Jeśli n jest liczbą naturalną, to n-tą potęgę liczby zespolonej z definiujemy rekurencyjnie przyjmując, że

$$\begin{aligned} z^1 &= z \\ z^{n+1} &= z^n z \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dodatkowo, jeśli $z \neq 0$, to przyjmujemy, że $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

Ze wzoru na mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej otrzymujemy

Wniosek

Jeśli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *to*

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) \text{ \textit{dla} } n \in \mathbb{N}$$

Ze wzoru na mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej otrzymujemy

Wniosek

Jeśli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *to*

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Zakładając, że $|z| = 1$, otrzymujemy

Ze wzoru na mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej otrzymujemy

Wniosek

Jeśli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*, to*

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) \textit{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Zakładając, że $|z| = 1$, otrzymujemy

Wniosek (wzór Moivre'a)

Dla każdej liczby rzeczywistej φ jest

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Jeżeli k jest liczbą całkowitą, to

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

Przykład

Obliczyć $(1+i)^{15}$.

Przykład

Obliczyć $(1+i)^{15}$. Liczbę $z = 1 + i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $a = 1, b = 1$, więc $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Zatem $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dlatego $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ to postać trygonometryczna.

Przykład

Obliczyć $(1+i)^{15}$. Liczbę $z = 1+i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $a=1, b=1$, więc $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Zatem $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dlatego $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ to postać trygonometryczna. Zatem

$$z^{15} = \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left[\cos\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Przykład

Obliczyć $(1+i)^{15}$. Liczbę $z = 1+i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $a = 1, b = 1$, więc $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Zatem $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dlatego $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ to postać trygonometryczna. Zatem

$$
\begin{aligned}
z^{15} &= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left[\cos\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right] = \\
&= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{15}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

Przykład

Obliczyć $(1+i)^{15}$. Liczbę $z = 1+i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $a = 1, b = 1$, więc $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Zatem $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dlatego $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ to postać trygonometryczna. Zatem

$$
\begin{aligned}
z^{15} &= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left[\cos\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right] = \\
&= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{15}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right) = \\
&= 2^{\frac{1}{2}\cdot 15}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi\right)\right)
\end{aligned}
$$

Przykład

Obliczyć $(1+i)^{15}$. Liczbę $z = 1 + i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $a = 1, b = 1$, więc $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Zatem $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dlatego $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ to postać trygonometryczna. Zatem

$$\begin{aligned} z^{15} &= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left[\cos\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right] = \\ &= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{15}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right) = \\ &= 2^{\frac{1}{2}\cdot 15}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi\right)\right) = \\ &= 2^{\frac{15}{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Przykład

Obliczyć $(1+i)^{15}$. Liczbę $z = 1+i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $a = 1, b = 1$, więc $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Zatem $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dlatego $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ to postać trygonometryczna. Zatem

$$\begin{aligned}
z^{15} &= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left[\cos\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(15\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right] = \\
&= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{15}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right) = \\
&= 2^{\frac{1}{2}\cdot 15}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi\right)\right) = \\
&= 2^{\frac{15}{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2^7\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \\
&= 2^7\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = 2^7(1-i).
\end{aligned}$$

Definicja

Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczbę zespoloną w nazywamy pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej z, gdy $w^n = z$. Zbiór pierwiastków n-tego stopnia z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Definicja

Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczbę zespoloną w nazywamy pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej z, gdy $w^n = z$. Zbiór pierwiastków n-tego stopnia z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Tradycyjnie $\sqrt[2]{z} \overset{\text{ozn}}{=} \sqrt{z}$.

Nietrudno zauważyć, ze $\sqrt[1]{z} = \{z\}$, $\sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Przykłady

1) Wiemy, że równanie $w^2 = 9$, ma tylko dwa rozwiązania $w = \pm 3$. Dlatego $\sqrt{9} = \{-3, 3\}$.

Przykłady

1) Wiemy, że równanie $w^2 = 9$, ma tylko dwa rozwiązania $w = \pm 3$. Dlatego $\sqrt{9} = \{-3, 3\}$.

