

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Autor: Adam Sokołowski

Opiekun: mgr inż. Robert Nebeluk

Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych PW

Automatyka i Robotyka

08.01.2026

Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

Cel pracy

- ▶ Stworzenie środowiska symulacyjnego do testowania regulatorów
- ▶ Implementacja i optymalizacja pięciu różnych strategii sterowania
- ▶ Wielokryterialne porównanie algorytmów regulacji
- ▶ Ocena odporności układów na zakłócenia i zmienność parametrów

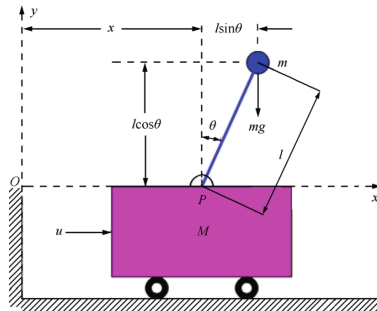
Zaimplementowane regulatory:

- ▶ PD–PD (kaskadowy)
- ▶ PD–LQR (hybrydowy)
- ▶ MPC (predykcyjny)
- ▶ MPC-J2 (alternatywna funkcja kosztu)
- ▶ Fuzzy-LQR (rozmyty Takagi–Sugeno)

Zastosowanie

Odwrócone wahadło jest klasycznym benchmarkiem w teorii sterowania:

- ▶ Robotyka mobilna (roboty balansujące)
- ▶ Sterowanie rakiet i pojazdów kosmicznych
- ▶ Stabilizacja pojazdów dwukołowych
- ▶ Układy suwnicowe



Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

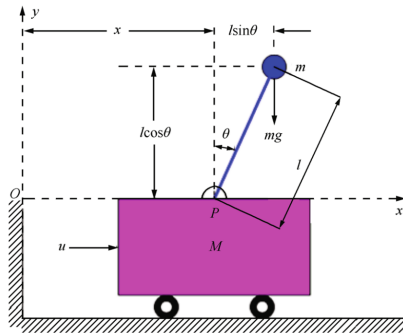
Analiza odporności

Podsumowanie

Charakterystyka układu

Cechy układu:

- ▶ Wysoka nieliniowość
- ▶ Niestabilny w punkcie pracy
- ▶ System niedoaktuowany (1 wejście, 2 wyjścia)
- ▶ Duża wrażliwość na zakłócenia
- ▶ Pośrednie sterowanie wahadłem przez wózek



Równania stanu układu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{u \cos \theta - (M+m)g \sin \theta + ml(\cos \theta \sin \theta)\dot{\theta}^2}{ml \cos^2 \theta - (M+m)l} \\ \dot{x} \\ \frac{u + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \sin \theta}{M+m-m \cos^2 \theta} \end{bmatrix}$$

Parametry modelu:

- ▶ $M = 1.0$ kg – masa wózka
- ▶ $m = 0.23$ kg – masa wahadła
- ▶ $l = 0.5$ m – długość wahadła
- ▶ $g = 9.81$ m/s² – przyspieszenie ziemskie

Liniaryzacja w punkcie równowagi

Model liniowy dla małych wychyleń wahadła ($\theta \approx 0$):

$$\frac{d\delta x}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \delta u$$

Model liniowy wykorzystywany jest przez:

- ▶ Regulator LQR (wyznaczanie optymalnego wzmocnienia)
- ▶ Regulator MPC (predykcja zachowania układu)

Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

Regulator PD–PD (kaskadowy)

Układ kaskadowy z dwóch regulatorów PD:

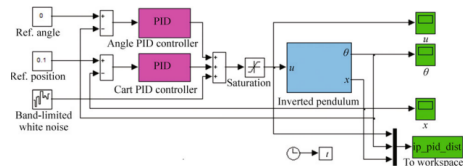
Pętla wewnętrzna (kąt):

$$u_\theta = K_{p\theta} e_\theta + K_{d\theta} \dot{e}_\theta$$

Pętla zewnętrzna (pozycja):

$$\theta_{ref} = K_{px} e_x + K_{dx} \dot{e}_x$$

- + Prosta implementacja, niski koszt obliczeniowy
- Wymaga starannego strojenia obu pętli



Regulator PD–LQR (hybrydowy)

Połączenie LQR ze sprzężeniem od pozycji (PD):

