Będziemy zajmować się jedynie przypadkiem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definicja

Wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *o współczynnikach ze zbioru* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję* $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *określoną wzorem*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$.

Definicja

Wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *o współczynnikach ze zbioru* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję* $P \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *określoną wzorem*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$.

Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu P.

Definicja

Wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *o współczynnikach ze zbioru* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję* $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *określoną wzorem*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$*,* $a_n \neq 0$*.*

Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu P. Stopień wielomianu wielomianu P oznaczamy przez st$P$.

Definicja

Wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *o współczynnikach ze zbioru* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję* $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *określoną wzorem*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$.

Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu P.
Stopień wielomianu wielomianu P oznaczamy przez st$P$.
Jeżeli $P(x) = a_0 = 0$, to mówimy, że P jest wielomianem zerowym i przyjmujemy, że st$P \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$.

Definicja

Wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *o współczynnikach ze zbioru* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję* $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *określoną wzorem*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$.

Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu P.
Stopień wielomianu wielomianu P oznaczamy przez st$P$.
Jeżeli $P(x) = a_0 = 0$, to mówimy, że P jest wielomianem zerowym i przyjmujemy, że st$P \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$.
Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{K}$ będziemy oznaczać przez $\mathbb{K}[x]$.

Definicja

Wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *o współczynnikach ze zbioru* $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję* $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *określoną wzorem*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$.

Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu P.
Stopień wielomianu wielomianu P oznaczamy przez st$P$.
Jeżeli $P(x) = a_0 = 0$, to mówimy, że P jest wielomianem zerowym i przyjmujemy, że st$P \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$.
Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{K}$ będziemy oznaczać przez $\mathbb{K}[x]$.
Elementy zbioru $\mathbb{R}[x]$ nazywamy wielomianami rzeczywistymi, a elementy zbioru $\mathbb{C}[x]$ - wielomianami zespolonymi.

Przykłady

$P(x) = \frac{1}{2}x^{10} - x^5 + 2$ wielomian rzeczywisty st. 10

Przykłady

$P(x) = \frac{1}{2}x^{10} - x^5 + 2$ wielomian rzeczywisty st. 10

$Q(x) = -2x^2 + 4x - 1$ wielomian rzeczywisty st. 2

Przykłady

$P(x) = \frac{1}{2}x^{10} - x^5 + 2$ wielomian rzeczywisty st. 10

$Q(x) = -2x^2 + 4x - 1$ wielomian rzeczywisty st. 2

$S(x) = 5$ wielomian rzeczywisty st. 0

Przykłady

$$P(x) = \frac{1}{2}x^{10} - x^5 + 2 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 10}$$

$$Q(x) = -2x^2 + 4x - 1 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 2}$$

$$S(x) = 5 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 0}$$

$$T(x) = ix^7 + (3-i)x^6 + 2 + i \quad \text{wielomian zespolony st. 7}$$

Przykłady

$P(x) = \frac{1}{2}x^{10} - x^5 + 2$ wielomian rzeczywisty st. 10

$Q(x) = -2x^2 + 4x - 1$ wielomian rzeczywisty st. 2

$S(x) = 5$ wielomian rzeczywisty st. 0

$T(x) = ix^7 + (3-i)x^6 + 2 + i$ wielomian zespolony st. 7

$U(x) = x^3 + 1$ wielomian zespolony st. 3

Przykłady

$$P(x) = \frac{1}{2}x^{10} - x^5 + 2 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 10}$$

$$Q(x) = -2x^2 + 4x - 1 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 2}$$

$$S(x) = 5 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 0}$$

$$T(x) = ix^7 + (3-i)x^6 + 2 + i \quad \text{wielomian zespolony st. 7}$$

$$U(x) = x^3 + 1 \quad \text{wielomian zespolony st. 3}$$

$$W(x) = -2i \quad \text{wielomian zespolony st. 0}$$

Przykłady

$$P(x) = \frac{1}{2}x^{10} - x^5 + 2 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 10}$$

$$Q(x) = -2x^2 + 4x - 1 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 2}$$

$$S(x) = 5 \quad \text{wielomian rzeczywisty st. 0}$$

$$T(x) = ix^7 + (3-i)x^6 + 2 + i \quad \text{wielomian zespolony st. 7}$$

$$U(x) = x^3 + 1 \quad \text{wielomian zespolony st. 3}$$

$$W(x) = -2i \quad \text{wielomian zespolony st. 0}$$

Każdy wielomian rzeczywisty może być traktowany jako wielomian zespolony przez rozszerzenie jego dziedziny z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[x]$ określamy działania dodawania i mnożenia jako zwykłe dodawanie i mnożenie funkcji liczbowych.

