Układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & s \\ cx & + & dy & = & t \end{array}\right.$$

Układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & s \\ cx & + & dy & = & t \end{array} \right.$$

- można rozwiązać wykorzystując macierz

$$\left[\begin{array}{ccc} a & b & s \\ c & d & t \end{array} \right]$$

Układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

- można rozwiązać wykorzystując macierz

$$\begin{bmatrix} a & b & s \\ c & d & t \end{bmatrix}$$

- można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

Definicja (macierz rzeczywista)

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j)*, gdzie* $i = 1, 2, \ldots, m$*,* $j = 1, 2, \ldots, n$*, przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą* a_{ij}*, nazywamy macierzą rzeczywistą o wymiarze* $m \times n$*.*

Definicja (macierz rzeczywista)

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j), *gdzie* $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą* a_{ij}, *nazywamy macierzą rzeczywistą o wymiarze* $m \times n$.

Definicja (macierz zespolona)

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j), *gdzie* $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę zespoloną* a_{ij}, *nazywamy macierzą zespoloną o wymiarze* $m \times n$.

Funkcję tę będziemy zapisywać, przedstawiając zbiór jej wartości, w postaci tablicy, w której element a_{ij} macierzy stoi jednocześnie w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Funkcję tę będziemy zapisywać, przedstawiając zbiór jej wartości, w postaci tablicy, w której element a_{ij} macierzy stoi jednocześnie w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{i-ty wiersz ozn. } w_i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Funkcję tę będziemy zapisywać, przedstawiając zbiór jej wartości, w postaci tablicy, w której element a_{ij} macierzy stoi jednocześnie w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

j-ta kolumna, ozn. k_j

Funkcję tę będziemy zapisywać, przedstawiając zbiór jej wartości, w postaci tablicy, w której element a_{ij} macierzy stoi jednocześnie w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie.

i-ty wiersz ozn. w_i

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

j-ta kolumna, ozn. k_j

Funkcję tę będziemy zapisywać, przedstawiając zbiór jej wartości, w postaci tablicy, w której element a_{ij} macierzy stoi jednocześnie w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie.

i-ty wiersz ozn. w_i

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

j-ta kolumna, ozn. k_j

Macierz o wymiarze $m \times n$ ma m wierszy i n kolumn.

Funkcję tę będziemy zapisywać, przedstawiając zbiór jej wartości, w postaci tablicy, w której element a_{ij} macierzy stoi jednocześnie w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie.

i-ty wiersz ozn. w_i

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

j-ta kolumna, ozn. k_j

Macierz o wymiarze $m \times n$ ma m wierszy i n kolumn.

Macierz o elementach a_{ij} będziemy oznaczać symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$ lub $[a_{ij}]$ (także dużą literą $A_{m\times n}$ lub A).

$$A = [a_{ij}]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A = [a_{ij}]_{2\times 3} = \left[\begin{array}{ccr} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]_{2\times 3}$$

$$a_{11} = 4$$

$$A = [a_{ij}]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$

$$A = [a_{ij}]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = -2$

$$A = [a_{ij}]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = 0$

$$A = [a_{ij}]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 2$

$$A = [a_{ij}]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$a_{11} = 4,\ a_{12} = 5,\ a_{13} = -2,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 2,\ a_{23} = 1$

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Definicja

Macierze $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{s\times t}$ *nazywamy równymi i piszemy* $A = B$, *gdy* $m = s, n = t$ *i* $a_{ij} = b_{ij}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definicja

Macierze $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{s\times t}$ *nazywamy równymi i piszemy* $A = B$, *gdy* $m = s, n = t$ *i* $a_{ij} = b_{ij}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Oznacza to, że dwie macierze są równe tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar i odpowiednie elementy tych macierzy są równe.

Definicja

Macierze $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{s\times t}$ *nazywamy równymi i piszemy* $A = B$, *gdy* $m = s, n = t$ *i* $a_{ij} = b_{ij}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Oznacza to, że dwie macierze są równe tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar i odpowiednie elementy tych macierzy są równe.

