

# **Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku**

Autor: Adam Sokołowski

Opiekun: mgr inż. Robert Nebeluk

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych PW

Automatyka i Robotyka

08.01.2026

## Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

## Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

## Cel pracy

- ▶ Stworzenie środowiska symulacyjnego do testowania regulatorów
- ▶ Implementacja i optymalizacja pięciu różnych strategii sterowania
- ▶ Wielokryterialne porównanie algorytmów regulacji
- ▶ Ocena odporności układów na zakłócenia i zmienność parametrów

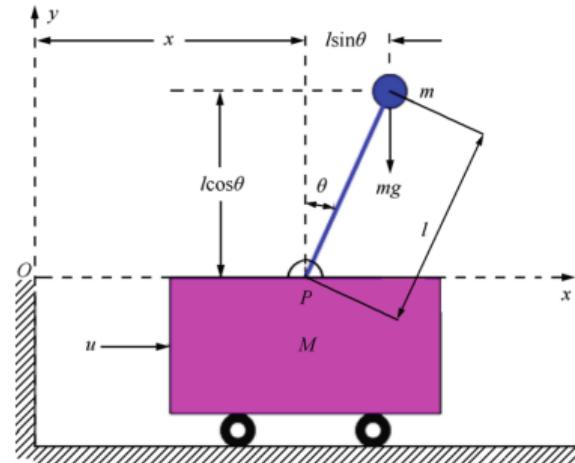
### Zaimplementowane regulatory:

- ▶ PD–PD (kaskadowy)
- ▶ PD–LQR (hybrydowy)
- ▶ MPC (predykcyjny)
- ▶ MPC-J2 (alternatywna funkcja kosztu)
- ▶ Fuzzy-LQR (rozmyty Takagi–Sugeno)

## Zastosowanie

Odwrócone wahadło jest klasycznym benchmarkiem w teorii sterowania:

- ▶ Robotyka mobilna (roboty balansujące)
- ▶ Sterowanie rakiet i pojazdów kosmicznych
- ▶ Stabilizacja pojazdów dwukołowych
- ▶ Układy suwnicowe



## Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

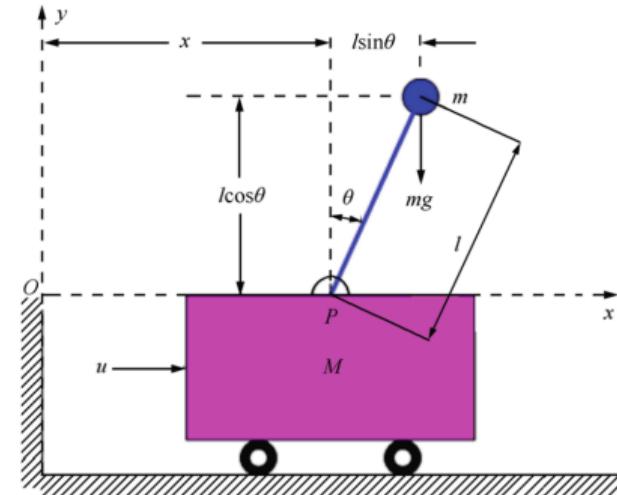
Analiza odporności

Podsumowanie

# Charakterystyka układu

## Cechy układu:

- ▶ Wysoka nieliniowość
- ▶ Niestabilny w punkcie pracy
- ▶ System niedoaktuowany (1 wejście, 2 wyjścia)
- ▶ Duża wrażliwość na zakłócenia
- ▶ Pośrednie sterowanie wahadłem przez wózek



## Równania stanu układu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{u \cos \theta - (M+m)g \sin \theta + ml(\cos \theta \sin \theta)\dot{\theta}^2}{ml \cos^2 \theta - (M+m)l} \\ \dot{x} \\ \frac{u + ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \sin \theta}{M+m - m \cos^2 \theta} \end{bmatrix}$$

**Parametry modelu:**

- ▶  $M = 1.0$  kg – masa wózka
- ▶  $m = 0.23$  kg – masa wahadła
- ▶  $l = 0.5$  m – długość wahadła
- ▶  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> – przyspieszenie ziemskie

## Liniaryzacja w punkcie równowagi

Model liniowy dla małych wychyleń wahadła ( $\theta \approx 0$ ):

$$\frac{d\delta x}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{MI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{MI} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \delta u$$

