

Politechnika Warszawska

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI
I TECHNIK INFORMACYJNYCH



Instytut Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej

Praca dyplomowa inżynierska

na kierunku Automatyka i Robotyka

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Adam Sokołowski

Numer albumu 324892

promotor
Robert Nebeluk

WARSZAWA 2025

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Streszczenie. W pracy przeprowadzono analizę i porównanie wybranych metod sterowania odwróconym wahadłem na wózku — klasycznym przykładem nieliniowego i niestabilnego układu dynamicznego. Celem badań było opracowanie środowiska symulacyjnego umożliwiającego ocenę skuteczności różnych algorytmów regulacji oraz ich odporności na zakłócenia zewnętrzne. W ramach pracy zaimplementowano i przetestowano następujące podejścia: klasyczny regulator kaskadowy PID–PID, układ złożony PID–LQR, regulator LQR dla całego systemu, sterowanie predykcyjne modelowe MPC bez ograniczeń (MPC_NO) w kilku wariantach funkcji kosztu, oraz regulator rozmyty Takagi–Sugeno.

Dla każdego z rozważanych regulatorów wykonano symulacje numeryczne w warunkach nominalnych oraz w obecności zakłóceń poziomych działających na wózek. Analizie poddano przebiegi kątów i położeń, a także obliczono wskaźniki jakości regulacji: średni błąd kwadratowy (MSE), średni błąd bezwzględny (MAE), czas regulacji, przeregulowanie, energię sygnału sterującego oraz średni czas obliczeń. Wyniki przedstawiono w postaci wykresów i tabel umożliwiających obiektywne porównanie metod.

Otrzymane rezultaty wskazują, że włączenie metod optymalnych i predykcyjnych pozwala znacząco poprawić stabilność oraz odporność układu w porównaniu z klasycznym sterowaniem PID. Regulator MPC zapewniał najkrótszy czas stabilizacji przy zachowaniu umiarkowanego kosztu sterowania, natomiast regulator rozmyty Takagi–Sugeno wykazał dobrą adaptacyjność przy zmiennych warunkach pracy. Opracowane środowisko może stanowić podstawę do dalszych badań nad sterowaniem nieliniowym, w tym nad integracją metod rozmytych, optymalnych i predykcyjnych.

Słowa kluczowe: odwrócone wahadło, regulator PID, regulator LQR, regulator MPC, Takagi–Sugeno, sterowanie predykcyjne, sterowanie optymalne, zakłócenia, stabilizacja, symulacja, układ nieliniowy

Effective stabilisation system of the inverted pendulum on the cart

Abstract. This thesis presents the analysis and comparison of several control methods for an inverted pendulum on a cart — a classical benchmark of nonlinear and unstable dynamics. The aim of the study was to develop a simulation framework enabling an objective evaluation of different control algorithms and their robustness to external disturbances. The implemented control strategies included a classical cascade PID–PID controller, a combined PID–LQR scheme, a full-state LQR controller, a model predictive controller without constraints (MPC_NO) with alternative cost functions, and a fuzzy Takagi–Sugeno controller.

For each controller, numerical simulations were performed under nominal conditions and under horizontal disturbance forces acting on the cart. The responses of the pendulum angle and cart position were analyzed, and several performance indices were calculated: mean squared error (MSE), mean absolute error (MAE), settling time, overshoot, control energy, and average computation time. The results were visualized in plots and summarized in tables, allowing a comprehensive comparison of control quality and computational efficiency.

The obtained results show that introducing optimal and predictive control significantly improves system stability and robustness compared to classical PID regulation. The MPC controller provided the fastest stabilization with a moderate control effort, while the Takagi–Sugeno fuzzy controller demonstrated good adaptability under varying operating conditions. The developed simulation environment constitutes a solid foundation for further research on nonlinear control, particularly on hybrid combinations of fuzzy, optimal, and predictive methods.

Keywords: inverted pendulum, PID controller, LQR controller, MPC controller, Takagi–Sugeno, predictive control, optimal control, disturbances, stabilization, nonlinear system, simulation

Spis treści

1. Wstęp	7
1.1. Cel i zakres pracy	8
1.2. Przegląd literatury	9
2. Model matematyczny układu	10
2.1. Opis fizyczny i założenia upraszczające	10
2.2. Analiza kinematyczna	10
2.3. Równania dynamiki układu	11
2.3.1. Bilans sił w kierunku poziomym	11
2.3.2. Bilans momentów sił	12
2.4. Nieliniowy model w przestrzeni stanów	12
2.5. Liniaryzacja modelu w punkcie pracy	13
3. Środowisko	15
4. Metody sterowania	16
4.1. Regulator PID (dla kąta wahadła)	16
4.2. Regulator PD (dla pozycji wózka)	16
4.3. Regulator LQR (Linear-Quadratic Regulator)	16
4.4. Regulator złożony (Composite Controller)	17
5. Eksperymenty	18
5.1. Opis przeprowadzonych eksperymentów	18
5.2. Dobór parametrów regulatorów	19
5.3. Porównanie jakości regulacji - wskaźniki błędów	21
5.4. Podsumowanie eksperymentów	21
Bibliografia	23
Wykaz symboli i skrótów	24
Spis rysunków	24
Spis tabel	24

1. Wstęp

Odwrócone wahadło na wózku jest klasycznym przykładem nieliniowego, niestabilnego układu mechanicznego, wykorzystywanym powszechnie zarówno w dydaktyce, jak i w badaniach nad zaawansowanymi technikami sterowania. Mimo że geometria i parametry fizyczne obiektu są stosunkowo proste, układ ten pozostaje wyzwaniem w zakresie stabilizacji i wymaga precyzyjnej regulacji w czasie rzeczywistym. Jego charakterystyczna cecha — podwzbudność (ang. *underactuated system*), oznaczająca mniejszą liczbę wejść sterujących niż wyjść — oraz silna wrażliwość na zakłócenia sprawiają, że nawet niewielkie odchylenia mogą prowadzić do gwałtownego narastania błędów i utraty równowagi.

