

Mamy układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

Mamy układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s & / \cdot d \\ cx + dy = t & / \cdot (-b) \end{cases}$$

Mamy układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s & / \cdot d \\ cx + dy = t & / \cdot (-b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} adx + bdy = sd \\ -bcx - bdy = -bt \end{cases}$$

Mamy układ równań liniowych $(a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R})$, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s & / \cdot d \\ cx + dy = t & / \cdot (-b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} adx + bdy = sd \\ -bcx - bdy = -bt \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy $(ad - bc)x = sd - bt$, a w konsekwencji

$$x = \frac{sd - bt}{ad - bc}, \text{ o ile } ad - bc \neq 0.$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s & / \cdot (-c) \\ cx + dy = t & / \cdot a \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s & / \cdot (-c) \\ cx + dy = t & / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -acx - bcy = -sc \\ acx + ady = at \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s & / \cdot (-c) \\ cx + dy = t & / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -acx - bcy = -sc \\ acx + ady = at \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy $(ad - bc)y = at - sc$, a w konsekwencji

$$y = \frac{at - sc}{ad - bc}, \text{ o ile } ad - bc \neq 0.$$

Przyjmując oznaczenia

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = W,$$

$$sd - bt = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix} = W_x, \quad at - sc = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix} = W_y$$

Przyjmując oznaczenia

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = W,$$

$$sd - bt = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix} = W_x, \quad at - sc = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix} = W_y$$

Otrzymamy wzory

$$x = \frac{W_x}{W}, \quad y = \frac{W_y}{W}, \quad \text{o ile } W \neq 0.$$

Każdej macierzy kwadratowej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

przyporządkujemy element nazywany wyznacznikiem macierzy A i oznaczymy symbolem

$$\det A, |A|, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definicja wyznacznika, którą będziemy się zajmować, jest definicją rekurencyjną, definicją wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia n za pomocą wyznaczników z n macierzy kwadratowych stopnia $n - 1$. Będziemy w niej korzystać z następujących oznaczeń:

dla macierzy kwadratowej A stopnia $n > 1$ przez A_{ij} oznaczamy macierz kwadratową stopnia $n - 1$ powstałą z macierzy A przez wykreślenie z niej i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

dla macierzy kwadratowej A stopnia $n > 1$ przez A_{ij} oznaczamy macierz kwadratową stopnia $n - 1$ powstałą z macierzy A przez wykreślenie z niej i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

Przykład

Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, to macierzą powstałą po wykreśleniu z niej pierwszego wiersza oraz drugiej kolumny jest

$$A_{12} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

- 1 jeżeli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

- 1 jeżeli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- 2 jeżeli $n > 1$, to

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

- 1 jeżeli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- 2 jeżeli $n > 1$, to

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

Zgodnie z tą definicją wyznacznik macierzy kwadratowej A stopnia n obliczamy za pomocą n wyznaczników z macierzy kwadratowych A_{1j} stopnia $n - 1$.

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

- 1 jeżeli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- 2 jeżeli $n > 1$, to

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

Zgodnie z tą definicją wyznacznik macierzy kwadratowej A stopnia n obliczamy za pomocą n wyznaczników z macierzy kwadratowych A_{1j} stopnia $n - 1$.

Na wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia n krótko mówimy wyznacznik stopnia n .

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Tutaj $|a_{11}|$ oznacza $\det[a_{11}]$, $|[a_{11}]|$.

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Tutaj $|a_{11}|$ oznacza $\det[a_{11}]$, $|[a_{11}]|$.

Przykład

$$|2| = 2, \quad |-1| = -1.$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}|$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

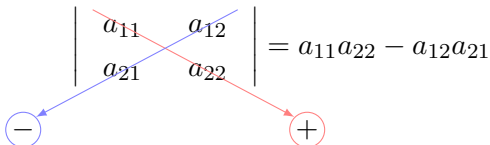
Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

wyznacznik st. 2

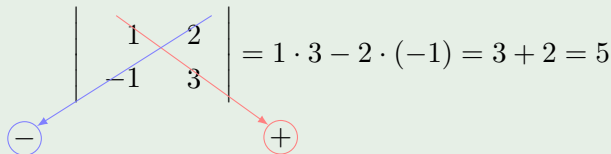
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu



The diagram shows a 2x2 determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. A blue arrow points from a_{11} to a_{22} , and a red arrow points from a_{12} to a_{21} . Below the determinant, there is a blue circle containing a minus sign ($-$) and a red circle containing a plus sign ($+$). The equation is $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Przykład



The diagram shows a 2x2 determinant with numerical values: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$. A blue arrow points from 1 to 3, and a red arrow points from 2 to -1. Below the determinant, there is a blue circle containing a minus sign ($-$) and a red circle containing a plus sign ($+$). The equation is $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5$.

