Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy wielkości postaci $a + ib$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, przy czym przyjmujemy, że

1. wielkość i spełnia warunek $i^2 = -1$ (wielkość i nazywamy jedynką urojoną);
2. jeśli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to
   - wielkości $a + ib$, $c + id$ są równe wtw $a = c$ oraz $b = d$;
   - cztery działania na wielkościach $a + ib$, $c + id$: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez dzielnik różny od tzw. zera zespolonego $0 = 0 + i0$ wykonuje się podobnie jak na wielomianach zmiennej i zastępując i^2 przez -1

Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy wielkości postaci $a + ib$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, przy czym przyjmujemy, że

1. wielkość i spełnia warunek $i^2 = -1$ (wielkość i nazywamy jedynką urojoną);
2. jeśli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to
   - wielkości $a + ib$, $c + id$ są równe wtw $a = c$ oraz $b = d$;
   - cztery działania na wielkościach $a + ib$, $c + id$: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez dzielnik różny od tzw. zera zespolonego $0 = 0 + i0$ wykonuje się podobnie jak na wielomianach zmiennej i zastępując i^2 przez -1

To oznacza, że

$(a + ib) + (c + id) =$

Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy wielkości postaci $a + ib$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, przy czym przyjmujemy, że

1. wielkość i spełnia warunek $i^2 = -1$ (wielkość i nazywamy jedynką urojoną);
2. jeśli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to
   - wielkości $a + ib$, $c + id$ są równe wtw $a = c$ oraz $b = d$;
   - cztery działania na wielkościach $a + ib$, $c + id$: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez dzielnik różny od tzw. zera zespolonego $0 = 0 + i0$ wykonuje się podobnie jak na wielomianach zmiennej i zastępując i^2 przez -1

To oznacza, że

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$$

Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy wielkości postaci $a + ib$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, przy czym przyjmujemy, że

1. wielkość i spełnia warunek $i^2 = -1$ (wielkość i nazywamy jedynką urojoną);
2. jeśli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to
   - wielkości $a + ib$, $c + id$ są równe wtw $a = c$ oraz $b = d$;
   - cztery działania na wielkościach $a + ib$, $c + id$: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez dzielnik różny od tzw. zera zespolonego $0 = 0 + i0$ wykonuje się podobnie jak na wielomianach zmiennej i zastępując i^2 przez -1

To oznacza, że

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$$

$$(a + ib) - (c + id)$$

Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy wielkości postaci $a+ib$, gdzie a,b są liczbami rzeczywistymi, przy czym przyjmujemy, że

1. wielkość i spełnia warunek $i^2=-1$ (wielkość i nazywamy jedynką urojoną);
2. jeśli a,b,c,d są liczbami rzeczywistymi, to
   - wielkości $a+ib$, $c+id$ są równe wtw $a=c$ oraz $b=d$;
   - cztery działania na wielkościach $a+ib$, $c+id$: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez dzielnik różny od tzw. zera zespolonego $0=0+i0$ wykonuje się podobnie jak na wielomianach zmiennej i zastępując i^2 przez -1

To oznacza, że

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d)$$

$$(a+ib)-(c+id)=a-c+i(b-d)$$

Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy wielkości postaci $a + ib$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, przy czym przyjmujemy, że

1. wielkość i spełnia warunek $i^2 = -1$ (wielkość i nazywamy jedynką urojoną);
2. jeśli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to
   - wielkości $a + ib$, $c + id$ są równe wtw $a = c$ oraz $b = d$;
   - cztery działania na wielkościach $a + ib$, $c + id$: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez dzielnik różny od tzw. zera zespolonego $0 = 0 + i0$ wykonuje się podobnie jak na wielomianach zmiennej i zastępując i^2 przez -1

To oznacza, że

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$$

$$(a + ib) - (c + id) = a - c + i(b - d)$$

$$(a + ib)(c + id) =$$

Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy wielkości postaci $a + ib$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, przy czym przyjmujemy, że

1. wielkość i spełnia warunek $i^2 = -1$ (wielkość i nazywamy jedynką urojoną);
2. jeśli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to
   - wielkości $a + ib$, $c + id$ są równe wtw $a = c$ oraz $b = d$;
   - cztery działania na wielkościach $a + ib$, $c + id$: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez dzielnik różny od tzw. zera zespolonego $0 = 0 + i0$ wykonuje się podobnie jak na wielomianach zmiennej i zastępując i^2 przez -1

To oznacza, że

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$$

$$(a + ib) - (c + id) = a - c + i(b - d)$$

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd =$$

Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy wielkości postaci $a+ib$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, przy czym przyjmujemy, że

1. wielkość i spełnia warunek $i^2=-1$ (wielkość i nazywamy jedynką urojoną);
2. jeśli a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to
   - wielkości $a+ib$, $c+id$ są równe wtw $a=c$ oraz $b=d$;
   - cztery działania na wielkościach $a+ib$, $c+id$: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez dzielnik różny od tzw. zera zespolonego $0=0+i0$ wykonuje się podobnie jak na wielomianach zmiennej i zastępując i^2 przez -1

To oznacza, że

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d)$$

$$(a+ib)-(c+id)=a-c+i(b-d)$$

$$(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac-bd+i(ad+bc)$$

Niech $c + id \neq 0$, tzn. $c^2 + d^2 > 0$. Wówczas

$$\frac{a + ib}{c + id} =$$

Niech $c + id \neq 0$, tzn. $c^2 + d^2 > 0$. Wówczas

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

Niech $c + id \neq 0$, tzn. $c^2 + d^2 > 0$. Wówczas

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - icd + idc - i^2d^2}$$

Niech $c + id \neq 0$, tzn. $c^2 + d^2 > 0$. Wówczas

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - icd + idc - i^2d^2} =$$
$$= \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Niech $c + id \neq 0$, tzn. $c^2 + d^2 > 0$. Wówczas

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - icd + idc - i^2d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Niech $c + id \neq 0$, tzn. $c^2 + d^2 > 0$. Wówczas

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - icd + idc - i^2d^2} =$$
$$= \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Uwaga

Można pisać $a + bi$ zamiast $a + ib$.