Znaczenie tego modelu wykracza daleko poza cele czysto akademickie. Odwrócone wahadło na wózku służy jako kanoniczny *benchmark* dla metod sterowania i estymacji stanu, ponieważ łączy w sobie trudności typowe dla systemów rzeczywistych: nieliniowość, niestabilność w otwartym układzie sterowania, ograniczenia aktuatora oraz niepewność parametrów. Umożliwia to weryfikację algorytmów w sytuacjach, w których klasyczne założenia teorii liniowej przestają obowiązywać, a układ wymaga adaptacji lub podejścia optymalnego.

Model ten posiada liczne analogie w praktyce inżynierskiej. Jego dynamika odwzorowuje wiele złożonych zjawisk fizycznych i konstrukcji technicznych, w tym:

- stabilizację robotów dwukołowych (np. typu Segway) oraz robotów mobilnych balansujących na jednej osi;
- sterowanie raketami nośnymi i pociskami w fazie startu, gdzie wektor ciągu pełni rolę siły napędowej wózka, a bezwładność korpusu odpowiada dynamice wahadła;
- sterowanie ruchem ramion manipulatorów i suwnic, w których kluczowe jest tłumienie oscylacji przenoszonego ładunku;
- równoważenie platform i pojazdów samobalansujących, wymagające ciągłej korekty siły napędowej względem położenia środka masy.

Ze względu na powyższe zastosowania, problem stabilizacji odwróconego wahadła traktowany jest jako uproszczony model systemów rzeczywistych o zbliżonej dynamice. Badania symulacyjne na tym obiekcie pozwalają na wstępną walidację skuteczności algorytmów sterowania przed ich implementacją w bardziej złożonych lub kosztownych systemach. Z tego powodu układ ten od dziesięcioleci stanowi punkt odniesienia w rozwoju nowoczesnych metod regulacji — od klasycznych regulatorów PID i LQR, po sterowanie predykcyjne (MPC), adaptacyjne i rozmyte.

Prostota modelu matematycznego w połączeniu z łatwością interpretacji wyników (analiza kąta wychylenia i pozycji wózka) sprawiają, że odwrócone wahadło łączy elegancję analityczną z praktycznymi wyzwaniami inżynierskimi. Stanowi tym samym uniwersalne narzędzie do nauki, testowania i rozwijania metod stabilizacji systemów nieliniowych.

1.1. Cel i zakres pracy

Zasadniczym celem pracy jest realizacja środowiska symulacyjnego oraz przeprowadzenie wielokryterialnej analizy porównawczej wybranych algorytmów sterowania dla nieliniowego układu odwróconego wahadła na wózku. Praca koncentruje się na zestawieniu klasycznych metod regulacji (PID, LQR) z zaawansowanymi technikami sterowania predykcyjnego (MPC) oraz rozmytym.

Główny nacisk położono na praktyczną ocenę różnic w działaniu poszczególnych regulatorów, ze szczególnym uwzględnieniem kompromisu między jakością stabilizacji a wydatkiem energetycznym i złożonością obliczeniową.

W ramach projektu zaimplementowano i poddano badaniom następujące struktury:

1. **Regulator PID** — reprezentujący klasyczne podejście inżynierskie. Układ składa się z dwóch pętli sprzężenia zwrotnego (stabilizacja kąta i pozycji), wyposażonych w mechanizmy zapobiegające nasyceniu członów całkujących (ang. *anti-windup*) oraz ograniczenia sygnału sterującego.
2. **Hybrydowy układ PID-LQR** — struktura łącząca prostotę PID (w pętli regulacji pozycji) z optymalnym regulatorem stanu LQR (w pętli stabilizacji wahadła). Metoda ta stanowi punkt odniesienia dla oceny skuteczności metod bazujących na modelu liniowym.
3. **Regulator MPC** — wariant podstawowy sterowania predykcyjnego z kwadratową funkcją kosztu. Służy on w pracy jako nowoczesny *benchmark*, pozwalający ocenić, jakie korzyści daje uwzględnienie ograniczeń sterowania i dynamiki układu bezpośrednio w procesie optymalizacji.
4. **Regulator MPC z rozszerzonym wskaźnikiem jakości** — wariant badawczy metody predykcyjnej, w którym przeanalizowano wpływ dodatkowych kar w funkcji celu (za gwałtowne zmiany sterowania oraz jego amplitudę) na płynność regulacji i zużycie energii.
5. **Regulator rozmyty (Fuzzy Logic)** — metoda sterowania inteligentnego, wykorzystująca zbiór reguł wnioskowania, stanowiąca alternatywę dla metod analitycznych.

Kluczowym elementem pracy jest weryfikacja działania regulatorów w zadaniu stabilizacji wahadła w pozycji pionowej (punkt pracy) w obecności zakłóceń zewnętrznych. W celu obiektywnego porównania metod przyjęto zestaw wskaźników ilościowych. Jakość stabilizacji weryfikowana jest w oparciu o metryki całkowite błędu (ISE, IAE) dla kąta wychylenia oraz pozycji wózka. Równolegle ocenie poddano ekonomię sterowania, wyznaczając koszt energetyczny poprzez normy L_1 i L_2 sygnału sterującego. Całość uzupełnia analiza odporności układu na zakłócenia (szumy, siły zewnętrzne), wyrażona m.in. wskaźnikiem SNR. Tak dobrane kryteria pozwalają na wszechstronne wskazanie mocnych i słabych stron badanych metod.

