Curs 1

Cristian Niculescu

1 Introducere

Bibliografie:
Jeremy Orloff, Jonathan Bloom, *Introduction to Probability and Statistics*, MIT OpenCourseWare, 2014
Cristian Niculescu, *Probabilităţi şi statistică*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2015

1.1 Probabilităţi vs. statistică

Probabilităţile şi statistica sunt strâns legate deoarece toate afirmaţiile statistice sunt la bază afirmaţii despre probabilităţi. În ciuda acestui fapt, cele 2 domenii se simt uneori ca subiecte foarte diferite. Probabilităţile sunt independente logic; sunt câteva reguli şi toate răspunsurile rezultă logic din aceste reguli, cu toate că pot fi calcule complicate. În statistică aplicăm probabilităţile pentru a trage concluzii din date.

Exemplu probabilistic

Avem o monedă corectă (probabilităţi egale pentru avers sau revers). O aruncăm de 100 de ori. Care este probabilitatea a cel puţin 60 de aversuri? Există un singur răspuns (aproximativ 0.02844397) care poate fi obţinut cu comanda în R

1-pbinom(59,100,1/2)

Exemplu statistic

Avem o monedă de provenienţă necunoscută. Pentru a investiga dacă este corectă o aruncăm de 100 de ori şi numărăm aversurile. Să spunem că numărăm 60 de aversuri. Sarcina noastră ca statisticieni este să tragem o concluzie (inferenţă) din aceste date. Sunt multe moduri de a proceda, atât în termeni de forma pe care o ia concluzia, cât şi în ce priveşte calculele probabilităţilor folosite pentru a justifica concluzia. De fapt, statisticieni diferiţi pot trage concluzii diferite.

Observăm că în primul exemplu procesul aleator este deplin cunoscut (probabilitatea aversului = 0.5). Obiectivul este să găsim probabilitatea unui anume rezultat (cel puţin 60 de aversuri) provenind din procesul aleator. În al 2-lea exemplu, rezultatul este cunoscut (60 de aversuri) şi obiectivul este să clarificăm procesul aleator necunoscut (probabilitatea aversului).

1.2 Interpretări frecvenţioniste vs. Bayesiene

Există 2 şcoli proeminente şi uneori conflictuale de statistică: Bayesiană şi frecvenţionistă. Abordările lor sunt bazate pe interpretări diferite ale sensului probabilităţii.

Frecvenţioniştii spun că probabilitatea măsoară frecvenţa diferitelor rezultate ale unui experiment. De exemplu, spunând că o monedă corectă are o probabilitate de 50% a aversurilor înseamnă că, dacă o vom arunca de multe ori, atunci ne aşteptăm ca aproximativ jumătate din aruncări să fie aversuri.

Bayesienii spun că probabilitatea este un concept abstract care măsoară o stare de cunoaştere sau un grad de încredere într-o propoziţie dată. În practică, Bayesienii nu atribuie o singură valoare pentru probabilitatea aversului unei monede. Mai degrabă ei consideră un domeniu de valori, fiecare cu propria probabilitate de a fi adevărată.

Abordarea frecvenţionistă a fost mult timp dominantă în domenii ca biologia, medicina, sănătatea publică şi ştiinţele sociale. Abordarea Bayesiană s-a bucurat de o renaştere în era computerelor performante şi datelor mari. Este utilă în special când se încorporează date noi într-un model statistic existent, de exemplu, când se antrenează un sistem de recunoaştere a vorbirii sau a feţei. Astăzi, statisticienii creează instrumente puternice folosind ambele abordări în moduri complementare.

1.3 Aplicaţii, modele didactice şi simulare

Probabilităţile şi statistica sunt larg folosite în ştiinţele naturii, inginerie, medicină, ştiinţele sociale, economie, genetică, fizică, electronică, cercetări operaţionale, actuariat, studiul sistemelor complexe şi îmbunătăţirea fiabilităţii lor, teoria finanţelor şi informatică. Lista aplicaţiilor este mare: teste ale unui tratament medical contra altuia (sau a unui placebo), măsuri ale legăturii genetice, căutarea particulelor elementare, învăţarea automată pentru vedere sau vorbire, strategii şi probabilităţi de jocuri de noroc, meteorologie, prognoză economică, epidemiologie, marketing, căutare pe net...

Date fiind atât de multe aplicaţii captivante, poate vă miraţi de ce vom consuma atât de mult timp gândindu-ne la modele didactice ca monede şi zaruri. Înţelegându-le pe acestea cu desăvârşire, vom dezvolta un bun simţ pentru fondul simplu interior multor probleme complexe din lumea reală. De fapt, modesta monedă este un model realist pentru orice situaţii cu 2 rezultate

posibile: succes sau eşec al unui tratament, motor de avion, pariu, sau chiar al unui curs.
Uneori o problemă este atât de complicată încât cel mai bun mod de înţelegere a ei este prin simulare pe computer. Aici folosim software pentru a face experimente *virtuale* de multe ori pentru a estima probabilităţi.

2 Numărare şi mulţimi

2.1 Scopurile învăţării

1. Să ştie definiţiile şi notaţiile pentru mulţimi, intersecţie, reuniune, complementară.
2. Să poată să vizualizeze operaţiile cu mulţimi folosind diagrame Venn.
3. Să înţeleagă cum este folosită numărarea la calculul probabilităţilor.
4. Să poată folosi regula produsului, principiul includerii şi al excluderii, permutările, aranjamentele şi combinările pentru a calcula numărul elementelor unei mulţimi.

