Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, jeżeli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, jeżeli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Przykład 1.

$$(\blacktriangle)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases} \qquad (\blacktriangle\blacktriangle)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, jeżeli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Przykład 1.

$$(\blacktriangle)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases} \qquad (\blacktriangle\blacktriangle)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Układy $(\blacktriangle)$, $(\blacktriangle\blacktriangle)$ są równoważne, bo ich jedynym rozwiązaniem jest para liczb $x_1 = 1, x_2 = 2$

Przykład 2.

$$(\square)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(\square\square)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Przykład 2.

$$(\square)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(\square\square)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Układy (□), (□□) są równoważne, bo pierwsze dwa równania w układach (□) i (□□) są takie same, a po dodaniu ich stronami, uzyskamy trzecie równanie układu (□).

Rozważmy układ $(*)$, czyli

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Rozważmy układ $(*)$, czyli

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Ze współczynników oraz wyrazów wolnych układu $(*)$ można utworzyć macierz blokową

$$U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

nazywaną macierzą rozszerzoną lub macierzą uzupełnioną układu $(*)$.

Omówimy teraz tzw. operacje dopuszczalne na układzie $(*)$, operacje, za pomocą których układ sprowadza się do postaci, z której łatwo odczytać rozwiązania układu lub stwierdzić brak rozwiązań tego ukladu.

Omówimy teraz tzw. operacje dopuszczalne na układzie $(*)$, operacje, za pomocą których układ sprowadza się do postaci, z której łatwo odczytać rozwiązania układu lub stwierdzić brak rozwiązań tego ukladu. Mama pięć typów operacji dopuszczalnych na układzie:

Omówimy teraz tzw. operacje dopuszczalne na układzie $(*)$, operacje, za pomocą których układ sprowadza się do postaci, z której łatwo odczytać rozwiązania układu lub stwierdzić brak rozwiązań tego ukladu. Mama pięć typów operacji dopuszczalnych na układzie:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych równań układu $(*)$ [symbolicznie $r_i \leftrightarrow r_j$];

Omówimy teraz tzw. operacje dopuszczalne na układzie $(*)$, operacje, za pomocą których układ sprowadza się do postaci, z której łatwo odczytać rozwiązania układu lub stwierdzić brak rozwiązań tego ukladu. Mama pięć typów operacji dopuszczalnych na układzie:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych równań układu $(*)$ [symbolicznie $r_i \leftrightarrow r_j$];
2. pomnożenie obu stron dowolnego równania układu $(*)$ przez liczbę różną od zera [symbolicznie cr_i, gdzie $c \neq 0$];

Omówimy teraz tzw. operacje dopuszczalne na układzie $(*)$, operacje, za pomocą których układ sprowadza się do postaci, z której łatwo odczytać rozwiązania układu lub stwierdzić brak rozwiązań tego ukladu. Mama pięć typów operacji dopuszczalnych na układzie:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych równań układu $(*)$ [symbolicznie $r_i \leftrightarrow r_j$];
2. pomnożenie obu stron dowolnego równania układu $(*)$ przez liczbę różną od zera [symbolicznie cr_i, gdzie $c \neq 0$];
3. dodanie do dowolnego równania układu $(*)$ innego równania układu $(*)$ pomnożonego (obustronnie) przez dowolną liczbę [symbolicznie $r_i + dr_j$];

Omówimy teraz tzw. operacje dopuszczalne na układzie $(*)$, operacje, za pomocą których układ sprowadza się do postaci, z której łatwo odczytać rozwiązania układu lub stwierdzić brak rozwiązań tego ukladu. Mama pięć typów operacji dopuszczalnych na układzie:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych równań układu $(*)$ [symbolicznie $r_i \leftrightarrow r_j$];
2. pomnożenie obu stron dowolnego równania układu $(*)$ przez liczbę różną od zera [symbolicznie cr_i, gdzie $c \neq 0$];
3. dodanie do dowolnego równania układu $(*)$ innego równania układu $(*)$ pomnożonego (obustronnie) przez dowolną liczbę [symbolicznie $r_i + dr_j$];
4. skreślenie równania postaci $0 = 0$ [symbolicznie $\cancel{r_i}$];

