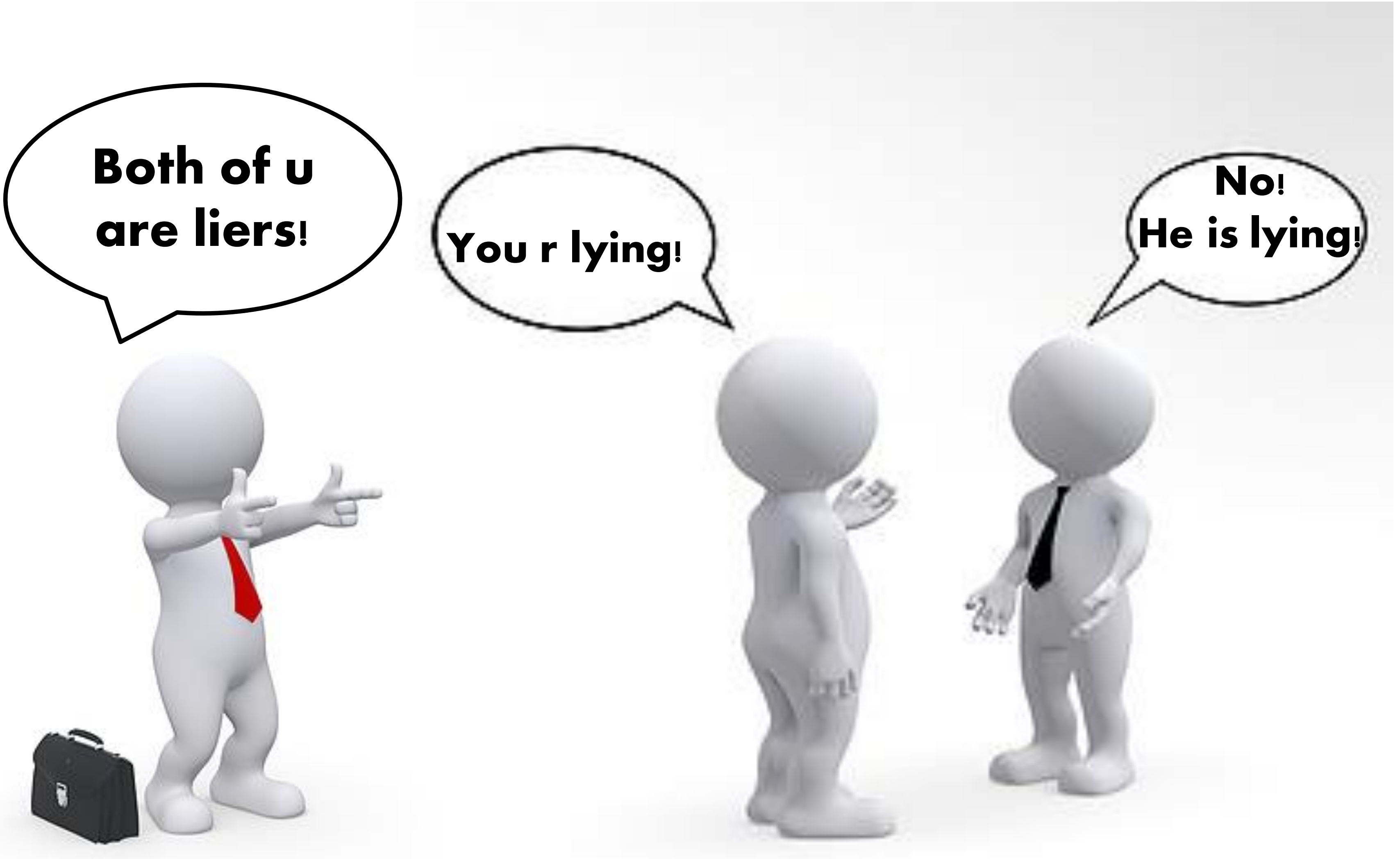
第1章 命题逻辑

引例1 —— 谁说谎



引例2 —— 数独游戏

			6		8	9	5	
8	6				9		7	
3		5	7			6		
7	4		9		2	5		1
2		9	4		1		3	7
		6			5	3		9
	3		8				4	6
	8	1	3		6			

推理的一般过程

已知命题

什么是前提？

有哪些前提？

推理的依据

根据什么进行推理？

推理的方法

怎么推理？

新命题

得到什么结论？

本章知识体系

命题及其表示法

命题的基本概念

命题联结词

命题等价

命题公式

公式等价及其性质

命题定律

重言式和重言蕴含式

重言式（永真式）

重言蕴含式（永真蕴含式）

对偶与范式

对偶及对偶原理

范式

命题演算的推理理论

推理

推理的依据

推理的方法

命题的概念

具有真假意义的陈述句称之为**命题**。

notice

- 命题表达一个判断
- 命题必须有真假值
- 不一定要知道真假值
- 悖论不是命题

例 —— 判断下列语句是否为命题

(1) 神州七号的成功发射是中国航天业的又一个壮举。
(2) 地震是地球各大板块相互挤压造成的。
(3) 北京举办了2008年奥林匹克运动会。
(4) 游客止步！
(5) 明天是否要下雨？
(6) 校园的景色真美！
(7) $x + y > 5$。
(8) 神农架有野人。
(9) 我正在说谎。
(10)如果功课不多，那么放学后我去打篮球。
(11)我选修数学专业，或者我选修英语专业。

