

Politechnika Warszawska

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI
I TECHNIK INFORMACYJNYCH



Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej

Praca dyplomowa inżynierska

na kierunku Automatyka i Robotyka

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Adam Sokołowski

Numer albumu 324892

promotor
mgr inż. Robert Nebeluk

WARSZAWA 2026

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Streszczenie.

Celem pracy było opracowanie zestawu skryptów symulacyjnych oraz przeprowadzenie wielokryterialnej analizy porównawczej algorytmów sterowania dla nieliniowego układu odwróconego wahadła na wózku. W ramach badań zaimplementowano i przetestowano sześć strategii sterowania: klasyczny regulator równoległy PID, układ hybrydowy PID-LQR, sterowanie predykcyjne (Liniowe MPC, Nieliniowe MPC oraz MPC-J2 z rozszerzoną funkcją kosztu) oraz sterownik rozmyty typu Takagi-Sugeno wspomagany regulatorem LQR (Fuzzy-LQR). Badania przeprowadzono w środowisku języka Python, wykorzystując pełny model nieliniowy obiektu. Skuteczność algorytmów zweryfikowano w dwóch scenariuszach: stabilizacji w punkcie pracy oraz pracy w warunkach zakłóceń zewnętrznych. Analiza wyników wykazała, że nie istnieje jeden uniwersalny regulator dla wszystkich zastosowań. Sterownik Fuzzy-LQR zapewnił najwyższą precyzję stabilizacji i odporność na zakłócenia. W warunkach nominalnych wiązało się to z podwyższonym zużyciem energii, jednak przy silnych zakłóciach regulator ten okazał się najbardziej efektywny energetycznie. Z kolei regulator MPC okazał się rozwiązaniem najbardziej ekonomicznym w stanie ustalonym, zapewniając płynność ruchu i uwzględnienie ograniczeń fizycznych napędu. Układ PID-LQR stanowił kompromis ciekawy między złożonością obliczeniową a jakością regulacji, przewyższając klasyczne podejście PID.

Słowa kluczowe: odwrócone wahadło,regulator PID,regulator LQR,regulator MPC,Takagi-Sugeno,sterowanie predykcyjne,sterowanie optymalne,zakłócenia,stabilizacja,symulacja,układ nieliniowy

Effective stabilisation system of the inverted pendulum on the cart

Abstract.

The objective of this thesis was to develop simulation scripts and do a multi-criteria comparison of control algorithms for a nonlinear inverted pendulum on a cart. The study involved implementing six control strategies: a classical PID controller, a hybrid PID-LQR system, Model Predictive Control (Linear, Nonlinear, and MPC-J2), and a Takagi-Sugeno fuzzy controller supported by LQR (Fuzzy-LQR). Simulations were conducted in Python using a full nonlinear model. The algorithms were tested in two scenarios: stabilization at the operating point and operation under external disturbances. The results show that no single controller is universal. The Fuzzy-LQR controller provided the highest precision and robustness. While it consumed more energy under nominal conditions, it proved to be the most energy-efficient solution under strong disturbances. The MPC controller was the most economical for steady-state operation, ensuring smooth motion and compliance with physical constraints. The PID-LQR system offered a valuable compromise between computational complexity and control quality, outperforming the classical PID approach.

Keywords: inverted pendulum, PID controller, LQR controller, MPC controller, Takagi-Sugeno, predictive control, optimal control, disturbances, stabilization, nonlinear system, simulation

Spis treści

1. Wstęp	7
1.1. Cel i zakres pracy	8
1.2. Przegląd literatury	9
1.3. Układ pracy	10
2. Model matematyczny układu	12
2.1. Opis fizyczny i założenia upraszczające	12
2.2. Analiza kinematyczna	13
2.3. Równania dynamiki układu	14
2.3.1. Bilans sił w kierunku poziomym	14
2.3.2. Bilans momentów sił	14
2.4. Nieliniowy model w przestrzeni stanów	15
2.5. Linearyzacja modelu w punkcie pracy	16
2.5.1. Analiza wartości własnych układu otwartego	17
2.5.2. Sterowność i obserwonalność	17
2.6. Analiza zachowania układu w pętli otwartej	17
3. Środowisko symulacyjne i implementacja	19
3.1. Narzędzia programistyczne	19
3.2. Konfiguracja symulacji	19
3.3. Modelowanie zakłóceń	20
3.4. Wizualizacja i animacja	21
4. Algorytmy sterowania	23
4.1. Równoległy regulator PID	23
4.1.1. Proces doboru nastaw oraz analiza PID	24
4.2. Układ hybrydowy PID-LQR	27
4.2.1. Dobór wag macierzy Q i R	29
4.3. Nieliniowe sterowanie predykcyjne (MPC)	32
4.3.1. Dobór horyzontu i wag funkcji celu	34
4.4. MPC z rozszerzonym wskaźnikiem jakości (MPC-J2)	37
4.4.1. Dobór parametrów i analiza wpływu kary za energię	37
4.5. Liniowy regulator MPC (LMPC)	40
4.5.1. Dobór parametrów i analiza działania	41
4.6. Regulator rozmyty wspomagany LQR (Fuzzy-LQR)	42
4.6.1. Dobór reguł i funkcji przynależności	44
5. Eksperymenty	49
5.1. Plan eksperymentów	49
5.2. Badane algorytmy	50
5.3. Wskaźniki jakości regulacji	50

0. Spis treści

6. Analiza wyników	52
6.1. Stabilizacja w warunkach nominalnych	52
6.1.1. Charakterystyka regulatorów klasycznych	52
6.1.2. Charakterystyka regulatorów zaawansowanych	55
6.1.3. Zestawienie wyników	57
6.2. Analiza odporności na zakłócenia	59
6.2.1. Charakterystyka regulatorów klasycznych	59
6.2.2. Charakterystyka regulatorów zaawansowanych	61
6.2.3. Zestawienie wyników	63
6.3. Analiza odporności na zmianę parametrów modelu	65
6.3.1. Analiza wrażliwości na zakres zmian	68
6.4. Szczegółowe zestawienie ilościowe	68
6.5. Porównanie złożoności obliczeniowej	70
7. Podsumowanie	71
Bibliografia	73
Wykaz symboli i skrótów	74
Spis rysunków	77
Spis tabel	77

1. Wstęp

Odwrócone wahadło na wózku jest klasycznym przykładem nieliniowego, niestabilnego układu mechanicznego, wykorzystywanym powszechnie zarówno w dydaktyce, jak i w badaniach nad zaawansowanymi technikami sterowania. Mimo że geometria i parametry fizyczne obiektu są stosunkowo proste, układ ten wymaga zaawansowanych metod stabilizacji oraz precyzyjnej regulacji w czasie rzeczywistym. Jego charakterystyczna cecha — podwzbudność (ang. *underactuated system*), oznaczająca mniejszą liczbę wejść sterujących niż wyjść oraz silna wrażliwość na zakłócenia sprawiają, że nawet niewielkie odchylenia mogą prowadzić do gwałtownego narastania błędów i utraty równowagi.

Odwrócone wahadło na wózku służy jako kanoniczny układ testowy dla metod sterowania i estymacji stanu, ponieważ łączy w sobie trudności typowe dla systemów rzeczywistych: nieliniowość, niestabilność w otwartym układzie sterowania, ograniczenia aktuatora oraz niepewność parametrów. Umożliwia to weryfikację algorytmów w sytuacjach, w których klasyczne założenia teorii liniowej przestają obowiązywać, a układ wymaga adaptacji lub podejścia optymalnego.

Model ten posiada liczne analogie w praktyce inżynierskiej. Jego dynamika odzworowuje wiele złożonych zjawisk fizycznych i konstrukcji technicznych, w tym:

- stabilizację robotów dwukołowych (np. typu Segway) oraz robotów mobilnych balansujących na jednej osi [1];
- sterowanie suwnicami kontenerowymi oraz manipulatorami przemysłowymi, gdzie kluczowe jest tłumienie oscylacji przenoszonego ładunku [2];
- równoważenie platform i pojazdów samobalansujących, wymagające ciągłej korekty siły napędowej względem położenia środka masy [3].

Ze względu na powyższe zastosowania, problem stabilizacji odwróconego wahadła traktowany jest jako uproszczony model systemów rzeczywistych o zbliżonej dynamice. Badania symulacyjne na tym obiekcie pozwalają na wstępную walidację skuteczności algorytmów sterowania przed ich implementacją w bardziej złożonych lub kosztownych systemach. Z tego powodu układ ten od dziesięcioleci stanowi punkt odniesienia w rozwoju nowoczesnych metod regulacji — od klasycznych regulatorów PID (regulatory proporcjonalno-różniczkująco-całkujące) i LQR (liniowy regulator kwadratowy), po sterowanie predykcyjne (MPC, LMPC, adaptacyjne i rozmyte).

Prostota modelu matematycznego w połączeniu z łatwością interpretacji wyników (analiza kąta wychylenia i pozycji wózka) sprawiają, że odwrócone wahadło łączy złożoność teoretyczną z praktycznymi wyzwaniami inżynierskimi. Stanowi tym samym uniwersalne narzędzie do nauki, testowania i rozwijania metod stabilizacji systemów nieliniowych.

1.1. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest zaprojektowanie i realizacja środowiska symulacyjnego oraz przeprowadzenie w nim wielokryterialnej analizy porównawczej algorytmów sterowania dla nieliniowego układu odwróconego wahadła.

Aby zrealizować ten cel, zdefiniowano szereg wymagań funkcjonalnych i niefunkcjonalnych stawianych opracowywanemu systemowi. W warstwie funkcjonalnej środowisko musi wiernie odwzorowywać dynamikę układu wózka z wahadłem w oparciu o nieliniowe równania ruchu, a także umożliwiać elastyczne przełączanie pomiędzy zaimplementowanymi strategiami sterowania (PID-PID, PID-LQR, MPC, MPC-J2, Fuzzy-LQR, LMPC). Kluczowa jest również możliwość weryfikacji odporności regulatorów poprzez generowanie addytywnych zakłóceń zewnętrznych. System powinien oferować narzędzia do wizualizacji przebiegów oraz animacji ruchu obiektu, a także automatycznie archiwizować wyniki eksperymentów w celu późniejszego wyznaczenia wskaźników jakości (MSE, MAE, energia sterowania).

W zakresie wymagań niefunkcjonalnych przyjęto, że oprogramowanie zostanie zrealizowane w języku Python 3 z wykorzystaniem bibliotek numerycznych NumPy i SciPy. Projekt musi charakteryzować się wysoką modularnością, separującą logikę sterowania od silnika symulacyjnego, co ułatwi jego dalszą rozbudowę. Ponadto, zaimplementowane algorytmy powinny cechować się wydajnością umożliwiającą pracę w czasie zbliżonym do rzeczywistego.

W niniejszej pracy postanowiono porównać ze sobą trzy zupełnie różne podejścia:

- klasyczne (PID-PID),
- optymalne i predykcyjne (PID-LQR, MPC, LMPC),
- sterowanie rozmyte (Fuzzy).

Wszystkie te algorytmy zostały uruchomione w tym samym środowisku symulacyjnym. Dzięki temu możliwe było ich porównanie w ujednoliconych warunkach testowych. Sprawdzono nie tylko, jak precyjnie utrzymują wahadło w pionie, ale także jak radzą sobie z zakłóceniami zewnętrznymi oraz ile energii zużywają podczas pracy.

W ramach projektu zaimplementowano i poddano badaniom następujące struktury:

1. **Regulator PID-PID** — reprezentujący klasyczne podejście inżynierskie. Układ składa się z dwóch równoległych pętli sprzężenia zwrotnego typu PID (stabilizacja kąta i pozycji), bez członu całkującego ($K_i = 0$).
2. **Hybrydowy układ PID-LQR** — struktura łącząca regulator PID (w pętli regulacji pozycji) z optymalnym reguatorem stanu LQR (w pętli stabilizacji wahadła). Metoda ta stanowi punkt odniesienia dla oceny skuteczności metod bazujących na modelu liniowym.
3. **Regulator MPC** — wariant podstawowy sterowania predykcyjnego z kwadratową funkcją kosztu. Służy on w pracy jako nowoczesny punkt odniesienia, pozwalający

ocenić, jakie korzyści daje uwzględnienie ograniczeń sterowania i dynamiki układu bezpośrednio w procesie optymalizacji.

4. **Regulator LMPC** — liniowy wariant sterowania predykcyjnego korzystający z modelu zlinearyzowanego, stanowiący kompromis obliczeniowy.
5. **Regulator MPC z rozszerzonym wskaźnikiem jakości** — wariant badawczy metody predykcyjnej, w którym przeanalizowano wpływ dodatkowych kar w funkcji celu (za gwałtowne zmiany sterowania oraz jego amplitudę) na płynność regulacji i zużycie energii.
6. **Regulator rozmyty (Fuzzy Logic)** — metoda sterowania inteligentnego, wykorzystująca zbiór reguł wnioskowania, stanowiąca alternatywę dla metod analitycznych.

Kluczowym elementem pracy jest weryfikacja działania regulatorów w zadaniu stabilizacji wahadła w pozycji pionowej (punkt pracy) w obecności zakłóceń zewnętrznych. W celu obiektywnego porównania metod przyjęto zestaw wskaźników ilościowych. Jakość stabilizacji weryfikowana jest w oparciu o metryki całkowe błędu (ISE, IAE) dla kąta wychylenia oraz pozycji wózka. Równolegle ocenie poddano ekonomię sterowania, wyznaczając koszt energetyczny poprzez normy L_1 i L_2 sygnału sterującego. Całość uzupełnia analiza odporności układu na zakłócenia (szумy, siły zewnętrzne). Tak dobrane kryteria pozwalają na wszechstronne wskazanie mocnych i słabych stron badanych metod.

1.2. Przegląd literatury

W literaturze przedmiotu odwrócone wahadło na wózku traktowane jest powszechnie jako wzorcowy układ testowy (ang. *testbed*) dla weryfikacji algorytmów sterowania układami niestabilnymi. W pracy [3] przedstawiono kompletny model nieliniowy obiektu, uwzględniający zakłócenia stochastyczne, na podstawie którego przeprowadzono analizę porównawczą regulatorów PID, LQR oraz ich konfiguracji hybrydowych. Wyniki te wskazują, że włączenie komponentu LQR znacząco poprawia szybkość i płynność odpowiedzi w stosunku do klasycznej regulacji PID, szczególnie w zakresie stabilizacji kątowej wahadła.

Rozszerzenie zakresu badań o sterowanie predykcyjne (MPC) zaprezentowano w pozycji [4]. Autorzy stworzyli jednorodne środowisko symulacyjne, zestawiając przebiegi zmiennych stanu dla metod PID, LQR oraz MPC. Uzyskane rezultaty potwierdziły przewagę rozwiązań opartych na modelu (LQR, MPC) nad klasycznym PID w kontekście jakości regulacji, podkreślając jednocześnie kluczową zaletę MPC — możliwość bezpośredniego uwzględniania ograniczeń fizycznych nałożonych na wielkości sterujące.

Współczesne prace badawcze coraz częściej integrują metody optymalne z metodami sztucznej inteligencji. Artykuł [5] opisuje rozwiązanie hybrydowe, łączące regulator LQR z modelem rozmytym Takagi–Sugeno (z kompensacją PDC) oraz obserwatorem stanu. Podejście to pozwala na przyspieszenie zbieżności błędu regulacji do zera oraz poprawę jakości estymacji zmiennych w obecności szumów pomiarowych i niepewności parametrycznej modelu.

1. Wstęp

Istotnym uzupełnieniem badań symulacyjnych są weryfikacje eksperymentalne, szeroko reprezentowane w krajowej literaturze naukowej. W pracy Jezierskiego i in. [6] przeprowadzono porównanie algorytmów LQR i MPC na rzeczywistym stanowisku laboratoryjnym. Wykazano, że o ile regulator LQR skutecznie utrzymuje punkt pracy i tłumia zakłócenia, to sterowanie predykcyjne zapewnia łagodniejsze sterowanie i lepsze właściwości śledzenia trajektorii, co ma kluczowe znaczenie w aplikacjach robotycznych.

Z punktu widzenia podstaw teoretycznych, fundamentem dla implementacji sterowania predykcyjnego są prace monograficzne Camacho i Bordonsa [7]. Omawiają one szczegółowo zagadnienia doboru funkcji kosztu, horyzontów predykcji, a także stabilności układu zamkniętego. Aspekty wdrożeniowe, w tym efektywność numeryczna algorytmów optymalizacji na platformach wbudowanych, poruszane są w nowszych publikacjach [8]. Natomiast w obszarze sterowania rozmytego cennym źródłem wiedzy metodycznej są opracowania dotyczące modeli Takagi–Sugeno i ich porównań z podejściami klasycznymi [9].

Przeprowadzona analiza literatury wskazuje na ewolucję podejść sterowania: od klasycznych paradygmatów PID i LQR [3], przez ujęcia predykcyjne [4], aż po zaawansowane metody hybrydowe [5].

1.3. Układ pracy

Układ pracy został podzielony na rozdziały, których treść odpowiada kolejnym etapom realizacji projektu.

Rozdział drugi przedstawia szczegółowe wyprowadzenie modelu matematycznego odwróconego wahadła na wózku. Zawiera on opis fizyczny obiektu, równania dynamiki sformułowane w oparciu o prawa mechaniki, a także linearyzację modelu niezbędną do syntezy wybranych regulatorów.

Rozdział trzeci poświęcony jest opisowi zrealizowanego środowiska symulacyjnego. Przedstawiono w nim narzędzia programistyczne, metody numeryczne wykorzystane do rozwiązywania równań różniczkowych oraz sposób modelowania zakłóceń zewnętrznych.

Rozdział czwarty zawiera charakterystykę zaimplementowanych algorytmów sterowania. Omówiono w nim podstawy teoretyczne oraz szczegóły implementacyjne regulatorów: klasycznego PID-PID, optymalnego PID-LQR, predykcyjnego MPC/LMPC oraz rozmytego Takagi–Sugeno.

Rozdział piąty opisuje metodykę badań symulacyjnych. Zdefiniowano w nim scenariusze testowe, przyjęte wskaźniki jakości oraz procedurę strojenia regulatorów, ze szczególnym uwzględnieniem doboru wag macierzy LQR oraz nastaw regulatora PD.

Rozdział szósty prezentuje wyniki przeprowadzonych eksperymentów. Zawiera on szczegółową analizę przebiegów czasowych, zestawienie tabelaryczne błędów regulacji

w warunkach nominalnych i zakłóconych, oraz dyskusję porównawczą skuteczności badanych metod.

Pracę kończy podsumowanie, zawierające wnioski końcowe oraz kierunki dalszego rozwoju projektu.

2. Model matematyczny układu

Celem niniejszego rozdziału jest szczegółowe wyprowadzenie modelu matematycznego obiektu sterowania, którym jest odwrócone wahadło na wózku. Precyzyjne odwzorowanie dynamiki procesu jest fundamentalnym etapem projektowania układu sterowania, gdyż jakość modelu bezpośrednio wpływa na skuteczność algorytmów predykcyjnych (MPC) oraz optymalnych (LQR). Wyprowadzenie oparto na prawach mechaniki klasycznej oraz analizie sił i momentów przedstawionej w literaturze przedmiotu [3].

2.1. Opis fizyczny i założenia upraszczające

Rozważany obiekt sterowania należy do klasy mechanicznych układów podwzbudnych (ang. *underactuated systems*), co oznacza, że liczba wejść sterujących jest mniejsza od liczby stopni swobody. Układ składa się z wózka poruszającego się wzdłuż poziomej osi oraz pręta z masą skupioną, zamocowanego przegubowo do wózka.

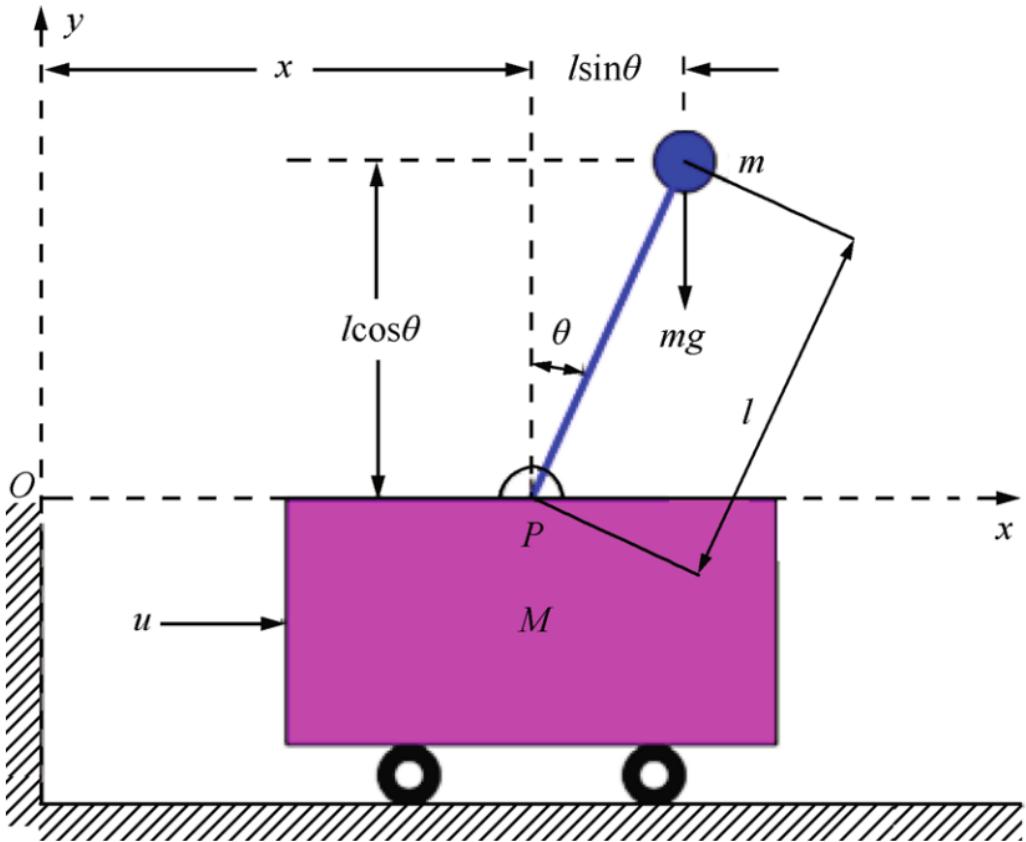
Przyjęto następujące parametry fizyczne modelu, zgodne z oznaczeniami stosowanymi w pracach badawczych [3]:

- M — masa wózka [kg],
- m — masa wahadła (traktowana jako masa punktowa na końcu pręta) [kg],
- l — długość wahadła (odległość od osi obrotu do środka ciężkości) [m],
- g — przyspieszenie ziemskie [m/s^2],
- $F(t)$ — siła sterująca przyłożona do wózka [N],
- $F_w(t)$ — siła zakłócająca (zakłócenie zewnętrzne) działająca poziomo na masę wahadła [N].

W celu sformułowania modelu analitycznego przyjęto następujące założenia upraszczające [3]:

- Pręt wahadła jest nieważki i sztywny.
- Tarcie w łożyskach kół wózka oraz w przegubie wahadła jest pomijalnie małe.
- Ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej $x - y$.
- Cała masa wahadła jest skupiona w jego środku geometrycznym (masa punktowa).

Układ odniesienia zdefiniowano w taki sposób, że współrzędna $x(t)$ opisuje poziome przesunięcie wózka, natomiast kąt $\theta(t)$ określa wychylenie wahadła od pionu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Pozycja $\theta = 0$ odpowiada niestabilnemu punktowi równowagi (wahadło w górze).



Rysunek 2.1. Źródło: [3]. Schemat układu odwróconego wahadła na wózku.

2.2. Analiza kinematyczna

W pierwszej kolejności zdefiniowano położenie środka ciężkości (COG) masy wahadła m w nieruchomym układzie odniesienia. Oznaczając współrzędne środka masy jako (x_G, y_G) , można je wyrazić jako sumę przemieszczenia wózka oraz rzutu geometrycznego ramienia wahadła [3]:

$$x_G(t) = x(t) + l \sin \theta(t), \quad (1)$$

$$y_G(t) = l \cos \theta(t). \quad (2)$$

Gdzie x_G to pozioma współrzędna masy wahadła, a y_G to jej współrzędna pionowa (odległość od osi wózka).

Aby zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona dla masy m , konieczne jest wyznaczenie jej prędkości oraz przyspieszeń całkowitych (bezwzględnych). Różniczkując równania (1) i (2) względem czasu, otrzymuje się składowe prędkości:

$$\dot{x}_G(t) = \dot{x}(t) + l \cos \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t), \quad (3)$$

$$\dot{y}_G(t) = -l \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t). \quad (4)$$

Ponowne różniczkowanie pozwala wyznaczyć składowe przyspieszenia środka masy wahadła \ddot{x}_G oraz \ddot{y}_G . Uwzględniają one zarówno przyspieszenie liniowe wózka, jak i składowe ruchu obrotowego (przyspieszenie styczne i dośrodkowe):

$$\ddot{x}_G(t) = \ddot{x}(t) + l \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) - l \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t), \quad (5)$$

$$\ddot{y}_G(t) = -l \sin \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) - l \cos \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t). \quad (6)$$

Powyższe zależności (5) i (6) są kluczowe, ponieważ siły bezwładności działające na masę wahadła zależą od jej całkowitego przyspieszenia w przestrzeni, a nie tylko od kąta wychylenia.

2.3. Równania dynamiki układu

Model dynamiczny wyprowadzono, rozpatrując siły działające na wózek oraz na wahadło osobno, a następnie składając je w układ równań sprzężonych.

2.3.1. Bilans sił w kierunku poziomym

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, suma sił zewnętrznych działających na cały układ w kierunku osi x musi równać się zmianie pędu układu. Siłami zewnętrznymi są: siła sterująca $u(t)$ przyłożona do wózka oraz siła zakłócająca $F_w(t)$ przyłożona do masy wahadła [3].

Równanie równowagi sił dla całego układu (masy M i m) przyjmuje postać:

$$M\ddot{x}(t) + m\ddot{x}_G(t) = u(t) + F_w(t). \quad (7)$$

Podstawiając wyznaczone wcześniej przyspieszenie poziome środka masy wahadła (5) do równania (7), otrzymujemy:

$$M\ddot{x}(t) + m(\ddot{x}(t) + l \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) - l \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t)) = u(t) + F_w(t). \quad (8)$$

Po uporządkowaniu wyrazów i wyciągnięciu \ddot{x} przed nawias, otrzymujemy pierwsze równanie różniczkowe opisujące ruch postępowy układu:

$$(M+m)\ddot{x}(t) + ml \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) - ml \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t) = u(t) + F_w(t). \quad (9)$$

2.3.2. Bilans momentów sił

Ruch obrotowy wahadła opisano poprzez sumę momentów sił względem punktu zawieszenia (przegubu na wózku). Siłami generującymi moment obrotowy są siły bezwładności masy wahadła, siła ciężkości oraz siła zakłócająca.

Zgodnie z analizą przedstawioną w pracy [3], równanie momentów przyjmuje postać:

$$m\ddot{x}_G(t)l \cos \theta(t) - m\ddot{y}_G(t)l \sin \theta(t) = mg l \sin \theta(t) + F_w(t)l \cos \theta(t). \quad (10)$$

W równaniu tym lewa strona reprezentuje moment wynikający z sił bezwładności, natomiast prawa strona uwzględnia momenty od sił zewnętrznych (grawitacji i zakłócenia zewnętrznego). Należy zauważyć, że siła zakłócająca $F_w(t)$ działa poziomo, stąd jej ramię siły względem punktu obrotu wynosi $l \cos \theta(t)$.

Podstawiając wyrażenia na przyspieszenia \ddot{x}_G (5) oraz \ddot{y}_G (6) do równania momentów (10), otrzymujemy rozbudowaną postać równania:

$$\begin{aligned} & ml \cos \theta(t) (\ddot{x}(t) + l \cos \theta(t) \ddot{\theta}(t) - l \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t)) \\ & - ml \sin \theta(t) (-l \sin \theta(t) \ddot{\theta}(t) - l \cos \theta(t) \dot{\theta}^2(t)) = mg l \sin \theta(t) + F_w(t) l \cos \theta(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Po wymnożeniu nawiasów składniki zawierające $\dot{\theta}^2$ wzajemnie się redukują. Wykorzystując jedynkę trygonometryczną $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ oraz dzieląc każde równanie przez l , otrzymujemy ostateczne drugie równanie dynamiki [3]:

$$m \cos \theta(t) \cdot \ddot{x}(t) + ml \cdot \ddot{\theta}(t) = mg \sin \theta(t) + F_w(t) \cos \theta(t). \quad (12)$$

2.4. Nieliniowy model w przestrzeni stanów

Układ równań (9) i (12) stanowi kompletny, sprzężony opis dynamiki. W celu prowadzenia symulacji numerycznej, konieczne jest rozprzężenie układu i wyznaczenie jawnych postaci przyspieszeń \ddot{x} i $\ddot{\theta}$.

Wyznaczając \ddot{x} z równania (12):

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m \cos \theta(t)} (mg \sin \theta(t) + F_w(t) \cos \theta(t) - ml \ddot{\theta}(t)), \quad (13)$$

i podstawiając do równania (9), a następnie wykonując przekształcenia algebraiczne, otrzymujemy jawnie wzory na przyspieszenia.