Omówimy teraz tzw. operacje dopuszczalne na układzie $(*)$, operacje, za pomocą których układ sprowadza się do postaci, z której łatwo odczytać rozwiązania układu lub stwierdzić brak rozwiązań tego ukladu. Mama pięć typów operacji dopuszczalnych na układzie:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych równań układu $(*)$ [symbolicznie $r_i \leftrightarrow r_j$];
2. pomnożenie obu stron dowolnego równania układu $(*)$ przez liczbę różną od zera [symbolicznie cr_i, gdzie $c \neq 0$];
3. dodanie do dowolnego równania układu $(*)$ innego równania układu $(*)$ pomnożonego (obustronnie) przez dowolną liczbę [symbolicznie $r_i + dr_j$];
4. skreślenie równania postaci $0 = 0$ [symbolicznie $\cancel{r_i}$];
5. zmiana numeracji (kolejności) niewiadomych.

Przykład

Za pomocą operacji dopuszczalnych dany układ równań można sprowadzić do prostszego. Przykładowo mamy

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Przykład

Za pomocą operacji dopuszczalnych dany układ równań można sprowadzić do prostszego. Przykładowo mamy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right. \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 10x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Przykład

Za pomocą operacji dopuszczalnych dany układ równań można sprowadzić do prostszego. Przykładowo mamy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right. \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 10x_3 & = & 3 \end{array}\right. \xrightarrow{r_3+(-2)r_2}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Przykład

Za pomocą operacji dopuszczalnych dany układ równań można sprowadzić do prostszego. Przykładowo mamy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right. \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 10x_3 & = & 3 \end{array}\right. \xrightarrow{r_3+(-2)r_2}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Z postaci trzeciego równania wynika, że układ nie ma rozwiązań.

Przykład

Analogicznie mamy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

Przykład

Analogicznie mamy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}\right. \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 10x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Przykład

Analogicznie mamy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}\right. \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 10x_3 & = & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{r_3+(-2)r_2}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Przykład

Analogicznie mamy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}\right. \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 10x_3 & = & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{r_3+(-2)r_2}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow[\cancel{r_3}]{r_2\cdot(-\frac{1}{2})}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Przykład

Analogicznie mamy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}\right. \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 10x_3 & = & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{r_3+(-2)r_2}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow[\cancel{r_3}]{r_2\cdot(-\frac{1}{2})}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \xrightarrow{r_1+(-1)r_2}$$

$$\to \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & \frac{3}{2}x_3 & = & \frac{3}{2} \\ & & x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Przykład cd.

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & \frac{3}{2}x_3 & = & \frac{3}{2} \\ & & x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Przykład cd.

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & \frac{3}{2}x_3 & = & \frac{3}{2} \\ & & x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Przyjmujemy $x_3 = \alpha$, gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą, i przenosząc wyrażenia z parametrem α na prawe strony otrzymujemy

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \alpha \end{array} \right.$$

Przykład cd.

$$\to \begin{cases} x_1 \qquad\qquad - \frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2} \\ \qquad\quad x_2 - \frac{5}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Przyjmujemy $x_3 = \alpha$, gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą, i przenosząc wyrażenia z parametrem α na prawe strony otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\alpha \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Zatem układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru α, który może mieć dowolną wartość rzeczywistą.

Ponieważ wszystkie informacje o układzie $(*)$ zawarte są w macierzy rozszerzonej tego układu, zamiast wykonywać operacji dopuszczalnych na układzie wygodniej jest wykonywać odpowiednie operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Przedstawionym wcześniej operacjom dopuszczalnym na układzie odpowiadają tzw. operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Operacjami dopuszczalnymi na macierzy rozszerzonej $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ są:

Ponieważ wszystkie informacje o układzie $(*)$ zawarte są w macierzy rozszerzonej tego układu, zamiast wykonywać operacji dopuszczalnych na układzie wygodniej jest wykonywać odpowiednie operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Przedstawionym wcześniej operacjom dopuszczalnym na układzie odpowiadają tzw. operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Operacjami dopuszczalnymi na macierzy rozszerzonej $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right]$ są:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy macierzy U [symbolicznie $w_i \leftrightarrow w_j$];

Ponieważ wszystkie informacje o układzie $(*)$ zawarte są w macierzy rozszerzonej tego układu, zamiast wykonywać operacji dopuszczalnych na układzie wygodniej jest wykonywać odpowiednie operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Przedstawionym wcześniej operacjom dopuszczalnym na układzie odpowiadają tzw. operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Operacjami dopuszczalnymi na macierzy rozszerzonej $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ są:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy macierzy U [symbolicznie $w_i \leftrightarrow w_j$];
2. pomnożenie dowolnego wiersza macierzy U przez liczbę różną od zera [symbolicznie cw_i, gdzie $c \neq 0$];

