

Politechnika Warszawska

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI  
I TECHNIK INFORMACYJNYCH



Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej

# Praca dyplomowa inżynierska

na kierunku Automatyka i Robotyka

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Adam Sokołowski

Numer albumu 324892

promotor  
mgr inż. Robert Nebeluk

WARSZAWA 2026



# **Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku**

## **Streszczenie.**

Praca poświęcona jest zagadnieniu sterowania nieliniowym układem odwróconego wahadła na wózku. Jej głównym celem było zaprojektowanie efektywnego układu stabilizacji oraz przeprowadzenie wielokryterialnej analizy porównawczej różnych algorytmów sterowania, w tym klasycznych (PID, PID-LQR), predykcyjnych (MPC, LMPC) oraz rozmytych (Fuzzy-LQR).

Etapy pracy obejmowały wyrowadzenie modelu matematycznego dynamiki układu, implementację środowiska symulacyjnego oraz syntezę i strojenie sześciu struktur sterowania. W trakcie realizacji rozwiązyano problemy związane z nieliniowością i niestabilnością obiektu, a także wyzwania dotyczące doboru nastaw dla zaawansowanych algorytmów, w szczególności regulatora rozmytego i predykcyjnego, gdzie kluczowe było znalezienie kompromisu między horyzontem predykcji a stabilnością. Przeprowadzono również testy odporności układów na losowe zakłócenia zewnętrzne oraz zmiany parametrów fizycznych modelu.

Analiza wyników wykazała, że nie istnieje jeden uniwersalny regulator idealny w każdym aspekcie; metody rozmyte (Fuzzy-LQR) najlepiej tłumią zakłócenia, podczas gdy sterowanie predykcyjne (MPC) jest najbardziej ekonomiczne energetycznie w warunkach nominalnych. Hybrydowy regulator PID-LQR stanowi optymalny kompromis, oferując dobry balans między wydajnością a energochłonnością. Potwierdzono również, że kluczowym czynnikiem dla stabilności układu jest właściwy dobór funkcji kosztu i precyzyjne strojenie parametrów.

**Słowa kluczowe:** odwrócone wahadło,regulator PID,regulator LQR,regulator MPC,Takagi-Sugeno

## **Effective stabilisation system of the inverted pendulum on the cart**

**Abstract.** The thesis focuses on the control of a nonlinear inverted pendulum system on a cart. Its main objective was to design an effective stabilization system and perform a multi-criteria comparative analysis of various control algorithms, including classical (PID, PID-LQR), predictive (MPC, LMPC), and fuzzy (Fuzzy-LQR) methods.

The stages of the work involved deriving the mathematical model of the system dynamics, implementing the simulation environment, and synthesizing and tuning six control structures. During the implementation, problems related to the nonlinearity and instability of the object were solved, as well as challenges concerning the tuning of advanced algorithms, particularly the fuzzy and predictive controllers, where finding a trade-off between the prediction horizon and stability was crucial. Tests were also conducted to verify the systems' robustness against random external disturbances and changes in the physical parameters of the model.

The analysis of the results showed that there is no single universal controller perfect for every aspect; fuzzy methods (Fuzzy-LQR) are best at suppressing disturbances, while predictive control (MPC) is the most energy-efficient under nominal conditions. The hybrid PID-LQR controller represents an optimal compromise, offering a good balance between performance and energy consumption. It was also confirmed that the proper selection of the cost function and precise parameter tuning are key factors for system stability.