Przykłady

$$(1 + 5i) + (2 + 3i)$$

Przykłady

$$(1+5i)+(2+3i)=1+5i+2+3i$$

Przykłady

$$(1+5i)+(2+3i)=1+5i+2+3i=(1+2)+(5i+3i)$$

Przykłady

$$(1+5i)+(2+3i) = 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) =$$
$$= 3+8i$$

Przykłady

$$(1+5i)+(2+3i) = 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\ = 3+8i$$

$$(1+5i)-(2+3i)$$

Przykłady

$$\begin{aligned}(1+5i)+(2+3i) &= 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\ &= 3+8i\end{aligned}$$

$$(1+5i)-(2+3i) = 1+5i-2-3i$$

Przykłady

$$
\begin{aligned}
(1+5i)+(2+3i) &= 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\
&= 3+8i
\end{aligned}
$$

$$
(1+5i)-(2+3i) = 1+5i-2-3i = (1-2)+(5i-3i)
$$

Przykłady

$$\begin{aligned}(1+5i)+(2+3i) &= 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\ &= 3+8i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+5i)-(2+3i) &= 1+5i-2-3i = (1-2)+(5i-3i) = \\ &= -1+2i\end{aligned}$$

Przykłady

$$(1+5i)+(2+3i) = 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\ = 3+8i$$

$$(1+5i)-(2+3i) = 1+5i-2-3i = (1-2)+(5i-3i) = \\ = -1+2i$$

$$(1+5i)\cdot(2+3i)$$

Przykłady

$$
\begin{aligned}
(1+5i)+(2+3i) &= 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\
&= 3+8i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1+5i)-(2+3i) &= 1+5i-2-3i = (1-2)+(5i-3i) = \\
&= -1+2i
\end{aligned}
$$

$$
(1+5i)\cdot(2+3i) = 1(2+3i)+5i(2+3i)
$$

Przykłady

$$\begin{aligned}(1+5i)+(2+3i) &= 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\ &= 3+8i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+5i)-(2+3i) &= 1+5i-2-3i = (1-2)+(5i-3i) = \\ &= -1+2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+5i)\cdot(2+3i) &= 1(2+3i)+5i(2+3i) = \\ &= 2+3i+10i+15i^2\end{aligned}$$

Przykłady

$$\begin{aligned}(1+5i)+(2+3i) &= 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\ &= 3+8i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+5i)-(2+3i) &= 1+5i-2-3i = (1-2)+(5i-3i) = \\ &= -1+2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+5i)\cdot(2+3i) &= 1(2+3i)+5i(2+3i) = \\ &= 2+3i+10i+15i^2 = \\ &= 2+13i+15\cdot(-1) = 2+13i-15\end{aligned}$$

Przykłady

$$\begin{aligned}(1+5i)+(2+3i) &= 1+5i+2+3i = (1+2)+(5i+3i) = \\ &= 3+8i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+5i)-(2+3i) &= 1+5i-2-3i = (1-2)+(5i-3i) = \\ &= -1+2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+5i)\cdot(2+3i) &= 1(2+3i)+5i(2+3i) = \\ &= 2+3i+10i+15i^2 = \\ &= 2+13i+15\cdot(-1) = 2+13i-15 = \\ &= -13+13i\end{aligned}$$

Przykłady cd.

$$(1+5i):(2+3i)=\frac{1+5i}{2+3i}$$

Przykłady cd.

$$(1+5i):(2+3i)=\frac{1+5i}{2+3i}=\frac{(1+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

Przykłady cd.

$$(1+5i):(2+3i)=\frac{1+5i}{2+3i}=\frac{(1+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=$$
$$=\frac{2-3i+10i-15i^2}{2^2-(3i)^2}$$

Przykłady cd.

$$(1+5i):(2+3i) = \frac{1+5i}{2+3i} = \frac{(1+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} =$$

$$= \frac{2-3i+10i-15i^2}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+7i+15}{4-9i^2}$$

Przykłady cd.

$$
\begin{aligned}
(1+5i):(2+3i) &= \frac{1+5i}{2+3i} = \frac{(1+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \\
&= \frac{2-3i+10i-15i^2}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+7i+15}{4-9i^2} = \\
&= \frac{17+7i}{4+9}
\end{aligned}
$$

Przykłady cd.

$$
\begin{aligned}
(1+5i):(2+3i) &= \frac{1+5i}{2+3i} = \frac{(1+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \\
&= \frac{2-3i+10i-15i^2}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+7i+15}{4-9i^2} = \\
&= \frac{17+7i}{4+9} = \frac{17}{13} + \frac{7}{13}i
\end{aligned}
$$

Będziemy używać następujące oznaczenia dla zbiorów liczbowych:

Będziemy używać następujące oznaczenia dla zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb naturalnych,

Będziemy używać następujące oznaczenia dla zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb całkowitych (z niem. Zahlen, liczby),

Będziemy używać następujące oznaczenia dla zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb całkowitych (z niem. Zahlen, liczby),

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ — zbiór wszystkich liczb wymiernych (z ang. Quotient, iloraz),

Będziemy używać następujące oznaczenia dla zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ — zbiór liczb całkowitych (z niem. Zahlen, liczby),

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ — zbiór wszystkich liczb wymiernych (z ang. Quotient, iloraz),

$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych,

Będziemy używać następujące oznaczenia dla zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — zbiór liczb całkowitych (z niem. Zahlen, liczby),

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ — zbiór wszystkich liczb wymiernych (z ang. Quotient, iloraz),

$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathbb{C}$ — zbiór liczb zespolonych (z łac. complexus, zespolony).

Liczby zespolone będziemy oznaczać też pojedynczymi małymi literami, np. z, w, z_1.

Liczby zespolone będziemy oznaczać też pojedynczymi małymi literami, np. z, w, z_1. Jeżeli $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to liczbę rzeczywistą a nazywamy częścią rzeczywistą liczby z, a liczbę rzeczywistą b - częścią urojoną liczby z, co zapisujemy odpowiednio $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

Liczby zespolone będziemy oznaczać też pojedynczymi małymi literami, np. z, w, z_1. Jeżeli $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to liczbę rzeczywistą a nazywamy częścią rzeczywistą liczby z, a liczbę rzeczywistą b - częścią urojoną liczby z, co zapisujemy odpowiednio $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

Uwaga

Część rzeczywista i część urojona liczby zespolonej są liczbami rzeczywistymi.

Liczby zespolone będziemy oznaczać też pojedynczymi małymi literami, np. z, w, z_1. Jeżeli $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to liczbę rzeczywistą a nazywamy częścią rzeczywistą liczby z, a liczbę rzeczywistą b - częścią urojoną liczby z, co zapisujemy odpowiednio $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

Uwaga

Część rzeczywista i część urojona liczby zespolonej są liczbami rzeczywistymi.

