# 2021-2022 第二学期概率统计期末考试说明

**考试内容**：教材第 1.1-7.2 章。以下内容不考察：

第三章： 3.4 连续型随机变量的乘法、除法函数；

第四章：4.1.4 条件数学期望；

4.3.3 协方差矩阵与相关系数矩阵；

第六章：6.1.3 经验分布函数；

6.4.3 分位数；

第七章：7.2.3 相合性。

**考试题型**：分基础计算、简答题、综合计算、证明四类题型，总分 100 分。

1、**基础计算**：4 个小题，每小题 5 分，共计 20 分。

2、**简答题**：4 个小题，每小题 5 分，共计 20 分。

3、综合**计算题**：6 个小题，每小题 9 分，共计 54 分。

3、**证明题**：1 个题，计 6 分。

# 复习题一

一、基础计算题 (共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分).

1. 从 6 副不同的手套中任意地取 4 只，求其中至少有两只手套配成一副的概率。

2. 已知某类元件的使用寿命 $T \sim E\left(\dfrac{1}{10000}\right)$（单位：h）。某系统独立地使用 10 个这种元件，求在 5000 h 内这些元件不必更换的个数 $X$ 的分布律。

3. 已知二维随机变量$(X,Y) \sim \mathrm{N}(-1, 5, 16, 49, 0)$, 求 $D\left(\dfrac{X+1}{4}\right), E(XY^2)$.

4. 假设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu, 2^2)$，现抽取容量为 $n$ 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本均值记为 $\overline{X}$. 求满足 $P\{|\overline{\mathrm{X}} - \mu| \geq 0.1\} \leq 0.05$ 的最小样本容量 $n$.

（可能用到的标准正态分布的分布函数值: $\Phi(1.645) = 0.95,\ \Phi(1.96) = 0.975$）

二、简答题 (共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分). 请根据课程内容做出清晰的表述与推导; 需要作判断的题目请通过推导或者举反例等方式给出你的理由。

1. 对三个事件 $A, B, C$，试问 $A-(B-C) = (A-B)+C$ 是否成立？请证明或举例说明。

2. 已知 $f_1(x), f_2(y)$ 分别是某一维随机变量的概率密度函数，若要使得二元函数 $f(x,y) = f_1(x) f_2(y) - h(x,y)$ 成为某二维随机变量的概率密度函数，则 $h(x,y)$ 必须满足的充分必要条件是什么？请写出你的推导。

3. 请完整描述切比雪夫不等式，包括它的成立条件、主要结论，并说说该不等式在应用中的优点。

4. 设总体 $X \sim N(0, 2^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 是其简单随机样本。记 $Z = \dfrac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}$, 则统计量 $\dfrac{1}{2Z}$ 服从什么分布？写出你的理由。

三、综合计算题 (共 6 题, 每题 9 分, 共 54 分）

1. 猎人在距离 100 米处射击一动物，击中的概率为 0.6；如果第一次未击中，则进行第二次射击，但由于动物逃跑而使距离变为 150 米；如果第二次又未击中，则进行第三次射击，这时距离变为 200 米。假定击中的概率与距离成反比，求猎人三次之内击中动物的概率。

2. 已知随机变量 $X \sim N(0,1)$，记 $Y = 2X^2 + 1$. 求 (1) $Y$ 的概率密度函数; (2) $P\{1 < Y < 9\}$.（可能用到的标准正态分布的分布函数值 $\Phi(2) = 0.977.$）

3. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} Ax, & 0 < x < 1,\ -x < y < x, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$，

求（1） $A$ 的值；（2） 边缘概率密度 $f_Y(y)$；（3）$\mathrm{P}\left\{x < \frac{1}{3} \middle| 0 < \mathrm{y} < 1\right\}$.