2) Ponieważ

$$\begin{aligned} w^2 = -4 \Leftrightarrow w^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 4(-1) = 0 \Leftrightarrow w^2 - 4i^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w^2 - (2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (w - 2i)(w + 2i) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w = 2i \text{ lub } w = -2i \end{aligned}$$

więc $\sqrt{-4} = \{2i, -2i\}$.

Przykłady

1) Wiemy, że równanie $w^2 = 9$, ma tylko dwa rozwiązania $w = \pm 3$. Dlatego $\sqrt{9} = \{-3, 3\}$.

2) Ponieważ

$$\begin{aligned} w^2 = -4 \Leftrightarrow w^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow w^2 - 4(-1) = 0 \Leftrightarrow w^2 - 4i^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w^2 - (2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (w - 2i)(w + 2i) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w = 2i \text{ lub } w = -2i \end{aligned}$$

więc $\sqrt{-4} = \{2i, -2i\}$.

3) Zauważmy, że $\sqrt[4]{81} = \{-3, 3, -3i, 3i\}$.

Twierdzenie

Każda liczba zespolona $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ *ma dokładnie* n *różnych pierwiastków* n*-tego stopnia:*

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\},$$

w którym

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *a* $\sqrt[n]{|z|}$ *jest pierwiastkiem arytmetycznym.*

Szkic dowodu

Niech $w \in \sqrt[n]{z}$ oraz $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Szkic dowodu

Niech $w \in \sqrt[n]{z}$ oraz $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Wówczas $w^n = z$ i w konsekwencji

Szkic dowodu

Niech $w \in \sqrt[n]{z}$ oraz $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Wówczas $w^n = z$ i w konsekwencji

$|w|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Szkic dowodu

Niech $w \in \sqrt[n]{z}$ oraz $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Wówczas $w^n = z$ i w konsekwencji

$|w|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|w|^n = |z|$ i $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Szkic dowodu

Niech $w \in \sqrt[n]{z}$ oraz $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Wówczas $w^n = z$ i w konsekwencji

$|w|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|w|^n = |z|$ i $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

$|w| = \sqrt[n]{|z|}$ i $\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ dla $k \in \mathbb{Z}$

Szkic dowodu

Niech $w \in \sqrt[n]{z}$ oraz $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Wówczas $w^n = z$ i w konsekwencji

$|w|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|w|^n = |z|$ i $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

$|w| = \sqrt[n]{|z|}$ i $\alpha = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$ dla $k \in \mathbb{Z}$

$w \in \left\{ w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Szkic dowodu

Niech $w \in \sqrt[n]{z}$ oraz $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Wówczas $w^n = z$ i w konsekwencji

$|w|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|w|^n = |z|$ i $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

$|w| = \sqrt[n]{|z|}$ i $\alpha = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$ dla $k \in \mathbb{Z}$

$w \in \left\{ w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Podstawiając kolejno $k = 0, 1, \ldots, n-1$ otrzymujemy n różnych liczb zespolonych, a podstawienie za k innych liczb całkowitych nie daje już nowych wartości

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.

Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej.

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej.
Ponieważ $a = 0, b = 8$, więc $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$. Zatem $\cos\varphi = \frac{0}{8} = 0$, $\sin\varphi = \frac{8}{8} = 1$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej.
Ponieważ $a = 0, b = 8$, więc $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$. Zatem $\cos\varphi = \frac{0}{8} = 0$, $\sin\varphi = \frac{8}{8} = 1$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dlatego $z = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ to postać trygonometryczna.

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej.
Ponieważ $a = 0, b = 8$, więc $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$. Zatem $\cos\varphi = \frac{0}{8} = 0$, $\sin\varphi = \frac{8}{8} = 1$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dlatego $z = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ to postać trygonometryczna.
Korzystając z postaci pierwiastków mamy

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \text{ gdzie } k = 0, 1, 2.$$

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej.
Ponieważ $a = 0, b = 8$, więc $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$. Zatem $\cos\varphi = \frac{0}{8} = 0$, $\sin\varphi = \frac{8}{8} = 1$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dlatego $z = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ to postać trygonometryczna.
Korzystając z postaci pierwiastków mamy

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \text{ gdzie } k = 0, 1, 2.$$