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[x]$ określamy działania dodawania i mnożenia jako zwykłe dodawanie i mnożenie funkcji liczbowych.

suma wielomianów $P, Q \in \mathbb{K}[x]$

wielomian $P + Q \in \mathbb{K}[x]$, taki że

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{K}$$

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[x]$ określamy działania dodawania i mnożenia jako zwykłe dodawanie i mnożenie funkcji liczbowych.

suma wielomianów $P, Q \in \mathbb{K}[x]$

wielomian $P + Q \in \mathbb{K}[x]$, taki że

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{K}$$

iloczyn wielomianów $P, Q \in \mathbb{K}[x]$

wielomian $P \cdot Q \in \mathbb{K}[x]$, taki że

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{K}$$

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[x]$ określamy działania dodawania i mnożenia jako zwykłe dodawanie i mnożenie funkcji liczbowych.

suma wielomianów $P, Q \in \mathbb{K}[x]$

wielomian $P + Q \in \mathbb{K}[x]$, taki że

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{K}$$

iloczyn wielomianów $P, Q \in \mathbb{K}[x]$

wielomian $P \cdot Q \in \mathbb{K}[x]$, taki że

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{K}$$

Nietrudno zauważyć, że

$$\text{st}(P+Q) \leqslant \max\left(\text{st}P, \text{st}Q\right) \text{ oraz } \text{st}(P \cdot Q) = \text{st}P + \text{st}Q.$$

Przykłady

$$(x^2 + 4x - 4) + (x^3 - 3x + 8) = x^3 + x^2 + x + 4$$

Przykłady

$$(x^2 + 4x - 4) + (x^3 - 3x + 8) = x^3 + x^2 + x + 4$$

$$(x^4 - x^3 + 1) + (-x^4 + x^2) = -x^3 + x^2 + 1$$

Przykłady

$$
\begin{aligned}
(x^2+4x-4)+(x^3-3x+8) &= x^3+x^2+x+4 \\
(x^4-x^3+1)+(-x^4+x^2) &= -x^3+x^2+1 \\
(x^2+2x-2)(x^3-5) &= x^5-5x^2+2x^4-10x-2x^3+10 = \\
&= x^5+2x^4-2x^3-5x^2-10x+10
\end{aligned}
$$

wielomian nierozkładalny

Mówimy, że wielomian $P(x)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{K}[x]$, jeżeli nie istnieją wielomiany $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[x]$ stopni dodatnich, takie że $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$. W przeciwnym przypadku wielomian $P(x)$ nazywamy rozkładalnym w $\mathbb{K}[x]$.

wielomian nierozkładalny

Mówimy, że wielomian $P(x)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{K}[x]$, jeżeli nie istnieją wielomiany $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[x]$ stopni dodatnich, takie że $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$. W przeciwnym przypadku wielomian $P(x)$ nazywamy rozkładalnym w $\mathbb{K}[x]$.

Przykłady

$P(x) = x^2 + 1$ nierozkładalny w $\mathbb{R}[x]$

wielomian nierozkładalny

Mówimy, że wielomian $P(x)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{K}[x]$, jeżeli nie istnieją wielomiany $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[x]$ stopni dodatnich, takie że $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$. W przeciwnym przypadku wielomian $P(x)$ nazywamy rozkładalnym w $\mathbb{K}[x]$.

Przykłady

$P(x) = x^2 + 1$ nierozkładalny w $\mathbb{R}[x]$
$P(x) = x^2 + 1$ rozkładalny w $\mathbb{C}[x]$

wielomian nierozkładalny

Mówimy, że wielomian $P(x)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{K}[x]$, jeżeli nie istnieją wielomiany $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[x]$ stopni dodatnich, takie że $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$. W przeciwnym przypadku wielomian $P(x)$ nazywamy rozkładalnym w $\mathbb{K}[x]$.