1.2. Przegląd literatury

W literaturze przedmiotu odwrócone wahadło na wózku traktowane jest powszechnie jako wzorcowy układ testowy (ang. *testbed*) dla weryfikacji algorytmów sterowania układami niestabilnymi. W pracy [1] przedstawiono kompletny model nieliniowy obiektu, uwzględniający zakłócenia stochastyczne, na podstawie którego przeprowadzono analizę porównawczą regulatorów PID, LQR oraz ich konfiguracji hybrydowych. Wyniki te wskazują, że włączenie komponentu LQR znacząco poprawia szybkość i płynność odpowiedzi w stosunku do klasycznej regulacji PID, szczególnie w zakresie stabilizacji kątowej wahadła.

Rozszerzenie zakresu badań o sterowanie predykcyjne (MPC) zaprezentowano w pozycji [2]. Autorzy stworzyli jednorodne środowisko symulacyjne, zestawiając przebiegi zmiennych stanu dla metod PID, LQR oraz MPC. Uzyskane rezultaty potwierdziły przewagę rozwiązań opartych na modelu (LQR, MPC) nad klasycznym PID w kontekście jakości regulacji, podkreślając jednocześnie kluczową zaletę MPC — możliwość bezpośredniego uwzględniania ograniczeń fizycznych nałożonych na wielkości sterujące.

Współczesne prace badawcze coraz częściej integrują metody optymalne z metodami sztucznej inteligencji. Artykuł [3] opisuje rozwiązanie hybrydowe, łączące regulator LQR z modelem rozmytym Takagi–Sugeno (z kompensacją PDC) oraz obserwatorem stanu. Podejście to pozwala na przyspieszenie zbieżności błędu regulacji do zera oraz poprawę jakości estymacji zmiennych w obecności szumów pomiarowych i niepewności parametrycznej modelu.

Istotnym uzupełnieniem badań symulacyjnych są weryfikacje eksperymentalne, szeroko reprezentowane w krajowej literaturze naukowej. Zespół Jezierski i in. [4] przeprowadził porównanie algorytmów LQR i MPC na rzeczywistym stanowisku laboratoryjnym. Wykazano, że o ile regulator LQR skutecznie utrzymuje punkt pracy i tłumi zakłócenia, to sterowanie predykcyjne zapewnia łagodniejsze sterowanie i lepsze właściwości śledzenia trajektorii, co ma kluczowe znaczenie w aplikacjach robotycznych.

Z punktu widzenia podstaw teoretycznych, fundamentem dla implementacji sterowania predykcyjnego są prace monograficzne Camacho i Bordonsa [5] oraz Tatjewskiego [6]. Omawiają one szczegółowo zagadnienia doboru funkcji kosztu, horyzontów predykcji, a także stabilności układu zamkniętego. Aspekty wdrożeniowe, w tym efektywność numeryczna algorytmów optymalizacji na platformach wbudowanych, poruszane są w nowszych publikacjach [7], [8]. Natomiast w obszarze sterowania rozmytego cennym źródłem wiedzy metodycznej są opracowania dotyczące modeli Takagi–Sugeno i ich porównań z podejściami klasycznymi [9].

Podsumowując, analiza literatury wskazuje na ewolucję podejść sterowania: od klasycznych paradygmatów PID i LQR [1], przez ujęcia predykcyjne [2], [6], aż po zaawansowane metody hybrydowe i inteligentne [3]. Niniejsza praca wpisuje się w ten nurt badawczy, zestawiając te różnorodne metody w ramach jednego projektu symulacyjnego.

2. Model matematyczny układu

Celem niniejszego rozdziału jest szczegółowe wyprowadzenie modelu matematycznego obiektu sterowania, którym jest odwrócone wahadło na wózku. Precyzyjne odwzorowanie dynamiki procesu jest fundamentalnym etapem projektowania układu sterowania, gdyż jakość modelu bezpośrednio wpływa na skuteczność algorytmów predykcyjnych (MPC) oraz optymalnych (LQR). Wyprowadzenie oparto na prawach mechaniki klasycznej oraz analizie sił i momentów przedstawionej w literaturze przedmiotu [1].

2.1. Opis fizyczny i założenia upraszczające

Rozważany obiekt sterowania należy do klasy mechanicznych układów podwzbudnych (ang. *underactuated systems*), co oznacza, że liczba wejść sterujących jest mniejsza od liczby stopni swobody. Układ składa się z wózka poruszającego się wzdłuż poziomej osi oraz pręta z masą skupioną, zamocowanego przegubowo do wózka.

Przyjęto następujące parametry fizyczne modelu, zgodne z oznaczeniami stosowanymi w pracach badawczych [1]:

- M — masa wózka [kg],
- m — masa wahadła (traktowana jako masa punktowa na końcu pręta) [kg],
- l — długość wahadła (odległość od osi obrotu do środka ciężkości) [m],
- g — przyspieszenie ziemskie [m/s^2],
- $u(t)$ — siła sterująca przyłożona do wózka [N],
- $F_w(t)$ — siła zakłócająca (wiatr) działająca poziomo na masę wahadła [N].

W celu sformułowania modelu analitycznego przyjęto następujące założenia upraszczające [1]:

1. Pręt wahadła jest nieważki i sztywny.
2. Tarcie w łożyskach kół wózka oraz w przegubie wahadła jest pomijalnie małe.
3. Ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej $x - y$.

