Definicja (funkcja wymierna rzeczywista (zespolona))

Niech P *i* Q *będą wielomianami rzeczywistymi (zespolonymi), przy czym* Q *nie jest wielomianem zerowym. Wówczas funkcję postaci* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *nazywamy funkcją wymierną rzeczywistą (zespoloną).*

Definicja (funkcja wymierna rzeczywista (zespolona))

Niech P i Q będą wielomianami rzeczywistymi (zespolonymi), przy czym Q nie jest wielomianem zerowym. Wówczas funkcję postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nazywamy funkcją wymierną rzeczywistą (zespoloną).

Jeśli st$P <$ st$Q$, to mówimy, że funkcja wymierna $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jest właściwa. W przeciwnym przypadku mówimy, że funkcja wymierna $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jest niewłaściwa.

Przykłady

Przykłady

$\dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$ rzeczywista funkcja wymierna niewłaściwa

Przykłady

$\dfrac{x^2-4}{x+1}$ rzeczywista funkcja wymierna niewłaściwa

$\dfrac{x^3+x+7}{x^4+2}$ rzeczywista funkcja wymierna właściwa

Przykłady

$\dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$ rzeczywista funkcja wymierna niewłaściwa

$\dfrac{x^3 + x + 7}{x^4 + 2}$ rzeczywista funkcja wymierna właściwa

$\dfrac{1 + i}{x - i}$ zespolona funkcja wymierna właściwa

Twierdzenie

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Twierdzenie

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Niech I będzie ilorazem, a R – resztą z dzielenia wielomianu P przez Q.

Twierdzenie

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Niech I będzie ilorazem, a R – resztą z dzielenia wielomianu P przez Q. Mamy wówczas

$$P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x) \ \ \text{gdzie st}R < \text{st}Q$$

Twierdzenie

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Niech I będzie ilorazem, a R – resztą z dzielenia wielomianu P przez Q. Mamy wówczas

$$P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x) \;\text{ gdzie st}R < \text{st}Q$$

Po podzieleniu obu stron przez wielomian Q otrzymamy

Twierdzenie

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Niech I będzie ilorazem, a R – resztą z dzielenia wielomianu P przez Q. Mamy wówczas

$$P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x) \ \text{ gdzie st}R < \text{st}Q$$

Po podzieleniu obu stron przez wielomian Q otrzymamy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot I(x) + R(x)}{Q(x)}$$

Twierdzenie

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Niech I będzie ilorazem, a R – resztą z dzielenia wielomianu P przez Q. Mamy wówczas

$$P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x) \ \text{ gdzie st}R < \text{st}Q$$

Po podzieleniu obu stron przez wielomian Q otrzymamy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot I(x) + R(x)}{Q(x)}$$

$$\underset{\text{f. wym.}}{\frac{P(x)}{Q(x)}} = \underset{\text{wielomian}}{I(x)} + \underset{\text{f. wym. wł.}}{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

Przykład 1

wiemy już, że

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
(4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & : (x^2 - x - 2) = 4x + 5 \\
-4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
= & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 & \\
& - & 5x^2 & + & 5x & + & 10 & \\
\cline{2-7}
& & = & & 12x & + & 12 &
\end{array}
$$

zatem iloraz $I(x) = 4x + 5$, reszta $R(x) = 12x + 12$

Przykład 1

wiemy już, że

$$
\begin{array}{cccccccccl}
(4x^3 & + & x^2 & - & x & + & 2) & : (x^2 - x - 2) = 4x + 5 \\
-4x^3 & + & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
= & & 5x^2 & + & 7x & + & 2 & \\
 & - & 5x^2 & + & 5x & + & 10 & \\
\cline{2-7}
 & & = & & 12x & + & 12 &
\end{array}
$$

zatem iloraz $I(x) = 4x + 5$, reszta $R(x) = 12x + 12$
dlatego

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x^3 + x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 4x + 5 + \frac{12x + 12}{x^2 - x - 2}.$$

