

Mamy układ równań liniowych ($a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R}$), który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

Mamy układ równań liniowych ($a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R}$), który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s / \cdot d \\ cx + dy = t / \cdot (-b) \end{cases}$$

Mamy układ równań liniowych ($a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R}$), który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s / \cdot d \\ cx + dy = t / \cdot (-b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} adx + bdy = sd \\ -bcx - bdy = -bt \end{cases}$$

Mamy układ równań liniowych ($a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R}$), który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} ax + by = s / \cdot d \\ cx + dy = t / \cdot (-b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} adx + bdy = sd \\ -bcx - bdy = -bt \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy $(ad - bc)x = sd - bt$, a w konsekwencji

$$x = \frac{sd - bt}{ad - bc}, \text{ o ile } ad - bc \neq 0.$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s / \cdot (-c) \\ cx + dy = t / \cdot a \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s / \cdot (-c) \\ cx + dy = t / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -acx - bcy = -sc \\ acx + ady = at \end{cases}$$

Analogicznie

$$\begin{cases} ax + by = s / \cdot (-c) \\ cx + dy = t / \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -acx - bcy = -sc \\ acx + ady = at \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy $(ad - bc)y = at - sc$, a w konsekwencji

$$y = \frac{at - sc}{ad - bc}, \text{ o ile } ad - bc \neq 0.$$

Przyjmując oznaczenia

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = W,$$

$$sd - bt = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix} = W_x, \quad at - sc = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix} = W_y$$

Przyjmując oznaczenia

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = W,$$

$$sd - bt = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix} = W_x, \quad at - sc = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix} = W_y$$

Otrzymamy wzory

$$x = \frac{W_x}{W}, \quad y = \frac{W_y}{W}, \quad \text{o ile } W \neq 0.$$

Każdej macierzy kwadratowej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

przyporządkujemy element nazywany wyznacznikiem macierzy A i oznaczmy symbolem

$$\det A, |A|, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definicja wyznacznika, którą będziemy się zajmować, jest definicją rekurencyjną, definicję wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia n za pomocą wyznaczników z n macierzy kwadratowych stopnia $n - 1$. Będziemy w niej korzystać z następujących oznaczeń:

dla macierzy kwadratowej A stopnia $n > 1$ przez A_{ij} oznaczamy macierz kwadratową stopnia $n - 1$ powstałą z macierzy A przez wykreślenie z niej i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

dla macierzy kwadratowej A stopnia $n > 1$ przez A_{ij} oznaczamy macierz kwadratową stopnia $n - 1$ powstałą z macierzy A przez wykreślenie z niej i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

Przykład

Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, to macierzą powstałą po wykreśleniu z niej pierwszego wiersza oraz drugiej kolumny jest

$$A_{12} = \left[\begin{array}{ccc} \cancel{1} & \cancel{2} & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{array} \right]$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

- ① jeżeli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

- ① jeżeli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- ② jeżeli $n > 1$, to

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

- ① jeżeli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- ② jeżeli $n > 1$, to

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

Zgodnie z tą definicją wyznacznik macierzy kwadratowej A stopnia n obliczamy za pomocą n wyznaczników z macierzy kwadratowych A_{1j} stopnia $n - 1$.

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$, którą definiujemy rekurencyjnie:

- ① jeżeli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- ② jeżeli $n > 1$, to

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

Zgodnie z tą definicją wyznacznik macierzy kwadratowej A stopnia n obliczamy za pomocą n wyznaczników z macierzy kwadratowych A_{1j} stopnia $n - 1$.

Na wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia n krótko mówimy wyznacznik stopnia n .

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Tutaj $|a_{11}|$ oznacza $\det[a_{11}]$, $|[a_{11}]|$.

Dla macierzy kwadratowych małego stopnia mamy nietrudne sposoby wyznaczania ich wyznaczników.