TODO - zdjęcie jakies

Układ odniesienia zdefiniowano w taki sposób, że współrzędna $x(t)$ opisuje poziome przesunięcie wózka, natomiast kąt $\theta(t)$ określa wychylenie wahadła od pionu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Pozycja $\theta = 0$ odpowiada niestabilnemu punktowi równowagi (wahadło w górze).

2.2. Analiza kinematyczna

W pierwszej kolejności zdefiniowano położenie środka ciężkości (COG) masy wahadła m w nieruchomym układzie odniesienia. Oznaczając współrzędne środka masy jako (x_G, y_G) , można je wyrazić jako sumę przemieszczenia wózka oraz rzutu geometrycznego ramienia wahadła [1]:

$$x_G(t) = x(t) + l \sin \theta(t), \quad (1)$$

$$y_G(t) = l \cos \theta(t). \quad (2)$$

Gdzie x_G to pozioma współrzędna masy wahadła, a y_G to jej współrzędna pionowa (odległość od osi wózka).

Aby zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona dla masy m , konieczne jest wyznaczenie jej prędkości oraz przyspieszeń całkowitych (bezwzględnych). Różniczkując równania (1) i (2) względem czasu, otrzymuje się składowe prędkości:

$$\dot{x}_G = \dot{x} + l \cos \theta \cdot \dot{\theta}, \quad (3)$$

$$\dot{y}_G = -l \sin \theta \cdot \dot{\theta}. \quad (4)$$

Ponowne różniczkowanie pozwala wyznaczyć składowe przyspieszenia środka masy wahadła \ddot{x}_G oraz \ddot{y}_G . Uwzględniają one zarówno przyspieszenie liniowe wózka, jak i składowe ruchu obrotowego (przyspieszenie styczne i dośrodkowe):

$$\ddot{x}_G = \ddot{x} + l \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - l \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2, \quad (5)$$

$$\ddot{y}_G = -l \sin \theta \cdot \ddot{\theta} - l \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2. \quad (6)$$

Powyższe zależności (5) i (6) są kluczowe, ponieważ siły bezwładności działające na masę wahadła zależą od jej całkowitego przyspieszenia w przestrzeni, a nie tylko od kąta wychylenia.

2.3. Równania dynamiki układu

Model dynamiczny wyprowadzono, rozpatrując siły działające na wózek oraz na wahadło osobno, a następnie składając je w układ równań sprzężonych.

2.3.1. Bilans sił w kierunku poziomym

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, suma sił zewnętrznych działających na cały układ w kierunku osi x musi równać się zmianie pędu układu. Siłami zewnętrznymi są: siła sterująca $u(t)$ przyłożona do wózka oraz siła zakłócająca $F_w(t)$ przyłożona do masy wahadła [1].

Równanie równowagi sił dla całego układu (masy M i m) przyjmuje postać:

$$M\ddot{x} + m\ddot{x}_G = u + F_w. \quad (7)$$

2. Model matematyczny układu

Podstawiając wyznaczone wcześniej przyspieszenie poziome środka masy wahadła (5) do równania (7), otrzymujemy:

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - l\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2) = u + F_w. \quad (8)$$

Po uporządkowaniu wyrazów i wyciągnięciu \ddot{x} przed nawias, otrzymujemy pierwsze równanie różniczkowe opisujące ruch postępowy układu:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - ml\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 = u + F_w. \quad (9)$$

2.3.2. Bilans momentów sił

Ruch obrotowy wahadła opisano poprzez sumę momentów sił względem punktu zawieszenia (przegubu na wózku). Siłami generującymi moment obrotowy są siły bezwładności masy wahadła, siła ciężkości oraz siła zakłócająca.

Zgodnie z analizą przedstawioną w pracy [1], równanie momentów przyjmuje postać:

$$(m\ddot{x}_G)l\cos\theta - (m\ddot{y}_G)l\sin\theta = (mg)l\sin\theta + (F_w)l\cos\theta. \quad (10)$$

W równaniu tym lewa strona reprezentuje moment wynikający z sił bezwładności, natomiast prawa strona uwzględnia momenty od sił zewnętrznych (grawitacji i wiatru). Należy zauważyć, że siła wiatru F_w działa poziomo, stąd jej ramię siły względem punktu obrotu wynosi $l\cos\theta$.

Podstawiając wyrażenia na przyspieszenia \ddot{x}_G (5) oraz \ddot{y}_G (6) do równania momentów (10), otrzymujemy rozbudowaną postać równania:

$$ml\cos\theta(\ddot{x} + l\cos\theta\ddot{\theta} - l\sin\theta\dot{\theta}^2) - ml\sin\theta(-l\sin\theta\ddot{\theta} - l\cos\theta\dot{\theta}^2) = mgl\sin\theta + F_wl\cos\theta. \quad (11)$$

Po wymnożeniu nawiasów składniki zawierające $\dot{\theta}^2$ wzajemnie się redukują. Wykorzystując jedynkę trygonometryczną $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ oraz dzieląc całe równanie przez l , otrzymujemy ostateczne drugie równanie dynamiki [1]:

$$m\cos\theta \cdot \ddot{x} + ml \cdot \ddot{\theta} = mg\sin\theta + F_w\cos\theta. \quad (12)$$

2.4. Nieliniowy model w przestrzeni stanów

Układ równań (9) i (12) stanowi kompletny, sprzężony opis dynamiki. W celu przeprowadzenia symulacji numerycznej, konieczne jest rozprężenie układu i wyznaczenie jawnych postaci przyspieszeń \ddot{x} i $\ddot{\theta}$.

Wyznaczając \ddot{x} z równania (12):

$$\ddot{x} = \frac{1}{m\cos\theta} (mg\sin\theta + F_w\cos\theta - ml\ddot{\theta}), \quad (13)$$

i podstawiając do równania (9), a następnie wykonując przekształcenia algebraiczne, otrzymujemy jawne wzory na przyspieszenia.