Model liniowy wykorzystywany jest przez:

- ▶ Regulator LQR (wyznaczanie optymalnego wzmacnienia)
- ▶ Regulator MPC (predykcja zachowania układu)

## Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

# Regulator PD–PD (kaskadowy)

Układ kaskadowy z dwóch regulatorów PD:

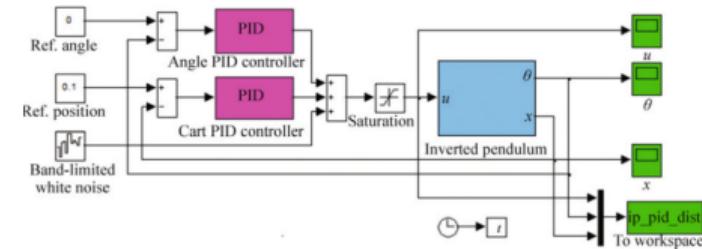
**Pętla wewnętrzna (kąt):**

$$u_\theta = K_{p\theta} e_\theta + K_{d\theta} \dot{e}_\theta$$

**Pętla zewnętrzna (pozycja):**

$$\theta_{ref} = K_{px} e_x + K_{dx} \dot{e}_x$$

- + Prosta implementacja, niski koszt obliczeniowy
- Wymaga starannego strojenia obu pętli



# Regulator PD–LQR (hybrydowy)

Połączenie LQR ze sprzężeniem od pozycji (PD):

**Optymalne wzmacnianie LQR:**

$$K = R^{-1}B^\top P$$

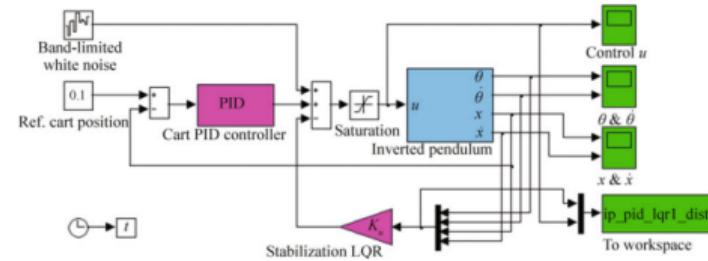
gdzie  $P$  z równania Riccatiego:

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0$$

**Sterowanie hybrydowe:**

$$u = -Kx + K_{px}e_x + K_{dx}\dot{e}_x$$

- + Optymalna stabilizacja kąta
- + Dobra kontrola pozycji



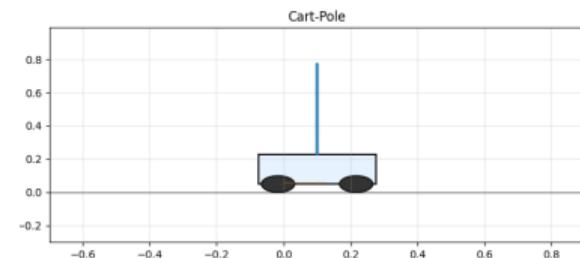
# Regulator MPC (predykcyjny)

Minimalizacja funkcji kosztu na horyzoncie predykcji:

$$J = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{ref})^\top Q (x_k - x_{ref}) + R \sum_{k=1}^{N_u} (\Delta u_k)^2$$

## Parametry:

- ▶  $N = 20$  – horyzont predykcji
- ▶  $N_u = 10$  – horyzont sterowania
- ▶  $Q$  – macierz wag błędów stanu
- ▶  $R$  – waga kary za zmiany sterowania
- + Jawne uwzględnienie ograniczeń
- Wysoki koszt obliczeniowy



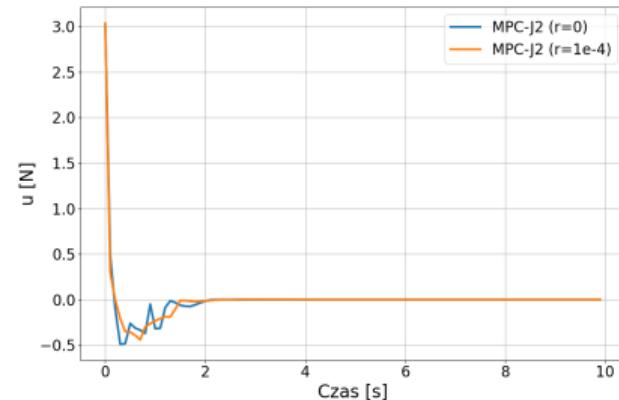
## Regulator MPC-J2 (alternatywna funkcja kosztu)