2.2 Numărare

2.2.1 Întrebări motivante

Exemplul 1. O monedă este *corectă* dacă, aruncând-o, obţinem avers sau revers cu aceeaşi probabilitate. Aruncăm o monedă de 3 ori. Care este probabilitatea să obţinem exact un avers?
Răspuns: Cu 3 aruncări, putem lista uşor cele 8 cazuri posibile (avers = H, revers = T):

$$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

3 din aceste cazuri au exact 1 avers:

$$\{HTT, THT, TTH\}.$$

Deoarece toate cazurile sunt egal probabile, avem

$$P(\text{1 avers în 3 aruncări}) = \frac{\text{numărul de cazuri cu 1 avers}}{\text{numărul total de cazuri}} = \frac{3}{8}.$$

Gândiţi: Ar fi practică listarea cazurilor la 10 aruncări?

Un pachet de 52 de cărţi de joc are 13 ranguri (2,3,...,9,10,J,Q,K,A) şi 4 culori ($\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit$). O mână de poker constă în 5 cărţi. *O pereche* este o

mână care constă în 2 cărţi având un rang şi 3 cărţi având alte 3 ranguri, de exemplu, $\{3\clubsuit, 3\diamondsuit, 5\heartsuit, 8\spadesuit, 10\spadesuit\}$.
Testaţi-vă intuiţia: probabilitatea unei perechi este:
(a) sub 5%
(b) între 5% şi 10%
(c) între 10% şi 20%
(d) între 20% şi 40%
(e) peste 40%.
În acest moment putem doar să ghicim această probabilitate. Unul din scopurile noastre este să învăţăm cum s-o calculăm exact. Pentru a începe, observăm că, deoarece fiecare mulţime de 5 cărţi este egal probabilă, putem calcula probabilitatea unei perechi astfel

$$P(\text{o pereche}) = \frac{\text{numărul de "o pereche"}}{\text{numărul total de mâini}}.$$

Deci, pentru a afla probabilitatea exactă, avem nevoie să calculăm numărul de elemente din fiecare din aceste mulţimi. Şi trebuie s-o facem iscusit, deoarece sunt prea multe elemente pentru a le lista pe toate.
Răspunsul este
$P(\text{o pereche}) = \frac{\text{numărul de "o pereche"}}{\text{numărul total de mâini}} = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^3 \cdot (C_4^1)^3}{C_{52}^5} = 42.2569\%$

Am observat deja de câteva ori că toate cazurile posibile erau egal probabile şi am folosit asta pentru a afla o probabilitate numărând. Afirmăm aceasta riguros în următorul principiu.
Principiu: Presupunem că sunt n cazuri posibile pentru un experiment şi fiecare caz este egal probabil. Dacă sunt k cazuri favorabile, atunci probabilitatea unui caz favorabil este k/n.
Vă puteţi gândi la un scenariu în care cazurile posibile nu sunt egal probabile?
Iată un scenariu: la un examen, puteţi lua orice notă de la 1 la 10. Sunt 10 cazuri. Este probabilitatea de a lua sub 5 egală cu 4/10?

2.2.2 Mulţimi şi notaţii

Definiţii
O mulţime S este o colecţie de elemente.
Element: Scriem $x \in S$ pentru faptul că elementul x este în mulţimea S.
Submulţime: Spunem că mulţimea A este submulţime a lui S dacă toate elementele lui A sunt în S. Scriem $A \subseteq S$.
Complementară: Complementara lui A faţă de S este mulţimea elementelor lui S care nu sunt în A. Scriem A^c, $\mathcal{C}A$, $\overline{A}$ sau $S \setminus A$.

Reuniune: Reuniunea lui A şi B este mulţimea tuturor elementelor din A **sau** B (sau din ambele). Scriem $A \cup B$.
Intersecţie: Intersecţia lui A şi B este mulţimea tuturor elementelor din A **şi** B. Scriem $A \cap B$.
Mulţimea vidă: Mulţimea vidă este mulţimea care nu are niciun element. O notăm cu $\emptyset$.
Disjuncte: A şi B sunt **disjuncte** dacă n-au niciun element comun. Adică $A \cap B = \emptyset$.
Diferenţă: Diferenţa lui A şi B este mulţimea elementelor din A care nu sunt în B. Scriem $A \setminus B$ sau $A - B$.
Exemplul 2. Plecăm cu o mulţime de 10 animale

$$S = \{\text{antilopă, albină, pisică, câine, elefant, broască, ţânţar, hienă, iguană, jaguar}\}.$$

Considerăm 2 submulţimi:

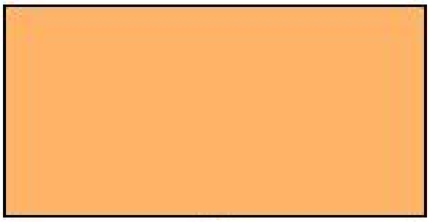
$$M = \{\text{antilopă, pisică, câine, elefant, hienă, jaguar}\}$$
$$W = \{\text{antilopă, albină, elefant, broască, ţânţar, hienă, iguană, jaguar}\}.$$

Scopul nostru aici este să cercetăm diferite operaţii cu mulţimi.
Intersecţie: $M \cap W = \{\text{antilopă, elefent, hienă, jaguar}\}$.
Reuniune:
$M \cup W = \{\text{antilopă, albină, pisică, câine, elefant, broască, ţânţar, hienă, iguană, jaguar}\}$.
Complementară: $M^c = \{\text{albină, broască, ţânţar, iguană}\}$.
Diferenţă: $M \setminus W = \{\text{pisică, câine}\}$.
Adesea sunt multe moduri de a obţine aceeaşi mulţime, de exemplu, $M^c = S \setminus M$, $M \setminus W = M \cap \complement W$.