Ostateczne równania ruchu, uwzględniające wpływ siły sterującej u oraz zakłócenia F_w , przyjmują postać [1]:

$$\ddot{x} = \frac{u + ml \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \cos \theta + F_w \sin^2 \theta}{M + m - m \cos^2 \theta}, \quad (14)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)g \sin \theta - u \cos \theta - ml \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{M}{m} F_w \cos \theta + F_w \cos \theta}{l(M + m - m \cos^2 \theta)}. \quad (15)$$

Definiując wektor stanu $\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T$, model w przestrzeni stanów zapisujemy jako układ czterech równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{(M+m)g \sin x_1 - u \cos x_1 - ml(\sin x_1 \cos x_1)x_2^2 - F_w(\frac{M}{m} \cos x_1 - \cos x_1)}{l(M+m-m \cos^2 x_1)} \\ x_4 \\ \frac{u + ml(\sin x_1)x_2^2 - mg \sin x_1 \cos x_1 + F_w \sin^2 x_1}{M+m-m \cos^2 x_1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

2.5. Liniaryzacja modelu w punkcie pracy

W celu zastosowania algorytmów sterowania liniowego (PID, LQR), przeprowadzono liniaryzację modelu nieliniowego wokół punktu równowagi chwiejnej ($\theta = 0$). Dla małych wychyleń zastosowano przybliżenia $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, a wyrazy wyższego rzędu ($\dot{\theta}^2$, $\sin^2 \theta$) pominięto.

Liniowy model układu w postaci $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{B}_{dist}F_w$ opisują macierze wyznaczone zgodnie z literaturą [1]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Macierz sterowania \mathbf{B} oraz macierz zakłóceń \mathbf{B}_{dist} przyjmują postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{dist} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Warto zauważyć, że w modelu zlinearyzowanym wpływ wiatru na przyspieszenie kątowe wahadła jest odwrotnie proporcjonalny do masy m (element $-\frac{1}{ml}$ w macierzy

2. Model matematyczny układu

B_{dist}), podczas gdy w równaniu przyspieszenia wózka efekt ten zanika dla małych kątów (element zerowy). Jest to zgodne z wynikami prezentowanymi w pracy źródłowej [1].

3. Środowisko

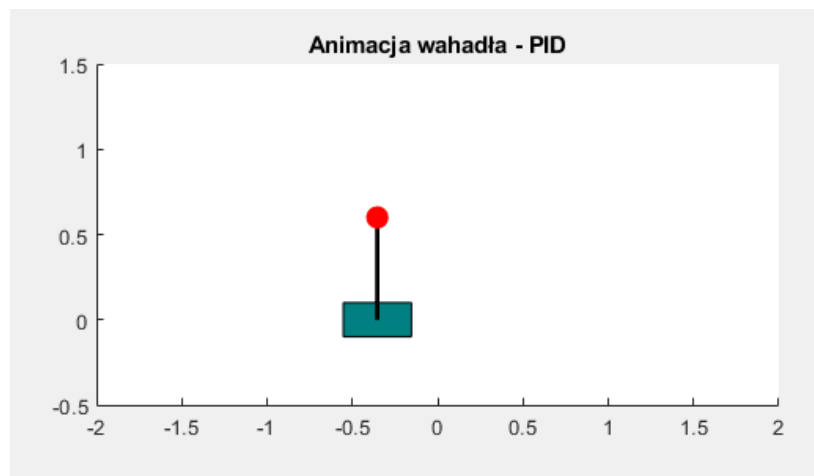
- **Oprogramowanie:** MATLAB R2024a & Simulink.
- **Biblioteki:** Control System Toolbox.
- **Parametry fizyczne układu:**

$$M = 0,5 \text{ kg}, \quad m = 0,2 \text{ kg}, \quad l = 0,3 \text{ m}, \quad I = 0,006 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad b = 0,1 \text{ N}\cdot\text{s/m}, \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

- **Warunki początkowe:**

$$\varphi(0) = 45^\circ, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

- **Czas symulacji:** $t \in [0, 5]$ s z krokiem $\Delta t = 0,01$ s.
- **Zaburzenie od wiatru:** Wersja z zakłóceniem realizuje się jako dodanie do równania ruchu siły $F_w(t)$. Zby łatwiej było zaobserwować wpływ wiatru na działanie układu, jako zakłócenie przyjęto dwa podmuchy w 1 i 3 sekundzie symulacji
- **Animacja wahadła:** W celu lepszego zobrazowania dynamiki układu, projekt zawiera funkcję `animate_pendulum`, która rysuje ruch wózka i wahadła w czasie. Wózek wizualizowany jest jako prostokąt, drążek wahadła jako linia, a jego koniec jako czerwona kropka.



Rysunek 3.1. Animacja wahadła na wózku

4. Metody sterowania

4.1. Regulator PID (dla kąta wahadła)

Regulator PID ma transmitancję:

$$C_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Dobór parametrów K_p, K_i, K_d wykonano w MATLAB-ie za pomocą funkcji `pidtune`, działającej na modeli typu TF dla toru prostego (kąt φ w zamknięciu sprzężenia zwrotnego). Regulator ma za zadanie stabilizować kąt wahadła do zera, przy zerowym odchyleniu wózka. W postaci dyskretnej implementacja wygląda tak:

$$u[k] = K_p e[k] + K_i \sum_{j=0}^k e[j] \Delta t + K_d \frac{e[k] - e[k-1]}{\Delta t}, \quad e[k] = -\varphi[k].$$

Regulator PID w kodzie znajduje się w pliku `controllers/pid_controller.m`. Układ zamknięty jest tworzony jako obiekt `ss(feedback(CPID · Ppend, 1))`.