Zmodyfikowana funkcja kosztu:

$$J = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{ref})^T Q (x_k - x_{ref}) + r \sum (\Delta u_k)^2 + r_{abs} \sum u_k^2$$

**Różnice względem MPC:**

- ▶ Jawne wagi dla prędkości  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{x}$  w macierzy  $Q$
  - ▶ Parametr  $r_{abs}$  – kara za bezwzględną wartość  $u$
  - ▶ Bezpośrednia minimalizacja energii sterowania
- + Płynniejsze sterowanie  
- Wrażliwość na dobór  $r_{abs}$  przy zakłóceniach



*Wpływ  $r_{abs}$  na sterowanie*

# Regulator Fuzzy-LQR (hybrydowy)

Prawo sterowania (hybrydowe):

$$u(t) = u_{\text{LQR}}(t) + u_{\text{Fuzzy}}(t)$$

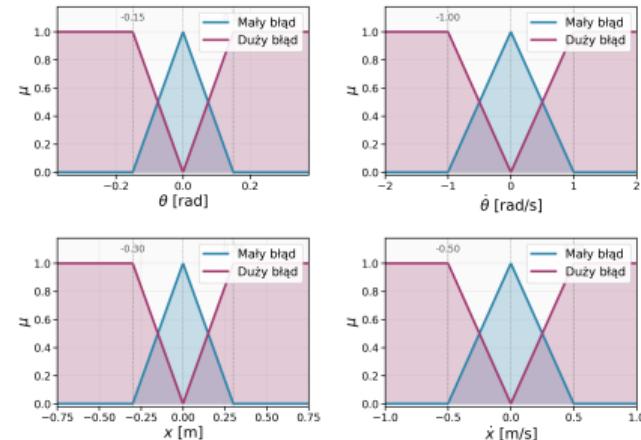
Część rozmyta (Takagi-Sugeno):

$$u_{\text{Fuzzy}} = \frac{\sum_{i=1}^M w_i(\theta) \cdot (-K_i x)}{\sum_{i=1}^M w_i(\theta)}$$

gdzie  $w_i(\theta)$  to stopień aktywacji reguły (z funkcji przynależności).

Koncepcja „Gain Scheduling”:

- ▶ **Mały błąd:**  $w_i$  aktywuje łagodne reguły (jak LQR).
- ▶ **Duży błąd:**  $w_i$  aktywuje agresywne reguły (szybki powrót).



Funkcje przynależności  $w_i(\theta)$

## Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

## Metodyka badań

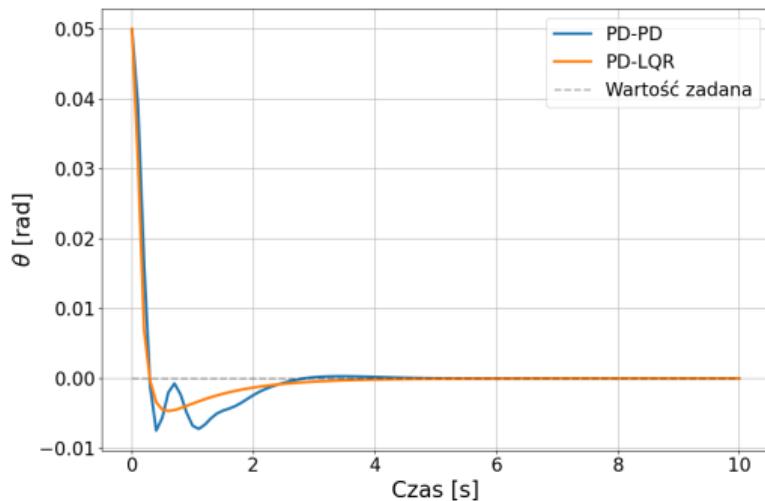
### Scenariusze testowe:

1. **Warunki nominalne** – stabilizacja z wychylenia początkowego  $\theta_0 = 0.05$  rad
2. **Zakłócenia zewnętrzne** – losowa siła działająca na wahadło
3. **Zmiana parametrów** – +10% masy wahadła (test odporności)

