函 数

函数的概念

1. 设有集合A,B，f是一个A到B的关系，若对于$\forall a \in A$，存在唯一的$b \in B$，使得afb，则称f是由A到B的一个**函数**。记作：f:A→B。
2. 若afb，则称a为**象源**或自变量，b为f作用下a的**象**或值。记作$b = f(a)$。
3. f的**定义域**$D(f) = A$，f的**值域**$R(f) \subseteq B$，记作$f(A)$,称B为f的**值域包**。

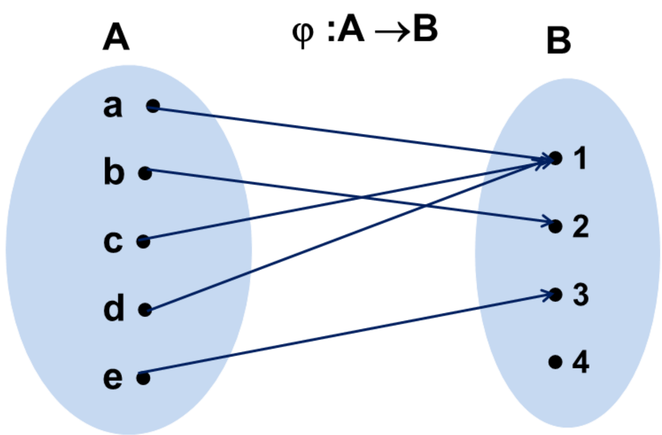
www.znufe.edu.cn

函数的相等

设有函数f: A→B，g:C → D。若**A = C，B = D**，且对∀x∈A和∀x∈C都有**f(x) = g(x)**，则称**函数f和g是相等**的，记作f=g。

www.znufe.edu.cn

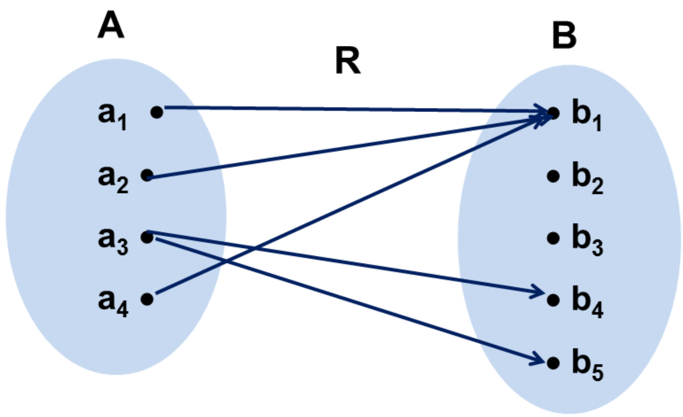
函数举例



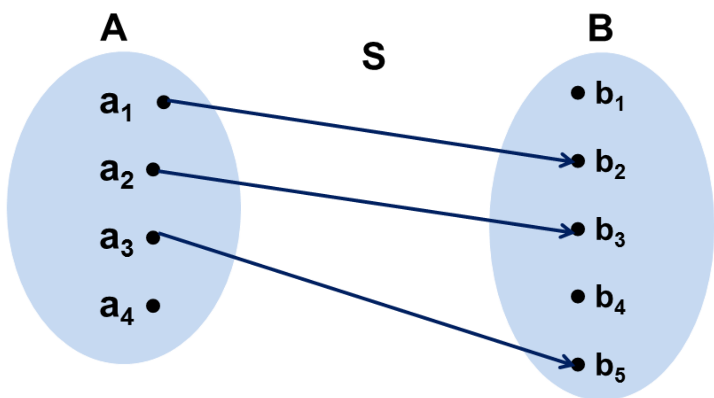
D(φ) = A，R(φ) = φ(A) = {1,2,3}。

www.znufe.edu.cn

判断下列关系能否构成函数



www.znufe.edu.cn



www.znufe.edu.cn

设A = B = R(实数集)， f 和g是A到B的关系，

$f = \{(a,a^2)/\ a \in R\}$,

$g = \{(a^2, a)/\ a \in R\}$，

试确定f 和g是否为函数。

www.znufe.edu.cn

思 考：

1.设A,B是两个集合，且|A| = m，|B| = n，则A到B的不同的函数的个数是多少？

2.设f和g均是集合A到B的函数。$f \cap g$能构成A到B的函数吗？

www.znufe.edu.cn

设X和Y是任意集合，f:X→Y，A⊆X，B⊆X，证明：

$f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$

①$\forall y\in f(A\cup B)$,则$\exists x\in A\cup B$,使得$y=f(x)$。

由$x\in A\cup B$，有$x\in A\vee x\in B$，则$f(x)\in f(A)\vee f(x)\in f(B)$，即$y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$，所以$\boldsymbol{f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)}$

②$\forall y\in f(A)$,则$\exists x\in A$,使得$y=f(x)$。由$x\in A\subseteq A\cup B$有$f(x)\in f(A\cup B)$.

