Definicja

Macierz kwadratową A *nazywamy macierzą nieosobliwą, gdy* $\det A \neq 0$. *W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz* A *jest osobliwa.*

Definicja

Macierz kwadratową A *nazywamy macierzą nieosobliwą, gdy* $\det A \neq 0$. *W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz* A *jest osobliwa.*

Przykłady

Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, to $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, co oznacza, że A jest macierzą nieosobliwą stopnia 2.

Definicja

Macierz kwadratową A *nazywamy macierzą nieosobliwą, gdy* $\det A \neq 0$. *W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz* A *jest osobliwa.*

Przykłady

Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, to $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, co oznacza, że A jest macierzą nieosobliwą stopnia 2. Jeśli natomiast $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, to $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, czyli B jest macierzą osobliwą stopnia 2.

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz B, która spełnia warunki:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz B, która spełnia warunki:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Uwaga

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy A, to tylko jedna.

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz B, która spełnia warunki:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Uwaga

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy A, to tylko jedna.

Przypuśćmy, że B, C są macierzami odwrotnymi do macierzy A.

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz B, która spełnia warunki:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Uwaga

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy A, to tylko jedna.

Przypuśćmy, że B, C są macierzami odwrotnymi do macierzy A. Wówczas $BA = I$ i $AC = I$.

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz B, która spełnia warunki:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Uwaga

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy A, to tylko jedna.

Przypuśćmy, że B, C są macierzami odwrotnymi do macierzy A. Wówczas $BA = I$ i $AC = I$. Stąd

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz B, która spełnia warunki:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Uwaga

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy A, to tylko jedna.

Przypuśćmy, że B, C są macierzami odwrotnymi do macierzy A. Wówczas $BA = I$ i $AC = I$. Stąd

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Macierz odwrotną do macierzy A oznaczamy symbolem A^{-1}.

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz B, która spełnia warunki:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Uwaga

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy A, to tylko jedna.

Przypuśćmy, że B, C są macierzami odwrotnymi do macierzy A. Wówczas $BA = I$ i $AC = I$. Stąd

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Macierz odwrotną do macierzy A oznaczamy symbolem A^{-1}. Zatem

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem $A^{-1} = B$.

Przykład

Niech $A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$.

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Wówczas dla każdej macierzy $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy

$$A \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Wówczas dla każdej macierzy $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy

$$A \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Wówczas dla każdej macierzy $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy

$$A \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Wówczas dla każdej macierzy $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy

$$A \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem A^{-1} nie istnieje.

Z definicji macierzy odwrotnej otrzymujemy

Wniosek

Z definicji macierzy odwrotnej otrzymujemy

Wniosek

1. $I^{-1} = I$.

Z definicji macierzy odwrotnej otrzymujemy

Wniosek

1. $I^{-1} = I$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Z definicji macierzy odwrotnej otrzymujemy

Wniosek

1. $I^{-1} = I$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. *Jeśli* $A = [a_{11}]$ *i* $a_{11} \neq 0$, *to* $A^{-1} = [\frac{1}{a_{11}}]$.

Niech $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n > 1$. Z dopełnień algebraicznych elementów macierzy A, czyli liczb $D_{ij} = (-1)^{i+j} \text{det} A_{ij}$ tworzymy macierz macierz $D_A = [D_{ij}]_{n \times n}$, którą nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A.

Niech $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n > 1$.
Z dopełnień algebraicznych elementów macierzy A, czyli liczb $D_{ij} = (-1)^{i+j} \text{det} A_{ij}$ tworzymy macierz macierz $D_A = [D_{ij}]_{n \times n}$, którą nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A.

Macierz $(D_A)^T$ spełnia warunki

$$A \cdot (D_A)^T = (D_A)^T \cdot A = (\det A) I_n.$$

Niech $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n > 1$. Z dopełnień algebraicznych elementów macierzy A, czyli liczb $D_{ij} = (-1)^{i+j}\text{det}A_{ij}$ tworzymy macierz macierz $D_A = [D_{ij}]_{n\times n}$, którą nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A.

Macierz $(D_A)^T$ spełnia warunki

$$A \cdot (D_A)^T = (D_A)^T \cdot A = (\det A)I_n.$$

Twierdzenie

Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej A istnieje wtw $\text{det}A \neq 0$ *i dla macierzy nieosobliwej stopnia $n > 1$ wyraża się wzorem*

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det}A}(D_A)^T$$

Przykład

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dla

której $ad - bc \neq 0$.

Przykład

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dla której $ad - bc \neq 0$. Ponieważ $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, więc A jest macierzą nieosobliwą stopnia 2 i $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(D_A\right)^T$.

