线性代数期末复习题（一）

一、简答题（每小题 5 分，共 30 分）：请根据课程内容作出清晰的表述和推导；需要作判断的题目请通过推导或举反例等方式给出你的理由。

1. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，又设矩阵

$$B=(2\alpha_1,-2\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3).$$

已知 $|A|=-2$，求 $|B|$.

2. 已知 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，请写出矩阵 AA^T 的第 k 行第 l 列的元素。

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$， 则 A 与 B 是否等价？请说明你的理由。

4. 已知 $\alpha=(1,-2,1)^T$，$A=E+k\alpha\alpha^T$，其中 E 为三阶单位矩阵，且 $k\neq 0$. 如果 A 是正交矩阵，试求 k 的值。

5. 已知 4 阶方阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$， 其中 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_4=3\alpha_1+4\alpha_2$.

求齐次方程组 $Ax=0$ 的解空间的维数和一组基。

6. 已知三阶方阵 A 与 B 相似，且满足：$|A-E|=0$，$|A+2E|=0$，$|A-3E|=0$，其中 E 为三阶单位矩阵。若 $C=B^{-1}+3B^{*}+5E$，求 C 的所有特征值。

二、计算题（每小题10分，共60分）

1. 设n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$，记其第$i$行第$j$列元素

$D_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$所对应的代数余子式为$A_{ij}$. 试计算 $A_{n1}+2A_{n2}+\cdots+nA_{nn}$.

2. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且满足$AX+E=A^2+X$，其中$E$为三阶单位矩阵。试求矩阵$X$.

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$, $\alpha_2=(0,3,1,2)^T$, $\alpha_3=(3,t,7,14)^T$, $\alpha_4=(2,1,5,5)^T$.

(1) t为何值时向量组线性相关？此时求向量组的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表出；

(2) t为何值时向量组线性无关？此时将向量$\beta=(1,-7,0,0)^T$表示为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合。

4. 已知线性方程组$(I)\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$, $(II)\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-t+1 \end{cases}$.

(1) 求解线性方程组 (I), 用其导出组的基础解系表示全部解;

(2) 当方程组 (II)中的参数m,n,t为何值时，方程组$(I),(II)$同解？

5. 设A是n阶方阵，且满足$A^2+3A-4E=O$. 请说明：(1) $r(A+4E)+r(A-E)=n$; (2) A相似于一个对角矩阵。

6. 设三阶实对称矩阵A的特征值是$1,0,-1$. 其中，对应于特征值$1,0$的特征向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

试求：(1) 矩阵A对应于特征值-1的特征向量; (2) 矩阵$\boldsymbol{A}^{1000}$.

三、证明题（10 分）

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，问

(1) α_1能否由α_2,α_3线性表出？证明你的结论。

(2) α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出？证明你的结论。

线性代数期末复习题（二）

一、简答题（每小题 5 分，共 30 分）：请根据课程内容作出清晰的表述和推导；需要作判断的题目请通过推导或举反例等方式给出你的理由。

1. 试计算 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中x^4与x^3的系数。

2. 若$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则有$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$吗？请说明理由。

3. 向量组$\alpha_1=(0,2,1)^T$ ，$\alpha_2=(2,1,1)^T$， $\alpha_3=(4,2,2)^T$是线性相关还是线性无关 ？请说明理由。

4. 已知A是$m\times n$矩阵，请写出n元线性方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$无解，有唯一解和无穷多解的判定方法。

5. 已知$\alpha=(1,0,0)^T$，$A=E-2\alpha\alpha^T$，其中E为三阶单位矩阵。 请说明A是正交矩阵。

6. 设A为n阶方阵，请至少写出 6 个与 " 方阵A可逆 " 等价的条件。

二、计算题（每小题10分，共60分）

1. 设6阶行列式$D_6=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

求第一行元素的代数余子式之和$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}+A_{15}+A_{16}$.

2. 同阶方阵A,B满足：$A+B=AB$. (1) 证明：$(B-E)^{-1}=A-E$；(2) 若$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, 求$A$.

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,0,2,3)^T$, $\alpha_2=(1,1,3,5)^T$, $\alpha_3=(1,-1,3,1)^T$, $\alpha_4=(1,2,4,t+9)^T$. 问：

t为何值时向量组线性相关？ 此时求向量组的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表出。

4. 设A是四阶方阵，$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\alpha_4)$，$A$的列秩为2，且对向量$\beta$有：

$$\begin{aligned} \alpha_1+\ \alpha_2+\ \alpha_3+\ \alpha_4-\beta&=O, \\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4-\beta&=O, \\ \alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4-\beta&=O, \end{aligned}$$

其中O是四维列向量。求方程组$AX=\beta$的通解。

5. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$，且$A,B$相似。试求 (1) c,d的值；(2) 可逆矩阵P使得 $P^{-1}AP=B$.

6. 已知实对称矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵$P$，使得 P^TAP 为对角矩阵。

三、证明题（10 分）

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性相关，证明：

(1) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；(2) β由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性表出方法是唯一的。