Optymalne wzmocnienie LQR:

$$K = R^{-1}B^T P$$

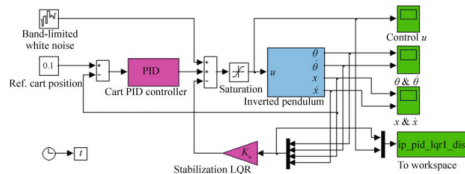
gdzie P z równania Riccatiego:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Sterowanie hybrydowe:

$$u = -Kx + K_{px}e_x + K_{dx}\dot{e}_x$$

- + Optymalna stabilizacja kąta
- + Dobra kontrola pozycji



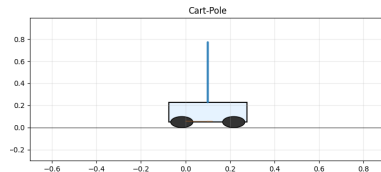
Regulator MPC (predykcyjny)

Minimalizacja funkcji kosztu na horyzoncie predykcji:

$$J = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{ref})^\top Q (x_k - x_{ref}) + R \sum_{k=1}^{N_u} (\Delta u_k)^2$$

Parametry:

- ▶ $N = 20$ – horyzont predykcji
 - ▶ $N_u = 10$ – horyzont sterowania
 - ▶ Q – macierz wag błędów stanu
 - ▶ R – waga kary za zmiany sterowania
- + Jawne uwzględnienie ograniczeń
– Wysoki koszt obliczeniowy



Regulator MPC-J2 (alternatywna funkcja kosztu)

Zmodyfikowana funkcja kosztu:

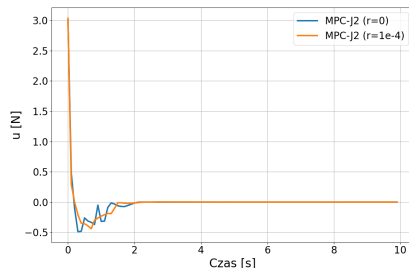
$$J = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{ref})^T Q (x_k - x_{ref}) + r \sum (\Delta u_k)^2 + r_{abs} \sum u_k^2$$

Różnice względem MPC:

- ▶ Jawne wagi dla prędkości $\dot{\theta}$, \dot{x} w macierzy Q
- ▶ Parametr r_{abs} – kara za bezwzględną wartość u
- ▶ Bezpośrednia minimalizacja energii sterowania

+ Płynniejsze sterowanie

– Wrażliwość na dobór r_{abs} przy zakłóceniach



Wpływ r_{abs} na sterowanie

Regulator Fuzzy-LQR (hybrydowy)

Prawo sterowania (hybrydowe):

$$u(t) = u_{\text{LQR}}(t) + u_{\text{Fuzzy}}(t)$$

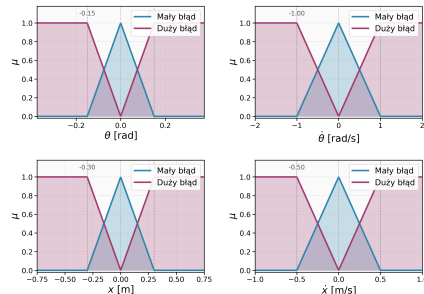
Część rozmyta (Takagi-Sugeno):

$$u_{\text{Fuzzy}} = \frac{\sum_{i=1}^M w_i(\theta) \cdot (-K_i x)}{\sum_{i=1}^M w_i(\theta)}$$

gdzie $w_i(\theta)$ to stopień aktywacji reguły (z funkcji przynależności).

Koncepcja „Gain Scheduling”:

- ▶ **Mały błąd:** w_i aktywuje łagodne reguły (jak LQR).
- ▶ **Duży błąd:** w_i aktywuje agresywne reguły (szybki powrót).



Funkcje przynależności $w_i(\theta)$

Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

Metodyka badań

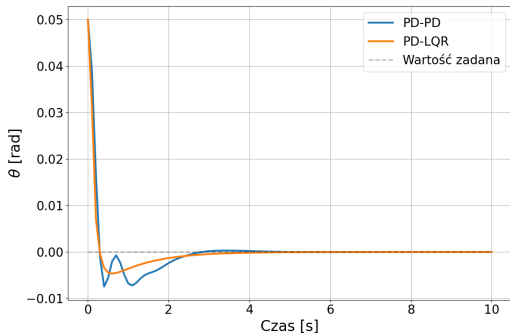
Scenariusze testowe:

