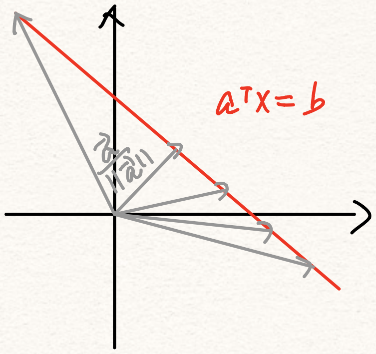
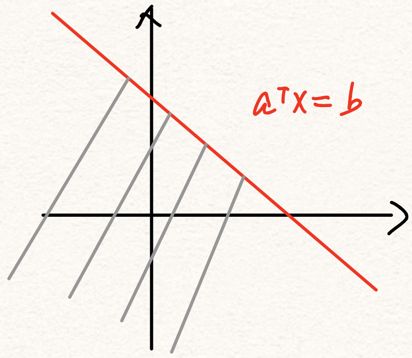
lesson 5&6 几种重要的凸集

超平面与半空间: hyperplane, half space

$\{x \mid a^T x = b\}$ $x, a \in R^n$, $b \in R$ $a \neq 0$





半空间: $\{x \mid a^T x \leq b\}$

超平面: 仿射集 ✓ 凸集 ✓ 凸锥 须满足 $a^T x = 0$

半空间: 仿射集 × 凸集 ✓ 凸锥 依然要过原点!

球和椭球:

球: $B(\underset{\in R^n}{x_c}, \underset{\in R_+}{r}) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\}$

球: 仿射集 (一个点) 凸集 ✓ 凸锥 过原点

证明为什么球是凸集: 三角不等式!

椭球: $\varepsilon(x_c, r, P) = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}$

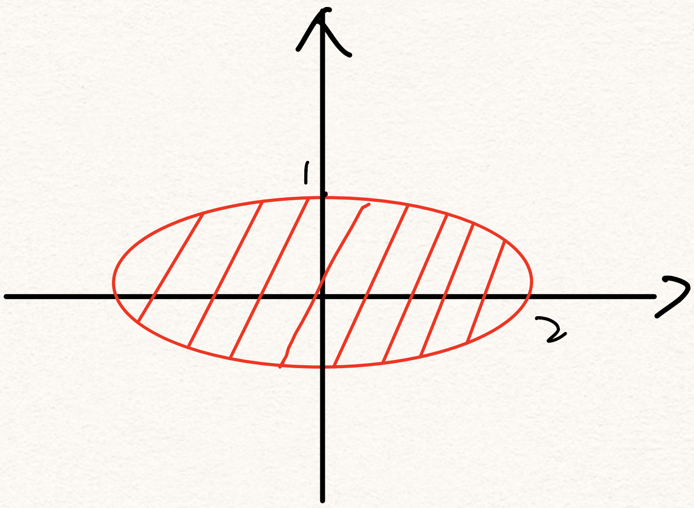
$x_c \in R^n$ $P \in S^n_{++}$ (对称, 正定)

椭球 → 球: $P = r^2 I_n$

椭球在2维空间下的一个例子：

$$\varepsilon = \{x \mid x^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x \le 1\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$



多面体：一些超平面和多面体的交集！

$$p = \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} a_j^T x \le b_j, & j = 1 \cdots m \\ a_j^T x = b_j, & j = 1 \cdots r \end{matrix} \right\}$$

单纯形：simplex

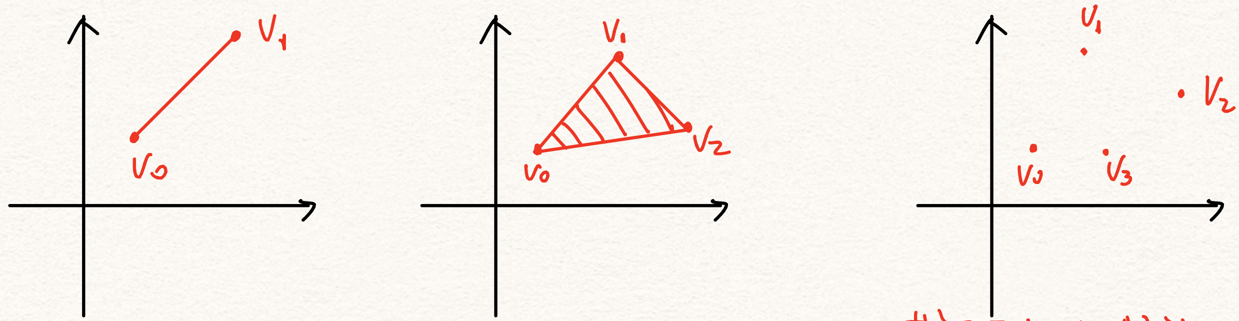
R^n 空间中选择 $V_0, V_1 \cdots V_m$ 共 $k+1$ 个点，

$V_1 - V_0, V_2 - V_0 \cdots V_m - V_0$ 线性无关

$$C = \mathrm{Conv}\{V_0, V_1, \cdots V_k\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \theta_0 V_0 + \theta_1 V_1 + \cdots + \theta_k V_k \\ \theta \succeq 0, \quad 1^T\theta = 1 \end{matrix} \right\}$$

单纯形在2维平面的例子:



找不到3个线性无关的向量!

单纯形是多面体中的一个特例!

对称矩阵集合:

$$S^n = \{X \mid X \in R^{n\times n},\ X = X^T\}$$

$$S^n_+ = \{X \mid X \in R^{n\times n},\ X = X^T,\ X \succeq 0\}$$

$$S^n_{++} = \{X \mid X \in R^{n\times n},\ X = X^T,\ X \succ 0\}$$

几个结论:

S^n_+ 是一个凸锥 Convex Cone;

$\Downarrow$

$\forall \alpha, \beta \geq 0$ $\quad \alpha A + \beta B$ 对称的

$\forall A, B \in S^n_+$ $\quad \alpha A + \beta B \succeq 0 \Rightarrow \forall x \in R^n \quad x^T(\alpha A + \beta B)x \geq 0$