Ostateczne równania ruchu, uwzględniające wpływ siły sterującej u oraz zakłócenia F_w , przyjmują postać [3]:

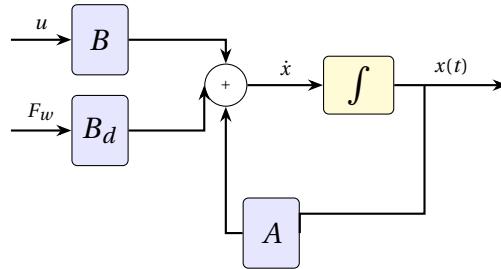
$$\ddot{x}(t) = \frac{u(t) + ml \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t) - mg \sin \theta(t) \cos \theta(t) + F_w(t) \sin^2 \theta(t)}{M + m - m \cos^2 \theta(t)}, \quad (14)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{(M + m)g \sin \theta(t) - u(t) \cos \theta(t) - ml \sin \theta(t) \cos \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t) - \frac{M}{m} F_w(t) \cos \theta(t) + F_w(t) \cos \theta(t)}{l(M + m - m \cos^2 \theta(t))}. \quad (15)$$

Definiując wektor stanu $\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T$, model w przestrzeni stanów zapisujemy jako układ czterech równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{(M+m)g \sin x_1 - u \cos x_1 - ml(\sin x_1 \cos x_1)x_2^2 - F_w(\frac{M}{m} \cos x_1 - \cos x_1)}{l(M+m-m \cos^2 x_1)} \\ x_4 \\ \frac{u + ml(\sin x_1)x_2^2 - mg \sin x_1 \cos x_1 + F_w \sin^2 x_1}{M+m-m \cos^2 x_1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Schemat blokowy modelu w przestrzeni stanów, ilustrujący przepływ sygnałów sterowania i zakłóceń, przedstawiono na Rys. 2.2.



Rysunek 2.2. Schemat blokowy nieliniowego modelu wahadła w przestrzeni stanów.

2.5. Linearyzacja modelu w punkcie pracy

W celu zastosowania algorytmów sterowania liniowego LQR, przeprowadzono linearyzację modelu nieliniowego wokół punktu równowagi chwiejnej ($\theta = 0$). Dla małych wychyleń zastosowano przybliżenia $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, a wyrazy wyższego rzędu ($\dot{\theta}^2$, $\sin^2\theta$) pominięto.

Liniowy model układu w postaci $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu + B_{\text{dist}}F_w$ opisują macierze wyznaczone zgodnie z literaturą [3]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Macierz sterowania B oraz macierz zakłóceń B_{dist} przyjmują postać:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad B_{\text{dist}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Warto zauważyć, że w modelu zlinearyzowanym wpływ zakłócenia zewnętrznego na przyspieszenie kątowe wahadła jest odwrotnie proporcjonalny do masy m (element $-\frac{1}{ml}$ w macierzy B_{dist}), podczas gdy w równaniu przyspieszenia wózka efekt ten zanika

dla małych kątów (element zerowy). Jest to zgodne z wynikami prezentowanymi w pracy źródłowej [3].

2.5.1. Analiza wartości własnych układu otwartego

Aby formalnie potwierdzić niestabilność układu w górnym punkcie równowagi, wyznaczono wartości własne macierzy stanu A . Dla przyjętych parametrów fizycznych ($M = 2,4$ kg, $m = 0,23$ kg, $l = 0,36$ m, $g = 9,81$ m/s 2) wielomian charakterystyczny $\det(\lambda I - A) = 0$ przyjmuje postać:

$$\lambda^4 - \frac{(M+m)g}{Ml}\lambda^2 = 0. \quad (19)$$

Rozwiązuając powyższe równanie, otrzymujemy cztery wartości własne:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 \approx -5,49, \quad \lambda_4 \approx +5,49. \quad (20)$$

Obecność dodatniej wartości własne $\lambda_4 > 0$ potwierdza, że układ w pętli otwartej jest niestabilny — każde, nawet minimalne odchylenie od pionu będzie narastać eksponencjalnie w czasie. Dwie zerowe wartości własne odpowiadają ruchowi wózka po torze (brak tłumienia, brak siły przywracającej).

2.5.2. Sterowność i obserwowalność

Warunkiem koniecznym stosowności regulatora LQR jest pełna sterowność pary (A, B) . Macierz sterowności Kalmana zdefiniowana jest jako:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Dla rozpatrywanego układu wyznaczono $\text{rank}(\mathcal{C}) = 4$, co oznacza pełną sterowność — istnieje sygnał sterujący $u(t)$, który pozwala przeprowadzić układ z dowolnego stanu początkowego do dowolnego stanu końcowego w skończonym czasie.

Analogicznie, macierz obserwowalności (przy założeniu pomiaru kąta θ i pozycji x , tj. $C = [1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0]$) ma pełny rząd, co potwierdza pełną obserwowalność układu. Oznacza to, że na podstawie pomiarów wyjściowych możliwe jest jednoznaczne odtworzenie pełnego wektora stanu, co jest istotne dla praktycznej implementacji regulatorów opartych na sprzężeniu zwrotnym od stanu.

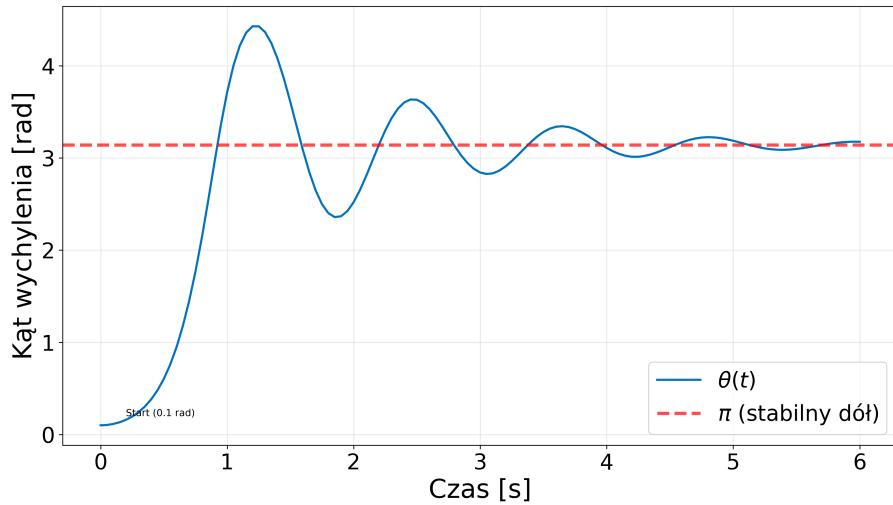
2.6. Analiza zachowania układu w pętli otwartej

Odwrócone wahadło jest z natury układem niestabilnym w górnym punkcie równowagi ($\theta = 0$). Aby zobrazować tę właściwość, przeprowadzono symulację zachowania obiektu bez działania układu sterowania ($u(t) = 0$), przy niewielkim wychyleniu początkowym $\theta_0 = 0,1$ rad (ok. $5,7^\circ$).

Jak pokazano na Rys. 2.3, nawet niewielkie odchylenie od pionu powoduje, że pod wpływem siły grawitacji wahadło gwałtownie traci równowagę i opada. W rzeczywistym ukła-

2. Model matematyczny układu

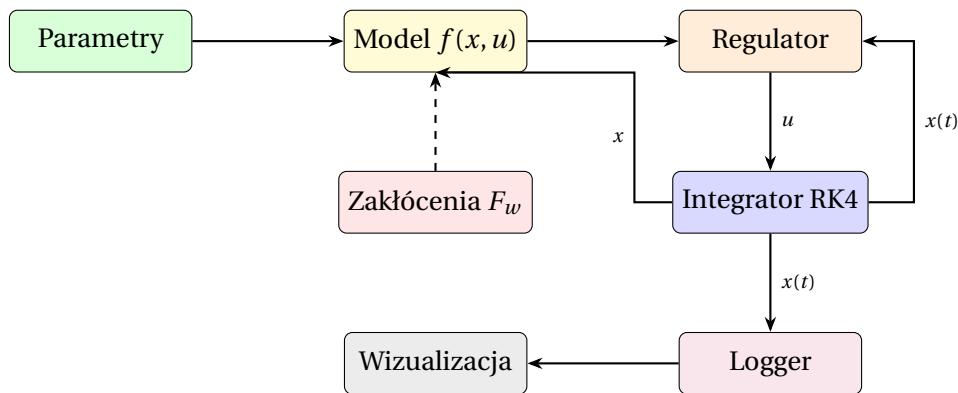
dzie fizycznym, obecność tarcia w przegubie oraz oporu powietrza sprawia, że energia mechaniczna jest rozpraszana. W rezultacie, kąt wychylenia $\theta(t)$ dąży do stabilnego punktu równowagi dolnej, tj. $\theta = \pi$ rad.



Rysunek 2.3. Symulacja odpowiedzi swobodnej układu (z uwzględnionym tłumieniem) na małe wychylenie początkowe. Układ opuszcza niestabilny punkt równowagi ($\theta \approx 0$) i stabilizuje się w pozycji wiszącej ($\theta = \pi$).

3. Środowisko symulacyjne i implementacja

W celu przeprowadzenia badań i weryfikacji działania algorytmów sterowania, przygotowano zestaw skryptów symulacyjnych zrealizowanych w języku Python 3. Wybór tego języka podyktowany był jego powszechnością w zastosowaniach naukowych, dostępnością bibliotek do obliczeń numerycznych i optymalizacji, a także łatwością prototypowania złożonych struktur sterowania. Ogólną architekturę środowiska przedstawiono na Rys. 3.1.



Rysunek 3.1. Architektura środowiska symulacyjnego.

3.1. Narzędzia programistyczne

W projekcie wykorzystano następujące biblioteki i narzędzia:

- **NumPy** [10] – podstawowa biblioteka do obliczeń macierzowych i operacji na wielowymiarowych tablicach danych, wykorzystywana do implementacji równań stanu oraz przechowywania przebiegów symulacji.
- **SciPy** [11] – pakiet naukowy dostarczający zaawansowanych algorytmów numerycznych. W pracy użyto modułów:
 - `scipy.linalg` – do rozwiązywania algebraicznego równania Riccatiego (ARE) w algorytmie LQR.
 - `scipy.optimize` – zawierającego solwer `minimize` (metoda SLSQP), wykorzystywany do rozwiązywania zadań optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami w regulatorze MPC.
- **Matplotlib** – biblioteka służąca do wizualizacji wyników w postaci wykresów przebiegów czasowych oraz do generowania animacji ruchu wahadła.

3.2. Konfiguracja symulacji

Symulator opiera się na numerycznym całkowaniu wyprowadzonych wcześniej nieliniiowych równań dynamiki. Wybrano procedurę całkowania metodą Runge-Kutta czwartego rzędu (RK4). Wybór tej metody podyktowany był kilkoma czynnikami: w odróżnieniu od prostszej metody Eulera, RK4 charakteryzuje się błędem lokalnym rzędu $\mathcal{O}(\Delta t^5)$, co

3. Środowisko symulacyjne i implementacja

zapewnia wysoką dokładność przy umiarkowanym koszcie obliczeniowym. Jednocześnie, w przeciwieństwie do metod adaptacyjnych (np. `ode45`), stały krok czasowy gwarantuje deterministyczne taktowanie pętli sterowania, co jest istotne przy porównywaniu regulatorów.

Tabela 3.1. Parametry fizyczne modelu przyjęte w symulacji

Parametr	Symbol	Wartość	Jednostka
Masa wózka	M	2,40	kg
Masa wahadła	m	0,23	kg
Długość wahadła	l	0,36	m
Przyspieszenie ziemskie	g	9,81	m/s^2
Ograniczenie sterowania	F_{\max}	100,00	N

Symulacje przeprowadzane są dla zadania stabilizacji układu w pionie (tzw. punkt pracy), startując z niezerowych warunków początkowych lub wymuszając zmianę pozycji wózka.

Warunki początkowe:

$$\mathbf{x}_0 = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T = [0, 0, 0, 0]^T$$

Oznacza to niewielkie (ok. $2,86^\circ$) początkowe wychylenie wahadła, które regulator musi zniwelować.

Wartości zadane: Celem układu jest osiągnięcie stanu $\mathbf{x}_{\text{ref}} = [0, 0, x_{\text{ref}}, 0]^T$, gdzie x_{ref} (np. 0,10 m) jest zadaną nową pozycją wózka, przy jednoczesnym utrzymaniu pionowej pozycji wahadła ($\theta = 0$).

3.3. Modelowanie zakłóceń

Aby zweryfikować odporność układów sterowania, zaimplementowano generator zakłóceń zewnętrznych działających na wahadło. Generator ten działa w sposób dyskretny, realizując w każdym kroku symulacji k następujące operacje:

1. Dyskretne próbkowanie szumu:

$$w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (22)$$

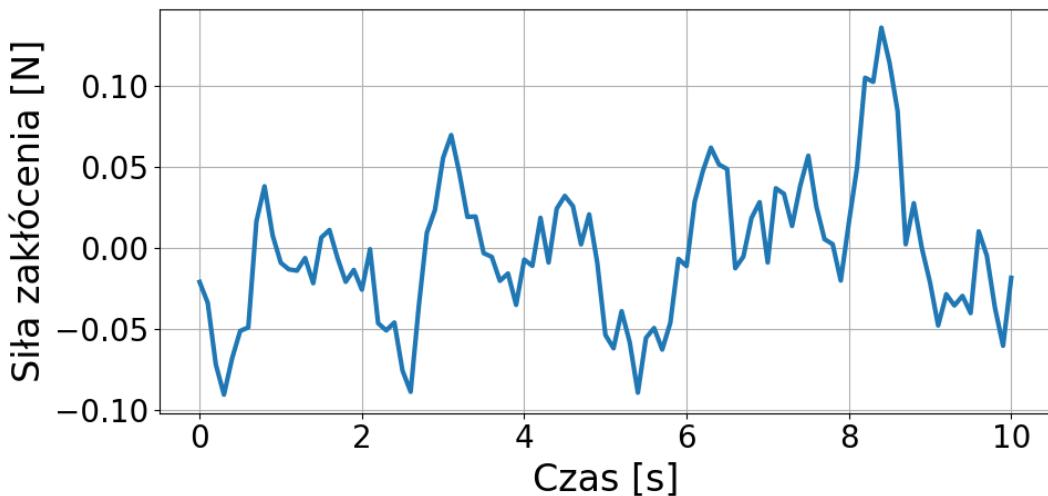
gdzie σ jest odchyleniem standardowym siły zakłócającej wyrażonym w niutonach. W przeprowadzonych eksperymentach przyjęto $\sigma = 2,2$ N, co oznacza, że wartość skuteczna (RMS) siły zakłócającej wynosi około 2,2 N, a chwilowe wartości szczytowe mogą osiągać $\pm 6,6$ N (przedział 3σ). Parametr ten dobrano empirycznie tak, aby zakłócenia stanowiły znaczące obciążenie dla układu sterowania (porównywalne z kilkoma procentami maksymalnego momentu obrotowego wózka).

malnej siły aktuatora $F_{\max} = 100 \text{ N}$), lecz nie przekraczały możliwości kompensacyjnych badanych regulatorów.

2. Wygładzanie (ruchoma średnia):

$$F_{w,k} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=0}^{N_s-1} w_{k-i}, \quad (23)$$

gdzie $F_{w,k}$ to wypadkowa siła zakłócająca w chwili k , a N_s to długość okna uśredniającego (przyjęto $N_s = 10$). Takie podejście pozwala na uzyskanie ciągłego, wolnozmennego sygnału lepiej odwzorowującego rzeczywiste zakłócenia zewnętrzne. Przykładowy przebieg wygenerowanego sygnału przedstawiono na Rys. 3.2.



Rysunek 3.2. Przykładowa realizacja stochastycznego procesu zakłócenia zewnętrznego działającego na wahadło w czasie symulacji.

3.4. Wizualizacja i animacja

Oprócz standardowych wykresów zmiennych stanu i sterowania, środowisko wyposażono w moduł wizualizacji dynamicznej (Rys. 3.3). Implementacja animacji oparta jest na bibliotece Matplotlib i klasie FuncAnimation, która pozwala na cykliczne odświeżanie obiektów graficznych zgodnie z taktowaniem symulacji.

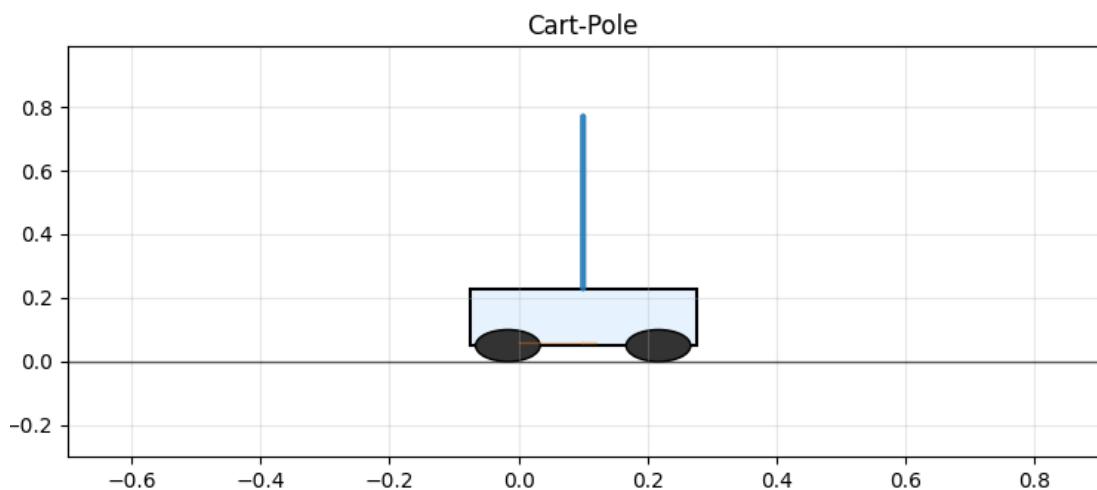
Graficzna reprezentacja obiektu (robot) zbudowana jest z prostych prymitywów geometrycznych:

- **Wózek:** obiekt typu Rectangle, którego pozycja pozioma aktualizowana jest w każdej klatce na podstawie zmiennej stanu $x(t)$.
- **Koła:** obiekty Circle, poruszające się wraz z wózkiem.
- **Wahadło:** obiekt liniowy, którego współrzędne końcowe wyznaczane są na podstawie kąta $\theta(t)$.

3. Środowisko symulacyjne i implementacja

Kluczowym elementem implementacji jest funkcja aktualizująca `update`, wywoływana dla każdego kroku czasowego. Odpowiada ona za przeliczenie współrzędnych kinematycznych oraz przesunięcie okna widoku kamery tak, aby wózek znajdował się zawsze w centrum, co pozwala na obserwację ruchu na długim dystansie. Dodatkowo rysowany jest ślad przebytej drogi przez oś wózka, co ułatwia wizualną ocenę stabilności pozycji.

Wykorzystanie animacji pozwala na szybką, intuicyjną weryfikację poprawności modelu fizycznego oraz ocenę jakości regulacji w sposób trudny do uchwycenia na statycznych wykresach (np. nienaturalne drgania czy gwałtowne, nieciągłe zmiany sygnału sterującego).



Rysunek 3.3. Zrzut ekranu z animacji realizowanej w środowisku Python (biblioteka Matplotlib). Widoczny wózek, wahadło oraz zakres ruchu.

4. Algorytmy sterowania

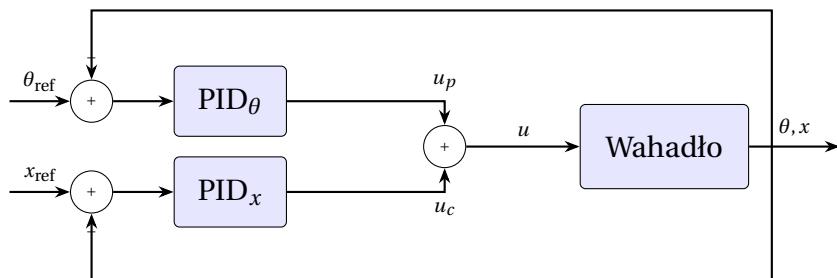
W niniejszym rozdziale przedstawiono szczegółowy opis algorytmów sterowania zaimplementowanych i przeanalizowanych w ramach pracy. Kod regulatorów został zrealizowany w języku Python w postaci klas dziedziczących wspólną strukturę, co zapewnia modularność i łatwą wymienność w pętli symulacyjnej. Każdy regulator wyznacza sygnał sterujący $u(t)$ (siłę przyłożoną do wózka) na podstawie aktualnego wektora stanu $x(t) = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T$ oraz wartości zadanych x_{ref} .

W literaturze problem sterowania wahadłem odwróconym jest szeroko omawiany jako klasyczny problem testowy dla metod sterowania liniowego i nieliniowego [3], [5]. Poniżej opisano teoretyczne podstawy oraz szczegółowo implementacyjne zbadanych struktur sterowania.

4.1. Równoległy regulator PID

Pierwszym zaimplementowanym układem jest regulator o strukturze równoległej, wykorzystujący klasyczne sprzężenie zwrotne typu PID [3]. W literaturze podejście to jest często stosowane jako punkt odniesienia dla bardziej zaawansowanych metod [3].

W klasie PDPCController zastosowano strukturę równoległą, w której całkowity sygnał sterujący jest sumą reakcji na błąd kąta oraz błąd pozycji. Jest to podejście intuicyjne, dekomponujące problem na dwa podzadania: stabilizację wahadła w pozycji pionowej oraz doprowadzenie wózka do zadanej pozycji. Schemat blokowy regulatora przedstawiono na Rys. 4.1.



Rysunek 4.1. Schemat blokowy regulatora PID o strukturze równoległej.

Pravo sterowania wyraża się wzorem:

$$u(t) = \text{sat}_{u_{\max}}(u_\theta(t) + u_x(t)), \quad (24)$$

gdzie funkcja nasycenia $\text{sat}(\cdot)$ wynika z ograniczeń fizycznych silownika. Definiując uchyby regulacji jako $e_\theta(t) = \theta_{\text{ref}} - \theta(t)$ oraz $e_x(t) = x_{\text{ref}} - x(t)$, prawo sterowania dla poszczegól-

nych pętli można zapisać w ogólnej postaci regulatora PID:

$$u_\theta(t) = K_{p,\theta} e_\theta(t) + K_{i,\theta} \int_0^t e_\theta(\tau) d\tau + K_{d,\theta} \frac{de_\theta(t)}{dt}, \quad (25)$$

$$u_x(t) = K_{p,x} e_x(t) + K_{i,x} \int_0^t e_x(\tau) d\tau + K_{d,x} \frac{de_x(t)}{dt}. \quad (26)$$

W powyższych równaniach przyjęto upraszczające założenie, że docelowe prędkości ($\dot{\theta}_{\text{ref}}, \dot{x}_{\text{ref}}$) wynoszą zero.

W implementacji programowej przyjęto następujące nastawy dobrane eksperymentalnie:

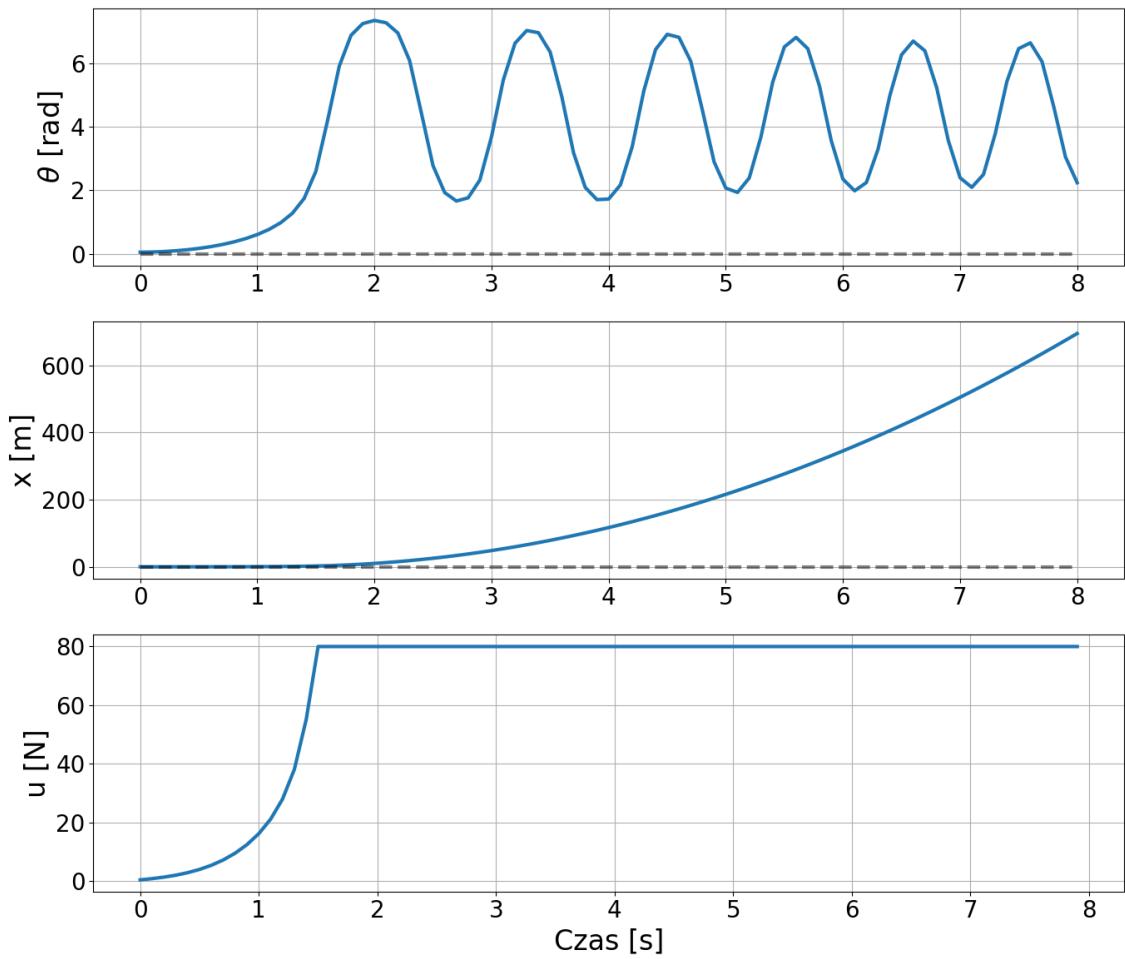
- Tor stabilizacji kąta: $K_{p,\theta} = -40, 0$, $K_{i,\theta} = -1, 0$, $K_{d,\theta} = -8, 0$. Ujemne znaki wynikają z przyjętej konwencji układu współrzędnych i zwrotu siły.
- Tor pozycji: $K_{p,x} = -1, 0$, $K_{i,x} = -0, 1$, $K_{d,x} = -3, 0$.

4.1.1. Proces doboru nastaw oraz analiza PID

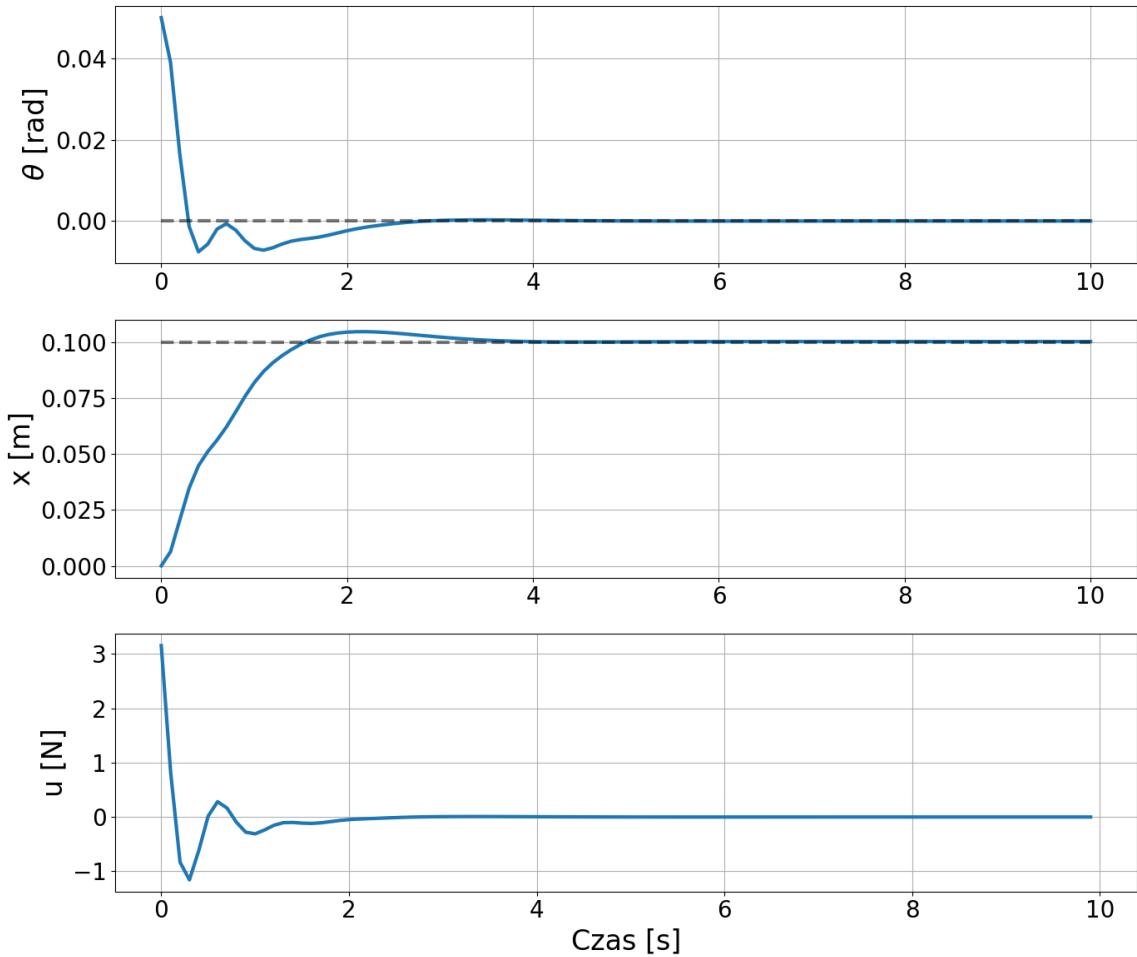
Dobór nastaw dla regulatora PID został zrealizowany wieloetapowo, przechodząc od metod heurystycznych do pełnej optymalizacji numerycznej. Wstępny dobór nastaw przeprowadzono metodą eksperymentalną, jednak nie pozwoliła ona na uzyskanie zadowalających wskaźników jakości, gdyż obiekt wahadła na wózku wymaga bardzo precyzyjnych nastaw, a dobór parametrów metodą prób i błędów jest czasochłonny i nie gwarantuje optymalnych rezultatów. Konieczne było balansowanie między agresywnym członem różniczkującym dla stabilizacji kąta, a członem całkującym dla eliminacji uchybu pozycji, co często prowadziło do niestabilności układu.