Korzystając z definicji mamy

wyznacznik st. 1

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Tutaj $|a_{11}|$ oznacza $\det[a_{11}]$, $|[a_{11}]|$.

Przykład

$$|2| = 2, |-1| = -1.$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}|$$

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

wyznacznik st. 2

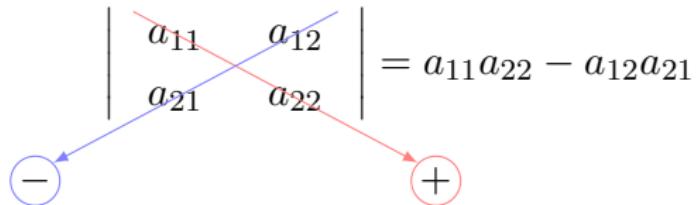
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu

wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

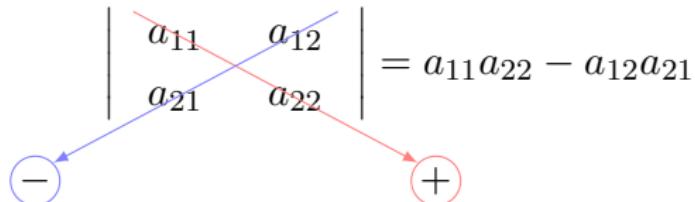
Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu



wyznacznik st. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Powyższy wzór sprowadza się do następującego schematu



Przykład

The diagram shows a 2x2 matrix with elements 1, 2, -1, and 3. Red diagonal lines cross out 1 and 3. Blue arrows point from 2 to a minus sign circle and from -1 to a plus sign circle. The result is $= 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 3 + 2 = 5$.

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

wyznacznik st. 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa.

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopisujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny.

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

Reguła Sarrusa

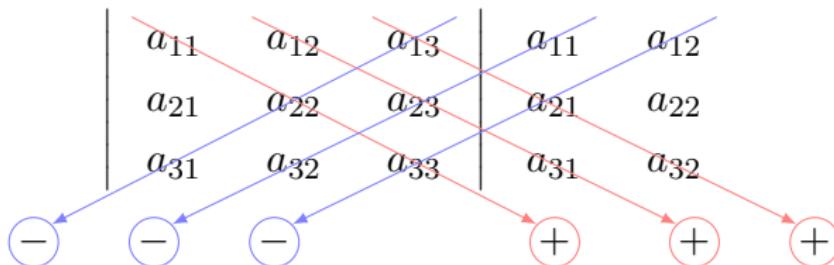
Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopusujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacznik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach”

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

The diagram shows a 3x3 matrix with its first two columns repeated to the right of a vertical bar. Red arrows originate from the first column elements a_{11} , a_{21} , and a_{31} and point to the corresponding elements in the third column (a_{12} , a_{22} , a_{32}). Below the second and third columns, there are three red circles, each containing a plus sign, indicating that the sum of the products along these paths represents a term in the expansion of the determinant.

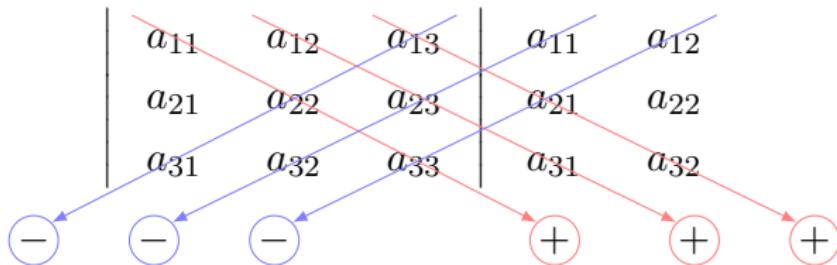
Reguła Sarrusa

Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopusujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacznik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach” oraz opatrzonych znakiem minus iloczynów elementów leżących na „niebieskich strzałkach”.