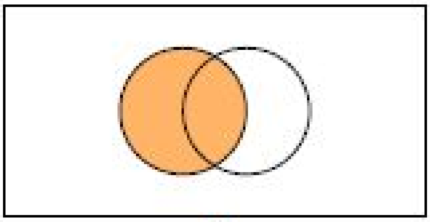
Relaţiile dintre reuniune, intersecţie şi complementară sunt date de legile lui DeMorgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

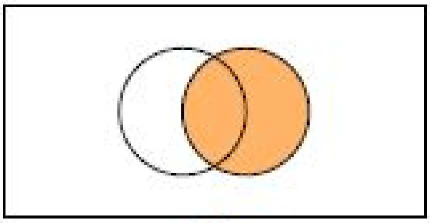
Diagrame Venn-Euler
Diagramele Venn-Euler dau un mod uşor de a vizualiza operaţiile cu mulţimi. În toate figurile, S este regiunea din interiorul dreptunghiului mare, L este regiunea din interiorul cercului din stânga şi R este regiunea din interiorul cercului din dreapta. Regiunea colorată arată mulţimea scrisă sub fiecare figură.



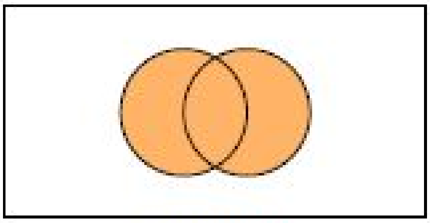
S



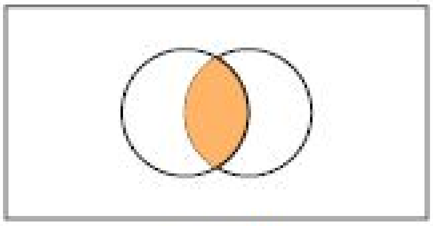
L



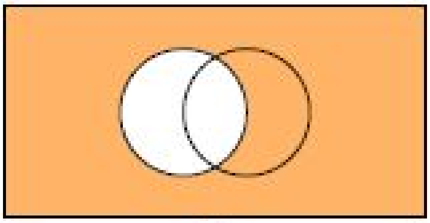
R



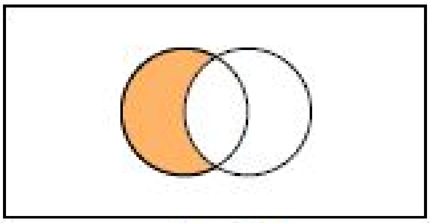
$L \cup R$



$L \cap R$

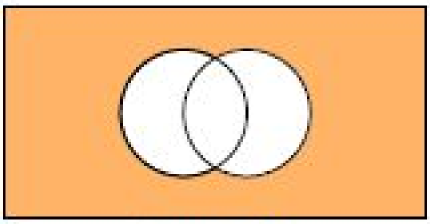


L^c

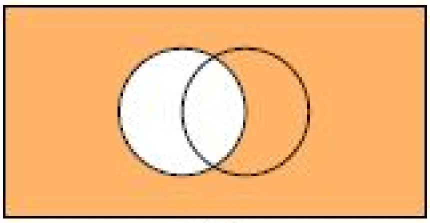


$L - R$

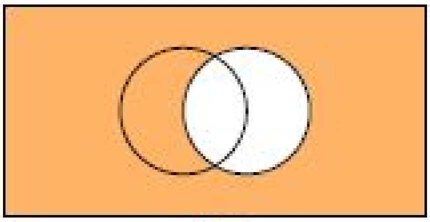
Demonstraţia legilor lui DeMorgan



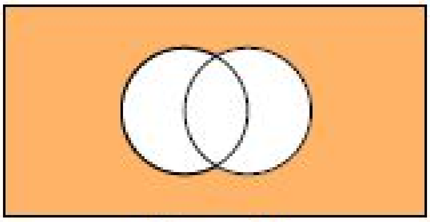
$(L \cup R)^c$



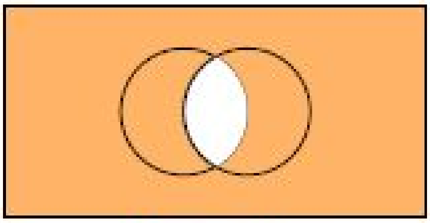
L^c



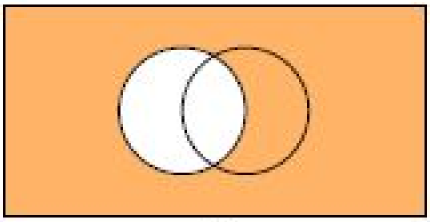
R^c



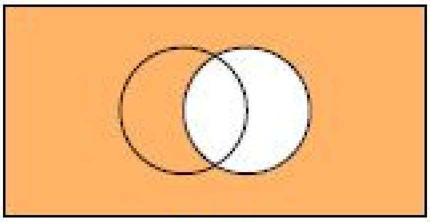
$L^c \cap R^c$



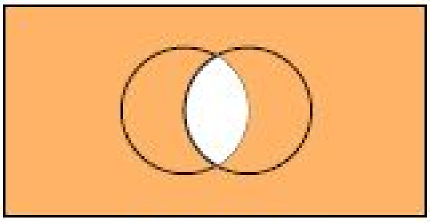
$(L \cap R)^c$



L^c



R^c



$L^c \cup R^c$

Exemplul 3. Verificaţi legile lui DeMorgan pentru submulţimile $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{3, 4\}$ ale mulţimii $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Răspuns: Pentru fiecare lege, calculăm ambii membri ai relaţiei şi arătăm că sunt egali.
1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$:
Membrul stâng: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow (A \cup B)^c = \{5\}$.
Membrul drept: $A^c = \{4, 5\},\ B^c = \{1, 2, 5\} \Rightarrow A^c \cap B^c = \{5\}$.
Cei 2 membri sunt egali, q.e.d.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$:
Membrul stâng: $A \cap B = \{3\} \Rightarrow (A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 5\}$.
Membrul drept: $A^c = \{4, 5\},\ B^c = \{1, 2, 5\} \Rightarrow A^c \cup B^c = \{1, 2, 4, 5\}$.
Cei 2 membri sunt egali, q.e.d.