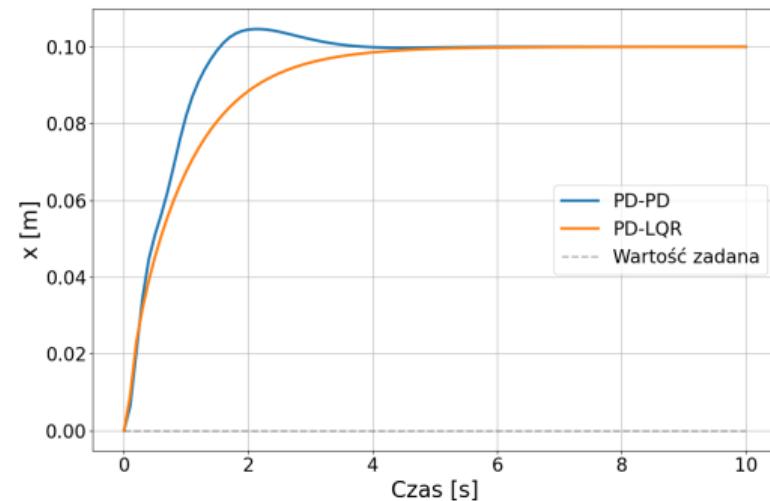
### Wskaźniki jakości:

- ▶  $MSE_\theta$ ,  $MSE_x$  – błędy średniokwadratowe
- ▶  $IAE_\theta$  – całkowy błąd bezwzględny
- ▶  $T_s$  – czas regulacji
- ▶  $E_u$  – energia sterowania
- ▶  $\text{Max}|\theta|$ ,  $\text{Max}|x|$  – maksymalne wychylenia
- ▶  $t_{comp}$  – czas obliczeń

## Warunki nominalne – regulatory klasyczne



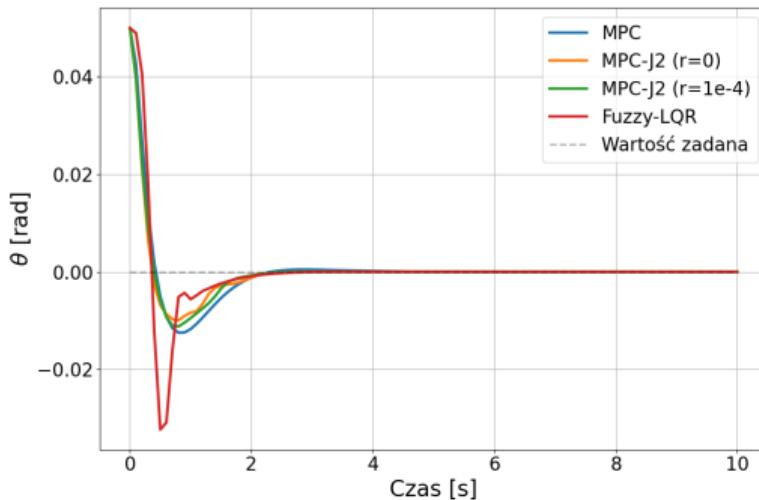
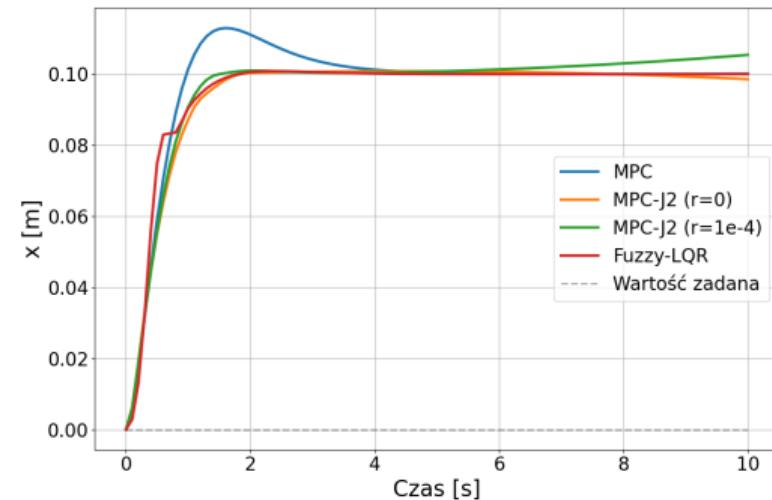
Przebieg kąta  $\theta$