Ponieważ wszystkie informacje o układzie $(*)$ zawarte są w macierzy rozszerzonej tego układu, zamiast wykonywać operacji dopuszczalnych na układzie wygodniej jest wykonywać odpowiednie operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Przedstawionym wcześniej operacjom dopuszczalnym na układzie odpowiadają tzw. operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Operacjami dopuszczalnymi na macierzy rozszerzonej $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ są:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy macierzy U [symbolicznie $w_i \leftrightarrow w_j$];
2. pomnożenie dowolnego wiersza macierzy U przez liczbę różną od zera [symbolicznie cw_i, gdzie $c \neq 0$];
3. dodanie do dowolnego wiersza macierzy U innego wiersza macierzy U pomnożonego przez dowolną liczbę [symbolicznie $w_i + dw_j$];

Ponieważ wszystkie informacje o układzie $(*)$ zawarte są w macierzy rozszerzonej tego układu, zamiast wykonywać operacji dopuszczalnych na układzie wygodniej jest wykonywać odpowiednie operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Przedstawionym wcześniej operacjom dopuszczalnym na układzie odpowiadają tzw. operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Operacjami dopuszczalnymi na macierzy rozszerzonej $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ są:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy macierzy U [symbolicznie $w_i \leftrightarrow w_j$];
2. pomnożenie dowolnego wiersza macierzy U przez liczbę różną od zera [symbolicznie cw_i, gdzie $c \neq 0$];
3. dodanie do dowolnego wiersza macierzy U innego wiersza macierzy U pomnożonego przez dowolną liczbę [symbolicznie $w_i + dw_j$];
4. skreślenie wiersza macierzy U złożonego z samych zer [symbolicznie $\cancel{w_i}$];

Ponieważ wszystkie informacje o układzie $(*)$ zawarte są w macierzy rozszerzonej tego układu, zamiast wykonywać operacji dopuszczalnych na układzie wygodniej jest wykonywać odpowiednie operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Przedstawionym wcześniej operacjom dopuszczalnym na układzie odpowiadają tzw. operacje dopuszczalne na macierzy rozszerzonej. Operacjami dopuszczalnymi na macierzy rozszerzonej $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ są:

1. zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy macierzy U [symbolicznie $w_i \leftrightarrow w_j$];
2. pomnożenie dowolnego wiersza macierzy U przez liczbę różną od zera [symbolicznie cw_i, gdzie $c \neq 0$];
3. dodanie do dowolnego wiersza macierzy U innego wiersza macierzy U pomnożonego przez dowolną liczbę [symbolicznie $w_i + dw_j$];
4. skreślenie wiersza macierzy U złożonego z samych zer [symbolicznie $\cancel{w_i}$];
5. zamiana miejscami dwóch kolumn macierzy A przy jednoczesnej zamianie niewiadomych [symbolicznie $k_i \leftrightarrow k_j$ przy $x_i \leftrightarrow x_j$].

Łatwo zauważyć, że operacje dopuszczalne na układzie $(*)$ nie zmieniają jego zbioru rozwiązań, a operacje dopuszczalne na macierzy nie zmieniają rzędu macierzy.

Łatwo zauważyć, że operacje dopuszczalne na układzie $(*)$ nie zmieniają jego zbioru rozwiązań, a operacje dopuszczalne na macierzy nie zmieniają rzędu macierzy. Dlatego

Uwaga

Jeśli z macierzy rozszerzonej $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ *układu* $(*)$ *za pomocą operacji dopuszczalnych uzyskamy macierz rozszerzoną* $U' = \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right]$ *układu* $(**)$*, to układy równań* $(*)$ *i* $(**)$ *są równoważne.*

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Dla rozwiązania układu równań $(*)$ wykonujemy następujące kroki.

Krok I. Tworzymy macierz rozszerzoną układu $(*)$

$$U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Dla rozwiązania układu równań $(*)$ wykonujemy następujące kroki.