Przykład

Zauważmy, że macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ nie są równe, bo $a_{23} = 7 \neq -6 = b_{23}$.

Definicja

Macierzą zerową, oznaczaną $\mathbb{O}$ *lub* $\mathbb{O}_{m\times n}$*, nazywamy macierz, której wszystkie elementy są równe zeru.*

Definicja

Macierzą zerową, oznaczaną $\mathbb{O}$ lub $\mathbb{O}_{m\times n}$, nazywamy macierz, której wszystkie elementy są równe zeru.

Przykład

Przykładem macierzy zerowej jest macierz $\mathbb{O}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definicja

Macierzą zerową, oznaczaną $\mathbb{O}$ lub $\mathbb{O}_{m\times n}$, nazywamy macierz, której wszystkie elementy są równe zeru.

Przykład

Przykładem macierzy zerowej jest macierz $\mathbb{O}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Zauważmy, ze dwie macierze zerowe $\mathbb{O}_{3\times 2}$, $\mathbb{O}_{2\times 3}$ nie są równe, bo mają różne wymiary.

Definicja

Macierzą kwadratową stopnia n *nazywamy każdą macierz* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, *czyli macierz o* n *wierszach i* n *kolumnach.*

Definicja

Macierzą kwadratową stopnia n *nazywamy każdą macierz* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$*, czyli macierz o* n *wierszach i* n *kolumnach.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja

Macierzą kwadratową stopnia n nazywamy każdą macierz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, czyli macierz o n wierszach i n kolumnach.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tworzą główną przekątną tej macierzy.

Definicja

Macierzą kwadratową stopnia n nazywamy każdą macierz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, czyli macierz o n wierszach i n kolumnach.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

główna przekątna

Elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tworzą główną przekątną tej macierzy.

Definicja

Macierz kwadratową $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *nazywamy macierzą diagonalną stopnia* n*, jeśli wszystkie jej elementy, znajdujące się poza główną przekątną, są równe zeru, czyli jeżeli* $a_{ij} = 0$ *dla* $i \neq j$.

Definicja

Macierz kwadratową $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *nazywamy macierzą diagonalną stopnia* n, *jeśli wszystkie jej elementy, znajdujące się poza główną przekątną, są równe zeru, czyli jeżeli* $a_{ij} = 0$ *dla* $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja

Macierz kwadratową $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ *nazywamy macierzą diagonalną stopnia* n, *jeśli wszystkie jej elementy, znajdujące się poza główną przekątną, są równe zeru, czyli jeżeli* $a_{ij} = 0$ *dla* $i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja

Macierzą jednostkową stopnia n, *oznaczaną* I_n *lub* I, *nazywamy macierz diagonalną stopnia* n, *w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe jeden.*

Przykłady

Macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są diagonalne, a macierz C jest macierzą jednostkową stopnia 3, tzn. $C = I_3$.

Działania na macierzach

Definicja (dodawanie macierzy)

Sumą macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *i* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *nazywamy macierz* $A + B = [c_{ij}]_{m\times n}$*, w której* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, n$*, czyli*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & -7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+(-2) & 3+4 \\ 4+7 & 5+3 & 6+(-7) \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & -7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+(-2) & 3+4 \\ 4+7 & 5+3 & 6+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 11 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & -7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+(-2) & 3+4 \\ 4+7 & 5+3 & 6+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 11 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

odejmowanie macierzy

Podobnie definiujemy różnicę macierzy, tzn.
$A - B = [a_{ij}]_{m\times n} - [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$.

Działania na macierzach

Definicja (mnożenie macierzy przez liczbę)

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *przez liczbę* α *nazywamy macierz* $\alpha A = [f_{ij}]_{m\times n}$*, w której* $f_{ij} = \alpha a_{ij}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, n$*, czyli*

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Definicja (mnożenie macierzy przez liczbę)

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *przez liczbę* α *nazywamy macierz* $\alpha A = [f_{ij}]_{m\times n}$, *w której* $f_{ij} = \alpha a_{ij}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, n$, *czyli*

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Przykład

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Definicja (mnożenie macierzy przez liczbę)