Produsul cartezian

Produsul cartezian al mulţimilor S şi T este mulţimea perechilor ordonate:

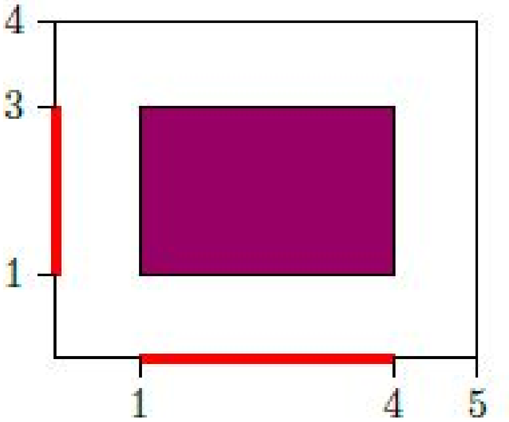
$$S \times T = \{(s, t) | s \in S, t \in T\}.$$

În cuvinte, membrul drept se citeşte ”mulţimea perechilor ordonate (s, t) cu proprietatea că s este în S şi t este în T”.

Următoarele diagrame arată 2 exemple de produs cartezian.

$\times$	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$



$[1, 4] \times [1, 3] \subset [0, 5] \times [0, 4]$

Ultima figură ilustrează de asemenea faptul că dacă $A \subset S$ şi $B \subset T$, atunci $A \times B \subset S \times T$.

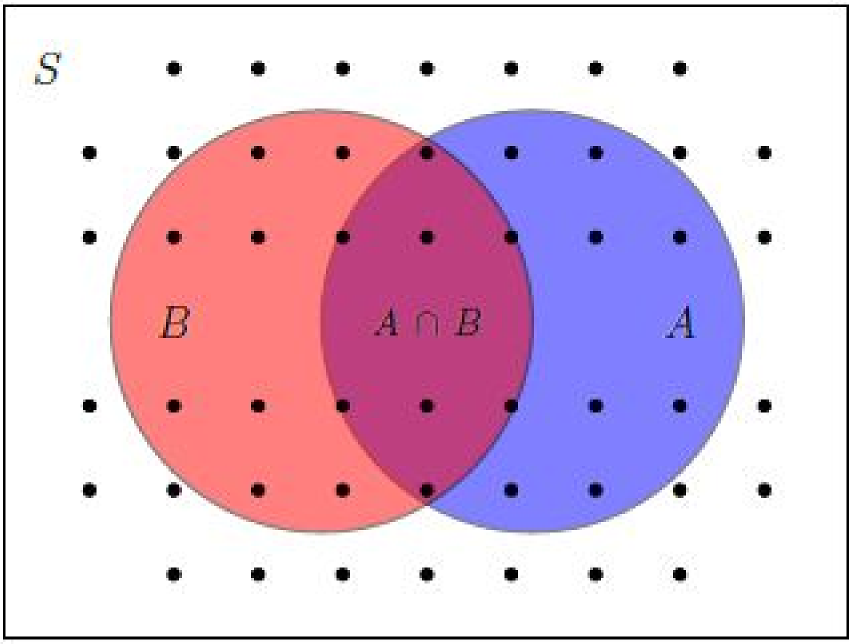
2.2.3 Numărare

Dacă S este finită, folosim $|S|$ sau $\#S$ sau $card(S)$ pentru a nota numărul elementelor lui S (cardinalul lui S).
2 principii de numărare utile sunt *principiul includerii şi excluderii* şi *regula produsului*.

Principiul includerii şi excluderii
Principiul includerii şi excluderii spune

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Putem ilustra asta printr-o diagramă Venn-Euler. S este mulţimea tuturor punctelor, A este mulţimea punctelor din cercul albastru, iar B este mulţimea punctelor din cercul roşu.



$|A|$ este numărul de puncte din A şi analog pentru celelalte mulţimi. Figura arată că $|A| + |B|$ numără *de 2 ori* $|A \cap B|$, de aceea $|A \cap B|$ este scăzut în formula includerii şi excluderii.

Exemplul 4. Într-o trupă de cântăreţi şi chitarişti sunt 7 cântăreţi, 4 chitarişti şi 2 ambele. Cât de mare este trupa?

Răspuns: Fie S mulţimea cântăreţilor şi G mulţimea chitariştilor. Principiul includerii şi excluderii spune că

$$\text{mărimea trupei} = |S \cup G| = |S| + |G| - |S \cap G| = 7 + 4 - 2 = 9.$$

Regula produsului

Regula produsului spune:

Dacă există n moduri de a face acţiunea 1 şi apoi m moduri de a face acţiunea 2, atunci există $n \cdot m$ moduri de a face acţiunea 1 urmată de acţiunea 2.

O numim de asemenea regula multiplicării.

Exemplul 5. Dacă avem 3 cămăşi şi 4 pantaloni, atunci putem face $3 \cdot 4 = 12$ costumaţii.