4.2. Regulator PD (dla pozycji wózka)

Aby uzyskać lepszą regulację położenia x , można użyć regulatora PD:

$$C_{PD}(s) = K_p + K_d s.$$

Dobór nastaw wykonany jest również z wykorzystaniem `pidtune`, lecz z opcją 'PD'. Torem wejścia jest sygnał sterujący u , a wyjściem - pozycja x . Model względny utworzono z liniowego modelu stanu, wyciągając transmitancję od $u \rightarrow x$.

4.3. Regulator LQR (Linear-Quadratic Regulator)

Regulator LQR minimalizuje funkcję kosztu:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T R u) dt,$$

gdzie $Q = Q^T \geq 0$ oraz $R = R^T > 0$. Rozwiązanie problemu LQR daje wzmocnienie K takie, że:

$$u(t) = -K \mathbf{x}(t).$$

W MATLAB-ie nastawy otrzymuje się poprzez wywołanie funkcji `lqr(A, B, Q, R)`, a zamknięty układ jest definiowany jako `ss(A - BK, B, C, D)`. Regulacja LQR stabilizuje całość wektora stanu, a w szczególności kąt φ .

4.4. Regulator złożony (Composite Controller)

Koncepcja regulatora złożonego polega na połączeniu dwóch oddzielnych pętli:

- Pętla LQR, pracująca na wektorze stanu $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}]^T$, w celu stabilizacji kąta φ .
- Pętla PID/PD, pracująca wyłącznie na torze położenia x , w celu stabilizacji położenia wózka wokół zera.

Sygnały sterujące sumują się:

$$u_{\text{composite}}(t) = u_{\text{LQR}}(t) + u_{\text{pos}}(t),$$

gdzie

$$u_{\text{LQR}}(t) = -K_{\text{lqr}} \mathbf{x}(t), \quad u_{\text{pos}}(t) = K_p^x e_x + K_i^x \int_0^t e_x(\tau) d\tau + K_d^x \frac{de_x}{dt}, \quad e_x = -x(t).$$

Implementacja znajduje się w pliku `controllers/composite_controller.m`. W kodzie symulacyjnym obliczenia wykonuje się w pętli dyskretnej:

1. Od aktualnego stanu $\mathbf{x}[k]$ obliczamy $u_{\text{LQR}}[k] = -K_{\text{lqr}} \mathbf{x}[k]$.
2. Na podstawie odchylenia $e_x[k] = -x[k]$ obliczamy $u_{\text{pos}}[k]$ zgodnie z równaniem PD lub PID.
3. Suma $u[k] = u_{\text{LQR}}[k] + u_{\text{pos}}[k]$ jest podawana do układu stanu:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] + \Delta t (A \mathbf{x}[k] + B u[k]).$$

5. Eksperymenty

5.1. Opis przeprowadzonych eksperymentów

W celu porównania skuteczności różnych strategii sterowania dla odwróconego wahadła na wózku, przeprowadzono szereg symulacji numerycznych. Każdy eksperyment polegał na zasymulowaniu zachowania układu w odpowiedzi na tę samą konfigurację początkową:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 45^\circ, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Symulacje trwały 5 sekund, z krokiem czasowym $\Delta t = 0,01$ s. Rozważono trzy warianty regulatorów:

- **LQR** - regulator liniowo-kwadratowy oparty na pełnym stanie,
- **PID** - regulator PID zaprojektowany dla modelu przenoszenia kąta φ ,
- **Composite** - układ złożony: regulator PID dla pozycji wózka x i LQR dla kąta φ .

Każdy z powyższych regulatorów został przetestowany w dwóch wariantach:

1. bez zakłóceń,
2. z zakłóceniem w postaci dwóch podmuchów.

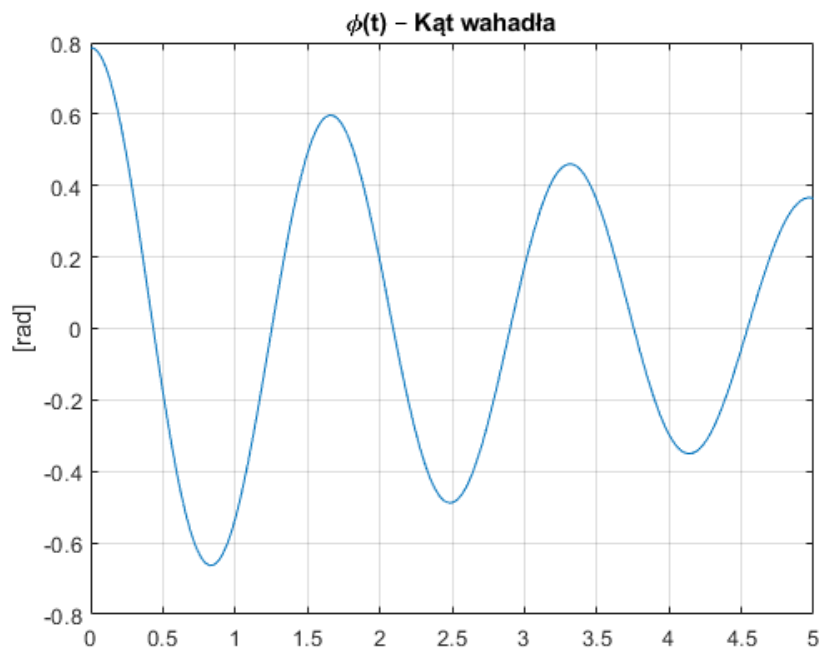
W trakcie symulacji zarejestrowano:

- trajektorię kąta wahadła $\varphi(t)$,
- trajektorię położenia wózka $x(t)$,
- sygnał sterujący $u(t)$.