**Keywords:** inverted pendulum, PID controller, LQR controller, MPC controller, Takagi–Sugeno,

# Spis treści

<b>1. Wstęp . . . . .</b>	7
<b>2. Model matematyczny układu . . . . .</b>	10
2.1. Opis fizyczny i założenia upraszczające . . . . .	10
2.2. Analiza kinematyczna . . . . .	11
2.3. Równania dynamiki układu . . . . .	12
2.3.1. Bilans sił w kierunku poziomym . . . . .	12
2.3.2. Bilans momentów sił . . . . .	12
2.4. Nieliniowy model w przestrzeni stanów . . . . .	13
2.5. Linearyzacja modelu w punkcie pracy . . . . .	14
2.5.1. Analiza wartości własnych układu otwartego . . . . .	15
2.5.2. Sterowność i obserwowalność . . . . .	15
2.6. Analiza zachowania układu w pętli otwartej . . . . .	15
<b>3. Środowisko symulacyjne i implementacja . . . . .</b>	17
3.1. Narzędzia programistyczne . . . . .	17
3.2. Konfiguracja symulacji . . . . .	18
3.3. Modelowanie zakłóceń . . . . .	18
3.4. Wizualizacja i animacja . . . . .	19
<b>4. Algorytmy sterowania . . . . .</b>	21
4.1. Równoległy regulator PID . . . . .	21
4.1.1. Proces doboru nastaw oraz analiza PID . . . . .	22
4.2. Układ hybrydowy PID-LQR . . . . .	23
4.2.1. Dobór wag macierzy Q i R . . . . .	25
4.3. Nieliniowe sterowanie predykcyjne (MPC) . . . . .	26
4.3.1. Dobór horyzontu i wag funkcji celu . . . . .	28
4.4. MPC z rozszerzonym wskaźnikiem jakości (MPC-alt) . . . . .	29
4.4.1. Dobór parametrów i analiza wpływu kary za energię . . . . .	30
4.5. Liniowy regulator MPC (LMPC) . . . . .	31
4.5.1. Dobór parametrów i analiza działania . . . . .	32
4.6. Regulator rozmyty wspomagany LQR (Fuzzy-LQR) . . . . .	33
4.6.1. Dobór reguł i funkcji przynależności . . . . .	36
<b>5. Eksperymenty . . . . .</b>	38
5.1. Plan eksperymentów . . . . .	38
5.2. Wskaźniki jakości regulacji . . . . .	39
<b>6. Analiza wyników . . . . .</b>	41
6.1. Stabilizacja w warunkach nominalnych . . . . .	41
6.1.1. Charakterystyka regulatorów klasycznych . . . . .	41
6.1.2. Charakterystyka regulatorów zaawansowanych . . . . .	44

## **0. Spis treści**

---

6.1.3. Zestawienie wyników . . . . .	46
6.2. Analiza odporności na zakłócenia . . . . .	48
6.2.1. Charakterystyka regulatorów klasycznych . . . . .	48
6.2.2. Charakterystyka regulatorów zaawansowanych . . . . .	50
6.2.3. Zestawienie wyników . . . . .	52
6.3. Analiza odporności na zmianę parametrów modelu . . . . .	54
6.3.1. Analiza wrażliwości na zakres zmian . . . . .	57
6.4. Szczegółowe zestawienie ilościowe . . . . .	57
6.5. Porównanie złożoności obliczeniowej . . . . .	59
<b>7. Podsumowanie</b> . . . . .	60
<b>Bibliografia</b> . . . . .	61
<b>Wykaz symboli i skrótów</b> . . . . .	62
<b>Spis rysunków</b> . . . . .	64
<b>Spis tabel</b> . . . . .	64

# 1. Wstęp

Odwrócone wahadło na wózku służy jako kanoniczny układ testowy dla metod sterowania i estymacji stanu, ponieważ łączy w sobie trudności typowe dla systemów rzeczywistych: nieliniowość, niestabilność w otwartym układzie sterowania, ograniczenia urządzenia wykonawczego oraz niepewność parametrów. Umożliwia to weryfikację algorytmów w sytuacjach, w których klasyczne założenia teorii liniowej przestają obowiązywać, a układ wymaga adaptacji lub podejścia optymalnego.

Model ten posiada liczne analogie w praktyce inżynierskiej. Jego dynamika odzworowuje wiele złożonych zjawisk fizycznych i konstrukcji technicznych, w tym:

- stabilizację robotów dwukołowych (np. typu Segway) oraz robotów mobilnych bieżących na jednej osi [1];
- sterowanie suwnicami kontenerowymi oraz manipulatorami przemysłowymi, gdzie kluczowe jest tłumienie oscylacji przenoszonego ładunku [2];
- równoważenie platform i pojazdów samobalansujących, wymagające ciągłej korekty siły napędowej względem położenia środka masy [3].

Ze względu na powyższe zastosowania, problem stabilizacji odwróconego wahadła traktowany jest jako uproszczony model systemów rzeczywistych o zbliżonej dynamice. Badania symulacyjne na tym obiekcie pozwalają na wstępную walidację skuteczności algorytmów sterowania przed ich implementacją w bardziej złożonych lub kosztownych systemach.

W literaturze odwrócone wahadło na wózku traktowane jest powszechnie jako wzorcowy układ testowy dla weryfikacji algorytmów sterowania układami niestabilnymi. Kompletny model nieliniowy obiektu przedstawiono w pracy [3], uwzględniający zakłóceni, na podstawie którego przeprowadzono analizę porównawczą regulatorów PID, LQR w konfiguracjach hybrydowych.

Rozszerzenie zakresu badań o sterowanie predykcyjne (MPC) zaprezentowano w pozycji [4]. Autorzy stworzyli jednorodne środowisko symulacyjne, zestawiając przebiegi zmiennych stanu dla metod PID, LQR oraz MPC. Uzyskane rezultaty potwierdziły przewagę rozwiązań opartych na modelu (LQR, MPC) nad klasycznym PID w kontekście jakości regulacji, podkreślając jednocześnie kluczową zaletę MPC — możliwość bezpośredniego uwzględniania ograniczeń fizycznych nałożonych na wielkości sterujące.