Gândiţi: Un punct extrem de important este că regula produsului are loc chiar dacă modurile de a face acţiunea 2 depind de acţiunea 1, atât timp cât *numărul* de moduri de a face acţiunea 2 este independent de acţiunea 1. Pentru a ilustra asta:

Exemplul 6. Există 5 competitori în finala de 100m la olimpiadă. În câte moduri pot fi date medaliile de aur, argint şi bronz? (Presupunem că

egalităţile sunt excluse.)
Răspuns: Există 5 moduri de a da medalia de aur. Odată ce aceasta este dată, există 4 moduri de a da medalia de argint şi apoi 3 moduri de a da medalia de bronz. Răspuns $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ de moduri.
Observăm că alegerea medaliatului cu aur afectează câştigătorul argintului, dar numărul posibililor medaliaţi cu argint este totdeauna 4.

2.2.4 Permutări, aranjamente şi combinări

Permutări şi aranjamente
O permutare a unei mulţimi este o ordonare particulară a elementelor sale. De exemplu, mulţimea $\{a, b, c\}$ are 6 permutări: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Am aflat numărul permutărilor listându-le pe toate. Puteam de asemenea să aflăm numărul permutărilor folosind regula produsului. Adică, există 3 moduri de a alege primul element, apoi 2 moduri pentru al 2-lea şi 1 pentru al 3-lea. Asta dă un total de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutări.
În general, regula produsului ne spune că numărul de permutări ale unei mulţimi de k elemente este

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Vorbim de asemenea de aranjamentele a k elemente dintr-o mulţime cu n elemente. Arătăm ce înseamnă asta cu un exemplu.
Exemplul 7. Listaţi toate aranjamentele de 3 elemente ale mulţimii $\{a, b, c, d\}$.
Răspuns: Este o listă mai lungă,

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

Observăm că abc şi acb se numără ca aranjamente distincte. Adică, pentru aranjamente ordinea contează.
Există 24 de aranjamente. Observăm că regula produsului ne-ar fi spus că sunt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ permutări fără a ne mai deranja să le listăm.

Combinări
În contrast cu aranjamentele, la combinări ordinea nu contează: aranjamentele sunt liste, iar combinările sunt mulţimi. Arătăm ce vrem să spunem printr-un exemplu.
Exemplul 8. Listaţi toate combinările de 3 elemente din mulţimea $\{a, b, c, d\}$.
Răspuns: O astfel de combinare este o colecţie de 3 elemente fără a consi-

dera ordinea. Astfel, *abc* şi *cab* reprezintă ambele aceeaşi combinare. Putem lista toate combinările listând toate submulţimile de exact 3 elemente.

$$\{a, b, c\}\ \{a, b, d\}\ \{a, c, d\}\ \{b, c, d\}.$$

Există doar 4 combinări, în contrast cu cele 24 de aranjamente din exemplul anterior. Factorul 6 apare deoarece fiecare combinare de 3 elemente poate fi scrisă în 6 ordini diferite.

Formule

Folosim următoarele notaţii.

A_n^k = numărul aranjamentelor (listelor) de k elemente distincte dintr-o mulţime cu n elemente.

$C_n^k = \binom{n}{k}$ = numărul combinărilor (submulţimilor) de k elemente dintr-o mulţime cu n elemente.

Subliniem că prin numărul de combinări de k elemente înţelegem numărul de submulţimi de k elemente.

Acestea au următoarele notaţii şi formule:

$$\text{Aranjamente: } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1).$$

$$\text{Combinări: } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Notaţia A_n^k se citeşte "aranjamente de n luate câte k". Notaţia C_n^k se citeşte "combinări de n luate câte k". Formula pentru A_n^k rezultă din regula produsului. Ea implică de asemenea formula pentru C_n^k, deoarece o submulţime de k elemente poate fi ordonată în $k!$ moduri.

Putem ilustra relaţia dintre aranjamente şi combinări aliniind rezultatele din cele 2 exemple anterioare.

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*	$\{a, b, c\}$
abd	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*	$\{a, b, d\}$
acd	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*	$\{a, c, d\}$
bcd	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*	$\{b, c, d\}$

Aranjamente: A_4^3 Combinări: C_4^3

Observăm că fiecare linie din lista de aranjamente constă din toate cele 3! permutări ale mulţimii corespunzătoare din lista de combinări.

Exemple

Exemplul 9. Calculaţi:

(i) Numărul de moduri de a alege 2 din 4 obiecte (ordinea nu contează).
(ii) Numărul de moduri de a lista 2 din 4 obiecte.
(iii) Numărul de moduri de a alege 3 din 10 obiecte.
Răspuns: (i) $C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$.
(ii) $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$.
(iii) $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$.
Exemplul 10. (i) Calculaţi numărul de moduri de a obţine 3 aversuri într-o secvenţă de 10 aruncări ale unei monede.
(ii) Dacă moneda este corectă, care este probabilitatea a exact 3 aversuri din 10 aruncări?
Răspuns: (i) Se cere numărul de secvenţe de 10 aruncări (aversuri sau reversuri) cu exact 3 aversuri. Adică, trebuie să alegem exact 3 din 10 aruncări să fie aversuri. Asta este aceeaşi întrebare ca ultima din exemplul precedent.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120.$$

(ii) Fiecare aruncare are 2 cazuri posibile (avers sau revers). Astfel, regula produsului spune că există $2^{10} = 1024$ secvenţe de 10 aruncări. Deoarece moneda este corectă, fiecare secvenţă este egal probabilă. Deci probabilitatea a 3 aversuri este

$$\frac{120}{1024} = 0.1171875.$$

3 Probabilitate: terminologie şi exemple

3.1 Scopurile învăţării

1. Să ştie definiţiile spaţiului probelor, evenimentului şi probabilităţii.
2. Să poată organiza un scenariu cu caracter aleator într-un experiment şi spaţiu al probelor.
3. Să poată face calcule de bază folosind o probabilitate.