Przykłady

$P(x) = x^2 + 1$ nierozkładalny w $\mathbb{R}[x]$
$P(x) = x^2 + 1$ rozkładalny w $\mathbb{C}[x]$, bo
$P(x) = x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$

dzielenie z resztą wielomianów

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[x]$ wykonalne jest dzielenie z resztą, tzn. dla wielomianów $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, gdzie Q nie jest wielomianem zerowym, istnieją jednoznacznie określone wielomiany $I, R \in \mathbb{K}[x]$, takie że dla każdego $x \in \mathbb{K}$ zachodzi równość

$$P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x) \text{ gdzie } \mathrm{st}R < \mathrm{st}Q.$$

dzielenie z resztą wielomianów

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[x]$ wykonalne jest dzielenie z resztą, tzn. dla wielomianów $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, gdzie Q nie jest wielomianem zerowym, istnieją jednoznacznie określone wielomiany $I, R \in \mathbb{K}[x]$, takie że dla każdego $x \in \mathbb{K}$ zachodzi równość

$$P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x) \text{ gdzie st} R < \text{st} Q.$$

Wielomiany I i R nazywamy odpowiednio ilorazem i resztą z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q. Jeżeli reszta z dzielenia jest wielomianem zerowym, to mówimy, że wielomian P jest podzielny przez Q.

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$(4x^3 \quad + \quad x^2 \quad - \quad x \quad + \quad 2) \quad : (x^2 - x - 2)$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$(4x^3 \quad + \quad x^2 \quad - \quad x \quad + \quad 2) \quad : (x^2 - x - 2) = 4x$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} (4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & : (x^2 - x - 2) = 4x \\ -\,4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \end{array}$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$\begin{array}{rcccccccl} (4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & & : (x^2 - x - 2) = 4x \\ -4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & & \\ \hline = & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 & & \end{array}$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$
\begin{array}{rcccccccc}
(4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & : (x^2 - x - 2) = 4x + 5 \\
-\,4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
= & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 &
\end{array}
$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
(4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & : (x^2 - x - 2) = 4x + 5 \\
-4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
= & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 & \\
& - & 5x^2 & + & 5x & + & 10 &
\end{array}$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
(4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & :(x^2 - x - 2) = 4x + 5 \\
-4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
= & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 & \\
& - & 5x^2 & + & 5x & + & 10 & \\
\cline{2-7}
& & = & & 12x & + & 12 &
\end{array}
$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$
\begin{array}{rcccccccc}
(4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & : (x^2 - x - 2) = 4x + 5 \\
-\,4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
= & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 & \\
& - & 5x^2 & + & 5x & + & 10 & \\
\cline{2-7}
& & = & & 12x & + & 12 &
\end{array}
$$

iloraz $I(x) = 4x + 5$, reszta $R(x) = 12x + 12$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$
\begin{array}{rcccccccc}
(4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & : (x^2 - x - 2) = 4x + 5 \\
-\,4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
= & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 & \\
 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 10 & \\
\cline{2-7}
 & & = & & 12x & + & 12 &
\end{array}
$$

iloraz $I(x) = 4x + 5$, reszta $R(x) = 12x + 12$
wynik w postaci równości $P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x)$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = 4x^3 + x^2 - x + 2$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - 2$ w $\mathbb{R}[x]$.

$$
\begin{array}{rcccccccc}
(4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & : (x^2 - x - 2) = 4x + 5 \\
-4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
= & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 & \\
 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 10 & \\
\cline{2-7}
 & & = & & 12x & + & 12 &
\end{array}
$$