Wstępne próby doboru metodą prób i błędów (Rys. 4.2), oparte na dekompozycji problemu (najpierw stabilizacja wahadła, potem pozycja wózka), nie pozwoliły uzyskać stabilności i jakość regulacji była niezadowalająca. Układ charakteryzował się znacznymi oscylacjami. Wzmocnienia proporcjonalne ($K_p = -10$ dla kąta) były niewystarczające, aby szybko tłumić odchylenia od pionu.

Aby wyeliminować subiektywność strojenia ręcznego, zastosowano metodę przeszukiwania siatki (ang. *grid search*). Metoda ta polega na systematycznym przeglądaniu zdefiniowanej przestrzeni parametrów, ewaluując błąd *MSE* dla każdej kombinacji wartości z zadanego zbioru dyskretnego. Przeszukano siatkę wartości dla każdego z sześciu parametrów (K_p , K_i , K_d dla obu pętli), wybierając konfigurację minimalizującą błąd średniokwadratowy.

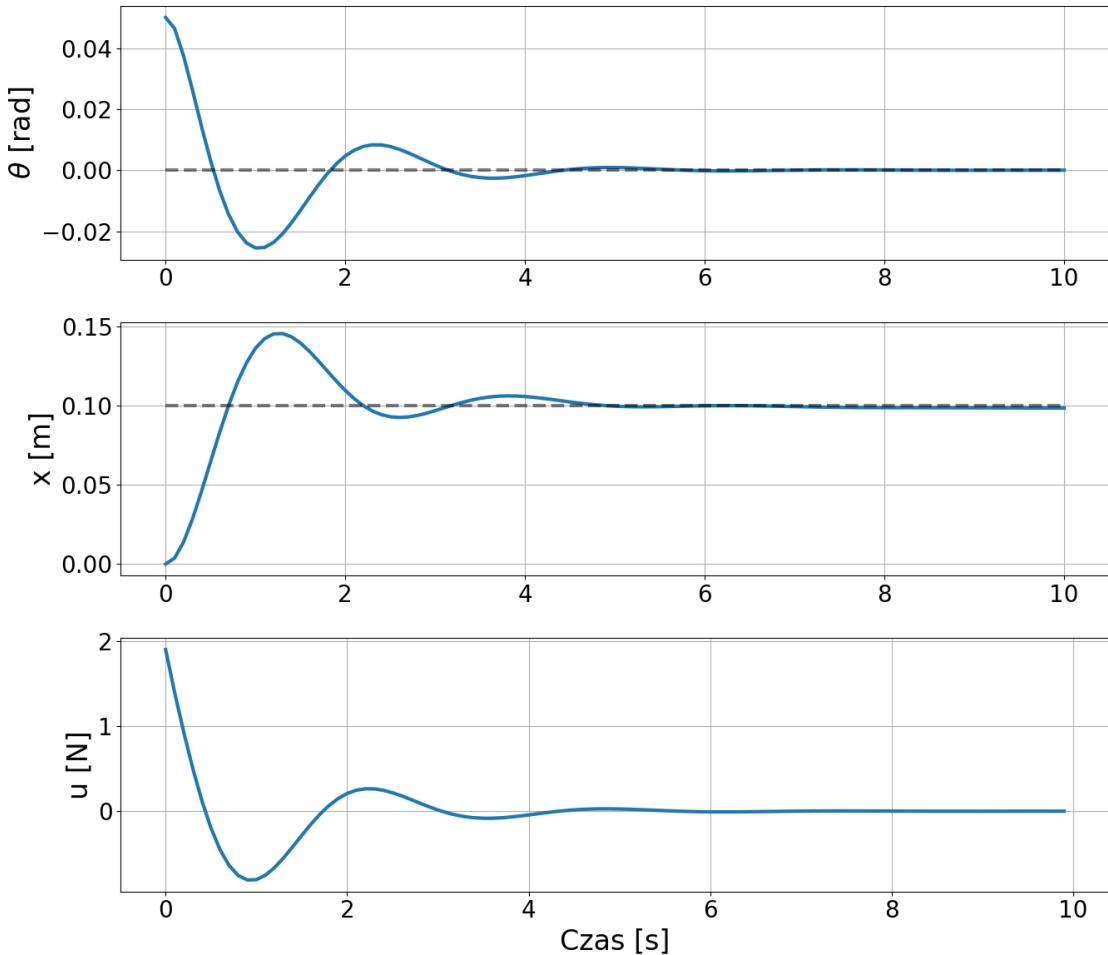


Rysunek 4.2. Przebiegi sygnałów dla regulatora PID przy nieoptymalnych nastawach ($K_{p,\theta} = -10$, $K_{i,\theta} = -1$, $K_{d,\theta} = -3$, $K_{p,x} = -1$, $K_{i,x} = -0,1$, $K_{d,x} = -3$).



Rysunek 4.3. Regulator PID z nastawami z przeszukiwania siatki ($K_{p,\theta} = -95$, $K_{i,\theta} = 0$, $K_{d,\theta} = -14$, $K_{p,x} = -16$, $K_{i,x} = 0$, $K_{d,x} = -14$).

Nastawy dobrane przy pomocy metody siatki (Rys. 4.3) charakteryzują się znacznie wyższymi wzmacnieniami niż dobrane ręcznie: $K_{p,\theta} = -95$ (vs. -10) oraz $K_{p,x} = -16$ (vs. -1). W wyniku optymalizacji ustalono, że intensywna reakcja na błąd pozycji wózka pośrednio stabilizuje wahadło, ponieważ wymusza szybkie korekty trajektorii. Jednak w tym przypadku jakość sygnału sterującego była niezadowalająca i ostateczne strojenie znów wykonano ręcznie, tym razem biorąc już pod uwagę wyniki uzyskane podczas przeszukiwania siatki.



Rysunek 4.4. Regulator PID nastawiony ręcznie ($K_{p,\theta} = -40$, $K_{i,\theta} = -1$, $K_{d,\theta} = -8$, $K_{p,x} = -1$, $K_{p,x} = -0,1$, $K_{d,x} = -3$).

Ostateczny regulator PID charakteryzuje się szybkim dochodzeniem do wartości zadanej, małymi błędami MSE i MAE oraz wysoką jakością sygnału sterującego. Udało się uzyskać kompromis, w którym sterowanie jest dynamiczne, ale nie powoduje nasycenia silownika ani niebezpiecznych oscylacji. Czas regulacji oraz przeregulowania zostały zminimalizowane, co czyni ten regulator solidnym punktem odniesienia dla bardziej zaawansowanych strategii sterowania.

4.2. Układ hybrydowy PID-LQR

Regulator liniowo-kwadratowy (LQR) stanowi fundamentalną metodę sterowania optymalnego dla systemów liniowych wielowymiarowych MIMO [6]. W odróżnieniu od regulatorów PID, które wymagają empirycznego doboru wzmacnień dla każdej zmiennej stanu, LQR wyznacza optymalne wzmacnienia automatycznie na podstawie modelu liniowego obiektu oraz macierzy wag Q i R definiujących kompromis między jakością regulacji a zużyciem energii.

4. Algorytmy sterowania

Problem LQR polega na znalezieniu prawa sterowania $u(t) = -Kx(t)$, które minimalizuje wskaźnik jakości:

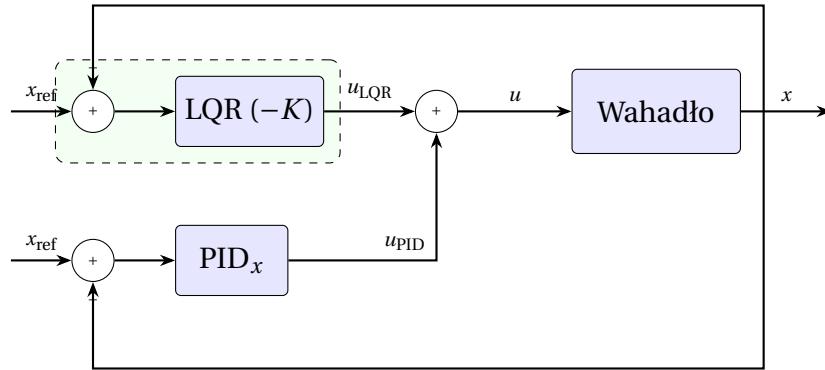
$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt, \quad (27)$$

gdzie $Q \geq 0$ jest macierzą wag stanu, a $R > 0$ wagą sterowania. Optymalna macierz wzmocnień K wyznaczana jest poprzez rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (28)$$

skąd $K = R^{-1}B^T P$. Macierze A i B pochodzą z linearyzacji modelu wahadła wokół górnego punktu równowagi ($\theta = 0$).

Klasa `PIDLQRController` implementuje sterowanie oparte na pełnym wektorze stanu, wspomagane dodatkowym członem PID dla uchybu pozycji, co tworzy strukturę hybrydową opisaną m.in. w [3] oraz [5] (w kontekście porównawczym). Schemat blokowy tego układu przedstawiono na Rys. 4.5.



Rysunek 4.5. Schemat blokowy hybrydowego regulatora PID-LQR.

Problem LQR polega na znalezieniu prawa sterowania $u(t) = -Kx(t)$, które minimalizuje wskaźnik jakości:

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt, \quad (29)$$

gdzie $Q \geq 0$ jest macierzą wag stanu, a $R > 0$ wagą sterowania. Optymalna macierz wzmocnień K wyznaczana jest poprzez rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (30)$$

skąd $K = R^{-1}B^T P$. Macierze A i B pochodzą z linearyzacji modelu wahadła wokół punktu równowagi górnej ($\theta = 0$).

W zaimplementowanym rozwiążaniu, sygnał sterujący składa się z dwóch komponentów:

$$u(t) = u_{\text{LQR}}(t) + u_{\text{PID, pos}}(t). \quad (31)$$

Składnik LQR realizuje stabilizację wokół punktu pracy:

$$u_{\text{LQR}}(t) = -K \cdot (x(t) - x_{\text{ref}}). \quad (32)$$

Zastosowane wagi optymalne to:

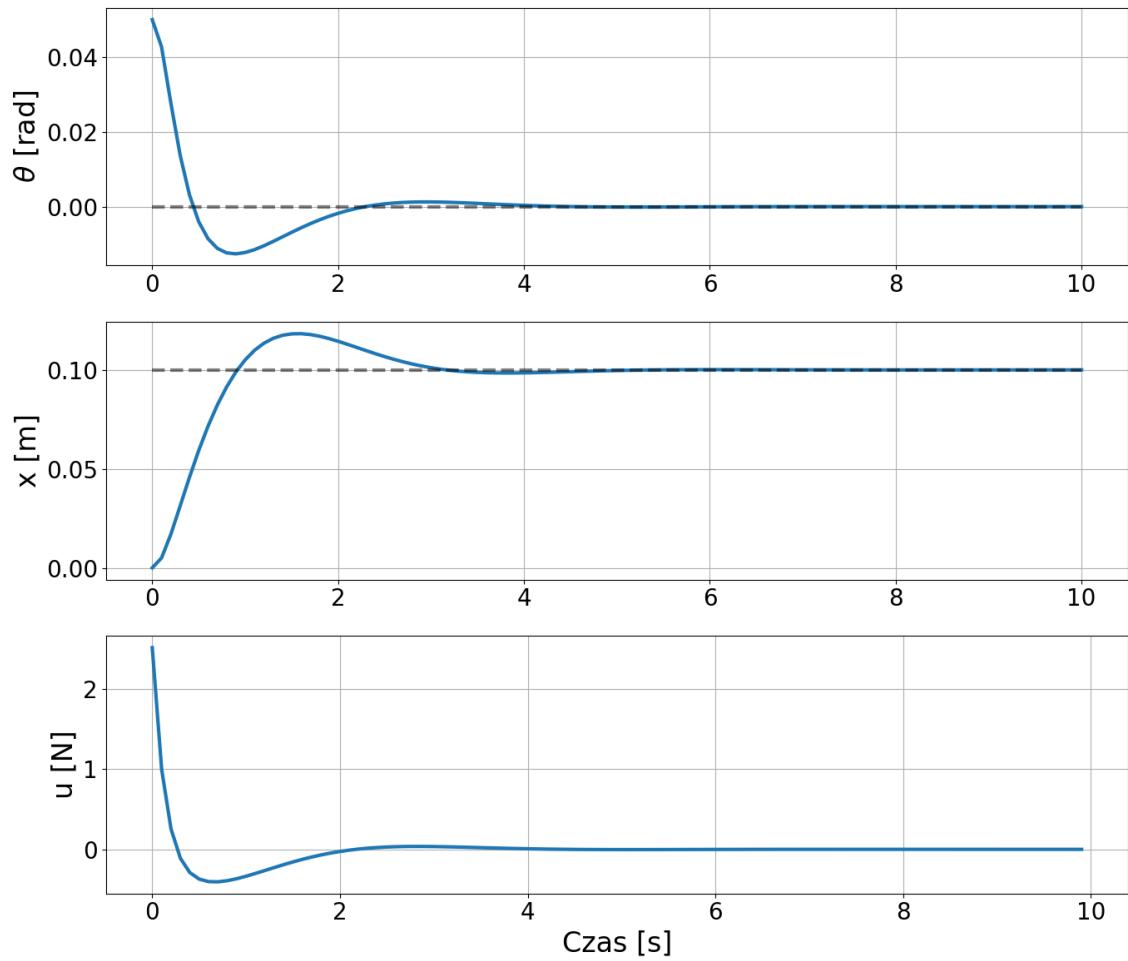
$$Q = \text{diag}([200, 3, 35, 40]), \quad R = 1. \quad (33)$$

Dodatkowy człon PID na pętli pozycji (zrealizowany analogicznie do wzoru 26) ma na celu poprawę śledzenia skokowych zmian wartości zadanej x_{ref} , co jest częstą praktyką w aplikacjach praktycznych, gdzie LQR zapewnia stabilność, a regulator zewnętrzny dba o uchybę w stanie ustalonym [4].

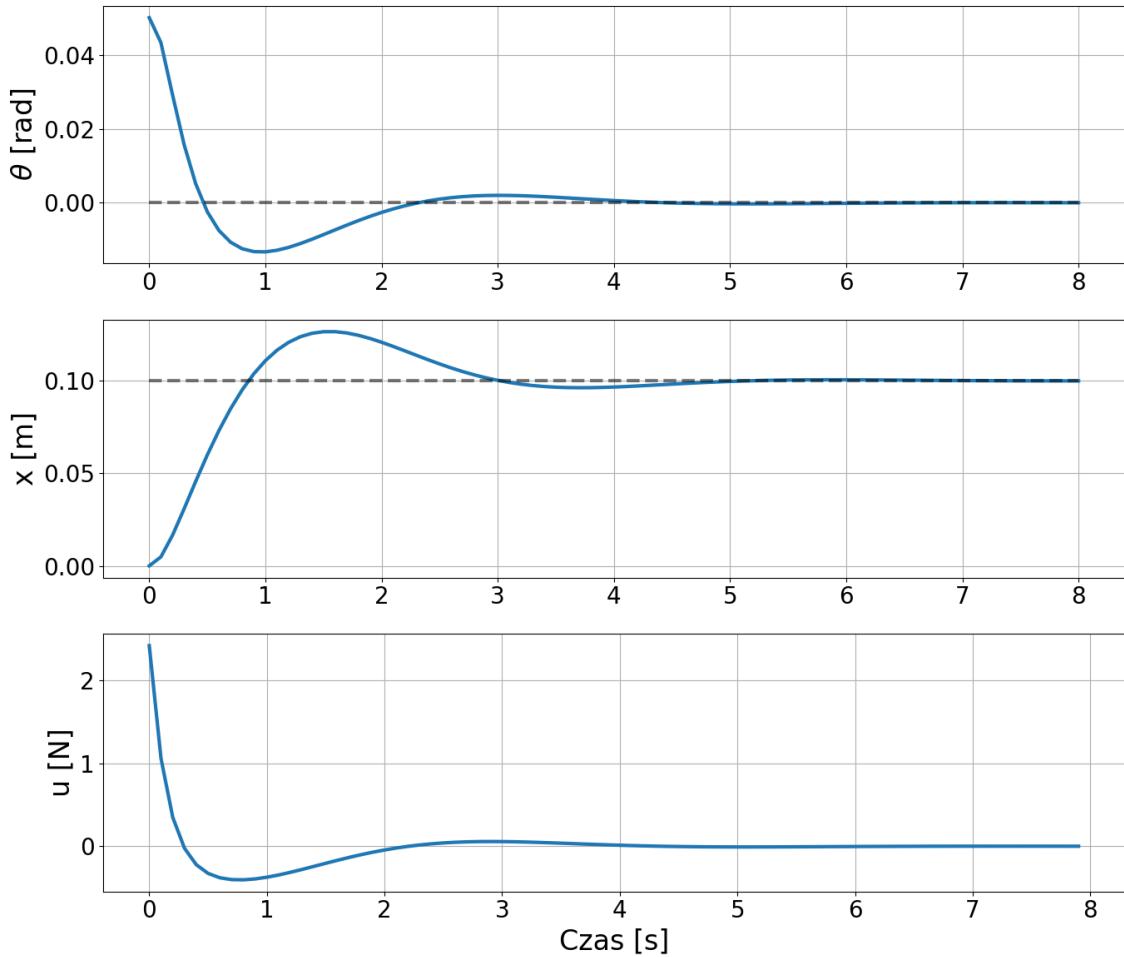
4.2.1. Dobór wag macierzy Q i R

Dobór wartości elementów macierzy wag Q i R zrealizowano w sposób wieloetapowy, ewoluując od konfiguracji bazowej do rozwiązania zoptymalizowanego. W pierwszej kolejności zbadano zachowanie układu dla nastaw jednostkowych, co pozwoliło zidentyfikować podstawowe ograniczenia stabilności. Następnie, wykorzystując wiedzę o dynamice obiektu, przeprowadzono strojenie ręczne, by w końcowym etapie wykorzystać algorytmy numeryczne do finalnego dostrojenia parametrów i maksymalizacji wskaźnika jakości regulacji.

W pierwszej fazie przyjęcie jednostkowej macierzy diagonalnej $Q = I$ oraz $R = 1$ (Rys. 4.6) okazało się niewystarczające. Mimo teoretycznej stabilności wynikającej z rozwiązania równania, wahadło wykonywało bardzo duże wychylenia, a wózek wielokrotnie wyjeżdżała poza dopuszczalny zakres roboczy toru. Problem wynikał z faktu, że jednostkowe wagi traktują 1 rad błędu kąta tak samo jak 1 m błędu pozycji i 1 N² kosztu sterowania – co jest fizycznie nieuzasadnione.

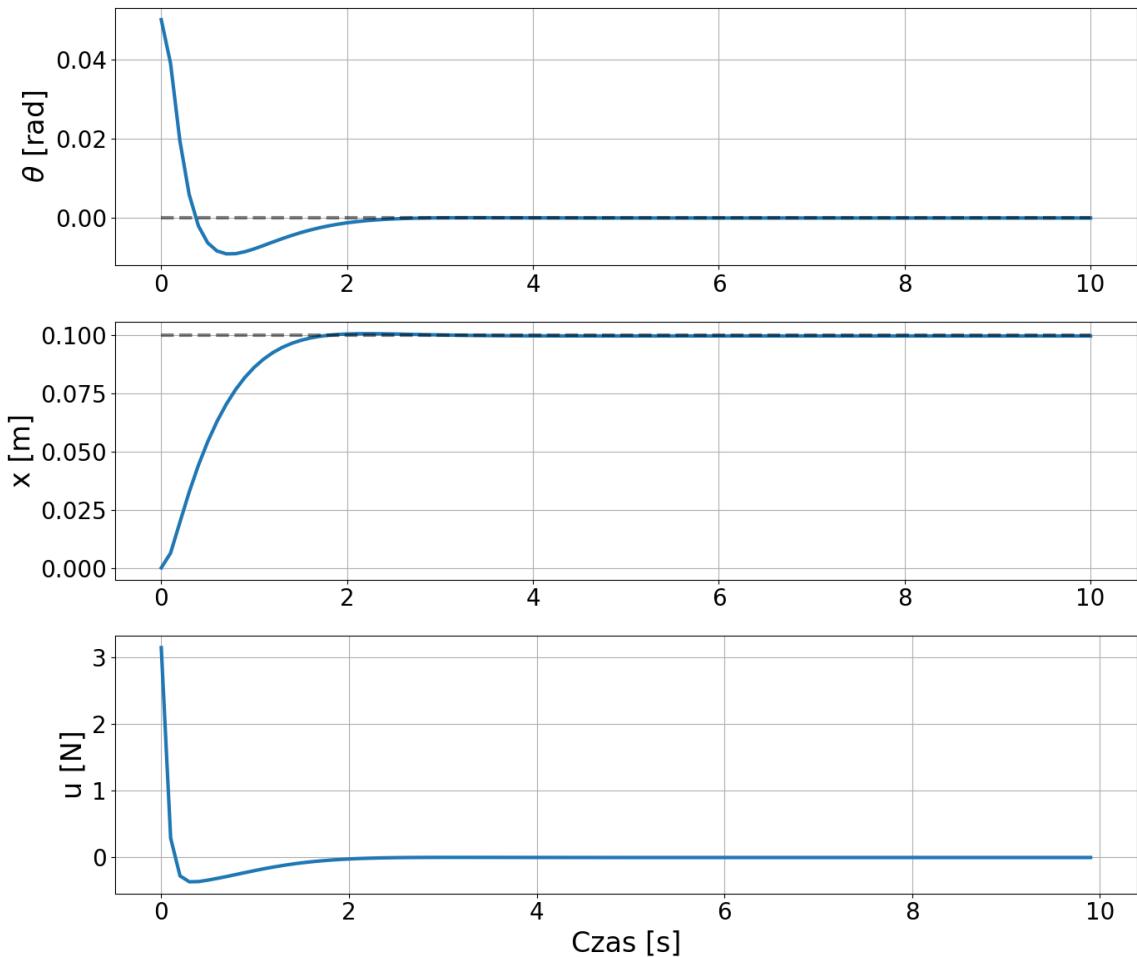


Rysunek 4.6. Regulator LQR z wagami jednostkowymi ($Q = I$, $R = 1$, PID: $K_{p,x} = -4,5$, $K_{i,x} = 0$, $K_{d,x} = -3$).



Rysunek 4.7. Regulator LQR strojony metodą Brysona ($Q = \text{diag}([25, 1, 4, 1])$, $R = 10$, PID: $K_{p,x} = -4.5$, $K_{p,x} = 0$, $K_{d,x} = -3$).

Następnie przeprowadzono strojenie ręczne metodą prób i błędów, inspirowając się regułą Brysona (Rys. 4.7). Reguła ta postuluje, że elementy diagonalne macierzy Q i R powinny być odwrotnie proporcjonalne do kwadratów maksymalnych dopuszczalnych wartości odpowiednich zmiennych stanu i sterowania, tj. $Q_{ii} = 1/x_{i,\max}^2$ oraz $R = 1/u_{\max}^2$. Ręczne zwiększanie kar za wychylenie kąta ($Q_\theta = 25$) poprawiło sztywność wahadła. Udało się ustalić zestaw wag zapewniający stabilną pracę, choć czas regulacji był wciąż niezadowalający, a reakcja na zakłócenia powolna.

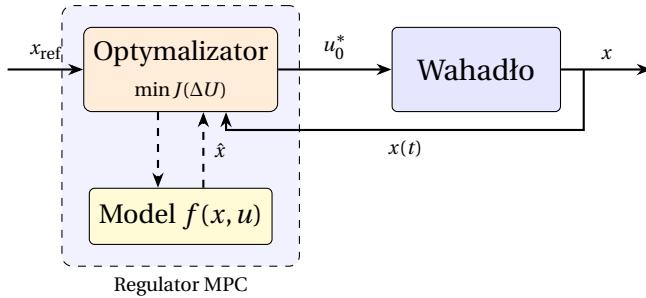


Rysunek 4.8. Zoptymalizowany regulator PID-LQR bez członu całkującego ($Q = \text{diag}([200, 3, 35, 40])$, $R = 1$, PID: $K_{p,x} = -7,0$, $K_{i,x} = 0,1$, $K_{d,x} = -3,0$).

W ostatnim etapie zastosowano optymalizację numeryczną (Rys. 4.8). Metoda przeszukiwania siatki poszukiwała optymalnych elementów diagonalnych macierzy Q oraz skalaru R , minimalizując wskaźnik jakości. Zoptymalizowane wagi sprawiają, że regulator bardzo intensywnie koryguje wychylenia wahadła, co wymusza stabilne utrzymanie kąta wychylenia. Należy zauważyć, że optymalizator wyznaczył strategię dość intuicyjną: kara głównie kąt (Q_θ), zamiast kłaść nacisk na pozycję (Q_x), co zmusza obiekt do szybkich korekt stabilizujących wahadło.

4.3. Nieliniowe sterowanie predykcyjne (MPC)

Algorytm MPC (Model Predictive Control) stanowi zaawansowaną metodę sterowania, która w odróżnieniu od LQR, uwzględnia wprost ograniczenia sygnału sterującego oraz nieliniową dynamikę obiektu [7]. Zaimplementowany w klasie `MPCCController` algorytm rozwiązuje w każdym kroku symulacji problem optymalizacji dynamicznej nieliniowej (NMPC). Zasadę działania regulatora MPC ilustruje Rys. 4.9.



Rysunek 4.9. Schemat blokowy regulatora MPC z wewnętrzny modelem predykcyjnym.

Zadanie optymalizacji rozwiązywane jest numerycznie metodą SQP (Sequential Quadratic Programming) przy użyciu solwera SLSQP z biblioteki `scipy.optimize`. Wybór tego solwera podkutowany był jego dostępnością w popularnych dystrybucjach środowisk naukowych (Anaconda, pip) oraz zdolnością do obsługi ograniczeń nierównościowych (wymaganych dla saturacji sterowania). Zadanie zdefiniowane jest następująco:

$$\min_{\Delta U} J = \sum_{k=1}^N (\hat{x}_k - x_{\text{ref}})^T Q (\hat{x}_k - x_{\text{ref}}) + R \sum_{k=1}^{N_u} (\Delta u_k)^2, \quad (34)$$

przy ograniczeniach:

$$\hat{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (35)$$

$$u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max}, \quad (36)$$

$$u_k = u_{k-1} + \Delta u_k. \quad (37)$$

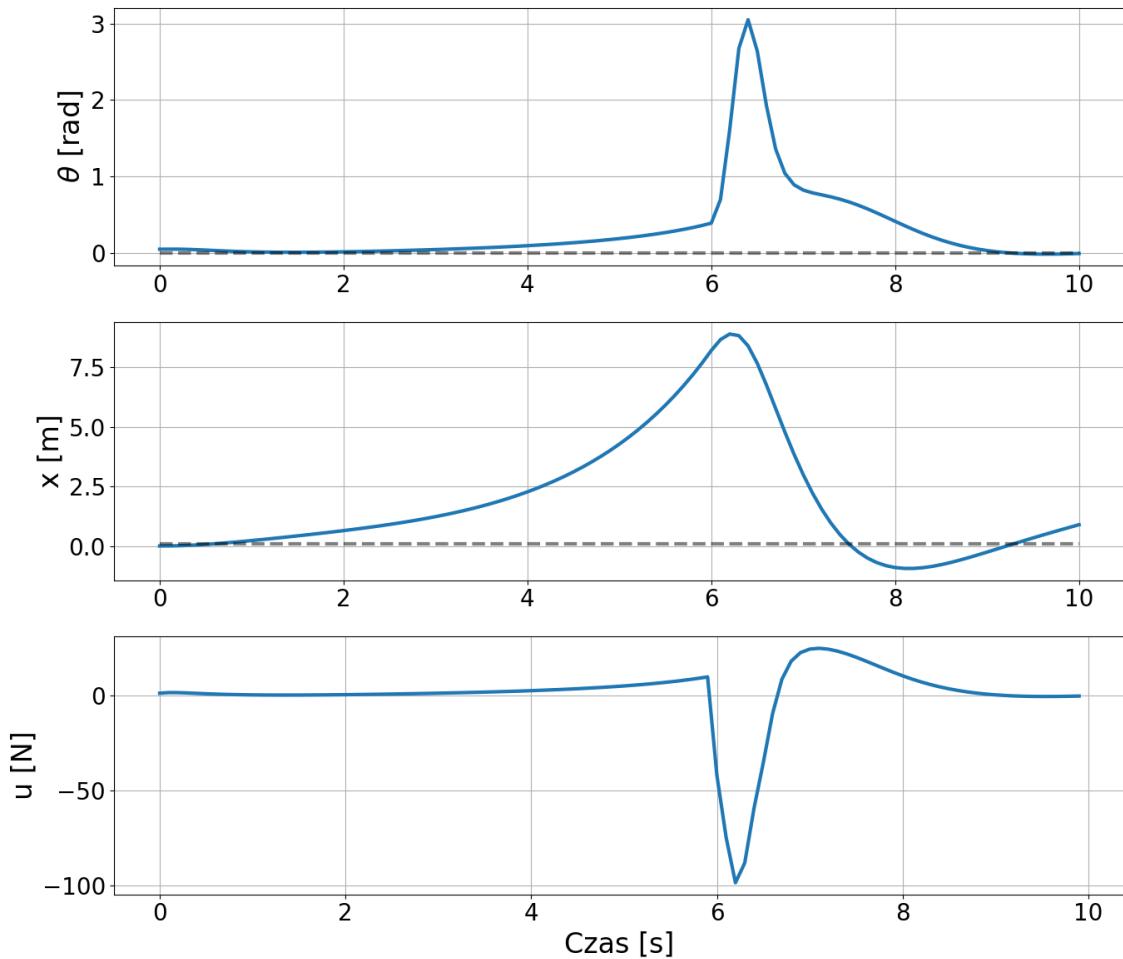
Gdzie:

- $N = 12$ – horyzont predykcji,
- $N_u = 4$ – horyzont sterowania. Dla kroków $k \geq N_u$ stosowane jest tzw. *blokowanie sterowania*, co oznacza, że przyrosty sterowania $\Delta u_k = 0$ i sygnał sterujący pozostaje stały: $u_k = u_{N_u-1}$. Technika ta redukuje liczbę zmiennych decyzyjnych z N do N_u , przyspieszając obliczenia przy zachowaniu długiego horyzontu predykci,
- $f(\cdot)$ – nieliniowy model dyskretny obiektu (całkowanie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu),
- $Q = \text{diag}([158, 41, 43, 20])$ – macierz kar stanu,
- $R = 0,086$ – współczynnik kary za zmianę sterowania (Δu).