Współczesne prace badawcze coraz częściej integrują metody optymalne z metodami sztucznej inteligencji. Artykuł [5] opisuje rozwiązanie hybrydowe, łączące regulator LQR z modelem rozmytym Takagi–Sugeno oraz obserwatorem stanu. Podejście to pozwala na przyspieszenie zbieżności błędu regulacji do zera oraz poprawę jakości estymacji zmiennych w obecności szumów pomiarowych i niepewności parametrycznej modelu.

Istotnym uzupełnieniem badań symulacyjnych są weryfikacje eksperymentalne, szeroko reprezentowane w krajowej literaturze naukowej. W pracy Jezierskiego i in. [6] prze-

prowadzono porównanie algorytmów LQR i MPC na rzeczywistym stanowisku laboratoryjnym. Wykazano, że o ile regulator LQR skutecznie utrzymuje punkt pracy i tłumи zakłocenia, to sterowanie predykcyjne zapewnia łagodniejsze sterowanie i lepsze właściwości śledzenia trajektorii, co ma kluczowe znaczenie w aplikacjach robotycznych.

Z punktu widzenia podstaw teoretycznych, fundamentem dla implementacji sterowania predykcyjnego są prace monograficzne Camacho i Bordonsa [7]. Omawiają one szczegółowo zagadnienia doboru funkcji kosztu, horyzontów predykcji, a także stabilności układu zamkniętego. Aspekty wdrożeniowe, w tym efektywność numeryczna algorytmów optymalizacji na platformach wbudowanych, poruszane są w nowszych publikacjach [8]. Natomiast w obszarze sterowania rozmytego cennym źródłem wiedzy metodycznej są opracowania dotyczące modeli Takagi–Sugeno i ich porównań z podejściami klasycznymi [9].

Głównym celem niniejszej pracy jest zaprojektowanie oraz weryfikacja efektywności układu stabilizacji odwróconego wahadła na wózku. Obiekt ten, ze względu na swoje właściwości dynamiczne, stanowi klasyczny przykład układu nieliniowego i niestabilnego, co czyni go doskonałą platformą testową do analizy porównawczej różnorodnych strategii sterowania.

Aby zrealizować ten cel, zakres pracy obejmuje opracowanie autorskiego środowiska symulacyjnego, które wiernie odwzorowuje fizykę i dynamikę ruchu wózka z wahadłem. Środowisko to posłuży do implementacji i testowania wybranych algorytmów regulacji, reprezentujących przekrój współczesnej automatyki. W pracy rozważone zostaną trzy zasadnicze grupy metod:

- podejście klasyczne, oparte na konwencjonalnych pętlach sprzężenia zwrotnego,
- metody sterowania optymalnego i predykcyjnego, uwzględniające model obiektu oraz ograniczenia sterowania,
- metody sterowania inteligentnego, wykorzystujące logikę rozmytą.

Kluczowym elementem pracy jest przeprowadzenie wielokryterialnej oceny działania zaprojektowanych układów. Analiza porównawcza nie ogranicza się jedynie do sprawdzenia zdolności utrzymania wahadła w pionie. Badania obejmują również weryfikację jakości regulacji w stanach przejściowych, analizę energochłonności poszczególnych rozwiązań oraz sprawdzenie ich odporności na zakłocenia zewnętrzne i niepewność parametrów modelu. Szczegółowe definicje algorytmów oraz matematyczne sformułowanie wskaźników jakości zostały przedstawione w kolejnych rozdziałach pracy.

Układ pracy został podzielony na rozdziały, których treść odpowiada kolejnym etapom realizacji projektu. Rozdział drugi przedstawia szczegółowe wyprowadzenie modelu matematycznego odwróconego wahadła na wózku. Zawiera on opis fizyczny obiektu, równania dynamiki sformułowane w oparciu o prawa mechaniki, a także linearyzację modelu niezbędną do syntezy wybranych regulatorów. Rozdział trzeci poświęcony jest opisowi zrealizowanego środowiska symulacyjnego. Przedstawiono w nim narzędzia programistyczne,

