lesson 18.19.20 拟凸函数，对数凸函数

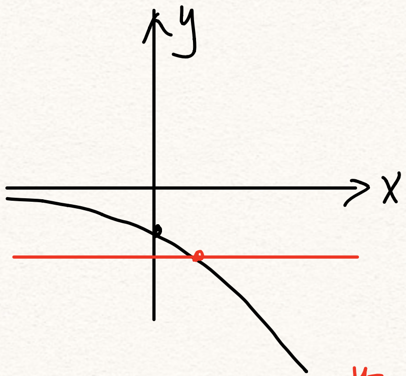
α - Sublevel Set

若 $f: R^n \to R$，定义其 α - Sublevel Set 为：

$$C_\alpha = \{x \mid x \in \mathrm{dom} f \mid f(x) \le \alpha\}$$

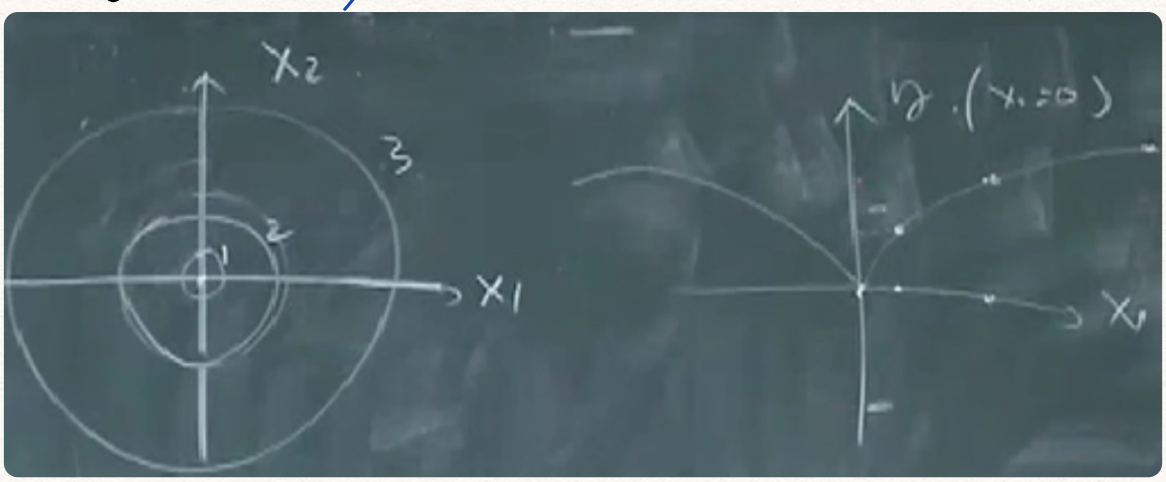
性质：凸函数的所有 α - Sublevel Set 都是凸集

反之并不成立：反例一：(一维)



$y=-e^x$ 并不是凸函数

反例二：(二维)



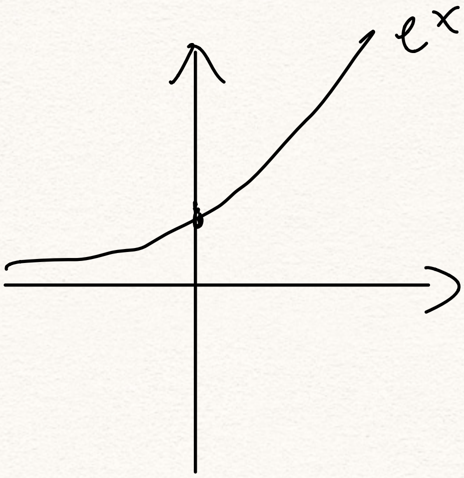
Quasi Convex function 拟凸函数

所有 α - Sublevel set 都是凸集的函数是拟凸函数！

$$S_\alpha = \{x = \mathrm{dom} f \mid f(x) \le \alpha\}$$ 凸，$\forall \alpha$

拟凹 $S_\alpha' = \{x \in \mathrm{dom} f \mid f(x) \ge \alpha\}$ 凸, $\forall \alpha$