4. 已知随机变量 $U_i\ (i=1,2,3)$ 相互独立且都服从参数为 $\dfrac{1}{3}$ 的 0-1 分布。令

$$X = \begin{cases} 0, & 若U_1 + U_2为偶数, \\ 1, & 若U_1 + U_2为奇数, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0, & 若U_2 + U_3为偶数, \\ 1, & 若U_2 + U_3为奇数。 \end{cases}$$

试求 (1) $(X,Y)$ 的联合分布律; (2) 相关系数 $\rho_{XY}$.

5. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且其概率密度函数分别为

$$\mathrm{f_X(x)} = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}, \quad \mathrm{f_Y(y)} = \begin{cases} 2y, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

求随机变量 $\mathrm{Z = X - Y}$ 的概率密度函数。

6. 设总体 $X \sim P(\lambda),\ \lambda > 0$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X$ 的一个样本，求参数 $\lambda$ 的矩估计量和最大似然估计量。

四、证明题：（共 1 题，共 6 分）

已知随机变量 $X$ 的概率密度函数 $f(x)$ 为偶函数，$F(x)$ 为 $X$ 的分布函数，

证明： 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，有 $F(x) + F(-x) = 1.$

# 复习题二

一、基础计算题 (共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分).

1. 某人独立的朝一目标射击三次。用 $A_i$ 表示事件“第 $i$ 次击中, $i=1,2,3$”, 每次击中的概率为 $p\,(0<p<1)$, 求 $P\left(\overline{A_1 \cup A_2} \middle| A_3\right)$.

2. 已知随机变量 $X,Y$ 相互独立。若 $X$ 服从参数为 2 的泊松分布, $Y \sim B(4,\frac{1}{4})$, 又设 $Z=2X-Y$. 求 $EZ, DZ$.

3. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立同分布, 且 $X \sim E(\frac{1}{2})$. 计算概率 $P\{\max(X,Y)\ge 2\}$.

4. 设总体 $X$ 的期望 $EX=1$, 方差 $DX=4$, $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自该总体的样本, $\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i$ 为样本均值, 试用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|\overline{X}-1|\ge 2\}$.

二、简答题 (共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分).

1. 试描述两个事件相互独立和两个事件互不相容的关系，并证明或举例说明你的结论。

2. 已知随机变量 $X, Y$ 相互独立，并且都服从(0,1)上的均匀分布，试求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

3. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度, 若已知

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\le 0, \\ bf_2(x), & x>0, \end{cases} (a>0,b>0)$$ 为概率密度, 则常数 $a$ 与 $b$ 需满足什么条件?

4. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(4)$, 且 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则统计量 $T=\frac{2X}{\sqrt{Y}}$ 服从什么分布？说明你的理由。

三、综合计算题 (共 6 题, 每题 9 分, 共 54 分）

1. 一种用来检验 50 岁以上的人是否患有关节炎的检验方法。对于确实患关节炎的病人有 85%的给出了正确的结果；而对于已知未患关节炎的人有 4% 会认为他患关节炎。已知人群中有 10%的人患有关节炎。试求一名被检验者经检验后，认为他没有关节炎，而事实上他却有关节炎的概率。

2. 已知连续型随机变量 $X$ 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ 1-x^{-1}, & 1<x, \end{cases}$, 又设 $Y=\ln X$.

(1) 求 $Y$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$;（2）计算 $\sum_{k=1}^{+\infty}P(Y\ge k)$.

3. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<2,\ |y|<x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求：(1) 常数 $A$； (2) $P(X+Y\geq 1)$； (3) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断随机变量 $X$ 与 $Y$ 是否相互独立。

4. 已知 $A, B$ 为相互独立的随机事件，$P(A)=\frac{1}{2}$. 若 $A$ 发生且 $B$ 不发生与 $B$ 发生且 $A$ 不发生的概率相等，记随机变量

$$X=\begin{cases} 0，A\text{不发生}， \\ 1，A\text{发生}， \end{cases} \quad Y=\begin{cases} 0，\overline{AB}\text{不发生}， \\ 1，AB\text{发生}， \end{cases}$$

（1）求（$X$,$Y$）的联合分布律并判断 $X$ 与 $Y$ 是否相互独立;（2）求 $X$ 与 $Y$ 的相关系数。

5. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，随机变量 $Z=XY$，且 $X\sim B(1, 0.5), Y\sim N(0,1)$.