iloraz $I(x) = 4x + 5$, reszta $R(x) = 12x + 12$

wynik w postaci równości

$4x^3 + x^2 - x + 2 = (x^2 - x - 2)(4x + 5) + 12x + 12$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$(x^5 \quad - \quad ix^3 \qquad\qquad\qquad\qquad + \quad 1) \quad : (x^3 + i)$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$(x^5 \quad - \quad ix^3 \qquad\qquad\qquad\qquad + \quad 1) \quad : (x^3 + i) = x^2$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) \quad : (x^3 + i) = x^2 \\
-\,x^5 & & & - & ix^2 & &
\end{array}
$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) & : (x^3+i) = x^2 \\
-\,x^5 & & & - & ix^2 & & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 &
\end{array}
$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) & : (x^3 + i) = x^2 - i \\
-\,x^5 & & & - & ix^2 & & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 &
\end{array}
$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) & : (x^3+i) = x^2 - i \\
-x^5 & & & - & ix^2 & & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 & \\
 & & ix^3 & & & - & 1 &
\end{array}
$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) & & :(x^3+i) = x^2 - i \\
-x^5 & & & - & ix^2 & & & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 & & \\
 & & ix^3 & & & - & 1 & & \\
\hline
 & & = & - & ix^2 & & & &
\end{array}
$$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) & : (x^3+i) = x^2 - i \\
-\,x^5 & & & - & ix^2 & & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 & \\
 & & ix^3 & & & - & 1 & \\
\cline{3-7}
 & & = & - & ix^2 & & &
\end{array}$$

iloraz $I(x) = x^2 - i$, reszta $R(x) = -ix^2$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$
\begin{array}{rcccccccl}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) & & : (x^3+i) = x^2 - i \\
-\,x^5 & & & - & ix^2 & & & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 & & \\
 & & ix^3 & & & - & 1 & & \\
\cline{2-7}
 & & = & - & ix^2 & & & &
\end{array}
$$

iloraz $I(x) = x^2 - i$, reszta $R(x) = -ix^2$

Znaleźć iloraz $I(x)$ i resztę $R(x)$ z dzielenia wielomianu $P(x) = x^5 - ix^3 + 1$ przez wielomian $Q(x) = x^3 + i$ w $\mathbb{C}[x]$.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) \quad : (x^3+i) = x^2 - i \\
-\,x^5 & & & - & ix^2 & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 \\
& & ix^3 & & & - & 1 \\
\cline{3-7}
& & = & - & ix^2 & &
\end{array}$$

iloraz $I(x) = x^2 - i$, reszta $R(x) = -ix^2$
wynik w postaci równości $x^5 - ix^3 + 1 = (x^3 + i)(x^2 - i) - ix^2$

Wniosek

Reszta z dzielenia wielomianu $P(x)$ *przez* $x - x_0$ *jest równa* $P(x_0)$*, czyli*

$$P(x) = (x - x_0) \cdot I(x) + P(x_0).$$

Definicja

Liczbę $x_0 \in \mathbb{K}$ *nazywamy pierwiastkiem wielomianu* $P \in \mathbb{K}[x]$*, gdy* $P(x_0) = 0$*.*

Definicja

Liczbę $x_0 \in \mathbb{K}$ *nazywamy pierwiastkiem wielomianu* $P \in \mathbb{K}[x]$*, gdy* $P(x_0) = 0$.

Przykład

Niech $P(x) = x^4 - 1$.
$x_1 = 1$ pierwiastek wielomianu P w $\mathbb{R}$.
$x_2 = i$ pierwiastek wielomianu P w $\mathbb{C}$.

Twierdzenie (Bezout)

Liczba $x_0 \in \mathbb{K}$ *jest pierwiastkiem wielomianu* $P \in \mathbb{K}[x]$ *wtw wielomian* $P(x)$ *jest podzielny przez dwumian* $x - x_0$*, czyli gdy istnieje wielomian* $I \in \mathbb{K}[x]$ *taki, że* $P(x) = (x - x_0) \cdot I(x)$*.*

Twierdzenie (Bezout)

Liczba $x_0 \in \mathbb{K}$ *jest pierwiastkiem wielomianu* $P \in \mathbb{K}[x]$ *wtw wielomian* $P(x)$ *jest podzielny przez dwumian* $x - x_0$*, czyli gdy istnieje wielomian* $I \in \mathbb{K}[x]$ *taki, że* $P(x) = (x - x_0) \cdot I(x)$*.*

$P(x) = (x - x_0) \cdot I(x) + P(x_0)$
$P(x)$ jest podzielny przez $x - x_0$ wtw $P(x_0) = 0$ wtw x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$

Definicja

Niech $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba $x_0 \in \mathbb{K}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{K}[x]$ wtw $P(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, natomiast nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$. Jeśli $k = 1$, to mówimy, że x_0 jest pierwiastkiem pojedynczym.