Kluczową zaletę MPC, podkreślana w pracach [8] oraz [6], jest możliwość bezpośredniego uwzględnienia ograniczeń (saturacji) już na etapie wyliczania sterowania, co zapobiega zjawisku nasycenia elementu wykonawczego, które mogłoby mieć miejsce w przypadku LQR.

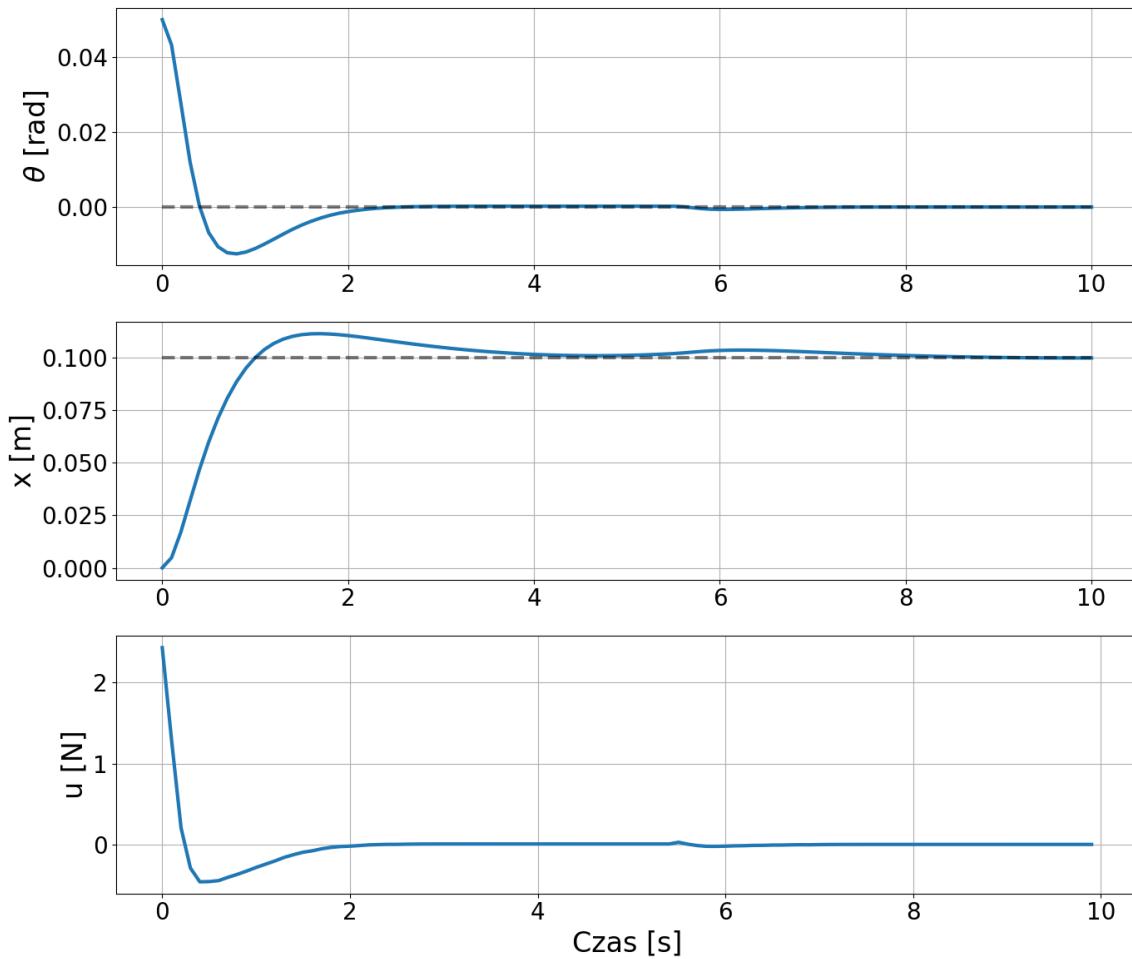
4.3.1. Dobór horyzontu i wag funkcji celu

Dla regulatora MPC kluczowym zagadnieniem był dobór horyzontu predykcji oraz macierzy wag, determinujących zachowanie układu w stanie nieustalonym.



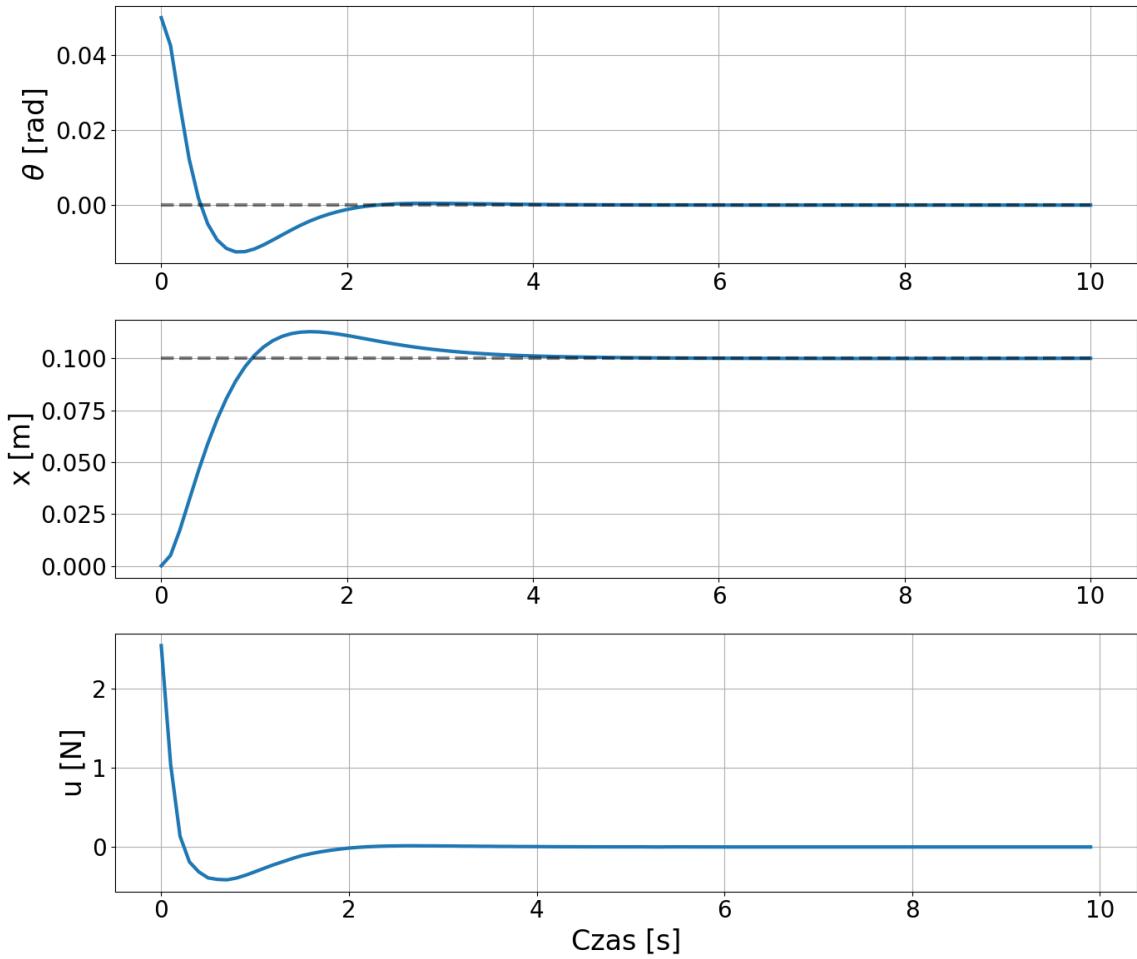
Rysunek 4.10. Regulator MPC z krótkim horyzontem ($N = 5$, $N_u = 2$, $Q = \text{diag}([10, 1, 10, 1])$, $R = 0.1$).

Początkowe ustawienie zbyt krótkiego horyzontu predykcji ($N = 5$, Rys. 4.10) prowadziło do niestabilności układu zamkniętego. Horyzont predykcji był zbyt krótki, aby regulator mógł uwzględnić, że rozpoczając wózek w celu korekcji kąta, nie zdąży wyhamować przed upadkiem wahadła lub osiągnięciem końca toru. Horyzont pięciu kroków (przy $\Delta t = 0.1$ s daje zaledwie 0,5 s predykcji) jest niewystarczający, aby uchwycić pełną dynamikę wahadła i zaplanować odpowiedni manewr powrotny.



Rysunek 4.11. Regulator MPC z ręcznie dobranymi wagami ($N = 10$, $N_u = 3$, $Q = \text{diag}([50, 10, 50, 10])$, $R = 0.1$).

Zwiększenie horyzontu do $N = 10$ w ramach korekty ręcznej (Rys. 4.11) ustabilizowało proces. Dłuższy horyzont umożliwił predykcję na 1,0 s, co pozwoliło na antycypację skutków podejmowanych działań sterujących. Dodatkowa manipulacja wagami Q pozwoliła na uzyskanie poprawnego sterowania, jednak odpowiedź dynamiczna była powolna, a przebiegi wykazywały przeregulowania.



Rysunek 4.12. Zoptymalizowany regulator MPC ($N = 12$, $N_u = 4$, $Q = \text{diag}([158, 41, 43, 20])$, $R = 0,086$).

Automatyzacja procesu strojenia przy użyciu skryptu `tune_mpc.py` pozwoliła na znalezienie kompromisu między długością horyzontu a wagami (Rys. 4.12). Algorytm optymalizacyjny wskazał $N = 12$ (co odpowiada 1,2 s predykcji) jako optimum dla tego modelu dyskretnego, zapewniając stabilność przy akceptowalnym czasie obliczeń. Zoptymalizowane wagi Q znacząco różnią się od intuicyjnych proporcji – wysoka kara za kąt ($Q_\theta = 158$) w połączeniu z niską karą za zmianę sterowania ($R = 0,086$) zapewnia szybką, ale gładką stabilizację.

4.4. MPC z rozszerzonym wskaźnikiem jakości (MPC-J2)

Zaimplementowano sterownik MPCControllerJ2 jako wariant badawczy algorytmu predykcyjnego. Jego struktura jest zbliżona do podstawowego MPC, jednak funkcja kosztu została rozbudowana o dodatkowy składnik karzący bezwzględną wartość sygnału sterującego (energię), a nie tylko jego przyrosty.

Zmodyfikowana funkcja celu przyjmuje postać:

$$J = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{\text{ref}})^T Q (x_k - x_{\text{ref}}) + R_\Delta \sum_{k=1}^{N_u} (\Delta u_k)^2 + R_{\text{abs}} \sum_{k=1}^{N_u} (u_k)^2. \quad (38)$$

Wprowadzenie parametru R_{abs} pozwala na bezpośrednie minimalizowanie zużycia energii sterowania, co jest podejściem powszechnie stosowanym w praktycznych implementacjach algorytmów predykcyjnych [7]. Ograniczenie amplitudy sygnału sterującego nie tylko redukuje wydatek energetyczny (istotny w aplikacjach mobilnych), ale także zmniejsza obciążenie mechaniczne elementów wykonawczych, co wpływa na żywotność napędu.

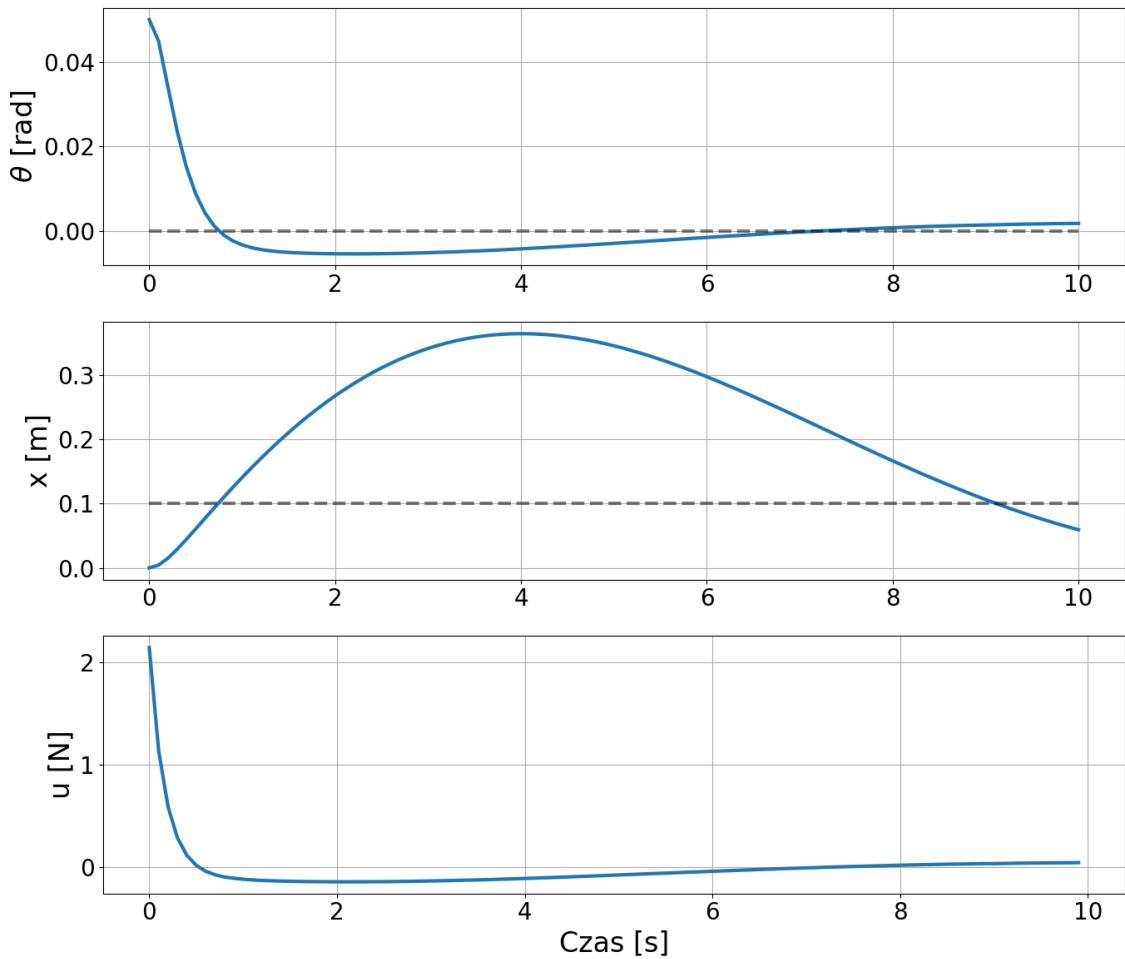
W badaniach przyjęto zoptymalizowane wagи: $Q = \text{diag}([158, 41, 43, 20])$, przy czym $R_\Delta = 0,01$ i $R_{\text{abs}} = 1$ dla wariantu priorytetyzującego jakość regulacji.

4.4.1. Dobór parametrów i analiza wpływu kary za energię

W przypadku wariantu MPC-J2 analizowano nieliniowy wpływ parametru R_{abs} na zachowanie układu. Eksperymenty przeprowadzono przy stałych wagach stanu oraz przy bardzo niskiej karze za przyrosty sterowania $R_\Delta = 0,001$, zmieniając jedynie wartość kary za bezwzględną wartość sterowania.

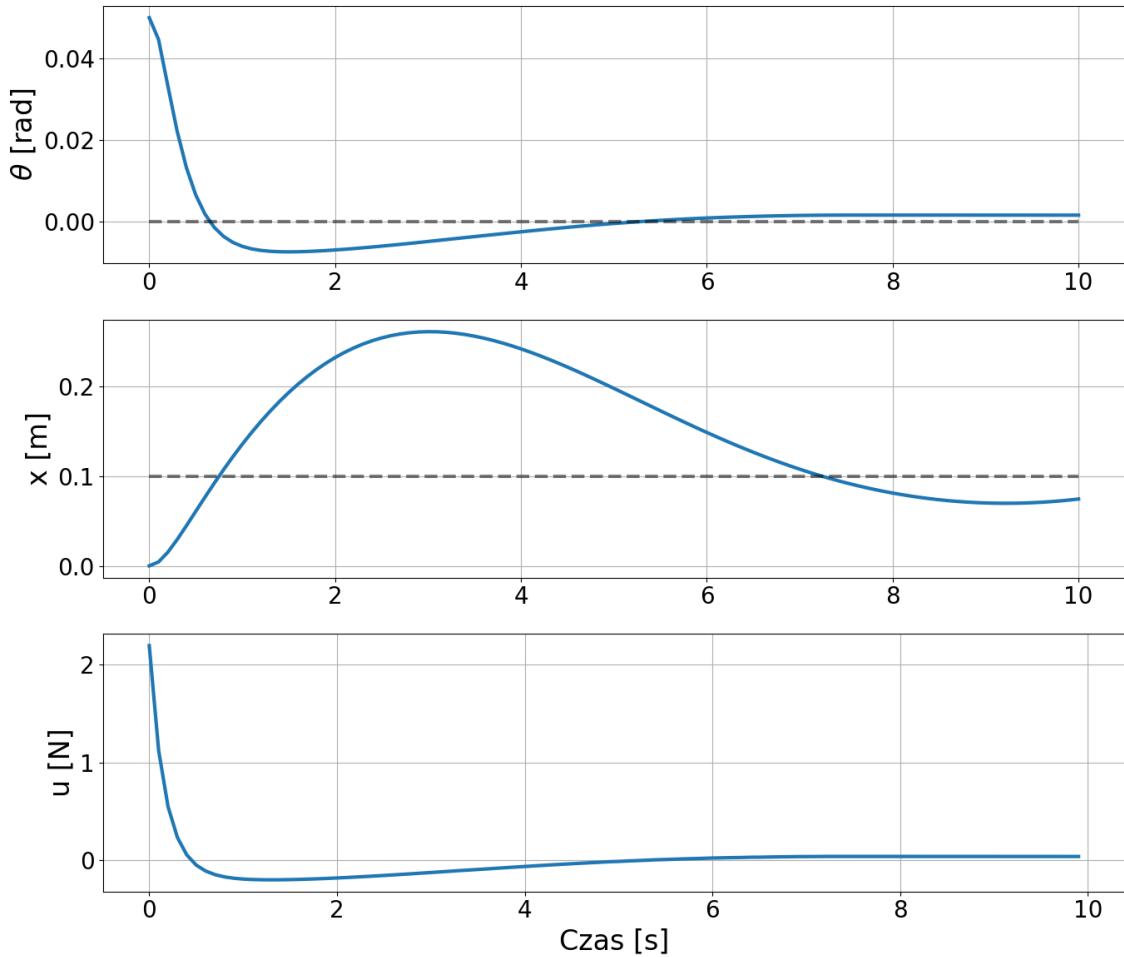
Wprowadzenie członu $R_{\text{abs}} \sum_{k=1}^{N_u} u_k^2$ do funkcji celu ma fundamentalnie inny charakter niż kara za przyrosty sterowania R_Δ . Podczas gdy R_Δ promuje gładkość sygnału sterującego (ogranicza szybkie zmiany), parametr R_{abs} bezpośrednio penalizuje amplitudę siły, co przekłada się na redukcję zużycia energii. Z punktu widzenia optymalizatora, przy wysokich wartościach R_{abs} , każdy niuton siły generuje istotny koszt, co może prowadzić do nadmiernie zachowawczego działania regulatora.

Zależność między wartością R_{abs} a jakością regulacji ma charakter silnie nieliniowy. Dla zbyt dużych wartości ($R_{\text{abs}} > 5$) optymalizator preferuje minimalizację energii kosztem jakości regulacji, co w skrajnych przypadkach prowadzi do utraty stabilności. Dla zbyt małych wartości ($R_{\text{abs}} \approx 0$) układ zachowuje się identycznie jak podstawowy MPC, tracąc potencjalne korzyści z oszczędności energetycznej.



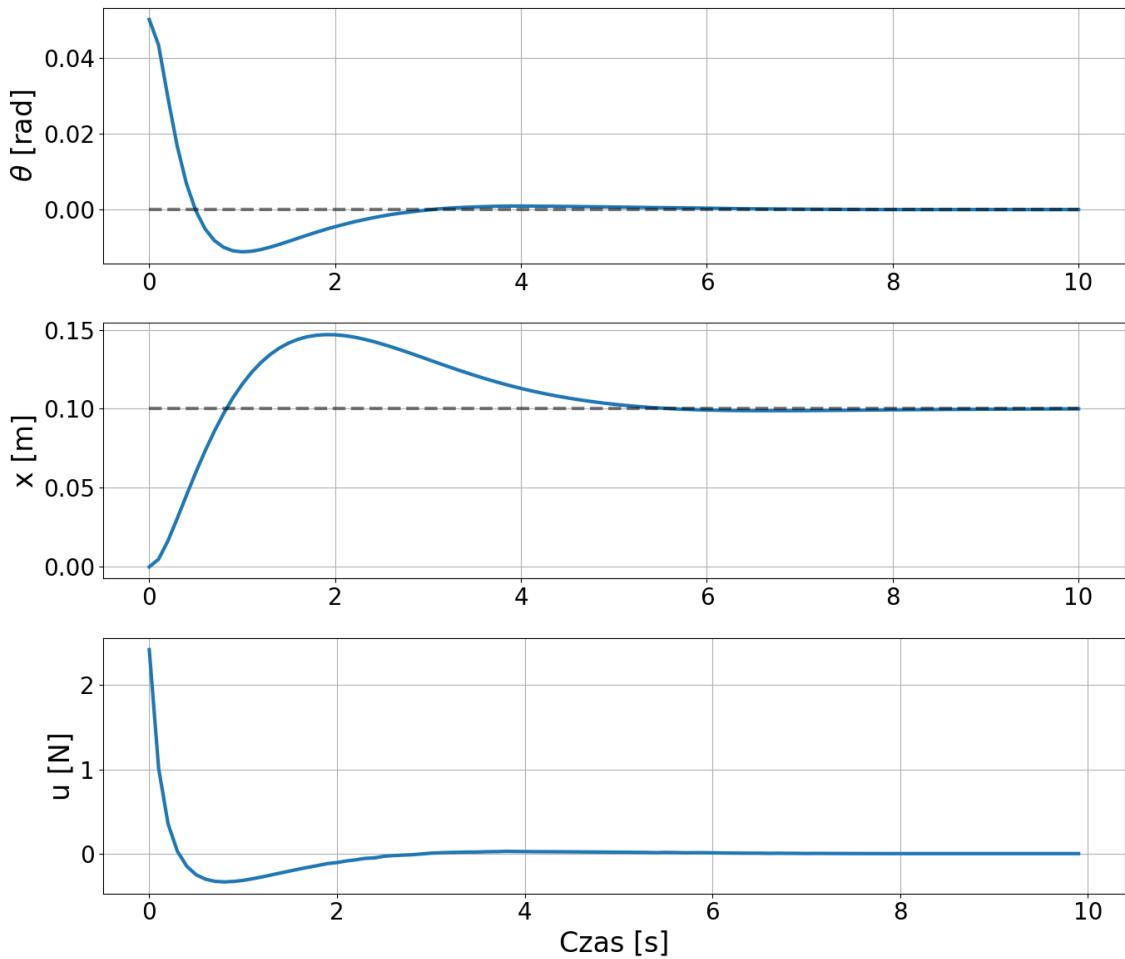
Rysunek 4.13. Regulator MPC-J2 z wysoką karą za energię ($R_{\text{abs}} = 10$).

Przyjęcie zbyt dużej wartości kary za sterowanie bezwzględne ($R_{\text{abs}} = 10$, Rys. 4.13) spowodowało, że regulator wykazywał tendencję do pasywności. Funkcja kosztu karała każdy niuton siły na tyle intensywnie, że wartość funkcji celu faworyzowała bardzo wolną regulację kosztem uniknięcia wysokiego wydatku energetycznego. W efekcie układ nie był w stanie ustabilizować się – wahadło oscylowało w okolicy punktu pracy, ponieważ koszt energetyczny utrzymania go w pionie przewyższał zysk wynikający z małego błędu kątowego w funkcji celu.



Rysunek 4.14. Regulator MPC-J2 z ręcznie zmniejszoną karą ($R_{\text{abs}} = 5$).

Stopniowe, ręczne zmniejszanie parametru R_{abs} do wartości 5 (Rys. 4.14) pozwoliło delikatnie polepszyć jakość regulacji, jednak układ ostatecznie nie dawał rady się ustabilizować. Regulator działał zbyt zachowawczo – oszczędzając energię, pozwalał wózkowi na zbyt duży dryf od pozycji zadanej i za bardzo oszczędzał energię. Taki scenariusz ilustruje typowy problem źle dostrojonego kompromisu między jakością regulacji a oszczędnością energii.



Rysunek 4.15. Zoptymalizowany regulator MPC-J2 ($R_{\text{abs}} = 1$).

Kolejne próby zmniejszania kary za bezwzględną wartość wskazały, że dla tego zadania najlepszym rozwiązaniem jest zastosowanie niewielkiej, ale niezerowej kary za bezwzględną wartość sterowania ($R_{\text{abs}} = 1$, Rys. 4.15). Tak dobrana waga pozwala uniknąć bierności regulatora, jednocześnie ograniczając nadmierne zużycie energii. W połączeniu z karą za przyrosty sterowania $R_{\Delta} = 0.001$, zapewniono gładkość sygnału sterującego bez ograniczania zdolności regulatora do szybkiej reakcji. Uzyskano optymalny kompromis, w którym układ stabilizuje się szybko, a sterowanie pozbawione jest zbędnych oscylacji wysokoczęstotliwościowych.

4.5. Liniowy regulator MPC (LMPC)

Zaimplementowano również wariant Liniowego MPC (LMPC), którego implementacja została oparta na strukturze regulatora NMPC, z zastąpieniem modelu nieliniowego modelem zlinearyzowanym. Główna idea polega na wykorzystaniu zlinearyzowanego modelu obiektu wokół punktu równowagi górnej ($\theta = 0$) w celu uproszczenia obliczeń optymalizacyjnych.

Linearyzacja modelu wahadła odwróconego prowadzi do układu w postaci przestrzeni stanów:

$$\dot{x} = A_c x + B_c u, \quad (39)$$

gdzie macierze A_c i B_c wyznaczono analitycznie (metodą Jacobiego) dla punktu równowagi $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$. Model ciągły poddano następnie dyskretyzacji metodą ekstrapolatora zerowego rzędu (ZOH – Zero-Order Hold), uzyskując równanie stanu w postaci dyskretnej:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k. \quad (40)$$

Dyskretyzacja ZOH zakłada, że sygnał sterujący u pozostaje stały w przedziale $[k \cdot dt, (k+1) \cdot dt]$, co odpowiada rzeczywistemu działaniu cyfrowego układu sterowania. Do wyznaczania macierzy A_d i B_d wykorzystano funkcję `cont2discrete` z biblioteki `scipy.signal`.

Dzięki zastosowaniu modelu liniowego, predykcja trajektorii stanu (w przeciwieństwie do NMPC) sprowadza się do szybkich operacji macierzowych, bez konieczności numerycznego całkowania równań różniczkowych metodą Rungego-Kutty. Dla zadanej sekwencji sterowania $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ predykcja ma postać:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (41)$$

Funkcja kosztu przyjmuje postać analogiczną do NMPC:

$$J = \sum_{k=1}^N (\hat{x}_k - x_{\text{ref}})^T Q (\hat{x}_k - x_{\text{ref}}) + R \sum_{k=0}^{N_u-1} (\Delta u_k)^2, \quad (42)$$

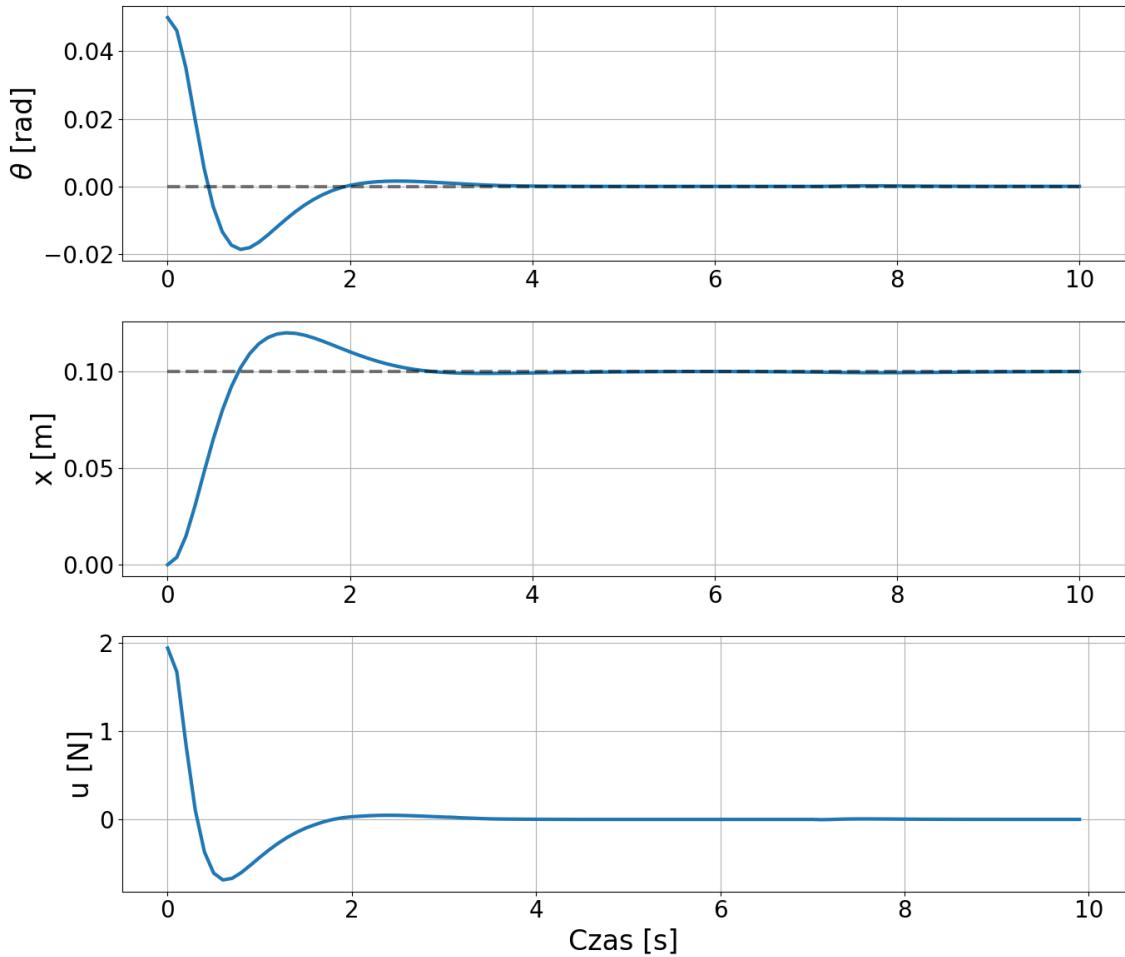
gdzie $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ oznacza przyrost sterowania, a dla $k \geq N_u$ stosuje się blokowanie sterowania ($\Delta u_k = 0$).