求 (1) 概率 $P\{X+Y\leq 1\}$; (2) 随机变量 $Z$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

6. 设总体 $X$ 的概率密度为: $f(x;\theta)=\begin{cases} \theta, & 0<x<1, \\ 1-\theta, & 1\leq x<2, \\ 0, & \text{others}, \end{cases}$

其中 $\theta$ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的一个简单随机样本, 记 $N$ 为样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中小于 1 的个数. 求 (1) $\theta$ 的矩估计量; (2) $\theta$ 的极大似然估计量.

四、证明题:（共 1 题，共 6 分）

设随机变量 $X,Y$ 相互独立且它们的方差都存在。请证明下述等式

$$D(XY)=D(X)D(Y)+(EX)^2D(Y)+(EY)^2D(X).$$

# 复习题一参考解答

## 一、基础计算题

1. $$P(A)=1-\frac{C_6^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{17}{33}.$$

2. $$P\{T>5000\}=\int_{5000}^{+\infty}\frac{1}{10000}e^{\frac{-t}{10000}}dt=e^{-1/2}.$$

$$P\{\mathrm{X}=\mathrm{k}\}=\mathrm{C}_{10}^{\mathrm{k}}e^{-k/2}(1-e^{-1/2})^{10-k},\ k=0,1,2,\cdots,10.$$

3. $$D\left(\frac{X+1}{4}\right)=\frac{1}{16}DX=1.$$

$$EY^2=DY+(EY)^2=49+25=74,$$

$$E(XY^2)=EX\cdot EY^2=-74.$$

4. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\qquad P\{\left|\overline{X}-\mu\right|\geq 0.1\}=P\{\dfrac{\left|\overline{X}-\mu\right|}{2/\sqrt{n}}\geq 0.05\sqrt{n}\}\leq 0.05,$

根据标准正态分布的性质有 $2\Phi(0.05\sqrt{n})-1\geq 0.95,$

推出 $0.05\sqrt{n}\geq 1.96,\quad n\geq 1537.$ 即满足条件的最小样本容量为 1537.

## 二、简答题

1. 不成立。$A-(B-C)=A\overline{B\overline{C}}=A(\overline{B}+C)=A\overline{B}+AC,\ (A-B)+C=A\overline{B}+C,$

   可以看出二者不一定成立。 注：举例说明也可以。

2. (1) 由 $f(x,y)\geq 0$，推得 $h(x,y)\leq f_1(x)f_2(y)$；

   (2) 由 $\iint\limits_{R^2}f(x,y)dxdy=1$，推得 $\int\limits_R f_1(x)dx\int\limits_R f_2(y)dy-\iint\limits_{R^2}h(x,y)dxdy=1,$

   即 $\iint\limits_{R^2}h(x,y)dxdy=0.$

   以上两个条件是 $h(x,y)$ 需满足的充分必要条件。

3. 切比雪夫不等式：若随机变量 $X$ 的期望 $EX$ 和方差 $DX$ 都存在，则

   对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$P\{\left|X-EX\right|\leq\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

该不等式在应用中不需要清楚随机变量的具体分布情况，只需知道其数字特征就可以估计随机变量取值规律。同时，它也是大数定律的理论基础。

4. 因 $U=\dfrac{X_1^2+X_2^2}{4}\sim\chi^2(2)$, $V=\dfrac{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2}{4}\sim\chi^2(4)$,