Zatem wstawiając za k liczby $0, 1, 2$ odpowiednio otrzymujemy

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $a = 0, b = 8$, więc $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$. Zatem $\cos\varphi = \frac{0}{8} = 0$, $\sin\varphi = \frac{8}{8} = 1$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dlatego $z = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ to postać trygonometryczna.
Korzystając z postaci pierwiastków mamy

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \text{ gdzie } k = 0, 1, 2.$$

Zatem wstawiając za k liczby $0, 1, 2$ odpowiednio otrzymujemy

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) =$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej.
Ponieważ $a = 0, b = 8$, więc $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$. Zatem $\cos\varphi = \frac{0}{8} = 0$, $\sin\varphi = \frac{8}{8} = 1$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dlatego $z = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ to postać trygonometryczna.
Korzystając z postaci pierwiastków mamy

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \text{ gdzie } k = 0, 1, 2.$$

Zatem wstawiając za k liczby $0, 1, 2$ odpowiednio otrzymujemy

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i,$$

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej.
Ponieważ $a = 0, b = 8$, więc $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$. Zatem $\cos\varphi = \frac{0}{8} = 0$, $\sin\varphi = \frac{8}{8} = 1$, a stąd $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dlatego $z = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ to postać trygonometryczna.
Korzystając z postaci pierwiastków mamy

$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \text{ gdzie } k = 0, 1, 2.$$

Zatem wstawiając za k liczby $0, 1, 2$ odpowiednio otrzymujemy

$w_0 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) =$
$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$
$w_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right) =$
$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i,$
$w_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right) =$
$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 + i(-1)) = -2i.$

Przykład

Wyznaczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Liczbę $z = 8i = 0 + 8i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej.
Dlatego $z = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ to postać trygonometryczna.
Korzystając z postaci pierwiastków mamy

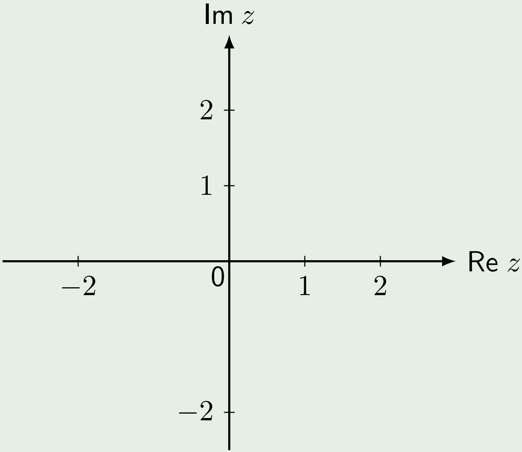
$$w_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\ \text{gdzie } k = 0, 1, 2.$$

Zatem wstawiając za k liczby $0, 1, 2$ odpowiednio otrzymujemy

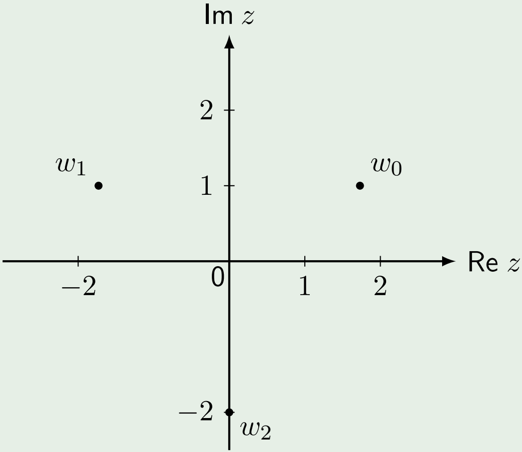
$w_0 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) =$
$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$
$w_1 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right) =$
$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i,$
$w_2 = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right) =$
$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 + i(-1)) = -2i.$
To oznacza, że $\sqrt[3]{8i} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$.