3.2 Terminologie

3.2.1 Definiţii

Experiment: o procedură repetabilă cu cazuri (rezultate) posibile bine definite.
Spaţiul probelor: mulţimea tuturor cazurilor posibile. De obicei notăm spaţiul probelor cu Ω, uneori cu S.
Eveniment: o submulţime a spaţiului probelor.
Funcţie de probabilitate: o funcţie dând probabilitatea pentru fiecare caz.

3.2.2 Exemple simple

Exemplul 1. Aruncarea unei monede corecte.
Experiment: aruncăm moneda, raportăm dacă aterizează avers sau revers.
Spaţiul probelor: $\Omega = \{H, T\}$.
Funcţie de probabilitate: $P(H) = 0.5,\ P(T) = 0.5$.
Exemplul 2. Aruncarea de 3 ori a unei monede corecte.
Experiment: aruncăm moneda de 3 ori, listăm rezultatele.
Spaţiul probelor: $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.
Funcţie de probabilitate: fiecare caz este egal probabil, cu probabilitatea 1/8.
Pentru spaţii mici de probe putem pune mulţimea cazurilor şi probabilităţile într-un tabel de probabilitate.

Caz	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
Probabilitate	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Exemplul 3. Măsurarea masei unui proton
Experiment: se urmează o procedură definită pentru a măsura masa şi a raporta rezultatul.
Spaţiul probelor: $\Omega = [0, \infty)$, i.e. în principiu putem obţine orice valoare pozitivă.
Funcţie de probabilitate: deoarece există un continuum de cazuri posibile, nu există o funcţie de probabilitate. În locul ei avem nevoie să folosim o *densitate de probabilitate*.
Exemplul 4. Taxiuri (Un spaţiu de probe discret infinit)
Experiment: se numără taxiurile care trec pe lângă facultate pe durata cursului.
Spaţiul probelor: $\Omega = \mathbb{N}$.
Acesta este modelat adesea cu următoarea funcţie de probabilitate cunoscută ca repartiţia (distribuţia) Poisson:

$$P(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

unde λ este numărul mediu de taxiuri. Putem pune asta într-un tabel:

Caz	0	1	2	3	...	k	...
Probabilitate	$e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}\lambda$	$e^{-\lambda}\lambda^2/2$	$e^{-\lambda}\lambda^3/3!$	...	$e^{-\lambda}\lambda^k/k!$	...

Întrebare: Acceptând că aceasta este o funcţie de probabilitate validă, cât este $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$?
Răspuns: Aceasta este probabilitatea totală a tuturor cazurilor posibile, deci suma este 1.

Într-o schemă dată poate fi mai mult de o alegere rezonabilă a spaţiului probelor. Iată un exemplu simplu.
Exemplul 5. 2 zaruri corecte (Alegerea spaţiului probelor)
Presupunem că aruncăm un zar corect. Atunci spaţiul probelor şi funcţia de probabilitate sunt

Caz	1	2	3	4	5	6
Probabilitate	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Acum presupunem că aruncăm 2 zaruri corecte. Care ar trebui să fie spaţiul probelor? Iată 2 opţiuni.
1. Înregistrăm perechea numerelor de pe zaruri (primul zar, al 2-lea zar).
2. Înregistrăm suma numerelor de pe zaruri. În acest caz sunt 11 cazuri $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Aceste cazuri nu sunt toate egal probabile.
Ca mai sus, putem pune această informaţie în tabele. Pentru prima opţiune, spaţiul probelor este produsul cartezian al spaţiilor probelor pentru fiecare zar

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 6)\}.$$

Fiecare din cele 36 de cazuri este egal probabil. (De ce 36 de cazuri?) Pentru funţia de probabilitate vom face un tabel 2 dimensional cu liniile corespunzând numerelor de pe primul zar, coloanele numerelor de pe al 2-lea zar, iar în tabel sunt probabilităţile.

		Zar 2					
		1	2	3	4	5	6
	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
Zar 1	3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

2 zaruri corecte într-un tabel 2-dimensional

În a 2-a opţiune prezentăm cazurile şi probabilităţile în tabelul nostru uzual.

Caz	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilitate	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Suma a 2 zaruri corecte

Gândiţi: Care este relaţia dintre cele 2 tabele de probabilităţi de mai sus?
Vom vedea că cea mai bună alegere a spaţiului probelor depinde de context.
Deocamdată observăm că, dacă dăm rezultatul ca o pereche de numere, este

uşor să aflăm suma.
Observaţie. Listarea experimentului, spaţiului probelor şi a funcţiei de probabilitate este un bun mod de a începe lucrul sistematic cu probabilitatea. Vă poate ajuta să evitaţi unele din capcanele obişnuite din subiect.

Evenimente
Un eveniment este o colecţie de cazuri, i.e. un eveniment este o submulţime a spaţiului probelor Ω.
Exemplul 6. Folosind schema din exemplul 2 vom descrie evenimentul să obţinem exact 2 aversuri în cuvinte prin $E =$ "exact 2 aversuri". Scris ca o submulţime, acesta devine

$$E = \{HHT, HTH, THH\}.$$

Probabilitatea unui eveniment E este calculată adunând probabilităţile tuturor cazurilor din E. În acest exemplu fiecare caz are probabilitatea $1/8$, deci avem $P(E) = 3/8$.

3.2.3 Definiţia unui spaţiu al probelor discret

Definiţie. Un spaţiu al probelor discret este unul care este cel mult numărabil (listabil), putând fi ori finit ori infinit.
Exemple. $\{H, T\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}^*$, $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$ sunt toate mulţimi discrete. Primele 2 sunt finite şi ultimele 2 sunt infinite.
Exemplu. Intervalul [0,1] *nu* este discret, ci *continuu*.