metody numeryczne wykorzystane do rozwiązywania równań różniczkowych oraz sposób modelowania zakłóceń zewnętrznych. Rozdział czwarty zawiera charakterystykę zaimplementowanych algorytmów sterowania. Omówiono w nim podstawy teoretyczne oraz szczegółowe implementacyjne regulatorów: klasycznego PID-PID, optymalnego PID-LQR, predykcyjnego MPC/LMPC oraz rozmytego Takagi–Sugeno. Rozdział piąty opisuje metodykę badań symulacyjnych. Zdefiniowano w nim scenariusze testowe, przyjęte wskaźniki jakości oraz procedurę strojenia regulatorów, ze szczególnym uwzględnieniem doboru wag macierzy LQR oraz nastaw regulatora PID. Rozdział szósty prezentuje wyniki przeprowadzonych eksperymentów. Zawiera on szczegółową analizę przebiegów czasowych, zestawienie tabelaryczne błędów regulacji w warunkach nominalnych i zakłóconych, oraz dyskusję porównawczą skuteczności badanych metod. Pracę kończy podsumowanie, zawierające wnioski końcowe oraz kierunki dalszego rozwoju projektu.

## 2. Model matematyczny układu

Celem niniejszego rozdziału jest szczegółowe wyprowadzenie modelu matematycznego obiektu sterowania, którym jest odwrócone wahadło na wózku. Precyzyjne odwzorowanie dynamiki procesu jest fundamentalnym etapem projektowania układu sterowania, gdyż jakość modelu bezpośrednio wpływa na skuteczność algorytmów predykcyjnych (MPC) oraz optymalnych (LQR). Wyprowadzenie oparto na prawach mechaniki klasycznej oraz analizie sił i momentów przedstawionej w literaturze przedmiotu [3].

### 2.1. Opis fizyczny i założenia upraszczające

Rozważany obiekt sterowania należy do klasy mechanicznych układów podwzbudnych (ang. *underactuated systems*), co oznacza, że liczba wejść sterujących jest mniejsza od liczby stopni swobody. Układ składa się z wózka poruszającego się wzdłuż poziomej osi oraz pręta z masą skupioną, zamocowanego przegubowo do wózka.

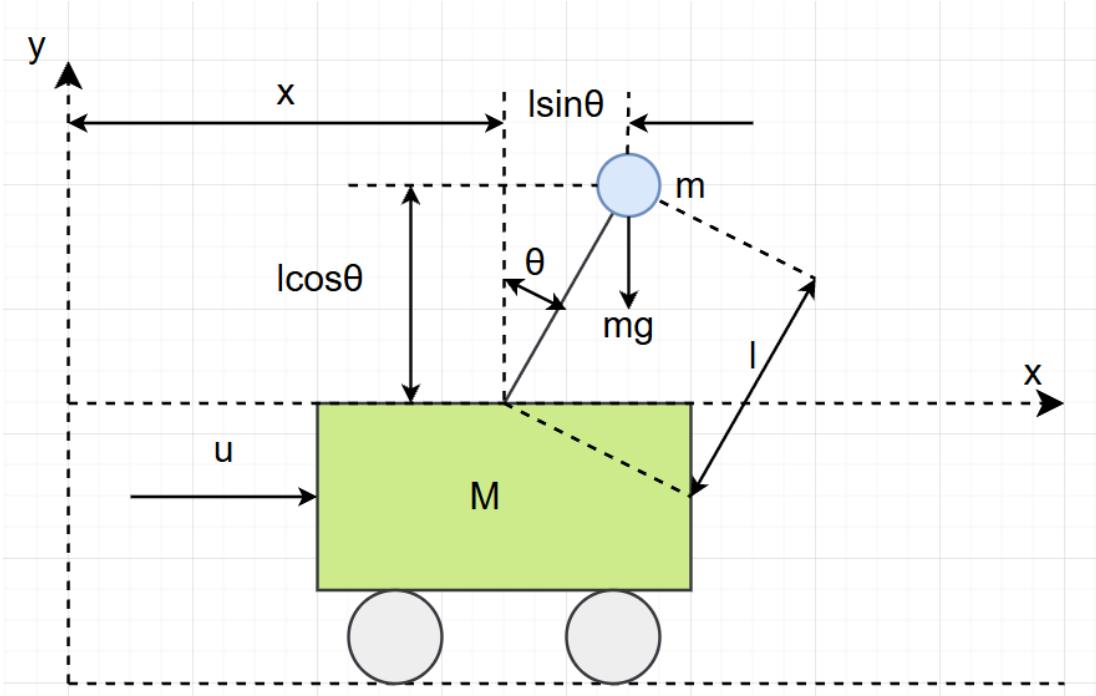
Przyjęto następujące parametry fizyczne modelu, zgodne z oznaczeniami stosowanymi w pracy badawczej [3]:

- $M$  — masa wózka [kg],
- $m$  — masa wahadła (traktowana jako masa punktowa na końcu pręta) [kg],
- $l$  — długość wahadła (odległość od osi obrotu do środka ciężkości) [m],
- $g$  — przyspieszenie ziemskie [ $\text{m}/\text{s}^2$ ],
- $F(t)$  — siła sterująca przyłożona do wózka [N],
- $F_w(t)$  — siła zakłócająca (zakłócenie zewnętrzne) działająca poziomo na masę wahadła [N].