Krok I. Tworzymy macierz rozszerzoną układu $(*)$

$$U = \left[\ A \mid B\ \right] = \begin{array}{c} \boxed{\text{n i e w i a d o m e}} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & & x_n & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \end{array}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Krok II. Macierz $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ za pomocą operacji dopuszczalnych sprowadzamy do postaci

$$U' = \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & & d_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{2,r+1} & \ldots & c_{2n} & & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{r,r+1} & \ldots & c_{rn} & & d_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & d_{r+1} \end{array}\right]$$

gdzie macierz A' w lewym górnym rogu zawiera macierz jednostkową, $r =$ rz$A' =$ rz$A$, ostatni wiersz może się nie pojawić ($d_{r+1} = 0$) albo wystąpić z elementem $d_{r+1} \neq 0$.

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Krok II. Macierz $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ za pomocą operacji dopuszczalnych sprowadzamy do postaci

$$U' = \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\text{n i e w i a d o m e}} & \multicolumn{3}{c}{\text{p a r a m e t r y}} & \\
x'_1 & x'_2 & & x'_r & x'_{r+1} & & x'_n & \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow &
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & c_{2,r+1} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & c_{r,r+1} & \ldots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{r+1}
\end{array}\right]
\end{array}$$

gdzie macierz A' w lewym górnym rogu zawiera macierz jednostkową, $r = \text{rz} A' = \text{rz} A$, ostatni wiersz może się nie pojawić ($d_{r+1} = 0$) albo wystąpić z elementem $d_{r+1} \neq 0$.

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Krok III. Odczytujemy rozwiązania (dyskusja rozwiązań)

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Krok III. Odczytujemy rozwiązania (dyskusja rozwiązań)

1. jeśli $d_{r+1} \neq 0$, to układ $(*)$ nie ma rozwiązań [jest sprzeczny];

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Krok III. Odczytujemy rozwiązania (dyskusja rozwiązań)

1. jeśli $d_{r+1} \neq 0$, to układ $(*)$ nie ma rozwiązań [jest sprzeczny];
2. jeśli $d_{r+1} = 0$ (ostatni wiersz nie pojawi się) i $r = n$, to układ $(*)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x'_1 = d_1, x'_2 = d_2, \ldots, x'_n = d_n$ [jest oznaczony];

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Krok III. Odczytujemy rozwiązania (dyskusja rozwiązań)

1. jeśli $d_{r+1} \neq 0$, to układ $(*)$ nie ma rozwiązań [jest sprzeczny];
2. jeśli $d_{r+1} = 0$ (ostatni wiersz nie pojawi się) i $r = n$, to układ $(*)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x'_1 = d_1, x'_2 = d_2, \ldots, x'_n = d_n$ [jest oznaczony];
3. jeśli $d_{r+1} = 0$ (ostatni wiersz nie pojawi się) i $r < n$, to układ $(*)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań [jest nieoznaczony], przy czym r niewiadomych $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ odpowiadających kolumnom macierzy jednostkowej zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$ (zwanych parametrami) w następujący sposób

$$\begin{cases} x'_1 = d_1 - c_{1,r+1}x'_{r+1} - \cdots - c_{1n}x'_n \\ x'_2 = d_2 - c_{2,r+1}x'_{r+1} - \cdots - c_{2n}x'_n \\ \vdots \\ x'_r = d_r - c_{r,r+1}x'_{r+1} - \cdots - c_{rn}x'_n \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań liniowych

Metodę tę zilustrujemy przykladami.

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Tworzymy macierz rozszerzoną tego układu

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Tworzymy macierz rozszerzoną tego układu

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_4+2w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Tworzymy macierz rozszerzoną tego układu

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_4+2w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[w_2 \cdot \frac{1}{2}]{w_4+(-1)w_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Tworzymy macierz rozszerzoną tego układu

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_4+2w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[w_2 \cdot \frac{1}{2}]{w_4+(-1)w_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\cancel{w_4}]{w_3+(-3)w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_2\cdot\frac{1}{2}]{w_4+(-1)w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\cancel{w_4}]{w_3+(-3)w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_2\cdot\frac{1}{2}]{w_4+(-1)w_3}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow[\cancel{w_4}]{w_3+(-3)w_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3\cdot\frac{2}{9}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_2\cdot\frac{1}{2}]{w_4+(-1)w_3} \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\cancel{w_4}]{w_3+(-3)w_2} \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3\cdot\frac{2}{9}} \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right] \xrightarrow[w_1+(-2)w_3]{w_2+\frac{1}{2}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$$
\xrightarrow[w_2\cdot\frac{1}{2}]{w_4+(-1)w_3}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\
0 & 3 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow[\cancel{w_4}]{w_3+(-3)w_2}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\
0 & 0 & \frac{9}{2} & 1
\end{array}\right]
\longrightarrow
$$

