：（共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

1. 已设某地区某季节出现晴、阴、雨三种天气的概率分别为 0.6，0.2，0.2；且当出现晴、阴、雨三种天气时，发现上空出现 II 型气流的概率分别为 0.5，0.1，0.01. 现该季节的某上空出现 II 型气流，问该天是晴天的概率多大？

2. 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都是一维随机变量的密度函数，为使 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)-h(x,y)$ 成为一个二维随机变量的概率密度函数，问其中的 $h(x,y)$ 必需满足什么条件？

3. 设 X_1，X_2，…, X_{50} 是 50 个相互独立的随机变量，且均服从相同的泊松分布 $P(\lambda)$，$\lambda=0.5$。记 $Y=\sum_{i=1}^{50}X_i$，试用中心极限定理近似计算 $P\{Y\ge 25\}$。

4. 设 X_1，X_2，⋯，X_n 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本 $(n>1)$。记 $Y_i^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\ne i}^{n}X_j^2$，求统计量 $T_i=\frac{X_i}{Y_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 服从的分布。

三、解答题（共 6 题，每题 9 分，共 54 分）

1.已知某类元件使用寿命 T 服从指数分布，其平均寿命为 10000 小时.求（1）从这种元件中任取一个，求其使用寿命超过 5000 小时的概率。（2）某系统独立地使用 10 个这种元件，求其在 5000 小时内这些元件不必更换的个数 X 的分布律。

2. 已知随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\ge 0 \\ 0, \quad x<0 \end{cases}$，求 $Y=e^x$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

3. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} ke^{-3x-4y}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 试求：(1) 常数 k；

(2) X，Y 的边缘概率密度; (3) $P(0<X<1, 0<Y<1)$。

4. 设随机变量 X 与 Y 的概率分布为 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}$，$P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，$P(Y=-1)=\dfrac{1}{3}$，$P(Y=0)=\dfrac{1}{3}$，

$P(Y=1)=\dfrac{1}{3}$，且 $P(X^2=Y^2)=1$。求：

（1）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；(2) $Z=XY$ 的概率分布；（3） X 与 Y 的协方差。

5. 设随机变量 X，Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=1,2,3)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 记 $Z=X+Y$，求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$。

6. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0<x<1, \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，X_1，X_2，X_3，⋯， X_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本，求 θ 的矩估计量及极大似然估计量。

四、证明题：（共 1 题，共 6 分）

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D: X^2+Y^2\le 1$ 上的均匀分布。 证明 X 与 Y 不相关， X 与 Y 不相互独立。

复习题二

一、基础计算题：（共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

1. 已知随机事件 A 与 B 相互独立，$BC=\Phi$，$\mathrm{AC}=\Phi$，且 $P(A)=P(B)=0.5$，$P(C)=0.2$，求事件 A、B、C 中仅 C 发生或仅 C 不发生的概率。

2. 随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,2)$，$Z=X+2Y$，求 X 与 Z 的相关系数。

3.已知二维随机变量 $(X，Y)$ 的分布律如下表所示，求 $Z=X+Y$ 的分布律

Y X	1	2	3
0	*0.3*	0.18	0.12
1	0.2	0.12	0.08

4.随机变量 X,Y 相互独立，且均服从参数 λ 的指数分布，$P\{X>1\}=e^{-2}$，求 $P\{\min(X,Y)\le 1\}$.

二、简答题：（共 4 题，每题 5 分，共 20 分）请给出清晰的表述与推导，判断题需给出判断结果及理由。

1. 设 $P(A)>0,P(B)>0$，问事件 A、B 互不相容与事件 A、B 相互独立能同时成立吗?请说明理由。

2. 对某一目标进行多次同等规模的轰炸，每次轰炸命中目标的炸弹数目是一个随机变量，假设其期望为 2，标准差是 1.3，试用中心极限定理计算在 100 次轰炸中有 180 颗到 220 颗炸弹命中目标的概率。（$\Phi(1.54)=0.938$）

3. 设 X_1，X_2，X_3，X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，$X=a(X_1\text{-}2X_2)^2+b(3X_3\text{-}4X_4)^2$，问 a 和 b 取何值时，统计量 X 服从 χ^2 分布?

4. 已知总体 $X\sim P(\lambda)$，X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本，问 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ 是否是 λ^2 的无偏估计量？请说明理由。

三、解答题（共 6 题，每题 9 分，共 54 分）

1.甲、乙、丙三个机床加工一批零件，其中各机床加工的零件数量之比为 5：3：2，各机床所加工零件合格率，依次为 94%，90%，95%，现在从加工好的整批零件中检查出一个废品，判断它不是甲机床加工的概率。

2.已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax+1, & 0\le x\le 2 \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1) 常数 a；(2) X 的分布函数 $F(x)$；(3) $P(1<X<3)$.

