Mamy układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

Mamy układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} ax & + & by & = & s & / \cdot d \\ cx & + & dy & = & t & / \cdot (-b) \end{array}\right.$$

Mamy układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} ax & + & by & = & s & / \cdot d \\ cx & + & dy & = & t & / \cdot (-b) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} adx & + & bdy & = & sd \\ -bcx & - & bdy & = & -bt \end{array}\right.$$

Mamy układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax & + & by & = & s & / \cdot d \\ cx & + & dy & = & t & / \cdot (-b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} adx & + & bdy & = & sd \\ -bcx & - & bdy & = & -bt \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy $(ad - bc)x = sd - bt$, a w konsekwencji

$$x = \frac{sd - bt}{ad - bc}, \text{ o ile } ad - bc \neq 0.$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax & + & by & = & s \\ cx & + & dy & = & t \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s & /\cdot(-c) \\ cx + dy = t & /\cdot a \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax & + & by & = & s & / \cdot (-c) \\ cx & + & dy & = & t & / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -acx & - & bcy & = & -sc \\ acx & + & ady & = & at \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax & + & by & = & s & / \cdot (-c) \\ cx & + & dy & = & t & / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -acx & - & bcy & = & -sc \\ acx & + & ady & = & at \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy $(ad - bc)y = at - sc$, a w konsekwencji

$$y = \frac{at - sc}{ad - bc}, \text{ o ile } ad - bc \neq 0.$$

Przyjmując oznaczenia

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = W,$$

$$sd - bt = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix} = W_x, \qquad at - sc = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix} = W_y$$

Przyjmując oznaczenia

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = W,$$

$$sd - bt = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix} = W_x, \qquad at - sc = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix} = W_y$$

Otrzymamy wzory

$$x = \frac{W_x}{W}\ , \ \ y = \frac{W_y}{W}\ , \text{ o ile } W \neq 0.$$

Każdej macierzy kwadratowej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

przyporządkujemy element nazywany wyznacznikiem macierzy A i oznaczymy symbolem

$$\det A, |A|, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definicja wyznacznika, którą będziemy się zajmować, jest definicją rekurencyjną, definicją wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia n za pomocą wyznaczników z n macierzy kwadratowych stopnia $n-1$. Będziemy w niej korzystać z następujących oznaczeń:

dla macierzy kwadratowej A stopnia $n > 1$ przez A_{ij} oznaczamy macierz kwadratową stopnia $n - 1$ powstałą z macierzy A przez wykreślenie z niej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

dla macierzy kwadratowej A stopnia $n > 1$ przez A_{ij} oznaczamy macierz kwadratową stopnia $n-1$ powstałą z macierzy A przez wykreślenie z niej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Przykład

Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, to macierzą powstałą po wykreśleniu z niej pierwszego wiersza oraz drugiej kolumny jest

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 2 & \cancel{2} & 1 \\ 3 & \cancel{1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *nazywamy liczbę* det$A$, *którą definiujemy rekurencyjnie:*

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *nazywamy liczbę* $\det A$, *którą definiujemy rekurencyjnie:*

1. *jeżeli* $n = 1$, *to* $\det A = a_{11}$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ *nazywamy liczbę* $\det A$, *którą definiujemy rekurencyjnie:*

1. *jeżeli* $n = 1$, *to* $\det A = a_{11}$
2. *jeżeli* $n > 1$, *to*

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *nazywamy liczbę* $\det A$*, którą definiujemy rekurencyjnie:*

1. *jeżeli* $n = 1$*, to* $\det A = a_{11}$
2. *jeżeli* $n > 1$*, to*

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

Zgodnie z tą definicją wyznacznik macierzy kwadratowej A stopnia n obliczamy za pomocą n wyznaczników z macierzy kwadratowych A_{1j} stopnia $n-1$.

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *nazywamy liczbę* $\det A$, *którą definiujemy rekurencyjnie:*

1. *jeżeli* $n = 1$, *to* $\det A = a_{11}$
2. *jeżeli* $n > 1$, *to*

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

Zgodnie z tą definicją wyznacznik macierzy kwadratowej A stopnia n obliczamy za pomocą n wyznaczników z macierzy kwadratowych A_{1j} stopnia $n-1$.

Na wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia n krótko mówimy wyznacznik stopnia n.

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Tutaj $|a_{11}|$ oznacza $\det[a_{11}]$, $|[a_{11}]|$.

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Tutaj $|a_{11}|$ oznacza $\det[a_{11}]$, $|[a_{11}]|$.

Przykład

$|2| = 2$, $|-1| = -1$.