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

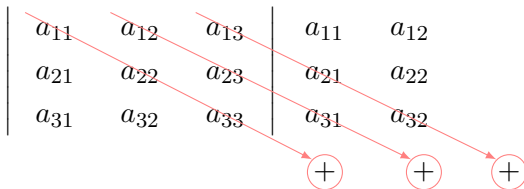
Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

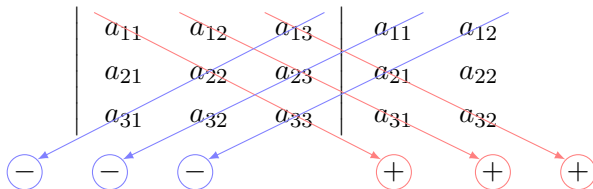
Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacnik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach”



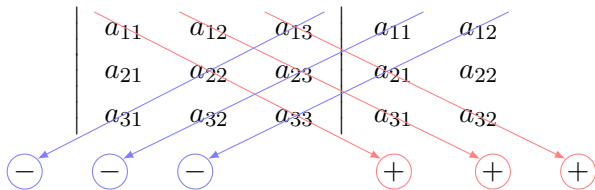
Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacznik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach” oraz opatrzonych znakiem minus iloczynów elementów leżących na „niebieskich strzałkach”.



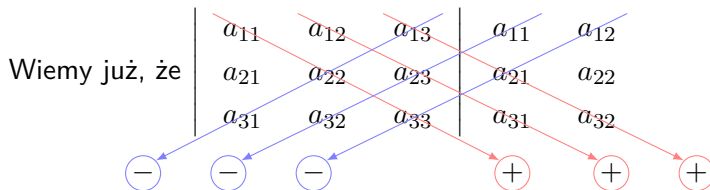
Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacznik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach” oraz opatrzonych znakiem minus iloczynów elementów leżących na „niebieskich strzałkach”.

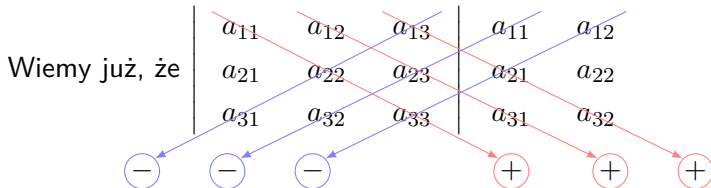


$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Reguła Sarrusa

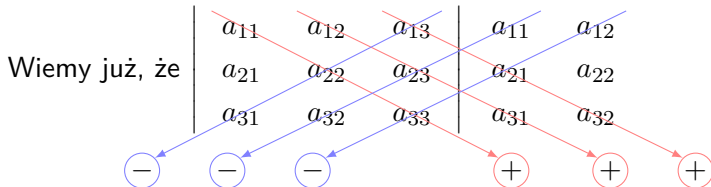


Reguła Sarrusa



Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

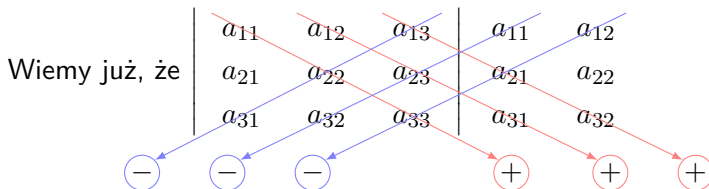
Reguła Sarrusa



Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

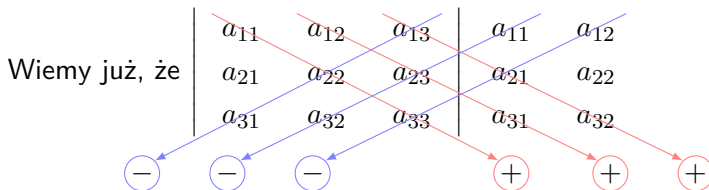
Reguła Sarrusa



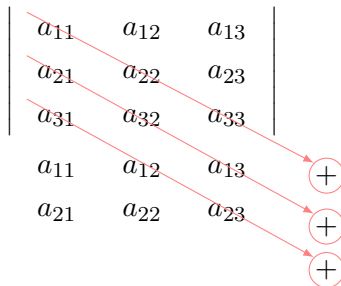
Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \end{array}$$

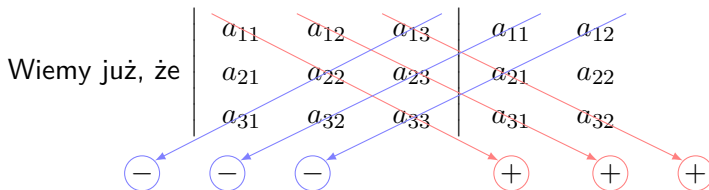
Reguła Sarrusa



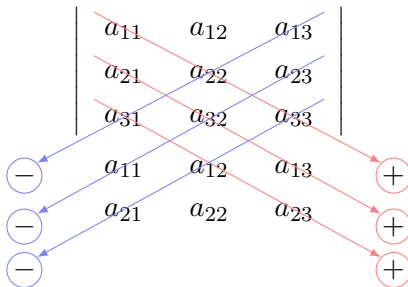
Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.