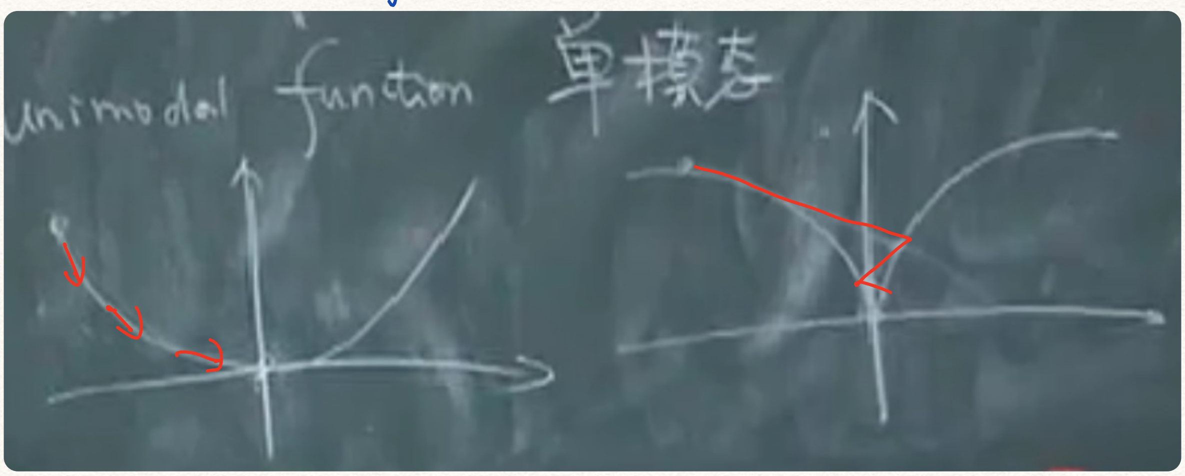
拟线性 $S_\alpha'' = \{x \in \mathrm{dom} f \mid f(x) = \alpha\}$ 凸, $\forall \alpha$



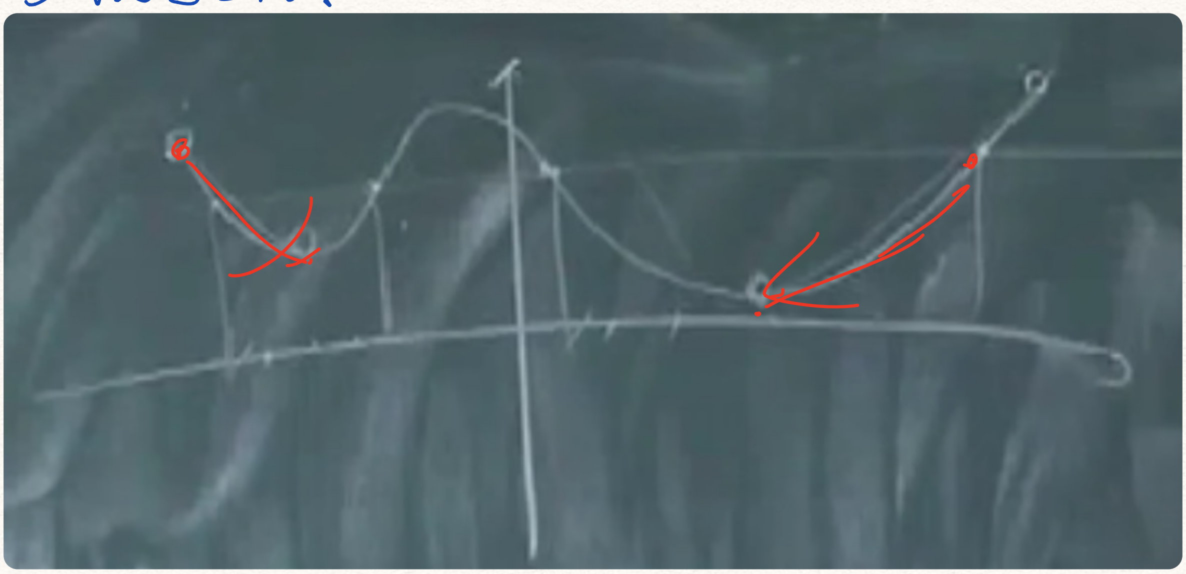
$y = e^x$ 拟凸, 拟凹, 拟线性

凸 $\Rightarrow$ 拟凸, 拟凸 $\nRightarrow$ 凸.