所以$f(A)\subseteq f(A\cup B)$.同理有$f(B)\subseteq f(A\cup B)$.

所以$\boldsymbol{f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)}$。

www.znufe.edu.cn

函数的性质

f:A →B 是由A到B的函数，

1 若$f(A) = B$，也即对$\forall b\in B$，都有元素$a\in A$使得$f(a) = b$，则称f是从A到B的**满射**。

2 对$\forall a_1, a_2\in A$,若$a_1\neq a_2$,则必有$f(a_1)\neq f(a_2)$,则称f是从A到B的**单射**。

3 若f既是满射，又是单射，则称f是从A到B的**双射**。

www.znufe.edu.cn

设A = B = I(I是整数集)，f是A到B的函数，$f(a) = a^2$，$a \in I$，判断f是否是单射，满射，双射？

f 既非单射也非满射。

设A = B = R(R为实数集)，g是A到B的函数，$g(a) = a + 1$，$a \in R$，判断g是否是单射，满射，双射？

g是双射。

www.znufe.edu.cn

恒等函数

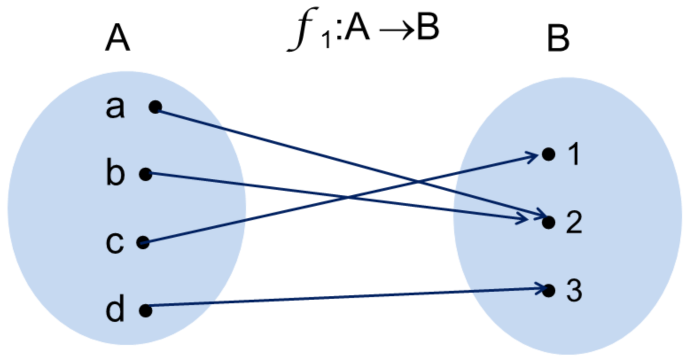
设A是集合，则A上的恒等关系I_A是由A到A的函数，对$\forall a \in A$，有$I_A(a) = a$，称为A上的**恒等函数**。

显然，I_A既是满射，又是单射，所以是双射。

自然映射

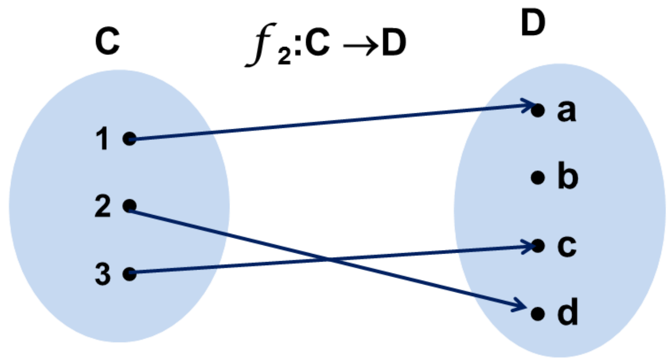
设R是集合A上的等价关系，定义一个从A到A/R的函数g:A→A/R且$g(a) = [a]_R$，则称g是从A到商集A/R的**自然映射**。

