代数系统

运算

1 设有非空集合A，如果对于A 中元素$a_1,a_2,\ldots,a_n$，根据某种规则，可以使有序n 元组$<a_1,a_2,\ldots,a_n>$与某个集合中的唯一元素c 对应，我们称这种对应为A 的结合法，又称为A 上的**n 元代数运算**，n 称为**运算的阶**。

2 当n = 1时，称为一元运算，当n = 2时，称为**二元运算**。

3 设 * 是集合A 上的一个n 元运算，若对于$\forall a_1,a_2,\ldots,a_n \in A$，运算结果 $*<a_1,a_2,\ldots,a_n>$ 仍然属于A，则称A 在运算 * 下是封闭的，或称**集合A 上的运算 * 满足封闭性**。

www.znufe.edu.cn

判断下列运算的封闭性

(1) 设N 是自然数集，对∀a,b∈N ，令它们与a + b对应，这就是通常的加法。

(2) 设N 是自然数集，对∀ a,b∈N ，令它们与a - b对应，这就是通常的减法。

(3) 对于整数集I ，可以定义通常的加法、减法。

(4) 对于矩阵集合M ，可以定义结合法为矩阵乘法。

(5) ρ(U)对其上的并、交、补运算∪，∩，~。

www.znufe.edu.cn

设A = { a / a=2ⁿ∧n∈N } ，问A 在乘法运算下是否封闭？A 在加法运算下是否封闭？

解 对 $2^r,2^s\in A$，有$2^r\cdot 2^s=2^{r+s}\in A$，

∴A 在乘法运算下是封闭的。

∵$2^1,2^2\in A$，而$2^1+2^2=2+4=6\notin A$，

∴A 在加法运算下不是封闭的。

www.znufe.edu.cn

二元运算的性质 —— 交换律

设$\circ$是集合A 上的一个二元运算，若对于$\forall a,b\in A$，有

$$a \circ b = b \circ a,$$

则称运算$\circ$在A 上是**可交换**的。

实数集上的加法和乘法都是可交换的，减法不满足可交换性。

www.znufe.edu.cn

二元运算的性质 —— 结合律

设$\circ$是集合A 上的一个二元运算，若对于$\forall a,b,c\in A$，有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

则称运算$\circ$在A 上是**可结合**的。

- 实数集上的加法和乘法都是满足可结合性；
- 集合的$\cup$和$\cap$满足可结合性；
- 函数的复合运算满足可结合性。

若运算 * 在A 上是可结合的，则对$\forall\ m,n\in N$，有$a^m * a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$。

www.znufe.edu.cn

二元运算的性质 —— 幂等律

设°是集合A 上的一个二元运算，若对于∀a ∈A ，有

$$a \circ a = a,$$

则称运算°在A 上满足**幂等律**的，或A中所有元素均是**幂等元**。

幂集ρ(A)上的运算∪和∩满足幂等律。

www.znufe.edu.cn

二元运算的性质 —— 分配律

设 * ，o是集合A 上的两个二元运算，若对于∀ a,b,c∈A ， 有

$$a * (b o c) = (a * b) o (a * c),$$

$$(b o c) * a = (b * a) o (c * a),$$

则称运算 * 对运算o是**可分配**的。

实数集上的乘法对加法满足分配律；幂集ρ(A)上的运算∪和∩相互是可分配的。

www.znufe.edu.cn

二元运算的性质 —— 吸收律

设 * ，o是集合A 上的两个二元运算，若对于$\forall$ a,b$\in$A ,有

a*(aob) = a，ao(a*b) = a ，

则称运算 * 和运算o是**满足吸收律**的。

www.znufe.edu.cn

幺元

设◦是集合A 上的一个二元运算，

■ 若存在$e_l \in A$ ，使得对于$\forall a \in A$ ，有$e_l \circ a = a$ ，则称e_l 是A 关于运算◦的**左幺元**（或左单位元）。

■ 若存在$e_r \in A$ ，使得对于$\forall a \in A$ ，有$a \circ e_r = a$ ，则称e_r 是A 关于运算◦的**右幺元**（或右单位元）。

■ 若存在$e \in A$，使得对于$\forall a \in A$ ，有$e \circ a = a \circ e = a$ ，则称e是A 关于运算◦的**幺元**（或单位元）。

www.znufe.edu.cn

定理

设$\circ$是集合A 上的一个二元运算，又设e_l ，e_r 分别是A 关于$\circ$的左、右幺元，则$e_l = e_r = e$，且e是A 关于$\circ$的唯一幺元。

证明 根据左、右幺元的定义有$e_l \circ e_r = e_l = e_r$

令$e_l = e_r = e$，则e是A 关于$\circ$的一个幺元，

再设e'是A 关于$\circ$的另一幺元，则有

$e' \circ e = e = e'$，

$\therefore$ e是A 关于$\circ$的唯一幺元。

www.znufe.edu.cn

零元

设$\circ$是集合A 上的一个二元运算，

■ 若存在$0_l \in A$，使得对于$\forall a \in A$，有$0_l \circ a = 0_l$，则称0_l是A 关于运算$\circ$的**左零元**。

■ 若存在$0_r \in A$，使得对于$\forall a \in A$，有$a \circ 0_r = 0_r$，则称0_r是A 关于运算$\circ$的**右零元**。

■ 若存在$0 \in A$，使得对于$\forall a \in A$，有$0 \circ a = a \circ 0 = 0$，则称0是A 关于运算$\circ$的**零元**。

www.znufe.edu.cn

定理

设$\circ$是集合A 上的一个二元运算，又设0_l，0_r分别是A 关于$\circ$的左、右零元，则$0_l = 0_r = 0$，且0是A 关于$\circ$的唯一零元。

