lesson 15.16.17 保持函数的凸性之复合函数

函数的组合：

$h: R^k \to R \qquad g: R^n \to R^k$

$f: h \circ g : R^n \to R$

$f(x) = h(g(x))$　其中 $\mathrm{dom} f = \mathrm{dom}\, g \cap \{x \mid g(x) \in \mathrm{dom}\, h\}$

一维的情况：　$k = n = 1$

$\mathrm{dom}\, g = \mathrm{dom}\, h = \mathrm{dom} f = R$，$h, g$ 均为二阶可微

$f(x)$ 为凸 $\Longleftrightarrow f''(x) \geq 0$

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f''(x) = \underbrace{h''(g(x))}_{\geq 0} g'(x)^2 + \underbrace{h'(g(x))\, g''(x)}_{\text{同号!}}$$

条件：

① h 为凸，不降　g 为凸 $(f\text{凸})$ $\xrightarrow{\text{取反}}$ h 为凹，不降，g 为凹 $(f\text{凹})$

② h 为凸，不增　g 为凹 $(f\text{凸})$ $\xrightarrow{\text{取反}}$ h 为凹，不增，g 为凸 $(f\text{凹})$

高维的情况：　$n, k \geq 1$，$\mathrm{dom}\, g, \mathrm{dom}\, h, \mathrm{dom} f \subseteq R^n, R^k, R^n$

且 h, g 均不二阶可微！

结论：

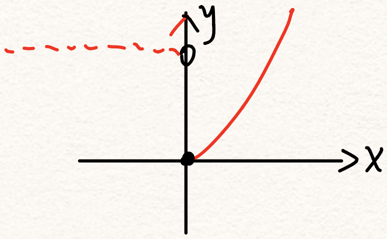
①：h 为凸，$\tilde{h}$ 不降　g 凸 $(f\text{凸})$ $\xrightarrow{\text{取反}}$ h 为凹，$\tilde{h}$ 不降，g 凹 $(f\text{凹})$

②：h 为凸，$\tilde{h}$ 不增　g 凹 $(f\text{凸})$ $\xrightarrow{\text{取反}}$ h 为凹，$\tilde{h}$ 不增，g 凸 $(f\text{凹})$

例子：若 g 为凸，$g \geq 0$ $p \geq 1$，则 $g^p(x)$ 为凸

法一：构造 $h(z) = z^p$ $z \in [0, +\infty)$ $p \geq 1$

$\tilde{h}$：



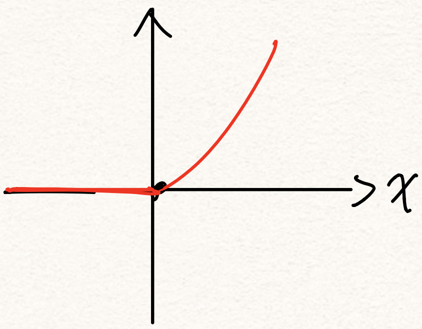
有： h 为凸函数

g 为凸

但： $\tilde{h}$ 并不是不降的!!! (不能证明)

法二：

$$h(z) = \begin{cases} z^p & z \in [0, +\infty) \\ 0 & z \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



此时 $\tilde{h}$ 不降，得证

函数的透视

透视函数：

$$p: R^{n+1} \to R^n \qquad \mathrm{dom}\, p = R^n \times R_{++}$$

$$p(z, t) = \frac{z}{t}$$

一个函数的透视：

$$f: R^n \to R \qquad g: R^n \times R_{++} \to R$$

$$g(x, t) = t f\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$\mathrm{dom}\, g = \left\{ (x, t) \mid t > 0, \ \frac{x}{t} \in \mathrm{dom}\, f \right\}$$

结论：f为凸 $\Rightarrow$ g为凸；f为凹 $\Rightarrow$ g为凹

例：负的对数（一维）

$$f(x) = -\log x, \quad \mathrm{dom} f = R_{++}$$

$$g(x,t) = t\cdot\left(-\log \frac{x}{t}\right) = t\log\frac{t}{x} \qquad (x,t)\in R_{++}\times R_{++}$$

高维的情况：$u, v \in R^n_{++}$

$$g(u,v) = \sum_{i=1}^{n} u_i \log\frac{u_i}{v_i} \in 为凸$$

我的理解：

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \quad \xrightarrow{Ax+b} \quad (0\ 0 \cdots 1 \cdots 0)\cdot\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_i$$

$$\begin{matrix} u_i \\ v_i \end{matrix} \xrightarrow{g_i} g_i(u_i, v_i) \xrightarrow{\Sigma} \sum_{i=1}^{n} u_i \log\frac{u_i}{v_i}$$