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *przez liczbę* α *nazywamy macierz* $\alpha A = [f_{ij}]_{m\times n}$, *w której* $f_{ij} = \alpha a_{ij}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, n$, *czyli*

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Przykład

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Definicja (mnożenie macierzy przez liczbę)

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *przez liczbę* α *nazywamy macierz* $\alpha A = [f_{ij}]_{m\times n}$, *w której* $f_{ij} = \alpha a_{ij}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, n$, *czyli*

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Przykład

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Definicja (mnożenie macierzy)

Niech $A = [a_{ij}]_{m\times p}$, $B = [b_{ij}]_{p\times n}$. *Iloczynem macierzy* A *i* B *nazywamy macierz* $AB = [c_{ij}]_{m\times n}$, *w której*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \stackrel{\mathrm{um}}{=} w_i^A \cdot k_j^B$$

dla $i = 1, 2, \ldots, m$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Działania na macierzach

Zauważmy, że iloczyn AB jest określony, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wówczas macierz AB ma tyle wierszy co macierz A, a kolumn tyle co macierz B.

Działania na macierzach

Zauważmy, że iloczyn AB jest określony, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wówczas macierz AB ma tyle wierszy co macierz A, a kolumn tyle co macierz B.

$$A_{m\times p} \cdot B_{p\times\, n} = C_{m\times\, n}$$

Działania na macierzach

Zauważmy, że iloczyn AB jest określony, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wówczas macierz AB ma tyle wierszy co macierz A, a kolumn tyle co macierz B.

$$A_{m \times \boxed{p}} \cdot B_{\boxed{p} \times n} = C_{m \times n}$$

Działania na macierzach

Zauważmy, że iloczyn AB jest określony, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wówczas macierz AB ma tyle wierszy co macierz A, a kolumn tyle co macierz B.

$$A_{m\times \boxed{p}} \cdot B_{\boxed{p}\times n} = C_{m\times n}$$

Działania na macierzach

Zauważmy, że iloczyn AB jest określony, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wówczas macierz AB ma tyle wierszy co macierz A, a kolumn tyle co macierz B.

$$A_{m\times \boxed{p}} \cdot B_{\boxed{p}\times n} = C_{m\times n}$$

Działania na macierzach

Zauważmy, że iloczyn AB jest określony, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wówczas macierz AB ma tyle wierszy co macierz A, a kolumn tyle co macierz B.

$$A_{m\times \boxed{p}} \cdot B_{\boxed{p}\times n} = C_{m\times n}$$

Działania na macierzach

Zauważmy, że iloczyn AB jest określony, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wówczas macierz AB ma tyle wierszy co macierz A, a kolumn tyle co macierz B.

$$A_{m\times \boxed{p}} \cdot B_{\boxed{p}\times n} = C_{m\times n}$$

Działania na macierzach

Zauważmy, że iloczyn AB jest określony, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B i wówczas macierz AB ma tyle wierszy co macierz A, a kolumn tyle co macierz B.

$$A_{m\times \boxed{p}} \cdot B_{\boxed{p}\times n} = C_{m\times n}$$

Działania na macierzach

Warto dodatkowo zauważyć, że element c_{ij} iloczynu AB jest „umownym" iloczynem i-tego wiersza w_i^A macierzy A oraz j-tej kolumny k_j^B macierzy B.

macierz A macierz B

$$\begin{array}{cc} w_i^A \rightarrow & \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \ldots & \boxed{a_{ik}} & \ldots & \boxed{a_{ip}} \\ & & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ \ldots & b_{kj} & \ldots \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ k_j^B \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

macierz C

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2.

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & \\ & \end{bmatrix}$$

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ & \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & \end{bmatrix}$$

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -6 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

Przykłady

Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ A jest macierzą o wymiarze 3×2, a B macierzą o wymiarze 2×2, więc liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Zatem iloczyn AB istnieje i jest macierzą o wymiarze 3×2. Mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -6 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

Iloczyn BA nie istnieje, bo liczba kolumn macierzy B nie jest równa liczbie wierszy macierzy A.

Przykłady cd.

Omówiony przykład potwierdza, że mnożenie macierzy **nie jest przemienne**.

