Równaniem liniowym o n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywa się równanie postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots a_n, b$ są liczbami rzeczywistymi.

Definicja

Układem m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy układ postaci

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

gdzie współczynniki a_{ij} oraz wyrazy wolne b_i są liczbami rzeczywistymi $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Przykład

Układy

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 = 3 \\ - x_3 = 4 \end{cases}$$

są przykładami układów równań liniowych o trzech niewiadomych x_1, x_2, x_3.

Definicja

Rozwiązaniem układu $(*)$ *nazywamy ciąg* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *liczb rzeczywistych, dla którego* $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots a_{in}s_n = b_i$*, gdy* $i = 1, 2, \ldots, m$*, czyli który spełnia każde równanie układu* $(*)$*.*

Definicja

Rozwiązaniem układu $(*)$ *nazywamy ciąg* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *liczb rzeczywistych, dla którego* $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots a_{in}s_n = b_i$, *gdy* $i = 1, 2, \ldots, m$, *czyli który spełnia każde równanie układu* $(*)$.

Każdy układ równań liniowych albo nie ma rozwiązań (wówczas mówimy, że jest *sprzeczny*), albo ma jedno rozwiązanie (wówczas mówimy, że jest *oznaczony*), albo ma nieskończenie wiele rozwiązań (wówczas mówimy, że jest *nieoznaczony*).

Przykłady

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 - 2x_2 = -7 \\ 2x_1 + 4x_2 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Przykłady

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \\ & & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 13 \end{cases}$$

układ oznaczony $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \\ -x_1 & - & 2x_2 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \\ & & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Przykłady

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 13 \end{cases}$$ układ oznaczony $$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 - 2x_2 = -7 \\ 2x_1 + 4x_2 = 14 \end{cases}$$ układ nieoznaczony $$\begin{cases} x_1 = 7 - 2\alpha \\ x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Przykłady

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 13 \end{cases}$$

układ oznaczony $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 - 2x_2 = -7 \\ 2x_1 + 4x_2 = 14 \end{cases}$$

układ nieoznaczony $\begin{cases} x_1 = 7 - 2\alpha \\ x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

układ sprzeczny

Ze współczynników, niewiadomych oraz wyrazów wolnych układu $(*)$ można utworzyć macierze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

nazywane odpowiednio macierzą lub macierzą główną, macierzą niewiadomych, macierzą wyrazów wolnych układu $(*)$.

Ponieważ $A = A_{m\times n}$, $X = X_{n\times 1}$, $B = B_{m\times 1}$, więc układ $(*)$ jest równoważny jednemu równaniu macierzowemu

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

które można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

(symbolicznie $A \cdot X = B$), nazywanej postacią macierzową układu $(*)$.

Przykłady

Postacią macierzową układu równań

$$(\triangle) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Przykłady

Postacią macierzową układu równań

$$(\triangle) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

jest

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Przykłady

Postacią macierzową układu równań

$$(\square) \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x + 6y + 7z = 0 \end{cases}$$

Przykłady

Postacią macierzową układu równań

$$(\Box) \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x + 6y + 7z = 0 \end{cases}$$

jest

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Układ $(*)$ nazywamy *jednorodnym*, jeżeli $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$; w przeciwnym przypadku układ ten nazywamy *niejednorodnym*.

Układ $(*)$ nazywamy *jednorodnym*, jeżeli $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$; w przeciwnym przypadku układ ten nazywamy *niejednorodnym*.

Przykłady

Układ $(*)$ nazywamy *jednorodnym*, jeżeli $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$; w przeciwnym przypadku układ ten nazywamy *niejednorodnym*.

Przykłady

Układ $(\triangle)$ jest układem niejednorodnym.

Układ $(*)$ nazywamy *jednorodnym*, jeżeli $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$; w przeciwnym przypadku układ ten nazywamy *niejednorodnym*.

Przykłady

Układ $(\triangle)$ jest układem niejednorodnym.
Układ $(\square)$ jest układem jednorodnym.

Definicja

Układ $(*)$, *w którym* $m = n$ *i* $\det A \neq 0$, *nazywamy układem Cramera.*

Definicja

Układ $(*)$, *w którym* $m = n$ *i* $\det A \neq 0$, *nazywamy układem Cramera.*

Równoważnie, przez układ Cramera możemy rozumieć układ $(*)$, w którym liczba równań jest równa liczbie niewiadomych, a macierz główna A jest macierzą nieosobliwą.