Reguła Sarrusa

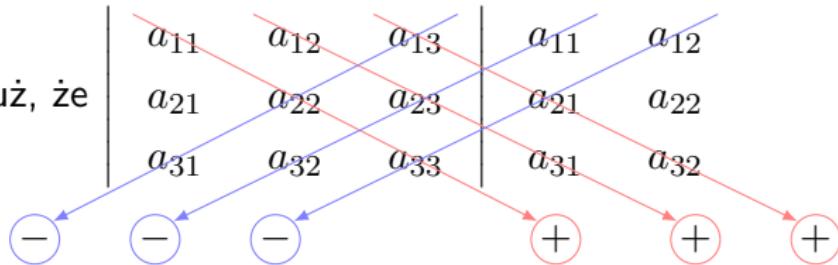
Otrzymany wzór sprowadza się do następującego schematu, zwanego regułą Sarrusa. Dopusujemy na prawo od wyznacznika dwie pierwsze kolumny. Widać, że wyznacznik jest sumą iloczynów elementów leżących na „czerwonych strzałkach” oraz opatrzonych znakiem minus iloczynów elementów leżących na „niebieskich strzałkach”.



$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

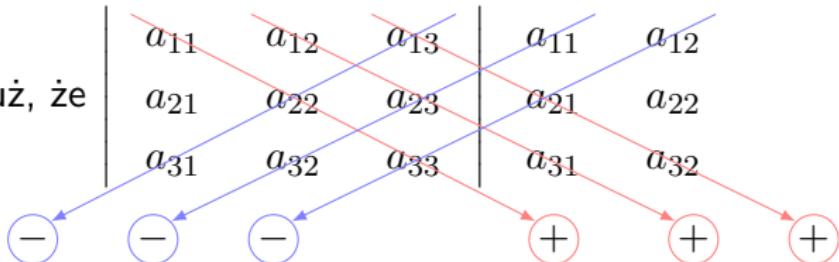
Reguła Sarrusa

Wiemy już, że



Reguła Sarrusa

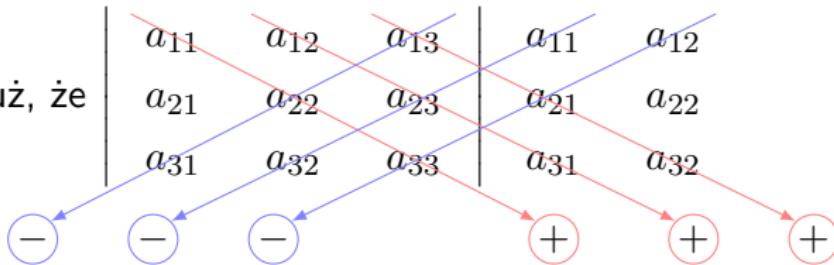
Wiemy już, że



Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że

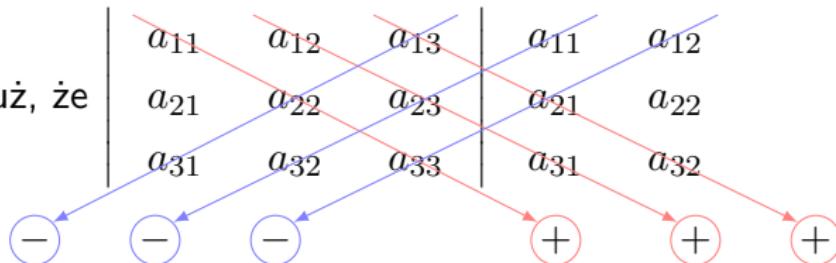


Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że

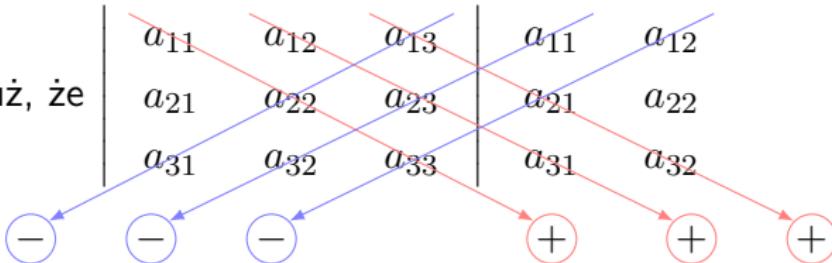


Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

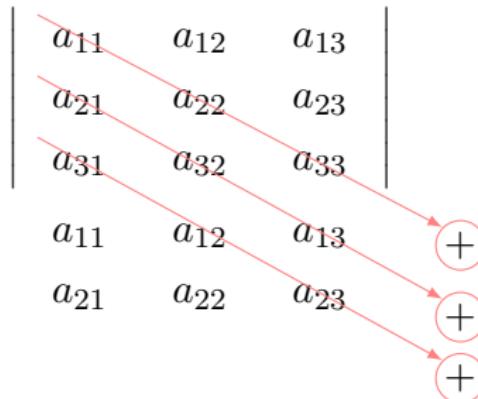
$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$
$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że

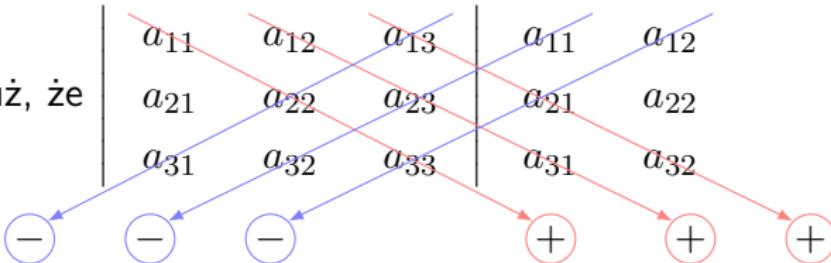


Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.

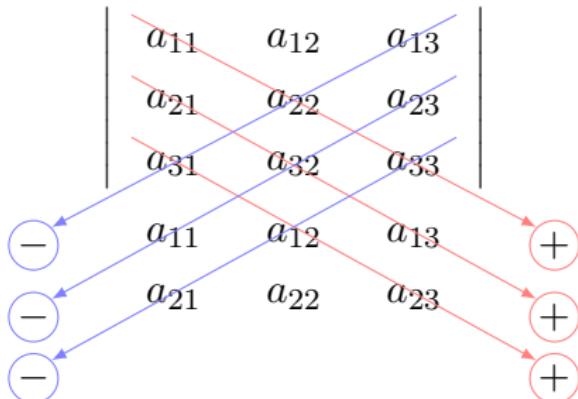


Reguła Sarrusa

Wiemy już, że

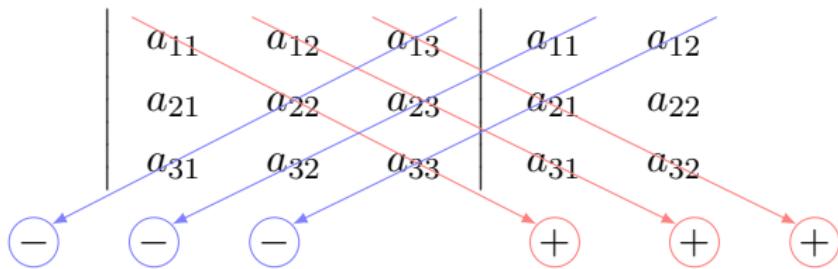


Można też dopisywać pod wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze, a dalej postępować tak jak poprzednio.