Przykład

Dla liczby zespolonej $z = -2 + 5i$ mamy $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = 5$.

Dodawanie liczb zespolonych jest przemienne i łączne, tzn. dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 odpowiednio mamy:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Dodawanie liczb zespolonych jest przemienne i łączne, tzn. dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 odpowiednio mamy:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Mnożenie liczb zespolonych jest przemienne, łączne i rozdzielne względem dodawania, tzn. dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 odpowiednio mamy:

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Nietrudno sprawdzić, że jeśli $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, to

$$\begin{aligned} (a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) &= a_1 + a_2 + 0i \\ (a_1 + 0i) - (a_2 + 0i) &= a_1 - a_2 + 0i \\ (a_1 + 0i)(a_2 + 0i) &= a_1 a_2 + 0i \\ \frac{a_1 + 0i}{a_2 + 0i} &= \frac{a_1}{a_2} + 0i \text{ dla } a_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Nietrudno sprawdzić, że jeśli $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, to

$$\begin{aligned}
(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) &= a_1 + a_2 + 0i \\
(a_1 + 0i) - (a_2 + 0i) &= a_1 - a_2 + 0i \\
(a_1 + 0i)(a_2 + 0i) &= a_1 a_2 + 0i \\
\frac{a_1 + 0i}{a_2 + 0i} &= \frac{a_1}{a_2} + 0i \text{ dla } a_2 \neq 0
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyniki działań na liczbach zespolonych $a_1 + 0i$, $a_2 + 0i$ są zgodne z wynikami działań na liczbach rzeczywistych a_1, a_2. Możemy zatem przyjąć, że

$$a + 0i = a \text{ dla } a \in \mathbb{R}$$

czyli utożsamić liczbę zespoloną $a + 0i$ z liczbę rzeczywistą a. Wówczas $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Zwróćmy uwagę, że równanie $x^2 + 1 = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$ nie ma rozwiązań, a w zbiorze $\mathbb{C}$ ma dwa różne rozwiązania $i, -i$.

Postać liczby zespolonej $z = a + ib$, w której $a, b \in \mathbb{R}$, będziemy nazywać jej *postacią algebraiczną*.

Postać liczby zespolonej $z = a + ib$, w której $a, b \in \mathbb{R}$, będziemy nazywać jej *postacią algebraiczną*.

Przykład

Liczba $z = 1 + 2i$ jest w postaci algebraicznej, a liczba $w = 2 + (3 + i)i$ nie jest w postaci algebraicznej.

Postać liczby zespolonej $z = a + ib$, w której $a, b \in \mathbb{R}$, będziemy nazywać jej *postacią algebraiczną*.

Przykład

Liczba $z = 1 + 2i$ jest w postaci algebraicznej, a liczba $w = 2 + (3 + i)i$ nie jest w postaci algebraicznej.

Uwaga

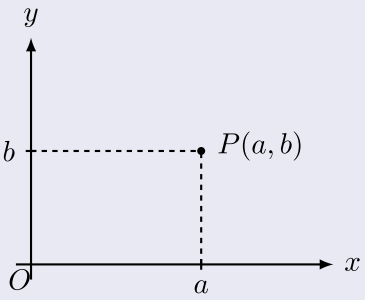
Od tego miejsca pisząc $z = a + ib$ będziemy zakładać, że $a, b \in \mathbb{R}$, czyli że jest ona w postaci algebraicznej.

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej w postaci algebraicznej

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib$ interpretujemy jako punkt $P(a, b)$ płaszczyzny Oxy. Płaszczyznę, w której każdy punkt jest utożsamiany z liczbą zespoloną nazywamy płaszczyzną zespoloną lub płaszczyzną Gaussa. W tym przypadku oś Ox (oś części rzeczywistych) i oś Oy (oś części urojonych) nazywamy odpowiednio osią rzeczywistą i osią urojoną.

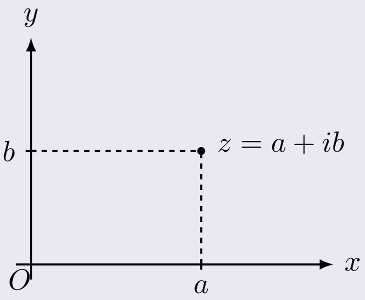
Interpretacja geometryczna liczby zespolonej w postaci algebraicznej

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib$ interpretujemy jako punkt $P(a, b)$ płaszczyzny Oxy. Płaszczyznę, w której każdy punkt jest utożsamiany z liczbą zespoloną nazywamy płaszczyzną zespoloną lub płaszczyzną Gaussa. W tym przypadku oś Ox (oś części rzeczywistych) i oś Oy (oś części urojonych) nazywamy odpowiednio osią rzeczywistą i osią urojoną.



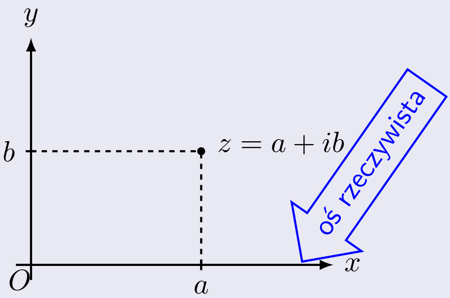
Interpretacja geometryczna liczby zespolonej w postaci algebraicznej

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib$ interpretujemy jako punkt $P(a, b)$ płaszczyzny Oxy. Płaszczyznę, w której każdy punkt jest utożsamiany z liczbą zespoloną nazywamy płaszczyzną zespoloną lub płaszczyzną Gaussa. W tym przypadku oś Ox (oś części rzeczywistych) i oś Oy (oś części urojonych) nazywamy odpowiednio osią rzeczywistą i osią urojoną.



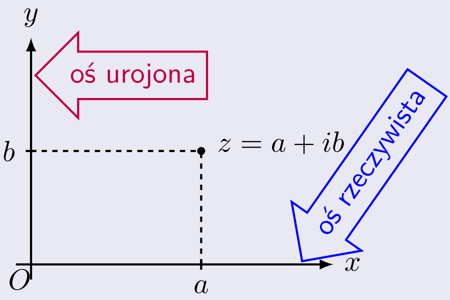
Interpretacja geometryczna liczby zespolonej w postaci algebraicznej

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib$ interpretujemy jako punkt $P(a, b)$ płaszczyzny Oxy. Płaszczyznę, w której każdy punkt jest utożsamiany z liczbą zespoloną nazywamy płaszczyzną zespoloną lub płaszczyzną Gaussa. W tym przypadku oś Ox (oś części rzeczywistych) i oś Oy (oś części urojonych) nazywamy odpowiednio osią rzeczywistą i osią urojoną.