$$
\xrightarrow{w_3\cdot\frac{2}{9}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{9}
\end{array}\right]
\xrightarrow[w_1+(-2)w_3]{w_2+\frac{1}{2}w_3}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 0 & \frac{5}{9} \\
0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{9}
\end{array}\right]
\longrightarrow
$$

$$
\xrightarrow[w_1+(-1)w_2]{}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & -\frac{5}{9} \\
0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{9}
\end{array}\right]
$$

$$\xrightarrow[w_2\cdot\frac{1}{2}]{w_4+(-1)w_3}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow[\cancel{w_4}]{w_3+(-3)w_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3\cdot\frac{2}{9}}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right]\xrightarrow[w_1+(-2)w_3]{w_2+\frac{1}{2}w_3}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \xrightarrow[w_1+(-1)w_2]{} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow[w_2\cdot\frac{1}{2}]{w_4+(-1)w_3}\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 3 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow[\cancel{w_4}]{w_3+(-3)w_2}\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3\cdot\frac{2}{9}}\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right]\xrightarrow[w_1+(-2)w_3]{w_2+\frac{1}{2}w_3}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[w_1+(-1)w_2]{}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right] \end{array}$$

Ostatniej macierzy odpowiada układ

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{9}\\ x_2 = \frac{10}{9}\\ x_3 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

którego jedynym rozwiązaniem jest trójka liczb $x_1 = -\frac{5}{9}, x_2 = \frac{10}{9}, x_3 = \frac{2}{9}$.

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & - & u & = & 6 \\ 2x & + & 7y & + & 5z & + & u & = & 17 \\ 2x & + & 2y & & & - & 8u & = & -5 \end{array}\right.$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - u = 6 \\ 2x + 7y + 5z + u = 17 \\ 2x + 2y - 8u = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - u = 6 \\ 2x + 7y + 5z + u = 17 \\ 2x + 2y - 8u = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-2)w_1}$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - u = 6 \\ 2x + 7y + 5z + u = 17 \\ 2x + 2y - 8u = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-2)w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -6 & -17 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - u = 6 \\ 2x + 7y + 5z + u = 17 \\ 2x + 2y - 8u = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-2)w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -6 & -17 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - u = 6 \\ 2x + 7y + 5z + u = 17 \\ 2x + 2y - 8u = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-2)w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -6 & -17 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3\cdot\frac{1}{6}]{k_3\leftrightarrow k_4}$$

Metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - u = 6 \\ 2x + 7y + 5z + u = 17 \\ 2x + 2y - 8u = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-2)w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -6 & -17 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_3 \cdot \frac{1}{6}]{k_3 \leftrightarrow k_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & u & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-2)w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -6 & -17 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_3\cdot\frac{1}{6}]{k_3\leftrightarrow k_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & u & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_2+(-3)w_3]{w_1+w_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-2)w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -6 & -17 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_3\cdot\frac{1}{6}]{k_3\leftrightarrow k_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & u & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_2+(-3)w_3]{w_1+w_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+(-3)w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_3 \cdot \frac{1}{6}]{k_3 \leftrightarrow k_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & u & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_2+(-3)w_3]{w_1+w_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+(-3)w_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & u & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_3 \cdot \frac{1}{6}]{k_3 \leftrightarrow k_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & u & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_2+(-3)w_3]{w_1+w_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+(-3)w_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & u & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} -4 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \end{array}\right] \end{array}$$

Ostatniej macierzy odpowiada układ równań

$$\begin{cases} x - z = -4 \\ y + z = \frac{7}{2} \\ u = \frac{1}{2} \end{cases}$$

z którego wyznaczamy niewiadome x, y, u odpowiadające kolumnom macierzy jednostkowej (niewiadomą z przyjmujemy jako parametr $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$).