原子命题与复合命题

【原子命题】不能从自身分解出和自身不同的命题。

【复合命题】由若干个原子命题通过联结词构成的新命题。

真值

命题的值称为“真值”。

若一个命题为真，我们称它的真值为**真(TRUE)**，用 “**T**” 或“**1**”表示。

若一个命题为假，我们称它的真值为**假(FALSE)**，用 “**F**” 或“**0**”表示。

命题的表示

用大写字母或带下标的大写字母表示命题。

表示命题的符号称为**命题标识符**。

P ： 地球上没有生物。

S_1： $3+3=6$ 。

命题常元与命题变元

如果一个命题标识符表示确定的命题，就称为**【命题常元】**。

如果命题标识符只用于表示任意命题的位置标志，就称为**【命题变元】**。即真值可以变化的陈述句就是命题变元。

Q： x是偶数。

命题连接词

$\neg$	否定
$\wedge$	合取
$\vee$	析取
$\overline{\vee}$	异或
$\rightarrow$	条件
$\leftrightarrow$	等值

命题连接词 —— 否定

设P为一命题，则¬P就是一个复合命题，用于表达陈述句“不是P所说的情形”，称为**命题P的否命题**。“¬P”读作“非P”。

P	**¬P**
F	T
T	F

命题连接词 —— 否定

命题联结词“¬”相当于语句中的“非”、“不”、“无”、“没有”或“并非”等否定词。

P： 地球上没有生物。

¬P： 并非地球上没有生物。

¬P： 地球上有生物。

命题连接词 —— 合取

设P和Q是两个命题，则P∧Q是一个复合命题：当P和Q同时为T时，P∧Q为T，否则为F。命题**P∧Q**称为**P与Q的合取**。式子P∧Q称为合取式，读作“P与Q”或者“P并且Q”。

P	Q	P ∧ Q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

命题连接词 —— 合取

命题联结词“∧”相当于语句中的“并且”、“既是…，又是…”、“不但…，而且…”、“虽然…，但是…”、“尽管…，仍然…”等词语。“∧”在逻辑电路中表示“与门”，在开关电路中表示“串联”联接方式。

P： 王丽是一名学习成绩优异的学生。

Q： 王丽是一名爱好舞蹈的学生。

P∧Q： 王丽是一名学习成绩优异而且爱好舞蹈的学生。

命题连接词 —— 析取

设P和Q是两个命题，则P∨Q是一个复合命题：当P和Q同时为F时，P∨Q为F，否则为T。命题P∨Q称为**P与Q的析取**。式子P∨Q称为析取式，读作“P或Q”。

P	Q	P ∨ Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

命题连接词 —— 析取

命题联结词“∨”相当于语句中的“或者”，但自然语言中的“或者”有两种不同的含义：一种是相容的，一种是不相容的。

P： 李明是学生。

Q： 李明是运动员。

复合命题“李明是学生，或者是运动员”中的两个原子命题P和Q是**可以同时为T**的，那么其中的“或者”是在相容意义下使用的，我们称之为“**相容**”。

命题连接词 —— 析取

R：　明晨八时我在家休息。

S：　明晨八时我去单位上班。

复合命题“明晨八时我在家休息，或者我去单位上班”中的两个原子命题R和S是不可能同时为T的，那么其中的“或者”是在不相容意义下使用的，我们称之为“不可兼或”。

命题连接词 —— 异或

设P和Q是两个命题，则 $P\overline{\vee}Q$ 是一个复合命题：当P和Q中恰有一个为T时，$P\overline{\vee}Q$ 为T，否则为F。式子 $P\overline{\vee}Q$ 称为**异或式**。

P	Q	$P\overline{\vee}Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

命题连接词 —— 条件

设P和Q是两个命题，则P→Q是一个蕴含式复合命题：当P为T而Q为 F时，P→Q为F，否则为T。式子**P→Q**称为**蕴含式**，读作“如果P，则Q”。P称为蕴含式的**前件（或前提）**，Q称为蕴含式的**后件（或结论）**。

P	**Q**	**P → Q**
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

命题连接词 —— 条件

命题联结词“→”相当于语句中的“如果…，那么…”，“若…，则…”，“只要…，就…”等词语。

P： 太阳绕着地球转。

Q： 今天天下雨。

P→Q： 如果太阳绕着地球转，那么今天天下雨。

命题连接词 —— 等值（双条件）

设P和Q是两个命题，则P↔Q是一个等值式复合命题：当P和Q有同样真值时，P↔Q为T，否则为F。式子**P↔Q**称为**等值式**，读作“P当且仅当Q”。

P	Q	P ↔ Q
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

命题连接词 —— 等值（双条件）

P： 它是等边三角形。

Q： 它的三个内角都为60°。

显然，P与Q具有充要条件的关系，所以复合命题“如果它是等边三角形，则它的三个内角都为60°”具有形式P↔Q。

命题公式

【命题公式】（又称**合式公式**）可按以下法则生成：

1 T, F 是命题公式；

2 命题变元是命题公式；

3 如果 P 是命题公式，则 $\neg P$ 也是命题公式；

4 如果 P 和 Q 是命题公式，则 $P \wedge Q, P \vee Q, P \overline{\vee} Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$

