lesson 3 & 4

直线的概念：

$x_1 \neq x_2 \in R^n$，$\theta \in R$

$\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ 可以表示成一条直线

$= x_2 + \theta(x_1 - x_2)$

线段的概念：

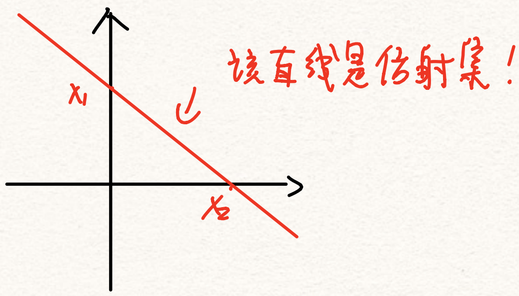
$\theta x_1 + (1-\theta)x_2$，其中 $\theta \in [0,1]$

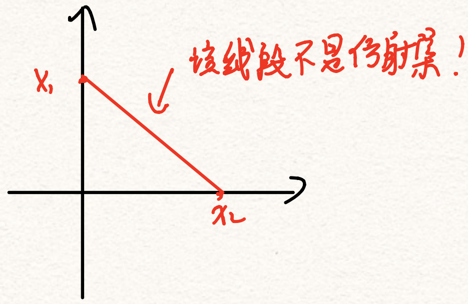
仿射集的概念：

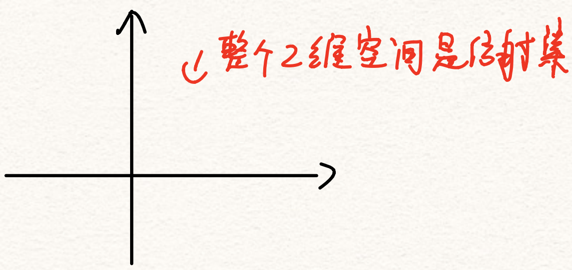
定义1：如果一个集合C是仿射集，那么任取 $x_1, x_2 \in C$，

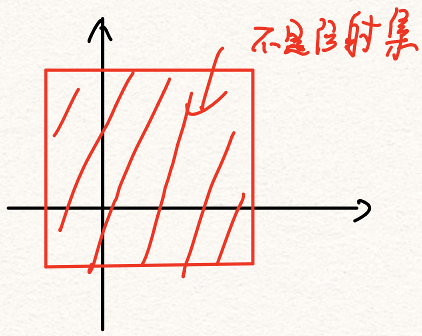
经过 x_1, x_2 的直线也在这个仿射集之中！

例子：









定义2：仿射组合：

设 $x_1, x_2, x_3 \cdots x_k \in C$，$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \cdots \theta_k \in R$

且 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_k = 1$

则：$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 + \cdots + \theta_k x_k$ 是仿射组合

仿射集：$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots \theta_k x_k \in C$

证明定义1与定义2等价:

$x_1, x_2, x_3 \in C$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in R$ 且 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=1$

$$\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}x_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}x_2 \in C$$

$$(\theta_1+\theta_2)\left(\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}x_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}x_2\right) + (1-\theta_1-\theta_2)\cdot x_3 \in C$$

$$\Rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 = 1$$

仿射集C相关的子空间:

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in C\} \quad \forall x_0 \in C$$

其中V也是一个仿射集. 且

$$\forall x_1, x_2 \in V, \quad \alpha x_1 + \beta x_2 \in V$$

证明: 要证 $\alpha x_1 + \beta x_2 \in V$

即证: $\alpha x_1 + \beta x_2 + x_0 \in C$

即证: $\alpha(x_1+x_0) + \beta(x_2+x_0) + (1-\alpha-\beta)x_0 \in C$

因为: $\alpha + \beta + (1-\alpha-\beta) = 1$

又 $x_1 + x_0 \in C$, $x_2 + x_0 \in C$, $x_0 \in C$

∴ 得证!