1. **Warunki nominalne** – stabilizacja z wychylenia początkowego $\theta_0 = 0.05$ rad
2. **Zakłócenia zewnętrzne** – losowa siła działająca na wahadło
3. **Zmiana parametrów** – +10% masy wahadła (test odporności)

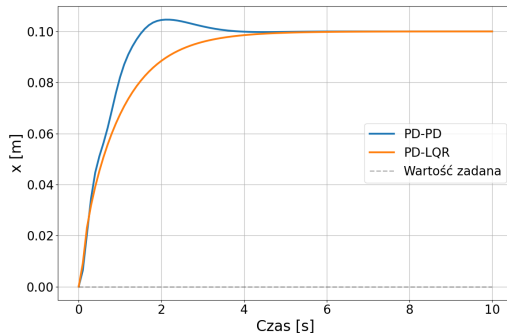
Wskaźniki jakości:

- ▶ MSE_θ , MSE_x – błędy średniokwadratowe
- ▶ IAE_θ – całkowity błąd bezwzględny
- ▶ T_s – czas regulacji
- ▶ E_u – energia sterowania
- ▶ $Max|\theta|$, $Max|x|$ – maksymalne wychylenia
- ▶ t_{comp} – czas obliczeń

Warunki nominalne – regulatory klasyczne



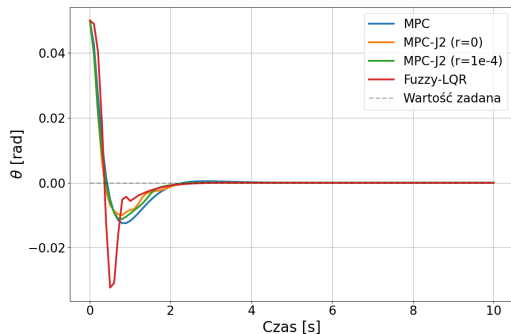
Przebieg kąta θ



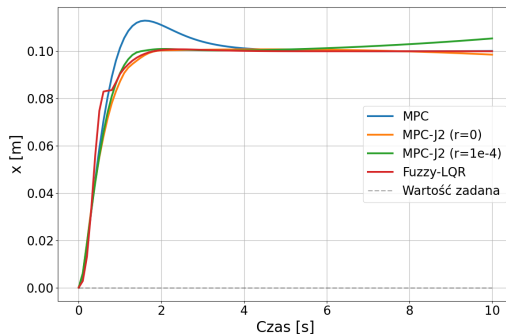
Przebieg pozycji x

Obserwacje: PD-LQR: $T_s = 0.2$ s (33% szybszy od PD), ale wyższa energia ($E_u = 1.48$ vs 0.85)

Warunki nominalne – regulatory zaawansowane



Przebieg kąta θ



Przebieg pozycji x

Obserwacje: MPC: najniższa energia ($E_u = 0.56$), płynne sterowanie.

Fuzzy-LQR: szybka stabilizacja, ale wysoka energia ($E_u = 2.75$, +394% vs MPC)

Zakłócenia zewnętrzne – model

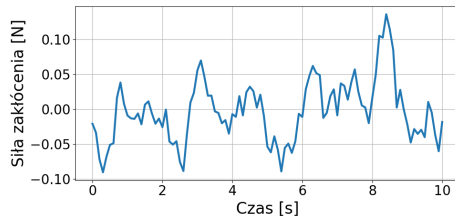
Model zakłócenia:

$$w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \frac{\text{power}}{T_s}$$

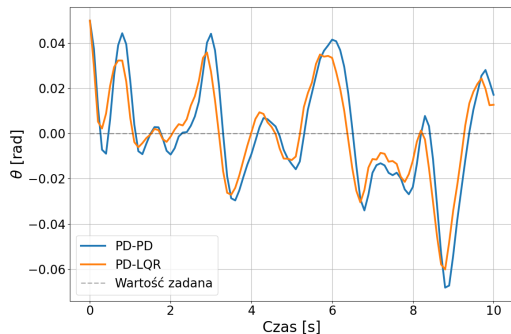
Wygładzanie:

$$F_{w,k} = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} w_{k-i}$$

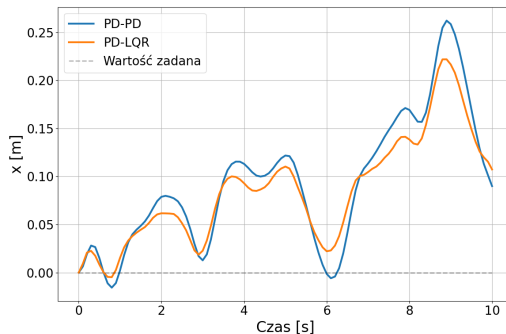
Symuluje losowe zakłócenia zewnętrzne (np. podmuchy wiatru) działające bezpośrednio na wahadło.



