

Politechnika Warszawska

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI
I TECHNIK INFORMACYJNYCH



Instytut Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej

Praca dyplomowa inżynierska

na kierunku Automatyka i Robotyka

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Adam Sokołowski

Numer albumu 324892

promotor
Robert Nebeluk

WARSZAWA 2025

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Streszczenie. W pracy porównano wybrane metody sterowania odwróconym wahadłem na wózku. Przeprowadzono symulacje numeryczne z wykorzystaniem regulatorów PID, LQR oraz układu złożonego. Analizie poddano odpowiedzi układu w warunkach nominalnych i przy zakłóceniami. Wyniki przedstawiono w formie wykresów oraz wskaźników błędów, co umożliwiło ocenę skuteczności poszczególnych metod.

Słowa kluczowe: odwrócone wahadło, regulator PID, regulator LQR, sterowanie optymalne, zakłócenia, symulacja, układ nieliniowy

Effective stabilisation system of the inverted pendulum on the cart

Abstract. The paper compares selected control methods for an inverted pendulum on a cart. Numerical simulations were performed using PID, LQR controllers, and a complex system. The system responses were analyzed under nominal conditions and under disturbances. The results were presented in the form of graphs and error indices, which enabled the evaluation of the effectiveness of individual methods.

Keywords: inverted pendulum, PID controller, LQR controller, optimal control, disturbances, simulation, nonlinear system

Spis treści

1. Wstęp	7
1.1. Cel pracy	7
1.2. Omówienie literatury	7
2. Model matematyczny układu	8
2.1. Opis fizyczny układu	8
2.2. Model liniowy w przestrzeni stanów	8
3. Środowisko	9
4. Metody sterowania	10
4.1. Regulator PID (dla kąta wahadła)	10
4.2. Regulator PD (dla pozycji wózka)	10
4.3. Regulator LQR (Linear–Quadratic Regulator)	10
4.4. Regulator złożony (Composite Controller)	11
5. Eksperymenty	12
5.1. Opis przeprowadzonych eksperymentów	12
5.2. Dobór parametrów regulatorów	13
5.3. Porównanie jakości regulacji – wskaźniki błędów	15
5.4. Podsumowanie eksperymentów	15
Bibliografia	17
Wykaz symboli i skrótów	18
Spis rysunków	18
Spis tabel	18

1. Wstęp

Odwrócone wahadło na wózku jest klasycznym przykładem nieliniowego, niestabilnego układu, wykorzystywanym zarówno w dydaktyce, jak i w badaniach nad zaawansowanymi technikami sterowania. Jego atrakcyjność wynika z tego, że choć geometria i parametry są stosunkowo proste, to układ ten jest trudny do stabilizacji i wymaga precyzyjnej regulacji w czasie rzeczywistym.

1.1. Cel pracy

Celem niniejszego sprawozdania jest przedstawienie projektu symulacyjnego układu stabilizacji odwróconego wahadła na wózku, w którym porównano klasyczne regulatorы:

1. Regulator PD lub PID do regulacji położenia wózka x oraz regulator LQR do regulacji kąta wahadła φ .
2. Regulator PID do regulacji całego systemu.
3. Regulator LQR do regulacji całego systemu.

Dodatkowo zestawiono wskaźniki jakości regulacji: średni błąd kwadratowy (MSE) oraz średni błąd bezwzględny (MAE) dla trajektorii $\varphi(t)$ i $x(t)$, a także przeanalizowano wpływ zakłóceń na jakość regulacji.

1.2. Omówienie literatury

W literaturze problem sterowania odwróconego wahadła na wózku jest traktowany jako wzorcowy układ niestabilny i nieliniowy, służący do oceny efektywności różnych algorytmów sterowania. W [1] autorzy prezentują:

- Model nieliniowy systemu z uwzględnieniem zaburzenia od wiatru oraz jego liniaryzację wokół punktu równowagi.
- Projekt dwóch pętli PID: jedna dla kąta θ , druga dla położenia x , oraz algorytm LQR zaprojektowany na zlinearyzowanym modelu.
- Analizę porównawczą działania regulatorów PID, PID+LQR (dwie konfiguracje: $2PID+LQR$ oraz $1PID+LQR$), zarówno w przypadku bez zakłóceń, jak i z zakłóceniem od wiatru.