W celu sformułowania modelu analitycznego przyjęto następujące założenia upraszczające [3]:

- Pręt wahadła jest nieważki i sztywny.
- Tarcie w łożyskach kół wózka oraz w przegubie wahadła jest pomijalnie małe.
- Ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej  $x - y$ .
- Cała masa wahadła jest skupiona w jego środku geometrycznym (masa punktowa).

Układ odniesienia zdefiniowano w taki sposób, że współrzędna  $x(t)$  opisuje poziome przesunięcie wózka, natomiast kąt  $\theta(t)$  określa wychylenie wahadła od pionu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Pozycja  $\theta = 0$  odpowiada niestabilnemu punktowi równowagi (wahadło w górze).



Rysunek 2.1. Diagram układu odwróconego wahadła na wózku.

## 2.2. Analiza kinematyczna

W pierwszej kolejności zdefiniowano położenie środka ciężkości (COG) masy wahadła  $m$  w nieruchomym układzie odniesienia. Oznaczając współrzędne środka masy jako  $(x_G, y_G)$ , można je wyrazić jako sumę przemieszczenia wózka oraz rzutu geometrycznego ramienia wahadła [3]:

$$x_G(t) = x(t) + l \sin \theta(t), \quad (1)$$

$$y_G(t) = l \cos \theta(t). \quad (2)$$

gdzie  $x_G$  to pozioma współrzędna masy wahadła, a  $y_G$  to jej współrzędna pionowa (odległość od osi wózka).

Aby zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona dla masy  $m$ , konieczne jest wyznaczenie jej prędkości oraz przyspieszeń całkowitych (bezwzględnych). Różniczkując równania (1) i (2) względem czasu, otrzymuje się składowe prędkości:

$$\dot{x}_G(t) = \dot{x}(t) + l \cos \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t), \quad (3)$$

$$\dot{y}_G(t) = -l \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t). \quad (4)$$

Ponowne różniczkowanie pozwala wyznaczyć składowe przyspieszenia środka masy wahadła  $\ddot{x}_G$  oraz  $\ddot{y}_G$ . Uwzględniają one zarówno przyspieszenie liniowe wózka, jak i składowe prędkości  $\dot{x}$  i  $\dot{y}$ .

dowe ruchu obrotowego (przyspieszenie styczne i dośrodkowe):

$$\ddot{x}_G(t) = \ddot{x}(t) + l \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) - l \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t), \quad (5)$$

$$\ddot{y}_G(t) = -l \sin \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) - l \cos \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t). \quad (6)$$

Powyzsze zależności (5) i (6) są kluczowe, ponieważ siły bezwładności działające na masę wahadła zależą od jej całkowitego przyspieszenia w przestrzeni, a nie tylko od kąta wychylenia.

### 2.3. Równania dynamiki układu

Model dynamiczny wyprowadzono, rozpatrując siły działające na wózek oraz na wahadło osobno, a następnie składając je w układ równań sprężonych. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, suma sił zewnętrznych działających na cały układ w kierunku osi  $x$  musi równać się zmianie pędu układu. Siłami zewnętrznymi są: siła sterująca  $u(t)$  przyłożona do wózka oraz siła zakłócająca  $F_w(t)$  przyłożona do masy wahadła [3].

#### 2.3.1. Bilans sił w kierunku poziomym

Równanie równowagi sił dla całego układu (masy  $M$  i  $m$ ) przyjmuje postać:

$$M\ddot{x}(t) + m\ddot{x}_G(t) = u(t) + F_w(t). \quad (7)$$

Podstawiając wyznaczone wcześniej przyspieszenie poziome środka masy wahadła (5) do równania (7), otrzymujemy:

$$M\ddot{x}(t) + m(\ddot{x}(t) + l \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) - l \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t)) = u(t) + F_w(t). \quad (8)$$

Po przekształceniu, otrzymujemy pierwsze równanie różniczkowe opisujące ruch postępowy układu:

$$(M+m)\ddot{x}(t) + ml \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) - ml \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t) = u(t) + F_w(t). \quad (9)$$

#### 2.3.2. Bilans momentów sił

Ruch obrotowy wahadła opisano poprzez sumę momentów sił względem punktu zawieszenia (przegubu na wózku). Siłami generującymi moment obrotowy są siły bezwładności masy wahadła, siła ciężkości oraz siła zakłócająca.