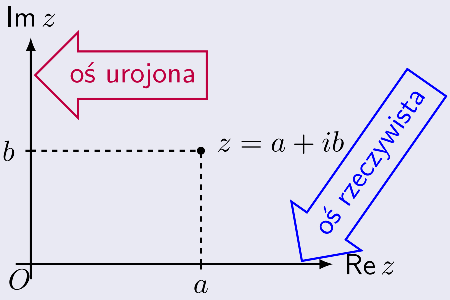
Interpretacja geometryczna liczby zespolonej w postaci algebraicznej

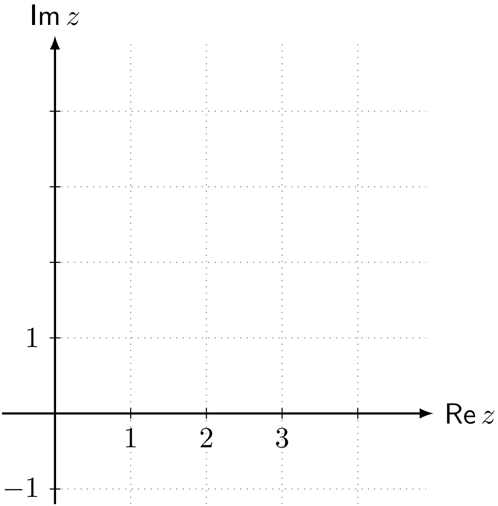
Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib$ interpretujemy jako punkt $P(a, b)$ płaszczyzny Oxy. Płaszczyznę, w której każdy punkt jest utożsamiany z liczbą zespoloną nazywamy płaszczyzną zespoloną lub płaszczyzną Gaussa. W tym przypadku oś Ox (oś części rzeczywistych) i oś Oy (oś części urojonych) nazywamy odpowiednio osią rzeczywistą i osią urojoną.

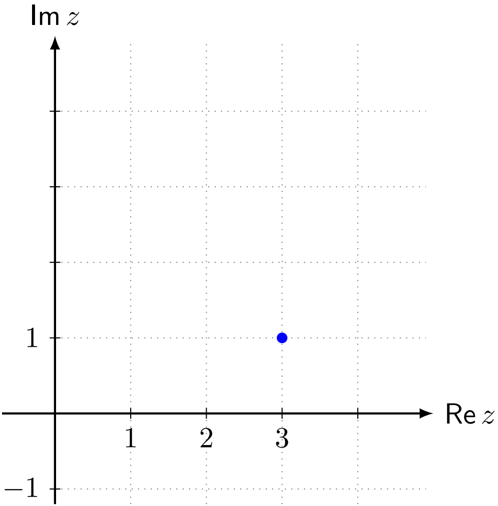


Interpretacja geometryczna liczby zespolonej w postaci algebraicznej

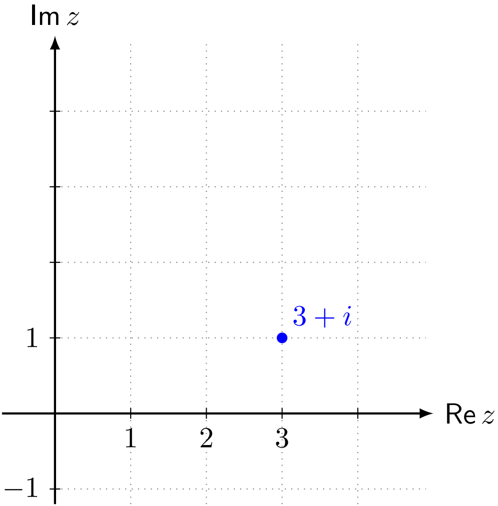
Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib$ interpretujemy jako punkt $P(a, b)$ płaszczyzny Oxy. Płaszczyznę, w której każdy punkt jest utożsamiany z liczbą zespoloną nazywamy płaszczyzną zespoloną lub płaszczyzną Gaussa. W tym przypadku oś Ox (oś części rzeczywistych) i oś Oy (oś części urojonych) nazywamy odpowiednio osią rzeczywistą i osią urojoną.