Definicja

Niech $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba $x_0 \in \mathbb{K}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{K}[x]$ wtw $P(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, natomiast nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$. Jeśli $k = 1$, to mówimy, że x_0 jest pierwiastkiem pojedynczym.

Uwaga

Widać, że liczba $x_0 \in \mathbb{K}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{K}[x]$ wtw istnieje wielomian $W \in \mathbb{K}[x]$ taki, że $P(x) = (x - x_0)^k \cdot W(x)$ i $W(x_0) \neq 0$.

Przykład

Przykład

$P(x) = (x-1)^4(x+3)x^2$

Przykład

$P(x) = (x-1)^4(x+3)x^2$

$x_1 = 1$ pierwiastek czterokrotny

Przykład

$P(x) = (x-1)^4(x+3)x^2$
$x_1 = 1$ pierwiastek czterokrotny
$x_2 = -3$ pierwiastek pojedynczy

Przykład

$P(x) = (x-1)^4(x+3)x^2$

$x_1 = 1$ pierwiastek czterokrotny

$x_2 = -3$ pierwiastek pojedynczy

$x_3 = 0$ pierwiastek dwukrotny

Twierdzenie

Wielomian $P \in \mathbb{K}[x]$ *stopnia* $n \geqslant 0$ *ma co najwyżej* n *pierwiastków w* $\mathbb{K}$.

Twierdzenie

Wielomian $P \in \mathbb{K}[x]$ *stopnia* $n \geqslant 0$ *ma co najwyżej* n *pierwiastków w* $\mathbb{K}$.

Wniosek

Wielomiany $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ *są równe wtw mają one jednakowe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej* x.

Twierdzenie (zasadnicze twierdzenie algebry)

Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Twierdzenie (zasadnicze twierdzenie algebry)

Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Z tego twierdzenia wynikają wnioski:

Twierdzenie (zasadnicze twierdzenie algebry)

Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Z tego twierdzenia wynikają wnioski:

Wniosek

Każdy wielomian zespolony stopnia $n > 0$ *ma dokładnie* n *pierwiastków zespolonych (każdy pierwiastek jest liczony tyle razy, ile wynosi jego krotność).*

Wniosek (o rozkładzie wielomianu zespolonego na czynniki liniowe - iloczyn dwumianów)

Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *będzie wielomianem zespolonym stopnia* $n > 0$. *Jeśli liczby zespolone* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *są jego pierwiastkami o krotnościach odpowiednio* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *i* $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, *to* $P(x)$ *można przedstawić w postaci*

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m}$$

Przykłady

$P(x) = x^3 - 8i$

Przykłady

$P(x) = x^3 - 8i$

ma trzy pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 3 z liczby zespolonej $8i$

Przykłady

$P(x) = x^3 - 8i$

ma trzy pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 3 z liczby zespolonej $8i$

$\sqrt[3]{8i} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$

Przykłady

$P(x) = x^3 - 8i$

ma trzy pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 3 z liczby zespolonej $8i$

$\sqrt[3]{8i} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$

Wobec tego mamy

$P(x) = x^3 - 8i = (x - \sqrt{3} - i)(x + \sqrt{3} - i)(x + 2i)$

Przykłady

$P(x) = x^3 - 8i$

ma trzy pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 3 z liczby zespolonej $8i$

$\sqrt[3]{8i} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$

Wobec tego mamy

$P(x) = x^3 - 8i = (x - \sqrt{3} - i)(x + \sqrt{3} - i)(x + 2i)$

$$P(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)[x^2 - (2i)^2] =$$
$$= (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

Twierdzenie

Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba zespolona z_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ wtw $\overline{z_0}$ jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$.

Twierdzenie

Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba zespolona z_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ wtw $\overline{z_0}$ jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$.