Przykład

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]$, dla której $ad - bc \neq 0$. Ponieważ $\det A = \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = ad - bc \neq 0$, więc A jest macierzą nieosobliwą stopnia 2 i $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(D_A \right)^T$. Tworzymy macierz dopełnień algebraicznych macierzy A, wpisując w miejsce danego elementu jego dopełnienie algebraiczne:

$$D_A = \left[\begin{array}{cc} (-1)^{1+1}|d| & (-1)^{1+2}|c| \\ (-1)^{2+1}|b| & (-1)^{2+2}|a| \end{array} \right] = \left[\begin{array}{rr} d & -c \\ -b & a \end{array} \right]$$

Przykład

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]$, dla której $ad - bc \neq 0$. Ponieważ $\det A = \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = ad - bc \neq 0$, więc A jest macierzą nieosobliwą stopnia 2 i $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(D_A\right)^T$. Tworzymy macierz dopełnień algebraicznych macierzy A, wpisując w miejsce danego elementu jego dopełnienie algebraiczne:

$$D_A = \left[\begin{array}{cc} (-1)^{1+1}|d| & (-1)^{1+2}|c| \\ (-1)^{2+1}|b| & (-1)^{2+2}|a| \end{array} \right] = \left[\begin{array}{rr} d & -c \\ -b & a \end{array} \right]$$

Następnie macierz dopełnień transponujemy

$$(D_A)^T = \left[\begin{array}{rr} d & -b \\ -c & a \end{array} \right].$$

Przykład dokończenie

Potem mnożymy przez odwrotność wyznacznika

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(D_A)^T = \frac{1}{ad-bc}\left[\begin{array}{rr} d & -b \\ -c & a \end{array}\right].$$

Przykład dokończenie

Potem mnożymy przez odwrotność wyznacznika

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(D_A)^T = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Jeśli $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i $ad - bc \neq 0$, to

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Dla macierzy nieosobliwych tego samego stopnia mamy:

Twierdzenie

Dla macierzy nieosobliwych tego samego stopnia mamy:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Twierdzenie

Dla macierzy nieosobliwych tego samego stopnia mamy:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Twierdzenie

Dla macierzy nieosobliwych tego samego stopnia mamy:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Twierdzenie

Dla macierzy nieosobliwych tego samego stopnia mamy:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}(A^{-1})$ *dla* $\alpha \neq 0$.

Przykład

Za pomocą macierzy odwrotnej rozwiązać równanie macierzowe

$$X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie macierzy odwrotnej

Przykład

Za pomocą macierzy odwrotnej rozwiązać równanie macierzowe

$$X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie to ma postać $XA = B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zastosowanie macierzy odwrotnej

Przykład

Za pomocą macierzy odwrotnej rozwiązać równanie macierzowe

$$X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie to ma postać $XA = B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, więc macierz A^{-1} istnieje.

Zastosowanie macierzy odwrotnej

Przykład

Za pomocą macierzy odwrotnej rozwiązać równanie macierzowe

$$X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie to ma postać $XA = B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, więc macierz A^{-1} istnieje. Dodatkowo macierz A znajduje się po prawej stronie macierzy X. Dlatego mnożąc prawostronnie przez A^{-1} obie strony równania $XA = B$ otrzymujemy $XAA^{-1} = BA^{-1}$, czyli $XI = BA^{-1}$, a w konsekwencji $X = BA^{-1}$. Zatem wystarczy znaleźć macierz odwrotną do macierzy A, a następnie wykonać mnożenie BA^{-1}.

Przykład dokończenie1

Tworzymy macierz dopełnień algebraicznych macierzy A:

$$D_A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Następnie macierz dopełnień transponujemy

$$(D_A)^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zastosowanie macierzy odwrotnej

Przykład dokończenie2

Potem mnożymy przez odwrotność wyznacznika

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(D_A)^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Operacjami elementarnymi na macierzy są:

Definicja

Operacjami elementarnymi na macierzy są:

1. *zamiana między sobą dwóch dowolnych wierszy (kolumn) [symbolicznie* $w_i \leftrightarrow w_j$ $(k_i \leftrightarrow k_j)$*];*

Definicja

Operacjami elementarnymi na macierzy są:

1. *zamiana między sobą dwóch dowolnych wierszy (kolumn) [symbolicznie $w_i \leftrightarrow w_j$ $(k_i \leftrightarrow k_j)$];*
2. *pomnożenie elementów dowolnego wiersza (kolumny) przez tę samą liczbę różną od zera [symbolicznie cw_i (ck_i), gdzie $c \neq 0$];*

Definicja

Operacjami elementarnymi na macierzy są:

1. *zamiana między sobą dwóch dowolnych wierszy (kolumn) [symbolicznie $w_i \leftrightarrow w_j$ ($k_i \leftrightarrow k_j$)];*
2. *pomnożenie elementów dowolnego wiersza (kolumny) przez tę samą liczbę różną od zera [symbolicznie cw_i (ck_i), gdzie $c \neq 0$];*
3. *dodanie do elementów dowolnego wiersza (kolumny) odpowiadających im elementów innego wiersza (kolumny) pomnożonych przez tę samą liczbę [symbolicznie $w_i + dw_j$ ($k_i + dk_j$)].*

Operacje elementarne a mnożenie macierzy

Każda operacja elementarna na wierszach macierzy odpowiada lewostronnemu mnożeniu tej macierzy przez pewną macierz prostej postaci.