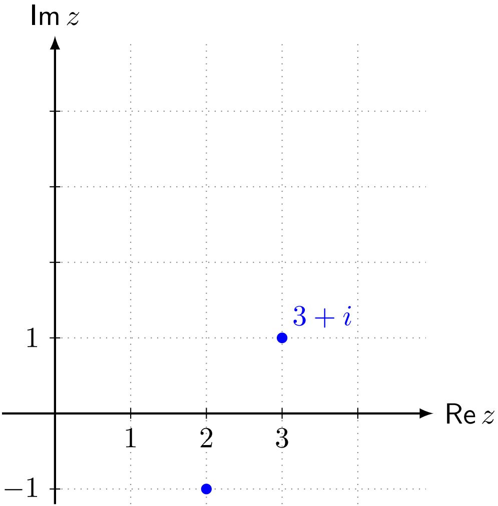


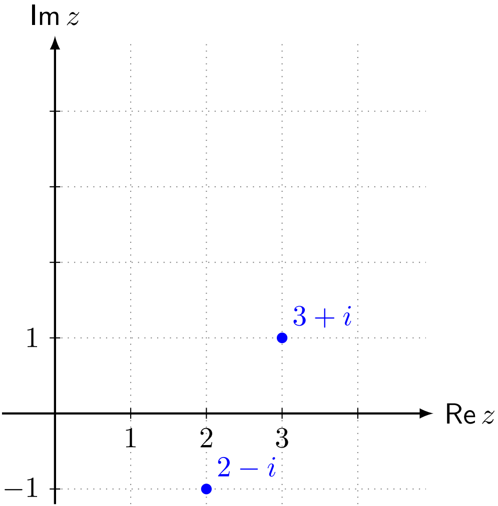

Im z
Re z
1
−1
1
2
3

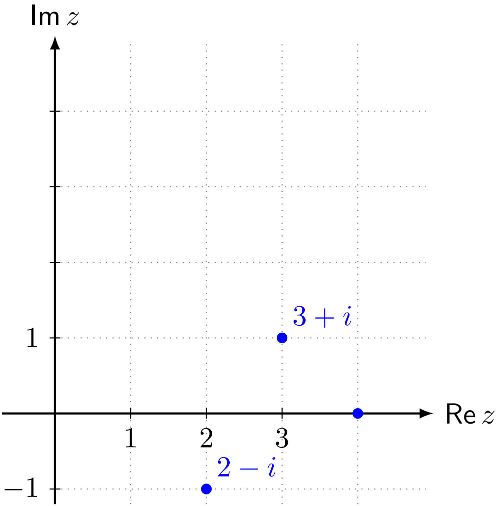


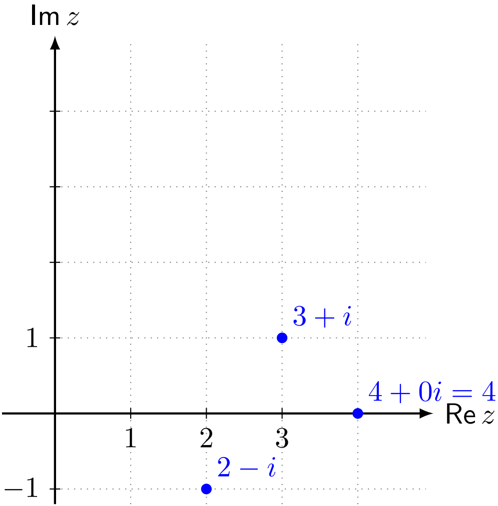
Im z
1
−1
1
2
3
Re z

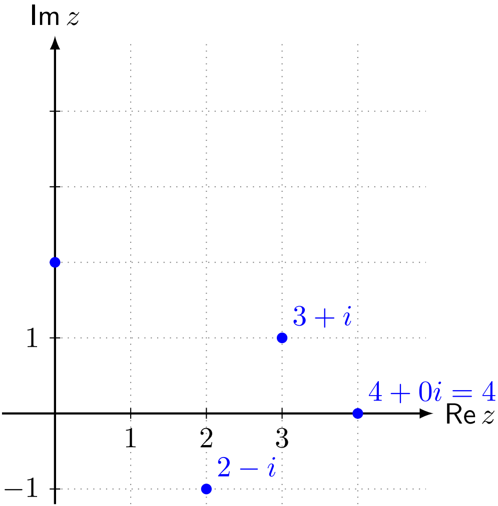

Im z
Re z
1
2
3
1
−1
$3+i$

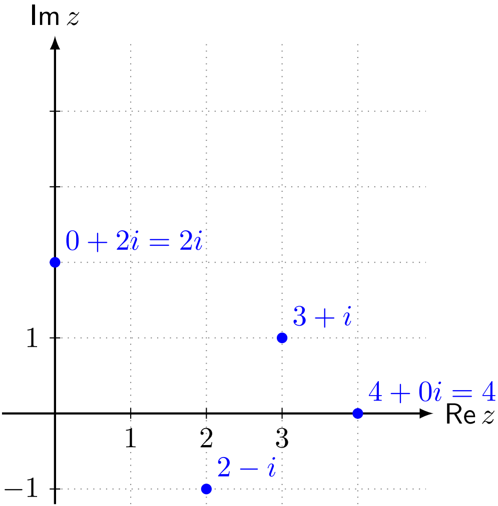

Im z
Re z
$3+i$
1
-1
1
2
3


Im z
Re z
1
-1
1
2
3
$3+i$
$2-i$


Im z
Re z
$3+i$
$2-i$
1
1
2
3
-1


Im z
Re z
1
−1
1
2
3
$3+i$
$4+0i=4$
$2-i$


Im z
Re z
1
-1
1
2
3
$3+i$
$4+0i=4$
$2-i$



Im z
$0+2i=2i$
$3+i$
$4+0i=4$
Re z
1
2
3
1
-1
$2-i$

Przy wyznaczaniu ilorazu dwóch liczb zespolonych w postaci algebraicznej korzysta się ze sprzężenia liczby zespolonej.

Przy wyznaczaniu ilorazu dwóch liczb zespolonych w postaci algebraicznej korzysta się ze sprzężenia liczby zespolonej.

Definicja

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + ib$ *nazywamy liczbę* $\overline{z} = a - ib$.

Przy wyznaczaniu ilorazu dwóch liczb zespolonych w postaci algebraicznej korzysta się ze sprzężenia liczby zespolonej.

Definicja

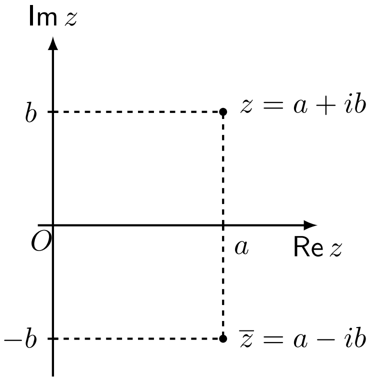
Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + ib$ *nazywamy liczbę* $\overline{z} = a - ib$.

Przykład

Sprzężeniem liczby $z = 1 - 2i$ jest liczba $\overline{z} = 1 + 2i$, bo wyznaczając sprzężenie liczby zespolonej zmieniamy znak przed jej częścią urojoną.

Geometrycznie punkt $\overline{z}$ jest symetrycznym odbiciem punktu z względem osi rzeczywistej.

Geometrycznie punkt $\overline{z}$ jest symetrycznym odbiciem punktu z względem osi rzeczywistej.



Własności sprzężenia

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

Własności sprzężenia

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $\overline{\overline{z}} = z$

Własności sprzężenia

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

Własności sprzężenia

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

Własności sprzężenia

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Własności sprzężenia

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ dla $z_2 \neq 0$

Własności sprzężenia

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ dla $z_2 \neq 0$

Dla dowodu własności 2 załóżmy, że $z = a + ib$. Wówczas $z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$, bo $a, b \in \mathbb{R}$.

Własności sprzężenia

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ dla $z_2 \neq 0$

Dla dowodu własności 2 załóżmy, że $z = a + ib$. Wówczas $z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$, bo $a, b \in \mathbb{R}$.

Z własności 2 korzystaliśmy przy dzieleniu liczb zespolonych, mianowicie $w : z = \frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$.