Do rozwiązywania problemu sterowania użyto solvera SLSQP z biblioteki `scipy.optimize`, identycznego jak w przypadku nieliniowego MPC. Zastosowanie tego samego solvera dla obu wariantów MPC pozwala na bezpośrednie porównanie wpływu uproszczenia modelu (liniowy vs. nieliniowy) na jakość regulacji, eliminując różnice wynikające z wyboru algorytmu optymalizacji.

4.5.1. Dobór parametrów i analiza działania

Proces strojenia regulatora LMPC przebiegł sprawnie, wykorzystując doświadczenia z uruchomienia regulatorów LQR oraz NMPC. Przyjęcie wag zbliżonych do tych stosowanych w LQR pozwoliło na uzyskanie poprawnych wyników już w pierwszych próbach. Ostatecznie zdecydowano się na następującą konfigurację:

- Horyzont predykcji: $N = 12$ (identyczny jak w NMPC),
- Horyzont sterowania: $N_u = 4$,
- Macierz wag stanu: $Q = \text{diag}([15, 0, 1, 0, 15, 0, 1, 0])$,
- Waga sterowania: $R = 0, 1$.

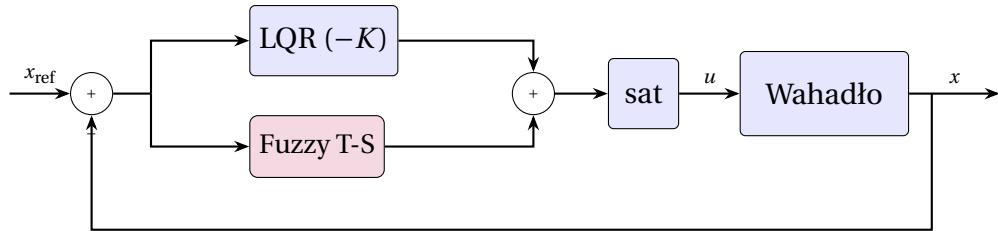


Rysunek 4.16. Przebiegi czasowe dla liniowego regulatora MPC ($N = 12$, $N_u = 4$, $Q = \text{diag}([15, 1, 15, 1])$, $R = 0, 1$).

Na Rys. 4.16 przedstawiono odpowiedź układu na skokową zmianę pozycji zadanej wózka. Układ zachowuje się stabilnie, płynnie dochodząc do wartości zadanej. Widoczne jest działanie ograniczeń sygnału sterującego (nasycenie) w początkowej fazie ruchu, co jest kluczową przewagą nad klasycznym LQR. Mimo zastosowania uproszczonego modelu liniowego, regulator poprawnie radzi sobie ze stabilizacją w otoczeniu punktu równowagi.

4.6. Regulator rozmyty wspomagany LQR (Fuzzy-LQR)

Ostatnim zbadanym układem jest sterownik hybrydowy o strukturze równoległej, łączący klasyczny, liniowy regulator LQR z nieliniowym systemem wnioskowania rozmytego typu Takagi-Sugeno (T-S). W przeciwieństwie do układów typu „Gain Scheduling” modyfikujących parametry jednego regulatora, tutaj zastosowano bezpośrednie sumowanie sygnałów sterujących z dwóch niezależnych bloków (Rys. 4.17). LQR zapewnia optymalną stabilizację w pobliżu punktu pracy (działa w sposób ciągły), natomiast człon rozmyty generuje dodatkowy sygnał korekcyjny, aktywujący się silniej przy większych uchybach.



Rysunek 4.17. Schemat blokowy regulatora Fuzzy-LQR z równoległą strukturą hybrydową.

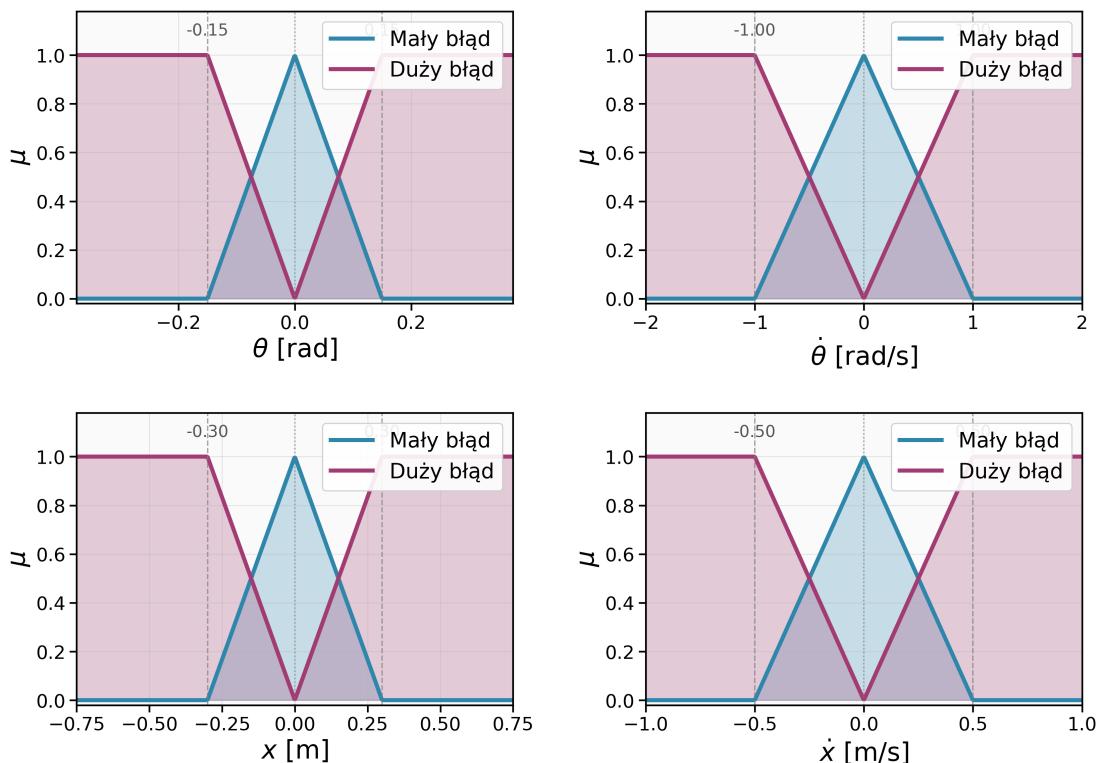
Sygnał sterujący jest sumą:

$$u(t) = u_{LQR}(t) + u_{Fuzzy}(t). \quad (43)$$

Część rozmyta $u_{Fuzzy}(t)$ wykorzystuje bazę reguł postaci:

JEŚLI e_θ jest A_i ORAZ $\dot{\theta}$ jest B_i ... TO $u_i = f_i(x)$,

gdzie $f_i(x)$ jest liniową funkcją stanu (lokalny regulator liniowy). Zastosowano funkcje przynależności trójkątne dla zmiennych stanu, dzieląc przestrzeń na obszary „Mały błąd” i „Duży błąd”. Kształt zastosowanych funkcji przynależności przedstawiono na Rys. 4.18.



Rysunek 4.18. Trójkątne funkcje przynależności dla czterech zmiennych stanu regulatora Fuzzy-LQR. Każda zmienna posiada dwa zbiory rozmyte: „Mały błąd” (aktywny w pobliżu zera) oraz „Duży błąd” (aktywny przy większych odchyleniach od punktu równowagi).

Baza wiedzy składa się z 16 reguł (2^4 kombinacji dla 4 zmiennych stanu). Wyjście sterownika obliczane jest jako średnia ważona:

$$u_{\text{Fuzzy}} = G \cdot \frac{\sum_{i=1}^{16} w_i(x) \cdot u_i}{\sum_{i=1}^{16} w_i(x)}, \quad (44)$$

gdzie w_i to stopień aktywacji i -tej reguły, a $G = 0.36$ to globalne wzmacnienie skalujące (po optymalizacji).

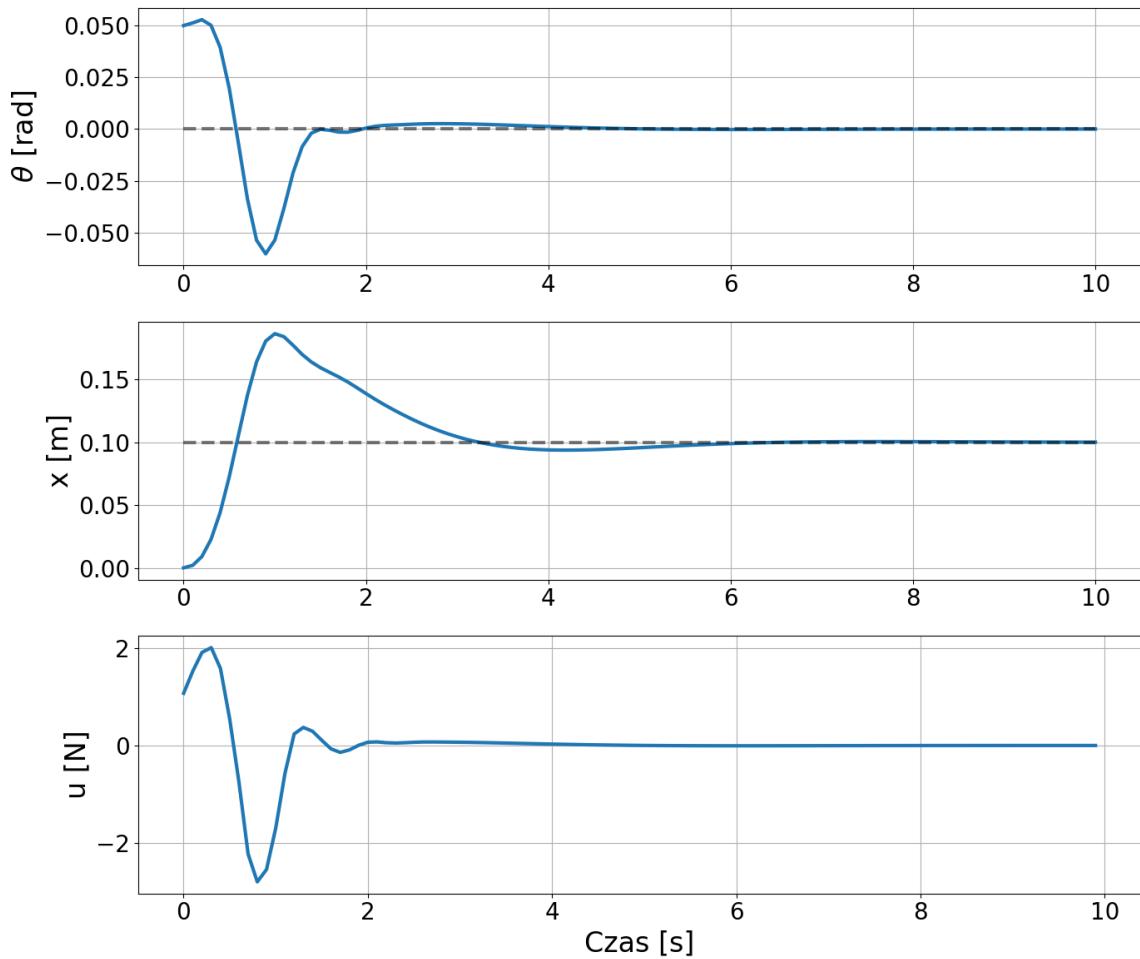
Zastosowana struktura równoległa pozwala na uzyskanie efektu tożsamego z nielinowym kształtowaniem wzmacnienia (ang. *nonlinear gain shaping*), mimo że bazowy regulator LQR posiada stałe nastawy. Mechanizm ten działa dwutorowo:

1. W pobliżu punktu równowagi (małe błędy) dominuje człon LQR. Udział sterownika rozmytego jest marginalny, co wynika z definicji funkcji przynależności dla małych błędów (zerowe lub bardzo małe wzmacnienia dodatkowe). Gwarantuje to wysoką kulturę pracy i brak drgań wokół zera.
2. W sytuacjach krytycznych (duże wychylenia) sterownik rozmyty generuje silny, dodatkowy sygnał sterujący (wynikający z reguł F_rules dla „Dużych błędów”), który sumuje się z sygnałem LQR.

W efekcie, całkowita sztywność układu regulacji rośnie wraz z amplitudą błędu, co pozwala na skuteczne rozszerzenie obszaru stabilności (ang. *basin of attraction*) w porównaniu do klasycznego LQR [5].

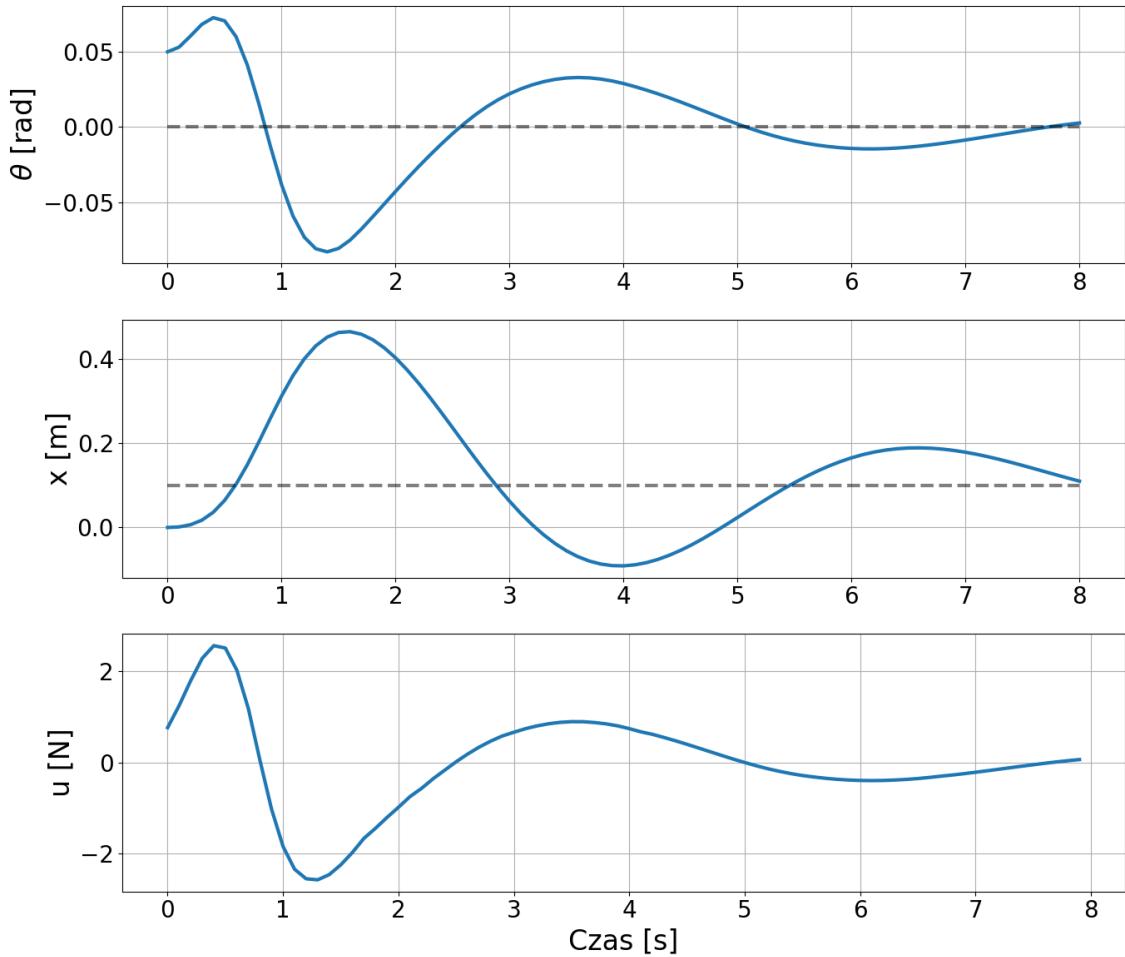
4.6.1. Dobór reguł i funkcji przynależności

Strojenie rozmytego regulatora Fuzzy-LQR jest zadaniem złożonym ze względu na dużą liczbę parametrów definiujących bazę reguł i funkcje przynależności. W przeciwieństwie do klasycznego regulatora LQR, gdzie dobór sprowadza się do ustalenia wag w macierzach Q i R , tutaj należy podjąć szereg decyzji dotyczących kształtu, rozmieszczenia i liczby funkcji przynależności dla każdej ze zmiennych stanu. Ponadto, konieczne jest zdefiniowanie reguł wnioskowania, które determinują zachowanie układu w poszczególnych obszarach przestrzeni stanu. Niewłaściwy dobór tych parametrów może prowadzić do niestabilności, gwałtownych przełączeń sterowania lub braku pożądanej poprawy dynamiki względem regulatora bazowego.



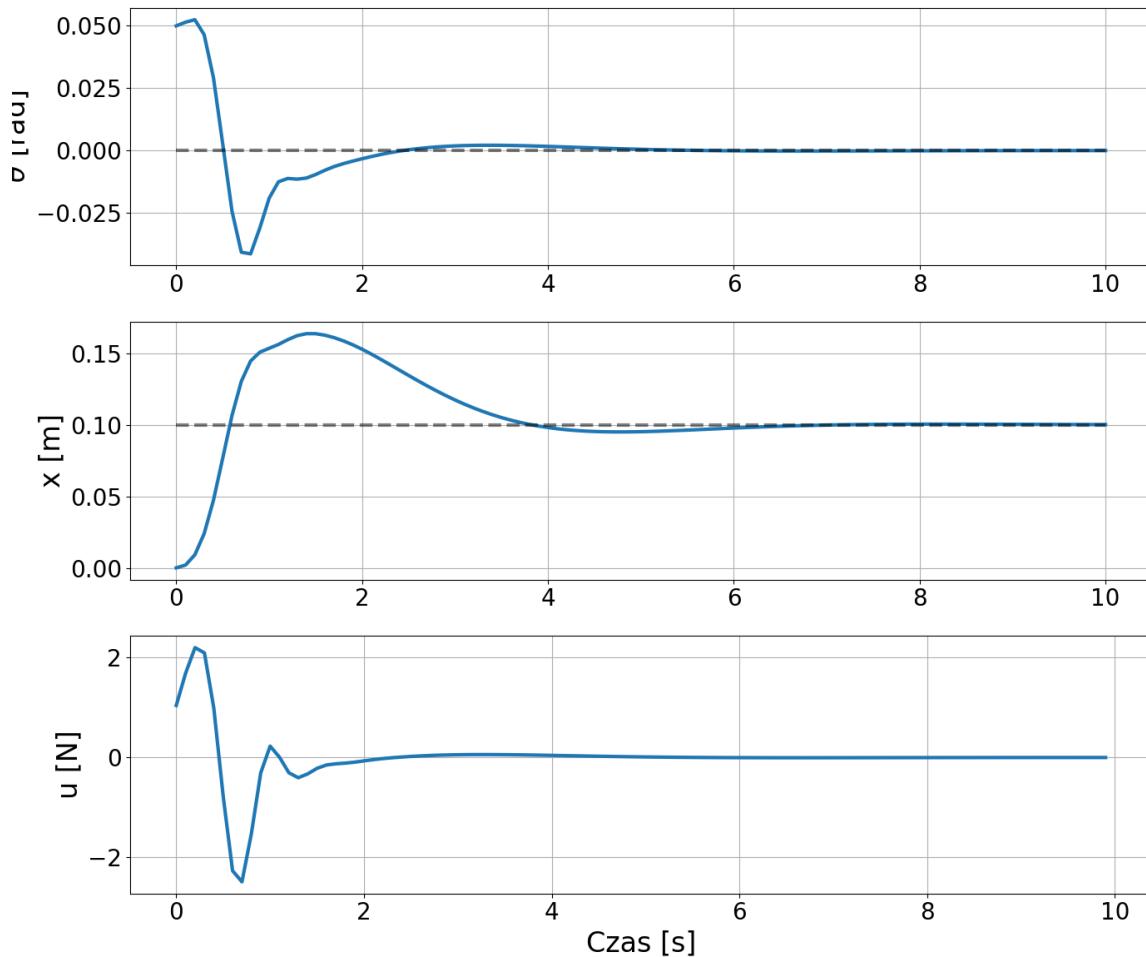
Rysunek 4.19. Regulator Fuzzy-LQR z wąskimi funkcjami przynależności (zakres „mały błąd” dla θ : $[-0.02, 0.02]$ rad).

Błędne zdefiniowanie zbyt wąskich funkcji przynależności dla strefy „małego błędu” (Rys. 4.19) skutkowało gwałtownym przełączaniem się regulatora na reguły o wysokich wzmacnieniach (drążania przełączeniowe). Zakres $[-0.02, 0.02]$ rad oznacza, że już przy wychyleniu wahadła o około 1° regulator przeskakiwał z trybu o niskich wzmacnieniach (LQR) na tryb o wysokich wzmacnieniach (reguły rozmyte), a przy powrocie do pionu natychmiast wracał. Prowadziło to do silnych drgań wokół punktu równowagi, co jest zjawiskiem niepożądany w rzeczywistych układach napędowych ze względu na zużycie mechaniczne i hałas.



Rysunek 4.20. Regulator Fuzzy-LQR z ręcznie dobranymi parametrami ($F_\theta = 20$, $F_{\dot{\theta}} = 5$, $F_x = 10$, $F_{\dot{x}} = 2$, zakres: $[-0.2, 0.2]$ rad).

Opierając się na literaturze [5], dobrano ręcznie szerokości trójkątnych funkcji przynależności tak, aby przejście między strefami było płynne (Rys. 4.20). Rozszerzenie zakresu do $[-0.2, 0.2]$ rad wyeliminowało drgania przełączeniowe, jednak wzmacnienia reguł były zbyt słabe ($F_\theta = 20$ vs. optymalne 100.0). Układ uzyskał stabilność asymptotyczną, jednak nie wykorzystywał w pełni potencjału szybkiej reakcji na duże zakłócenia, działając zachowawczo.



Rysunek 4.21. Zoptymalizowany regulator Fuzzy-LQR ($F_\theta = 100.0$, $F_{\dot{\theta}} = 5.27$, $F_x = 19.82$, $F_{\dot{x}} = 19.25$, $G = 0.36$).

Ostatecznie, dedykowany skrypt `tune_fuzzy_lqr.py` posłużył do optymalizacji wag pojedynczych reguł oraz parametrów kształtu funkcji przynależności (Rys. 4.21). Algorytm wyznaczył znacznie wyższą wartość wzmocnienia dla kąta ($F_\theta = 100.0$), przy jednoczesnym zmniejszeniu globalnego wzmocnienia ($G = 0.36$). Uzyskano nieliniową powierzchnię sterowania, która łączy zalety miękkiego sterowania LQR w pobliżu zera z maksymalną siłą reakcji przy dużych wychyleniach.

Strojenie regulatora Fuzzy-LQR okazało się zadaniem znacznie bardziej wymagającym niż w przypadku pozostałych badanych algorytmów. Wynika to z kilku czynników:

- Wysoka wymiarowość przestrzeni parametrów — dla 16 reguł, z których każda definiuje 4 wzmocnienia, plus parametry funkcji przynależności i wzmocnienie globalne, łączna liczba stopni swobody sięga kilkudziesięciu.
- Silne sprzężenia między parametrami — zmiana jednego wzmocnienia wpływa na zachowanie całej bazy reguł poprzez mechanizm interpolacji rozmytej, co utrudnia intuicyjne strojenie metodą prób i błędów.

4. Algorytmy sterowania

- Wrażliwość na warunki początkowe optymalizacji — algorytm ewolucji różnicowej wielokrotnie zbiegał do różnych minimów lokalnych, dając rozwiązania o znacząco odmiennych charakterystykach.
- Zależność od scenariusza testowego — parametry zoptymalizowane dla warunków nominalnych mogą dawać gorsze wyniki przy zakłóceniach i odwrotnie.

Z powyższych powodów proces strojenia regulatora rozmytego wymagał wielokrotnego uruchamiania optymalizacji z różnymi punktami startowymi oraz manualnej weryfikacji uzyskanych rozwiązań. Stanowi to istotną wadę praktyczną w porównaniu z regulatorami LQR czy MPC, gdzie przestrzeń parametrów jest znacznie mniejsza i bardziej interpretowalna.

5. Eksperymenty

Rozdział ten definiuje scenariusze testowe, przyjęte miary oceny jakości sterowania oraz procedurę doboru nastaw regulatorów. Precyzyjne określenie warunków eksperymentu jest kluczowe dla zapewnienia powtarzalności badań oraz obiektywnego porównania testowanych algorytmów.

5.1. Plan eksperymentów

W celu weryfikacji skuteczności strategii sterowania, przyjęto jednolity zestaw testów symulacyjnych. Każdy z zaimplementowanych regulatorów (PID-PID, PID-LQR, MPC, MPC-J2, Fuzzy-LQR, LMPC) poddany został badaniom w następujących scenariuszach:

1. Eksperiment 1: Stabilizacja w punkcie pracy (warunki nominalne).

Symulacja odpowiedzi układu na niezerowe warunki początkowe przy braku zakłóceń zewnętrznych.

- Początkowy kąt wychylenia wahadła: $\theta(0) = 0,05 \text{ rad} (\approx 2,87^\circ)$.
- Początkowa pozycja wózka: $x(0) = 0 \text{ m}$.
- Zeroowe prędkości początkowe: $\dot{\theta}(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

Wybór wartości $\theta(0) = 0,05 \text{ rad}$ podyktowany jest dwoma czynnikami: jest to wychylenie na tyle małe, że mieści się w obszarze stosowności modelu zlinearyzowanego (istotne dla LQR), a jednocześnie wystarczająco duże, aby wymagać aktywnej interwencji regulatora. Wartość ta jest również powszechnie stosowana w literaturze przedmiotu jako standardowy warunek testowy [3]. Celem jest sprawdzenie zdolności regulatora do sprowadzenia układu do pionu ($\theta = 0, x = 0$) oraz ocena czasu regulacji i przeregulowań.

2. Eksperiment 2: Odporność na zakłócenia zewnętrzne.

Symulacja z tymi samymi warunkami początkowymi, przy czym na wahadło oddziałyje losowa siła zakłócająca $F_w(t)$ (modelująca zakłócenia zewnętrzne) generowana zgodnie z procedurą opisaną w Rozdziale 3. Przyjęto odchylenie standardowe siły zakłócającej $\sigma = 2,2 \text{ N}$, co odpowiada wartości skutecznej (RMS) siły zakłócającej rzędu $2,2 \text{ N}$ i chwilowym wartościami szczytowym do $\pm 6,6 \text{ N}$. Jest to poziom zakłóceń stanowiący znaczące obciążenie dla układu sterowania (kilka procent F_{\max}), lecz nie-przekraczający możliwości kompensacyjnych regulatorów. Test ten pozwala ocenić odporność układu zamkniętego na zakłócenia zewnętrzne.

3. Eksperiment 3: Odporność na zmianę parametrów modelu.

Symulacja w warunkach nominalnych (bez zakłóceń), przy czym parametry rzeczywistego obiektu różnią się od wartości użytych do strojenia regulatorów. W eksperymencie zwiększoano masę wahadła m o 10%, co odpowiada sytuacji, w której model użyty do syntezy regulatora jest niedokładny względem rzeczywistego układu fizycznego:

- Nominalna masa wahadła: $m_{\text{nom}} = 0,23 \text{ kg}$.

- Rzeczywista masa wahadła: $m_{\text{real}} = 0,253 \text{ kg} (+10\%)$.

Test ten ma na celu ocenę wrażliwości poszczególnych regulatorów na niepewność parametryczną modelu — kluczową właściwość w zastosowaniach praktycznych, gdzie dokładne wartości parametrów fizycznych są rzadko znane z wysoką precyzją. Zmiana masy wahadła wpływa bezpośrednio na dynamikę układu, modyfikując zarówno moment bezwładności, jak i położenie środka ciężkości, co stanowi istotne wyzwanie dla algorytmów sterowania.

5.2. Badane algorytmy

W ramach eksperymentów przetestowano następujące regulatory (w wersjach po optymalizacji nastaw):

1. **PID-PID** – Równoległy układ dwóch regulatorów PID (gdzie $K_i = 0$).
2. **PID-LQR** – Hybryda: PID dla wózka, LQR dla wahadła.
3. **MPC** – Nieliniowe sterowanie predykcyjne (NMPC) z pełnym modelem dynamiki i całkowaniem metodą Rungego-Kutty 4. rzędu.
4. **MPC-J2** – Wariant NMPC z rozszerzoną funkcją kosztu J_2 (uwzględniającą dodatkowo kwadrat bezwzględnej wartości sterowania).
5. **LMPC** – Liniowy regulator MPC wykorzystujący model zlinearyzowany.
6. **Fuzzy-LQR** – Regulator rozmyty Takagi-Sugeno wspomagany lokalnym LQR.