Przebieg pozycji  $x$

**Obserwacje:** PD-LQR:  $T_s = 0.2$  s (33% szybszy od PD), ale wyższa energia ( $E_u = 1.48$  vs 0.85)

## Warunki nominalne – regulatory zaawansowane

Przebieg kąta  $\theta$ Przebieg pozycji  $x$ 

**Obserwacje:** MPC: najwyższa energia ( $E_u = 0.56$ ), płynne sterowanie.

Fuzzy-LQR: szybka stabilizacja, ale wysoka energia ( $E_u = 2.75$ , +394% vs MPC)

## Zakłóczenia zewnętrzne – model

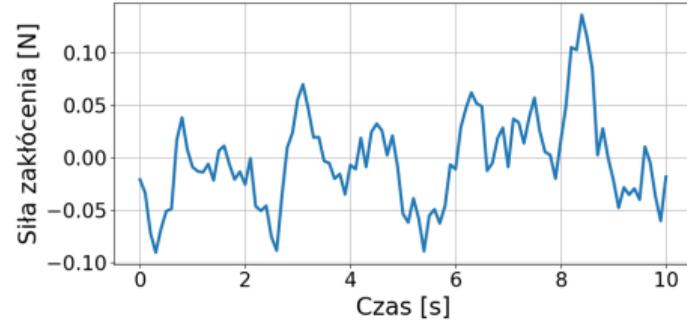
**Model zakłócenia:**

$$w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \frac{\text{power}}{T_s}$$

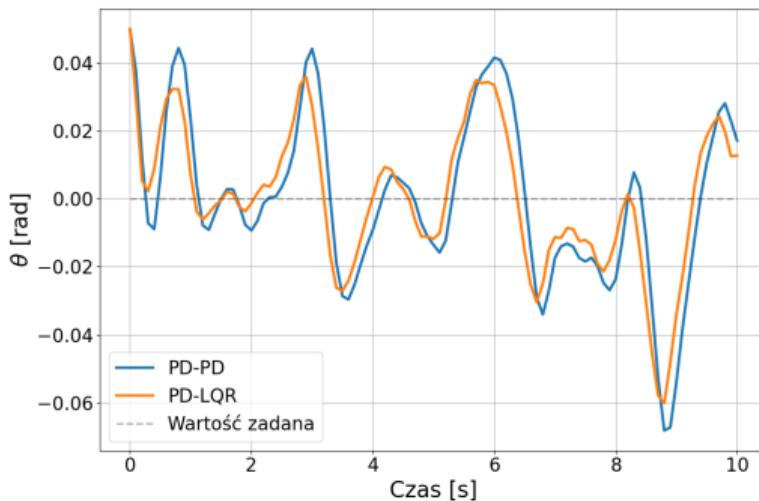
**Wygładzanie:**

$$F_{w,k} = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} w_{k-i}$$

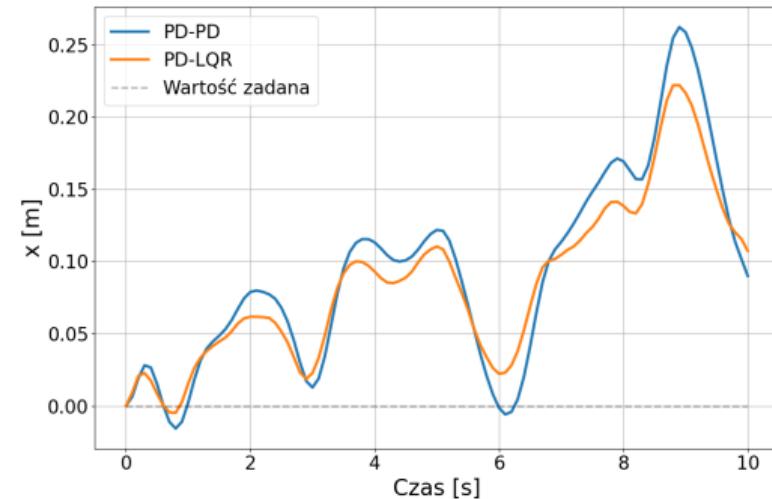
Symuluje losowe zakłócenia zewnętrzne (np. podmuchy wiatru) działające bezpośrednio na wahadło.