定理

设$\circ$是集合A 上的一个二元运算，e和0分别是A 关于$\circ$的幺元和零元，如果A至少有两个元素，则$e \neq 0$。

www.znufe.edu.cn

加法运算 + :$R \times R \to R$，幺元为0 ，无零元。

乘法运算·: $R \times R \to R$，幺元为1 ，零元为0 。

减法运算 - : $R \times R \to R$，右幺元为0 ，无左幺元，无零元

并运算∪:$\rho(U) \times \rho(U) \to \rho(U)$ ，幺元为Φ，零元为U 。

交运算∩: $\rho(U) \times \rho(U) \to \rho(U)$ ，幺元为U ，零元为Φ。

逆元

设∘是集合A 上具有幺元e的二元运算，对于$a \in A$ ，

- 若存在$a_l^{-1} \in A$，使得$a_l^{-1} \circ a = e$ ，则称元素a 对于运算∘是左可逆的，而称a_l^{-1}是a的**左逆元**。
- 若存在$a_r^{-1} \in A$，使得$a \circ a_r^{-1} = e$ ，则称元素a 对于运算∘是右可逆的，而称a_r^{-1}是a 的**右逆元**。
- 若存在$a^{-1} \in A$ ，使得$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$，则称元素a 对于运算∘是可逆的，而称$a^{-1}$是a 的**逆元**。

定理

设°是集合A 上具有幺元e且可结合的二元运算，若元素a∈A有左逆元和右逆元，则其左、右逆元相等，并且就是a 的唯一逆元。

证明 设a_l^{-1}和a_r^{-1}分别是a 的左、右逆元，则

$$a_l^{-1} \circ a = a \circ a_r^{-1} = e,$$

$$\therefore a_l^{-1} \circ a \circ a_r^{-1} = (a_l^{-1} \circ a) \circ a_r^{-1} = e \circ a_r^{-1} = a_r^{-1}$$

$$= a_l^{-1} \circ (a \circ a_r^{-1}) = a_l^{-1} \circ e = a_l^{-1}$$

$\therefore a_l^{-1} = a_r^{-1} = a^{-1}$是a 的一个逆元。

设b 也是a 的一个逆元，则

$$b = b \circ e = b \circ (a \circ a^{-1}) = (b \circ a) \circ a^{-1} = e \circ a^{-1} = a^{-1}$$

$\therefore a^{-1}$是a 的唯一逆元。

www.znufe.edu.cn

二元运算的性质 —— 消去律

设°是集合A 上的二元运算，如果对于∀a,b,c∈A，有

若a°b = a °c，则b = c

若b°a = c °a, 则 b = c

就称A对运算°满足**消去律**。

www.znufe.edu.cn

思考与练习

1. 考虑实数集上的二元运算*，*定义如下：

(1) $r1*r2 = |r1-r2|$
(2) $r1*r2 = -(r1+r2)$

分别讨论*的可交换性，可结合性,R有否幺元，每个元素有无逆元，逆元是什么？

2. 设有集合A以及A上满足结合性的二元运算*，且对于$\forall ai,aj \in A$，由$ai*aj = aj*ai$可推得$ai = aj$。试证明A中的任一元素都是幂等元。

www.znufe.edu.cn

代数系统

非空集合A和A上k个运算$f_1,f_2,..,f_k$（其中f_i为n_i元运算,i=1,2,…k)组成的系统称为一个**代数系统**，记作$<A, f_1,f_2,..,f_k>$。

若A为有限集，则称$<A, f_1,f_2,..,f_k>$为有限代数系统，并称|A|为该代数系统的**阶**。

www.znufe.edu.cn

代数系统的同态

设V1= <S1,°>,V2=<S2,*>是代数系统， °和*为二元运算。如果存在映射φ:S1→S2满足∀x,y∈S1有

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

则称φ 是V1到V2的**同态**映射，简称同态。

令φ:R→R^+， φ(x) = e^x,那么φ是从<R,+>到<R^+,•>的同态。

www.znufe.edu.cn

代数系统的同构

设φ 是V1= <S1,°>到V2=<S2,*>的同态，

(1) 如果φ 是满射的，则称φ 是V1到V2的**满同态，记作V1~V2；**

(2) 如果φ是单射的，则称φ 是V1到V2的**单同态；**

(3) 如果φ是双射，则称φ 是V1到V2的**同构**，称V1和V2同构，记作**V1≅V2**；

(4) 如果V1=V2,则称φ 是V1到V2的**自同态；**

(5) 如果V1=V2，且φ是双射，则称φ是从V1到V2的**自同构。**

www.znufe.edu.cn

思考与练习

1. 设A为任意集合，且|A| = n。则A上能定义的二元运算的个数是多少个？

2. 设有代数系统<S,*,∘>,其中*和∘均是二元运算，且分别有单位元e1和e2。已知运算*和∘相互之间均是可分配的。试证明:对于S中任意的元素x，有x*x = x ∘ x = x。

3.设f_1和f_2都是从代数系统<S1,*>到<s2, ∘ >的同态，这里*和∘都是二元运算，且∘是可交换和可结合的。定义函数h:S1→S2，使得对于∀x∈S1,h(x)=f_1(x) ∘f_2(x)。试证明：h也是从<S1,*>到<s2, ∘ >的同态。

www.znufe.edu.cn

本章完！