Reguła Sarrusa

Wiemy już, że



Reguła Sarrusa

Wiemy już, że

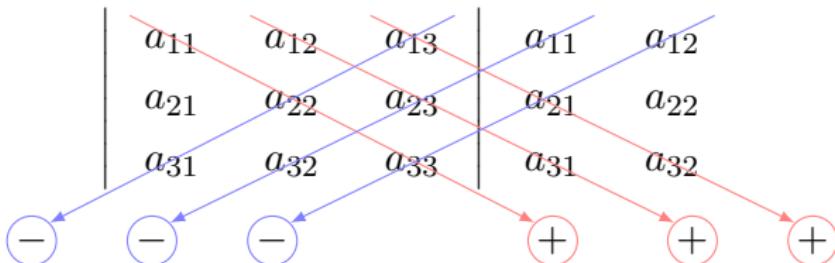
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{31}$$

The diagram shows a 3x3 matrix with elements a_{ij} . Red lines cross out the first two columns and the third row. Blue lines connect the elements of the first column to the first three circles below, each marked with a minus sign. Blue lines connect the elements of the second column to the next three circles, also marked with minus signs. Red lines connect the elements of the third column to the last three circles below, each marked with a plus sign.

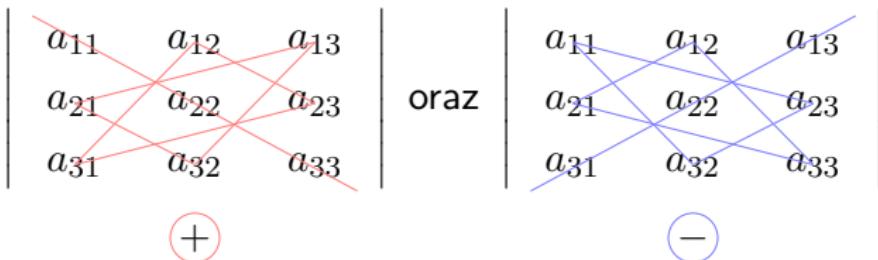
Można też bez dopisywania wierszy i kolumn

Reguła Sarrusa

Wiemy już, że



Można też bez dopisywania wierszy i kolumn



Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \\ -2 & 0 & 1 & \\ 5 & -1 & 4 & \end{array} \right|$$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{array} \right| =$$

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{array} \right| =$$

The diagram shows the application of the Rule of Sarrus to a 3x3 matrix. Red lines connect the first two columns to the first column of the result, and the third column to the second column of the result. Red arrows point from the bottom-right entries of these lines to three red circles containing '+' signs.

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 5 \end{array} \right| =$$

The diagram shows the application of the Rule of Sarrus to a 3x3 matrix. The matrix is partitioned into a left part (coefficients) and a right part (constant terms). Red lines connect the first column to the first row, and blue lines connect the second and third columns to the second and third rows, respectively. Blue arrows point from the first column to the first row, while red arrows point from the second and third columns to the second and third rows. The result is a sum of three terms: one positive (from the first row) and two negative (from the second and third rows).

Reguła Sarrusa

Uwaga

Reguła Sarrusa dotyczy tylko wyznaczników st. 3

Przykład

Obliczmy
$$\begin{array}{c|ccc|cc} & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ & 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \\ \hline & - & - & - & + & + & + \end{array} =$$

$= 1 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) - (-3) \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot 4 =$

$= 0 + 10 - 6 - 0 + 1 + 16 = 21$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = -3$$

Definicja

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = -3$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(6 - 0) = -6$$

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Twierdzenie (o rozwinięciu Laplace'a)

Dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, oraz dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ zachodzą równości:

- ① $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$
rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według i -tego wiersza;
- ② $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}$
rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według j -tej kolumny.

Definicja wyznacznika wyróżnia pierwszy wiersz, ale równie dobrze można wyróżnić inny wiersz lub inną kolumnę.

Twierdzenie (o rozwinięciu Laplace'a)

Dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, gdzie $n > 1$, oraz dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ zachodzą równości:

- ① $\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}$
rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według i -tego wiersza;
- ② $\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}$
rozwinięcie Laplace'a wyznacznika według j -tej kolumny.