都是命题公式；

5 只有按以上法则有限次所得结果才是命题公式。

命题翻译成命题公式

So as to

消除自然语言中的二义性	分析命题公式以确定其真值	用推理规则进行推理分析

命题翻译成命题公式

Step

根据简单句确定原子命题，用命题变元表示

根据语义确定合适的命题连接词

根据规则将命题变元与命题连接词一起写成公式

命题翻译成命题公式 —— 例

1 他既聪明又勤奋。

P: 他聪明。

Q: 他勤奋。

$\Rightarrow$ $P \wedge Q$

2 他虽聪明但不勤奋。

$\Rightarrow$ $P \wedge \neg Q$

命题翻译成命题公式 —— 例

3 除非你努力，否则你将失败。

P：你努力。

Q：你失败。

$\Rightarrow$ $\neg P \to Q$

---

4 除非天气好，我才骑自行车上班。

P：天气好。

Q：我骑自行车上班。

$\Rightarrow$ $\neg P \to \neg Q$

命题翻译成命题公式 —— 例

5 小王晚上要回家，除非下大雨。

P：小王晚上要回家。

Q：下大雨。

$\Rightarrow$ $\neg Q \to P$

6 只有经常锻炼身体才能有健康的体魄。

P：你经常锻炼身体。

Q：你有健康的体魄。

$\Rightarrow$ $Q \to P$

命题翻译成命题公式 —— 例

7 明天的舞蹈培训班是8点半**或**9点开课。

P: 明天的舞蹈培训班8点半开课。

Q: 明天的舞蹈培训班9点开课。

⇨ $P\overline{\vee}Q$

8 四边形是平行四边形**当且仅当**它的对边平行。

P: 四边形是平行四边形。

Q: 四边形的对边平行。

⇨ $P \leftrightarrow Q$

命题公式的真值表

- 公式中所有命题变元的一组确定的取值，称为公式的一组真值指派。
- 含有 n 个命题变元的公式具有2^n组不同的真值指派。
- 列出公式所有真值指派及公式的相应真值的表格，称为公式的真值表。

例 ——构造公式的真值表

$(\neg P \vee Q) \rightarrow R$ 的真值表

P	Q	R	¬P	¬P∨Q	(¬P∨Q)→R
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

命题公式的等价

设A和B是两个命题公式，它们含有相同的命题变元P_1，P_2，…，P_n，且对任意一组真值指派A与B都有相同的真值，则称**公式A和B是等价的公式**。记作**A⇔B**。

Conclusion

可以列真值表来判断或证明两个公式是否等价；

可以采用讨论的方式来证明两个公式等价（说明A和B的真值相同）

例 —— 证明: $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$。

P	**Q**	**$\neg$P**	**$\neg$P$\vee$Q**	**P→Q**
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

例 —— 证明： $P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$。

P	**Q**	**$P\leftrightarrow Q$**	**$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$**
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

命题定律

名称	等价关系
对合律	$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P$，$P \wedge P \Leftrightarrow P$
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$，$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$，$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
德·摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
同一律	$P \vee F \Leftrightarrow P$，$P \wedge T \Leftrightarrow P$
零一律	$P \vee T \Leftrightarrow T$，$P \wedge F \Leftrightarrow F$
否定律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$，$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

常见的等价公式

等价关系
$P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P\vee Q$
$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
$P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q\rightarrow\neg P$
$(P\wedge Q)\rightarrow R \Leftrightarrow P\rightarrow(Q\rightarrow R)$

几个有用的等价公式

等价关系
$\neg P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
$\neg P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$
$P \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow P \vee Q$
$P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

等价关系的性质

1 自反性：对任意公式A，都有A⇔A

2 对称性：对任意公式A和B，若A⇔B，则B⇔A

3 传递性：对任意公式A,B和C，若A⇔B且B⇔C，则A⇔C

置换规则

【子公式】

若X是公式A的一部分，且X本身也是一个公式，则称X为公式A的子公式。

公式 $Q \rightarrow (P \vee R)$ 的子公式：$Q, P, R, P \vee R$

【置换规则】

设X是公式A的子公式，若X⇔Y，如果将A中的X用Y来置换，所得到的公式B与原公式A等价，即A⇔B。

若X⇔Y，则对于任意真值指派，X和Y的真值相同。以Y取代X后，公式B与A在相同的真值指派下，其真值必定相同，所以A⇔B。

等值演算

利用已知的等价公式、等价关系的性质和置换规则，来构造其它等价关系。

1 证明： $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow \neg R \to (Q \to \neg P)$

$$
\begin{aligned}
P \to (Q \to R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R \\
&\Leftrightarrow \neg R \to \neg (P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow \neg R \to (\neg P \vee \neg Q) \\
&\Leftrightarrow \neg R \to (\neg Q \vee \neg P) \\
&\Leftrightarrow \neg R \to (Q \to \neg P)
\end{aligned}
$$

