lesson 7 && 8

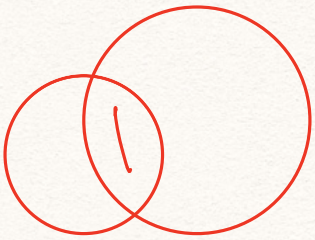
$\{x \mid x \le 0\}$ 是一个凸集，多面体，以及单纯形

$S_n^+, n=2$

与 R^3 的对应关系：

$$S_+^n = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \middle| \; x \ge 0,\ z \ge 0,\ xz \ge y \right\}$$

交集（保凸）若 S_1, S_2 为凸，则 $S_1 \cap S_2$ 也为凸



若 S_a 为凸集，$\forall a \in A$，则 $\bigcap_{a \in A} S_a$ 为凸集

仿射函数：（保凸）

$f: R^n \to R^m$ 是仿射的，当 $f(x) = Ax + b$，$A \in R^{m \times n}$，$b \in R^m$

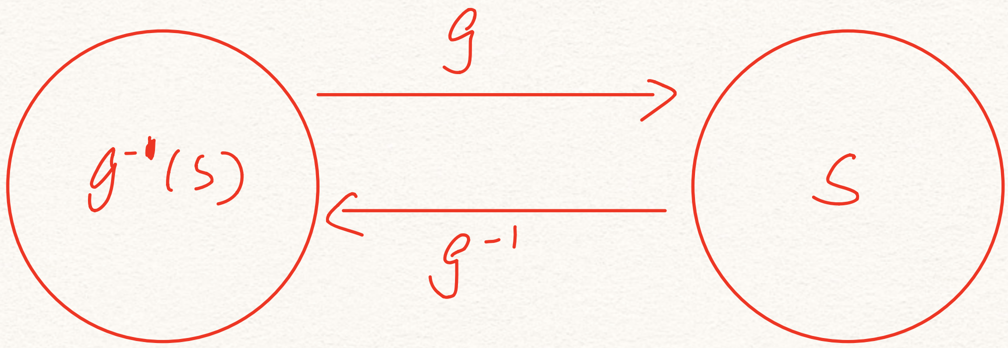
若 $S \in R^n$ 为凸，$f: R^n \to R^m$ 仿射，

则 $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ 为凸

仿射函数的逆映射：（保凸）

$g: R^k \to R^n$ 为仿射

$g^{-1}(S) = \{x \mid g(x) \in S\}$



缩放与移位：（保凸）仿射的特例！

$$\alpha S = \{\alpha x \mid x \in S\}$$

$$S + a = \{x + a \mid x \in S\}$$

集合的和：（保凸）

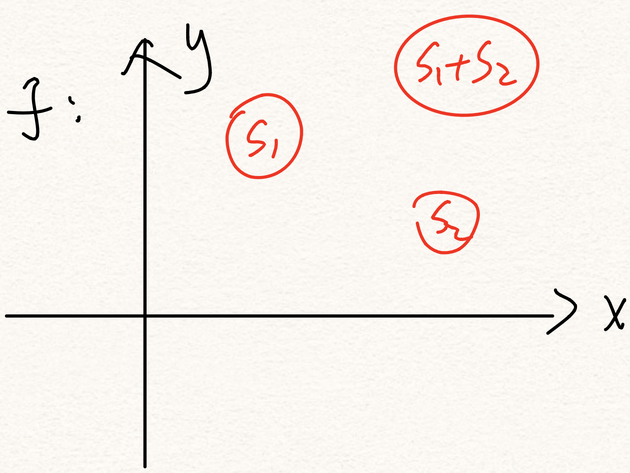
$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x, y) \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$\therefore (1,1)^T S_1 \times S_2 = \{(1,1)^T (x,y) \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$= \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

例子：



例子：线性矩阵不等式的解集为凸

$$A(X) = A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + \cdots + A_nX_n \preceq B$$

其中 $A_i, X_i, B_i \in S^m$

则 $\{X \mid A(X) - B \preceq 0\}$ 为凸集！

例子：椭球是球的仿射映射

$$\varepsilon = \{x \mid (x-x_c)^T P^{-1} (x-x_c) \le 1\} \qquad P \in S_{++}^n$$

$$B = \{u \mid u^T u \le 1\}$$

f变换

$$x = P^{\frac{1}{2}} u + x_c \Rightarrow u = P^{-\frac{1}{2}}(x - x_c)$$

$$B' = \{f(u) \mid u^T u \le 1\}$$

$$= \{x \mid (P^{\frac{1}{2}}u + x_c)^T (P^{\frac{1}{2}}u + x_c) \le 1\}$$

$$= \{x \mid (x-x_c)^T P^{-1} (x-x_c) \le 1\}$$

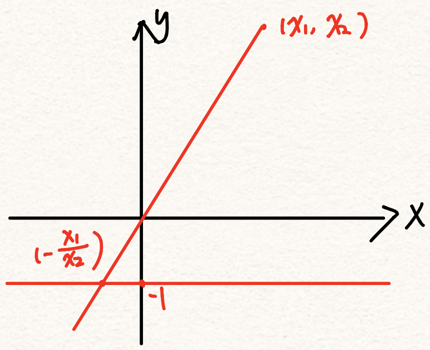
透视映射（保凸）

前n个数任意实数

$$P: R^{n+1} \to R^n \qquad \text{dom } P = R^n \times R_{++}$$

最后一个数为正实数

$$P(z,t) = \frac{z}{t} \qquad z \in R^n,\ t \in R_{++}$$



线性分数函数:

$g: R^n \to R^{m+1}$ 为仿射映射

$$g(x) = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \quad A \in R^{m \times n} \quad b \in R^m$$

$$c \in R^n \quad d \in R$$

$$= (Ax+b,\ c^T x + d)^T$$

$p: R^{m+1} \to R^m$ 为透视映射

$f: R^n \to R^m \triangleq p \circ g$

$$f(x) = \frac{Ax+b}{c^T x + d} \quad \operatorname{dom} f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$$