① 仿射变换（保凸）　② g_i透视变换（保凸）　③ Σ保凸

例：KL散度（KL divergence）

$$D_{KL}(u,v) \triangleq \sum_{i=1}^{n}\left(u_i\log\frac{u_i}{v_i} - u_i + v_i\right) \quad 凸$$

Bregman divergence

$$D_{BL}(u,v) \triangleq f(u) - f(v) - Df(v)(u-v)$$

$f: R\to R$ 为凸

函数的共轭

$f: R^n \to R$　　$f^*: R^n \to R$

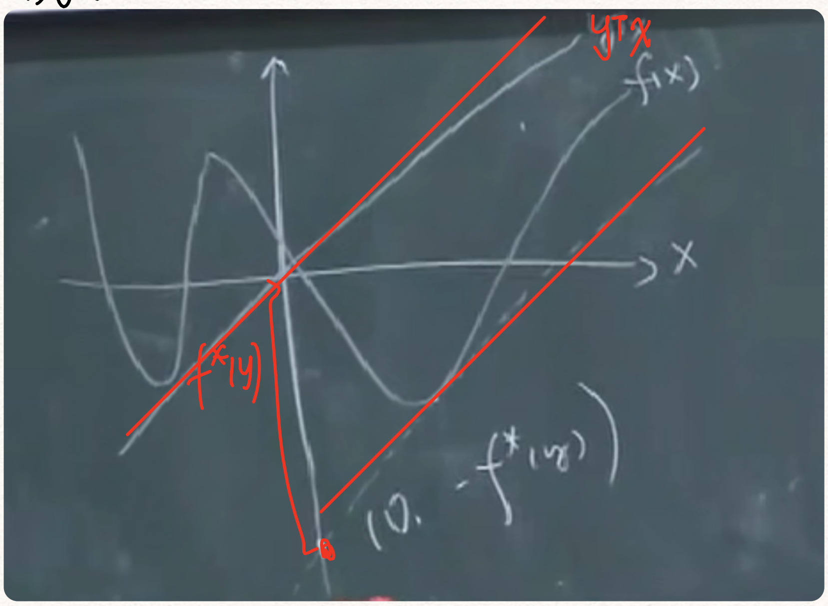
$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \left(y^T x - f(x) \right) \Leftarrow$$

① 选取一个y

② 遍历 $x \in \mathrm{dom} f$，
计算 $y^T x - f(x) = target$

③ 找出 $\max target$

例子:



结论:

①: 若$f(x)$可微，则$f^*(y)$对应的x必定满足:

$f'(x) = y$ 这一条件

证明: $y - f'(x) = 0$

②: 若$f(x)$是凸函数 $\Rightarrow$ $f^*(y)$是凸函数

$f(x)$不是凸函数 $\Rightarrow$ $f^*(y)$还是凸函数

证明: $\underbrace{y^T x}_{y\text{的线性函数}} - \underline{f(x)}$ 与y无关，Sup函数也保凸!

例: $f(x) = ax + b \qquad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f^*(y) &= \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \left(yx - (ax+b) \right) \\
&= \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \left((y-a)x - b \right) \\
&= \begin{cases} b & y = a \\ +\infty & y \neq a \end{cases}
\end{aligned}
$$

例: $f(x) = -\log x, \quad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}_{++}$

$$
f^*(y) = \sup_{x>0} \left(\underline{yx + \log x} \right)
$$

用一下条件: $y + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{y}$

$$
= \begin{cases} -1 - \log(-y), & y < 0 \\ +\infty, & y \geq 0 \end{cases}
$$

例: $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x, \quad Q \in S_{++}^n, \quad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}^n$

$$
f^*(y) = \sup_{x} \left(\underline{\underline{y^T x - \frac{1}{2} x^T Q x}} \right)
$$

↓ 对x求导:

$$
y - Qx = 0 \Rightarrow x = Q^{-1} y
$$

$$
\begin{aligned}
f^*(y) &= y^T Q^{-1} y - \frac{1}{2} y^T Q^{-1} y \\
&= \frac{1}{2} y^T Q^{-1} y
\end{aligned}
$$

$(f^*)^* \overset{?}{=} f$

若f非凸, $f^{**} \neq f$

若f为凸, 且domf为开区间, 则 $f^{**} = f$