W praktyce, aby ułatwić obliczenia do rozwijania warto wybierać wiersz lub kolumnę z największą liczbą zer.

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza, co będziemy zapisywać $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ lub

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ wg } w_3$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \\ + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczymy wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rozwijając go wg trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \\ + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3(-2 + 6) + (-1)(-1 + 6) = 12 - 5 = 7$$

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trójkątna górska ($a_{ij} = 0$ dla $i > j$)

Definicja

Macierzą trójkątną górną (dolną) nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poniżej (powyżej) głównej przekątnej są zerami.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trójkątna górna ($a_{ij} = 0$ dla $i > j$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trójkątna dolna ($a_{ij} = 0$ dla $i < j$)

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wniosek

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wniosek

$\det I_n = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$

Własności wyznaczników

Własności wyznaczników

- Jeśli chociaż jeden wiersz (kolumna) wyznacznika składa się z samych zer, to wyznacznik jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - a_{12}ka_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - a_{12}ka_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Zatem $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Własności wyznaczników

- ② Wspólny czynnik wszystkich elementów dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć przed wyznacznik, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników

- ② Wspólny czynnik wszystkich elementów dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć przed wyznacznik, tzn.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- ③ Jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n , to dla każdej liczby k mamy $\det(kA) = k^n \det A$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

do elementów drugiego wiersza dodamy odpowiadające im elementy pierwszego wiersza pomnożone przez liczbę c

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22} + ca_{12}) - a_{12}(a_{21} + ca_{11}) =$$

$$= a_{11}a_{22} + ca_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} - ca_{12}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zatem $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix}$

Własności wyznaczników

- ④ Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

Własności wyznaczników

- 4 Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \quad \underline{\underline{\tilde{w}_i = w_i + cw_j}}$$

Własności wyznaczników

- 4 Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \xrightarrow{\widetilde{w}_i = w_i + cw_j}$$

do elementów i -tego wiersza dodamy odpowiadające im elementy j -tego wiersza pomnożone przez tę samą liczbę c , krótko: do i -tego wiersza dodajemy j -ty wiersz pomnożony przez c (symbolicznie $w_i + cw_j$)

Własności wyznaczników

- 4 Wyznacznik nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, tzn.

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \dots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} =$$

$$\widetilde{w}_i = w_i + cw_j$$

Własności wyznaczników

- 5 Zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika.

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \xrightarrow[w_i \longleftrightarrow w_j]{} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|$$

zamieniamy miejscami wiersze i -ty oraz j -ty (symbolicznie $w_i \longleftrightarrow w_j$)

Własności wyznaczników

- ⑥ Wyznacznik, w którym dwa wiersze (kolumny) są jednakowe, jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Własności wyznaczników

- 6 Wyznacznik, w którym dwa wiersze (kolumny) są jednakowe, jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 7 $\det(A^T) = \det A$

Własności wyznaczników - przykłady

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow[w_1 \longleftrightarrow w_4]{\cong}$$

zamieniamy wiersz pierwszy i czwarty miejscami; musimy pamiętać, że wyznacznik wówczas zmieni znak

Własności wyznaczników - przykłady

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_4} - \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right| = -(1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2) = -18$$

zamieniamy wiersz pierwszy i czwarty miejscami; musimy pamiętać, że wyznacznik wówczas zmieni znak

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \widetilde{w_2=w_2+2w_4} \\ \hline \widetilde{w_3=w_3+(-3)w_4} \end{array}$$

do wiersza drugiego dodajemy wiersz czwarty pomnożonony przez 2, a do wiersza trzeciego wiersz czwarty pomnożony przez -3 , a następnie otrzymany wyznacznik rozwinie my wg pierwszej kolumny