Zgodnie z analizą przedstawioną w pracy [3], równanie momentów przyjmuje postać:

$$m\ddot{x}_G(t)l \cos \theta(t) - m\ddot{y}_G(t)l \sin \theta(t) = mg l \sin \theta(t) + F_w(t)l \cos \theta(t). \quad (10)$$

W równaniu tym lewa strona reprezentuje moment wynikający z sił bezwładności, natomiast prawa strona uwzględnia momenty od sił zewnętrznych (grawitacji i zakłócenia

zewnętrznego). Należy zauważyć, że siła zakłócająca  $F_w(t)$  działa poziomo, stąd jej ramię siły względem punktu obrotu wynosi  $l \cos \theta(t)$ .

Podstawiając wyrażenia na przyspieszenia  $\ddot{x}_G$  (5) oraz  $\ddot{y}_G$  (6) do równania momentów (10), otrzymujemy rozbudowaną postać równania:

$$\begin{aligned} ml \cos \theta(t) (\ddot{x}(t) + l \cos \theta(t) \ddot{\theta}(t) - l \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t)) \\ - ml \sin \theta(t) (-l \sin \theta(t) \ddot{\theta}(t) - l \cos \theta(t) \dot{\theta}^2(t)) = mg l \sin \theta(t) + F_w(t) l \cos \theta(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Po wymnożeniu nawiasów składniki zawierające  $\dot{\theta}^2$  wzajemnie się redukują. Wykorzystując jedynkę trygonometryczną  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  oraz dzieląc całe równanie przez  $l$ , otrzymujemy ostateczne drugie równanie dynamiki [3]:

$$m \cos \theta(t) \cdot \ddot{x}(t) + ml \cdot \ddot{\theta}(t) = mg \sin \theta(t) + F_w(t) \cos \theta(t). \quad (12)$$

#### 2.4. Nieliniowy model w przestrzeni stanów

Układ równań (9) i (12) stanowi kompletny, sprzężony opis dynamiki. W celu prowadzenia symulacji numerycznej, konieczne jest rozprzężenie układu i wyznaczenie jawnych postaci przyspieszeń  $\ddot{x}$  i  $\ddot{\theta}$ .

Wyznaczając  $\ddot{x}$  z równania (12):

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m \cos \theta(t)} (mg \sin \theta(t) + F_w(t) \cos \theta(t) - ml \ddot{\theta}(t)), \quad (13)$$

i podstawiając do równania (9), a następnie wykonując przekształcenia algebraiczne, otrzymujemy jawnie wzory na przyspieszenia.

Ostateczne równania ruchu, uwzględniające wpływ siły sterującej  $u$  oraz zakłócenia  $F_w$ , przyjmują postać [3]:

$$\ddot{x}(t) = \frac{u(t) + ml \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}^2(t) - mg \sin \theta(t) \cos \theta(t) + F_w(t) \sin^2 \theta(t)}{M + m - m \cos^2 \theta(t)}, \quad (14)$$

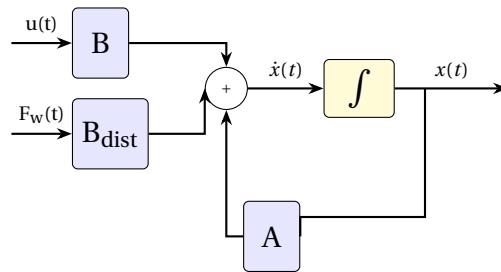
$$M_T = M + m, \quad D(t) = l(M_T - m \cos^2 \theta(t)) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) = \frac{1}{D(t)} \left[ M_T g \sin \theta(t) - \cos \theta(t) \left( u(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + ml \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + F_w(t) \left( \frac{M}{m} - 1 \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Definiując wektor stanu  $x(t) = [\theta(t), \dot{\theta}(t), x(t), \dot{x}(t)]^T$ , model w przestrzeni stanów zapisujemy jako układ czterech równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{(M+m)g \sin x_1 - u \cos x_1 - ml(\sin x_1 \cos x_1)x_2^2 - F_w(\frac{M}{m} \cos x_1 - \cos x_1)}{l(M+m-m \cos^2 x_1)} \\ x_4 \\ \frac{u + ml(\sin x_1)x_2^2 - mg \sin x_1 \cos x_1 + F_w \sin^2 x_1}{M+m-m \cos^2 x_1} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Schemat blokowy modelu w przestrzeni stanów, ilustrujący przepływ sygnałów sterowania i zakłóceń, przedstawiono na Rys. 2.2.