## Zakłóczenia – regulatory klasyczne



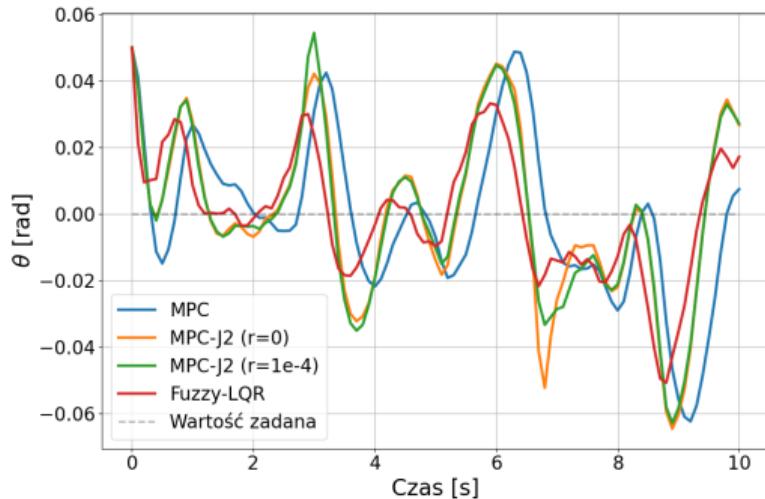
*Przebieg kąta  $\theta$*



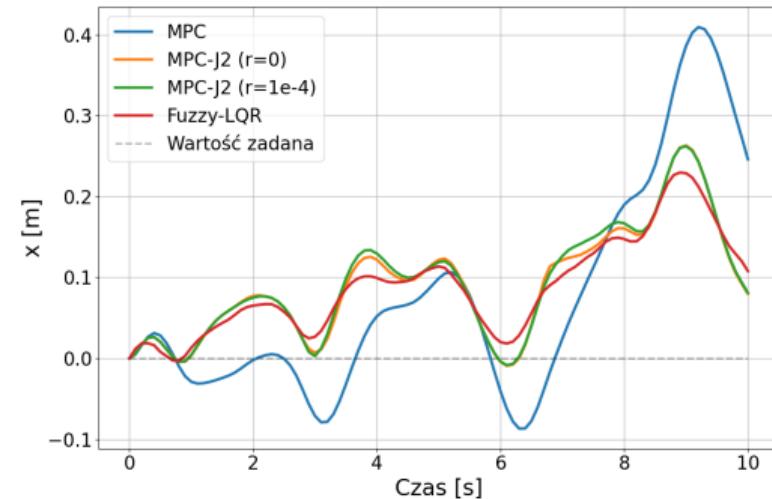
*Dryf pozycji  $x$*

**Obserwacje:** PD-LQR lepiej stabilizuje kąt ( $\text{Max}|\theta| = 0.060 \text{ vs } 0.068 \text{ rad}$ ) i redukuje dryf ( $\text{Max}|x| = 0.22 \text{ vs } 0.26 \text{ m}$ ) przy niższej energii ( $E_u = 11.7 \text{ vs } 15.4$ )

## Zakłóczenia – regulatory zaawansowane



*Przebieg kąta  $\theta$*



*Dryf pozycji  $x$*

**Obserwacje:** Fuzzy-LQR: najlepsza precyzja ( $\text{Max}|\theta| = 0.05 \text{ rad}$ ), ale  $E_u = 25.4$   
 MPC: największy dryf ( $\text{Max}|x| = 0.41 \text{ m}$ ), ale kontrolowana energia ( $E_u = 12.4$ )

## Zestawienie wyników – warunki nominalne

Wskaźnik	PD	PD-LQR	MPC	MPC-J2	Fuzzy
$MSE_{\theta} \times 10^5$	4.66	<b>3.65</b>	6.19	5.15	9.32
$T_{s,\theta}$ [s]	0.30	<b>0.20</b>	1.20	0.30	0.80
$T_{s,x}$ [s]	1.20	2.20	2.20	1.10	<b>1.00</b>
$E_u$	0.85	1.48	<b>0.56</b>	0.59	2.75