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array}}$$
$$= \left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 + 2 & 4 + 4 & 2 + (-6) & 5 + 4 \\ 3 + (-3) & -1 + (-6) & 3 + 9 & 2 + (-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right|$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array}} \\ = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 + 2 & 4 + 4 & 2 + (-6) & 5 + 4 \\ 3 + (-3) & -1 + (-6) & 3 + 9 & 2 + (-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| = \\ = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array} \\ = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 + 2 & 4 + 4 & 2 + (-6) & 5 + 4 \\ 3 + (-3) & -1 + (-6) & 3 + 9 & 2 + (-6) \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| = \\ = \left| \begin{array}{rrrr} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \widetilde{w_2=w_2+2w_4} \\ \widetilde{w_3=w_3+(-3)w_4} \end{array}} \left| \begin{array}{ccccc} 0 & -7 & 4 & -1 & \\ 0 & 8 & -4 & 9 & \\ 0 & -7 & 12 & -4 & \\ 1 & 2 & -3 & 2 & \end{array} \right| =$$
$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \widetilde{w_2=w_2+w_1} \\ \widetilde{w_3=w_3+(-3)w_1} \end{array}}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \widetilde{w_2} = w_2 + w_1 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_1 \end{array} \right.$$

$$= (-1) \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array} \right. \left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \widetilde{w_2} = w_2 + w_1 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_1 \end{array} \right.$$

$$= (-1) \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \widetilde{w_2}=w_2+2w_4 \\ \widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_4 \end{array}} \left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \widetilde{w_2}=w_2+w_1 \\ \widetilde{w_3}=w_3+(-3)w_1 \end{array}}$$

$$= (-1) \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{array} \right| = (-1) \cdot 4 \cdot (-1)^{1+2} \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 14 & -1 \end{array} \right| =$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + 2w_4 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_4 \end{array}} \left| \begin{array}{cccc} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 9 \\ 0 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right| =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 8 & -4 & 9 \\ -7 & 12 & -4 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} \widetilde{w_2} = w_2 + w_1 \\ \widetilde{w_3} = w_3 + (-3)w_1 \end{array}}$$

$$= (-1) \left| \begin{array}{ccc} -7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & 0 & -1 \end{array} \right| = (-1) \cdot 4 \cdot (-1)^{1+2} \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 14 & -1 \end{array} \right| =$$

$$= 4(-1 - 112) = 4 \cdot (-113) = -452$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{---} \\ \widetilde{k}_1 = k_1 + (-1)k_2 \\ \text{---} \\ \widetilde{k}_3 = k_3 + (-1)k_4 \end{array}$$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\left| \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 1 & 9 \\ 1 & 15 & 1 & 13 \end{array} \right|$$

$\frac{\tilde{k}_1 = k_1 + (-1)k_2}{\tilde{k}_3 = k_3 + (-1)k_4}$

Własności wyznaczników - przykłady cd.

Obliczyć wyznacznik wykorzystując występujące w nim prawidłowości

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix} \left| \begin{array}{l} \xrightarrow{k_1=k_1+(-1)k_2} \\ \xrightarrow{k_3=k_3+(-1)k_4} \end{array} \right. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 1 & 9 \\ 1 & 15 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 0,$$

bo $k_1 = k_3$

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Istotną rolę pełni twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Z tw. Cauchy'ego wynika, że wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia nie zależy od kolejności czynników, czyli

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A)$$

Przez A^n oznaczymy n -tą potęgę macierzy kwadratowej A .

Przez A^n oznaczymy n -tą potęgę macierzy kwadratowej A .
Definiujemy ją rekurencyjnie:

$$A^1 = A$$

$$A^{n+1} = A^n A \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Przez A^n oznaczymy n -tą potęgę macierzy kwadratowej A .
Definiujemy ją rekurencyjnie:

$$A^1 = A$$

$$A^{n+1} = A^n A \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Z tw. Cauchy'ego wynika, że

$$\det(A^n) = (\det A)^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

Przykład

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ obliczyć $\det(A^7)$.