Definicja

Modułem liczby $z = a + ib$ *nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definicja

Modułem liczby $z = a + ib$ *nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *.*

Przykład

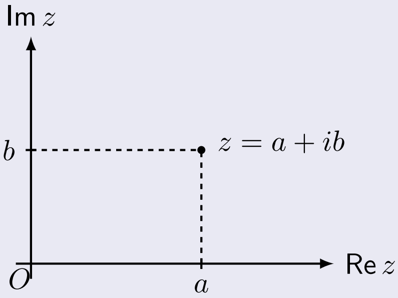
Dla liczby $z = 1 + i\sqrt{3}$ mamy $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Interpretacja geometryczna modułu

Geometrycznie moduł $|z|$ jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych.

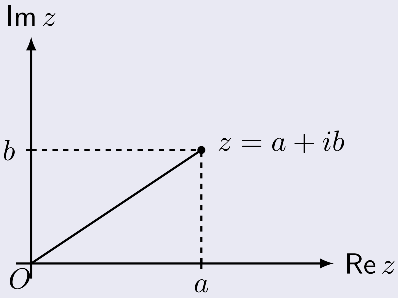
Interpretacja geometryczna modułu

Geometrycznie moduł $|z|$ jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych.



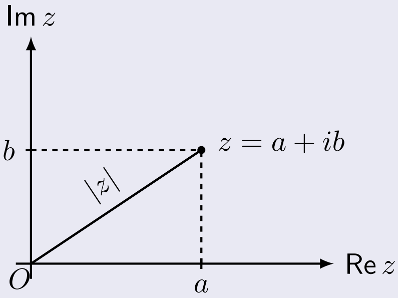
Interpretacja geometryczna modułu

Geometrycznie moduł $|z|$ jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych.



Interpretacja geometryczna modułu

Geometrycznie moduł $|z|$ jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych.



Jeśli $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, to $z = a + 0i$ oraz moduł $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, co jest wartością bezwzględną liczby $a = z$. Dlatego pojęcie modułu liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Jeśli $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, to $z = a + 0i$ oraz moduł $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, co jest wartością bezwzględną liczby $a = z$. Dlatego pojęcie modułu liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Własności modułu

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;

Jeśli $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, to $z = a + 0i$ oraz moduł $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, co jest wartością bezwzględną liczby $a = z$. Dlatego pojęcie modułu liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Własności modułu

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;
2. $|z| = 0$ wtw $z = 0$;

Jeśli $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, to $z = a + 0i$ oraz moduł $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, co jest wartością bezwzględną liczby $a = z$. Dlatego pojęcie modułu liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Własności modułu

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;
2. $|z| = 0$ wtw $z = 0$;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

Jeśli $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, to $z = a + 0i$ oraz moduł $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, co jest wartością bezwzględną liczby $a = z$. Dlatego pojęcie modułu liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Własności modułu

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;
2. $|z| = 0$ wtw $z = 0$;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

Jeśli $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, to $z = a + 0i$ oraz moduł $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, co jest wartością bezwzględną liczby $a = z$. Dlatego pojęcie modułu liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Własności modułu

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;
2. $|z| = 0$ wtw $z = 0$;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ dla $z_2 \neq 0$;

Jeśli $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, to $z = a + 0i$ oraz moduł $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, co jest wartością bezwzględną liczby $a = z$. Dlatego pojęcie modułu liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Własności modułu

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;
2. $|z| = 0$ wtw $z = 0$;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ dla $z_2 \neq 0$;
6. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Jeśli $z = a$ jest liczbą rzeczywistą, to $z = a + 0i$ oraz moduł $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, co jest wartością bezwzględną liczby $a = z$. Dlatego pojęcie modułu liczby zespolonej jest uogólnieniem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Własności modułu

Jeśli z, z_1, z_2 są liczbami zespolonymi, to

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;
2. $|z| = 0$ wtw $z = 0$;
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ dla $z_2 \neq 0$;
6. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Dla dowodu własności 3 i korzystając z wcześniejszych rozważań dla $z = a + ib$ mamy: $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |z|^2$.

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib \neq 0$ można przedstawić w postaci $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right)$.

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib \neq 0$ można przedstawić w postaci $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right)$. Zauważmy, że

$$\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib \neq 0$ można przedstawić w postaci $z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$. Zauważmy, że

$$\left(\frac{a}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{b}{|z|} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

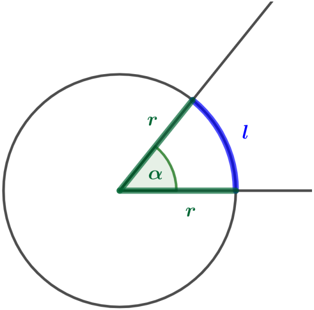
Możemy zatem wprowadzić następującą definicję.

Definicja

Argumentem liczby $z = a + ib \neq 0$ nazywamy każdą liczbę rzeczywistą φ spełniającą dwa warunki:

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} \ , \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Miara łukowa kąta

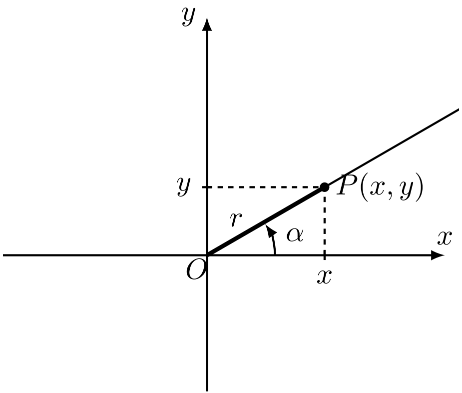


$$\alpha = \frac{\text{długość łuku okręgu opartego na kącie } \alpha}{\text{długość promienia tego okręgu}} = \frac{l}{r}$$

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

$$180^\circ = \pi,\ 90^\circ = \frac{\pi}{2},\ 60^\circ = \frac{\pi}{3},\ 45^\circ = \frac{\pi}{4},\ 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

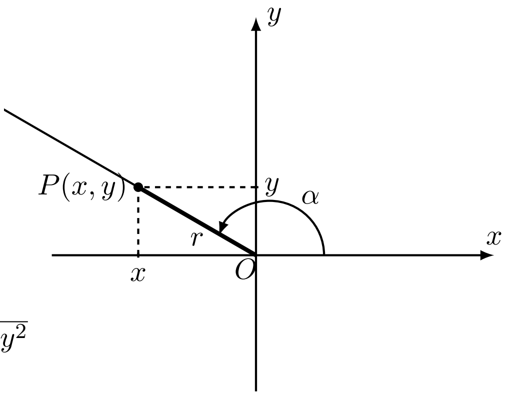
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta skierowanego