Poniżej inny przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 15 & 3 \end{bmatrix} \neq [5] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Schemat Falka

W praktyce przy wyznaczaniu iloczynu macierzy wygodnie jest używać tzw. schemat Falka:

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array}$$

Element c_{ij} macierzy $C = AB$ znajduje się graficznie na przecięciu linii i-tego wiersza macierzy A oraz linii j-tej kolumny macierzy B.

Schemat Falka

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccccc} & & k_j^B & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\
 & & \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & b_{kj} & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{c} \\ \\ w_i^A \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Schemat Falka

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Schemat Falka

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 3 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & & \\ -2 & 0 & & \\ 3 & 4 & & \end{array}$$

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 3 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & \\ -2 & 0 & & \\ 3 & 4 & & \end{array}$$

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \qquad = -3$$

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$
\begin{array}{rr|rr}
 & & 1 & 3 \\
 & & -2 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -3 & 5 \\
-2 & 0 & & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) &= -3 \\
1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 &= 5
\end{aligned}
$$

Schemat Falka

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 3 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & \\ 3 & 4 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) &&= -3 \\ &1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 &&= 5 \\ &(-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) &&= -2 \end{aligned}$$

Schemat Falka

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 3 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) &= -3 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 &= 5 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) &= -2 \\ (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 &= -6 \end{aligned}$$

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 3 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & -5 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) && = -3 \\ &1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 && = 5 \\ &(-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) && = -2 \\ &(-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 && = -6 \\ &3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) && = -5 \end{aligned}$$

Schemat Falka

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 3 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & -5 & 13 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) && = -3 \\ &1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 && = 5 \\ &(-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) && = -2 \\ &(-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 && = -6 \\ &3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) && = -5 \\ &3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 && = 13 \end{aligned}$$

Schemat Falka

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 3 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & -5 & 13 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) &= -3 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 &= 5 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) &= -2 \\ (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 &= -6 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) &= -5 \\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 &= 13 \end{aligned}$$

Schemat Falka

Wyznaczyć AB, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & 3 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & -5 & 13 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) &= -3 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 &= 5 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) &= -2 \\ (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 &= -6 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) &= -5 \\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 &= 13 \end{aligned}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -6 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

Definicja (transponowanie macierzy)

Macierzą transponowaną macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *nazywamy macierz* $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$*, w której* $b_{ij} = a_{ji}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, m$*.*

Definicja (transponowanie macierzy)

Macierzą transponowaną macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *nazywamy macierz* $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, *w której* $b_{ij} = a_{ji}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, m$.

Oznacza to, że macierz A^T powstaje z macierzy A przez zamianę wierszy na kolumny z zachowaniem ich kolejności; kolejne wiersze macierzy A stają się kolejnymi kolumnami macierzy A^T.

Działania na macierzach

Definicja (transponowanie macierzy)

Macierzą transponowaną macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *nazywamy macierz* $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, *w której* $b_{ij} = a_{ji}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, m$.

Oznacza to, że macierz A^T powstaje z macierzy A przez zamianę wierszy na kolumny z zachowaniem ich kolejności; kolejne wiersze macierzy A stają się kolejnymi kolumnami macierzy A^T.

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mamy $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Działania na macierzach

Definicja (transponowanie macierzy)

Macierzą transponowaną macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *nazywamy macierz* $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, *w której* $b_{ij} = a_{ji}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$ *oraz* $j = 1, 2, \ldots, m$.

Oznacza to, że macierz A^T powstaje z macierzy A przez zamianę wierszy na kolumny z zachowaniem ich kolejności; kolejne wiersze macierzy A stają się kolejnymi kolumnami macierzy A^T.

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mamy $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Z definicji macierzy transponowanej wynika, że $(A^T)^T = A$.