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} |a_{22}| + (-1)^{1+2} a_{12} |a_{21}|$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} |a_{22}| + (-1)^{1+2} a_{12} |a_{21}| =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} |a_{22}| + (-1)^{1+2} a_{12} |a_{21}| =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2} a_{12}|a_{21}| =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2} a_{12}|a_{21}| =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $\quad$ $+$

Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5$$

$-$ $\quad$ $+$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacznik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach"

$$
\begin{array}{|ccc|ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\
\multicolumn{1}{c}{} & & & + & + & +
\end{array}
$$

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacznik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach” oraz opatrzonych znakiem minus iloczynów elementów leżących na „niebieskich strzałkach”.

$$\begin{array}{|ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacznik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach" oraz opatrzonych znakiem minus iloczynów elementów leżących na „niebieskich strzałkach".

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad\qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że
$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad + \qquad +$$

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że $\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$

Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że $\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że $\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array}$$

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że
$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$
$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

$$\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{1}{|c}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \\ \multicolumn{1}{|c}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & \\ \multicolumn{1}{|c}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \multicolumn{1}{c}{+} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \multicolumn{1}{c}{+} \\ & & & \multicolumn{1}{c}{+} \end{array}$$

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że $\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$

Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array}$$

Wiemy już, że

$$
\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}
$$

$$
- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +
$$

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że

$$
\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}
$$

$$
\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus
$$

Można też bez dopisywania wierszy i kolumn

Wiemy już, że

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \qquad - \qquad - \qquad\qquad + \qquad + \qquad +$$

Można też bez dopisywania wierszy i kolumn

$$\underset{+}{\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|} \quad \text{oraz} \quad \underset{-}{\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|}$$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right. =$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{array} =$

$+ \quad + \quad +$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy $\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right. =$

$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{matrix} =$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$= 1{\cdot}0{\cdot}4+2{\cdot}1{\cdot}5+(-3){\cdot}(-2){\cdot}(-1)-(-3){\cdot}0{\cdot}5-1{\cdot}1{\cdot}(-1)-2{\cdot}(-2){\cdot}4 =$
$= 0 + 10 - 6 - 0 + 1 + 16 = 21$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} *macierzy kwadratowej* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, *gdzie* $n > 1$, *nazywamy liczbę*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ij}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} *macierzy kwadratowej* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, *gdzie* $n > 1$, *nazywamy liczbę*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \boxed{-3} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} *macierzy kwadratowej* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, *gdzie* $n > 1$, *nazywamy liczbę*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{det}A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \boxed{-3} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{a_{21} = -3}$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} *macierzy kwadratowej* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, *gdzie* $n > 1$, *nazywamy liczbę*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \mathrm{det} A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \boxed{-3} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{a_{21} = -3}$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(6-0) = -6$$

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Twierdzenie (o rozwinięciu Laplace'a)

Dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, oraz dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$ zachodzą równości:

1. $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \ldots + a_{in}D_{in}$
   rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według i-tego wiersza;
2. $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj}$
   rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według j-tej kolumny.

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Twierdzenie (o rozwinięciu Laplace'a)

Dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, *gdzie* $n > 1$, *oraz dla* $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *zachodzą równości:*

1. $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \ldots + a_{in}D_{in}$
   rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według i*-tego wiersza;*
2. $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj}$
   rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według j*-tej kolumny.*

W praktyce, aby ułatwić obliczenia do rozwijania warto wybierać wiersz lub kolumnę z największą liczbą zer.

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza, co będziemy zapisywać $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 0} \end{vmatrix}$ lub

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{\text{wg } w_3}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 0} \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 0} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 0} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 0} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 0} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3(-2+6) + (-1)(-1+6) = 12 - 5 = 7$$

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trójkątna górna $(a_{ij} = 0 \;\text{ dla }\; i > j)$

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{trójkątna górna} \quad (a_{ij} = 0 \ \text{ dla } \ i > j)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{trójkątna dolna} \quad (a_{ij} = 0 \ \text{ dla } \ i < j)$$

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wniosek

$\det I_n = 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$

Własności wyznaczników

Własności wyznaczników

1. Jeśli chociaż jeden wiersz (kolumna) wyznacznika składa się z samych zer, to wyznacznik jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - a_{12}ka_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - a_{12}ka_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Zatem $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Własności wyznaczników

2. Wspólny czynnik wszystkich elementów dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć przed wyznacznik, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{ka_{i1} \quad ka_{i2} \quad \dots \quad ka_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników

2. Wspólny czynnik wszystkich elementów dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć przed wyznacznik, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{ka_{i1} \quad ka_{i2} \quad \dots \quad ka_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n, to dla każdej liczby k mamy $\det(kA) = k^n \det A$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

do elementów drugiego wiersza dodamy odpowiadające im elementy pierwszego wiersza pomnożone przez liczbę c

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22} + ca_{12}) - a_{12}(a_{21} + ca_{11}) =$$
$$= a_{11}a_{22} + ca_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} - ca_{12}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zatem $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix}$