### Wnioski:

- ▶ PD-LQR: najszybsza stabilizacja kąta
- ▶ MPC: najniższe zużycie energii (o 62% mniej niż Fuzzy-LQR)
- ▶ Fuzzy-LQR: najszybsza stabilizacja pozycji

## Zestawienie wyników – zakłócenia zewnętrzne

Wskaźnik	PD	PD-LQR	MPC	MPC-J2	Fuzzy
$MSE_{\theta} \times 10^4$	6.01	4.44	5.78	6.59	<b>3.57</b>
$\text{Max} \theta  \text{ [rad]}$	0.068	0.060	0.062	0.065	<b>0.051</b>
$\text{Max} x  \text{ [m]}$	0.26	<b>0.22</b>	0.41	0.26	0.23
$E_u$	15.4	<b>11.7</b>	12.4	17.3	25.4

### Wnioski:

- ▶ Fuzzy-LQR: najlepsza precyza kątowa (minimalne wychylenia)
- ▶ PD-LQR: najlepsza ekonomia przy zakłóceniami, lepszy od MPC
- ▶ MPC: największy dryf pozycji (oszczędza energię kosztem pozycji)

## Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

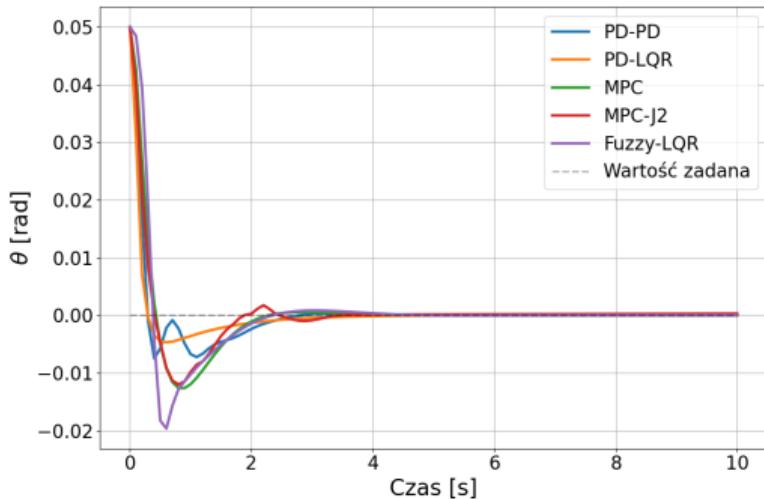
Regulatory

Wyniki eksperymentów

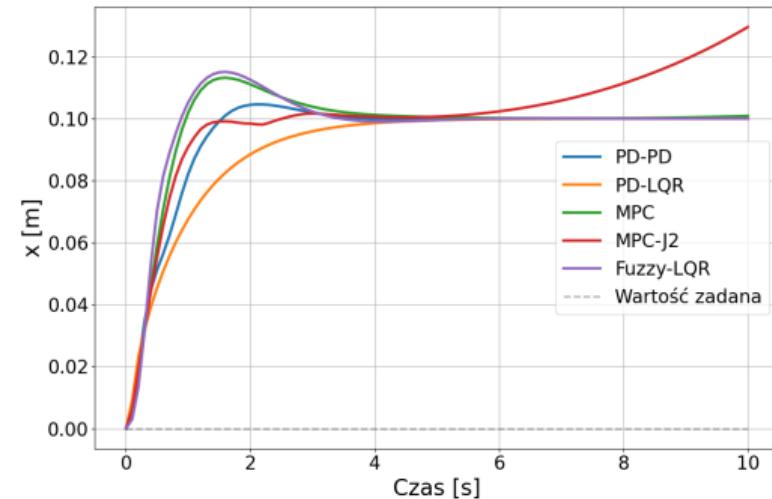
Analiza odporności

Podsumowanie

## Test odporności – zmiana parametrów modelu



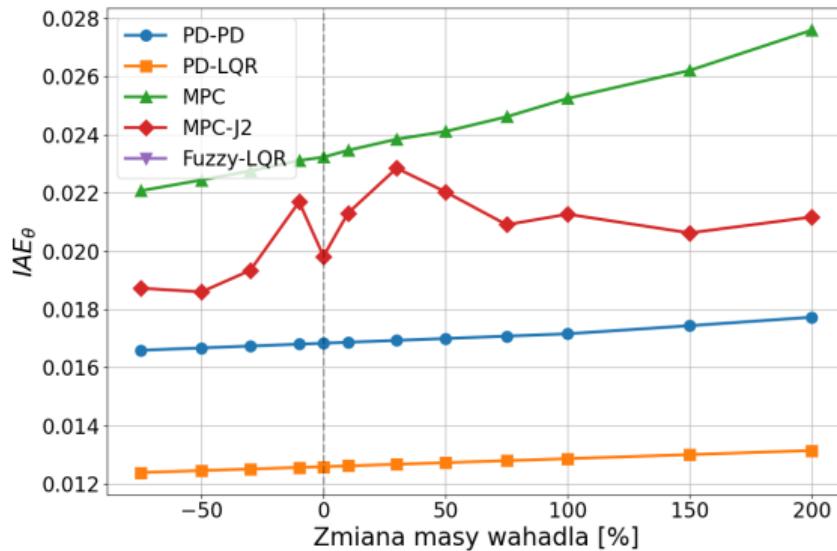
Przebieg kąta (+10% masy wahadła)



Przebieg pozycji (+10% masy wahadła)

**Obserwacje:** Wszystkie regulatory zachowały stabilność. Regulatory MPC wykazują największą wrażliwość (model wewnętrzny różni się od rzeczywistego obiektu).

## Analiza wrażliwości na zmianę masy



### Zakres testów:

–75% do +200% masy nominalnej

### Wnioski:

- ▶ Regulatory klasyczne (PD, LQR) – płaska charakterystyka, niska wrażliwość
- ▶ MPC – najwyższe  $IAE_\theta$ , wrażliwość na błąd modelu
- ▶ Wszystkie regulatory stabilne w całym zakresie

## Złożoność obliczeniowa

Regulator	Czas [ms]	Względem PD
PD-PD	< 0.01	1×
PD-LQR	0.02	2×
Fuzzy-LQR	0.05	5×
MPC	2.5	250×
MPC-J2	2.8	280×

- ▶ Regulatory klasyczne i rozmyte: czas rzędu mikrosekund