Przykład - jego interpretacja geometryczna

Przykład - jego interpretacja geometryczna

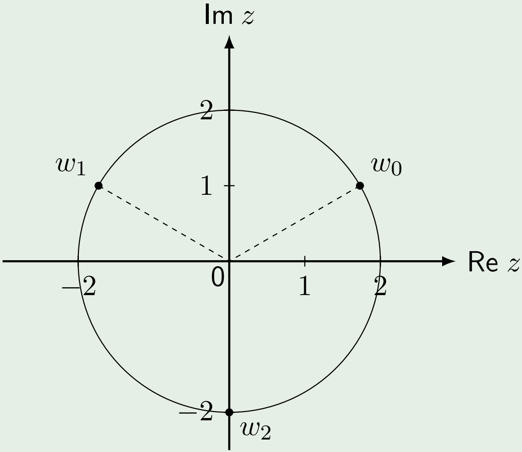


Przykład - jego interpretacja geometryczna



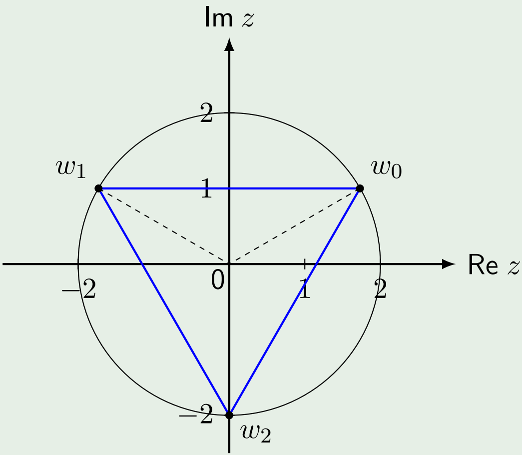
$$w_0 = \sqrt{3} + i,\ w_1 = -\sqrt{3} + i,\ w_2 = -2i$$

Przykład - jego interpretacja geometryczna



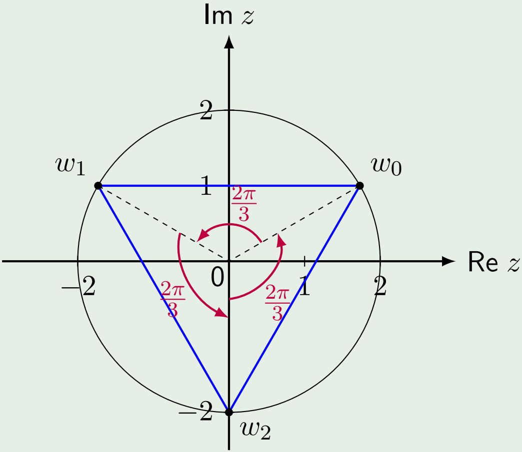
$$w_0 = \sqrt{3} + i,\ w_1 = -\sqrt{3} + i,\ w_2 = -2i$$

Przykład - jego interpretacja geometryczna



$$w_0 = \sqrt{3} + i,\ w_1 = -\sqrt{3} + i,\ w_2 = -2i$$

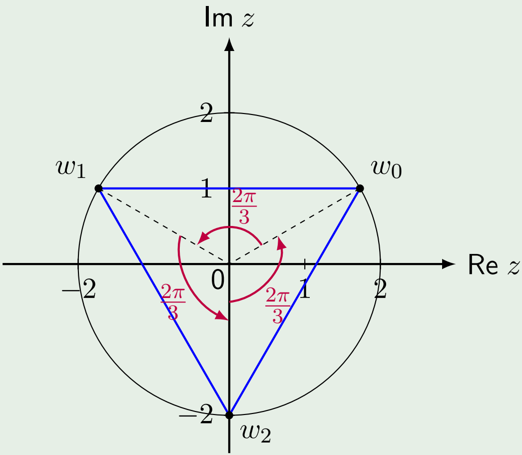
Przykład - jego interpretacja geometryczna



$$w_0 = \sqrt{3} + i,\ w_1 = -\sqrt{3} + i,\ w_2 = -2i$$

Przykład - jego interpretacja geometryczna

Geometrycznie pierwiastki stopnia trzeciego z liczby zespolonej $8i$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 2$ i środku w początku współrzędnych.



$$w_0 = \sqrt{3} + i,\ w_1 = -\sqrt{3} + i,\ w_2 = -2i$$

Interpretacja geometryczna

Na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ stopnia $n \geqslant 3$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$ i środku w początku układu współrzędnych.