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$; $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$; tg$\alpha = \dfrac{y}{x}$, o ile $x \neq 0$; ctg$\alpha = \dfrac{x}{y}$, o ile $y \neq 0$

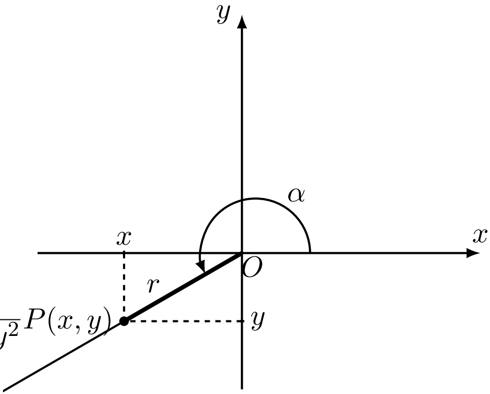
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta skierowanego



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, o ile $x \neq 0$; $\text{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, o ile $y \neq 0$

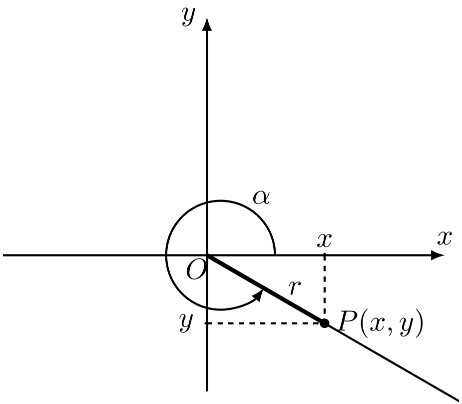
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta skierowanego



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$; $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$; tg$\alpha = \dfrac{y}{x}$, o ile $x \neq 0$; ctg$\alpha = \dfrac{x}{y}$, o ile $y \neq 0$

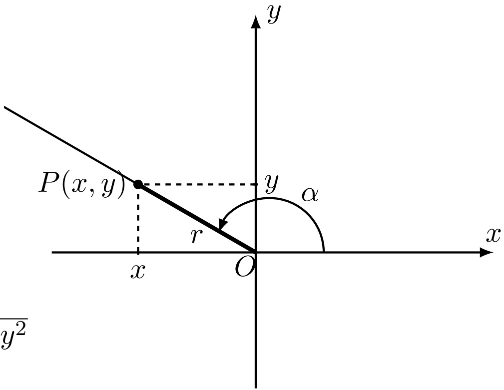
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta skierowanego



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$; $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$; tg$\alpha = \dfrac{y}{x}$, o ile $x \neq 0$; ctg$\alpha = \dfrac{x}{y}$, o ile $y \neq 0$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta skierowanego

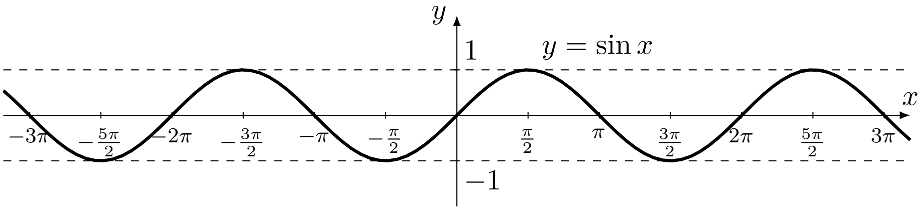


$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

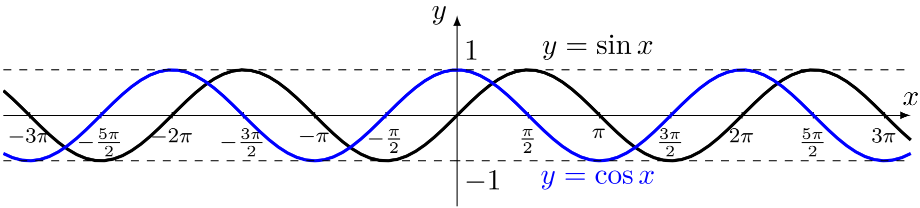
$\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; tg$\alpha = \frac{y}{x}$, o ile $x \neq 0$; ctg$\alpha = \frac{x}{y}$, o ile $y \neq 0$

Wykresy funkcji trygonometrycznych

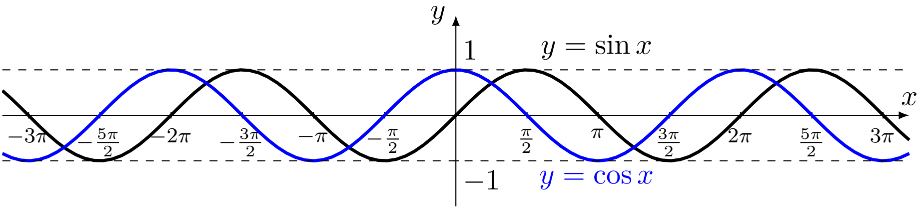
Wykresy funkcji trygonometrycznych



Wykresy funkcji trygonometrycznych



Wykresy funkcji trygonometrycznych



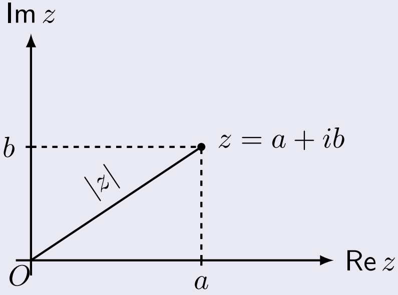
φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Interpretacja geometryczna argumentu

Geometrycznie argument liczby $z = a + ib \neq 0$ jest miarą (w radianach) kąta skierowanego, który półprosta o początku O, na której leży punkt z, tworzy z dodatnią częścią osi rzeczywistej.