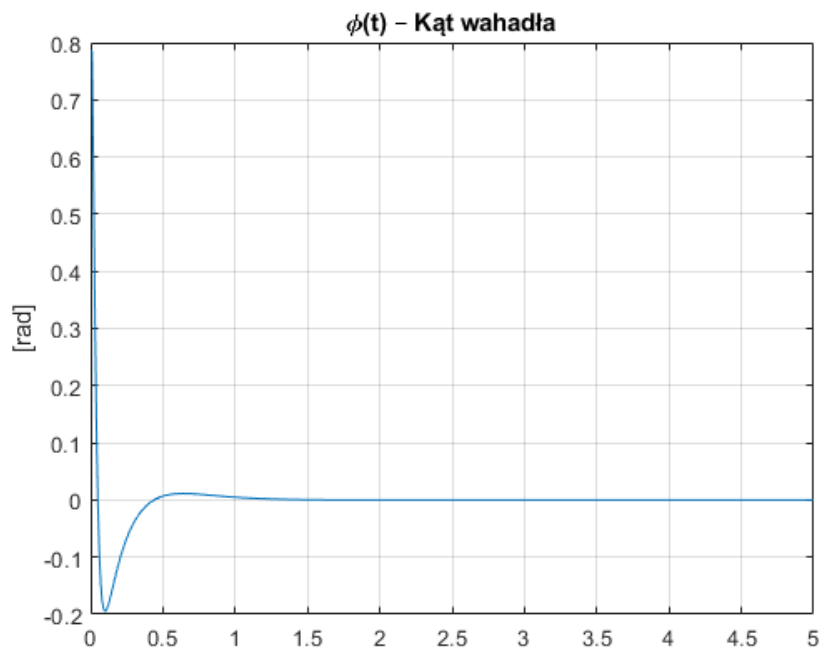
Na podstawie zebranych danych obliczono również dwie metryki jakości:

- **MSE** - średni błąd kwadratowy: $\text{MSE}_\varphi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi[k]^2$,
- **MAE** - średni błąd bezwzględny: $\text{MAE}_\varphi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\varphi[k]|$,

5.2. Dobór parametrów regulatorów



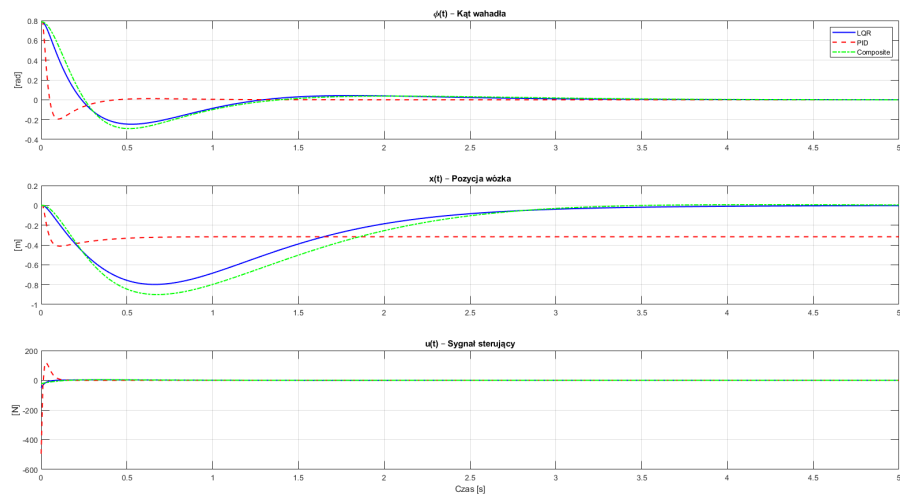
Rysunek 5.1. Źle dostrojony regulator PID.



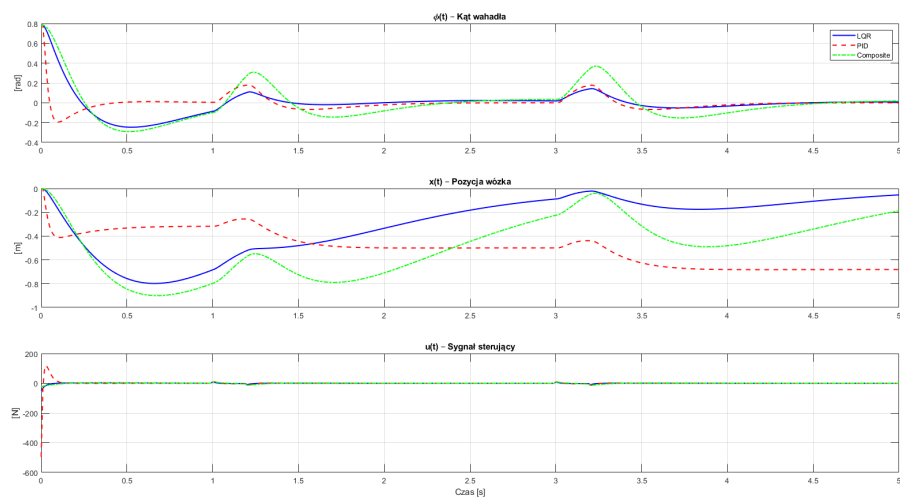
Rysunek 5.2. Dostrojony regulator PID przy użyciu pidentune.

Regulator PID dostrojono przy użyciu gotowej funkcji pidentune, natomiast regulator LQR dostrojono ręcznie.

5. Eksperymenty



Rysunek 5.3. Sygnały wyjściowe.



Rysunek 5.4. Sygnały wyjściowe z zakłóceniami.