Interpretacja geometryczna

Na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ stopnia $n \geqslant 3$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$ i środku w początku układu współrzędnych. Równoważnie pierwiastki $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ stopnia $n \geqslant 3$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ leżą na okręgu o promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$ i środku w początku układu współrzędnych oraz dzielą ten okrąg na n równych części.

W naszych rozważaniach często pojawiać się będą pierwiastki stopnia drugiego z liczby zespolonej. Dlatego warto zauważyć, że dla liczby zespolonej $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mamy $\sqrt{z} = \{w_0, w_1\}$, gdzie liczby w_0, w_1 różnią się tylko znakiem, bo

$w_0 = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$

$w_1 = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{2}\right) = \sqrt{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right] =$
$= \sqrt{|z|}\left(-\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = -w_0.$

W naszych rozważaniach często pojawiać się będą pierwiastki stopnia drugiego z liczby zespolonej. Dlatego warto zauważyć, że dla liczby zespolonej $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mamy $\sqrt{z} = \{w_0, w_1\}$, gdzie liczby w_0, w_1 różnią się tylko znakiem, bo

$$w_0 = \sqrt{|z|}\left(\cos\tfrac{\varphi}{2} + i\sin\tfrac{\varphi}{2}\right),$$

$$w_1 = \sqrt{|z|}\left(\cos\tfrac{\varphi+2\pi}{2} + i\sin\tfrac{\varphi+2\pi}{2}\right) = \sqrt{|z|}\left[\cos\left(\tfrac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}+\pi\right)\right] =$$
$$= \sqrt{|z|}\left(-\cos\tfrac{\varphi}{2} - i\sin\tfrac{\varphi}{2}\right) = -w_0.$$

Przykład

Pierwiastkami stopnia drugiego z liczby $z = 4i = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ są liczby:

$$w_0 = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$w_1 = 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

liczba Eulera oraz postać wykładnicza

Liczbę Eulera określa się następująco: $e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Można pokazać, że liczba e jest liczbą niewymierną oraz $e = 2{,}718281\ldots \approx 2{,}72$.

liczba Eulera oraz postać wykładnicza

Liczbę Eulera określa się następująco: $e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
Można pokazać, że liczba e jest liczbą niewymierną oraz $e = 2{,}718281\ldots \approx 2{,}72$.

Wprowadzamy nowe oznaczenie dla liczby zespolonej o module równym 1.

$$\cos\varphi + i\sin\varphi \overset{\text{ozn}}{=} e^{i\varphi}, \text{ gdzie } \varphi \in \mathbb{R}$$

liczba Eulera oraz postać wykładnicza

Liczbę Eulera określa się następująco: $e \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
Można pokazać, że liczba e jest liczbą niewymierną oraz
$e = 2{,}718281\ldots \approx 2{,}72$.

Wprowadzamy nowe oznaczenie dla liczby zespolonej o module równym 1.

$$\cos\varphi + i\sin\varphi \overset{\text{ozn}}{=} e^{i\varphi}, \text{ gdzie } \varphi \in \mathbb{R}$$

Wówczas postać trygonometryczną $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ można zamienić na tzw. *postać wykładniczą* $z = |z|e^{i\varphi}$.

liczba Eulera oraz postać wykładnicza

Liczbę Eulera określa się następująco: $e \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
Można pokazać, że liczba e jest liczbą niewymierną oraz $e = 2{,}718281\ldots \approx 2{,}72$.

Wprowadzamy nowe oznaczenie dla liczby zespolonej o module równym 1.

$$\cos\varphi + i\sin\varphi \overset{\text{ozn}}{=} e^{i\varphi}, \text{ gdzie } \varphi \in \mathbb{R}$$

Wówczas postać trygonometryczną $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ można zamienić na tzw. *postać wykładniczą* $z = |z|e^{i\varphi}$.