根据图示判断函数的性质



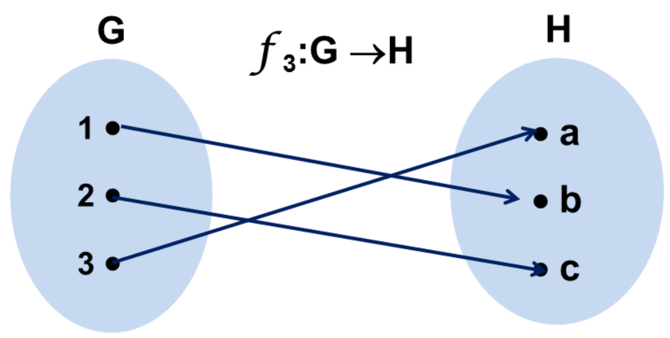
$f_1(A) = B$, f_1是满射。

www.znufe.edu.cn



$f_2(1) \neq f_2(2) \neq f_2(3)$， 所以$f_2$是单射。

www.znufe.edu.cn



$f_3(\mathrm{G}) = \mathrm{H}$ 且$f_3(1) \neq f_3(2) \neq f_3(3)$，所以$f_3$是双射。

设A,B是有限集，f 是由A到B的函数，显然，

若f 是满射，则有|A| ≥|B|；

若f 是单射，则有|A| ≤|B|；

若f 是双射，则有|A| = |B|。

思 考：

下列函数中哪些是满射的？哪些是单射的？哪些是双射的？

(1) $f_1: \mathrm{N} \to \mathrm{N}, f_1(n) = 2n$

(2) $f_2: \mathrm{I} \to \mathrm{N}^+, f_2(i) = |2i|+1$

(3) $f_3: \rho(\mathrm{U}) \to \rho(\mathrm{U}),\ f_3(\mathrm{S}) = \tilde{\mathrm{S}}$

(4) $f_4: R \to R,\ f_4(r) = 2r\text{-}15$

(5) $f_5: \mathrm{I} \to \{0,1,2,3,4\}$ ，$f_5(i) = i(\mathrm{mod}\ 5)$

www.znufe.edu.cn

思 考：

设(A, ≤)是偏序集，对$\forall a\in A$，$f(a) = \{x|x\in A\wedge x\leq a\}$。证明：$f:A\rightarrow \rho(A)$是一个单射，且当$a \leq b$时，有$f(a)\subseteq f(b)$.

www.znufe.edu.cn

函数的复合运算

设有函数$f:A\rightarrow B$,$g:B\rightarrow C$，则f和g的复合函数是一个由A到C的函数，记作$f\circ g$,或简记作gf。即

$f\circ g$ = $\{<a,c>|\ a\in A \wedge c\in C \wedge \exists b(\ b\in B \wedge b = f(a) \wedge c = g(b))\}$

若$a\in A$，$c\in C$ 且$a(f\circ g)c$,则可记作$f\circ g\ (a)= g\ (f\ (a)) = c$。

www.znufe.edu.cn

设A = {1,2,3},B={a,b},C = {e,f}, f = {<1,a>,<2,a>,<3,b>}, g ={<a,e>,<b,e>}。

则 gf : A→C, gf = {<1,e>,<2,e>,<3,e>}

设 f: R→R, $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2 + 1$。

则

gf: R→R, $gf(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$。

fg: R→R, $fg(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 2$。

函数的复合运算满足结合性

设有函数f:A →B, g : B →C, h: C →D,则有

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h) = f\circ g\circ h$$

设有f:A →A, 则有复合函数$\overset{n个}{f f\ldots\ldots f}$可用$f^n$表示。

www.znufe.edu.cn

设有函数f:R →R, f(x) = x+1。则

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(x+1) = x+2$$

$$f^3(x) = f(f(f(x))) = f(x+2) = x+3$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(x+n-1) = x+n-1+1 = x+n$$