unimodal function 单模态函数



多模态函数:



拟凸函数定义2:

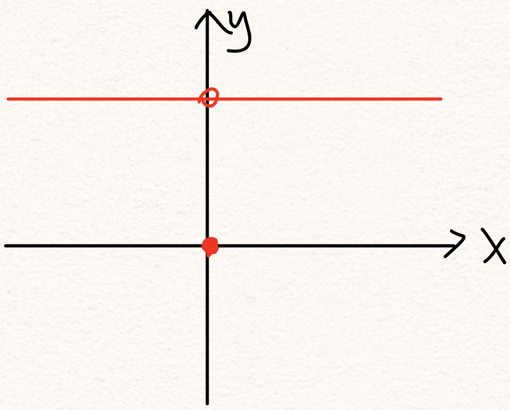
$f: R^n \to R$, $\mathrm{dom} f$ 为凸

$\forall x, y \in \mathrm{dom} f$

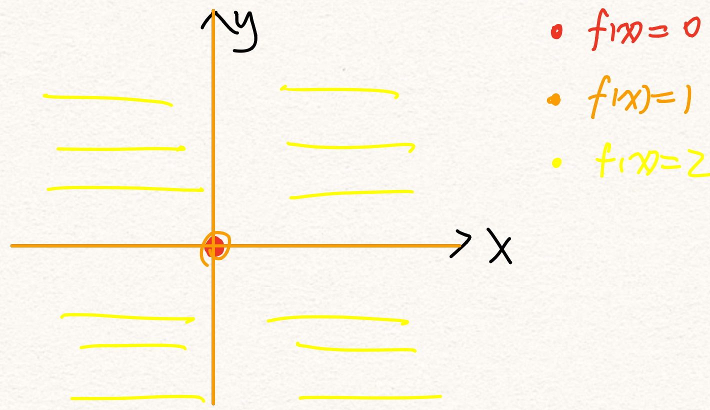
$f(\theta x+(1-\theta)y) \le \max\{f(x), f(y)\}$

例: 向量的零范数 $x \in R^n$ $f(x)=\|x\|_0$

一维:



二维:



是一个拟凸函数:

α-sublevel-set = $\{0\}$ 或 R

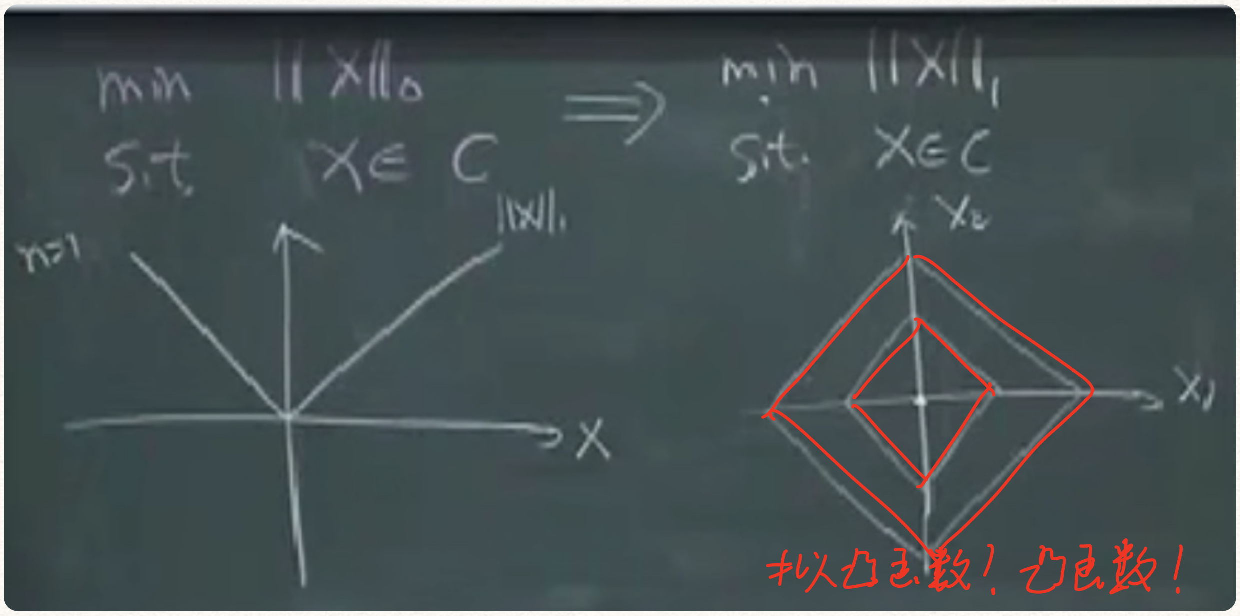
不是拟凸函数!