Przykład

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Warto zauważyć, że

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i0 = -1.$$

Stąd mamy, wg niektórych, najpiękniejszy wzór matematyki

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Poznane wcześniej wzory dotyczące mnożenia, dzielenia, potęgowania i pierwiastkowania liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej można krótko zapisać przy użyciu ich postaci wykładniczej. A zatem jeśli $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$, $z = |z|e^{i\varphi}$, to

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
- $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$
- $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ wzór Moivre'a
- $w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ dla $k = 0, 1, \dots, n-1$

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(*) \qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(*)\qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad\qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to równanie $(*)$ ma dwa rozwiązania (mogą być równe):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad\qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\,.$$

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(*) \qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad\qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to równanie $(*)$ ma dwa rozwiązania (mogą być równe):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad\qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie $(*)$ nie ma rozwiązań.

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(**) \qquad az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, z \in \mathbb{C}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(**) \qquad az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, z \in \mathbb{C}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

Równanie $(**)$ ma dwa rozwiązania (mogą być równe):

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie $\delta^2 = \Delta$, czyli δ jest jednym z dwóch pierwiastków stopnia drugiego z liczby zespolonej Δ.

Rzeczywiście

$az^2 + bz + c =$

Rzeczywiście

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)$$

Rzeczywiście

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Rzeczywiście

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Rzeczywiście

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$
$$= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right)$$

Rzeczywiście

$$az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right) = \\ &= a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right) = \\ &= a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

Zatem liczby $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ są rozwiązaniami równania $(**)$.

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(**) \qquad az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, z \in \mathbb{C}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

Równanie $(**)$ ma dwa rozwiązania (mogą być równe):

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

gdzie $\delta^2 = \Delta$, czyli δ jest jednym z dwóch pierwiastków stopnia drugiego z liczby zespolonej Δ.

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(**) \qquad az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, z \in \mathbb{C}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

Równanie $(**)$ ma dwa rozwiązania (mogą być równe):

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

gdzie $\delta^2 = \Delta$, czyli δ jest jednym z dwóch pierwiastków stopnia drugiego z liczby zespolonej Δ.

W szczególności, jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, to

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(**) \qquad az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, z \in \mathbb{C}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

Równanie $(**)$ ma dwa rozwiązania (mogą być równe):

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie $\delta^2 = \Delta$, czyli δ jest jednym z dwóch pierwiastków stopnia drugiego z liczby zespolonej Δ.

W szczególności, jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, to

- jeśli $\Delta \geqslant 0$, to równanie $(**)$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste (mogą być równe),

Rozważmy równanie kwadratowe

$$(**) \qquad az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, z \in \mathbb{C}.$$

Niech $\Delta = b^2 - 4ac$.

Równanie $(**)$ ma dwa rozwiązania (mogą być równe):

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie $\delta^2 = \Delta$, czyli δ jest jednym z dwóch pierwiastków stopnia drugiego z liczby zespolonej Δ.

W szczególności, jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, to

- jeśli $\Delta \geqslant 0$, to równanie $(**)$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste (mogą być równe),
- jeśli $\Delta < 0$, to równanie $(**)$ ma dwa rozwiązania zespolone sprzężone.

Przykład

Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równanie $z^2 + 4z + 5 = 0$.

Przykład

Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równanie $z^2 + 4z + 5 = 0$.

Ponieważ $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$, a jednym z pierwiastków stopnia drugiego z liczby $\Delta = -4 = 4i^2$ jest liczba $\delta = 2i$, więc rozwiązaniami równania są liczby

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i,$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i.$$

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry)

Równanie $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$*, gdzie* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0$*, ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze* $\mathbb{C}$*.*

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry)

Równanie $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$*, gdzie* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0$*, ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze* $\mathbb{C}$*.*

Wniosek

Równanie $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$*, gdzie* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0$*, ma w zbiorze* $\mathbb{C}$ n *rozwiązań (mogą być równe, tzn. każde rozwiązanie liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).*

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry)

Równanie $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$*, gdzie* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0$*, ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze* $\mathbb{C}$*.*

Wniosek

Równanie $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$*, gdzie* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0$*, ma w zbiorze* $\mathbb{C}$ n *rozwiązań (mogą być równe, tzn. każde rozwiązanie liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).*

Przykład

Rozwiązaniami równania $z^n - 1 = 0$ są pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej 1.