Własności działań na macierzach

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o identycznych wymiarach mamy:

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o identycznych wymiarach mamy:

1. $A + B = B + A$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o identycznych wymiarach mamy:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o identycznych wymiarach mamy:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o identycznych wymiarach mamy:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o identycznych wymiarach mamy:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o identycznych wymiarach mamy:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$
8. $A(B + C) = AB + AC$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(B + C)A = BA + CA$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(B + C)A = BA + CA$
10. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$
8. $A(B+C) = AB + AC$
9. $(B+C)A = BA + CA$
10. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
11. $AI = A$, $IA = A$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(B + C)A = BA + CA$
10. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
11. $AI = A$, $IA = A$
12. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(B + C)A = BA + CA$
10. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
11. $AI = A$, $IA = A$
12. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
13. $(A + B)^T = A^T + B^T$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$
8. $A(B+C) = AB + AC$
9. $(B+C)A = BA + CA$
10. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
11. $AI = A$, $IA = A$
12. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
13. $(A+B)^T = A^T + B^T$
14. $(AB)^T = B^T A^T$

Własności działań na macierzach

Dla macierzy o wymiarach pozwalających na wykonywanie odpowiednich działań mamy:

7. $(AB)C = A(BC)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(B + C)A = BA + CA$
10. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
11. $AI = A$, $IA = A$
12. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
13. $(A + B)^T = A^T + B^T$
14. $(AB)^T = B^T A^T$

Ad. 11. Zwróćmy uwagę, że jeśli $A = A_{m\times n}$, to $AI_n = A = I_m A$, a jak wiemy jeśli $m \neq n$, to $I_m \neq I_n$.

Poniższe tabele podają, w odpowiednich jednostkach, normy zużycia surowców s_1, s_2, s_3 do produkcji półfabrykatów p_1, p_2, p_3 oraz normy zużycia tych półfabrykatów do produkcji wyrobów gotowych w_1, w_2, w_3

	p_1	p_2	p_3
s_1	1	2	2
s_2	3	1	1
s_3	1	0	2

	w_1	w_2	w_3
p_1	2	0	1
p_2	1	2	2
p_3	2	3	1

Zapiszemy je w postaci macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczymy iloczyn AB i zapiszemy wynik w tabeli

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 7 \\ 9 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

	w_1	w_2	w_3
s_1	8	10	7
s_2	9	5	6
s_3	6	6	3

Otrzymaliśmy tabelę norm zużycia surowców do produkcji wyrobów gotowych.

Definicja

Macierz kwadratową A nazywamy macierzą symetryczną, gdy

$$A^T = A,$$

a macierzą antysymetryczną (lub skośnie symetryczną), gdy

$$A^T = -A.$$

Definicja

Macierz kwadratową A nazywamy macierzą symetryczną, gdy

$$A^T = A,$$

a macierzą antysymetryczną (lub skośnie symetryczną), gdy

$$A^T = -A.$$

Równoważnie macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ jest symetryczna, gdy

$$a_{ij} = a_{ji},$$

a jest antysymetryczna, gdy

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

dla dowolnych wskaźników $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Przykłady

Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ jest symetryczna,

Przykłady

Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ jest symetryczna, a macierz
$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest antysymetryczna.

Przykłady

Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ jest symetryczna, a macierz

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest antysymetryczna. Natomiast macierz

$C = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ nie jest symetryczna, ani antysymetryczna.

Przykłady

Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ jest symetryczna, a macierz
$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest antysymetryczna. Natomiast macierz
$C = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ nie jest symetryczna, ani antysymetryczna.

Uwaga

Macierz jest symetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej są równe.

Przykłady

Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ jest symetryczna, a macierz
$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest antysymetryczna. Natomiast macierz
$C = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ nie jest symetryczna, ani antysymetryczna.

Uwaga

Macierz jest symetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej są równe. Macierz jest antysymetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej różnią się tylko znakiem, a elementy głównej przekątnej są równe zeru.

Fakt

Jeżeli A jest macierzą kwadratową, to macierz $A + A^T$ jest symetryczna, a macierz $A - A^T$ antysymetryczna.

Fakt

Jeżeli A jest macierzą kwadratową, to macierz $A + A^T$ jest symetryczna, a macierz $A - A^T$ antysymetryczna.
W konsekwencji każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i macierzy antysymetrycznej, przy czym przedstawienie takie jest jednoznaczne (z dokładnością do kolejności składników)

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$