5.3. Porównanie jakości regulacji - wskaźniki błędów

Tabela 5.1. Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ - bez zakłóceń

Regulator	MSE_{φ}	MAE_{φ}
LQR	0.0161	0.0585
PID	0.0042	0.0126
Composite	0.0209	0.0677

Tabela 5.2. Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ - z zakłóceniem

Regulator	MSE_{φ}	MAE_{φ}
LQR	0.0171	0.0687
PID	0.0067	0.0402
Composite	0.0322	0.1226

5.4. Podsumowanie eksperymentów

Przeprowadzone eksperymenty pozwoliły na porównanie trzech różnych strategii sterowania odwróconym wahadłem na wózku w identycznych warunkach początkowych oraz w obecności zakłóceń. Na podstawie analizy sygnałów oraz wartości wskaźników błędów (MSE i MAE) można sformułować następujące wnioski:

- Regulator **PID** wykazał najlepszą skuteczność w warunkach bez zakłóceń, osiągając najniższe wartości MSE i MAE, co sugeruje dobrą zdolność do szybkiego i precyzyjnego tłumienia wychylenia wahadła.
- W obecności zakłóceń regulator PID nadal utrzymywał dobrą jakość regulacji, jednak zauważalnie większy błąd bezwzględny (MAE) wskazuje na ograniczoną odporność na zaburzenia w porównaniu do LQR.
- Regulator **LQR**, choć nieco mniej precyzyjny w warunkach nominalnych, wykazał większą stabilność i odporność na zakłócenia, co czyni go solidnym wyborem w sytuacjach, gdzie przewiduje się obecność niestandardowych sił.
- Układ **Composite**, łączący zalety obu strategii, nie przyniósł oczekiwanej poprawy jakości regulacji. W szczególności zauważono pogorszenie wskaźników błędów, co może być związane z nieoptymalnym podziałem zadań między PID i LQR.

Podsumowując, dobór odpowiedniego regulatora powinien być uzależniony od warunków pracy układu - w sytuacjach nominalnych lepiej sprawdza się PID, natomiast w obecności zakłóceń bardziej odpowiedni może okazać się LQR.

Bibliografia

- [1] L. B. Prasad, B. Tyagi i H. O. Gupta, "Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input", *International Journal of Automation and Computing*, t. 11, nr 6, s. 661–670, 2014. DOI: 10.1007/s11633-014-0818-1
- [2] E. S. Varghese, A. K. Vincent i V. Bagyaveereswaran, "Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC", t. 263, nr 5, s. 052 007, 2017. DOI: 10.1088/1757-899X/263/5/052007
- [3] T.-V.-A. Nguyen i N.-H. Tran, "An Integrated Controller for Stabilizing an Inverted Pendulum: LQR and Fuzzy Logic Control with Observer-Based State Estimation", *Journal of Applied Science and Engineering*, t. 27, nr 5, s. 2493–2502, 2024, Open Access (CC BY 4.0). DOI: 10.6180/jase.202405_27(5).0006
- [4] A. Jezierski, J. Mozaryn i D. Suski, "A Comparison of LQR and MPC Control Algorithms of an Inverted Pendulum", w: *Trends in Advanced Intelligent Control, Optimization and Automation*, seria Advances in Intelligent Systems and Computing, W. Mitkowski, J. Kacprzyk, K. Oprędkiewicz i P. Skruch, red., t. 577, Politechnika Warszawska, Cham: Springer, 2017, s. 65–76. DOI: 10.1007/978-3-319-60699-6_8
- [5] E. F. Camacho i C. Bordons, *Model Predictive Control*, 2 wyd. London: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5
- [6] P. Tatjewski, *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych. Struktury i algorytmy. Wydanie drugie zmienione*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT Andrzej Lang, 2016.
- [7] A. Mills, A. Wills i B. Ninness, "Nonlinear Model Predictive Control of an Inverted Pendulum", w: *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, IEEE, 2009, s. 2335–2340. DOI: 10.1109/ACC.2009.5160600
- [8] S. P. Diwan i S. S. Deshpande, "Computationally efficient nonlinear model predictive controller using parallel particle swarm optimization", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, t. 70, nr 4, e140696, 2022. DOI: 10.24425/bpasts.2022.140696
- [9] A. I. Roose, M. Smiley i A. Y. Ali, "Fuzzy-logic control of an inverted pendulum on a cart", *Computers & Electrical Engineering*, t. 63, s. 260–272, 2017, ISSN: 0045-7906. DOI: 10.1016/j.compeleceng.2017.05.016

Wykaz symboli i skrótów

x – Położenie wózka [m]

\dot{x} – Prędkość wózka [m/s]

φ – Kąt odchylenia wahadła od pionu [rad]

$\dot{\varphi}$ – Prędkość kątowna wahadła [rad/s]

u – Sygnał sterujący (siła działająca na wózek) [N]

LQR – Linear-Quadratic Regulator - regulator liniowo-kwadratowy

PID – Proporcjonalno-Całkująco-Różniczkujący regulator

MSE – Mean Squared Error - średni błąd kwadratowy

MAE – Mean Absolute Error - średni błąd bezwzględny

Δt – Krok czasowy symulacji [s]

N – Liczba próbek w sygnale dyskretnym

Spis rysunków

3.1	Animacja wahadła na wózku	15
5.1	Źle dostrojony regulator PID.	19
5.2	Dostrojony regulator PID przy użyciu pidtune.	19
5.3	Sygnały wyjściowe.	20
5.4	Sygnały wyjściowe z zakłóceniami.	20

Spis tabel

5.1	Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ - bez zakłóceń	21
5.2	Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ - z zakłóceniem	21