Zakłócenia – regulatory klasyczne



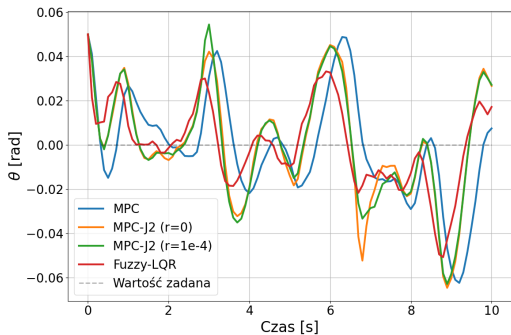
Przebieg kąta θ



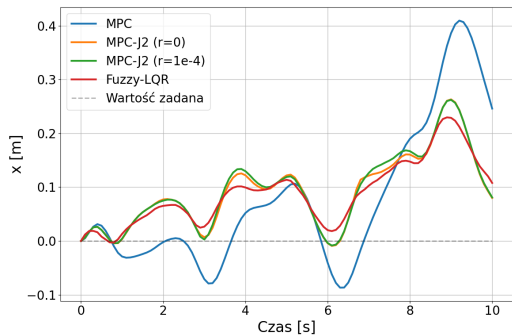
Dryf pozycji x

Obserwacje: PD-LQR lepiej stabilizuje kąt ($\text{Max}|\theta| = 0.060$ vs 0.068 rad)
i redukuje dryf ($\text{Max}|x| = 0.22$ vs 0.26 m) przy niższej energii ($E_u = 11.7$ vs 15.4)

Zakłócenia – regulatory zaawansowane



Przebieg kąta θ



Dryf pozycji x

Obserwacje: Fuzzy-LQR: najlepsza precyzja ($\text{Max}|\theta| = 0.05$ rad), ale $E_u = 25.4$
 MPC: największy dryf ($\text{Max}|x| = 0.41$ m), ale kontrolowana energia ($E_u = 12.4$)

Zestawienie wyników – warunki nominalne

Wskaźnik	PD	PD-LQR	MPC	MPC-J2	Fuzzy
$MSE_{\theta} \times 10^5$	4.66	3.65	6.19	5.15	9.32
$T_{s,\theta}$ [s]	0.30	0.20	1.20	0.30	0.80
$T_{s,x}$ [s]	1.20	2.20	2.20	1.10	1.00
E_u	0.85	1.48	0.56	0.59	2.75

Wnioski:

- ▶ PD-LQR: najszybsza stabilizacja kąta
- ▶ MPC: najniższe zużycie energii (o 62% mniej niż Fuzzy-LQR)
- ▶ Fuzzy-LQR: najszybsza stabilizacja pozycji

Zestawienie wyników – zakłócenia zewnętrzne

Wskaźnik	PD	PD-LQR	MPC	MPC-J2	Fuzzy
$MSE_{\theta} \times 10^4$	6.01	4.44	5.78	6.59	3.57
$Max \theta $ [rad]	0.068	0.060	0.062	0.065	0.051
$Max x $ [m]	0.26	0.22	0.41	0.26	0.23
E_u	15.4	11.7	12.4	17.3	25.4

Wnioski:

- ▶ Fuzzy-LQR: najlepsza precyzja kątowa (minimalne wychylenia)
- ▶ PD-LQR: najlepsza ekonomia przy zakłóceniach, lepszy od MPC
- ▶ MPC: największy dryf pozycji (oszczędza energię kosztem pozycji)

Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

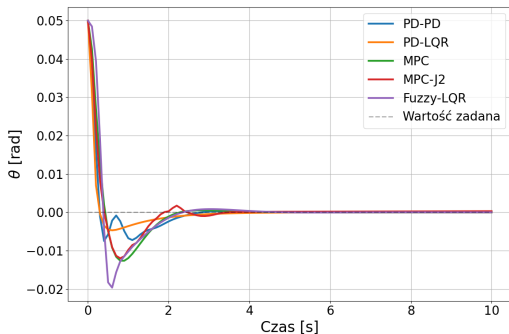
Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