$P(x)$ – wielomian o współczynnikach rzeczywistych
$\overline{a} = a$ dla $a \in \mathbb{R}$ i $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)}$
$P(z_0) = 0$ wtw $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = 0$

pierwiastki nierzeczywiste (z częścią urojoną różną od zera) wielomianu o współczynnikach rzeczywistych muszą występować parami sprzężonymi [i to z zachowaniem krotności]

pierwiastki nierzeczywiste (z częścią urojoną różną od zera) wielomianu o współczynnikach rzeczywistych muszą występować parami sprzężonymi [i to z zachowaniem krotności]

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0})$$

pierwiastki nierzeczywiste (z częścią urojoną różną od zera) wielomianu o współczynnikach rzeczywistych muszą występować parami sprzężonymi [i to z zachowaniem krotności]

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - x\overline{z_0} - z_0x + z_0\overline{z_0}$$

pierwiastki nierzeczywiste (z częścią urojoną różną od zera) wielomianu o współczynnikach rzeczywistych muszą występować parami sprzężonymi [i to z zachowaniem krotności]

$$
\begin{aligned}
(x - z_0)(x - \overline{z_0}) &= x^2 - x\overline{z_0} - z_0 x + z_0\overline{z_0} = \\
&= x^2 - (z_0 + \overline{z_0})x + z_0\overline{z_0}
\end{aligned}
$$

pierwiastki nierzeczywiste (z częścią urojoną różną od zera) wielomianu o współczynnikach rzeczywistych muszą występować parami sprzężonymi [i to z zachowaniem krotności]

$$\begin{aligned}(x-z_0)(x-\overline{z_0}) &= x^2 - x\overline{z_0} - z_0x + z_0\overline{z_0} = \\ &= x^2 - (z_0+\overline{z_0})x + z_0\overline{z_0} = \\ &= x^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)\cdot x + |z_0|^2\end{aligned}$$

pierwiastki nierzeczywiste (z częścią urojoną różną od zera) wielomianu o współczynnikach rzeczywistych muszą występować parami sprzężonymi [i to z zachowaniem krotności]

$$\begin{aligned}(x-z_0)(x-\overline{z_0}) &= x^2 - x\overline{z_0} - z_0x + z_0\overline{z_0} = \\ &= x^2 - (z_0+\overline{z_0})x + z_0\overline{z_0} = \\ &= x^2 - 2\mathsf{Re}(z_0)\cdot x + |z_0|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta =&[-2\mathsf{Re}(z_0)]^2 - 4\cdot 1\cdot |z_0|^2 = \\ =&4[\mathsf{Re}(z_0)]^2 - 4[[\mathsf{Re}(z_0)]^2 + [\mathsf{Im}(z_0)]^2] = \\ =&-4[\mathsf{Im}(z_0)]^2 < 0, \text{bo } \mathsf{Im}(z_0)\neq 0\end{aligned}$$

Wniosek

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przykład

Liczba $1-i$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$P(x)=x^4+x^3-14x^2+26x-20.$$

Wyznaczyć wszystkie pozostałe pierwiastki wielomianu $P(x)$.

Przykład

Liczba $1 - i$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$P(x) = x^4 + x^3 - 14x^2 + 26x - 20.$$

Wyznaczyć wszystkie pozostałe pierwiastki wielomianu $P(x)$.

$P(x)$ - wielomian o współczynnikach rzeczywistych

Przykład

Liczba $1 - i$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$P(x) = x^4 + x^3 - 14x^2 + 26x - 20.$$

Wyznaczyć wszystkie pozostałe pierwiastki wielomianu $P(x)$.

$P(x)$ - wielomian o współczynnikach rzeczywistych
$x_1 = 1 - i$ jest pierwiastkiem $P(x)$

Przykład

Liczba $1 - i$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$P(x) = x^4 + x^3 - 14x^2 + 26x - 20.$$

Wyznaczyć wszystkie pozostałe pierwiastki wielomianu $P(x)$.