Wzorując się na [1] zimplementowano regulator PID+LQR.

2. Model matematyczny układu

2.1. Opis fizyczny układu

Rozważany układ składa się z wózka o masie M , poruszającego się poziomo, oraz przegubowo zamocowanego wahadła o masie m i długości l , wychylającego się od pionu o kąt $\varphi(t)$. Na wózek działa sterowanie w postaci siły $u(t)$. Wahadło jest niestateczne w pozycji pionowej i wymaga stabilizacji aktywnej.

Parametry fizyczne:

- M – masa wózka [kg],
- m – masa wahadła [kg],
- l – długość wahadła [m],
- I – moment bezwładności wahadła względem osi [kg·m²],
- b – współczynnik tłumienia wózka [N·s/m],
- g – przyspieszenie ziemskie [m/s²].

2.2. Model liniowy w przestrzeni stanów

Model został uzyskany przez uproszczenie dynamiczne i liniaryzację wokół punktu równowagi ($\varphi = 0$). Stan układu opisuje wektor:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix},$$

gdzie x – pozycja wózka, φ – kąt odchylenia wahadła. Model przyjmuje postać:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B u(t), \quad \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t),$$

przy czym:

$$p = I(M+m) + Mml^2,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(I+ml^2)b}{p} & \frac{m^2gl^2}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mlb}{p} & \frac{mgl(M+m)}{p} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{p} \\ 0 \\ \frac{ml}{p} \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Model został zaimplementowany w MATLAB-ie jako funkcja `state_space_model.m`, która zwraca obiekt przestrzeni stanów `ss(A, B, C, D)`.

3. Środowisko

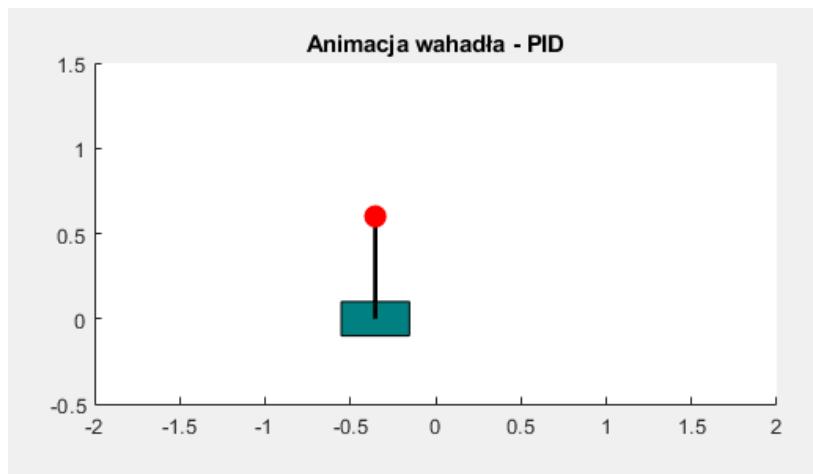
- **Oprogramowanie:** MATLAB R2024a & Simulink.
- **Biblioteki:** Control System Toolbox.
- **Parametry fizyczne układu:**

$$M = 0,5 \text{ kg}, \quad m = 0,2 \text{ kg}, \quad l = 0,3 \text{ m}, \quad I = 0,006 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad b = 0,1 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}, \quad g = 9,81 \text{ m}/\text{s}^2.$$

- **Warunki początkowe:**

$$\varphi(0) = 45^\circ, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

- **Czas symulacji:** $t \in [0, 5]$ s z krokiem $\Delta t = 0,01$ s.
- **Zaburzenie od wiatru:** Wersja z zakłóceniem realizuje się jako dodanie do równania ruchu siły $F_w(t)$. Zby łatwiej było zaobserwować wpływ wiatru na działanie układu, jako zakłócenie przyjęto dwa podmuchy w 1 i 3 sekundzie symulacji
- **Animacja wahadła:** W celu lepszego zobrazowania dynamiki układu, projekt zawiera funkcję `animate_pendulum`, która rysuje ruch wózka i wahadła w czasie. Wózek wizualizowany jest jako prostokąt, drążek wahadła jako linia, a jego koniec jako czerwona kropka.