α-sublevel set 不是凸集

$\min \|x\|_0 \quad st \quad x \in C$

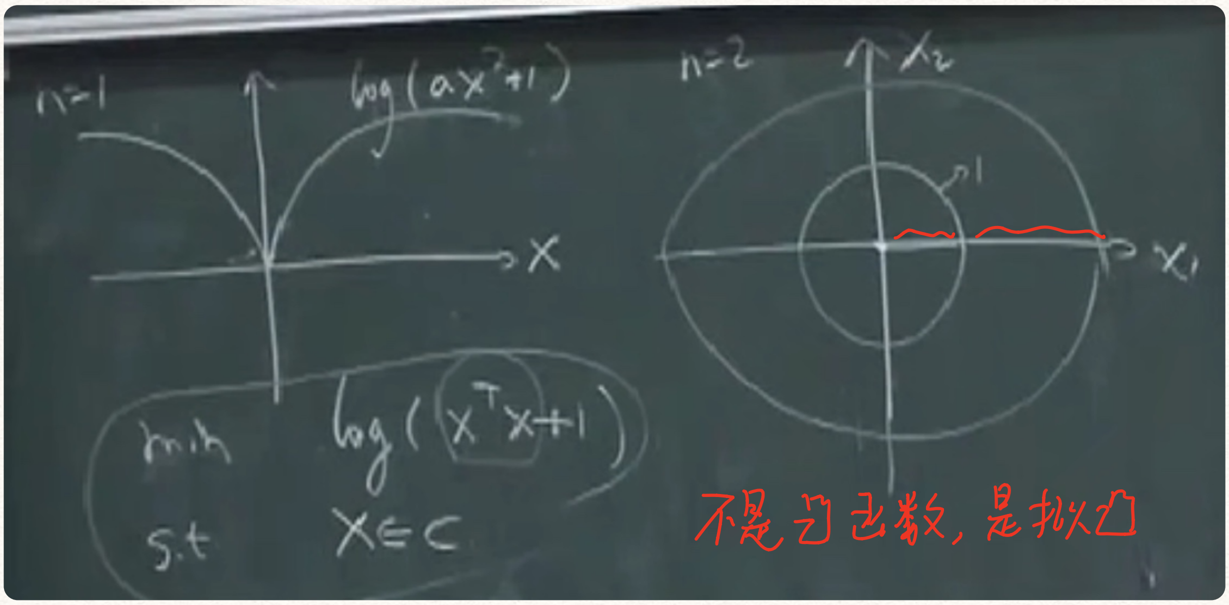
近似转换一:

$\min \|x\|_1 \quad st \quad x \in C$



近似转换二：

$\min \ \log(xx^T+1) \quad s.t \quad x \in C$



可微拟凸函数一阶条件：

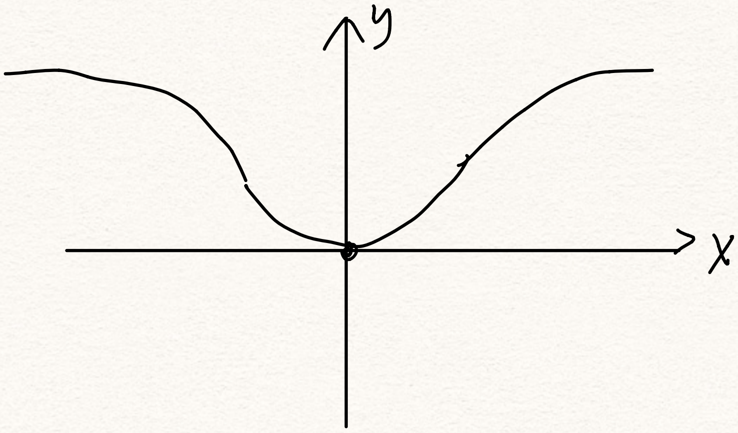
$\mathrm{dom} f$ 为凸，$\forall x, y \in \mathrm{dom} f$