所以， $\dfrac{1}{2Z}=\dfrac{V/4}{U/2}\sim F(4,2).$

## 三、综合计算题

1. 解: 记 $A_i$ ={第 i 次击中目标}，则事件 B={三次之内击中目标} 可表示为

$$B=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$$

据已知可得 $P(A_1)=0.6,\ P(A_2)=0.4,\ P(A_3)=0.3.$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=0.6+0.4\cdot0.4+0.4\cdot0.6\cdot0.3=0.832.\end{aligned}$$

2. 解: （1）Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}$

若 $y\le1$，则 $F_Y(y)=0,\ f_Y(y)=0;$

若 $y>1$,则 $F_Y(y)=P\{-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\}$，

此时密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{2(y-1)}}\left(f_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})+f_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}})\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(y-1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y-1}{4}}.$$

综上，Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le1,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}(y-1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1.\end{cases}$

（2） $P\{1<Y<9\}=P\{-2<X<2\}=2\Phi(2)-1=0.954.$

3. 解: (1) 由规范性, $\int_0^1dx\int_{-x}^{x}Axdy=1$, 得 $A=\dfrac{3}{2}.$

(2) 随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-y^2), & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（3）略。

4. 解: (1) $(X,Y)$ 的联合分布律为

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/3 | 2/9 |
| 1 | 2/9 | 2/9 |

（2） $EX=\frac{4}{9}$, $DX=\frac{20}{81}$, $EY=\frac{4}{9}$, $DY=\frac{20}{81}$, $EXY=\frac{2}{9}$, $Cov(X,Y)=\frac{2}{81}$,

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{2/81}{20/81}=\frac{1}{10}.$$

5. 解: 先求出 $U=-Y$ 的密度函数为 $f_U(u)=\begin{cases}-2u, -1\le u\le 0,\\ 0, \quad others.\end{cases}$

$Z=X-Y=X+U$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_U(z-x)dx$$

其中，被积函数 $f_X(x)f_U(z-x)=\begin{cases}2(x-z), 0\le x\le 1, x-1\le z\le x,\\ 0, \quad \text{others}\end{cases}$.

由此可得，$f_Z(z)=\begin{cases}1-z^2, & -1\le z\le 0,\\ (1-z)^2, & 0<z\le 1,\\ 0, & \text{others}.\end{cases}$

6. 解: (1) 因 $EX=\lambda$，故 $\lambda$ 的矩估计量可选为 $\hat{\lambda}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(2) 根据题意可得似然函数为 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)=e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$ ，

所以 $\ln L(\lambda)=-n\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\ln\sum_{i=1}^{n}x_i!$ . 由 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=0$，

得 $-n+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0,$ 解得$\lambda$的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$

故$\lambda$的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$

## 四、证明题

证明: 由

$$F(-x)=\int_{-\infty}^{-x}f(-x)dx=-\int_{+\infty}^{x}f(t)dt=\int_{x}^{+\infty}f(t)dt\ ,$$

而

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,$$

故 $F(-x)+F(x)=\int_{x}^{+\infty}f(t)dt+\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1.$ 证毕。

# 复习题二参考解答

## 一、基础计算题

1. 解：因为事件 $A_1,A_2,A_3$ 相互独立，且 $P(A_i)=p,i=1,2,3$，所以

$$P\left(\overline{A_1\cup A_2}\,|A_3\right)=\frac{P(\overline{A_1+A_2}A_3)}{P(A_3)}=\frac{P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)}{P(A_3)}=\frac{P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)}{P(A_3)}=\frac{(1-p)^2p}{p}=(1-p)^2$$

2. 解: 因为 $X$ 服从参数为 2 的泊松分布, 随机变量 $Y\sim B(4,\dfrac{1}{4})$, 且 $X$ 与 $Y$ 相互独,

所以 $EX=2,DX=2,EY=1,DY=\dfrac{3}{4}$,

则 $EZ=2EX-EY=3,\ DZ=4DX+DY=\dfrac{35}{4}.$

3. 解: $X$ 与 $Y$ 独立同分布 $P\{\max(X,Y)\ge 2\}=1-P\{\max(X,Y)<2\}$

$$=1-P\{X<2,Y<2\}=1-P\{X<2)P\{Y<2\}=1-(1-e^{-1})^2=2e^{-1}-e^{-2}$$

4. 解: $E(\overline{X})=E(X)=1,D(\overline{X})=\dfrac{1}{10}D(X)=0.4,$

由切比雪夫不等式 $P\{|\overline{X}-1|\ge 2\}=P\{|\overline{X}-E\overline{X}|\ge 2\}\le\dfrac{D\overline{X}}{2^2}=0.1.$