Rysunek 3.1. Animacja wahadła na wózku

4. Metody sterowania

4.1. Regulator PID (dla kąta wahadła)

Regulator PID ma transmitancję:

$$C_{\text{PID}}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Dobór parametrów K_p, K_i, K_d wykonano w MATLAB-ie za pomocą funkcji `pidtune`, działającej na modeli typu TF dla toru prostego (kąt φ w zamknięciu sprzężenia zwrotnego). Regulator ma za zadanie stabilizować kąt wahadła do zera, przy zerowym odchyleniu wózka. W postaci dyskretnej implementacja wygląda tak:

$$u[k] = K_p e[k] + K_i \sum_{j=0}^k e[j] \Delta t + K_d \frac{e[k] - e[k-1]}{\Delta t}, \quad e[k] = -\varphi[k].$$

Regulator PID w kodzie znajduje się w pliku `controllers/pid_controller.m`. Układ zamknięty jest tworzony jako obiekt $\text{ss}(\text{feedback}(C_{\text{PID}} \cdot P_{\text{pend}}, 1))$.

4.2. Regulator PD (dla pozycji wózka)

Aby uzyskać lepszą regulację położenia x , można użyć regulatora PD:

$$C_{\text{PD}}(s) = K_p + K_d s.$$

Dobór nastaw wykonany jest również z wykorzystaniem `pidtune`, lecz z opcją 'PD'. Torem wejścia jest sygnał sterujący u , a wyjściem – pozycja x . Model względny utworzono z liniowego modelu stanu, wyciągając transmitancję od $u \rightarrow x$.

4.3. Regulator LQR (Linear–Quadratic Regulator)

Regulator LQR minimalizuje funkcję kosztu:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^\top Q \mathbf{x} + u^\top R u) dt,$$

gdzie $Q = Q^\top \succeq 0$ oraz $R = R^\top > 0$. Rozwiążanie problemu LQR daje wzmacnienie K takie, że:

$$u(t) = -K \mathbf{x}(t).$$

W MATLAB-ie nastawy otrzymuje się poprzez wywołanie funkcji `lqr(A, B, Q, R)`, a zamknięty układ jest definiowany jako $\text{ss}(A - BK, B, C, D)$. Regulacja LQR stabilizuje całość wektora stanu, a w szczególności kąt φ .

4.4. Regulator złożony (Composite Controller)

Koncepcja regulatora złożonego polega na połączeniu dwóch oddzielnych pętli:

- Pętla LQR, pracująca na wektorze stanu $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}]^\top$, w celu stabilizacji kąta φ .
- Pętla PID/PD, pracująca wyłącznie na torze położenia x , w celu stabilizacji położenia wózka wokół zera.

Sygnały sterujące sumują się:

$$u_{\text{composite}}(t) = u_{\text{LQR}}(t) + u_{\text{pos}}(t),$$

gdzie

$$u_{\text{LQR}}(t) = -K_{\text{lqr}} \mathbf{x}(t), \quad u_{\text{pos}}(t) = K_p^x e_x + K_i^x \int_0^t e_x(\tau) d\tau + K_d^x \frac{de_x}{dt}, \quad e_x = -x(t).$$

Implementacja znajduje się w pliku `controllers/composite_controller.m`. W kodzie symulacyjnym obliczenia wykonuje się w pętli dyskretnej:

1. Od aktualnego stanu $\mathbf{x}[k]$ obliczamy $u_{\text{LQR}}[k] = -K_{\text{lqr}} \mathbf{x}[k]$.
2. Na podstawie odchylenia $e_x[k] = -x[k]$ obliczamy $u_{\text{pos}}[k]$ zgodnie z równaniem PD lub PID.
3. Suma $u[k] = u_{\text{LQR}}[k] + u_{\text{pos}}[k]$ jest podawana do układu stanu:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] + \Delta t \left(A \mathbf{x}[k] + B u[k] \right).$$