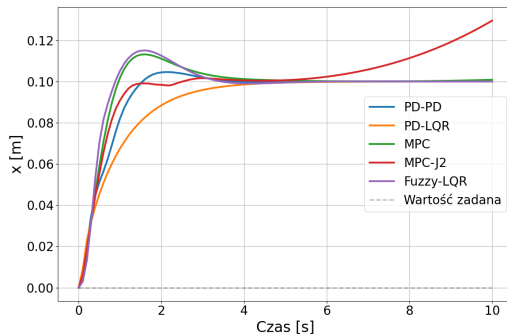
Podsumowanie

Test odporności – zmiana parametrów modelu



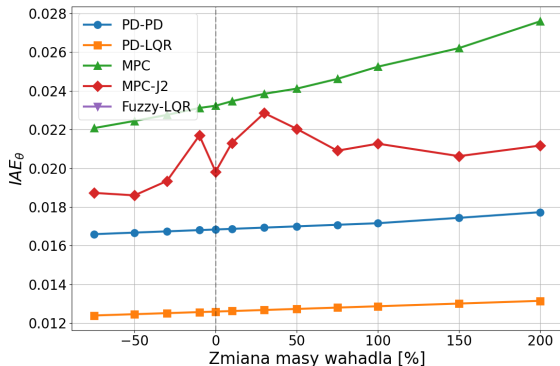
Przebieg kąta (+10% masy wahadła)

Obserwacje: Wszystkie regulatory zachowały stabilność. Regulatory MPC wykazują największą wrażliwość (model wewnętrzny różni się od rzeczywistego obiektu).



Przebieg pozycji (+10% masy wahadła)

Analiza wrażliwości na zmianę masy



Zakres testów:

–75% do +200% masy nominalnej

Wnioski:

- ▶ Regulatory klasyczne (PD, LQR) – płaska charakterystyka, niska wrażliwość
- ▶ MPC – najwyższe IAE_{θ} , wrażliwość na błąd modelu
- ▶ Wszystkie regulatory stabilne w całym zakresie

Złożoność obliczeniowa

Regulator	Czas [ms]	Względem PD
PD-PD	< 0.01	$1\times$
PD-LQR	0.02	$2\times$
Fuzzy-LQR	0.05	$5\times$
MPC	2.5	$250\times$
MPC-J2	2.8	$280\times$

- ▶ Regulatory klasyczne i rozmyte: czas rzędu mikrosekund
- ▶ MPC: ~ 2.5 ms (rozwiązywanie optymalizacji w każdym kroku)
- ▶ Wszystkie regulatory mogą pracować w czasie rzeczywistym ($\Delta t = 100$ ms)

Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

Główne wnioski

1. **Brak uniwersalnego regulatora** – każdy ma swoje zalety i wady
2. **Najwyższa precyzja: Fuzzy-LQR**
 - ▶ Minimalne wychylenia kątowe ($Max|\theta| = 0.05$ rad)
 - ▶ Wysoki koszt energetyczny ($E_u = 25.4$)
3. **Najlepsza ekonomia: MPC**
 - ▶ Najniższa energia w warunkach nominalnych ($E_u = 0.56$)
 - ▶ Płynne, przewidywalne sterowanie
4. **Uniwersalność: PD-LQR**
 - ▶ Lepszy od MPC przy zakłóceniach (pozycja + energia)
 - ▶ Niska złożoność obliczeniowa
5. **Wrażliwość na funkcję kosztu** – MPC-J2 pokazuje znaczenie doboru wag

Realizacja celów pracy

Zrealizowane cele:

- ✓ Środowisko symulacyjne w Pythonie
- ✓ 5 zaimplementowanych regulatorów z optymalizacją parametrów
- ✓ Wielokryterialna analiza porównawcza
- ✓ Testy odporności na zakłócenia i zmianę parametrów
- ✓ Kompleksowa dokumentacja wyników

Kierunki rozwoju:

- ▶ Algorytm swing-up (wprowadzanie z pozycji dolnej)
- ▶ Weryfikacja na stanowisku laboratoryjnym
- ▶ Porównanie z metodami uczenia ze wzmocnieniem

Dziękuję za uwagę

Pytania?

Autor: Adam Sokołowski
Opiekun: mgr inż. Robert Nebeluk
Kierunek: Automatyka i Robotyka

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Autor: Adam Sokołowski

Opiekun: mgr inż. Robert Nebeluk

Wydział Elektroniki i Technik Informatycznych PW

Automatyka i Robotyka

08.01.2026