Przykład 2

wiemy już, że

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) & : (x^3+i) = x^2 - i \\
-x^5 & & & - & ix^2 & & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 & \\
 & & ix^3 & & & - & 1 & \\
\cline{2-7}
 & = & & - & ix^2 & & &
\end{array}$$

iloraz $I(x) = x^2 - i$, reszta $R(x) = -ix^2$

Przykład 2

wiemy już, że

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
(x^5 & - & ix^3 & & & + & 1) & : (x^3+i) = x^2 - i \\
-x^5 & & & - & ix^2 & & & \\
\hline
= & - & ix^3 & - & ix^2 & + & 1 & \\
 & & ix^3 & & & - & 1 & \\
\hline
 & & = & - & ix^2 & & &
\end{array}
$$

iloraz $I(x) = x^2 - i$, reszta $R(x) = -ix^2$
dlatego

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5 - ix^3 + 1}{x^3 + i} = x^2 - i + \frac{-ix^2}{x^3 + i}.$$

Przykład 3

$$\frac{x^2+2x-2}{x+1} = \frac{(x+1)^2-3}{x+1} = x+1-\frac{3}{x+1}$$

Ułamki proste

Ułamki proste

Zespolonym ułamkiem prostym nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ , gdzie } A, a \in \mathbb{C} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}$$

Ułamki proste

Zespolonym ułamkiem prostym nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ , gdzie } A, a \in \mathbb{C} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}$$

Rzeczywistym ułamkiem prostym I rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ , gdzie } A, a \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}$$

Ułamki proste

Zespolonym ułamkiem prostym nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ , gdzie } A, a \in \mathbb{C} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}$$

Rzeczywistym ułamkiem prostym I rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ , gdzie } A, a \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}$$

Rzeczywistym ułamkiem prostym II rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} \text{ , gdzie } B, C, p, q \in \mathbb{R} \text{ oraz } m \in \mathbb{N}, \Delta = p^2 - 4q < 0$$

Przykłady

rzeczywiste ułamki proste I rodzaju:

$$\frac{-1}{x-2}\,,\ \frac{5}{(x-3)^4}\,,\ \frac{1}{x^3}$$

Przykłady

rzeczywiste ułamki proste I rodzaju:

$$\frac{-1}{x-2}\,,\ \frac{5}{(x-3)^4}\,,\ \frac{1}{x^3}$$

rzeczywiste ułamki proste II rodzaju:

$$\frac{1}{x^2+1}\,,\ \frac{-x}{(x^2+4)^{10}}\,,\ \frac{3x-5}{x^2+2x+5}$$

Przykłady

rzeczywiste ułamki proste I rodzaju:

$$\frac{-1}{x-2}\,,\ \frac{5}{(x-3)^4}\,,\ \frac{1}{x^3}$$

rzeczywiste ułamki proste II rodzaju:

$$\frac{1}{x^2+1}\,,\ \frac{-x}{(x^2+4)^{10}}\,,\ \frac{3x-5}{x^2+2x+5}$$

zespolone ułamki proste:

$$\frac{2}{x+i}\,,\ \frac{4i}{x^5}$$

Przykłady

rzeczywiste ułamki proste I rodzaju:

$$\frac{-1}{x-2}\,,\ \frac{5}{(x-3)^4}\,,\ \frac{1}{x^3}$$

rzeczywiste ułamki proste II rodzaju:

$$\frac{1}{x^2+1}\,,\ \frac{-x}{(x^2+4)^{10}}\,,\ \frac{3x-5}{x^2+2x+5}$$

zespolone ułamki proste:

$$\frac{2}{x+i}\,,\ \frac{4i}{x^5}$$

$\dfrac{1}{x^2+1}$ nie jest zespolonym ułamkiem prostym

Twierdzenie (o rozkładzie rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste)

Dowolna rzeczywista funkcja wymierna właściwa $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$*, której mianownik* $Q(x)$ *ma rozkład na czynniki rzeczywiste nierozkładalne postaci*

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

może być przedstawiona jednoznacznie, z dokładnością do kolejności składników, w postaci sumy rzeczywistych ułamków prostych, przy czym w tej sumie

- *czynnikowi* $(x-a_i)^{k_i}$ *odpowiada suma* k_i *rzeczywistych ułamków prostych I rodzaju postaci*

$$\frac{A_{i1}}{x-a_i} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x-a_i)^{k_i}} \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r \,;$$

Twierdzenie (o rozkładzie rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste c.d.)