5. Eksperymenty

5.1. Opis przeprowadzonych eksperymentów

W celu porównania skuteczności różnych strategii sterowania dla odwróconego wahadła na wózku, przeprowadzono szereg symulacji numerycznych. Każdy eksperyment polegał na zasymulowaniu zachowania układu w odpowiedzi na tę samą konfigurację początkową:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 45^\circ, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Symulacje trwały 5 sekund, z krokiem czasowym $\Delta t = 0,01$ s. Rozważono trzy warianty regulatorów:

- **LQR** – regulator liniowo-kwadratowy oparty na pełnym stanie,
- **PID** – regulator PID zaprojektowany dla modelu przenoszenia kąta φ ,
- **Composite** – układ złożony: regulator PID dla pozycji wózka x i LQR dla kąta φ .

Każdy z powyższych regulatorów został przetestowany w dwóch wariantach:

1. bez zakłóceń,
2. z zakłóceniem w postaci dwóch podmuchów.

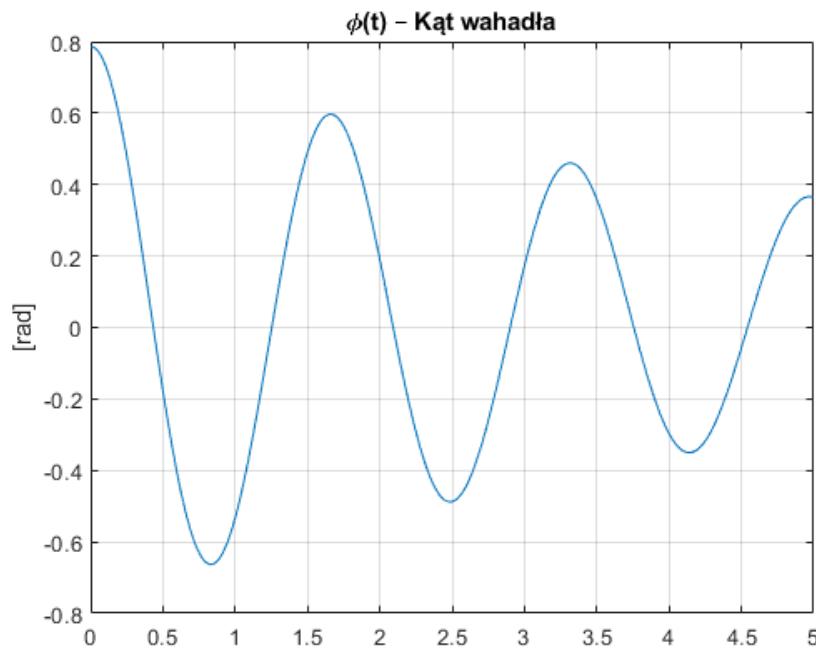
W trakcie symulacji zarejestrowano:

- trajektorię kąta wahadła $\varphi(t)$,
- trajektorię położenia wózka $x(t)$,
- sygnał sterujący $u(t)$.