等值演算

2 证明：$(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Leftrightarrow (P \vee R) \to Q$

$$
\begin{aligned}
(P \to Q) \wedge (R \to Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee Q \\
&\Leftrightarrow \neg (P \vee R) \vee Q \\
&\Leftrightarrow (P \vee R) \to Q
\end{aligned}
$$

思考与练习：

证明：

$$\textbf{(1)}(Q\wedge R)\vee S\vee(\neg S\wedge((\neg Q\vee\neg R)\wedge((P\wedge S)\vee(Q\wedge\neg R))))\Leftrightarrow Q\vee S$$

$$\textbf{(2)}\neg((\neg P\rightarrow R)\rightarrow(P\wedge\neg Q))\rightarrow((Q\rightarrow P)\rightarrow(\neg Q\wedge R))\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)$$

命题公式的分类

设A是一个命题公式，对于A的所有真值指派：

- 若所有真值指派均使得A为真，则A为**【永真式】**（重言式）；
- 若所有真值指派均使得A为假，则A为**【永假式】**（矛盾式）；
- 若至少有一组真值指派使得A为真，则A为**【可满足式】**。

证明公式是永真式的两种方法

等值演算

若A⇔T，则A是永真式；

若A⇔F，则A是永假式；

若A⇔B，B是可满足式，则A是可满足式，反之亦然。

列真值表

若A真值表中最后一列都是1，则A是永真式；

若A真值表中最后一列都是0，则A是永假式；

若A最后一列至少有一个1，则A是可满足式。

例 —— 用等值演算法判断公式的类型

1 $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (P \wedge (\neg P \vee Q)) \rightarrow Q \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow Q \\
&\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee Q \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee Q \\
&\Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

---

2 $(P \vee \neg P) \rightarrow ((Q \wedge \neg Q) \wedge R)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow T \rightarrow (F \wedge R) \\
&\Leftrightarrow T \rightarrow F \\
&\Leftrightarrow F
\end{aligned}
$$

---

3 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow Q
\end{aligned}
$$

代入规则

一个永真式A，在任何一个命题变元P出现的每一处，均用同一命题公式代入，所得公式B仍为永真式。

$$P \vee \neg P \Leftrightarrow T \qquad R \rightarrow S \qquad \Longrightarrow \qquad (R \rightarrow S) \vee \neg (R \rightarrow S) \Leftrightarrow T$$

A为永真式，不论P做何种真值指派，A的真值永远是T。因此用另一个命题公式代入到变元P出现的每处后，所得的命题公式的真值仍为T。

代入必须是处处代入，否则会出错。

定理

设A、B是公式，则A⇔B当且仅当A↔B是永真式。

A⇔B，则对于所有的真值指派A、B的真值都完全相同，即A↔B为永真式。
A↔B为永真式，则A、B具有相同的真值，即A⇔B。

公式的蕴含

设A，B是两个命题公式，当且仅当A→B为永真式时，叫做**公式A蕴含公式B**，记作**A ⇒ B**。式子“A ⇒ B”称为**重言（永真）蕴含式**。

→与⇒的区别：

- →是命题连接词；
- ⇒表示两个公式间的蕴含关系。

蕴含式的证明方法

对于公式A、B，证明A⇒B:

1. 列真值表，证明A→B是永真式;

2. 等值演算，证明A→B⇔T;

3. 条件假定推演:

   对于A→B，说明其不可能为假，即排除A为真、B为假的情况:

   - **假定A为真，推出使A为真的真值指派必使得B为真；**
   - **假定B为假，推出使B为假的真值指派必使得A为假。**

例 —— 证明蕴含式

证明： $P \Rightarrow \neg P \rightarrow Q$

1

P	Q	P→(¬P→Q)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2

$$P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \vee (P \vee Q)$$
$$\Leftrightarrow T$$

3

令P为T，则¬P必为F，那么¬P→Q必为T，得证。

常用蕴含式

蕴含关系
$P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \wedge Q \Rightarrow Q$
$P \Rightarrow P \vee Q$ $Q \Rightarrow P \vee Q$
$\neg P \Rightarrow P \to Q$ $Q \Rightarrow P \to Q$
$\neg(P \to Q) \Rightarrow P$ $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$
$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$ $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

常用蕴含式

蕴含关系
$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$
$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$
$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$
$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$

蕴含关系的性质

设A，B，C是任意三个命题公式，则有：

1. 自反性：$A \Rightarrow A$
2. 反对称性：若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$，则$A \Leftrightarrow B$
3. 可传递性：若$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$
4. 若$A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow B \wedge C$
5. 若$A \Rightarrow C$，$B \Rightarrow C$，则$A \vee B \Rightarrow C$

对偶式

若命题公式A仅含联结词¬，∧，∨，则将公式A中的∧用∨换，∨用∧换，逻辑常量T，F分别用F，T替换后所得公式A*称为A的对偶式。

$(P\vee Q)\wedge R$	$(P\wedge Q)\vee R$
$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee((Q\wedge R)\wedge T))$	$(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)\wedge((Q\vee R)\vee F))$
$((P\vee Q)\wedge\neg R)\vee(P\wedge F)$	$((P\wedge Q)\vee\neg R)\wedge(P\vee T)$

例 —— 求公式的对偶式

如果A(P，Q，R)是(P→Q)→R，求它的对偶式A*(P，Q，R)。

$\because A(P, Q, R) \Leftrightarrow (P \to Q) \to R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$