$P(x)$ - wielomian o współczynnikach rzeczywistych
$x_1 = 1 - i$ jest pierwiastkiem $P(x)$
$x_2 = \overline{x_1} = 1 + i$ też jest pierwiastkiem $P(x)$

Przykład

Liczba $1 - i$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$P(x) = x^4 + x^3 - 14x^2 + 26x - 20.$$

Wyznaczyć wszystkie pozostałe pierwiastki wielomianu $P(x)$.

$P(x)$ - wielomian o współczynnikach rzeczywistych
$x_1 = 1 - i$ jest pierwiastkiem $P(x)$
$x_2 = \overline{x_1} = 1 + i$ też jest pierwiastkiem $P(x)$
Dlatego $P(x)$ jest podzielny przez $x - x_1$ i $x - x_2$ oraz przez ich iloczyn $(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)(x - \overline{x_1}) = x^2 - 2x + 2$

Przykład dokończenie

$$(x^4 \quad +x^3 \quad -14x^2 \quad +26x \quad -20) \quad : (x^2-2x+2)$$

Przykład dokończenie

$$(x^4 \quad +x^3 \quad -14x^2 \quad +26x \quad -20) \quad : (x^2 - 2x + 2) = x^2$$

Przykład dokończenie

$$\begin{array}{llllll} (x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2)=x^2 \\ -\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \end{array}$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2)=x^2 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 &
\end{array}
$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & : (x^2-2x+2) = x^2+3x \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 &
\end{array}
$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccc}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2) = x^2+3x \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & &
\end{array}
$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2)=x^2+3x \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 &
\end{array}
$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2) = x^2+3x-10 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 &
\end{array}
$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2) = x^2+3x-10 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 & \\
 & & 10x^2 & -20x & +20 &
\end{array}
$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2)=x^2+3x-10 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 & \\
 & & 10x^2 & -20x & +20 & \\
\cline{3-5}
 & & = & = & = &
\end{array}
$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2) = x^2+3x-10 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 & \\
 & & 10x^2 & -20x & +20 & \\
\cline{3-5}
 & & = & = & = &
\end{array}
$$

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + 3x - 10)$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2) = x^2+3x-10 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 & \\
 & & 10x^2 & -20x & +20 & \\
\cline{3-5}
 & & = & = & = &
\end{array}
$$

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + 3x - 10)$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$, stąd $\delta = 7$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2) = x^2+3x-10 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 & \\
 & & 10x^2 & -20x & +20 & \\
\cline{3-5}
 & & = & = & = &
\end{array}
$$

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + 3x - 10)$$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$, stąd $\delta = 7$

$$x_3 = \frac{-3-7}{2} = -5,\ x_4 \frac{-3+7}{2} = 2$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2) = x^2+3x-10 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 & \\
 & & 10x^2 & -20x & +20 & \\
\cline{3-5}
 & & = & = & = &
\end{array}
$$

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x^2+3x-10)$$

$$\Delta = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 49, \text{ stąd } \delta = 7$$

$$x_3 = \frac{-3-7}{2} = -5,\ x_4\frac{-3+7}{2} = 2$$

$$
\begin{aligned}
P(x) =&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = \\
=&(x-(1-i))(x-(1+i))(x+5)(x-2)
\end{aligned}
$$

Przykład dokończenie

$$
\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +x^3 & -14x^2 & +26x & -20) & :(x^2-2x+2) = x^2+3x-10 \\
-\,x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
= & 3x^3 & -16x^2 & +26x & -20 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -6x & & \\
\cline{2-5}
 & = & -10x^2 & +20x & -20 & \\
 & & 10x^2 & -20x & +20 & \\
\cline{3-5}
 & & = & = & = &
\end{array}
$$

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + 3x - 10)$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49, \text{ stąd } \delta = 7$$

$$x_3 = \frac{-3-7}{2} = -5,\ x_4 \frac{-3+7}{2} = 2$$

$$
\begin{aligned}
P(x) =& (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = \\
=& (x - (1-i))(x - (1+i))(x+5)(x-2)
\end{aligned}
$$

$1 - i, 1 + i, -5, 2$ pierwiastki wielomianu $P(x)$

Wniosek (o rozkładzie wielomianu rzeczywistego na rzeczywiste czynniki nierozkładalne)

Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *będzie wielomianem rzeczywistym stopnia* $n > 0$. *Niech* $x_1, \ldots, x_r$ *będą jego rzeczywistymi pierwiastkami o krotnościach odpowiednio* $k_1, \ldots, k_r$ *i niech* $z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_s, \overline{z_s}$ *(gdzie* $\mathrm{Im}(z_j) \neq 0$ *dla* $j = 1, \ldots, s$*) będą jego zespolonymi pierwiastkami o krotnościach odpowiednio* $l_1, \ldots, l_s$. *Jeśli* $k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_s) = n$, *to*

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{k_1} \cdots (x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

gdzie $p_j = -2\mathrm{Re}(z_j)$, $q_j = |z_j|^2$ *dla* $j = 1, \ldots, s$.

Przykład 1

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Przykład 1

$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$

Przykład 1

$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ w $\mathbb{R}[x]$
$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$

Przykład 1

$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ w $\mathbb{R}[x]$
$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$ w $\mathbb{C}[x]$

Przykład 2

$x^4 + 16$

Przykład 2

$x^4 + 16$

ma on cztery pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 4 z liczby zespolonej -16

Przykład 2

$x^4 + 16$

ma on cztery pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 4 z liczby zespolonej -16

$w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$w_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
$w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Przykład 2

$x^4 + 16$

ma on cztery pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 4 z liczby zespolonej -16

$w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$w_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_1}$
$w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Przykład 2

$x^4 + 16$

ma on cztery pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 4 z liczby zespolonej -16

$w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$w_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_1}$
$w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_0}$

Przykład 2

$x^4 + 16$

ma on cztery pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 4 z liczby zespolonej -16

$w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$w_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_1}$

$w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_0}$

$(x - w_0)(x - w_3) = (x - w_0)(x - \overline{w_0}) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$

Przykład 2

$x^4 + 16$

ma on cztery pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 4 z liczby zespolonej -16

$w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$w_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_1}$

$w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_0}$

$(x - w_0)(x - w_3) = (x - w_0)(x - \overline{w_0}) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$

$(x - w_1)(x - w_2) = (x - w_1)(x - \overline{w_1}) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$

Przykład 2

$x^4 + 16$

ma on cztery pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 4 z liczby zespolonej -16

$w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$w_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_1}$

$w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{w_0}$

$(x - w_0)(x - w_3) = (x - w_0)(x - \overline{w_0}) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$

$(x - w_1)(x - w_2) = (x - w_1)(x - \overline{w_1}) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4$

$x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$

Przykład 2

x^4+16

ma on cztery pierwiastki zespolone, są to pierwiastki st. 4 z liczby zespolonej -16

$w_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$w_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$w_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=\overline{w_1}$

$w_3=\sqrt{2}-i\sqrt{2}=\overline{w_0}$

$(x-w_0)(x-w_3)=(x-w_0)(x-\overline{w_0})=x^2-2\sqrt{2}x+4$

$(x-w_1)(x-w_2)=(x-w_1)(x-\overline{w_1})=x^2+2\sqrt{2}x+4$

$x^4+16=(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$

Można też tak

$$\begin{aligned} x^4+16 &= (x^4+8x^2+16)-8x^2=(x^2+4)^2-\left(2\sqrt{2}x\right)^2= \\ &= \left(x^2+4-2\sqrt{2}x\right)\left(x^2+4+2\sqrt{2}x\right)= \\ &= \left(x^2-2\sqrt{2}x+4\right)\left(x^2+2\sqrt{2}x+4\right) \end{aligned}$$

Twierdzenie (o pierwiastkach całkowitych i wymiernych wielomianu)

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *będzie wielomianem stopnia* $n > 0$ *o współczynnikach całkowitych. Jeżeli liczba całkowita* $p \neq 0$ *jest pierwiastkiem wielomianu* W*, to* p *jest dzielnikiem wyrazu wolnego* a_0*. Jeżeli liczba wymierna* $\frac{p}{q}$ *(gdzie* p *i* q *nie mają wspólnych dzielników większych od* 1*) jest pierwiastkiem wielomianu* W*, to* p *dzieli wyraz wolny* a_0*, a* q *dzieli współczynnik* a_n*.*