3.设随机变量 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它；} \end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数。

4.设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<2,|y|<x, \\ 0, & \text{其它；} \end{cases}$$

(1) 求常数 A；(2) 求条件密度函数 $f_{Y/X}(y/x)$；(3) 讨论 X 与 Y 的相关性。

5.设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases} -1\ , & \text{若}U\le -1 \\ 1, & \text{若}U>-1 \end{cases},\quad Y=\begin{cases} -1\ , & \text{若}U\le 1 \\ 1, & \text{若}U>1 \end{cases}$$

试求：(1) X 和 Y 的联合概率分布律；(2) $D(X+Y)$.

6. 已知总体 X 的分布律如下表所示

X	0	1	2	3
P	p^2	$2p(1-p)$	p^2	$1-2p$

其中 $p\left(0<p<\dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本观测值：1，3，0，2，3，3，1，3，求 p 的矩估计值 $\hat{p}$ 和极大似然估计值 $\hat{p}_L$。

四、证明题：（共 1 题，共 6 分）

设 X，Y 都是非负的连续型随机变量且相互独立，证明

$$P\{X<Y\}=\int_0^{+\infty}F_X(x)f_Y(x)dx\ .$$

其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度函数。

复习题一答案

一、 基础计算题

1．0.25． 2．0.37 3． 12 46 4． 5/9

二．简答题

1.0.931

2． $h(x,y)$ 必须且只需满足：$(1) h(x,y) \le f_1(x) f_2(x);\ (2) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)dxdy = 0.$

3． 0.5

4. $$\frac{\dfrac{X_i}{\sigma_i}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)Y_i^2}{\sigma^2}\Big/n-1}} = \frac{X_i}{Y_i} \sim t(n-1)$$

三、解答题

1.（1） $\mathbf{P\{T > 5000\} = e^{-\frac{1}{2}}}$

（2） $P(X=k) = C_{10}^k \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^k (1-e^{-\frac{1}{2}})^{10-k}$ 。

2.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \dfrac{1}{y^2}, & y \ge 1. \end{cases}$$

3.（1） $k = 12$

（2） $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3e^{-3x}, & x > 0, \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 4e^{-4y}, & y > 0. \end{cases}$

（3） $\boldsymbol{P(0 < X < 1, 0 < Y < 1) = (e^{-3} - 1)(e^{-4} - 1)}$ 。

4. （1）X，Y 的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(2) $\mathbf{P\{Z=0\}=\frac{1}{3}}$， $\mathbf{P\{Z=1\}=\frac{1}{3}}$， $\mathbf{P\{Z=-1\}=\frac{1}{3}}$ 。

（3）$\boldsymbol{Cov(X,Y)=0}$

5. Z 的概率密度为 $\boldsymbol{f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 1\le z\le 4,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}}$

6. （1）θ 的矩估计量为 $\boldsymbol{\hat{\theta}=\frac{1}{1-\bar{X}}-2}$

（2）θ 的极大似然估计量为 $\boldsymbol{\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1}$。

四、证明题：略

复习题二答案

一、基础计算题

1. 0.45　2. $\rho_{XZ}=\frac{1}{3}$　3. $P\{Z=1\}=0.3$，$P\{Z=2\}=0.38$，

$P\{Z=3\}=0.24$，$P\{Z=4\}=0.08$.　4. $1-e^{-4}$.

二、简答题

1. 不能同时成立。

2. 0.876

3. $a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}$.

4. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ 是 λ^2 的无偏估计量。

三、解答题

1. 4/7

2. （1）$a=-\frac{1}{2}$

（2）$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\\ x-\frac{1}{4}x^2, & 0\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

（3）1/4.

3.

$$f_Z(z)=\begin{cases}0,z\le 0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-z},0<z\le 2\\ \frac{e^{2-z}-e^{-z}}{2},z>2\end{cases}$$

4. （1）$A=\frac{1}{4}$

（2）$f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\frac{1}{2x},|y|<x\\ 0,\quad 其它\end{cases}$

（3）$COV(X,Y)=0$.

5.（1） $P(X=-1,\ Y=-1)=1/4$

$P(X=-1,\ Y=1)=0$

$P(X=1,\ Y=-1)=1/2$

$P(X=1,\ Y=1)=1/4$.

(2)2

6.（1） $\hat{p}=\frac{1}{4}$.

(2) $\hat{p}_{\mathrm{L}}=\frac{(7-\sqrt{13})}{12}$.

四．证明：略