lesson 14：保持函数凸性！

非负加权和：

$f_1, f_2, \cdots f_n$ 为凸，则 $f=\sum_{i=1}^{m} w_i f_i$ 为凸，其中 $w_i \geq 0$

证明：使用定义1

拓展：

若 $f(x,y)$，对任意 $y \in A$，$f(x,y)$ 为凸，设 $w(y) \geq 0$

$g(x)=\int_{y\in A} w(y) f(x,y)\,dy$ 为凸

仿射映射：

$f: R^n \to R \quad A \in R^{n\times m} \quad b \in R^n$

$g(x)=f(Ax+b) \quad \mathrm{dom}\, g=\{x \mid Ax+b \in \mathrm{dom} f\}$

$x \xrightarrow{\text{仿射映射}} Ax+b \xrightarrow{f} f(Ax+b)$

注意：$x \xrightarrow{f_1, f_2, f_3} f_1(x), f_2(x), f_3(x) \xrightarrow{A, b} A[f_1(x), f_2(x), f_3(x)]^T + b$

不是凸函数！

两个函数的极大值函数：

f_1, f_2 为凸 定义：

$g(x)=\max\{f_1(x), f_2(x)\} \quad \mathrm{dom}\, g=\mathrm{dom} f_1 \cap \mathrm{dom} f_2$ 为凸

证明：$\forall x, y \in \mathrm{dom}\, g \quad \theta \in [0,1]$

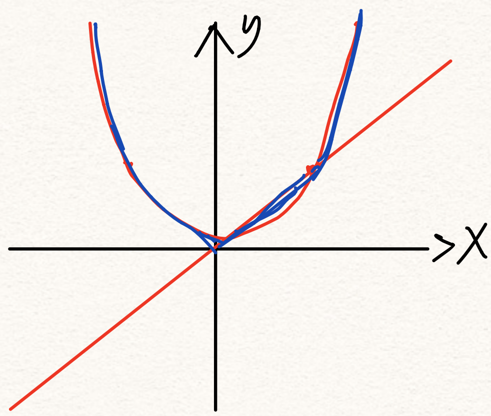
$f(\theta x+(1-\theta)y)=\max\{f_1(\theta x+(1-\theta)y), f_2(\theta x+(1-\theta)y)\}$

$$\le \max\{\theta f_1(x)+(1-\theta)f_1(y),\ \theta f_2(x)+(1-\theta)f_2(y)\}$$

$$\le \max\{\theta f_1(x),\ \theta f_2(x)\}+\max\{(1-\theta)f_1(y),(1-\theta)f_2(y)\}$$

$$=\theta f(x)+(1-\theta)f(y)$$

例：$f(x)=\max\{x,\ x^2\}$



$f(x)$ 仍然是凸函数！

例：向量中 r 个最大元素的和：$x\in R^n$

定义：$x[i]$ 为第 i 大的元素；

$x[1]\geq x[2]\geq\cdots\geq x[r]\geq\cdots\geq x[n]$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{r}x[i]$$

$$f(x)=\max\{\underbrace{x_{i_1}+\cdots+x_{i_r}}_{\Downarrow}\ |\ 1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_r\le n\}$$

① $(1,0,\cdots,1)\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 为仿射映射，保凸

② max 保凸

推论：无限个凸函数的极大值

$f(x,y)$ 对于 x 为凸，$\forall y \in A$

$$g = \sup_{y \in A} f(x,y)$$

例：实对称矩阵的最大特征值。

$f(X) = \max \lambda(X) \quad \mathrm{dom} f = S^m$

特征值的含义：$Xy = \lambda y$

$\because y^T X y = y^T \lambda y \Rightarrow \lambda = \dfrac{y^T X y}{y^T y} = \dfrac{y^T X y}{\|y^T y\|_2^2}$

$\because y$ 是可以任意放缩的，不妨令 $\|y^T y\|_2 = 1$

$$f(X) = \underset{\Downarrow}{\max} \{ \underline{y^T X y} \mid y^T y = 1 \}$$

极大值函数保凸

对于 X 来说是线性的，保凸