lesson 9.10.11

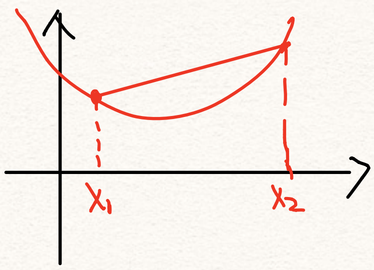
凸函数的定义1:

$f: R^n \to R$ 为凸: ① $dom f$ 为凸

② $\forall x_1, x_2 \in dom f$, $0 \le \theta \le 1$, 有:

$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2)$

例子:



直观理解: 两点之间的连线段

一定落在该函数上

凸函数的定义2:

$\forall x \in dom f$, $\forall v$

$g(t) = f(x+tv)$ 为凸, $dom g = \{t \mid x+tv \in dom f\}$

直观理解: 在高维空间选择一个起点和任意一个方向来切这个高维函数, 切出来的就是一个一维函数,

"所有切出来的一维函数是凸的. 等价于原来的高维函数是凸的.

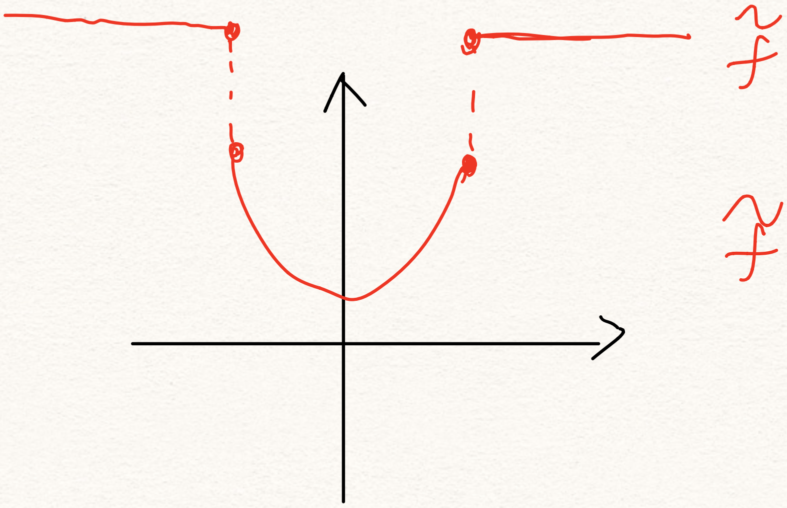
凸函数的扩展:

$f: R^n \to R$ 为凸 $dom f = C \subseteq R^n$

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x \in dom f \\ +\infty & x \notin dom f \end{cases}$$

$\tilde{f}: R^n \to R$ $dom \tilde{f} = R^n$

例子：



$\tilde{f}$ 仍然是凸函数

凸函数的定义3、

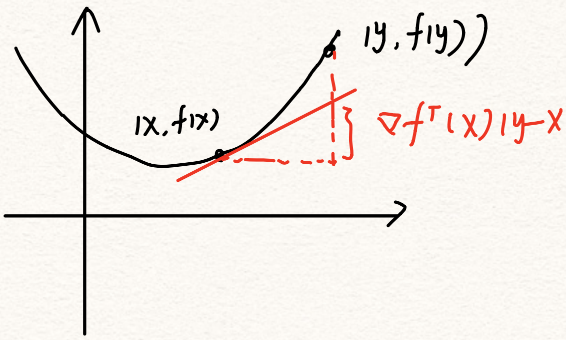
$\Rightarrow$ domf 是一个开集

设 $f: R^n \to R$ 可微，即梯度 ∇f 在 domf 上均存在，则 f 是凸函数等价于：

① domf 为凸

② $f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x)(y-x)$ ，$\forall x, y \in$ domf （证明略）

例子：



推论：如果 f 为凸函数，存在 $\nabla f^T(x) = 0$

则 $\forall y$，$f(y) \geq f(x_0) + \nabla f^T(x_0)(y-x)$

$= f(x_0) + 0$

$\therefore f(x_0)$ 为最小值

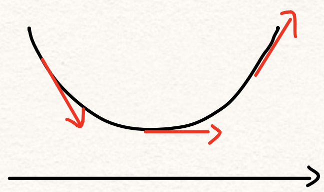
凸函数定义4（二阶条件）

若 $f: R^n \to R$ 二阶可微，则 f 为凸 $\Leftrightarrow$

① $\mathrm{dom} f$ 为凸集

② $\nabla^2 f(x) \succeq 0$, $\forall x \in \mathrm{dom} f$

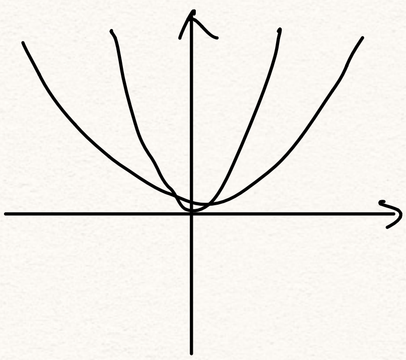
例子：



，$\nabla f(x)$ 单调不减

$\nabla^2 f(x) \succ 0$ $\underset{?}{\overset{\checkmark}{\rightleftarrows}}$ f 严格凸

反例： $f(x) = x^4$ 严格凸



$f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2 \geq 0$

二次函数的凸性：

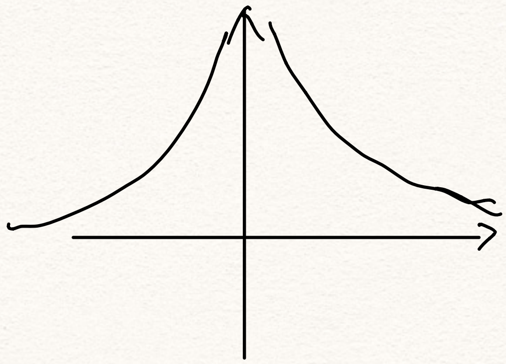
$f: R^n \to R$ $\mathrm{dom} f = R^n$

$f(x) = \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r$

$P \in S^n$ $q \in R^n$ $r \in R$

$\nabla^2 f(x) = P$ $P \succeq 0 \Leftrightarrow f$ 为凸函数

例：$f(x)=\frac{1}{x^2}$，$x\neq 0$，$x\in R$



$dom f=\{x \mid x\neq 0\}$

不是区间.