$\therefore A^*(P, Q, R) \Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge R$。

定理

设A和A*是对偶式，P_1，P_2，…，P_n是出现在A和A*中的所有命题变元，

则 $\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

$A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$。

由德摩根定律即可证明。

例 —— 验证定理

设A*(S，W，R)是$\neg S\wedge(\neg W\vee R)$，证明: $A^*(\neg S，\neg W，\neg R)\Leftrightarrow\neg A(S，W，R)$。

∵A*(S，W，R)是$\neg S\wedge(\neg W\vee R)$，

$$\therefore A^*(\neg S,\neg W,\neg R)\Leftrightarrow\neg(\neg S)\wedge(\neg(\neg W)\vee\neg R)$$

$$\Leftrightarrow S\wedge(W\vee\neg R)$$

$$又\because\neg A(S,W,R)\Leftrightarrow\neg(\neg S\vee(\neg W\wedge R))$$

$$\Leftrightarrow\neg(\neg S)\wedge\neg(\neg W\wedge R)$$

$$\Leftrightarrow S\wedge(\neg(\neg W)\vee\neg R)$$

$$\Leftrightarrow S\wedge(W\vee\neg R)$$

$$\therefore A^*(\neg S,\neg W,\neg R)\Leftrightarrow\neg A(S,W,R)。$$

对偶原理

设A，B是两个命题公式，若A $\Leftrightarrow$ B，则A*$\Leftrightarrow$ B*。

设A，B是两个命题公式，P_1，P_2，…，P_n是它们所含命题变元。

$\because A \Leftrightarrow B$，也即$A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

$\therefore A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

$\neg A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

根据定理，有$\neg A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

$\neg B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

$\therefore A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

也即 A*$\Leftrightarrow$ B*。

前面介绍的命题定律，都是成对出现的，例如分配律为：

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

下式恰是上式的对偶式，根据对偶原理，我们只须证明其中之一即可。

证明: $(A^*)^* \Leftrightarrow A$。

设A是命题公式，P_1，P_2，…，P_n是它所含命题变元。

根据定理1，有 $\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

$$\Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

$$\Leftrightarrow \neg (A^*)^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$\therefore \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow \neg (A^*)^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$\therefore A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow (A^*)^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

也即$(A^*)^* \Leftrightarrow A$。

范式

为减少同一公式的不同 表达形式对解决问题所带来的麻烦，需要将**公式规范化**。

简单合取式与析取范式

命题变元、命题变元的否定，或它们的合取叫做**简单合取式**。

如：P, $\neg P$, Q, $\neg Q$, $P \wedge Q$, $\neg P \wedge Q$, $P \wedge \neg Q$, $\neg P \wedge \neg Q$

一个简单合取式，或若干个简单合取式的析取叫做**析取范式**。

如： $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q$，$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

简单析取式与合取范式

命题变元、命题变元的否定，或它们的析取叫做**简单析取式**。

如：$P, \neg P, Q, \neg Q, P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q$

一个简单析取式，或若干个简单析取式的合取叫做**合取范式**。

如：$\neg P \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$，$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

化析取范式与合取范式的方法

任一命题公式都可转换为与之等价的析取范式或合取范式的形式:

1. 将公式中的联结词→，↔化归为¬，∧，∨；
2. 利用德·摩根律将 ¬ 直接移到各个命题变元之前；
3. 利用分配律、结合律将公式转换为所需要的范式形式。

例 —— 将下列公式转换为析取范式和合取范式

$$(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee S$$ 【析取范式】

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S)$$ 【合取范式】

最小项

设有 n 个命题变元，则形如$P_1' \wedge P_2' \wedge \ldots \wedge P_n'$的命题公式称为由$P_1$，$P_2$，…，$P_n$所产生的最小项，其中$P_i'$或为$P_i$或为$\neg P_i$。

n 个命题变元共可产生2^n个不同的最小项。

三个命题变元便可产生$2^3=8$个不同最小项。如果我们将命题变元按某种顺序排列好，如P，Q，R的顺序，且在最小项中规定以命题变元的形式出现时，取值1，以命题变元的否定出现时，取值0，那么每个最小项都与一个数值相对应。如下表：

3个命题变元的8个最小项及其编码

最小项	二进制数	十进制数
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	000	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	001	1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	010	2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	011	3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	100	4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	101	5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	110	6
$P \wedge Q \wedge R$	111	7

将十进制数 i 作为下标，将对应的最小项表示为m_i，即

$$m_0 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \quad m_1 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$m_2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R \quad m_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$m_4 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R \quad m_5 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$m_6 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R \quad m_7 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$$

若有 n 个命题变元，且排列顺序为P_1，P_2，…，P_n，则

$$m_0 \Leftrightarrow \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \ldots \wedge \neg P_n$$

$$m_1 \Leftrightarrow \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \ldots \wedge \neg P_{n-1} \wedge P_n$$

……

$$m_{2^n-1} \Leftrightarrow P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$$

3个命题变元的8个最小项的真值表

P_1	P_2	P_3	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
F	F	F	T	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F	F	T	F	F
T	T	F	F	F	F	F	F	F	T	F
T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	T