Przykłady

Ponieważ w układzie (□) liczba równań jest różna od liczby niewiadomych ($m = 2 \neq 3 = n$), więc układ (□) nie jest układem Cramera.

Przykłady

Ponieważ w układzie ($\Box$) liczba równań jest różna od liczby niewiadomych ($m = 2 \neq 3 = n$), więc układ ($\Box$) nie jest układem Cramera.

W układzie ($\triangle$) liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ($m = 3 = n$) oraz

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} .$$

Przykłady

Ponieważ w układzie ($\square$) liczba równań jest różna od liczby niewiadomych ($m = 2 \neq 3 = n$), więc układ ($\square$) nie jest układem Cramera.

W układzie ($\triangle$) liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ($m = 3 = n$) oraz

$$\det A = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right|\begin{array}{lr} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} .$$

Przykłady

Ponieważ w układzie (□) liczba równań jest różna od liczby niewiadomych ($m = 2 \neq 3 = n$), więc układ (□) nie jest układem Cramera.

W układzie (△) liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ($m = 3 = n$) oraz

$$\det A = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right. = 1 - 2 + 2 + 4 + 1 + 1 = 7 \neq 0.$$

Przykłady

Ponieważ w układzie ($\Box$) liczba równań jest różna od liczby niewiadomych ($m = 2 \neq 3 = n$), więc układ ($\Box$) nie jest układem Cramera.

W układzie ($\triangle$) liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ($m = 3 = n$) oraz

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 1 - 2 + 2 + 4 + 1 + 1 = 7 \neq 0.$$

Dlatego układ ($\triangle$) jest układem Cramera.

Twierdzenie

Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie określone tzw. wzorami Cramera

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \qquad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie A_j oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie jej j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Dowód

Dowód

Niech układ $(*)$ będzie układem Cramera.

Dowód

Niech układ $(*)$ będzie układem Cramera. Wówczas $m = n$ i $\det A \neq 0$. Zatem A^{-1} istnieje.

Dowód

Niech układ $(*)$ będzie układem Cramera. Wówczas $m = n$ i $\det A \neq 0$. Zatem A^{-1} istnieje. Dlatego

$$A \cdot X = B \qquad\qquad / \cdot_l A^{-1}$$

Dowód

Niech układ $(*)$ będzie układem Cramera. Wówczas $m = n$ i $\det A \neq 0$. Zatem A^{-1} istnieje. Dlatego

$$
\begin{aligned}
A \cdot X &= B \qquad\qquad\qquad / \cdot_l A^{-1} \\
A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B
\end{aligned}
$$

Dowód

Niech układ $(*)$ będzie układem Cramera. Wówczas $m = n$ i $\det A \neq 0$. Zatem A^{-1} istnieje. Dlatego

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B && / \cdot_l A^{-1} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Dowód

Niech układ $(*)$ będzie układem Cramera. Wówczas $m = n$ i $\det A \neq 0$. Zatem A^{-1} istnieje. Dlatego

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \qquad\qquad / \cdot_l A^{-1} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Dowód

Niech układ $(*)$ będzie układem Cramera. Wówczas $m = n$ i $\det A \neq 0$. Zatem A^{-1} istnieje. Dlatego

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B & \qquad / \cdot_l A^{-1} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Macierz X jest tylko jedna, bo macierz A^{-1} jest tylko jedna i macierz B też. A zatem układ $(*)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód cd.

Z tw. o postaci macierzy odwrotnej mamy

$$X = \frac{1}{\det A}(D_A)^T B$$

Dowód cd.

Z tw. o postaci macierzy odwrotnej mamy

$$X = \frac{1}{\det A}(D_A)^T B$$

Zatem $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1j} & D_{2j} & \dots & D_{nj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Dowód cd.

Z tw. o postaci macierzy odwrotnej mamy

$$X = \frac{1}{\det A}(D_A)^T B$$

Zatem $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1j} & D_{2j} & \dots & D_{nj} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Z def. równości macierzy i mnożenia macierzy mamy

$$x_j = \frac{1}{\det A}\left(D_{1j}b_1 + D_{2j}b_2 + \dots + D_{nj}b_n\right), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Dowód cd.

Z drugiej strony

$$\det A_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{\text{wg } k_j} =$$

$$= b_1 D_{1j} + b_2 D_{2j} + \dots + b_n D_{nj}$$

Dowód cd.