Własności wyznaczników

4. Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

Własności wyznaczników

4. Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\underline{\widetilde{w_i}=w_i+cw_j}}$$

Własności wyznaczników

4. Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\underline{\widetilde{w}_i = w_i + cw_j}}$$

do elementów i-tego wiersza dodamy odpowiadające im elementy j-tego wiersza pomnożone przez tę samą liczbę c, krótko: do i-tego wiersza dodajemy j-ty wiersz pomnożony przez c (symbolicznie $w_i + cw_j$)

Własności wyznaczników

4. Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{j1} \quad a_{j2} \quad \dots \quad a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}+ca_{j1} \quad a_{i2}+ca_{j2} \quad \dots \quad a_{in}+ca_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{j1} \quad a_{j2} \quad \dots \quad a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{w_i} = w_i + cw_j$$

5. Zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2}} & \dots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{w_i \longleftrightarrow w_j} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

zamieniamy miejscami wiersze i-ty oraz j-ty (symbolicznie $w_i \longleftrightarrow w_j$)

Własności wyznaczników

6. Wyznacznik, w którym dwa wiersze (kolumny) są jednakowe, jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \ldots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \ldots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Własności wyznaczników

6. Wyznacznik, w którym dwa wiersze (kolumny) są jednakowe, jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\alpha \quad \beta \quad \dots \quad \omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{\alpha \quad \beta \quad \dots \quad \omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

7. $\det(A^T) = \det A$

Własności wyznaczników - przykłady

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{w_1 \longleftrightarrow w_4}$$

zamieniamy wiersz pierwszy i czwarty miejscami; musimy pamiętać, że wyznacznik wówczas zmieni znak

Własności wyznaczników - przykłady

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{w_1 \longleftrightarrow w_4} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2) = -18$$

zamieniamy wiersz pierwszy i czwarty miejscami; musimy pamiętać, że wyznacznik wówczas zmieni znak

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4]{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4}$$

do wiersza drugiego dodajemy wiersz czwarty pomnożonony przez 2, a do wiersza trzeciego wiersz czwarty pomnożony przez -3, a następnie otrzymany wyznacznik rozwiniemy wg pierwszej kolumny

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4]{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2+2 & 4+4 & 2+(-6) & 5+4 \\ 3+(-3) & -1+(-6) & 3+9 & 2+(-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4]{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2+2 & 4+4 & 2+(-6) & 5+4 \\ 3+(-3) & -1+(-6) & 3+9 & 2+(-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4]{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2+2 & 4+4 & 2+(-6) & 5+4 \\ 3+(-3) & -1+(-6) & 3+9 & 2+(-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -7 \\ 8 \\ -7 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ -4 \\ 12 \\ -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 9 \\ -4 \\ 2 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4}{\overset{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \underset{\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_1}{\overset{\widetilde{w_2}=w_2+w_1}{=\!=\!=\!=}}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4]{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+w_1}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4]{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+w_1}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} \begin{matrix} -7 \\ 1 \\ 14 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4]{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_1]{\widetilde{w_2}=w_2+w_1}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -7 & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & -1 \\ 1 & & 8 \\ 14 & & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} =$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4}{\overset{\widetilde{w_2}=w_2+2w_4}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -7 \\ 8 \\ -7 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ -4 \\ 12 \\ -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 9 \\ -4 \\ 2 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \underset{\widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_1}{\overset{\widetilde{w_2}=w_2+w_1}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} \begin{matrix} -7 \\ 1 \\ 14 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-1 - 112) = 4 \cdot (-113) = -452$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix} \underline{\underline{\substack{\widetilde{k_1}=k_1+(-1)k_2 \\ \widetilde{k_3}=k_3+(-1)k_4}}}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix} \underset{\widetilde{k_3}=k_3+(-1)k_4}{\overset{\widetilde{k_1}=k_1+(-1)k_2}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 1 & 9 \\ 1 & 15 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix} \xlongequal[\widetilde{k_3}=k_3+(-1)k_4]{\widetilde{k_1}=k_1+(-1)k_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 1 & 9 \\ 1 & 15 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 0,$$

bo $k_1 = k_3$

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Jeżeli A *i* B *są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Z tw. Cauchy'ego wynika, że wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia nie zależy od kolejności czynników, czyli

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A)$$

Przez A^n oznaczymy n-tą potęgę macierzy kwadratowej A.

Przez A^n oznaczymy n-tą potęgę macierzy kwadratowej A.

Definiujemy ją rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^{n+1} &= A^n A \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Przez A^n oznaczymy n-tą potęgę macierzy kwadratowej A.

Definiujemy ją rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^{n+1} &= A^n A \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Z tw. Cauchy'ego wynika, że

$$\det(A^n) = (\det A)^n \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ obliczyć $\det(A^7)$.