离散数学

宋广华

ghsong520@zuel.edu.cn

中南财经政法大学 信息与安全工程学院

2021-06-07

目录

概述

标准化考试

闭卷

期评成绩=平时成绩*40%+期考成绩*60%

考试形式

选择
10分，目的同填空，着重考查对核心知识点的推理和简单应用。

判断
10分，考查对核心知识点的认知和熟练程度。

填空
20分，以基本知识、基本概念为主。着重考查对核心知识点的掌握情况。

解答与证明
60分，着重考查对课程核心内容的综合应用。

考试内容

考试内容

集合论 图论

基本概念、定义

关系代数

基本理论推理和应用

填空 选择 判断	填空 选择 判断 解答	填空 选择 判断 解答	填空 选择 判断 解答

数理逻辑

基本理论推理和应用

代数系统

基本理论推理和应用

集合论

- 1、掌握集合的基本概念
- 2、掌握元素与集合的关系
- 3、掌握集合间两种常见的关系——相等与包含的判断和证明
- 4、熟练运用集合的运算定律
- 5、掌握幂集与分划的概念及相关证明

数理逻辑

- 1、掌握命题的概念、命题的真值
- 2、掌握常见的命题联结词（逻辑运算符）及其含义
- 3、掌握命题公式及其真值指派，能熟练地将自然语句转换成命题公式
- 4、掌握判断和证明公式等价的方法
- 5、掌握重言式和重言蕴含式的判断和证明
- 6、会求解命题公式的主析取范式和主合取范式
- 7、了解对偶与对偶原理
- 8、能运用命题演算的推理理论进行逻辑推理与证明

数理逻辑

- 1、掌握谓词公式的基本概念
- 2、能熟练地将语句翻译成谓词公司
- 3、掌握谓词公式中量词及其辖域的意义
- 4、谓词公式的真值判定
- 5、能运用谓词演算的推理理论进行逻辑推理与证明

示例

p q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

联结词优先级：( ), $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$

同级按从左到右的顺序进行

示例

$$(3)\ (\neg R \wedge (Q \to P)) \to (P \to (Q \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (\neg R \wedge (Q \to P)) \to (P \to (Q \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (\neg R \wedge (\neg Q \vee P)) \to (\neg P \vee (Q \vee R))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg R \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg P \vee (Q \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (R \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (R \vee (Q \wedge \neg P)) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow ((R \vee Q) \wedge (R \vee \neg P)) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q \vee R) \vee (R \vee Q)) \wedge ((\neg P \vee Q \vee R) \vee (R \vee \neg P))$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R)$$

即为主合取范式

示例

$$(3)\ (\neg R \wedge (Q \to P)) \to (P \to (Q \vee R))$$

真值表如下：

P	Q	R	$Q \to P$	$\neg R$	$\neg R \wedge (Q \to P)$	$Q \vee R$	$P \to (Q \vee R)$	原式
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1

示例

在一阶逻辑中将下列命题符号化。

（1） 每个人都有心脏。

（2） 有的狗会飞。

示例

解：由于没指出个体域，故用全总个体域

（1）每个人都有心脏。

本命题的含义：对于每一个x，如果x是人，则x有心脏。

因而应首先从宇宙间的一切事物中，将人分离出来，这就必须引入特性谓词。

令M(x):x是人，H(x):x有心脏。

命题符号化为： $\forall x(M(x)\rightarrow H(x))$

如果将其中的→改为∧，即$\forall x(P(x)\wedge H(x))$，它表示的意思是：“对于每个x，x是人且x有心脏”。这是一个假命题，而“每个人都有心脏”是真命题。这说明将命题“每个人都有心脏”符号化为$(x)(P(x)\wedge H(x))$是错误的。

示例

（2）有的狗会飞。

命题的意思是：存在一个x，使得x是狗，并且x会飞。

设D(x)：x是狗，F(x)：x会飞。

命题符号化为：$\exists x(D(x) \wedge F(x))$

如果将其中的∧改为→，即$\exists x(D(x) \rightarrow F(x))$，

如果用a表示某只猫，则D(a)为假，因而，$D(a) \rightarrow F(a)$为真，所以$\exists x(D(x) \rightarrow F(x))$为真，而“有的狗会飞”为假，

这说明将“有的狗会飞”符号化为$(x)(D(x) \rightarrow F(x))$是错误的。

2．用推理规则证明 $\neg P(a) \wedge G(a)$ 是

$\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x)))$，$\neg(Q(a) \wedge R(a))$，$S(a)$，$\forall x(S(x) \leftrightarrow G(x))$ 的有效结论。