最小项的性质

1 任意一个最小项，相应命题变元只有一组真值指派使这个最小项的值为T，且最小项不同，使其为T的真值指派也不同。

2 设m_i和m_j是由 n 个命题变元所产生的两个最小项，若$i \neq j$，则$m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F$。

3 $m_0 \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$。

主析取范式

给定命题公式A，如果B $\Leftrightarrow$ A，且B仅由最小项的析取所组成，则称B为A的**主析取范式**。

定理 —— 求解主析取范式的方法

在一个不为矛盾式的命题公式的真值表中，所有真值为T的行所对应的最小项的析取即为该公式的主析取范式。

设命题公式为A，它的真值表中为T的行所对应的最小项为：m_1'，m_2'，…，m_k'。

令$B \Leftrightarrow m_1' \vee m_2' \vee \ldots \vee m_k'$，为此要证$A \Leftrightarrow B$。

使A为T的某一组真值指派，其对应的最小项设为m_i'，

则m_i'必出现在析取范式$m_1' \vee m_2' \vee \ldots \vee m_k'$中，故B也为T。

使A为F的某一组真值指派，其对应的最小项不包含在B中，

则m_1'，m_2'，…，m_k'均为F，故B也为F。

也即A与B同真值，所以$A \Leftrightarrow B$。

例 ——求出公式$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$的主析取范式

列出真值表如下表所示：

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$P \wedge Q$	$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
T	T	T	F	T	F

$\therefore \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow m_1 \vee m_2$。

例: 设计一种简单的表决器

表决者每人座位旁有一按钮，若同意则按下按钮，否则不按按钮，当表决结果超过半数时，会场电铃就会响，否则铃不响。试以表决人数为3人的情况设计表决器电路的逻辑关系。

设3个表决者的按钮分别与命题变元P、Q与R相对应：当按下按钮时，令其真值为T，否则为F。设B对应表决器电铃状态：铃响其值为T，否则为F。可见B是代表表决器电铃的命题公式。根据题意，列出公式B的真值表如下：

P	Q	R	B
F	F	F	F
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	T
T	T	F	T
T	T	T	T

$\therefore \mathbf{B} \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$。

最大项

设有 n 个命题变元，则形如$P_1' \vee P_2' \vee \ldots \vee P_n'$的命题公式称为由$P_1$，$P_2$，…，$P_n$所产生的**最大项**，其中$P_i'$或为$P_i$或为$\neg P_i$。

n 个命题变元共可产生2^n个不同的最大项，通常用M_i表示。

i 的确定与最小项m_i中 i 的确定正好相反，即以命题变元的形式出现时，取值0，以命题变元的否定出现时，取值1。

三个命题变元P_1，P_2，P_3所产生的8个最大项为：

$M_0 \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee P_3$　　$M_1 \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3$

$M_2 \Leftrightarrow P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$　　$M_3 \Leftrightarrow P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3$

$M_4 \Leftrightarrow \neg P_1 \vee P_2 \vee P_3$　　$M_5 \Leftrightarrow \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3$

$M_6 \Leftrightarrow \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$　　$M_7 \Leftrightarrow \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3$

三个命题变元P_1，P_2，P_3所产生的最大项的真值表

P_1	P_2	P_3	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F

最大项的性质

1 任意一个最大项，相应命题变元只有一组真值指派使这个最大项的值为F，且最大项不同，使其为F的真值指派也不同。

2 设M_i和M_j是由 n 个命题变元所产生的两个最大项，若$i \neq j$，则$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T$。

3 $M_0 \wedge M_1 \wedge \ldots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$。

主合取范式

给定命题公式A，如果B $\Leftrightarrow$ A，且B仅由最大项的合取所组成，则称B为A的**主合取范式**。

定理 —— 求解主合取范式的方法

在一个不为重言式的命题公式的真值表中，所有真值为F的行所对应的最大项的合取即为该公式的主合取范式。

设命题公式为A，它的真值表中为F的行所对应的最大项为：M_1'，M_2'，…，M_k'。

令$B \Leftrightarrow M_1' \wedge M_2' \wedge \ldots \wedge M_k'$，为此要证$A \Leftrightarrow B$。

使A为F的某一组真值指派，其对应的最大项设为M_i'，

则M_i'必出现在合取范式$M_1' \wedge M_2' \wedge \ldots \wedge M_k'$中，故B也为F。

使A为T的某一组真值指派，其对应的最大项不包含在B中，

则M_1'，M_2'，…，M_k'均为T，故B也为T。

也即A与B同真值，所以$A \Leftrightarrow B$。

例 —— 求公式$P\wedge(P\rightarrow Q)$的主合取范式。

列出真值表：

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\wedge(P\rightarrow Q)$
F	F	T	F
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

$\therefore P\wedge(P\rightarrow Q) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2$。

任一命题公式都可转换为与之等价的主析取范式或主合取范式的形式：

1 将公式转换为析取范式（合取范式）；

2 将所得析取范式（合取范式）中的合取式（析取式）扩展成最小项（最大项）。方法是：若某合取式（析取式）中缺少命题变元Y，则添加(Y∨¬Y)（(Y∧¬Y)）。

例 —— 求公式的主析取范式和主合取范式

$$(P \vee Q) \rightarrow R$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee$$
$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee$$
$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