**Rysunek 2.2.** Schemat blokowy nieliniowego modelu wahadła w przestrzeni stanów.

## 2.5. Linearyzacja modelu w punkcie pracy

W celu zastosowania algorytmów sterowania liniowego LQR, przeprowadzono linearyzację modelu nieliniowego wokół punktu równowagi chwiejnej ( $\theta = 0$ ). Dla małych wychyleń zastosowano przybliżenia  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1$ , a wyrazy wyższego rzędu ( $\dot{\theta}^2$ ,  $\sin^2\theta$ ) pominięto.

Liniowy model układu w postaci  $\dot{x} = Ax + Bu + B_{\text{dist}}F_w$  opisują macierze wyznaczone zgodnie z literaturą [3]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Macierz sterowania  $B$  oraz macierz zakłóceń  $B_{\text{dist}}$  przyjmują postać:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad B_{\text{dist}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Warto zauważyć, że w modelu zlinearyzowanym wpływ zakłócenia zewnętrznego na przyspieszenie kątowe wahadła jest odwrotnie proporcjonalny do masy  $m$  (element  $-\frac{1}{ml}$  w macierzy  $B_{\text{dist}}$ ), podczas gdy w równaniu przyspieszenia wózka efekt ten zanika

dla małych kątów (element zerowy). Jest to zgodne z wynikami prezentowanymi w pracy źródłowej [3].

### 2.5.1. Analiza wartości własnych układu otwartego

Aby formalnie potwierdzić niestabilność układu w górnym punkcie równowagi, wyznaczono wartości własne macierzy stanu  $A$ . Dla przyjętych parametrów fizycznych ( $M = 2,4$  kg,  $m = 0,23$  kg,  $l = 0,36$  m,  $g = 9,81$  m/s $^2$ ) wielomian charakterystyczny  $\det(\lambda I - A) = 0$  przyjmuje postać:

$$\lambda^4 - \frac{(M+m)g}{Ml}\lambda^2 = 0. \quad (20)$$

Rozwiązuając powyższe równanie, otrzymujemy cztery wartości własne:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 \approx -5,49, \quad \lambda_4 \approx 5,49. \quad (21)$$

Obecność dodatniej wartości własnej  $\lambda_4 > 0$  potwierdza, że układ w pętli otwartej jest niestabilny — każde, nawet minimalne odchylenie od pionu będzie narastać eksponencjalnie w czasie. Dwie zerowe wartości własne odpowiadają ruchowi wózka po torze (brak tłumienia, brak siły przywracającej).

### 2.5.2. Sterowność i obserwowalność

Warunkiem koniecznym stosowności regulatora LQR jest pełna sterowność pary  $(A, B)$ . Macierz sterowności Kalmana zdefiniowana jest jako:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Dla rozpatrywanego układu wyznaczono  $\text{rank}(\mathcal{C}) = 4$ , co oznacza pełną sterowność — istnieje sygnał sterujący  $u(t)$ , który pozwala przeprowadzić układ z dowolnego stanu początkowego do dowolnego stanu końcowego w skończonym czasie.

Analogicznie, macierz obserwowalności (przy założeniu pomiaru kąta  $\theta$  i pozycji  $x$ , tj.  $C = [1, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0]$ ) ma pełny rząd, co potwierdza pełną obserwowalność układu. Oznacza to, że na podstawie pomiarów wyjściowych możliwe jest jednoznaczne odtworzenie pełnego wektora stanu, co jest istotne dla praktycznej implementacji regulatorów opartych na sprzężeniu zwrotnym od stanu.

## 2.6. Analiza zachowania układu w pętli otwartej

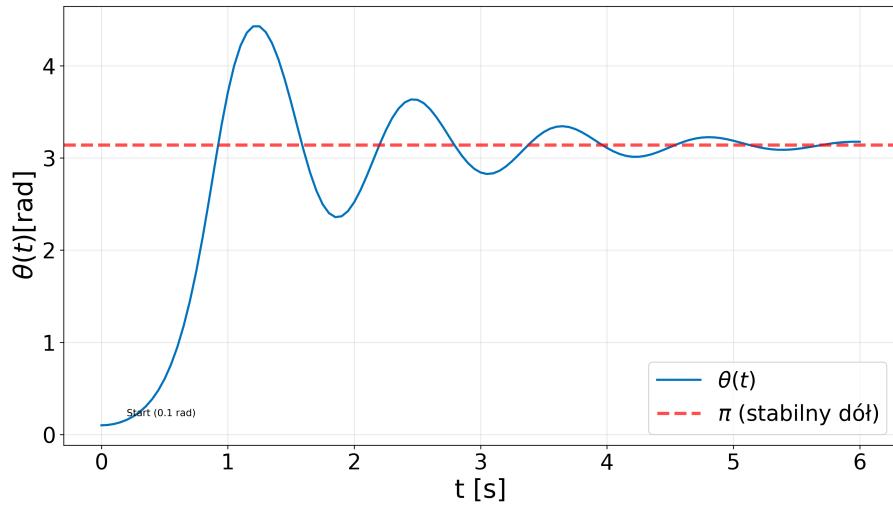
Odwrócone wahadło jest z natury układem niestabilnym w górnym punkcie równowagi ( $\theta = 0$ ). Aby zobrazować tę właściwość, przeprowadzono symulację zachowania obiektu bez działania układu sterowania ( $u(t) = 0$ ), przy niewielkim wychyleniu początkowym  $\theta_0 = 0,1$  rad (ok.  $5,7^\circ$ ).