www.znufe.edu.cn

设有函数f:R ×R, 即R^2 →R， f(<x,y>) = x+y。则f是一个二元函数，也是一个二元运算，且

$$f = \{ <<x,y>, x+y> | x,y \in R \}$$

www.znufe.edu.cn

定理　设有函数f:A →B, g : B →C,

1 若f，g都是满射，则gf是满射；

对∀c∈C，∵g：B→C是满射，∴必有∃b∈B使得g(b)＝c，

2 若f，g都是单射，则gf是单射；

又∵f：A→B也是满射，∴必有∃a∈A，使得f(a)＝b。

也即必有∃a∈A，使得gf(a)＝g(f(a))＝g(b)＝c。

对∀a_1，a_2∈A且a_1≠a_2；

3 若f，g都是双射，则gf是双射。

∵f：A→B是单射，∴f(a_1)≠f(a_2)。

又∵g：B→C也是单射，而f(a_1)，f(a_2)∈B，

∴g(f(a_1))≠g(f(a_2))也即gf(a_1)≠gf(a_2)。

∴gf：A→C也是单射。

www.znufe.edu.cn

定理　设有函数$f:A \to B$, $g:B \to C$,

1 若$g\,f$是满射，则g是满射；

因为gf是满射，所以对$\forall c \in C$,则必有$\exists\, a \in A$,使得$gf(a)=c$。

也即$g(f(a))=c$,令$f(a)=b$,则$b \in B$。

也即对$\forall c \in C$,则必有$\exists\, b \in B$,使得$g(b)=c$。所以g是满射。

2 若$g\,f$是单射，则f是单射；

假设f不是单射，则必有两个元素$a_1, a_2 \in A$,且$a_1 \neq a_2$。

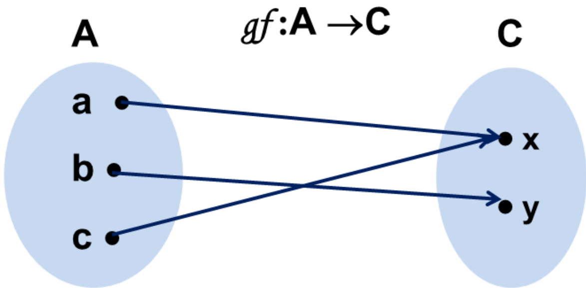
但$f(a_1)=f(a_2)$,令$f(a_1)=f(a_2)=b$, $g(b)=c$,则

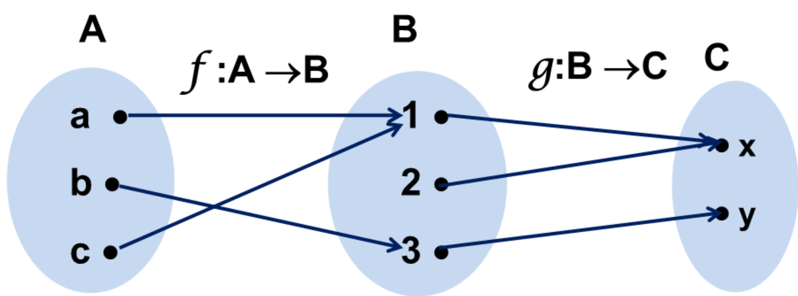
$g(f(a_1))=g(f(a_2))=g(b)=c$。所以$g\,f(a_1)=g\,f(a_2)$，与假设矛盾。所以$f$是单射。

3 若$g\,f$是双射，则f是单射，g是满射。

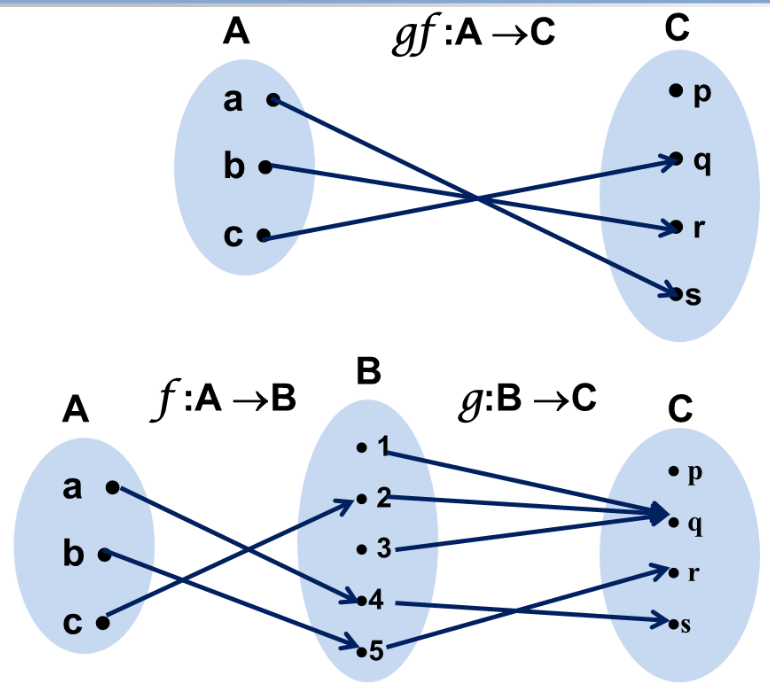
www.znufe.edu.cn

举例说明$g\,f$是满射，但f不一定是满射；$g\,f$是单射，但g不一定是单射。





www.znufe.edu.cn



思考与练习：

1. 设有函数f:A →B, g : B →C。若$g\,f$是单射,且f是满射。试证明： g 是单射。

2. 设有函数f:A →B, g : B →C。若$g\,f$是满射,且g 是单射。试证明： f是满射。

逆函数

对任意关系R，都有R的逆关系R^{-1}存在，但若R是函数，R^{-1}就不一定是函数，所以并非所有函数都有逆函数。

设有函数f:A→B是一个双射，定义函数g:B→A,使得对∀b∈B, g(b) = a,而a是使f(a) = b的A中的元素，则称g是f的**逆函数**，记作f^{-1}。