【主析取范式】

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$

【主合取范式】

命题演算的推理理论

解决三个问题：

1. 推理
2. 推理规则
3. 推理方法

推 理

推理是由已知的命题得到新命题的思维过程。任何一个推理都由前提和结论两部分组成，**前提**就是推理所根据的已知的命题，**结论**则是从前提通过推理而得到的新命题。

设A,B是两个命题公式，如果**A⇒B**，即如果命题公式A→B为永真式，则称**B是前提A的有效结论**或**从A推出有效结论B**。

一般地，设$H_1,H_2,\ldots,H_n$和C是一些命题公式，若

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$$

则称C是前提集合$\{H_1,H_2,\ldots,H_n\}$的有效结论，或称从前提$H_1,H_2,\ldots,H_n$能推出有效结论C。有时可记为

$$H_1,H_2,\ldots,H_n \Rightarrow C$$

有效的推理不一定产生真实的结论。

推理规则

【1】前提引入规则P

在证明的任何步骤上都可以引用前提。

【2】结论引用规则T

在证明的任何步骤上得到的结论都可以在其后的证明中引用。

【3】置换规则

【4】代入规则

【5】蕴含证明规则

若能够从Q和前提集合P中推导出R,则就能从P中推导出Q→R来。

例如，句子“**如果天气好并且我又有时间的话，那么我就去新华书店。**”

$$\boxed{P \wedge Q \Rightarrow R}$$

意味着“**如果天气好，那么只要我有时间，我就去新华书店。**”

$$\boxed{P \Rightarrow Q \rightarrow R}$$

P: 天气好。

Q: 我有时间。

R: 我去新华书店。

CP规则即是：若$P \wedge Q \Rightarrow R$,则$P \Rightarrow Q \rightarrow R$。

事实上，

$$(P\land Q)\rightarrow R \Leftrightarrow \neg(P\land Q)\lor R$$

$$\Leftrightarrow \neg P\lor\neg Q\lor R$$

$$\Leftrightarrow \neg P\lor (\neg Q\lor R)$$

$$\Leftrightarrow \neg P\lor (Q\rightarrow R)$$

$$\Leftrightarrow P\rightarrow(Q\rightarrow R)$$

CP规则说明：若结论是形如Q→R的公式，则可将Q作为附加的前提，与已知的前提集合P一起，推出结论R即可。

推理规则（续）

【6】附加规则： $P \Rightarrow P \vee Q$

$Q \Rightarrow P \vee Q$

P:大学毕业后他将参加工作。

Q:大学毕业后他将继续深造。

由前提：大学毕业后他将参加工作。

有结论：大学毕业后他将参加工作或继续深造。

【7】化简规则： $P \wedge Q \Rightarrow P$

$P \wedge Q \Rightarrow Q$

【8】合取规则： $((P) \wedge (Q)) \Rightarrow P \wedge Q$

【9】假言推理： $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

【10】拒取式： $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

【11】假言三段论： $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$

【12】析取三段论： $(P \vee Q) \wedge (\neg P) \Rightarrow Q$

推理方法

判断前提集合｛H_1，H_2，…，H_n｝是否能推导出有效结论C的基本方法有三种。

【1】按照定义：等值演算法/真值表法

判断命题公式$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$是否永真。

【2】直接证法

由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价公式或重言蕴含式推演得到有效的结论。

【3】间接证法

- 反证法
- 利用CP规则

若a能被2整除，则a是偶数。a能被2整除。结论“a是偶数”是否有效?

设 P: a能被2整除。

Q: a是偶数。

则前提是： $P \to Q$ ， P

结论是： Q

判断结论是否有效，就是判断命题公式

$$((P \to Q) \wedge P) \to Q$$

是否永真。

等值演算法

$$((P \rightarrow Q) \land P) \rightarrow Q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg P \underline{\lor} Q) \underline{\land}\ P) \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\underline{\neg P \land P}) \lor (Q \land P)) \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \neg(F \lor (Q \land P)) \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \underline{\neg}(Q \underline{\land} P) \lor Q$$

$$\Leftrightarrow \underline{\neg Q} \lor \neg P \lor \underline{Q}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\neg Q \lor Q \lor} \neg P$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{T} \lor \neg P$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{T}$$

真值表法

$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$的真值表

P	Q	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

直接证法

某侦探要破获一起盗窃案，经多方调查得知有关事实，请找出盗窃犯。已知事实是：

- A或B盗窃了电脑一台； $P \vee Q$
- 若是A盗窃的，则作案时间不能是午夜前； $P \to \neg R$
- 若B的证词正确，则在午夜时屋里灯亮着； $S \to T$
- 若B的证词不正确，则作案时间是午夜前； $\neg S \to R$
- 午夜时屋里的灯灭了； $\neg T$
- A想有自己的电脑。 U