5.3. Wskaźniki jakości regulacji

Do ilościowej oceny jakości sterowania wykorzystano następujące wskaźniki błędów, obliczane dla zdyskretyzowanych przebiegów kąta $\theta[k]$ (N próbek):

- **MSE (Mean Squared Error)** – Średni błąd kwadratowy, karający silniej duże odchyłki.

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y[k] - y_{\text{ref}}[k])^2 \quad (45)$$

- **MAE (Mean Absolute Error)** – Średni błąd bezwzględny, informujący o przeciętnym uchybie.

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y[k] - y_{\text{ref}}[k]| \quad (46)$$

- **ISE (Integral of Squared Error)** – Całkowe kryterium kwadratowe, będące miarą energii uchybu w czasie ciągłym.

$$\text{ISE} = \int_0^T (y(t) - y_{\text{ref}}(t))^2 dt \quad (47)$$

- **IAE (Integral of Absolute Error)** – Całkowe kryterium modułu błędu, akumulujące całkowity uchyb w czasie.

$$\text{IAE} = \int_0^T |y(t) - y_{\text{ref}}(t)| dt \quad (48)$$

- **Energia sterowania L2 ($E_{u,L2}$)** – Koszt kwadratowy sterowania, powiązany z energią elektryczną/mechaniczną.

$$E_{u,L2} = \int_0^T u(t)^2 dt \quad (49)$$

- **Energia sterowania L1 ($E_{u,L1}$)** – Koszt absolutny sterowania (zużycie paliwa/zasobów).

$$E_{u,L1} = \int_0^T |u(t)| dt \quad (50)$$

- **Czas regulacji t_s (Settling Time)** – Czas, po którym sygnał wyjściowy trwale wchodzi w kanał tolerancji i już go nie opuszcza. W niniejszej pracy przyjęto tolerancję $\epsilon = 2\%$ wartości początkowego wychylenia, tj. $|\theta| < 0,001$ rad dla kąta oraz $|x| < 0,002$ m dla pozycji.
- **Przeregulowanie M_p (Overshoot)** – Maksymalne procentowe odchylenie sygnału od wartości zadanej w odniesieniu do wartości skoku.

$$M_p = \frac{\max(y) - y_{\text{ref}}}{y_{\text{ref}}} \cdot 100\% \quad (51)$$

- **Uchyb ustalony e_{ss} (Steady-state Error)** – Średnia wartość uchybu w końcowej fazie symulacji (ostatnie 10% czasu), określająca dokładność statyczną regulacji.

Dodatkowo analizie poddano charakterystyki jakościowe przebiegów czasowych, takie jak czas regulacji (czas, po którym błąd trwale mieści się w paśmie $\pm 2\%$) oraz maksymalne przeregulowanie.

6. Analiza wyników

Rozdział ten poświęcony jest szczegółowej analizie wyników badań symulacyjnych, które zostały przeprowadzone w celu weryfikacji skuteczności i jakości działania zaprojektowanych układów sterowania. Głównym celem eksperymentów było zbadanie zachowania wahadła odwróconego w dwóch diametralnie różnych sytuacjach: podczas stabilizacji punktu pracy w idealnych warunkach nominalnych oraz w trakcie pracy pod wpływem losowych zakłóceń zewnętrznych. Dodatkowo zakres badań obejmował weryfikację odporności układów na zmiany parametrów modelu oraz analizę złożoności obliczeniowej algorytmów.

Podczas analizy wyników szczególny nacisk położono na trzy kluczowe aspekty sterowania. Pierwszym z nich jest stabilizacja kątowa, czyli zdolność układu do utrzymania pręta wahadła w pionie (pozycja równowagi chwiejnej). Jest to zadanie priorytetowe, gdyż jego niezrealizowanie prowadzi do upadku wahadła i niepowodzenia procesu regulacji. Drugim, równie istotnym aspektem, jest stabilizacja pozycji wózka. Wymogiem jest, aby proces stabilizacji kąta nie odbywał się kosztem nadmiernego przemieszczenia wózka poza zadany obszar roboczy. W systemach rzeczywistych, takich jak suwnice czy roboty balansujące, utrzymanie pozycji jest często równie krytyczne co sama stabilizacja ładunku. Ostatnim jest jakość sygnału sterującego, która ma bardzo duże znaczenie jeśli rozpatrujemy rzeczywiste układy napędowe. Wysoka zmienność sygnału sterującego, oscylacje wysokoczestotliwościowe czy gwałtowne skoki amplitudy mogą prowadzić do szybkiego zużycia mechanicznego elementów wykonawczych, a także generować niepożądane straty energii.

Dla zachowania przejrzystości analizy, badane algorytmy pogrupowano w dwie rodziny: regulatory klasyczne, do których zaliczono równoległy układ PID-PID oraz hybrydowy PID-LQR, regulatory zaawansowane, obejmujące predykcyjny algorytm MPC (w dwóch wariantach funkcji kosztu), liniowy LMPC oraz sterownik rozmyty Fuzzy-LQR.

6.1. Stabilizacja w warunkach nominalnych

Pierwszy scenariusz testowy miał na celu weryfikację dynamiki układu w odpowiedzi na niezerowe warunki początkowe. Symulacja rozpoczęła się od wychylenia wahadła o kąt około 2.8 stopnia (0.05 radiana). Jest to typowy test odpowiedzi skokowej, pozwalający ocenić szybkość działania (czas regulacji) oraz tłumienie oscylacji przez poszczególne regulatory.

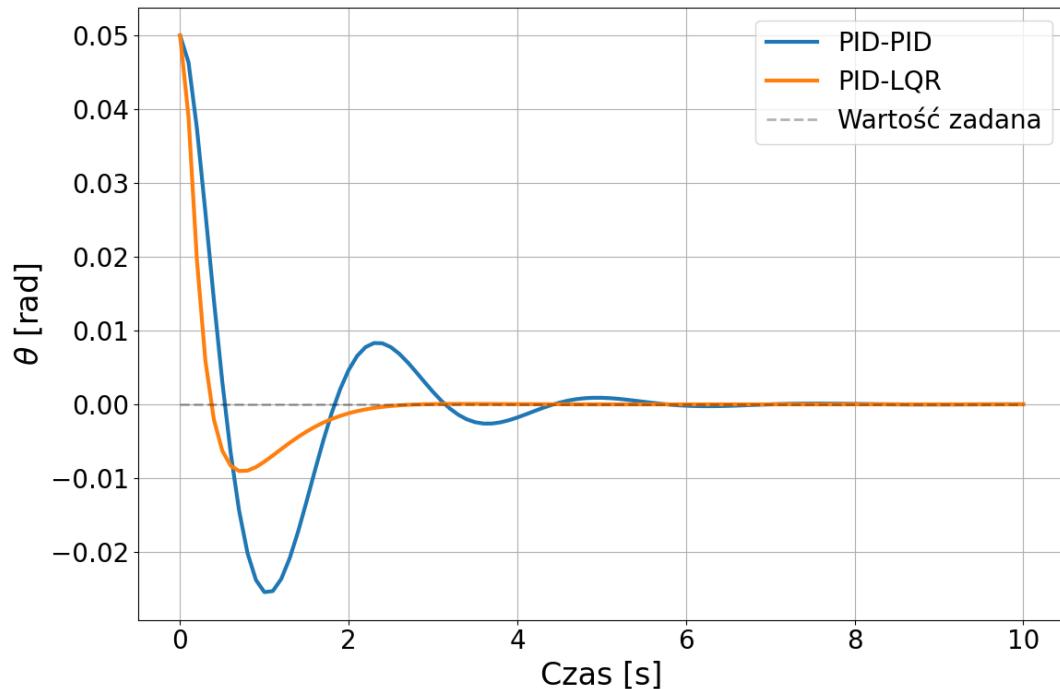
6.1.1. Charakterystyka regulatorów klasycznych

Na Rysunkach 6.1, 6.2 oraz 6.3 przedstawiono zbiorcze zestawienie przebiegów czasowych dla grupy regulatorów klasycznych. Analizując wykres kąta wychylenia θ (Rys. 6.1), można zaobserwować wyraźną przewagę regulatora hybrydowego.

Zoptymalizowany regulator PID-LQR, wykorzystujący duże wzmocnienia dla błędu pozycji, charakteryzuje się bardzo krótkim czasem regulacji ($T_s \approx 0.3$ s). Jest to wynik ponad pięciokrotnie lepszy od regulatora PID-PID ($T_s \approx 1.6$ s), który wykazuje znacznie dłuższy okres dochodzenia do równowagi.

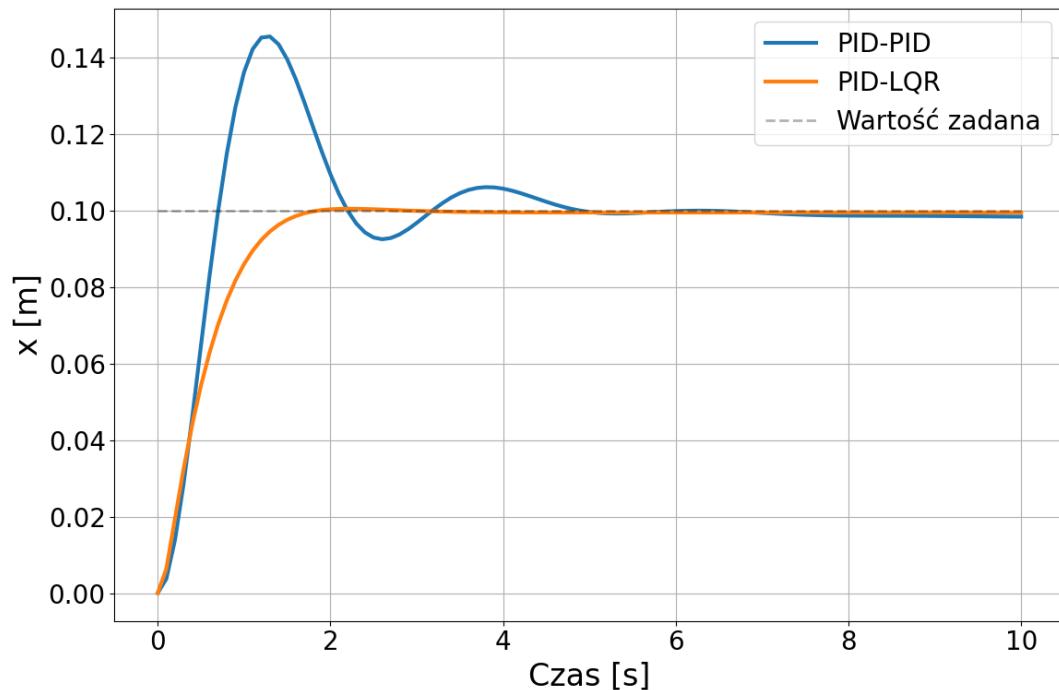
Co istotne, wyższa dynamika PID-LQR idzie w parze z oszczędnością energetyczną. Zużywa on o blisko 40% mniej energii ($E_u \approx 0.59$) niż regulator PID-PID ($E_u \approx 0.95$). Oznacza to, że precyjnie dobrane wzmocnienia LQR pozwalają stłumić wychylenie szybkim i skutecznym impulsem, podczas gdy PID-PID działa w sposób bardziej zachowawczy, ale rozciągnięty w czasie, co ostatecznie generuje większy koszt energetyczny.

Warto jednak zauważyć, że PID-LQR utrzymuje wózek w węższym zakresie roboczym ($\text{Max}|x| \approx 0.10$ m) niż PID-PID (0.15 m), przy jednocześnie krótszym czasie ustalania pozycji ($T_{s,x} \approx 1.2$ s vs 2.0 s). Pod każdym względem PID-LQR oferuje lepszą jakość regulacji niż klasyczny układ PID-PID.

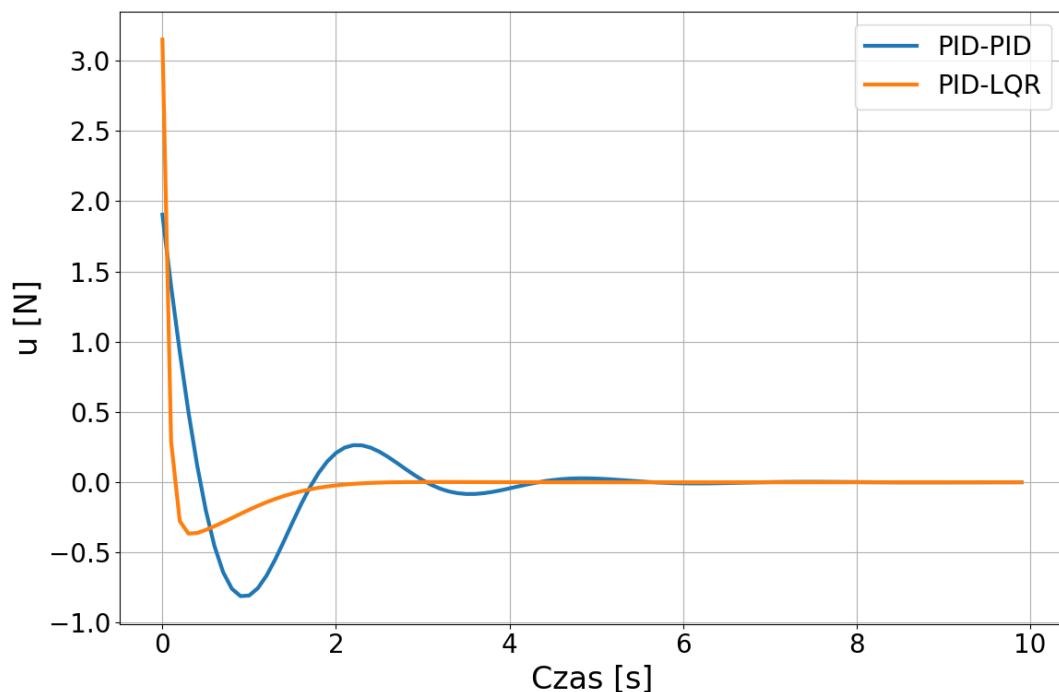


Rysunek 6.1. Przebieg kąta θ dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).

6. Analiza wyników



Rysunek 6.2. Przebieg pozycji x dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).



Rysunek 6.3. Sygnał sterujący u dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).

6.1.2. Charakterystyka regulatorów zaawansowanych

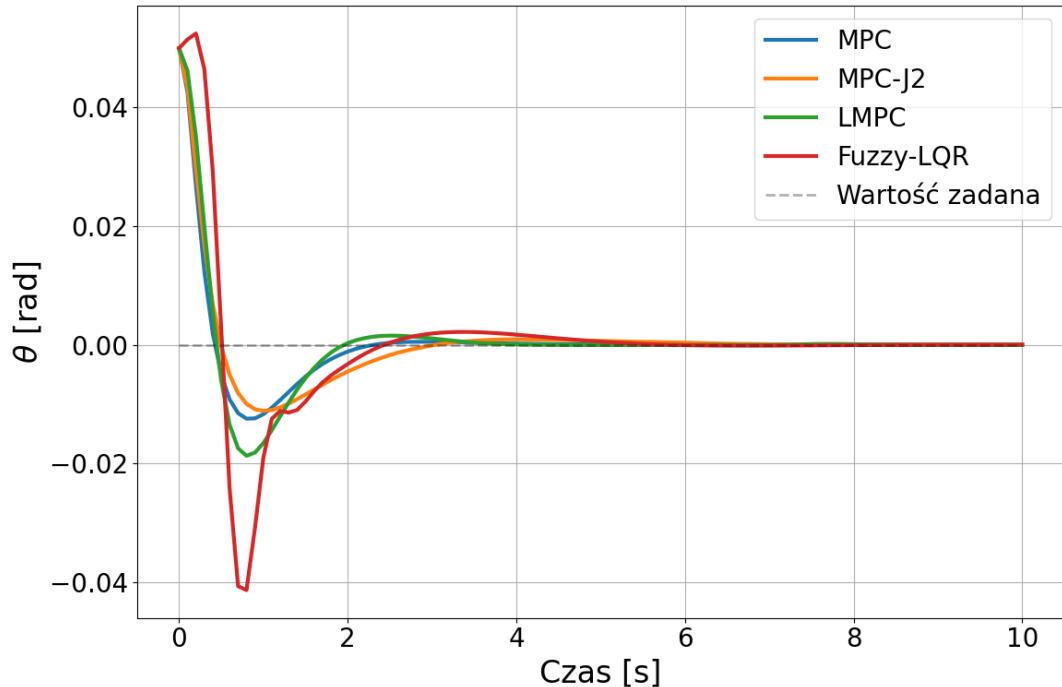
W grupie regulatorów zaawansowanych, których wyniki zaprezentowano na Rysunkach 6.4, 6.5 i 6.6, można zaobserwować szerokie spektrum zachowań, wynikające z różnic w sformułowaniu zadań sterowania.

Najlepsze wyniki w warunkach nominalnych osiąga regulator MPC-J2. Dzięki funkcji kosztu karającej bezpośrednio sterowanie, a nie jego zmiany, uzyskuje on czas regulacji ($T_s \approx 0.4$ s) i zużycie energii ($E_u \approx 0.51$) na poziomie zbliżonym do agresywnego PID-LQR. Potwierdza to, że odpowiednio nastrojony regulator predykcyjny może łączyć wysoką dynamikę z precyzją, nie ustępując klasycznym metodom nawet w prostych zadaniach stabilizacji.

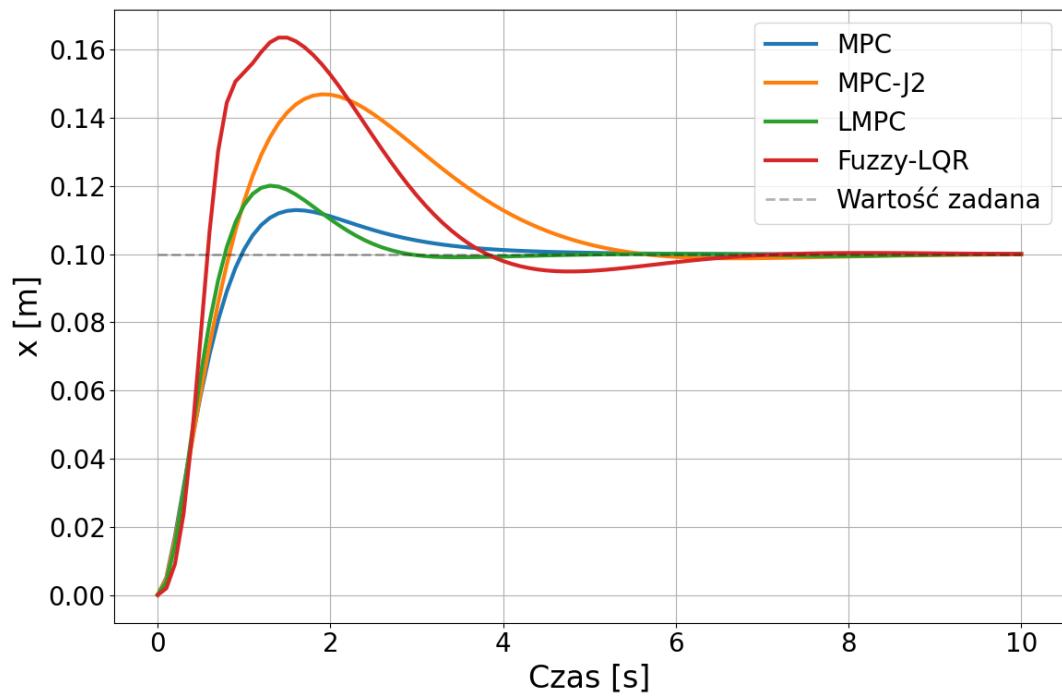
Standardowy regulator MPC (nieliniowy) działa w sposób bardziej zachowawczy. Jego czas regulacji wynosi $T_s \approx 1.2$ s, co wynika z funkcji kosztu promującej gładkość sterowania. Mimo wolniejszej reakcji, charakteryzuje się bardzo niskim kosztem energetycznym ($E_u \approx 0.56$), ustępując pod tym względem jedynie wariantowi J2 i PID-LQR.

Liniowy regulator predykcyjny LMPC plasuje się pośrodku stawki. Osiaga czas regulacji $T_s \approx 1.3$ s przy zużyciu energii $E_u \approx 0.79$. Gorsze wyniki energetyczne w porównaniu do nieliniowych wariantów MPC (0.79 vs 0.51 – 0.56) wynikają z uproszczeń modelu liniowego, który nie odwzorowuje idealnie dynamiki obiektu nawet w pobliżu punktu pracy, wymuszając częstsze korekty sterowania.

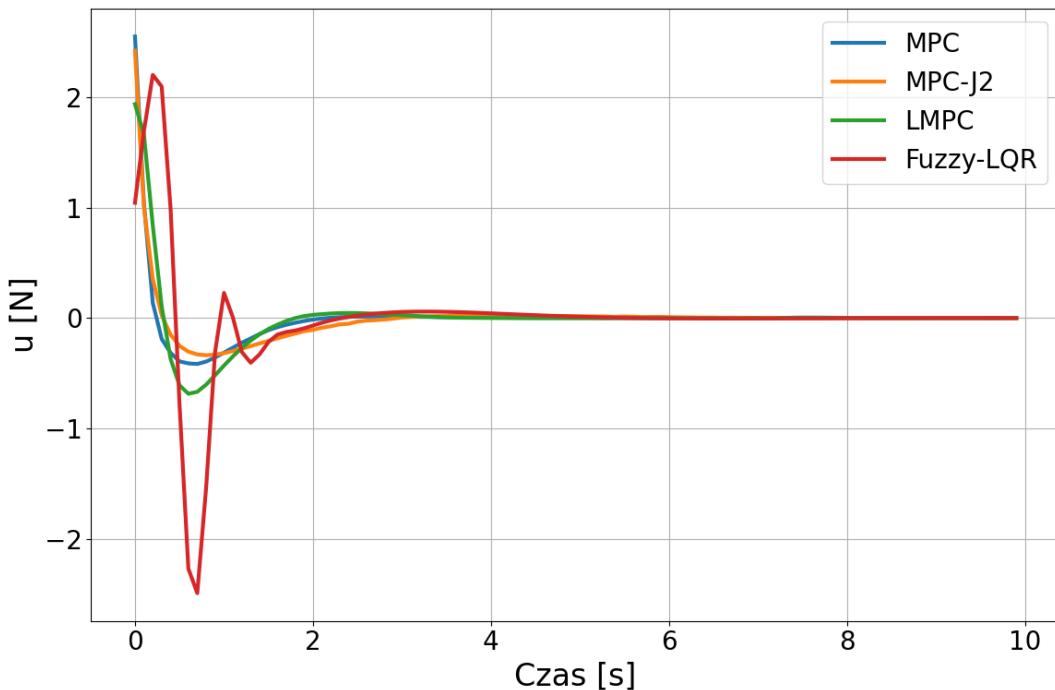
Zdecydowanie odmienną charakterystykę prezentuje regulator Fuzzy-LQR. W tym zestawieniu okazuje się rozwiązaniem najbardziej kosztownym energetycznie ($E_u \approx 2.86$), zużywając ponad 5-krotnie więcej energii niż MPC-J2. Co ciekawe, ten duży wydatek energetyczny nie przekłada się na najkrótszy czas regulacji ($T_s \approx 1.5$ s). Sugeruje to, że w idealnych warunkach nominalnych, złożona struktura reguł rozmytych może wprowadzać niepotrzebną nerwosowość sygnału sterującego, która nie jest konieczna do stabilizacji małych wychyleń, a generuje straty energii. Jego zalety mogą ujawnić się dopiero w trudniejszych warunkach pracy.



Rysunek 6.4. Przebieg kąta θ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).



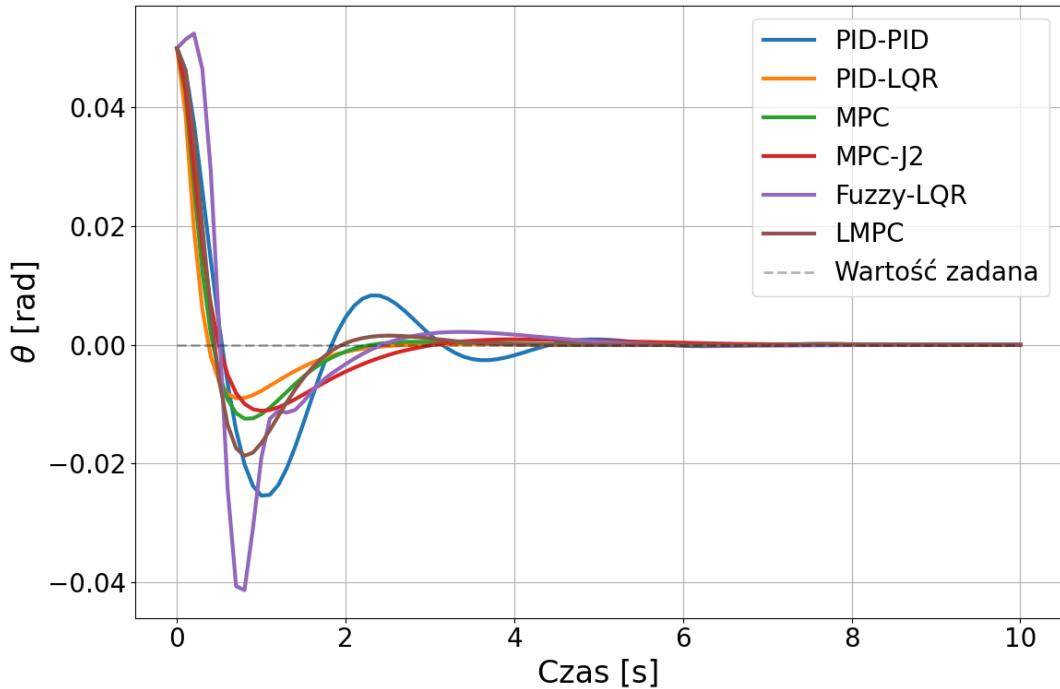
Rysunek 6.5. Przebieg pozycji x dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).



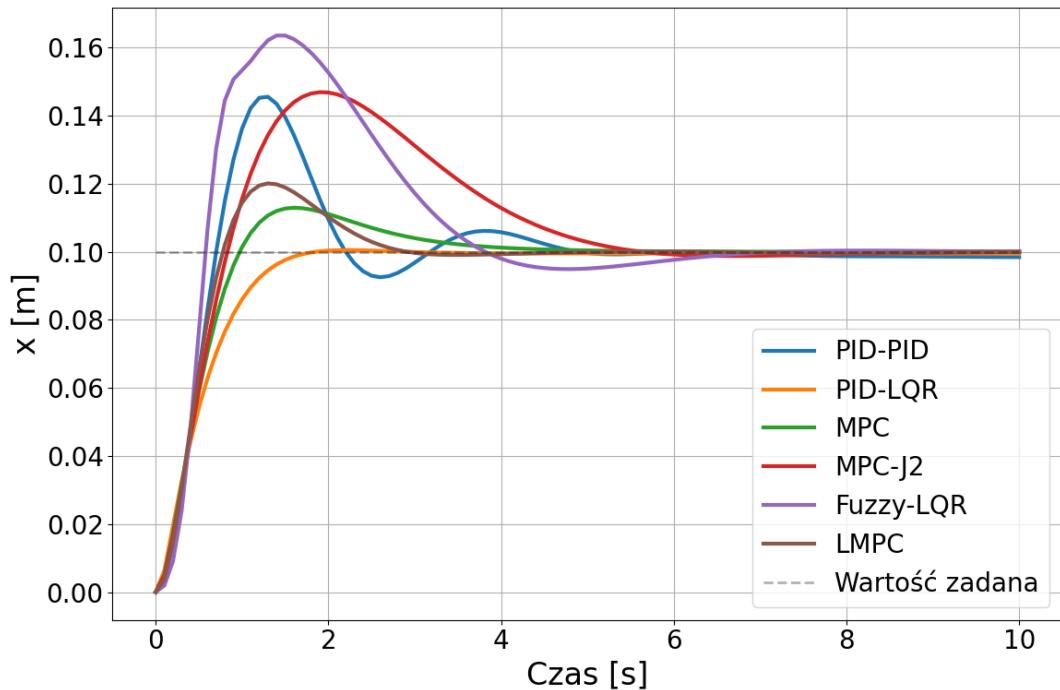
Rysunek 6.6. Sygnał sterujący u dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).