## 二、简答题

1. 解: 两个事件相互独立和两个事件互不相容没有必然的联系。

若 $P(A)>0, P(B)>0$, 则两事件互不相容一定不相互独立。反之，相互独立的两个事件不可能互不相容。事实上，若两事件 A,B 相互独立则有 $P(AB)=P(A)P(B)>0$, 即 A,B 不可能互不相容；若 A,B 互不相容，则 $P(AB)=0\neq P(A)P($即 A,B 不相互独立。

若 $P(A)=0$或者$P(B)=0$, 则互不相容的两个事件一定相互独立，因为（不妨设）由 $P(A)=0$ 可得 $P(AB)=0=P(A)P(B)$;

若两事件至少有一个为不可能事件，则两事件相互独立和互不相容等价。

2. 解: $X,Y$ 相互独立，并且都服从(0,1)上的均匀分布， $f_X(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\0, \text{其它}\end{cases}$，

所以 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$，被积函数的非零区域为

$$\begin{cases}0<x<1\\0<z-x<1\end{cases}.$$

当 $z<0$或$z\geq 2$时，$f_Z(z)=0$，当 $0<z\leq 1$时，$f_Z(z)=\int_0^z 1dx=z,$

当 $1<z<2$时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 1dx=2-z.$ 所以，

Z=X+Y 的概率密度函数为：$1<z<2$时，$f_Z(z)=\begin{cases}0,\ \text{其它}\\z,\ 0\leq z<1\\2-z,\ 1<z<2\end{cases}$.

3. 解: 易见 $f(x)\geq 0,$ 由题意

$$f_1(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\leq x\leq 3,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 $f(x)$ 是概率密度函数, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1,$ 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} af_1(x)dx+\int_0^{+\infty} bf_2(x)dx=a\Phi(0)+\int_0^3\frac{b}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3b}{4}=1,$$

故应满足 $2a+3b=4.$

4. 解: $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(4)$, 且 $X$ 与 $Y$ 相互独立, $T=\frac{2X}{\sqrt{Y}}=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{4}}}\sim t(4).$

**三、综合计算题**

1. 解: 设“一名被检验者经检验认为患有关节炎”记为事件 $A$，“一名被检验者确实患有关节炎”记为事件 $B$。根据全概率公式有

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=10\%\times 85\%+90\%\times 4\%=12.1\%,$$

所求条件概率为 $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)P(\overline{A}|B)}{1-P(A)}=1.706\%$ .

即一名被检验者经检验认为没有关节炎而实际却有关节炎的概率为 1.706%.

2. 解: （1）$Y$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ e^{-y}, & y>0\end{cases}$；

（2）$P(Y=\ln X\ge k)=P(X\ge e^k)=e^{-k}$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P(Y\ge k)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}e^{-k}=\dfrac{1}{e-1}$.

3. 解: (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_{-x}^{x}Adydx=4A \Rightarrow A=\dfrac{1}{4}$,

(2) $P(X+Y\ge 1)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{1-x}^{x}\dfrac{1}{4}dydx=\dfrac{9}{16}$

(3) 随机变量 X 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\dfrac{1}{4}dy=\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases},$$

同理 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{2}\dfrac{1}{4}dy=\dfrac{2+y}{4}, & -2\le y<0\\ \int_{y}^{2}\dfrac{1}{4}dy=\dfrac{2-y}{4}, & 0\le y<2\\ 0, & 其它\end{cases}$ ,