- *czynnikowi* $(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}$ *odpowiada suma* l_j *rzeczywistych ułamków prostych II rodzaju postaci*

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \cdots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}}$$

dla $j = 1, 2, \ldots, s$.

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2}$$

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{-2x+5}{(x-1)(x+2)}$$

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{-2x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{-2x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x+2}$$

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{-2x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+2}$$

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{-2x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{3x}{x^3+1}$$

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\begin{aligned}\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{-2x+5}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+2}\end{aligned}$$

$$\frac{3x}{x^3+1} = \frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{-2x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} =$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{3x}{x^3+1} = \frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Przykłady rozkładu rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste (rachunki prowadzące do wyznaczenia współczynników tych rozkładów zostały pominięte)

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{-2x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \\ = \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{3x}{x^3+1} = \frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \\ = \frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

$$\frac{1}{x^4 + x^2}$$

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$
$$=\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{6}{x^4+5x^2+4}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$
$$= \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{6}{x^4+5x^2+4} = \frac{6}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{6}{x^4+5x^2+4} = \frac{6}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$
$$=\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x^2+1}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{6}{x^4+5x^2+4}=\frac{6}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=$$
$$=\frac{2}{x^2+1}+\frac{-2}{x^2+4}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{6}{x^4+5x^2+4} = \frac{6}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} =$$

$$= \frac{2}{x^2+1} + \frac{-2}{x^2+4} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+4}$$

$$\frac{14x^2 - 2}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$\frac{14x^2-2}{x^4+4x^2-5}=\frac{14x^2-2}{(x-1)(x+1)(x^2+5)}$$

$$\frac{14x^2-2}{x^4+4x^2-5} = \frac{14x^2-2}{(x-1)(x+1)(x^2+5)} =$$
$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+5}$$

$$\frac{14x^2-2}{x^4+4x^2-5} = \frac{14x^2-2}{(x-1)(x+1)(x^2+5)} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+5} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{12}{x^2+5}$$

$$\frac{14x^2-2}{x^4+4x^2-5} = \frac{14x^2-2}{(x-1)(x+1)(x^2+5)} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+5} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{12}{x^2+5}$$

$$\frac{3x^3+1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{14x^2-2}{x^4+4x^2-5} = \frac{14x^2-2}{(x-1)(x+1)(x^2+5)} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+5} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{12}{x^2+5}$$

$$\frac{3x^3+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{14x^2-2}{x^4+4x^2-5} = \frac{14x^2-2}{(x-1)(x+1)(x^2+5)} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+5} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{12}{x^2+5}$$

$$\frac{3x^3+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{3x-3}{x^2+x+1} + \frac{4}{(x^2+x+1)^2}$$

Twierdzenie (o rozkładzie zespolonej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste)

Dowolna zespolona funkcja wymierna właściwa $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$*, której mianownik* $Q(x)$ *ma rozkład na czynniki zespolone nierozkładalne postaci*

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m}$$

może być przedstawiona jednoznacznie, z dokładnością do kolejności składników, w postaci sumy zespolonych ułamków prostych, przy czym w tej sumie czynnikowi $(x - x_j)^{k_j}$ *odpowiada suma* k_j *zespolonych ułamków prostych postaci*

$$\frac{A_{j1}}{x - x_j} + \frac{A_{j2}}{(x - x_j)^2} + \cdots + \frac{A_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \qquad \textit{dla } j = 1, 2, \ldots, m\ .$$

$$\frac{ix+9}{x^2+9}$$

$$\frac{ix+9}{x^2+9} = \frac{ix+9}{(x-3i)(x+3i)}$$

$$\frac{ix+9}{x^2+9} = \frac{ix+9}{(x-3i)(x+3i)} = \frac{A}{x-3i} + \frac{B}{x+3i}$$

$$\frac{ix+9}{x^2+9} = \frac{ix+9}{(x-3i)(x+3i)} = \frac{A}{x-3i} + \frac{B}{x+3i} =$$

$$= \frac{-i}{x-3i} + \frac{2i}{x+3i}$$