6.1.3. Zestawienie wyników

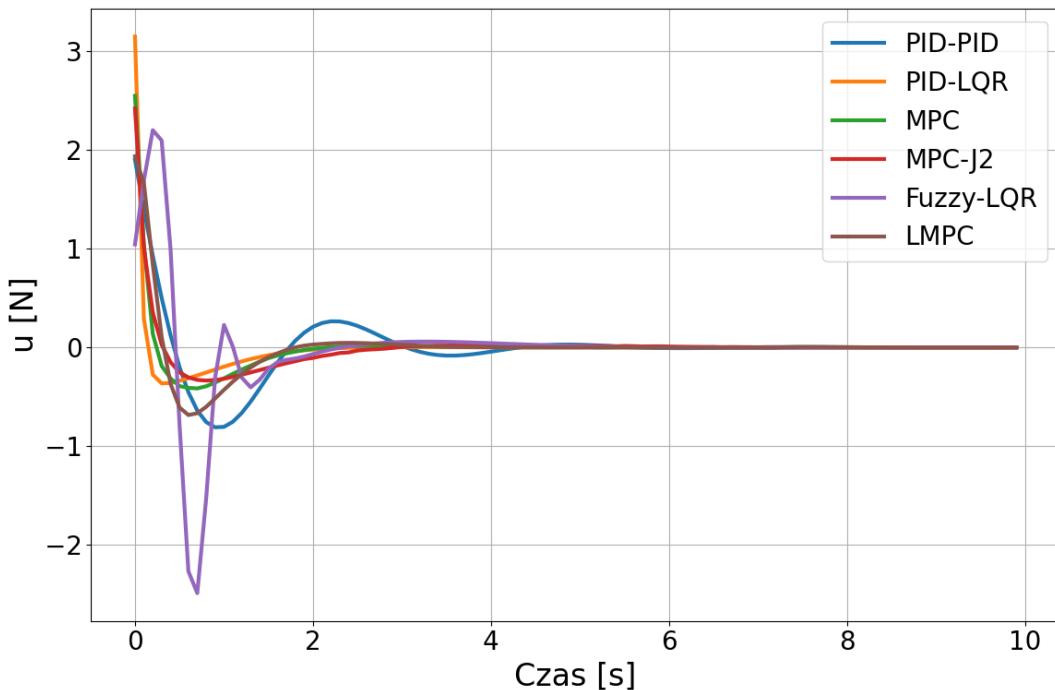
W celu bezpośredniego porównania wszystkich zaimplementowanych strategii sterowania, na Rysunkach 6.7–6.9 zestawiono przebiegi czasowe dla wszystkich regulatorów. Wykresy te potwierdzają, że w idealnych warunkach nominalnych najlepszą dynamikę oferują regulatory PID-LQR oraz MPC, które najszybciej sprowadzają wahadło do pionu przy umiarkowanym przemieszczeniu wózka. Widać wyraźny kontrast między metodami szybkimi a zachowawczym regulatorem PID-PID, który charakteryzuje się znacznie dłuższym czasem regulacji. Zestawienie to uwidacznia również różnicę w charakterystyce sygnałów sterujących – od gładkich przebiegów dla MPC, po bardziej agresywne działania Fuzzy-LQR, co przekłada się na omówione wcześniej różnice w kosztach energetycznych.



Rysunek 6.7. Przebieg kąta θ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).



Rysunek 6.8. Przebieg pozycji x dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).



Rysunek 6.9. Sygnał sterujący u dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).

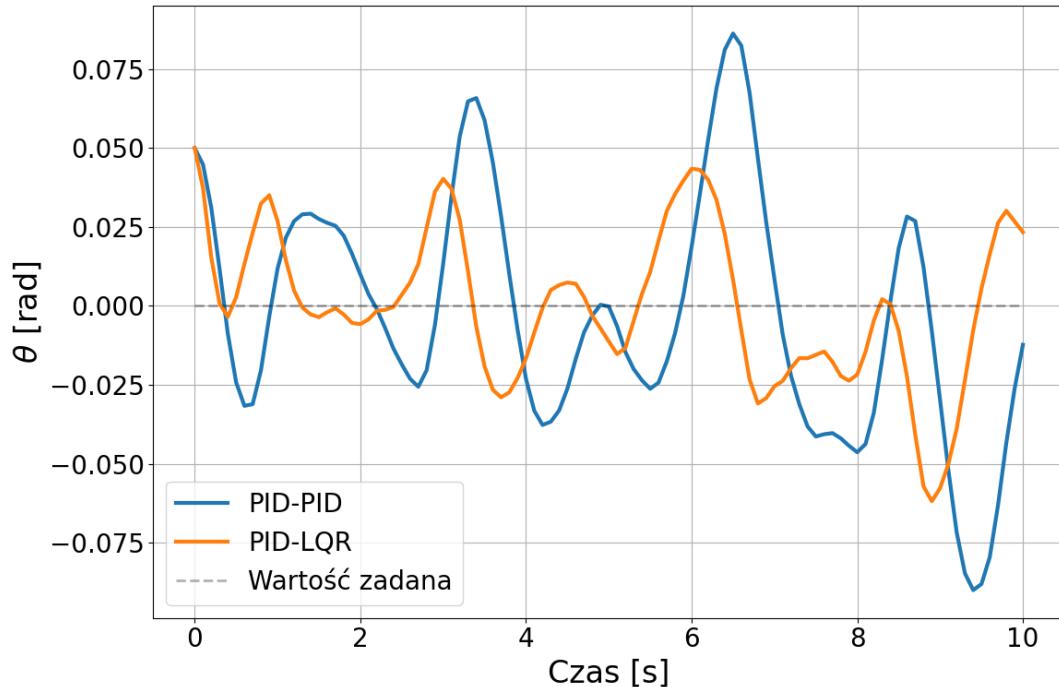
6.2. Analiza odporności na zakłócenia

Drugi scenariusz badawczy polegał na wprowadzeniu do układu sygnału zakłócającego, modelującego losowe zakłócenia zewnętrzne o zmiennej sile i kierunku. Test ten miał na celu sprawdzenie odporności regulatorów na zakłócenia zewnętrzne, czyli ich zdolności do utrzymania stabilności mimo działania nieznanych, zewnętrznych sił.

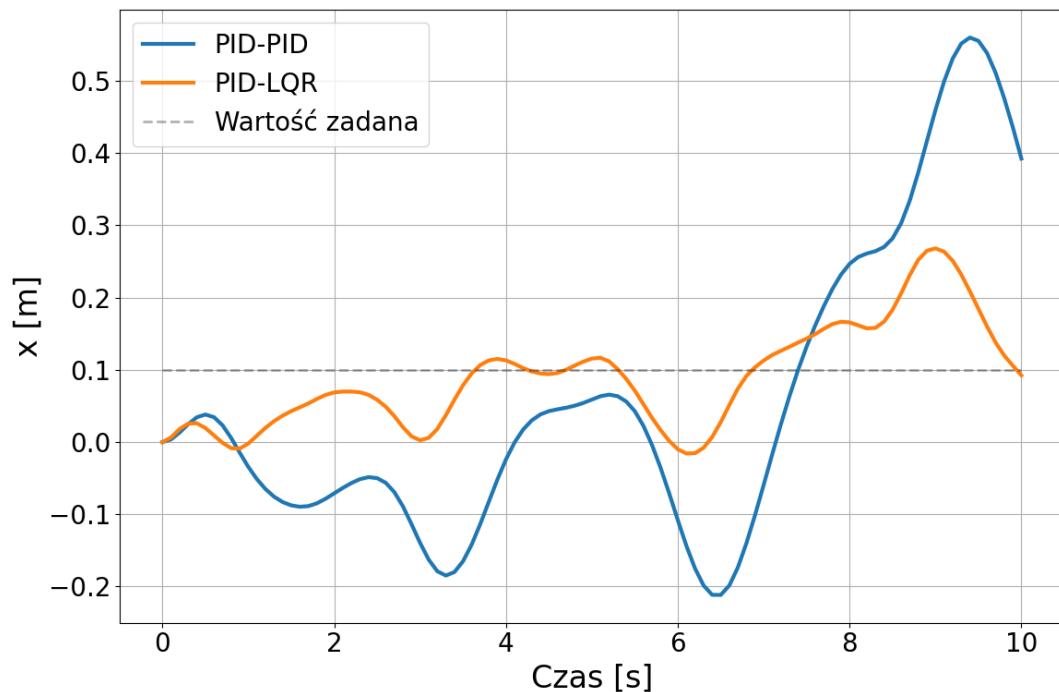
Podstawowym problemem fizycznym w tym scenariuszu jest zjawisko sprzężenia dryfu. Aby skompensować siłę zakłócającą pchającą wahadło np. w prawo, wózek musi nieustannie przyspieszać w prawo, aby przemieścić się pod środek ciężkości wahadła i wytworzyć moment siły bezwładności przeciwdziałający zakłóceniu. Oznacza to, że skuteczna kompensacja wychylenia kątowego nieuchronnie prowadzi do przemieszczania się wózka (dryfu). Istotą problemu jest znalezienie kompromisu — jak bardzo pozwolić wózkowi uciec, by utrzymać wahadło w pionie.

6.2.1. Charakterystyka regulatorów klasycznych

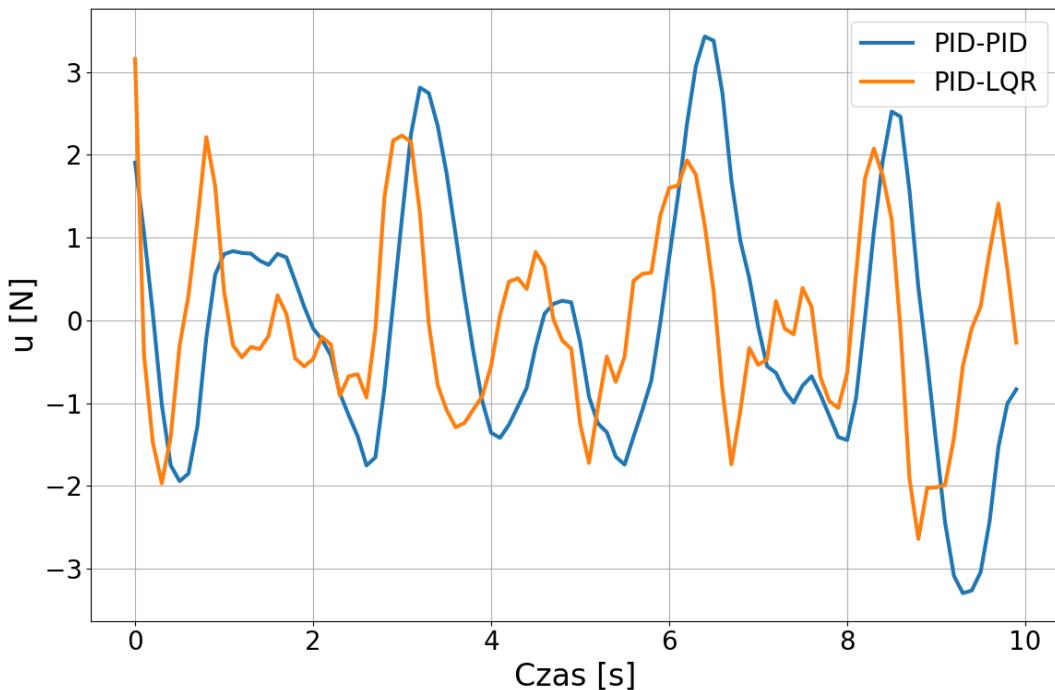
W grupie klasycznej (Rys. 6.10–6.12) nastąpiła istotna zmiana w stosunku do wcześniejszych analiz. Nowe strojenie PID-LQR, nastawione na karę za zmianę pozycji, przyniosło znakomite rezultaty. Regulator ten znaczaco poprawił stabilizację kąta ($\text{Max}|θ| \approx 0.062$ vs 0.090 rad dla PID-PID) oraz ograniczył dryf pozycji ($\text{Max}|x| \approx 0.27$ m vs 0.56 m). Co kluczowe, osiągnął to przy niemal dwukrotnie niższym zużyciu energii ($E_u \approx 12.56$) niż regulator PID-PID (22.78). Świadczy to o tym, że szybka i zdecydowana reakcja na pojawiające się zakłócenie jest bardziej ekonomiczna niż długotrwała walka z oscylacjami.



Rysunek 6.10. Przebieg kąta θ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.



Rysunek 6.11. Dryf pozycji x pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.



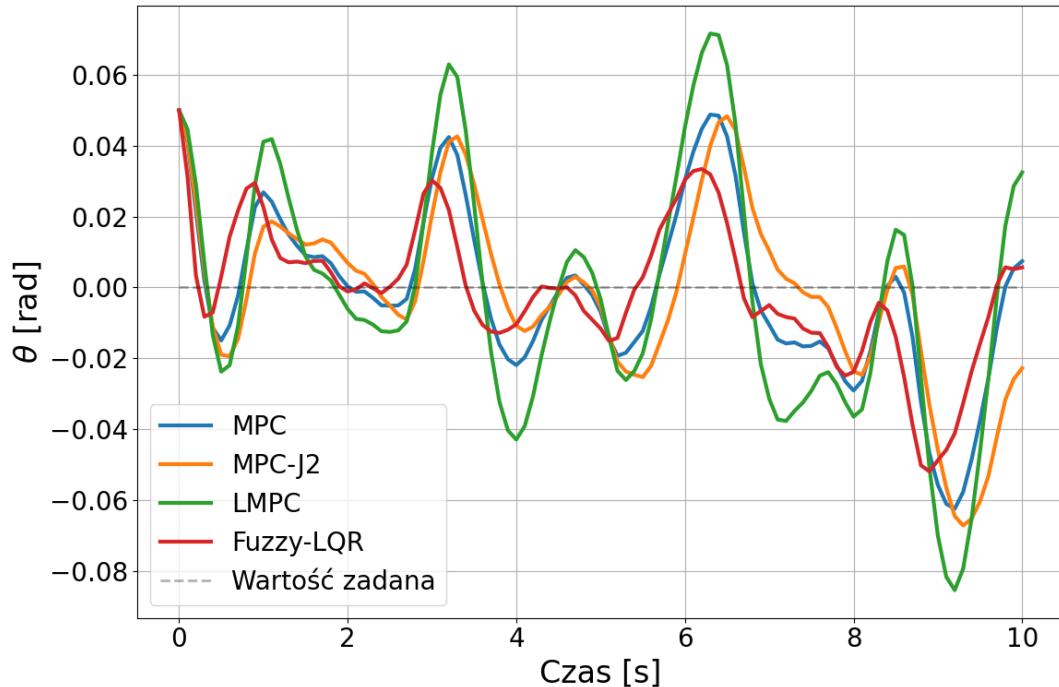
Rysunek 6.12. Sygnał sterujący u pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.

6.2.2. Charakterystyka regulatorów zaawansowanych

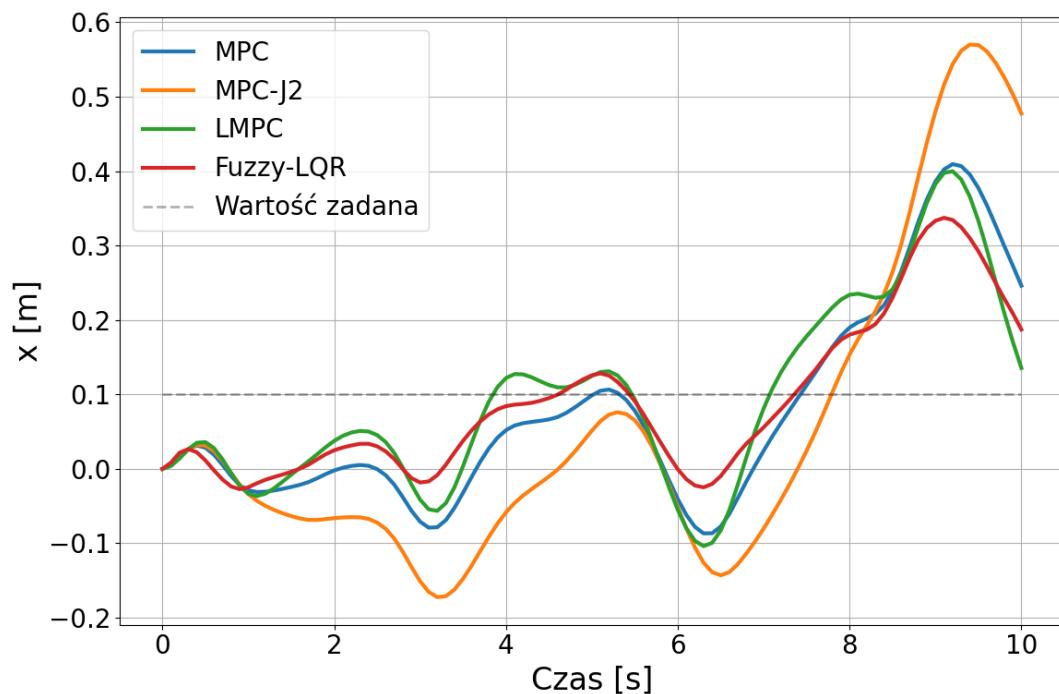
W grupie zaawansowanej (Rys. 6.13–6.15) najlepsze rezultaty osiągnął Fuzzy-LQR. Uzyskał on najlepsze wyniki we wszystkich rozpatrywanych kategoriach: najmniejsze wychylenie kątowe ($\text{Max}|\theta| \approx 0.052$ rad), najmniejszy dryf wózka ($\text{Max}|x| \approx 0.34$ m) oraz najniższe zużycie energii ($E_u \approx 10.1$). Przeczy to wcześniejszym obserwacjom sugerującym wysoką energochłonność tego rozwiązania. Okazuje się, że inteligentne dostosowywanie wzmacnianie pozwala na precyzyjne interwencje, które tłumią zakłócenia w fazie początkowej, zanim wymuszą one duży wydatek energetyczny.

Regulator MPC wykazał zrównoważoną charakterystykę. Pozwolił na nieco większy dryf (0.41 m) i zużył więcej energii (12.44) niż Fuzzy-LQR. Wariant MPC-J2, w przeciwieństwie do wcześniejszych prób, utrzymał stabilność układu. Jednakże, wysoka kara za wartość sterowania ograniczyła jego zdolność do szybkiej reakcji, co skutkowało największym dryfem wózka w grupie ($\text{Max}|x| \approx 0.57$ m), porównywalnym z PID-PID. Mimo to, jego zużycie energii pozostało na umiarkowanym poziomie (12.3).

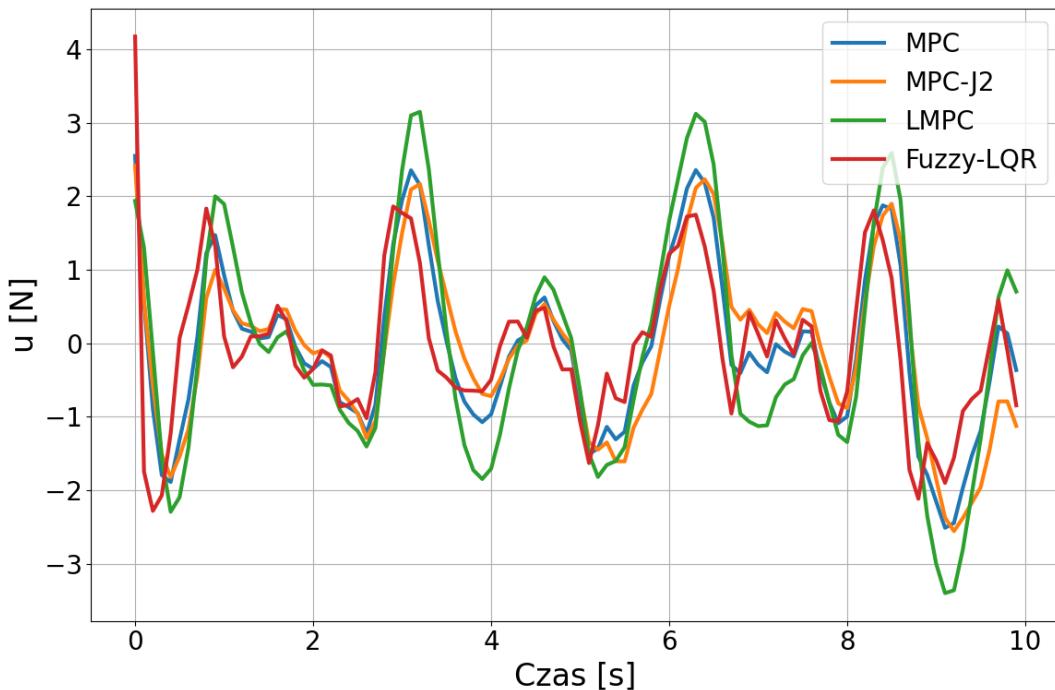
Regulator LMPC dobrze poradził sobie ze stabilizacją. Jednak gorzej poradził sobie jeśli chodzi o koszt energetyczny ($E_u \approx 22.7$), zbliżony do wyniku regulatora PID-PID. Ograniczenia modelu liniowego w obliczu silnych zakłóceń wymusiły mniejszą efektywność sterowania, co widać również w nieco gorszej stabilizacji kąta (0.085 rad) w porównaniu do nieliniowego MPC.



Rysunek 6.13. Przebieg kąta θ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.



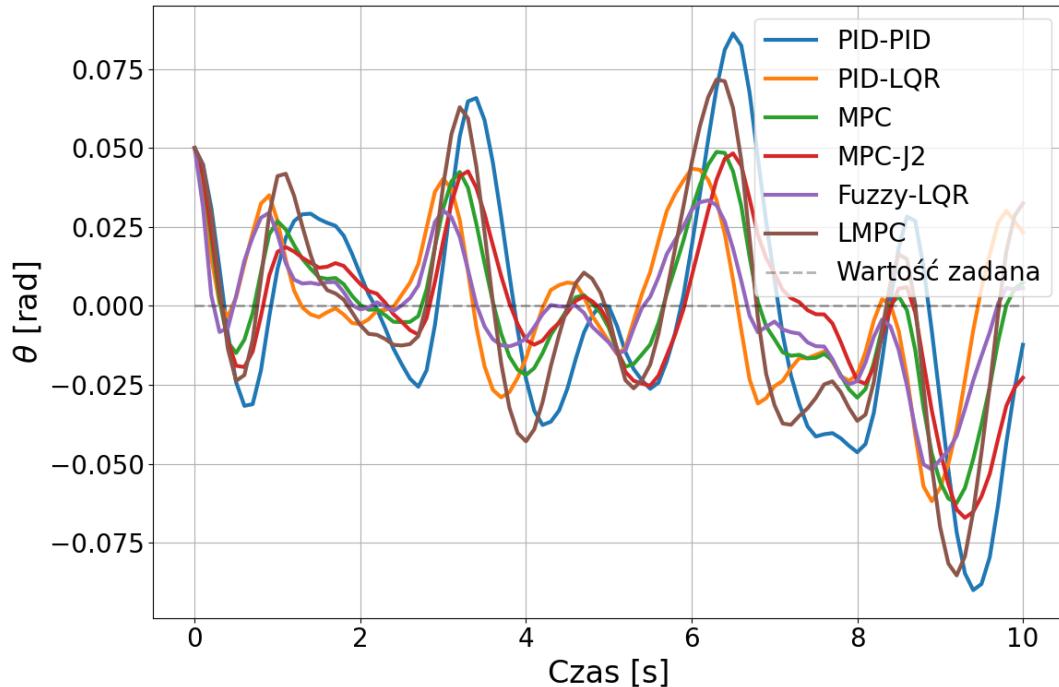
Rysunek 6.14. Dryf pozycji x pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.



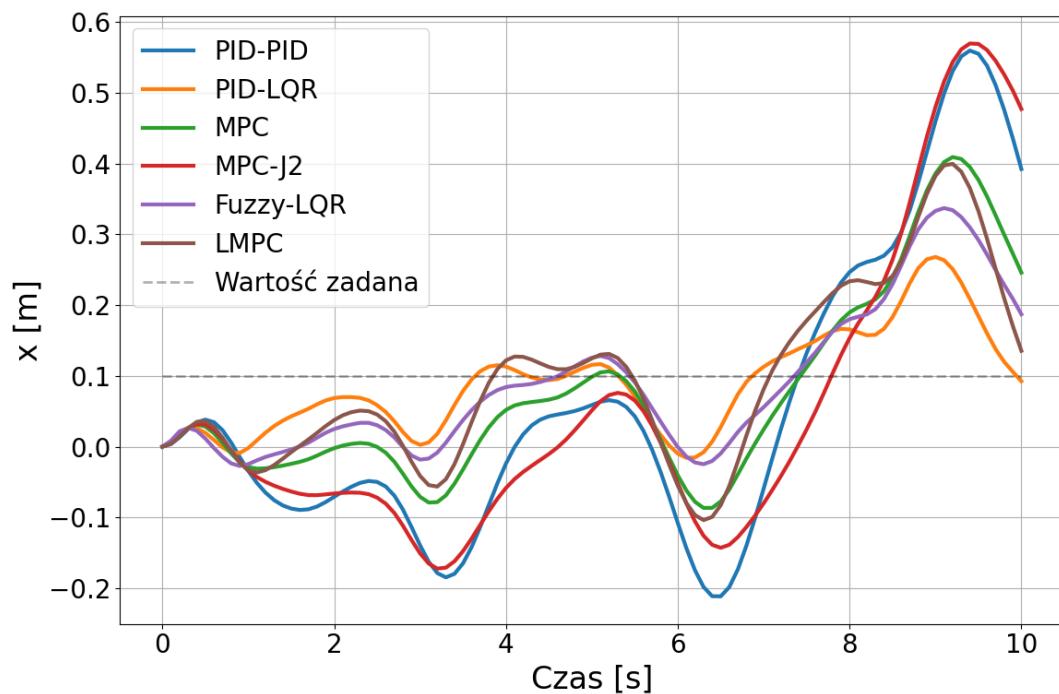
Rysunek 6.15. Sygnał sterujący u pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.

6.2.3. Zestawienie wyników

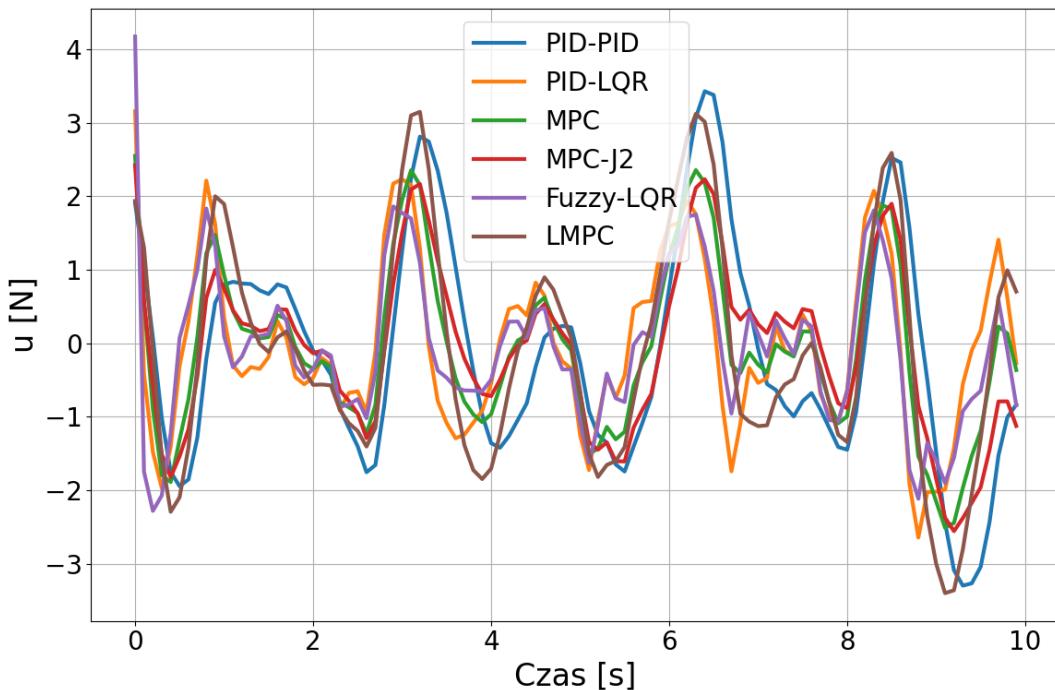
Analogicznie do warunków nominalnych, przeprowadzono zbiorcze zestawienie wyników dla wszystkich badanych regulatorów w obecności zakłóceń (Rys. 6.16–6.18). Wykresy te dobrze pokazują przewagę regulatora Fuzzy-LQR oraz PID-LQR w tłumieniu zakłóceń. Widać wyraźnie, że metody te utrzymują oscylacje wahadła w najwęższym paśmie, podczas gdy klasyczny PID-PID oraz predykcyjne MPC pozwalają na znacznie większe wychylenia. Zestawienie sygnałów sterujących ujawnia koszt tej precyzji - Fuzzy-LQR charakteryzuje się najbardziej aktywnym sterowaniem, co jednak w ogólnym rozrachunku (dzięki szybkiej stabilizacji) nie prowadzi do najgorszego zużycia energii.



Rysunek 6.16. Przebieg kąta θ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.



Rysunek 6.17. Dryf pozycji x pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.



Rysunek 6.18. Sygnał sterujący u pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.

6.3. Analiza odporności na zmianę parametrów modelu

Trzeci scenariusz badawczy miał na celu ocenę wrażliwości regulatorów na niepewność parametryczną modelu. W praktycznych zastosowaniach przemysłowych dokładne wartości parametrów fizycznych układu są rzadko znane z wysoką precyzją. Mogą one ulegać zmianom w czasie (np. zużycie mechaniczne, zmiana ładunku), dlatego odporność na takie perturbacje jest kluczową właściwością regulatora.

W eksperymencie zwiększoano masę wahadła o 100% względem wartości nominalnej ($m_{\text{nom}} = 0,23 \text{ kg} \rightarrow m_{\text{real}} = 0,46 \text{ kg}$), podczas gdy regulatorzy pozostały nastrojone dla parametrów nominalnych.

Wyniki eksperymentu zaprezentowano na Rysunkach 6.19, 6.20 oraz 6.21. Kluczową obserwacją jest fakt, że wszystkie badane regulatory zachowały stabilność mimo niedokładnego modelu. Świadczy to o odpowiednim zapasie stabilności wynikającym z procesu optymalizacji nastaw.

Analizując przebieg kąta θ (Rys. 6.19), można zauważyć, że zarówno regulatory klasyczne (w szczególności PID-LQR), jak i predykcyjne (MPC, MPC-J2) wykazują wysoką odporność na zmianę parametrów. Wbrew obawom o wrażliwość metod opartych na modelu, algorytmy predykcyjne skutecznie kompensują błąd modelowania. Mechanizm sprzężenia zwrotnego oraz przesuwny horyzont predykcji pozwalają na bieżącą korektę sterowania, dzięki czemu spadek jakości regulacji jest minimalny.