- ▶ MPC:  $\sim 2.5$  ms (rozwiązywanie optymalizacji w każdym kroku)
- ▶ Wszystkie regulatory mogą pracować w czasie rzeczywistym ( $\Delta t = 100$  ms)

## Plan prezentacji

Cel pracy

Model obiektu

Regulatory

Wyniki eksperymentów

Analiza odporności

Podsumowanie

## Główne wnioski

1. **Brak uniwersalnego regulatora** – każdy ma swoje zalety i wady
2. **Najwyższa precyzja: Fuzzy-LQR**
  - ▶ Minimalne wychylenia kątowe ( $\text{Max}|\theta| = 0.05 \text{ rad}$ )
  - ▶ Wysoki koszt energetyczny ( $E_u = 25.4$ )
3. **Najlepsza ekonomia: MPC**
  - ▶ Najniższa energia w warunkach nominalnych ( $E_u = 0.56$ )
  - ▶ Płynne, przewidywalne sterowanie
4. **Uniwersalność: PD-LQR**
  - ▶ Lepszy od MPC przy zakłócenach (pozycja + energia)
  - ▶ Niska złożoność obliczeniowa
5. **Wrażliwość na funkcję kosztu** – MPC-J2 pokazuje znaczenie doboru wag

## Realizacja celów pracy

### Zrealizowane cele:

- ✓ Środowisko symulacyjne w Pythonie
- ✓ 5 zaimplementowanych regulatorów z optymalizacją parametrów
- ✓ Wielokryterialna analiza porównawcza
- ✓ Testy odporności na zakłócenia i zmianę parametrów
- ✓ Kompleksowa dokumentacja wyników

### Kierunki rozwoju:

- ▶ Algorytm swing-up (wprowadzanie z pozycji dolnej)
- ▶ Weryfikacja na stanowisku laboratoryjnym
- ▶ Porównanie z metodami uczenia ze wzmacnieniem

Dziękuję za uwagę

## Pytania?

**Autor:** Adam Sokołowski  
**Opiekun:** mgr inż. Robert Nebeluk  
**Kierunek:** Automatyka i Robotyka

# **Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku**

Autor: Adam Sokołowski

Opiekun: mgr inż. Robert Nebeluk

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych PW

Automatyka i Robotyka

08.01.2026