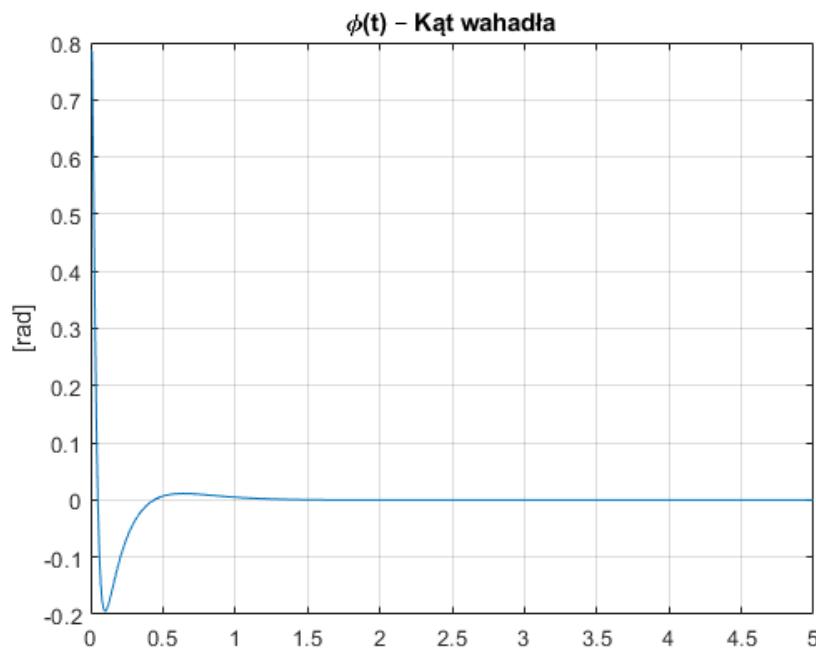
Na podstawie zebranych danych obliczono również dwie metryki jakości:

- **MSE** – średni błąd kwadraticzny: $MSE_\varphi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi[k]^2$,
- **MAE** – średni błąd bezwzględny: $MAE_\varphi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\varphi[k]|$,

5.2. Dobór parametrów regulatorów



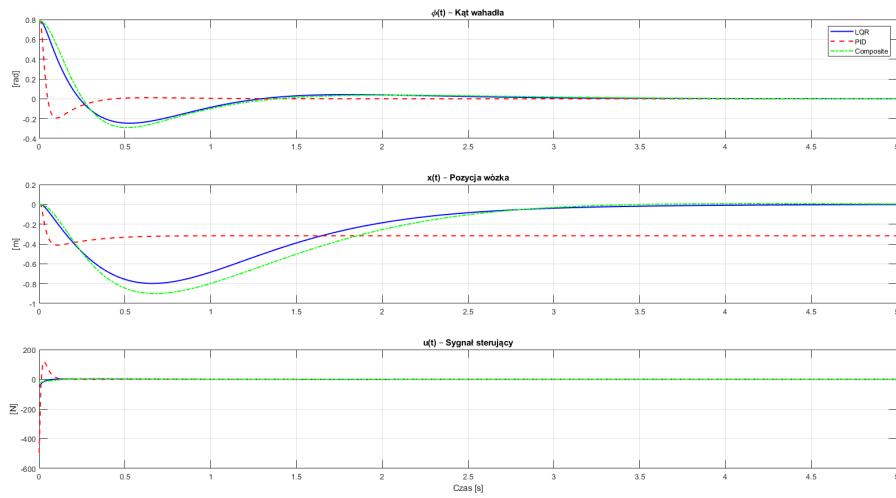
Rysunek 5.1. Źle dostonowany regulator PID.



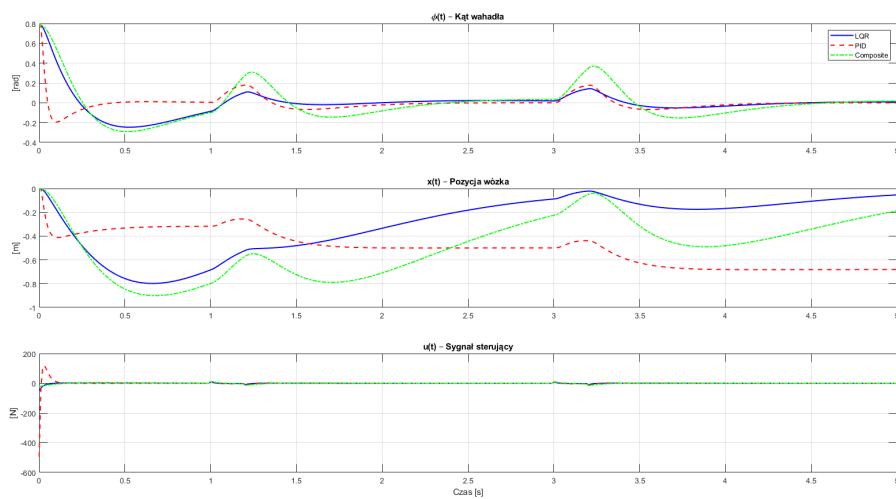
Rysunek 5.2. Dostonowany regulator PID przy użyciu pidtune.