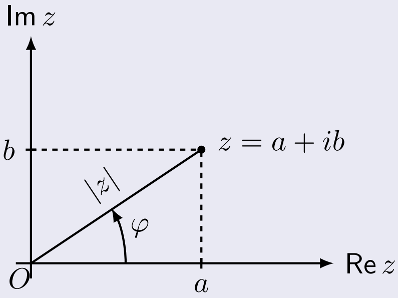
Interpretacja geometryczna argumentu

Geometrycznie argument liczby $z = a + ib \neq 0$ jest miarą (w radianach) kąta skierowanego, który półprosta o początku O, na której leży punkt z, tworzy z dodatnią częścią osi rzeczywistej.



Interpretacja geometryczna argumentu

Geometrycznie argument liczby $z = a + ib \neq 0$ jest miarą (w radianach) kąta skierowanego, który półprosta o początku O, na której leży punkt z, tworzy z dodatnią częścią osi rzeczywistej.



Z okresowości funkcji sinus i cosinus wynika, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele argumentów φ i każde dwa różnią się o całkowitą wielokrotność 2π.

Z okresowości funkcji sinus i cosinus wynika, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele argumentów φ i każde dwa różnią się o całkowitą wielokrotność 2π. Spośród argumentów φ liczby z dokładnie jeden spełnia warunek $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; nazywamy go argumentem głównym liczby z i oznaczamy przez $\arg z$.

Z okresowości funkcji sinus i cosinus wynika, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele argumentów φ i każde dwa różnią się o całkowitą wielokrotność 2π. Spośród argumentów φ liczby z dokładnie jeden spełnia warunek $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; nazywamy go argumentem głównym liczby z i oznaczamy przez $\arg z$.

Uwaga

Argument liczby 0 nie jest określony. W niektórych podręcznikach przyjmuje się, że argument główny należy do przedziału $(-\pi; \pi]$.

Z wcześniejszych równości

$$z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right)\ ,\ \ \cos\varphi = \frac{a}{|z|}\ ,\ \ \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

wynika, że

Twierdzenie

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib \neq 0$ można zapisać postaci

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie φ jest dowolnym argumentem liczby z, zwanej postacią trygonometryczną liczby z.

Przykład

Liczbę $z = -1 + i$ zapisać w postaci trygonometrycznej.

Przykład

Liczbę $z = -1 + i$ zapisać w postaci trygonometrycznej.
Zauważmy, że $a = -1$, $b = 1$.

Przykład

Liczbę $z = -1 + i$ zapisać w postaci trygonometrycznej.
Zauważmy, że $a = -1$, $b = 1$. Wówczas
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Przykład

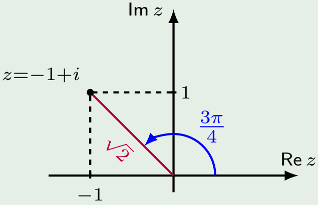
Liczbę $z = -1 + i$ zapisać w postaci trygonometrycznej.
Zauważmy, że $a = -1$, $b = 1$. Wówczas
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ponieważ
$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Przykład

Liczbę $z = -1 + i$ zapisać w postaci trygonometrycznej.
Zauważmy, że $a = -1$, $b = 1$. Wówczas
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ponieważ
$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.
Zatem $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ to postać trygonometryczna podanej liczby.

Przykład

Liczbę $z = -1 + i$ zapisać w postaci trygonometrycznej.
Zauważmy, że $a = -1$, $b = 1$. Wówczas
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ponieważ
$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.
Zatem $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ to postać trygonometryczna podanej liczby.
Tę postać można wywnioskować korzystając z rysunku



Załóżmy, że znamy postać trygonometryczną liczb z_1 i z_2, np. $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Nietrudno zauważyć, że liczby te są równe wtw mają równe moduły i ich argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność 2π, czyli

$$z_1 = z_2 \text{ wtw } \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest pewną liczbą całkowitą} \end{cases}$$

Załóżmy, że znamy postać trygonometryczną liczb z_1 i z_2, np. $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Nietrudno zauważyć, że liczby te są równe wtw mają równe moduły i ich argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność 2π, czyli

$$z_1 = z_2 \text{ wtw } \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest pewną liczbą całkowitą} \end{cases}$$

Przykład

Liczby

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right),\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

są równe, bo

$$|z_1| = \sqrt{2} = |z_2|,\ \varphi_1 = \frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \varphi_2 + 2k\pi \text{ dla } k = 1.$$

Zalety postaci trygonometrycznej liczby zespolonej widać przy mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Zalety postaci trygonometrycznej liczby zespolonej widać przy mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Twierdzenie

Jeśli $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to*

Zalety postaci trygonometrycznej liczby zespolonej widać przy mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Twierdzenie

Jeśli $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to*

1. $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Zalety postaci trygonometrycznej liczby zespolonej widać przy mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Twierdzenie

Jeśli $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to*

1. $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)$

Zalety postaci trygonometrycznej liczby zespolonej widać przy mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Twierdzenie

Jeśli $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to*

1. $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Dla iloczynu liczb z_1, z_2 mamy

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

Zalety postaci trygonometrycznej liczby zespolonej widać przy mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Twierdzenie

Jeśli $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to*

1. $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Dla iloczynu liczb z_1, z_2 mamy

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 +$$
$$+ i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) =$$

Zalety postaci trygonometrycznej liczby zespolonej widać przy mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Twierdzenie

Jeśli $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to*

1. $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Dla iloczynu liczb z_1, z_2 mamy

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 +$$
$$+ i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 +$$
$$+ i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)) =$$

Zalety postaci trygonometrycznej liczby zespolonej widać przy mnożeniu, dzieleniu, potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Twierdzenie

Jeśli $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to*

1. $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Dla iloczynu liczb z_1, z_2 mamy

$$
\begin{aligned}
&z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \\
&+ i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) = \\
&= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \\
&+ i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)) = \\
&= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))
\end{aligned}
$$

Przykład

Dane są liczby $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$.

Przykład

Dane są liczby $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$.
Liczbę z_1 zapiszemy w postaci trygonometrycznej.

Przykład

Dane są liczby $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$.
Liczbę z_1 zapiszemy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, $\cos\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, więc $\varphi_1 = \frac{5\pi}{3}$ i $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.

Przykład

Dane są liczby $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$.
Liczbę z_1 zapiszemy w postaci trygonometrycznej. Ponieważ $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, $\cos\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, więc $\varphi_1 = \frac{5\pi}{3}$ i $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$. Dlatego

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) = \\
&= 2\cdot 4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\right)\right] = \\
&= 8\left(\cos\frac{28\pi}{15} + i\sin\frac{28\pi}{15}\right)
\end{aligned}
$$