Regulator PID-LQR, dzięki wysokim wzmacnieniom, a także regulatory MPC, utrzymy-

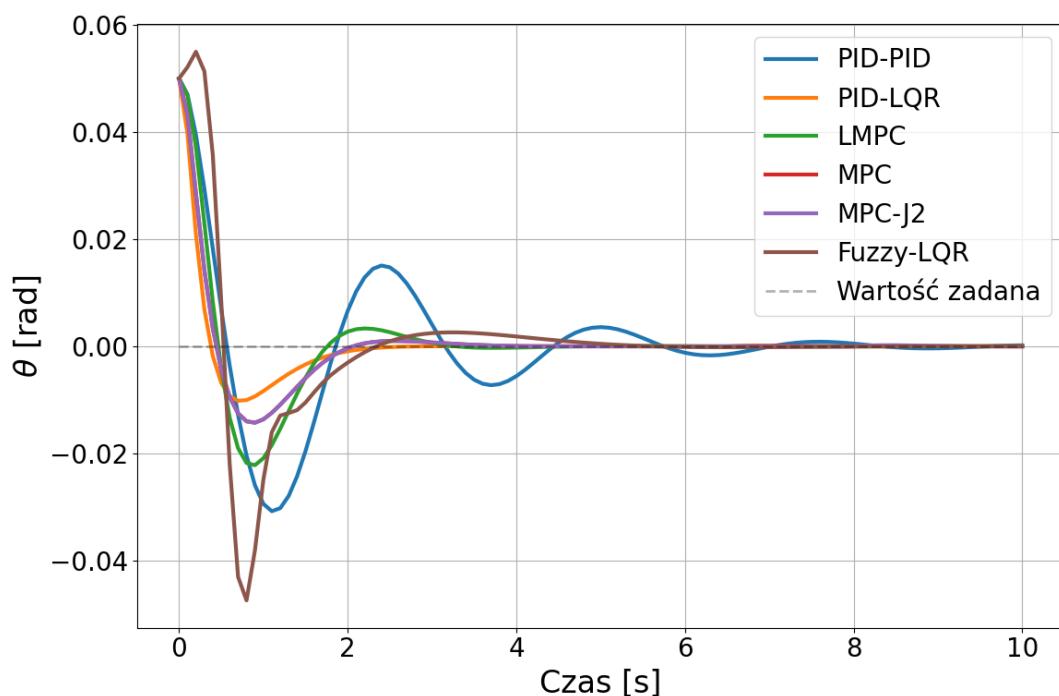
6. Analiza wyników

mają precyżję stabilizacji zbliżoną do warunków nominalnych. Wskazuje to, że dla perturbacji parametrów (rzędu 100%), dobrze nastrojony regulator liniowy oraz nieliniowy MPC są równie skuteczne.

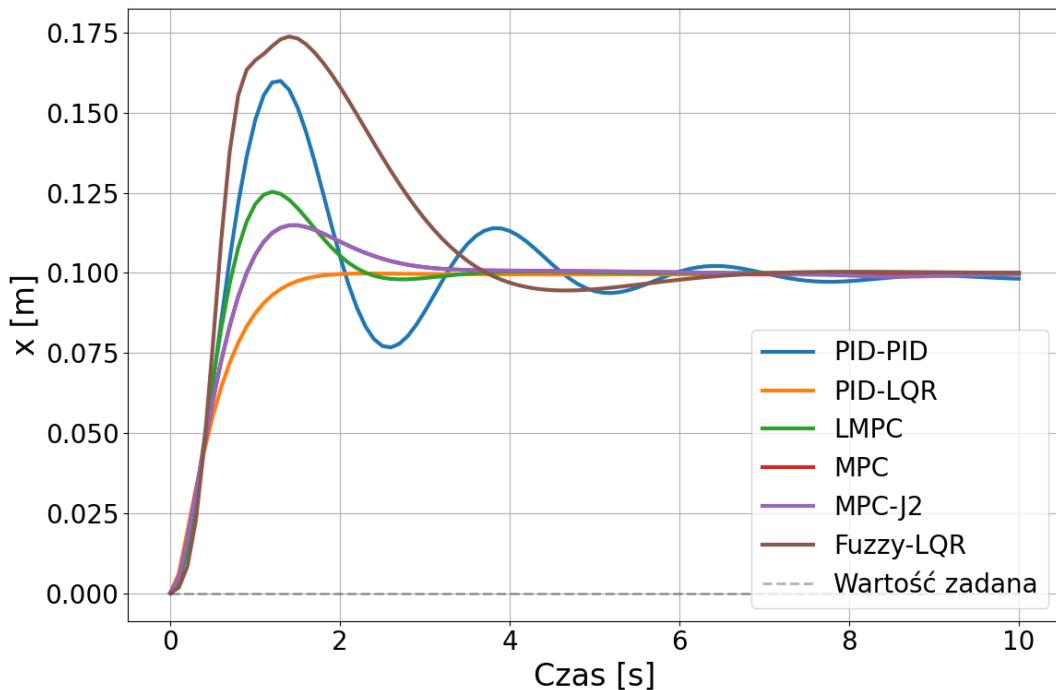
Zdecydowanie najsłabsze wyniki w tym zestawieniu osiągnął klasyczny układ PID-PID. Charakteryzuje się on najdłuższym czasem regulacji ($T_s \approx 2.8$ s) oraz największym uchylem całkowym ($IAE_\theta \approx 0.065$). Brak adaptacji oraz brak modelu predykcyjnego sprawiają, że regulator ten z trudem kompensuje tak znaczną zmianę dynamiki obiektu, co prowadzi do powolnego i oscylacyjnego dochodzenia do równowagi. Regulator LMPC plasuje się pośrodku stawki – radzi sobie lepiej niż PID-PID, ale ustępuje nieliniowym odpowiednikom MPC, co wynika z ograniczeń modelu liniowego.

Regulator Fuzzy-LQR, mimo że zachowuje stabilność, wyróżnia się najwyższym wydatkiem energetycznym ($E_u \approx 3.75$). Złożona struktura sterownika w obliczu stałej zmiany parametrów prowadzi do agresywnych reakcji, co generuje duży koszt sterowania, choć pozwala na szybszą stabilizację niż w przypadku PID-PID.

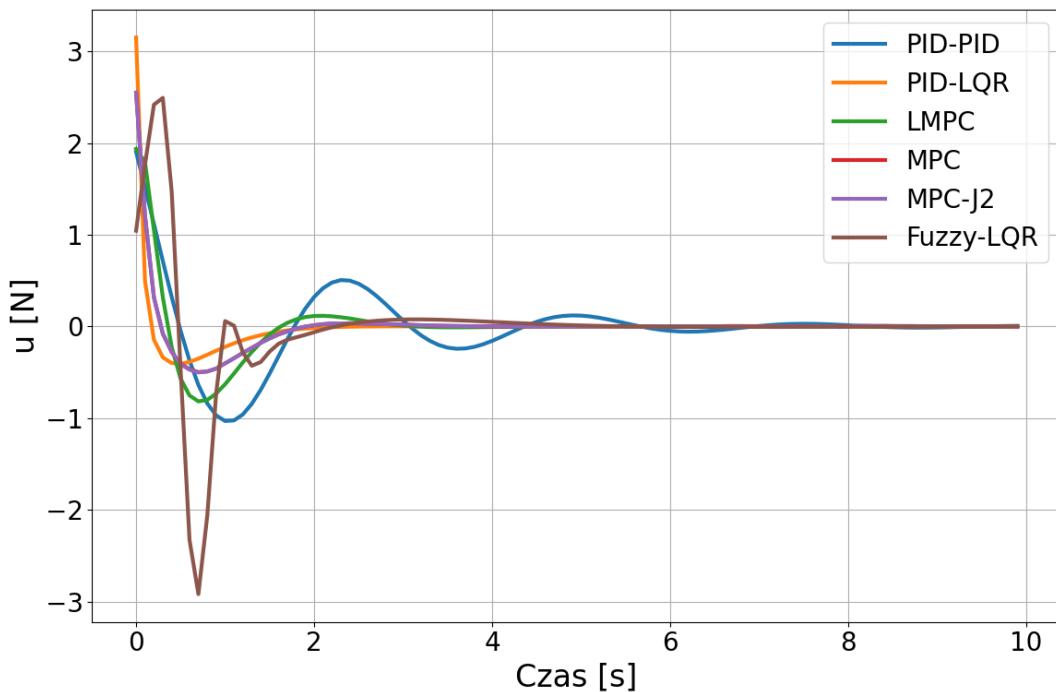
Na wykresie sterowania (Rys. 6.21) widać wzrost amplitudy sygnałów sterujących dla wszystkich regulatorów, co jest fizyczną koniecznością przy sterowaniu obiektem o większej bezwładności. Największą aktywność wykazuje regulator Fuzzy-LQR, co potwierdza jego agresywną charakterystykę działania.



Rysunek 6.19. Przebieg kąta θ przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).



Rysunek 6.20. Przebieg pozycji x przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).



Rysunek 6.21. Sygnał sterujący u przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).

6.3.1. Analiza wrażliwości na zakres zmian

W celu pełniejszej oceny zapasów odporności poszczególnych regulatorów przeprowadzono dodatkową analizę wrażliwości. Zbadano zachowanie układów sterowania w szerskim zakresie zmian masy wahadła: od -75% do $+200\%$ wartości nominalnej. Dla każdej wartości perturbacji obliczono wskaźnik całkowy błędu bezwzględnego kąta (IAE_θ), który jest miarą skumulowanego uchybu w czasie symulacji.

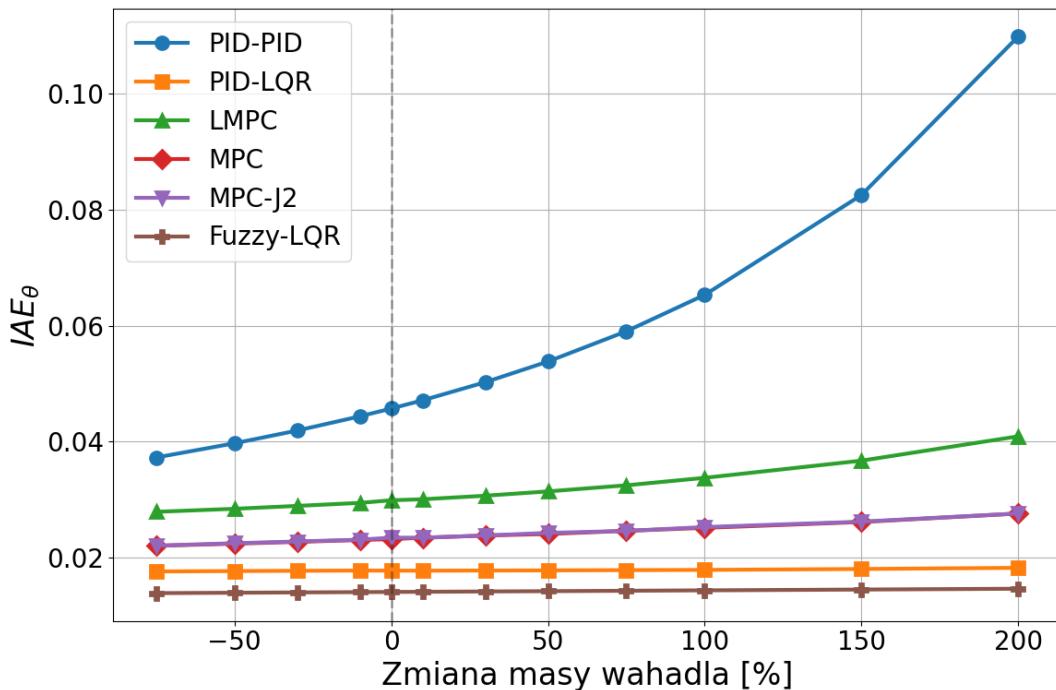
Wyniki analizy przedstawiono na Rysunku 6.22. Można zaobserwować kilka istotnych prawidłowości:

- Regulator Fuzzy-LQR wykazuje najlepszą odporność na niepewność parametryczną, osiągając najniższe wartości IAE_θ w całym badanym zakresie. Co więcej, jego charakterystyka jest praktycznie płaska — zmiana masy wahadła nie wpływa istotnie na jakość regulacji. Wynika to z adaptacyjnej natury logiki rozmytej, która dostosowuje wagi reguł do obserwowanego stanu układu.
- Regulatory klasyczne (PID-PID, PID-LQR) również charakteryzują się płaską charakterystyką w całym zakresie perturbacji, choć z nieco wyższymi wartościami błędu niż Fuzzy-LQR. Ich jakość regulacji jest mało wrażliwa na niepewność parametryczną dzięki strukturze opartej na sprzężeniu zwrotnym od błędu.
- Regulatory predykcyjne (MPC, MPC-J2) wykazują najwyższe wartości wskaźnika IAE_θ . Jest to spodziewane zachowanie, gdyż algorytm optymalizacji wykorzystuje wewnętrzny model, który odbiega od rzeczywistej dynamiki obiektu. Niemniej jednak, regulatory te zachowują stabilność w całym badanym zakresie, a wzrost błędu wraz z perturbacją jest umiarkowany.

Analiza ta pokazuje, że regulatory wykorzystujące mechanizmy adaptacyjne Fuzzy-LQR lub proste sprzężenie zwrotne od błędu (PID, LQR) mogą oferować lepszą odporność na niepewność modelu niż metody predykcyjne, których skuteczność zależy od dokładności wewnętrznego modelu obiektu.

6.4. Szczegółowe zestawienie ilościowe

Poniższe tabele stanowią numeryczne podsumowanie omówionych wyżej zjawisk. Dane zostały zgrupowane w sposób ułatwiający porównanie osiągów w dwóch domenach: stabilizacji wahadła (kąt) oraz stabilizacji wózka (pozycja).



Rysunek 6.22. Analiza wrażliwości: zależność wskaźnika IAE_θ od zmiany masy wahadła dla poszczególnych regulatorów. Linia pionowa oznacza warunki nominalne.

Tabela 6.1. Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - warunki nominalne

Wskaźnik	PID-PID	PID-LQR	MPC	MPC-J2	Fuzzy-LQR	LMPC
MSE_θ	0,00011	0,00005	0,00006	0,00007	0,00017	0,00008
IAE_θ	0,04567	0,01805	0,02323	0,02848	0,04935	0,02992
$T_{s,\theta}$ [s]	1,60000	0,30000	1,20000	0,40000	1,50000	1,30000
MSE_x	0,00051	0,00038	0,00038	0,00073	0,00093	0,00039
$T_{s,x}$ [s]	2,00000	1,20000	2,20000	4,30000	3,30000	2,10000
E_u	0,95046	0,59229	0,55762	0,51499	2,85957	0,78994

Tabela 6.2. Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - zakłócenia zewnętrzne

Wskaźnik	PID-PID	PID-LQR	MPC	MPC-J2	Fuzzy-LQR	LMPC
MSE_θ	0,00146	0,00057	0,00058	0,00063	0,00037	0,00118
IAE_θ	0,30988	0,18541	0,18151	0,18607	0,14246	0,27259
$Max \theta $ [rad]	0,09006	0,06187	0,06246	0,06715	0,05189	0,08539
MSE_x	0,04382	0,00522	0,01843	0,04383	0,01059	0,01551
$Max x $ [m]	0,55997	0,26817	0,40938	0,56993	0,33723	0,39981
E_u	22,77583	12,56274	12,43920	12,26560	10,06415	22,74390

6. Analiza wyników

Tabela 6.3. Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - odporność na zmianę parametrów modelu (+100% masy wahadła)

Wskaźnik	PID-PID	PID-LQR	MPC	MPC-J2	Fuzzy-LQR	LMPC
MSE_{θ}	0,00015	0,00005	0,00007	0,00007	0,00020	0,00009
IAE_{θ}	0,06524	0,01854	0,02517	0,02530	0,05480	0,03379
$T_{s,\theta}$ [s]	2,80000	0,90000	1,30000	1,30000	1,60000	1,40000
MSE_x	0,00065	0,00038	0,00038	0,00038	0,00111	0,00040
$T_{s,x}$ [s]	3,10000	1,10000	2,00000	2,00000	3,30000	1,90000
E_u	1,49205	0,62520	0,64753	0,64818	3,74712	1,01039

6.5. Porównanie złożoności obliczeniowej

Istotnym kryterium oceny regulatorów, szczególnie w kontekście implementacji na platformach wbudowanych, jest czas obliczeń wymagany do wyznaczenia sygnału sterującego. W Tabeli 6.4 zestawiono średnie czasy wykonania jednej iteracji pętli sterowania dla poszczególnych algorytmów, zmierzone na komputerze z procesorem Intel Core i5-8250U (1.6 GHz).

Tabela 6.4. Średni czas obliczeń jednej iteracji pętli sterowania

Regulator	Czas [ms]	Względem PID
PID-PID	< 0,02	1×
PID-LQR	< 0,02	1×
Fuzzy-LQR	0,04	2×
LMPC	2,8	140×
MPC	11,3	565×
MPC-J2	14,7	735×

Regulatory klasyczne (PID-PID, PID-LQR) oraz rozmyty (Fuzzy-LQR) charakteryzują się zaniedbywalnym czasem obliczeń, rzędu mikrosekund. Wynika to z ich struktury algebraicznej — wyznaczenie sterowania sprowadza się do mnożenia macierzy i prostych operacji arytmetycznych.

W przypadku regulatorów predykcyjnych czas obliczeń jest o blisko trzy rzędy wielkości wyższy (ok. 3–15 ms), co wynika z konieczności rozwiązywania w każdym kroku zadania optymalizacji nieliniowej (lub kwadratowej dla LMPC). Wartości te pozostają jednak znacznie poniżej kroku symulacji ($\Delta t = 100$ ms), co potwierdza możliwość pracy MPC w czasie rzeczywistym dla rozpatrywanego obiektu. Należy jednak pamiętać, że przy implementacji na mikrokontrolerze czasy te mogą wzrosnąć nawet 10–100-krotnie, co może wymagać zastosowania uproszczonych wariantów MPC lub dedykowanych bibliotek optymalizacji.

7. Podsumowanie

Niniejsza praca koncentrowała się na opracowaniu środowiska symulacyjnego oraz przeprowadzeniu wielokryterialnej analizy porównawczej różnorodnych algorytmów sterowania dla nieliniowego układu odwróconego wahadła na wózku. Zrealizowano założone cele badawcze, implementując i poddając optymalizacji sześć strategii sterowania, od klasycznych PID, przez regulatory hybrydowe, aż po zaawansowane metody predykcyjne i rozmyte.

Przeprowadzone badania symulacyjne pozwoliły na sformułowanie istotnych wniosków dotyczących doboru metody sterowania do konkretnych zastosowań. Wyniki wskazują jednoznacznie, że nie istnieje uniwersalny regulator dominujący we wszystkich aspektach. Wybór odpowiedniego algorytmu zawsze wiąże się z fundamentalnym kompromisem inżynierskim między jakością regulacji, definiowaną jako precyzja utrzymania punktu pracy, a kosztami eksplotacyjnymi i obciążeniem układu wykonawczego.

Wśród badanych metod szczególną skutecznością w zadaniach wymagających najwyższej precyzji wyróżnił się system rozmyty Fuzzy-LQR, który najefektywniej niwelował wpływ zakłóceń zewnętrznych, choć kosztem większego zużycia energii. Z kolei w warunkach nominalnych najbardziej ekonomicznym i bezpiecznym dla mechaniki układu rozwiązaniem okazało się sterowanie predykcyjne MPC, które w sposób jawny uwzględnia ograniczenia fizyczne napędu. Jako rozwiązanie uniwersalne, łączące zalety obu podejść, wskazać można regulator hybrydowy PID-LQR, oferujący dobry balans między wydajnością a energochlonnością. Badania potwierdziły również, że kluczowym czynnikiem wpływającym na stabilność i odporność układu jest właściwy dobór funkcji kosztu i parametrów regulatora.

Bibliografia

- [1] T. P. Azevedo Perdicoúlis i P. Lopes dos Santos, "The Secrets of Segway Revealed to Students: Revisiting the Inverted Pendulum", *MATEC Web of Conferences*, t. 211, s. 15 003, 2018. DOI: 10.1051/matecconf/201821115003
- [2] Q. H. Ngo i K. S. Hong, "Sliding-Mode Antisway Control of an Offshore Container Crane", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, t. 17, nr 2, s. 201–209, 2012. DOI: 10.1109/TMECH.2010.2100045
- [3] L. B. Prasad, B. Tyagi i H. O. Gupta, "Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input", *International Journal of Automation and Computing*, t. 11, nr 6, s. 661–670, 2014. DOI: 10.1007/s11633-014-0818-1
- [4] E. S. Varghese, A. K. Vincent i V. Bagyaveereshwaran, "Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC", w: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, t. 263, 2017, s. 052 007. DOI: 10.1088/1757-899X/263/5/052007
- [5] T.-V.-A. Nguyen i N.-H. Tran, "An Integrated Controller for Stabilizing an Inverted Pendulum: LQR and Fuzzy Logic Control with Observer-Based State Estimation", *Journal of Applied Science and Engineering*, t. 27, nr 5, s. 2493–2502, 2024. DOI: 10.6180/jase.202405_27(5).0006
- [6] A. Jezierski, J. Mozaryn i D. Suski, "A Comparison of LQR and MPC Control Algorithms of an Inverted Pendulum", w: *Trends in Advanced Intelligent Control, Optimization and Automation*, seria Advances in Intelligent Systems and Computing, t. 577, Cham: Springer, 2017, s. 65–76. DOI: 10.1007/978-3-319-60699-6_8
- [7] E. F. Camacho i C. Bordons, *Model Predictive Control*, 2 wyd. London: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5
- [8] A. Mills, A. Wills i B. Ninness, "Nonlinear Model Predictive Control of an Inverted Pendulum", w: *Proceedings of the American Control Conference*, 2009, s. 2335–2340. DOI: 10.1109/ACC.2009.5160600
- [9] A. I. Roose, M. Smiley i A. Y. Ali, "Fuzzy-logic control of an inverted pendulum on a cart", *Computers & Electrical Engineering*, t. 63, s. 260–272, 2017. DOI: 10.1016/j.compeleceng.2017.05.016
- [10] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt i in., "Array programming with NumPy", *Nature*, t. 585, s. 357–362, 2020. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2
- [11] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant i in., "SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python", *Nature Methods*, t. 17, s. 261–272, 2020. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2

Wykaz symboli i skrótów

- Δt – krok czasowy symulacji [s]
 Δu – przyrost sygnału sterującego [N]
 $\dot{\theta}$ – prędkość kątowa wahadła [rad/s]
 \dot{x} – prędkość wózka [m/s]
 μ – funkcja przynależności (logika rozmyta)
 θ – kąt odchylenia wahadła od pionu [rad]
 F_w – siła zakłócająca (wiatr) [N]
 g – przyspieszenie grawitacyjne [m/s²]
 G – wzmocnienie globalne regulatora rozmytego
 J – funkcja kosztu (wskaźnik jakości)
 K – wektor wzmocnień regulatora LQR
 K_d – wzmocnienie członu różniczkującego
 K_p – wzmocnienie członu proporcjonalnego
 l – długość wahadła [m]
 M – masa wózka [kg]
 m – masa wahadła [kg]
 N_c – horyzont sterowania (MPC)
 N_p – horyzont predykcji (MPC)
 Q – macierz wag stanu
 R – macierz wag sterowania
 R_{abs} – kara za bezwzględną wartość sterowania (MPC-J2)
 R_Δ – kara za przyrosty sterowania
 t_s – czas ustalania [s]
 u – sygnał sterujący (siła działająca na wózek) [N]
 u_{sat} – ograniczenie (saturacja) sygnału sterującego [N]
 w_i – waga i -tej reguły rozmytej
 x – położenie wózka [m]
 x_{ref} – wartość zadana (referencyjna)
IAE – Integral of Absolute Error – całka z błędem bezwzględnego
ISE – Integral of Squared Error – całka z błędem kwadratowym
LQR – Linear-Quadratic Regulator – regulator liniowo-kwadratowy
MAE – Mean Absolute Error – średni błąd bezwzględny
MPC – Model Predictive Control – sterowanie predykcyjne
MSE – Mean Squared Error – średni błąd kwadratowy
PD – regulator proporcjonalno-różniczkujący
PID – regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący
LMPC – Linear Model Predictive Control – liniowe sterowanie predykcyjne
SLSQP – Sequential Least Squares Programming – algorytm optymalizacji

SNR – Signal-to-Noise Ratio – stosunek sygnału do szumu

T-S – Takagi-Sugeno – typ systemu wnioskowania rozmytego

Spis rysunków

2.1	Źródło: [3]. Schemat układu odwróconego wahadła na wózku.	13
2.2	Schemat blokowy nieliniowego modelu wahadła w przestrzeni stanów.	16
2.3	Symulacja odpowiedzi swobodnej układu (z uwzględnionym tłumieniem) na małe wychylenie początkowe. Układ opuszcza niestabilny punkt równowagi ($\theta \approx 0$) i stabilizuje się w pozycji wiszącej ($\theta = \pi$).	18
3.1	Architektura środowiska symulacyjnego.	19
3.2	Przykładowa realizacja stochastycznego procesu zakłócenia zewnętrznego działającego na wahadło w czasie symulacji.	21
3.3	Zrzut ekranu z animacji realizowanej w środowisku Python (biblioteka Matplotlib). Widoczny wózek, wahadło oraz zakres ruchu.	22
4.1	Schemat blokowy regulatora PID o strukturze równoległej.	23
4.2	Przebiegi sygnałów dla regulatora PID przy nieoptimalnych nastawach ($K_{p,\theta} = -10, K_{i,\theta} = -1, K_{d,\theta} = -3, K_{p,x} = -1, K_{i,x} = -0, 1, K_{d,x} = -3$).	25
4.3	Regulator PID z nastawami z przeszukiwania siatki ($K_{p,\theta} = -95, K_{i,\theta} = 0, K_{d,\theta} = -14, K_{p,x} = -16, K_{i,x} = 0, K_{d,x} = -14$).	26
4.4	Regulator PID nastawiony ręcznie ($K_{p,\theta} = -40, K_{i,\theta} = -1, K_{d,\theta} = -8, K_{p,x} = -1, K_{p,x} = -0, 1, K_{d,x} = -3$).	27
4.5	Schemat blokowy hybrydowego regulatora PID-LQR.	28
4.6	Regulator LQR z wagami jednostkowymi ($Q = I, R = 1$, PID: $K_{p,x} = -4, 5, K_{i,x} = 0, K_{d,x} = -3$).	30
4.7	Regulator LQR strojony metodą Brysona ($Q = \text{diag}([25, 1, 4, 1]), R = 10$, PID: $K_{p,x} = -4, 5, K_{p,x} = 0, K_{d,x} = -3$).	31
4.8	Zoptymalizowany regulator PID-LQR bez członu całkującego ($Q = \text{diag}([200, 3, 35, 40]), R = 1$, PID: $K_{p,x} = -7, 0, K_{i,x} = 0, 1, K_{d,x} = -3, 0$).	32
4.9	Schemat blokowy regulatora MPC z wewnętrznym modelem predykcyjnym. .	33
4.10	Regulator MPC z krótkim horyzontem ($N = 5, N_u = 2, Q = \text{diag}([10, 1, 10, 1]), R = 0, 1$).	34
4.11	Regulator MPC z ręcznie dobranymi wagami ($N = 10, N_u = 3, Q = \text{diag}([50, 10, 50, 10]), R = 0, 1$).	35
4.12	Zoptymalizowany regulator MPC ($N = 12, N_u = 4, Q = \text{diag}([158, 41, 43, 20]), R = 0, 086$).	36
4.13	Regulator MPC-J2 z wysoką karą za energię ($R_{\text{abs}} = 10$).	38
4.14	Regulator MPC-J2 z ręcznie zmniejszoną karą ($R_{\text{abs}} = 5$).	39
4.15	Zoptymalizowany regulator MPC-J2 ($R_{\text{abs}} = 1$).	40

4.16 Przebiegi czasowe dla liniowego regulatora MPC ($N = 12$, $N_u = 4$, $Q = \text{diag}([15, 1, 15, 1])$, $R = 0, 1$).	42
4.17 Schemat blokowy regulatora Fuzzy-LQR z równoległą strukturą hybrydową.	43
4.18 Trójkątne funkcje przynależności dla czterech zmiennych stanu regulatora Fuzzy-LQR. Każda zmienna posiada dwa zbiory rozmyte: „Mały błąd” (aktywny w pobliżu zera) oraz „Duży błąd” (aktywny przy większych odchyleniach od punktu równowagi).	43
4.19 Regulator Fuzzy-LQR z wąskimi funkcjami przynależności (zakres „mały błąd” dla $\theta: [-0.02, 0.02]$ rad).	45
4.20 Regulator Fuzzy-LQR z ręcznie dobranymi parametrami ($F_\theta = 20$, $F_{\dot{\theta}} = 5$, $F_x = 10$, $F_{\dot{x}} = 2$, zakres: $[-0.2, 0.2]$ rad).	46
4.21 Zoptymalizowany regulator Fuzzy-LQR ($F_\theta = 100.0$, $F_{\dot{\theta}} = 5.27$, $F_x = 19.82$, $F_{\dot{x}} = 19.25$, $G = 0.36$).	47
6.1 Przebieg kąta θ dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).	53
6.2 Przebieg pozycji x dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).	54
6.3 Sygnał sterujący u dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).	54
6.4 Przebieg kąta θ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).	56
6.5 Przebieg pozycji x dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).	56
6.6 Sygnał sterujący u dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).	57
6.7 Przebieg kąta θ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).	58
6.8 Przebieg pozycji x dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).	58
6.9 Sygnał sterujący u dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).	59
6.10 Przebieg kąta θ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.	60
6.11 Dryf pozycji x pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.	60
6.12 Sygnał sterujący u pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.	61
6.13 Przebieg kąta θ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.	62
6.14 Dryf pozycji x pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.	62
6.15 Sygnał sterujący u pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.	63
6.16 Przebieg kąta θ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.	64
6.17 Dryf pozycji x pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.	64
6.18 Sygnał sterujący u pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.	65
6.19 Przebieg kąta θ przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).	66
6.20 Przebieg pozycji x przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).	67
6.21 Sygnał sterujący u przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).	67

6.22 Analiza wrażliwości: zależność wskaźnika IAE_θ od zmiany masy wahadła dla poszczególnych regulatorów. Linia pionowa oznacza warunki nominalne. 69

Spis tabel

3.1	Parametry fizyczne modelu przyjęte w symulacji	20
6.1	Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - warunki nominalne	69
6.2	Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - zakłócenia zewnętrzne	69
6.3	Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - odporność na zmianę parametrów modelu (+100% masy wahadła)	70
6.4	Średni czas obliczeń jednej iteracji pętli sterowania	70