Przenosząc wyrażenia z parametrem na prawe strony otrzymujemy rozwiązanie

$$\begin{cases} x = -4 + \alpha, \\ y = \frac{7}{2} - \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha, \\ u = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych

Macierz $\left[\, A' \mid B' \,\right]$ z metody eliminacji Gaussa-Jordana jest postaci

$$\left[\, A' \mid B' \,\right] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\text{n i e w i a d o m e}} & \multicolumn{3}{c}{\text{p a r a m e t r y}} & \\
x'_1 & x'_2 & & x'_r & x'_{r+1} & & x'_n & \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow &
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \ldots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & c_{r,r+1} & \ldots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{r+1}
\end{array}\right]
\end{array}$$

Metoda eliminacji Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych

Macierz $\left[\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right]$ z metody eliminacji Gaussa-Jordana jest postaci

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{ccccccc} \text{niewiadome} & & & & \text{parametry} & & \\ x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_r & x'_{r+1} & \cdots & x'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right] = & \left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1}
\end{array}\right]
\end{array}$$

Układ równań odpowiadający macierzy $[A'|B']$ rozwiązujemy (gdy $d_{r+1} = 0$) metodą wstecznego podstawiania wyznaczając niewiadome odpowiadające kolumnom macierzy trójkątnej górnej.

Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ

$$\begin{cases} & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & = & -6 \end{cases}$$

Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ

$$\begin{cases} & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & = & -6 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ

$$\begin{cases}   2x_2 - 8x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -6 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ

$$\begin{cases} \qquad\qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -6 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3 + 4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right]$$

Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ

$$\begin{cases} & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & = & -6 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3 + 4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}}$$

Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ

$$\begin{cases} & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & = & -6 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3 + 4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right]$$

$$U=[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3+3w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3+3w_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$U=[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3+3w_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3 + 4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 + 3w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3+3w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

$$U=[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -8 & 8\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1\longleftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -8 & 8\\ -4 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3+4w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -8 & 8\\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2\cdot\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4\\ 0 & -3 & 14 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3+3w_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3\cdot\frac{1}{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\\ \qquad\;\; x_2 - 4x_3 = 4\\ \qquad\qquad\quad x_3 = 3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_1 = 29\\ x_2 = 16\\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Twierdzenie (Kroneckera-Capellego)

Układ $(*)$ *ma rozwiązanie wtw rząd macierzy tego układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej tego układu, czyli*

$$\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}U.$$

Przy czym

1. *jeśli* $\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}U = n$ *(rząd macierzy układu* $(*)$ *i jego macierzy rozszerzonej jest równy liczbie niewiadomych), to układ* $(*)$ *ma dokładnie jedno rozwiązanie [jest oznaczony];*
2. *jeśli* $\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}U = r < n$, *to układ* $(*)$ *ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od* $n - r$ *parametrów [jest nieoznaczony].*

Twierdzenie (Kroneckera-Capellego)

Układ $(*)$ *ma rozwiązanie wtw rząd macierzy tego układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej tego układu, czyli*

$$\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}U.$$

Przy czym

1. *jeśli* $\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}U = n$ *(rząd macierzy układu* $(*)$ *i jego macierzy rozszerzonej jest równy liczbie niewiadomych), to układ* $(*)$ *ma dokładnie jedno rozwiązanie [jest oznaczony];*
2. *jeśli* $\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}U = r < n$, *to układ* $(*)$ *ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od* $n - r$ *parametrów [jest nieoznaczony].*

Wniosek

Jeśli $\mathrm{rz}A \neq \mathrm{rz}U$, *to układ* $(*)$ *nie ma rozwiązań [jest sprzeczny].*

	układ równań liniowych			
	dowolny	jednorodny	$m < n$	
			niejednorodny	jednorodny
ilość rozwiązań				

źródło: A. I. Kostrikin, Wstęp do algebry, cz. 1, Podstawy algebry.

	układ równań liniowych			
	dowolny	jednorodny	$m < n$	
			niejednorodny	jednorodny
ilość rozwiązań	$0,\ 1,\ \infty$			

źródło: A. I. Kostrikin, Wstęp do algebry, cz. 1, Podstawy algebry.

	układ równań liniowych			
	dowolny	jednorodny	$m < n$	
			niejednorodny	jednorodny
ilość rozwiązań	$0,\ 1,\ \infty$	$1,\ \infty$		

źródło: A. I. Kostrikin, Wstęp do algebry, cz. 1, Podstawy algebry.

	układ równań liniowych			
	dowolny	jednorodny	$m < n$	
			niejednorodny	jednorodny
ilość rozwiązań	$0,\ 1,\ \infty$	$1,\ \infty$	$0,\ \infty$	

źródło: A. I. Kostrikin, Wstęp do algebry, cz. 1, Podstawy algebry.

	układ równań liniowych			
	dowolny	jednorodny	$m < n$	
			niejednorodny	jednorodny
ilość rozwiązań	$0,\ 1,\ \infty$	$1,\ \infty$	$0,\ \infty$	∞

źródło: A. I. Kostrikin, Wstęp do algebry, cz. 1, Podstawy algebry.