线性方程组的解是一个仿射集

$$C = \{x \mid Ax = b\} \quad A \in R^{m\times n} \quad b \in R^m \quad x \in R^n$$

证略

仿射集C的子空间V为

$$V = \{x \mid Ax = 0\}$$

证明:

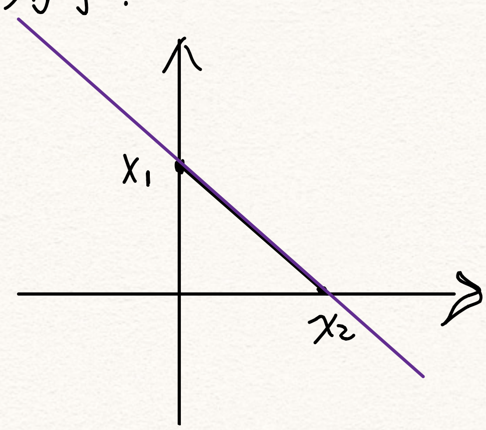
$$V = \{x - x_0 \mid x \in C\} \quad \forall x_0 \in C$$
$$= \{x - x_0 \mid Ax = b\} \quad Ax_0 = b$$
$$= \{x - x_0 \mid A(x - x_0) = 0\}$$
$$= \{y \mid Ax = 0\}$$

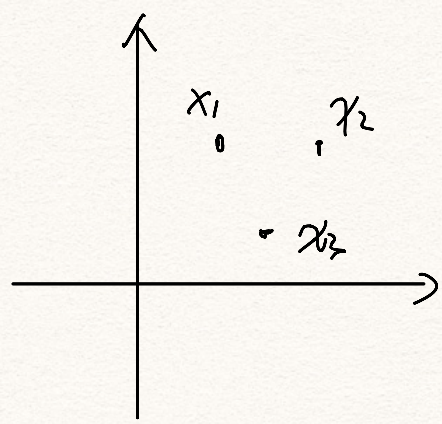
仿射包:

任意集合C,构造尽可能小的仿射集

$$\operatorname{aff} C = \{\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \mid \forall x_1, x_2, \cdots x_k \in C,\ \forall \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

例子:





"两点"或者"线段"

↓仿射包

直线

"三点"仿射包是整个平面!

凸集: Convex Set

定义1: 一个集合C是凸集，则任意两点的线段也在该凸集内！

$$\forall x_1, x_2 \in C \quad \forall \theta \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

凸组合:

$$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1$$

$$\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_k \in [0,1]$$

则 $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k$ 为凸组合

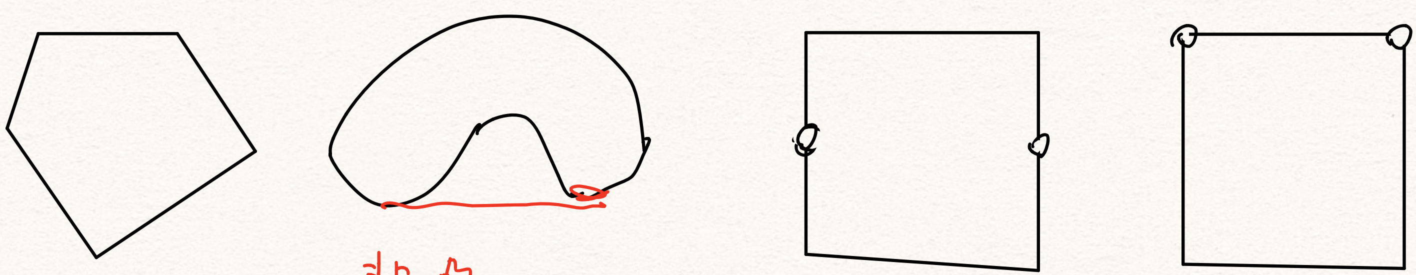
定义2: C为凸集 $\Leftrightarrow$ 任意元素的凸组合也在C内

凸包:

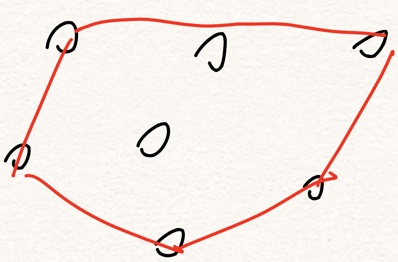
$C \in R^n$.

$$\mathrm{Conv}\ C = \left\{ \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1 \\ \forall \theta_i \in [0,1] \\ \forall x_1, x_2, \cdots x_k \in C \end{array} \right\}$$