3.2.4 Funcţia de probabilitate

Până acum am folosit o definiţie ocazională a funcţiei de probabilitate. Să dăm una mai precisă.
Definiţia funcţiei de probabilitate
Pentru un spaţiu al probelor discret S, o funcţie de probabilitate P atribuie fiecărui caz ω un număr $P(\omega)$ numit probabilitatea lui ω. P trebuie să satisfacă 2 reguli:
Regula 1. $0 \leq P(\omega) \leq 1$ (probabilităţile sunt între 0 şi 1).
Regula 2. Suma probabilităţilor tuturor cazurilor posibile este 1 (ceva trebuie să aibă loc).
În simboluri, regula 2 spune: dacă $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, atunci $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$. Sau $\sum\limits_{j=1}^{n} P(\omega_j) = 1$.
Probabilitatea unui eveniment E este suma probabilităţilor tuturor cazurilor

din E. Adică,

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega).$$

Gândiţi: Verificaţi regulile 1 şi 2 pe exemplele 1 şi 2 de mai sus.

Exemplul 7. Aruncarea până la primul avers (un exemplu clasic)

Presupunem că avem o monedă cu probabilitatea p a aversurilor şi avem următorul scenariu.

Experiment: Aruncăm moneda până apare primul avers. Raportăm numărul aruncărilor.

Spaţiul probelor: $\Omega = \mathbb{N}^*$.

Funcţia de probabilitate: $P(n) = (1-p)^{n-1}p$.

Provocarea 1: arătaţi că suma tuturor probabilităţilor este 1 (indicaţie: serii geometrice).

Provocarea 2: justificaţi formula pentru $P(n)$.

Probleme de oprire. Exemplul didactic anterior este o versiune a unei clase generale de probleme numite probleme de regula opririi. O regulă de oprire este o regulă care ne spune când să terminăm un anumit proces. În exemplul didactic de mai sus procesul a fost aruncarea unei monezi şi l-am oprit după primul avers. Un exemplu mai practic este o regulă pentru terminarea unei serii de tratamente medicale. O astfel de regulă ar putea depinde de cât de bine funcţionează tratamentele, cum le tolerează pacientul şi probabilitatea să fie eficace continuarea tratamentelor. Ne putem informa despre probabilitatea opririi într-un anumit număr de tratamente sau numărul mediu de tratamente la care să ne aşteptăm înaintea opririi.

3.3 Câteva reguli ale probabilităţii

Pentru evenimentele A, L şi R incluse într-un spaţiu al probelor Ω:

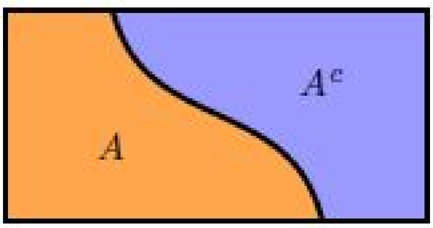
Regula 1. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

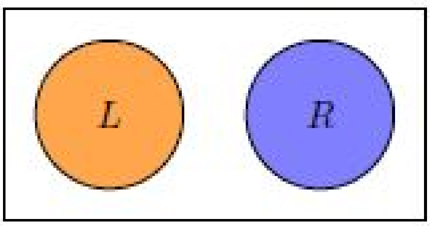
Regula 2. Dacă L şi R sunt disjuncte, atunci $P(L \cup R) = P(L) + P(R)$.

Regula 3. Dacă L şi R nu sunt disjuncte, avem **principiul includerii şi excluderii:**

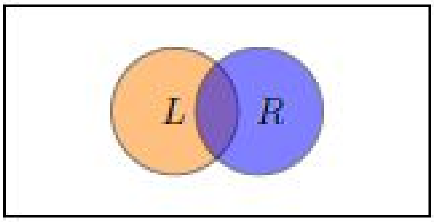
$$P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R).$$

Vizualizăm aceste reguli folosind diagrame Venn-Euler.





$\Omega = A \cup A^c$, nicio suprapunere $\qquad$ $L \cup R$, nicio suprapunere



$L \cup R$, suprapunerea $= L \cap R$
Le putem de asemenea justifica logic.
Regula 1: A şi A^c împart Ω în 2 regiuni disjuncte. Deoarece probabilitatea totală $P(\Omega) = 1$, această regulă spune că probabilitatea lui A şi probabilitatea lui "non A" sunt complementare, adică au suma 1.
Regula 2: L şi R împart $L \cup R$ în 2 regiuni disjuncte. Deci probabilitatea lui $L \cup R$ este împărţită între $P(L)$ şi $P(R)$.
Regula 3: În suma $P(L) + P(R)$ suprapunerea $P(L \cap R)$ este numărată de 2 ori. Deci $P(L) + P(R) - P(L \cap R)$ numără totul din reuniune exact o dată.
Gândiţi: Regula 2 este un caz special al regulii 3.