Przykład

Przedyskutować rozwiązalność podanego układu równań liniowych w zależności od parametru a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & & & + & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 3 \\ ax_1 & - & ax_2 & + & x_3 & = & -a \end{array}\right.$$

Przykład

Przedyskutować rozwiązalność podanego układu równań liniowych w zależności od parametru a:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & & & + & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 3 \\ ax_1 & - & ax_2 & + & x_3 & = & -a \end{array} \right.$$

Ponieważ w tym układzie liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ($m = 3 = n$), więc zaczniemy od zbadania dla jakiej wartości a układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie (jest układem Cramera).

Przykład dokończenie

Ponieważ

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix}$$

Przykład dokończenie

Ponieważ

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ 1 & a \\ a & -a \end{matrix}$$

Przykład dokończenie

Ponieważ

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ 1 & a \\ a & -a \end{matrix} =$$

$$= 6a - 4a - 4a^2 + 6a = -4a^2 + 8a = 4a(2-a),$$

Przykład dokończenie

Ponieważ

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ 1 & a \\ a & -a \end{matrix} =$$

$$= 6a - 4a - 4a^2 + 6a = -4a^2 + 8a = 4a(2-a),$$

więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtw
$\det A = 4a(2-a) \neq 0$, czyli $a \neq 0$ i $a \neq 2$.

Przykład dokończenie

Ponieważ

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ 1 & a \\ a & -a \end{matrix} =$$

$$= 6a - 4a - 4a^2 + 6a = -4a^2 + 8a = 4a(2-a),$$

więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtw $\det A = 4a(2-a) \neq 0$, czyli $a \neq 0$ i $a \neq 2$. To oznacza, że dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Przykład dokończenie

Ponieważ

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & a & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ 1 & a \\ a & -a \end{matrix} =$$

$$= 6a - 4a - 4a^2 + 6a = -4a^2 + 8a = 4a(2-a),$$

więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtw $\det A = 4a(2-a) \neq 0$, czyli $a \neq 0$ i $a \neq 2$. To oznacza, że dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zostały do analizy dwa przypadki $a = 0$, $a = 2$, w których skorzystamy z tw. Kroneckera-Capellego.

Przykład dokończenie

Dla $a = 0$ mamy

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Przykład dokończenie

Dla $a = 0$ mamy

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ponieważ $\det A = 0$ oraz $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 \neq 0$, więc rz$A = 2$.

Przykład dokończenie

Dla $a = 0$ mamy

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ponieważ $\det A = 0$ oraz $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 \neq 0$, więc rz$A = 2$.

Macierz U ma niezerowy minor stopnia 3, bo

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{\text{wg } w_3} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(18 - 2) \neq 0.$$

Przykład dokończenie

Dla $a = 0$ mamy

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ponieważ $\det A = 0$ oraz $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 \neq 0$, więc rz$A = 2$.

Macierz U ma niezerowy minor stopnia 3, bo

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{\text{wg } w_3} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(18 - 2) \neq 0.$$

Dlatego rz$U = 3$. To oznacza, że rz$A \neq$ rz$U$. Zatem układ nie ma rozwiązań.

Przykład dokończenie

Dla $a = 2$ mamy $U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right]$

Przykład dokończenie

Dla $a = 2$ mamy $U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Przykład dokończenie

Dla $a=2$ mamy $U=[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2}$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-6)w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & -6 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

Przykład dokończenie

Dla $a = 2$ mamy $U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2}$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-6)w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & -6 & -1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3+(-\frac{1}{2})w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Przykład dokończenie

Dla $a = 2$ mamy $U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-6)w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & -6 & -1 & -8 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3+(-\frac{1}{2})w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Przykład dokończenie

Dla $a = 2$ mamy $U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2}$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-6)w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & -6 & -1 & -8 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow{w_3+(-\frac{1}{2})w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Stąd rz$A = 2 =$ rz$U$.

Przykład dokończenie

Dla $a = 2$ mamy $U = [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2}$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3+(-2)w_1]{w_2+(-6)w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & -6 & -1 & -8 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow{w_3+(-\frac{1}{2})w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Stąd rz$A = 2 =$ rz$U$. Zatem $r = 2 < 3 = n$. Dlatego układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r = 1$ parametru.