例子:



凸 非凸 非凸 凸

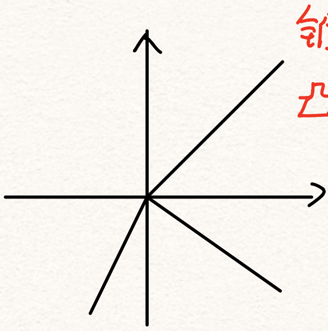


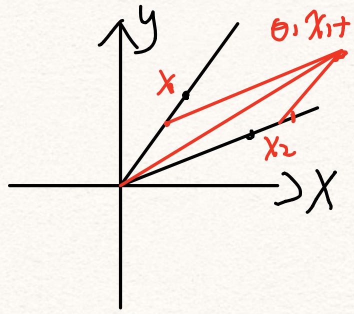
锥/凸锥

C是锥 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in C$, $\theta \geq 0$ 有 $\theta x \in C$

C是凸锥 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in C$ $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ 有 $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$

例子:

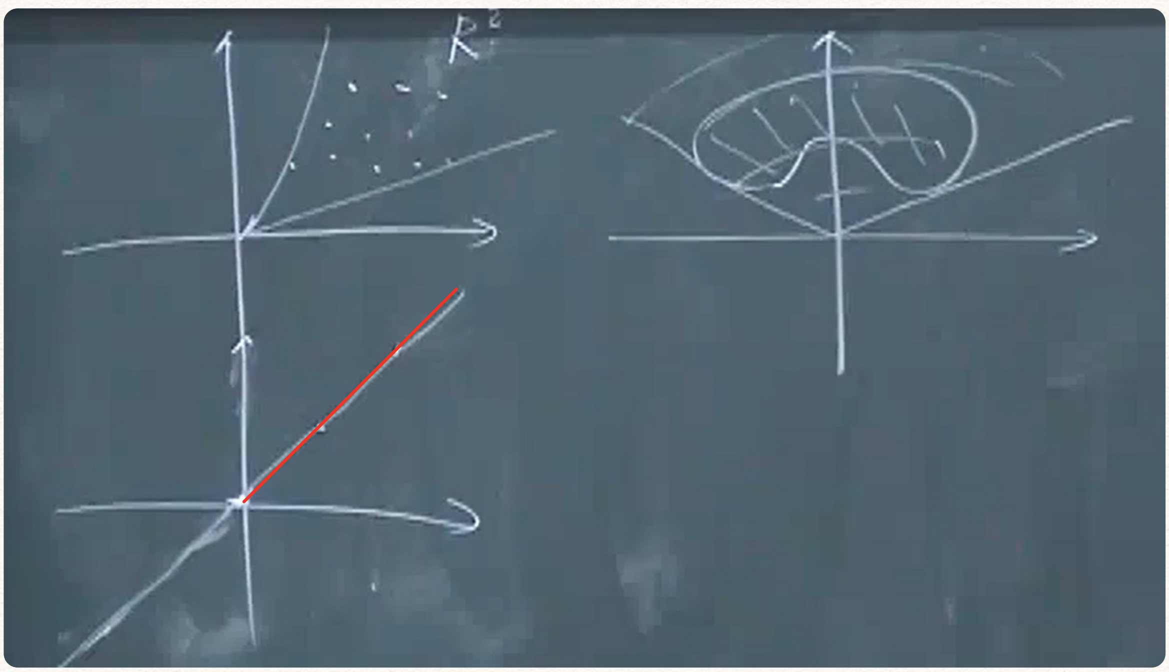




凸锥包:

$$\left\{ \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \cdots x_k \in C \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \cdots \theta_k \geq 0 \end{array} \right\}$$

例子:



特殊情况判定:

一个点
- 仿射集 ✓
- 凸集 ✓
- 凸锥 ○ 当且仅当该点是原点

空集
- 仿射集 ✓
- 凸集 ✓
- 凸锥 ✓

n维空间加, n维空间的子空间: 仿射集 ✓ 凸集 ✓ 凸锥 0

直线: 仿射集 ✓, 凸集 ✓ 凸锥 (需要过原点)

线段: 仿射集 ✗, 凸集 ✓, 凸锥 ✗

除一个点　　　　除非原点