Operacje elementarne a mnożenie macierzy

Każda operacja elementarna na wierszach macierzy odpowiada lewostronnemu mnożeniu tej macierzy przez pewną macierz prostej postaci.

$w_1 \leftrightarrow w_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Każda operacja elementarna na wierszach macierzy odpowiada lewostronnemu mnożeniu tej macierzy przez pewną macierz prostej postaci.

$w_1 \leftrightarrow w_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

cw_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Operacje elementarne a mnożenie macierzy

Każda operacja elementarna na wierszach macierzy odpowiada lewostronnemu mnożeniu tej macierzy przez pewną macierz prostej postaci.

Operacje elementarne a mnożenie macierzy

Każda operacja elementarna na wierszach macierzy odpowiada lewostronnemu mnożeniu tej macierzy przez pewną macierz prostej postaci.

$w_3 + 4w_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 4a_{21} + a_{31} & 4a_{22} + a_{32} & 4a_{23} + a_{33} \end{bmatrix}$$

Schemat bezwyznacznikowego znajdowania macierzy odwrotnej

Operacje elementarne na wierszach macierzy mogą być wykorzystywane do wyznaczania macierzy odwrotnej.

Schemat bezwyznacznikowego znajdowania macierzy odwrotnej

Operacje elementarne na wierszach macierzy mogą być wykorzystywane do wyznaczania macierzy odwrotnej.

Dla danej macierzy A nieosobliwej stopnia n wykonujemy następujące kroki.

1. Tworzymy macierz blokową $[A|I_n]$.
2. Macierz $[A|I_n]$ za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzamy do postaci $[I_n|B]$. Wówczas $A^{-1} = B$.

Schemat bezwyznacznikowego znajdowania macierzy odwrotnej

Operacje elementarne na wierszach macierzy mogą być wykorzystywane do wyznaczania macierzy odwrotnej.

Dla danej macierzy A nieosobliwej stopnia n wykonujemy następujące kroki.

1. Tworzymy macierz blokową $[A|I_n]$.
2. Macierz $[A|I_n]$ za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprowadzamy do postaci $[I_n|B]$. Wówczas $A^{-1} = B$.

$$[A|I_n] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} \left[I_n|A^{-1}\right]$$

Przykład

Znaleźć macierz odwrotną A^{-1}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Przykład

Znaleźć macierz odwrotną A^{-1}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\ A \mid I_3\ \right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład

Znaleźć macierz odwrotną A^{-1}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\ A \mid I_3\ \right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+(-1)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-2)w_1}$$

Przykład

Znaleźć macierz odwrotną A^{-1}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+(-1)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-2)w_1}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład

Znaleźć macierz odwrotną A^{-1}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+(-1)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-2)w_1}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \longleftrightarrow w_3}$$

Przykład

Znaleźć macierz odwrotną A^{-1}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+(-1)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-2)w_1}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \longleftrightarrow w_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Przykład

Znaleźć macierz odwrotną A^{-1}, gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+(-1)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-2)w_1}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \longleftrightarrow w_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=(-\frac{1}{3})w_3]{\widetilde{w_2}=(-\frac{1}{2})w_2}$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+(-1)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-2)w_1}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \longleftrightarrow w_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=(-\frac{1}{3})w_3]{\widetilde{w_2}=(-\frac{1}{2})w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=w_3+(-1)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+(-2)w_1}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \longleftrightarrow w_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=(-\frac{1}{3})w_3]{\widetilde{w_2}=(-\frac{1}{2})w_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_2}=w_2+\frac{1}{2}w_3]{\widetilde{w_1}=w_1+(-1)w_3}$$

Przykład

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=(-\frac{1}{3})w_3]{\widetilde{w_2}=(-\frac{1}{2})w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_2}=w_2+\frac{1}{2}w_3]{\widetilde{w_1}=w_1+(-1)w_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Przykład

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=(-\frac{1}{3})w_3]{\widetilde{w_2}=(-\frac{1}{2})w_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_2}=w_2+\frac{1}{2}w_3]{\widetilde{w_1}=w_1+(-1)w_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\widetilde{w_1}=w_1+(-1)w_2}$$

Przykład

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=(-\frac{1}{3})w_3]{\widetilde{w_2}=(-\frac{1}{2})w_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_2}=w_2+\frac{1}{2}w_3]{\widetilde{w_1}=w_1+(-1)w_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\widetilde{w_1}=w_1+(-1)w_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Przykład

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_3}=(-\frac{1}{3})w_3]{\widetilde{w_2}=(-\frac{1}{2})w_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\widetilde{w_2}=w_2+\frac{1}{2}w_3]{\widetilde{w_1}=w_1+(-1)w_3}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\widetilde{w_1}=w_1+(-1)w_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & A^{-1} \end{array}\right]$$