Z drugiej strony

$$\det A_j = \left| \begin{array}{ccccccc} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|_{\text{wg } k_j} =$$

$$= b_1 D_{1j} + b_2 D_{2j} + \dots + b_n D_{nj}$$

Zatem

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}\ , j = 1, 2, \dots, n.$$

Przykład

Korzystając ze wzorów Cramera rozwiążmy układ (△), czyli

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

.

Przykład

Korzystając ze wzorów Cramera rozwiążmy układ $(\triangle)$, czyli

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

Wiemy już, że układ $(\triangle)$ jest układem Cramera oraz $\det A = 7$.

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right.$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right. = 1 - 5 + 0 + 10 + 1 - 0 = 7,$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right. = 1 - 5 + 0 + 10 + 1 - 0 = 7,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right. = 1 - 5 + 0 + 10 + 1 - 0 = 7,$$

$$\det A_2 = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right.$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right. = 1 - 5 + 0 + 10 + 1 - 0 = 7,$$

$$\det A_2 = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right. = 0 - 2 + 10 - 0 + 5 + 1 = 14,$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right. = 1 - 5 + 0 + 10 + 1 - 0 = 7,$$

$$\det A_2 = \left| \begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right. = 0 - 2 + 10 - 0 + 5 + 1 = 14,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right. = 1 - 5 + 0 + 10 + 1 - 0 = 7,$$

$$\det A_2 = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right. = 0 - 2 + 10 - 0 + 5 + 1 = 14,$$

$$\det A_3 = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right. = 1 - 5 + 0 + 10 + 1 - 0 = 7,$$

$$\det A_2 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right. = 0 - 2 + 10 - 0 + 5 + 1 = 14,$$

$$\det A_3 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right. = -5 + 0 + 1 + 2 - 0 - 5 = -7.$$

Przykład dokończenie

Znamy też postać macierzową tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det A_1 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right. = 1 - 5 + 0 + 10 + 1 - 0 = 7,$$

$$\det A_2 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right. = 0 - 2 + 10 - 0 + 5 + 1 = 14,$$

$$\det A_3 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right. = -5 + 0 + 1 + 2 - 0 - 5 = -7.$$

Dlatego jedynym rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{7}{7} = 1, \; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{14}{7} = 2, \; x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-7}{7} = -1$$

Wniosek

Jednorodny układ Cramera ma tylko rozwiązanie zerowe, tzn. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Wniosek

Jednorodny układ Cramera ma tylko rozwiązanie zerowe, tzn. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Przykład

Jeżeli w układzie $(\triangle)$, który jest niejednorodnym układem Cramera, niezerowe wyrazy wolne zastąpimy zerami, to otrzymamy następujący jednorodny układ Cramera

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Wniosek

Jednorodny układ Cramera ma tylko rozwiązanie zerowe, tzn. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Przykład

Jeżeli w układzie $(\triangle)$, który jest niejednorodnym układem Cramera, niezerowe wyrazy wolne zastąpimy zerami, to otrzymamy następujący jednorodny układ Cramera

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

To oznacza, że jedynym rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Definicja

Minorem macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z macierzy A przez skreślenie pewnej liczby wierszy lub kolumn.

Definicja

Minorem macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z macierzy A przez skreślenie pewnej liczby wierszy lub kolumn.

Uwaga

Jeżeli A jest macierzą kwadratową, to przyjmujemy, że $\det A$ też jest minorem tej macierzy.

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ minor st. 3 macierzy A}$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ minor st. 3 macierzy A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & \cancel{8} & 9 \\ \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \text{ minor st. 2 macierzy A}$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ minor st. 3 macierzy A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & \cancel{8} & 9 \\ \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \text{ minor st. 2 macierzy A}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & \cancel{8} & \cancel{9} \\ \cancel{10} & \cancel{11} & \cancel{12} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 7 \end{vmatrix} \text{ minor st. 1 macierzy A}$$

Definicja

Rzędem macierzy $A \neq \mathbb{O}$ *nazywamy najwyższy stopień niezerowego minora tej macierzy. Rząd macierzy* A *oznaczamy przez* $\mathrm{rz}A$.

Definicja

Rzędem macierzy $A \neq \mathbb{O}$ nazywamy najwyższy stopień niezerowego minora tej macierzy. Rząd macierzy A oznaczamy przez $\mathrm{rz}A$.

Przyjmujemy, że $\mathrm{rz}\mathbb{O} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$.

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ponieważ macierz A ma wymiar 3×3, więc rz$A \leqslant 3$.