Regulator PID dostoniono przy użyciu gotowej funkcji pidtune, natomiast regulator LQR dostoniono ręcznie.

5. Eksperymenty



Rysunek 5.3. Sygnały wyjściowe.



Rysunek 5.4. Sygnały wyjściowe z zakłóceniami.

5.3. Porównanie jakości regulacji – wskaźniki błędów

Tabela 5.1. Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ – bez zakłóceń

Regulator	MSE $_{\varphi}$	MAE $_{\varphi}$
LQR	0.0161	0.0585
PID	0.0042	0.0126
Composite	0.0209	0.0677

Tabela 5.2. Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ – z zakłóceniem

Regulator	MSE $_{\varphi}$	MAE $_{\varphi}$
LQR	0.0171	0.0687
PID	0.0067	0.0402
Composite	0.0322	0.1226

5.4. Podsumowanie eksperymentów

Przeprowadzone eksperymenty pozwoliły na porównanie trzech różnych strategii sterowania odwróconym wahadłem na wózku w identycznych warunkach początkowych oraz w obecności zakłóceń. Na podstawie analizy sygnałów oraz wartości wskaźników błędów (MSE i MAE) można sformułować następujące wnioski:

- Regulator **PID** wykazał najlepszą skuteczność w warunkach bez zakłóceń, osiągając najniższe wartości MSE i MAE, co sugeruje dobrą zdolność do szybkiego i precyzyjnego tłumienia wychylenia wahadła.
- W obecności zakłóceń regulator PID nadal utrzymywał dobrą jakość regulacji, jednak zauważalnie większy błąd bezwzględny (MAE) wskazuje na ograniczoną odporność na zaburzenia w porównaniu do LQR.
- Regulator **LQR**, choć nieco mniej precyzyjny w warunkach nominalnych, wykazał większą stabilność i odporność na zakłócenia, co czyni go solidnym wyborem w sytuacjach, gdzie przewiduje się obecność niestandardowych sił.
- Układ **Composite**, łączący zalety obu strategii, nie przyniósł oczekiwanej poprawy jakości regulacji. W szczególności zauważono pogorszenie wskaźników błędów, co może być związane z nieoptimalnym podziałem zadań między PID i LQR.

Podsumowując, dobór odpowiedniego regulatora powinien być uzależniony od warunków pracy układu – w sytuacjach nominalnych lepiej sprawdza się PID, natomiast w obecności zakłóceń bardziej odpowiedni może okazać się LQR.

Bibliografia

- [1] L. B. Prasad, B. Tyagi i H. O. Gupta, "Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input", *International Journal of Automation and Computing*, t. 11, nr 6, s. 661–670, 2014. DOI: 10.1007/s11633-014-0818-1

Wykaz symboli i skrótów

- x – Położenie wózka [m]
 \dot{x} – Prędkość wózka [m/s]
 φ – Kąt odchylenia wahadła od pionu [rad]
 $\dot{\varphi}$ – Prędkość kątowa wahadła [rad/s]
 u – Sygnał sterujący (siła działająca na wózek) [N]
LQR – Linear-Quadratic Regulator – regulator liniowo-kwadratowy
PID – Proporcjonalno-Całkującco-Różniczkujący regulator
MSE – Mean Squared Error – średni błąd kwadratowy
MAE – Mean Absolute Error – średni błąd bezwzględny
 Δt – Krok czasowy symulacji [s]
 N – Liczba próbek w sygnale dyskretnym

Spis rysunków

3.1 Animacja wahadła na wózku	9
5.1 Źle dostrojony regulator PID.	13
5.2 Dostrojony regulator PID przy użyciu pidtune.	13
5.3 Sygnały wyjściowe.	14
5.4 Sygnały wyjściowe z zakłóceniami.	14

Spis tabel

5.1 Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ – bez zakłóceń	15
5.2 Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ – z zakłóceniem	15