2．证明：

（1）	$\forall x P(x) \to (Q(x) \wedge P(x))$	P
（2）	$P(a) \to (Q(a) \wedge P(a))$	US(1)
(3)	$\neg(Q(a) \wedge R(a))$	P
(4)	$\neg P(a)$	T(2)(3)I
(5)	$\forall x(S(x) \leftrightarrow G(x))$	P
(6)	$S(a) \leftrightarrow G(a)$	US(5)
(7)	$S(a) \to G(a)$	T(6)E,I
(8)	$S(a)$	P
(9)	$G(a)$	T(7)(8)I
(10)	$\neg P(a) \wedge G(a)$	T(4)(9)I

所以，结论有效。

关系与函数

- 1、掌握关系的基本概念，学会求解二元关系的个数
- 2、掌握关系的两个运算——复合运算和逆运算
- 3、掌握某集合A上的二元关系的性质的概念，会求解各种性质的关系的个数，会判断和证明关系的各种性质
- 4、掌握关系的闭包运算的概念，会求解关系的闭包
- 5、掌握等价关系相关知识（证明，等价类，商集，划分）
- 6、掌握偏序关系相关知识（证明，哈斯图，最值和极值）

关系与函数

- 1、掌握函数的基本概念，会求解函数的个数
- 2、常见的函数的性质——单射、满射、双射的判定和证明
- 3、掌握函数相等的概念及其证明
- 4、掌握函数的两个运算——复合运算与逆运算，并会证明在该运算下函数的性质的判定和证明

示例

1. 设$|A|=n$，则A上可以定义的关系的个数为 2^{n^2} ，其中自反关系的个数为 $2^{n(n-1)}$ ，对称关系的个数为 $2^{n(n+1)/2}$ 。

解答：对于自反关系：

因为$|A|=n, |A\times A|=n^2$ 也就是说集合 A 有 n 平方个有序对，由自反定义可知，对 $\forall a\in A$有$(a,a)\in R$ 所以 n 个有序对 $((X_i,X_i)$其中$i=1,2,3\ldots.n)$ 一定在所求关系中，否则的话此关系就不是自反的了，那么还有 n^2-n 个有序对，自反关系数为 $2^{n^2-n}=2^{n(n-1)}$

下图有助于理解。

$$\underbrace{(1,1)\ (2,2)\ldots\ldots(n,n)}_{n\text{ 个有序对}} \mid \underbrace{(1,2)\ (1,3)\ldots\ldots(n\text{-}1,n)}_{n^2-n\text{ 个有序对}}$$

示例

解答：对于对称关系：

因为$|A|=n, |A\times A|=n^2$ 也就是说集合 A 有 n 平方个有序对，由对称定义可知，对于 $a,b\in A$, 只要$(a,b)\in$有$(b,a)\in R$。另外知道在 n 平方个有序对中有 n 个有序对$((X_i,X_i)$其中$i=1,2,3.....n)$，相应的就有 n^2-n 个有序对（X,Y)且 $X\neq Y$，定义可知后面的 n^2-n 个有序对只能成对出现，所以有 $(n^2-n)/2$ 对。前面的那 n 对可以出现任意多对。

图片如下。

$$\underbrace{\underbrace{(1,1)\ (2,2)\ldots\ldots(n,n)}_{n\text{个有序对}}\quad \underbrace{\left\{\begin{matrix}(1,2)\ (1,3)\ldots\ldots(n-1,n)\\(2,1)\ (3,1)\ldots\ldots(n,n-1)\end{matrix}\right\}}_{(n^2-n)/2\text{个有序对对}}}_{\text{共有 } n+(n^2-n)/2\text{ 个元素}}$$

即 $(n^2+n)/2$ 个

所以得到对称关系数为：$2^{n(n+1)/2}$

示例

设 $A=\{a,b,c\}$，A 上的关系 $\rho=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,b>\}$，求出 $r(\rho)$, $s(\rho)$ 和 $t(\rho)$。

1. 解 $r(\rho)=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,b>,<b,b>,<c,c>\}$，

$s(\rho)=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,b>,<b,a>\}$，

$\rho^2=\rho\circ\rho=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<c,c>\}$，

$\rho^3=\rho^2\circ\rho=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,b>,<b,c>,<c,b>\}$，

$\therefore\ t(\rho)=\rho\cup\rho^2=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<c,c>,<b,c>,<c,b>\}$。

示例

4.29 设 $A=\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$，在 A 上定义二元关系 R 如下：$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R$ 当且仅当 $xv=yu$，证明 R 是一个等价关系.