Reguła Sarrusa

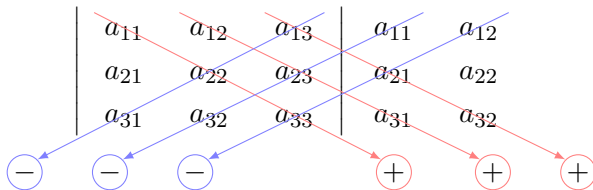


Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.



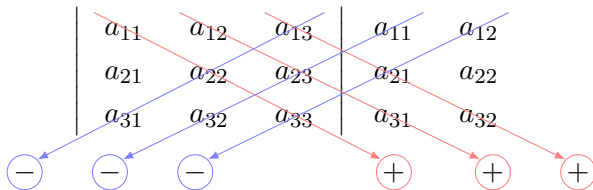
Reguła Sarrusa

Wiemy już, że



Reguła Sarrusa

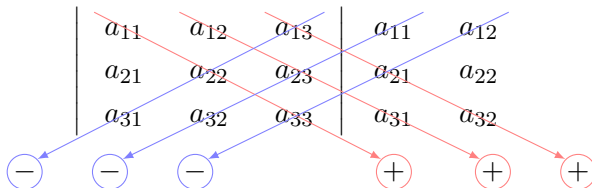
Wiemy już, że



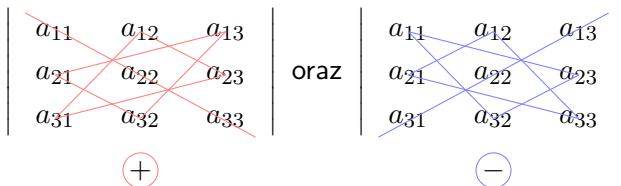
Można też bez dopisywania wierszy i kolumn

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że



Można też bez dopisywania wierszy i kolumn



Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy		1	2	-3	
		-2	0	1	
		5	-1	4	

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ \text{Obliczmy} & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ & 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{array} =$$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy

1	2	-3		1	2
-2	0	1		-2	0
5	-1	4		5	-1

$=$

Diagram illustrating the Sarrus rule for a 3x3 determinant. Red arrows show the products of the elements along the main diagonal (downward) and the anti-diagonal (upward). The signs of the terms are indicated by red circles with '+' signs.

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy

1	2	-3	1	2
-2	0	1	-2	0
5	-1	4	5	-1

=

Diagram illustrating the Sarrus rule for a 3x3 determinant. The first two columns are repeated to the right, forming a 3x5 grid. Blue arrows indicate the positive terms (downward diagonals), and red arrows indicate the negative terms (upward diagonals). The signs for each term are shown in circles below the grid.

Signs: $-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy

1	2	-3	1	2
-2	0	1	-2	0
5	-1	4	5	-1

=

\ominus \ominus \ominus \oplus \oplus \oplus

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) - (-3) \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot 4 = \\ &= 0 + 10 - 6 - 0 + 1 + 16 = 21 \end{aligned}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = -3$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = -3$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(6 - 0) = -6$$

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Twierdzenie (o rozwinięciu Laplace'a)

Dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, oraz dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ zachodzą równości:

- ❶ $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$
rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według i -tego wiersza;
- ❷ $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}$
rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według j -tej kolumny.

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Twierdzenie (o rozwinięciu Laplace'a)

Dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, oraz dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ zachodzą równości:

- ① $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$
rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według i -tego wiersza;
- ② $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}$
rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według j -tej kolumny.

W praktyce, aby ułatwić obliczenia do rozwijania warto wybierać wiersz lub kolumnę z największą liczbą zer.

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego

wiersza, co będziemy zapisywać $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ lub

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ wg } w_3$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3(-2 + 6) + (-1)(-1 + 6) = 12 - 5 = 7$$

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trójkątna górna ($a_{ij} = 0$ dla $i > j$)

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trójkątna górna ($a_{ij} = 0$ dla $i > j$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trójkątna dolna ($a_{ij} = 0$ dla $i < j$)

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wniosek

$\det I_n = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$

Własności wyznaczników

- ❶ Jeśli chociaż jeden wiersz (kolumna) wyznacznika składa się z samych zer, to wyznacznik jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - a_{12}ka_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - a_{12}ka_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Zatem $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Własności wyznaczników

- 2 Wspólny czynnik wszystkich elementów dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć przed wyznacznik, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników

- 2 Wspólny czynnik wszystkich elementów dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć przed wyznacznik, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 3 Jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n , to dla każdej liczby k mamy $\det(kA) = k^n \det A$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

do elementów drugiego wiersza dodamy odpowiadające im elementy pierwszego wiersza pomnożone przez liczbę c

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22} + ca_{12}) - a_{12}(a_{21} + ca_{11}) =$$

$$= a_{11}a_{22} + ca_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} - ca_{12}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zatem $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix}$

- 4 Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

Własności wyznaczników

- 4 Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{\widetilde{w}_i = w_i + cw_j}}$$

Własności wyznaczników

- 4 Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{\widetilde{w}_i = w_i + cw_j}}$$

do elementów i -tego wiersza dodamy odpowiadające im elementy j -tego wiersza pomnożone przez tę samą liczbę c , krótko: do i -tego wiersza dodajemy j -ty wiersz pomnożony przez c (symbolicznie $w_i + cw_j$)

Własności wyznaczników

- 4 Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \dots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{w}_i = w_i + cw_j$$

Własności wyznaczników

- 5 Zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \xleftrightarrow{w_i \longleftrightarrow w_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

zamieniamy miejscami wiersze i -ty oraz j -ty (symbolicznie $w_i \longleftrightarrow w_j$)

Własności wyznaczników

- 6 Wyznacznik, w którym dwa wiersze (kolumny) są jednakowe, jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Własności wyznaczników

- 6 Wyznacznik, w którym dwa wiersze (kolumny) są jednakowe, jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 7 $\det(A^T) = \det A$

Własności wyznaczników - przykłady

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{w_1 \longleftrightarrow w_4}}$$

zamieniamy wiersz pierwszy i czwarty miejscami; musimy pamiętać, że wyznacznik wówczas zmieni znak

Własności wyznaczników - przykłady

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\underline{w_1 \longleftrightarrow w_4}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2) = -18$$

zamieniamy wiersz pierwszy i czwarty miejscami; musimy pamiętać, że wyznacznik wówczas zmieni znak

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array}$$

do wiersza drugiego dodajemy wiersz czwarty pomnożony przez 2, a do wiersza trzeciego wiersz czwarty pomnożony przez -3 , a następnie otrzymany wyznacznik rozwiniemy wg pierwszej kolumny

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2+2 & 4+4 & 2+(-6) & 5+4 \\ 3+(-3) & -1+(-6) & 3+9 & 2+(-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \hline \hline \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2+2 & 4+4 & 2+(-6) & 5+4 \\ 3+(-3) & -1+(-6) & 3+9 & 2+(-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2+2 & 4+4 & 2+(-6) & 5+4 \\ 3+(-3) & -1+(-6) & 3+9 & 2+(-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_4}]{\widetilde{w_2=w_2+2w_4}} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_1}]{\widetilde{w_2=w_2+w_1}}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_4}]{\widetilde{w_2=w_2+2w_4}} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_1}]{\widetilde{w_2=w_2+w_1}}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_4}]{\widetilde{w_2=w_2+2w_4}} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_1}]{\widetilde{w_2=w_2+w_1}}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_4}]{\widetilde{w_2=w_2+2w_4}} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_1}]{\widetilde{w_2=w_2+w_1}} =$$
$$= (-1) \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} =$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_4}]{\widetilde{w_2=w_2+2w_4}} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\widetilde{w_3=w_3+(-3)w_1}]{\widetilde{w_2=w_2+w_1}}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-1 - 112) = 4 \cdot (-113) = -452$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim
prawidłowości

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \widetilde{k}_1 = k_1 + (-1)k_2 \\ \hline \widetilde{k}_3 = k_3 + (-1)k_4 \end{array}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \tilde{k}_1 = k_1 + (-1)k_2 \\ \hline \hline \tilde{k}_3 = k_3 + (-1)k_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 1 & 9 \\ 1 & 15 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \widetilde{k}_1 = k_1 + (-1)k_2 \\ \widetilde{k}_3 = k_3 + (-1)k_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 1 & 9 \\ 1 & 15 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 0,$$

bo $k_1 = k_3$

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Z tw. Cauchy'ego wynika, że wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia nie zależy od kolejności czynników, czyli

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A)$$

Przez A^n oznaczmy n -tą potęgę macierzy kwadratowej A .

Przez A^n oznaczmy n -tą potęgę macierzy kwadratowej A .
Definiujemy ją rekurencyjnie:

$$A^1 = A$$

$$A^{n+1} = A^n A \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Przez A^n oznaczmy n -tą potęgę macierzy kwadratowej A .
Definiujemy ją rekurencyjnie:

$$A^1 = A$$

$$A^{n+1} = A^n A \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Z tw. Cauchy'ego wynika, że

$$\det(A^n) = (\det A)^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ obliczyć $\det(A^7)$.