lesson 11.12, 13 常见函数的凸性

仿射函数：

$f(x) = Ax + b$

$\nabla^2 f(x) = 0$ ✓凸

二次函数：

$f(x) = \frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r$

f 为凸 $\Leftrightarrow$ $P \succeq 0$

指数函数：

$f(x) = e^{ax}$ $a \in R$, $x \in R$

$\nabla^2 f(x) = a^2 e^{ax} \geq 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 为凸函数

幂函数：

$f(x) = x^a$, $x \in R_{++}$

$$f''(x) = a(a-1)x^{a-2} \begin{cases} \geq 0 & a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 1 \\ \leq 0 & 0 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

当 $a=0$ 或 1 时，f 既是凹又是凸.

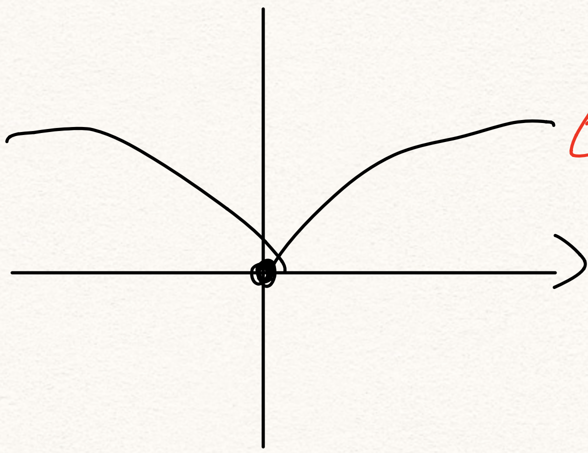
绝对值的幂函数：

$$f(x) = |x|^p \qquad x \in R$$

$$f'(x) = \begin{cases} p\,x^{p-1} & x \geq 0 \\ -p(-x)^{p-1} & x < 0 \end{cases} \qquad f\text{为凸} \Longrightarrow p \geq 1$$

$$f''(x) = \begin{cases} p(p-1)\,x^{p-2} & x \geq 0 \\ p(p-1)(-x)^{p-2} & x < 0 \end{cases}$$

$p<1$ 时情况：($p=\frac{1}{2}$)



⇒ 非凸 非凹

对数函数：

$$f(x) = \log(x), \quad x \in R_{++}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \Rightarrow f\text{为严格凹函数！}$$

负熵：

$$f(x) = x\log x. \qquad x \in R_{++}$$

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad x \in R_{++}$

f 为严格凸函数！

范数：

R^n 空间的范数 $p(x)$，$x \in R^n$，满足以下条件：

① $p(ax) = a\,p(x)$

② $p(x+y) \le p(x) + p(y)$

③ $p(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$

范数 $p(x)$ 也是一个凸函数！

证明：$\forall x, y \in R^n$，$0 \le \theta \le 1$

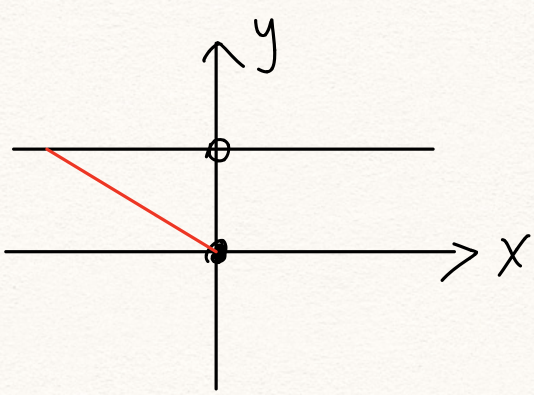
$$p(\theta x + (1-\theta)y) \le p(\theta x) + p((1-\theta)y) = \theta p(x) + (1-\theta)p(y)$$

得证！

"零范数"：

$p(x) = \|x\|_0 =$ 非零元素数目

例子：



零范数不是凸函数！

"极大值函数":

$f(x) = \max\{x_1, x_2 \cdots x_n\} \quad x \in R^n$ 是凸函数

证明: $\forall x, y \in R^n, \quad 0 \le \theta \le 1$

$$f(\theta x + (1-\theta) y) = \max\{\theta x_1 + (1-\theta) y_1, \theta x_2 + (1-\theta) y_2 \cdots \theta_n x_n + (1-\theta_n) y_n\}$$
$$\le \theta \max\{x_1, \cdots x_n\} + (1-\theta) \max\{y_1, \cdots y_n\}$$
$$\theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

"极小化极大值函数":

$$\min_x \max_y f(x, y)$$

"log-sum-up":

$f(x) = \log(e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}), \quad x \in R^n$ 为凸

$\max\{x_1, x_2 \cdots x_n\} \le f(x) \le \max\{x_1, x_2 \cdots x_n\} + \log n$

证明:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{e^{x_i}}{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}}$$ (证略!!!)

柯西不等式! Cauchy

几何平均：

$$f(x) = (x_1, x_2, \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}, \quad x \in R_{++}^n$$

为凹函数!!!

行列式的对数：

$$f(x) = \log\det(X)$$

是一个凹函数（记朋略）