解： 任取 $\langle x,y\rangle$，则：

自反性

$$\langle x,y\rangle\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+\Rightarrow xy=yx\Rightarrow\langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

对称性

任取 $\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$，则：

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R\Rightarrow xv=yu\Rightarrow uy=vx\Rightarrow\langle\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

传递性

任取 $\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$，则：

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R\wedge\langle\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\rangle\in R$$

$$\Rightarrow xv=yu\wedge ut=vw\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{u}{v}\wedge\frac{u}{v}=\frac{w}{t}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{w}{t}\Leftrightarrow xt=yw\Rightarrow\langle\langle x,y\rangle,\langle w,t\rangle\rangle\in R$$

综上，R同时满足自反性，对称性和传递性，因而R是一个等价关系。

示例

对于有限集A和有限集B，设$|A| = m$、$|B| = n$，

1）当m，n满足________可定义A到B的双射函数，共有______个不同的A到B的双射函数。

2）当m，n满足________可定义A到B的单射函数，共有______个不同的A到B的单射函数。

3）当m，n满足________可定义A到B的满射函数，共有______个不同的A到B的满射函数。

解：1） $m = n$， $n!$ 或$m!$

2）由单射函数定义，显然只有当$|A| \le |B|$时，才可能构成A到B的单射函数，即$m \le n$。数目为n个元素中取m个的排列，即$P(n,m) = n!/(n-m)!$。

3）由满射函数定义，显然只有当$|B| \le |A|$时，才可能构成A到B的满射函数，即$n \le m$。计数方面可以分为两步，首先可以将m个元素合并成n个元素，有$\left\{ m \atop n \right\}$ *(第二类斯特灵数，Stirling numbers of the second kind)* 种取法；其次，由n个元素到n个元素的双射函数个位为$n!$，根据乘法原理，所有的满射函数数目为 $n! \left\{ m \atop n \right\}$。

示例

设A = {1,2,3},B={a,b},C = {e,f}, f = {<1,a>,<2,a>,<3,b>},g ={<a,e>,<b,e>}。

则 $g\,f$ ： A→C, $g\,f$ = {<1,e>,<2,e>,<3,e>}

示例

设 f: R→R, f(x) = x+1, g(x) = x^2 +1。

则

gf: R→R, gf(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 +1 = x^2 +2x+2。

fg: R→R, fg(x) = f(g(x)) = f(x^2 +1) = x^2 +2。

示例

设 f，g 是 A 到 B 的函数，$f \subseteq g$ 且 $domg \subseteq domf$，证明 $f = g$

$\forall <x,y> \in g$ 则 $x \in domg$ 且 $y \in rangeg \Rightarrow x \in domf$ 且 $y \in rangeg$

对上述 $x \in domf$ 则 $\exists!\, y' \in rangef$ 即 $<x,y'> \in f$

而 $f \subseteq g$ $\therefore <x,y'> \in g$ 但 $<x,y> \in g$ 由g是函数知 $y' = y$

$\therefore x \in domf$ 且 $y \in rangef$ 即 $<x,y> \in f$

$\therefore f = g$

代数系统

- 1、掌握代数系统的基本概念
- 2、掌握运算的概念，会求解n元代数运算的个数
- 3、运算可能具备的各种性质及其证明
- 4、掌握特殊的代数系统——半群、独异点并会判断和证明
- 5、子代数和子半群、子独异点的证明

1. 设 $|A|=N$ ，则 A 上可以定义的二元运算的个数为________。

二元运算是 A × A 到 A 的函数，A×A中,有元素N^2个,从而可以定义的不同二元运算个数为 $\underline{N^{N^2}}$

图和树

- **1、掌握图的基本概念**
- **2、熟练掌握度和握手定理**
- **3、掌握图的分类（零图、平凡图、完全图、简单图、多重图）**
- **4、熟练掌握无向树的定义和性质**

考试形式

一、单选题：（每题1分，共10分）

示例：

1.分析下列语句哪个是命题(　　)。

A. 你喜欢唱歌吗？　B. 若7+8＞18，则三角形有4条边。

C. 前进！　　　　　D. x=2。

答案：B

考试形式

二、判断题：（每题1分，共10分）

示例：

1、（ ）“如果1+1=2，则1+2=4”，此命题值为真。

答案：X

考试形式

三、填空题：（每空2分，共20分）

示例：

1、对于有限集A，设$|A| = m$，则A上可定义

______________个不同的双射函数。

答案：$m!$

考试形式

四、解答题（含计算、证明及推理）（共60分）：

设$<S, \bullet>$为半群，$a \in S$。令$S_a=\{a^i \mid i \in I_+\}$。试证$<S_a, \bullet>$是$<S, \bullet>$的子半群。

证明：

由$<S, \bullet>$为半群，$a \in S$，显然$S_a=\{a^i \mid i \in I_+\}$非空且为$S$的子集。

又$\forall b$，$c \in S_a$，则存在$k,l \in I_+$，使得$b=a^k, c=a^l$。从而$b \bullet c=a^k \bullet a^l=a^{k+l}$。

因为$k+l \in I_+$，所以$b \bullet c \in S_a$，即S_a关于运算$\bullet$封闭。

故$<S_a, \bullet>$是$<S, \bullet>$的子半群。

考试要求

不要作弊！不要作弊！不要作弊！

尽量做完每一个题目。

为自己负责。

祝大家好运！