所以在 $0<x<2,\ |y|<x$ 内有 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，即 $X$ 与 $Y$ 不相互独立。

4. 解: (1) 根据题意得：$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B) \Rightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$

$\Rightarrow P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$,

所以 $P(X=1,Y=1)=P(A\cap(AB))=P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}$,

$P(X=1,Y=0)=P(X=1)-P(X=1,Y=1)=P(A)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$, 同理可得

$P(X=0,Y=1)=P(Y=1)-P(X=1,Y=1)=P(AB)-\dfrac{1}{4}=P(A)P(B)-\dfrac{1}{4}=0$,

$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{2}$， 即 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

因为 $P(X=0,Y=1)=0\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=P(X=0)\cdot P(Y=1)$，所以 X,Y 不相互独立。

（2）$EX=\frac{1}{2},EY=\frac{1}{4}$，$EXY=\frac{1}{4}\Rightarrow Cov=\frac{1}{8}$,

$DX=\frac{1}{4},DY=\frac{3}{16}$，$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 解: （1）因为 $X\sim B(1,0.5)$，$Y\sim N(0,1)$, 由全概率公式

$$P\{X+Y\le 1\}=P\{X+Y\le 1|X=0\}P\{X=0\}+P\{X+Y\le 1|X=1\}P\{X=1\},$$

由随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 可知

$P\{X+Y\le 1|X=0\}=P\{Y\le 1\}=\Phi(1)$, $P\{X+Y\le 1|X=1\}=P\{Y\le 0\}=\Phi($

所以，$P\{X+Y\le 1\}=\frac{\Phi(0)+\Phi(1)}{2}$.

（2）因为 $Z=XY$，随机变量 $Z$ 的分布函数 $F_Z(z)=P(XY\le z)$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P(XY\le z)=P\{XY\le z|X=0\}P\{X=0\}+$

$P\{XY\le z|X=1\}P\{X=1\}=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}=\frac{1}{2}\Phi(z)$

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=P(XY\le z)=P\{XY\le z|X=0\}P\{X=0\}+$

$P\{XY\le z|X=1\}P\{X=1\}=\frac{1}{2}(P\{0\le z\}+P\{Y\le z\})=\frac{1+\Phi(z)}{2}$.

所以 $Z$ 的分布函数 $F_Z(z)=\begin{cases}\frac{\Phi(z)}{2},z<0\\ \frac{1+\Phi(z)}{2},z\ge 0\end{cases}$. 其中，$\Phi(z)$ 指代标准正态分布函数。

6. 解:

(1) $\mu = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \theta x dx + \int_1^2 (1-\theta)xdx = \frac{3}{2} - \theta, \Rightarrow \theta = \frac{3}{2} - \mu.$

故$\theta$的矩估计量$\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(2) 依题意样本值$x_1, x_2, \cdots, x_n$中有$N$个小于 1, 其余$n-N$个大于或等于 1, 因此

似然函数为$L = \theta^N (1-\theta)^{n-N}, \ln L = N\ln\theta + (n-N)\ln(1-\theta),$

令$\frac{d\ln L}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0,$ 可解出$\theta = \frac{N}{n}$. 于是$\theta$的最大似然估计为$\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

**四、证明题**

证明: 因为$DX = EX^2 - (EX)^2, DY = EY^2 - (EY)^2,$

所以等式右边为

$$D(X)D(Y) + (EX)^2 D(Y) + (EY)^2 D(X)$$

$=[EX^2 - (EX)^2][EY^2 - (EY)^2] + (EX)^2[EY^2 - (EY)^2] + (EY)^2[EX^2 - (EX)^2]$

$= EX^2 EY^2 - (EX)^2 (EY)^2,$

又因为 X,Y 相互独立，所以

$EX^2 EY^2 - (EX)^2 (EY)^2 = EX^2Y^2 - (EX)^2 (EY)^2 = E(XY)^2 - (EXY)^2 = D(XY).$