Pentru următoarele exemple presupunem că avem un experiment care produce un întreg aleator între 1 şi 20. Probabilităţile nu sunt necesar uniforme, i.e., nu sunt necesar aceleaşi pentru fiecare caz.
Exemplul 8. Dacă probabilitatea unui număr par este 0.6, care este probabilitatea unui număr impar?
Răspuns: Deoarece a fi impar este complementar cu a fi par, probabilitatea unui număr impar este $1 - 0.6 = 0.4$.
Să refacem acest exemplu un pic mai formal. Întâi, pentru a ne putea referi la el, să numim întregul aleator X. De asemenea, numim A evenimentul "X este par". Atunci evenimentul "X este impar" este A^c. Ne este dată $P(A) = 0.6$. De aceea $P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$.
Exemplul 9. Considerăm 2 evenimente, A: "X este multiplu de 2"; B: "X este impar şi mai mic ca 10". Presupunem că $P(A) = 0.6$ şi $P(B) = 0.25$.
(i) Cine este $A \cap B$?
(ii) Care este probabilitatea lui $A \cup B$?
Răspuns: (i) Deoarece toate numerele din A sunt pare şi toate numerele din B sunt impare, aceste evenimente sunt disjuncte. Adică $A \cap B = \emptyset$.
(ii) Deoarece A şi B sunt disjuncte, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.85$.
Exemplul 10. Fie A, B şi C evenimentele X este multiplu de 2, 3, respectiv 6. Dacă $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3$ şi $P(C) = 0.2$, cât este $P(A \text{ sau } B)$?
Răspuns: Observăm 2 lucruri. Întâi, am folosit cuvântul "sau", care înseamnă reuniune: "A sau B" $= A \cup B$. Al 2-lea, un întreg este divizibil cu 6 dacă

şi numai dacă este divizibil cu 2 şi cu 3. De aici rezultă $C = A \cap B$. Deci principiul includerii şi excluderii spune

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.3 - 0.2 = 0.7.$$

3.4 Definiţia axiomatică a probabilităţii

Notaţii. Ω mulţime.

$\mathcal{P}(\Omega) := \{A | A \subseteq \Omega\}$ - mulţimea părţilor lui Ω.

$A \subseteq \Omega$.

$\overline{A} = \mathcal{C}A := \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$ - complementara lui A.

$A_n \to A \iff (A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ şi $A = \bigcup\limits_n A_n)$ sau $(A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ şi $A = \bigcap\limits_n A_n)$

Definiţii. Fie Ω mulţime. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *corp borelian* sau *σ-algebră* pe Ω $\iff$

1) $\mathcal{K} \neq \emptyset$
2) $A \in \mathcal{K} \implies \overline{A} \in \mathcal{K}$
3) $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{K} \implies \bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{K}$.

$(\Omega, \mathcal{K})$ *spaţiu măsurabil* $\iff$ $\mathcal{K}$ este corp borelian pe Ω.

Proprietăţi.$(\Omega, \mathcal{K})$ spaţiu măsurabil $\implies$

a) $\Omega \in \mathcal{K}$
b) $\emptyset \in \mathcal{K}$
c) $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{K} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{K}$.
d) I cel mult numărabilă (i.e. finită sau numărabilă), $A_i \in \mathcal{K}, \forall i \in I \implies \bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{K}$
e) $A, B \in \mathcal{K} \implies A \backslash B \in \mathcal{K}$.

Definiţii. $\mathcal{K}$ corp borelian pe Ω.

$A \in \mathcal{K}$ - eveniment

Ω - eveniment sigur

$\emptyset$ - eveniment imposibil

$\overline{A}$ - eveniment contrar lui A

A, B disjuncte $\iff A \cap B = \emptyset$

Definiţii. $(\Omega, \mathcal{K})$ spaţiu măsurabil. $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ *probabilitate* pe $(\Omega, \mathcal{K})$ $\iff$

1) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{K}$ (P nenegativă).
2) $P(\Omega) = 1$ (P normată).
3) $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{K}$ disjuncte 2 câte 2,

$P\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j P(A_j)$ (P numărabil aditivă).

$(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *câmp de probabilitate* $\iff$ P este probabilitate pe spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{K})$.

Proprietăţi. $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ câmp de probabilitate $\Longrightarrow$

1) $P(\emptyset) = 0$.

2) $\forall\ A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{K}$ disjuncte 2 câte 2, $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$ (P este aditivă).

3) $A \subseteq B; A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.

4) (Formula lui Poincare) $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{K}$,

$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^m A_{i_j}\right)$.

În particular,

$\forall A, B \in \mathcal{K}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

$\forall A, B, C \in \mathcal{K}$,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

5) $\forall A \in \mathcal{K}, P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

6) $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{K}, A_n \to A \Longrightarrow P(A_n) \underset{n\to\infty}{\to} P(A)$.

7) $\forall\ A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{K}, P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j)$.

8) $\forall A, B, C \in \mathcal{K}, P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

Exemple

1) Ω mulţime finită,

$\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$,

$P : \mathcal{K} \to \mathbb{R},\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile (lui } A)}{\text{numărul cazurilor egal posibile}}$.

$(\Omega, \mathcal{K}, P)$ - câmpul de probabilitate al lui Laplace.

Când nu specificăm altfel, pe o mulţime finită Ω considerăm câmpul de probabilitate al lui Laplace.

2) La jocul de table, să se determine probabilitatea ca o piesă dată afară să intre la mutarea următoare, dacă sunt $n \in \{0, 1, ..., 6\}$ câmpuri libere în casă.

$\Omega = \{1, 2, ..., 6\}^2$

$|\Omega| = 36$

$L_n \subseteq \{1, 2, ..., 6\}$ - mulţimea câmpurilor libere din casă

$|L_n| = n$
$A_n =$ "cel puţin unul din zaruri e în L_n"
$\overline{A_n} =$ "niciun zar nu e în L_n" $= \left(\{1, 2, ..., 6\} \setminus L_n\right)^2$
$P\left(A_n\right) = 1 - P\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \frac{\left|\left(\{1,2,...,6\} \setminus L_n\right)^2\right|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|\{1,2,...,6\} \setminus L_n|^2}{|\Omega|} = 1 - \frac{(6-n)^2}{36}, \forall n \in \{0, 1, ..., 6\}.$