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ponieważ macierz A ma wymiar 3×3, więc rz$A \leqslant 3$. Rozważamy jedyny minor stopnia 3 macierzy A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ponieważ macierz A ma wymiar 3×3, więc rz$A \leqslant 3$. Rozważamy jedyny minor stopnia 3 macierzy A:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{array}$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ponieważ macierz A ma wymiar 3×3, więc $\text{rz}A \leqslant 3$. Rozważamy jedyny minor stopnia 3 macierzy A:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right. = 10 + 8 - 14 - 4 = 0$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ponieważ macierz A ma wymiar 3×3, więc rz$A \leqslant 3$. Rozważamy jedyny minor stopnia 3 macierzy A:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right. = 10 + 8 - 14 - 4 = 0$$

Stąd wynika, że rz$A < 3$.

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ponieważ macierz A ma wymiar 3×3, więc rz$A \leqslant 3$. Rozważamy jedyny minor stopnia 3 macierzy A:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{array} = 10 + 8 - 14 - 4 = 0$$

Stąd wynika, że rz$A < 3$. Dalej nietrudno zauważyć, że niezerowym minorem stopnia 2 macierzy A jest $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. A to oznacza, że rz$A = 2$.

Bezpośrednio z definicji rzędu macierzy wynika, że

Bezpośrednio z definicji rzędu macierzy wynika, że

1. jeśli $A = A_{m\times n}$, to $0 \leqslant \text{rz}A \leqslant \min(m, n)$;

Bezpośrednio z definicji rzędu macierzy wynika, że

1. jeśli $A = A_{m\times n}$, to $0 \leqslant \text{rz}A \leqslant \min(m, n)$;

Przypomnienie

$$\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{gdy } a \leqslant b \\ b & \text{gdy } a > b \end{cases}$$

Bezpośrednio z definicji rzędu macierzy wynika, że

1. jeśli $A = A_{m\times n}$, to $0 \leqslant$ rz$A \leqslant \min(m,n)$;
2. jeśli A jest macierzą nieosobliwą stopnia n, to rz$A = n$;

Przypomnienie

$$\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{gdy } a \leqslant b \\ b & \text{gdy } a > b \end{cases}$$

Bezpośrednio z definicji rzędu macierzy wynika, że

1. jeśli $A = A_{m \times n}$, to $0 \leqslant \text{rz}A \leqslant \min(m, n)$;
2. jeśli A jest macierzą nieosobliwą stopnia n, to $\text{rz}A = n$;
3. dla każdej macierzy A jest $\text{rz}(A^T) = \text{rz}A$.

Przypomnienie

$$\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{gdy } a \leqslant b \\ b & \text{gdy } a > b \end{cases}$$

Twierdzenie

Operacje elementarne na macierzy nie zmieniają rzędu tej macierzy.

Definicja

Macierz nazywamy schodkową, jeżeli pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach.

Definicja

Macierz nazywamy schodkową, jeżeli pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach.

Uwaga

Przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu jest macierzą schodkową.

Przykłady

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze A, B, C są macierzami schodkowymi, a macierze D i E nie.

Twierdzenie

Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy.

Twierdzenie

Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy.

Przykłady

Dlatego dla wcześniej rozważanych macierzy schodkowych A, B, C mamy: $\text{rz}A = 3$, $\text{rz}B = 2$, $\text{rz}C = 2$

Twierdzenie

Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy.

Przykłady

Dlatego dla wcześniej rozważanych macierzy schodkowych A, B, C mamy: $\mathrm{rz}A = 3$, $\mathrm{rz}B = 2$, $\mathrm{rz}C = 2$

Z ostatnich dwóch twierdzeń wynika, że aby wyznaczyć rząd macierzy A wystarczy tę macierz za pomocą operacji elementarnych sprowadzić do macierzy schodkowej, a następnie określić rząd tej macierzy schodkowej, który jest też rzędem macierzy A.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$A = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 9 & 5 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+2w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-4)w_1}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 9 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+2w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-4)w_1}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -9 & -10 \\ 0 & 19 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 9 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+2w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-4)w_1}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -9 & -10 \\ 0 & 19 & 9 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\widetilde{w_3}=w_3+w_2}$$

Przykład

$$A = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 9 & 5 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+2w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-4)w_1}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -9 & -10 \\ 0 & 19 & 9 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{\widetilde{w_3}=w_3+w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 9 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+2w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-4)w_1}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -9 & -10 \\ 0 & 19 & 9 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\widetilde{w_3}=w_3+w_2}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy maciecierz schodkową o dwóch niezerowych wierszach. To oznacza, że rz$A = 2$.