若函数f存在逆函数f^{-1}，则称f是可逆的。

设f和g是由{a,b,c}到{1,2,3}的函数，若f(a) = 2，f(b) = 3，f(c) = 1；g(a) = 2，g(b) = 2，g(c) = 3。试问f和g可逆吗？如果可逆，其逆函数是什么？

很明显，f是双射，f是可逆的。其逆函数f^{-1}定义如下：

$f^{-1}(2)=a$，$f^{-1}(3)=b$，$f^{-1}(1)=c$。

g既不是单射，又不是满射，肯定不是双射，所以不可逆。

设函数f:A →B是双射,则f的逆函数f^{-1}:B →A,也是一个双射。

1. 对∀a∈A,由函数的定义,必有∃b∈B,使得f(a) = b 。
   所以f^{-1} (b) = a,所以f^{-1} :B →A是满射。

2. 设有∀ b_1 , b_2∈B且b_1≠b_2,因为f是双射,则必有∃a_1 , a_2∈A, $a_1 \neq a_2$,使得$f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ 。
   所以$f^{-1}(b_1) = a_1$, $f^{-1}(b_2) = a_2$,并且$f^{-1}(b_1) \neq f^{-1}(b_2)$,所以f^{-1} :B →A单射。

www.znufe.edu.cn

设函数f:A →B是双射，则$(f^{-1})^{-1}$= f 。

由前面定理可知f^{-1}是双射，所以$(f^{-1})^{-1}$是一个由A到B的函数。

对∀a∈A,设f(a) = b， 则f^{-1}(b)=a,所以$(f^{-1})^{-1}$(a) = b。

于是$f(a) = (f^{-1})^{-1}(a)$，所以$(f^{-1})^{-1}= f$。

www.znufe.edu.cn

设函数f:A →B是可逆的，则$f^{-1}f= I_A$, $ff^{-1} = I_B$。

因为f:A →B, f^{-1} :B →A,所以$f^{-1}f$是由A到A的函数。

对∀a∈A,设$f(a) = b$，则$f^{-1}(b)=a$,于是

$f^{-1}f(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b)=a$。所以$f^{-1}f= I_A$。

类似可证$ff^{-1} = I_B$。

www.znufe.edu.cn

设函数f:A →B, g:B →A,当且仅当$gf = I_A$, $fg = I_B$时有$g=f^{-1}$。

由上一定理可证其必要性。

因为$fg=I_B$是满射，所以f是满射。

因为$gf=I_A$是单射，所以f是单射。

所以f是一个双射函数，有逆函数f^{-1}。

因为$f^{-1}(fg)=f^{-1}I_B=f^{-1}$, $(f^{-1}f)g =I_A g=g$,所以$g=f^{-1}$。

www.znufe.edu.cn

设函数f:A→B, g:B→C,且f ,g都是可逆的，则$(g f)^{-1}=f^{-1} g^{-1}$。

因为f,g都是可逆的，所以存在f^{-1} : **B →A**, g^{-1} **:C →B,**因而存在复合函数$f^{-1} g^{-1}$ **: C →A**。

对∀c∈C,设g^{-1}(c) = **b**, f^{-1}(b) = **a,**

则$(f^{-1} g^{-1})$ **(c)** = $f^{-1}(g^{-1}$**(c))** = f^{-1}**(b)** = **a**。

又因为f,g都是双射,所以gf也是双射,因而存在逆函数$(gf)^{-1}$ **: C →A**。

而gf**(a)** = $g(f$**(a)**$)$ = g**(b)** = **c**，所以$(gf)^{-1}$ **(c)** = **a**。

所以$(f^{-1} g^{-1})$ **(c)** = $(gf)^{-1}$ **(c)** 。

所以$(gf)^{-1}=f^{-1} g^{-1}$ 。

www.znufe.edu.cn

本章完！