$f(y) \le f(x) \Rightarrow \nabla^T f(x)(y-x) \le 0$

（证明略）

凸： $\nabla f(x)=0$ 则 $\forall y$ $f(y)\geq f(x)$

拟凸： $\nabla f(x)=0$ 则 $\forall y$ $f(y)\leq f(x) \Rightarrow 0\leq 0$



$\nabla f(x)=0$ 的点

没有意义

可微拟凸函数的二阶条件：

dom f 为凸，且 $y^T\nabla f(x)\geq 0 \Rightarrow y^T\nabla^2 f(x)y\geq 0$

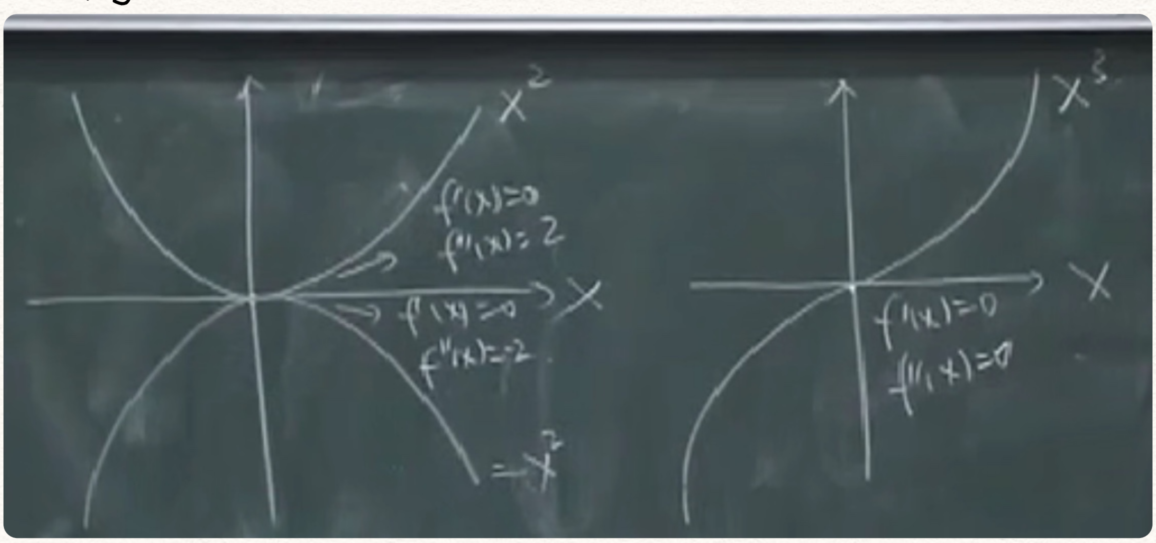
当 $n=1$ 时， $yf'(x)\geq 0 \Rightarrow y^2 f''(x)\geq 0$

$$\begin{cases} y=0 & 0\geq 0 \\ \boxed{f'(x)=0} \quad y\neq 0 & \boxed{f''(x)\geq 0} \end{cases}$$

凸函数： $\nabla^2 f(x)\geq 0$

拟凸： 在 $\nabla f(x)=0$ 时，才要求 $\nabla^2 f(x)\geq 0$

例子：



对数凹函数：

$f: R^n \to R \quad f(x) > 0$

$\forall x \in dom f$, $\log f$ 是一个凹函数

对数凸函数：

$f: R^n \to R \quad f(x) > 0$

$\forall x \in dom f$, $\log f$

结论：

若 f 为对数凸，则 f 为凸函数！

若 f 为凹函数，则 f 为对数凹函数！