先将已知事实符号化成公式。设

P: A盗窃了电脑。

Q: B盗窃了电脑。

R: 作案时间是午夜前。

S: B的证词正确。

T:午夜时屋里灯亮着。

U: A想有自己的电脑。

即前提是：P∨Q，P→¬R，S→T，¬S→R，¬T，U。

下面**从已知前提出发进行推理**：

(1) ¬T	P(已知前提)
(2) S→T	P
(3) ¬S	T(1),(2); 拒取式
(4) ¬S→R	P
(5) R	T(3),(4);假言推理
(6) P→¬R	P
(7) ¬P	T(5),(6); 拒取式
(8) P∨Q	P
(9) Q	T(7),(8);析取三段论

P: A盗窃了电脑。
Q: B盗窃了电脑。
R:作案时间是午夜前。
S: B的证词正确。
T:午夜时屋里灯亮着。
U: A想有自己的电脑。

得出**结论** Q: B盗窃了电脑。

反证法

反证法的思路即是：把结论的否定作为假设（即附加前提）,与给定的前提一起作为前提集合进行推证，若能推导出矛盾，则假设不成立，结论是有效的。

事实上，因为$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C \Leftrightarrow T$，所以

$$
\begin{aligned}
& (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \wedge \neg C \\
\Leftrightarrow & \neg (\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \vee C) \\
\Leftrightarrow & \neg ((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C) \\
\Leftrightarrow & \neg T \\
\Leftrightarrow & F
\end{aligned}
$$

例: 四支球队举行比赛。已知情况如下，问结论是否有效?

前提 (1) 若大连万达队获冠军，则北京国安队或上海申花队获亚军。

(2) 若上海申花队获亚军，则大连万达队不能获冠军。

(3) 若延边敖东队获亚军，则北京国安队不能获亚军。

(4) 最后大连万达队获得冠军。

结论：延边敖东队未获得亚军。

$P \to (Q \vee R)$

$R \to \neg P$

$S \to \neg Q$

P

$\neg S$

先将命题符号化，设：

P：大连万达队获冠军。

Q：北京国安队获亚军。

R：上海申花队获亚军。

S：延边敖东队获亚军。

即前提是： $P \to (Q \vee R)$， $R \to \neg P$， $S \to \neg Q$， P。

结论是： $\neg S$ 。

推理过程如下：

(1) $\neg(\neg S)$	附加前提
(2) S	T(1);E
(3) $S \to \neg Q$	P
(4) $\neg Q$	T(2),(3);假言推理
(5) P	P
(6) $P \to (Q \vee R)$	P
(7) $Q \vee R$	T(5),(6);假言推理
(8) $R \to \neg P$	P
(9) $\neg R$	T(5),(8);拒取式
(10) Q	T(7),(9);析取三段论
(11) $\neg Q \wedge Q$	T(4),(10);矛盾

结论"延边敖东队未获得亚军" 是有效结论。

P:大连万达队获冠军。

Q:北京国安队获亚军。

R:上海申花队获亚军。

S: 延边敖东队获亚军。

利用CP规则

其思路是：若结论是形如Q→R的公式，则可将Q作为附加的前提，与已知的前提集合P一起，推出结论R即可。

证明前提 “若我努力学习，则我将取得好成绩。” $P \to Q$

“若我不努力学习，我就不会获得奖学金。” $\neg P \to \neg R$

“若我没有奖学金，则我得去勤工俭学。” $\neg R \to S$

导致结论 “若我没有取得好成绩，则我得去勤工俭学。” $\neg Q \to S$

先将命题符号化，设：

P：我努力学习。

Q：我取得好成绩。

R：我获得奖学金。

S：我去勤工俭学。

即**前提**是： $P \to Q$， $\neg P \to \neg R$， $\neg R \to S$。

结论是： $\neg Q \to S$。

推理过程如下：

(1) $\neg Q$	附加前提
(2) $P \to Q$	P
(3) $\neg P$	T(1),(2);拒取式
(4) $\neg P \to \neg R$	P
(5) $\neg R$	T(3),(4);假言推理
(6) $\neg R \to S$	P
(7) S	T(5),(6);假言推理
(8) $\neg Q \to S$	CP规则

P: 我努力学习。
Q: 我取得好成绩。
R: 我获得奖学金。
S: 我去勤工俭学。

张三说李四在说谎，李四说王五在说谎，王五说张三、李四都在说谎。问张三、李四，王五三人到底谁说真话，谁说假话?

- **首先将命题符号化**

设 P:张三说真话； Q:李四说真话； R:王五说真话；

- **则前提是**

$P \to \neg Q$， $Q \to \neg R$， $R \to \neg P \wedge \neg Q$,

$\neg P \to Q$， $\neg Q \to R$， $\neg R \to P \vee Q$。

- **根据已知前提按照推理规则进行推理**

(1) $P \to \neg Q$	P
(2) $\neg Q \to R$	P
(3) $P \to R$	T(1),(2);假言三段论
(4) $R \to \neg P \wedge \neg Q$	P
(5) $P \to \neg P \wedge \neg Q$	T(3),(4);假言三段论
(6) $\neg P \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	T(5);E
(7) $\neg P$	T(6);E
(8) $\neg P \to Q$	P
(9) Q	T(7),(8);假言推理
(10) $Q \to \neg R$	P
(11) $\neg R$	T(9),(10);假言推理
(12) $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	T (7),(9),(11);合取规则

P：张三说真话。
Q: 李四说真话。
R: 王五说真话。

- **结论是：** 李四说真话，张三、王五说谎。

the end