Jak pokazano na Rys. 2.3, nawet niewielkie odchylenie od pionu powoduje, że pod wpływem siły grawitacji wahadło gwałtownie traci równowagę i opada. W rzeczywistym ukła-

## 2. Model matematyczny układu

---

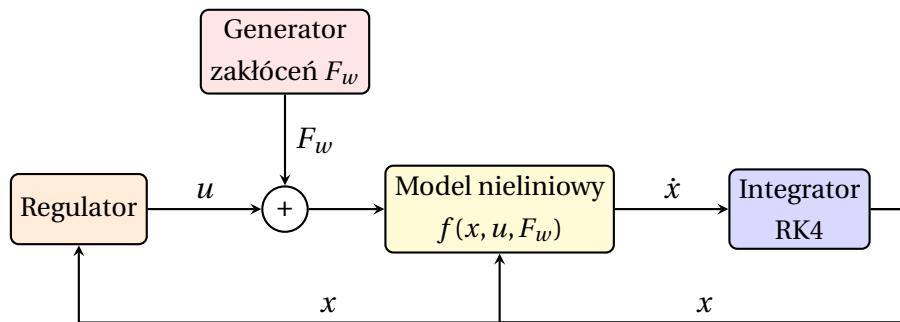
dzie fizycznym, obecność tarcia w przegubie oraz oporu powietrza sprawia, że energia mechaniczna jest rozpraszana. W rezultacie, kąt wychylenia  $\theta(t)$  dąży do stabilnego punktu równowagi dolnej, tj.  $\theta = \pi$  rad.



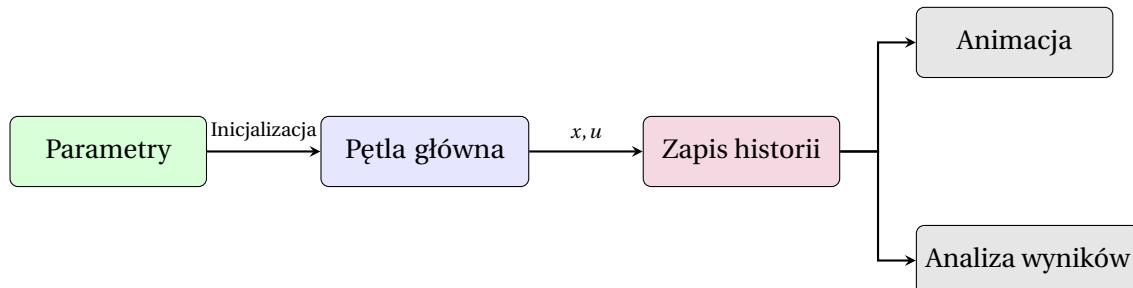
**Rysunek 2.3.** Symulacja odpowiedzi swobodnej układu (z uwzględnionym tłumieniem) na małe wychylenie początkowe. Układ opuszcza niestabilny punkt równowagi ( $\theta \approx 0$ ) i stabilizuje się w pozycji wiszącej ( $\theta = \pi$ ).

### 3. Środowisko symulacyjne i implementacja

W celu przeprowadzenia badań i weryfikacji działania algorytmów sterowania, przygotowano zestaw skryptów symulacyjnych zrealizowanych w języku Python 3. Wybór tego języka podyktowany był jego powszechnością w zastosowaniach naukowych, dostępnością bibliotek do obliczeń numerycznych i optymalizacji, a także łatwością prototypowania złożonych struktur sterowania. Ogólną architekturę środowiska przedstawiono na Rys. 3.1 i na Rys. 3.2.



Rysunek 3.1. Schemat blokowy pętli symulacyjnej (rdzeń obliczeniowy).



Rysunek 3.2. Architektura przepływu danych w zrealizowanej aplikacji.

#### 3.1. Narzędzia programistyczne

W projekcie wykorzystano następujące biblioteki i narzędzia:

- **NumPy** [10] – podstawowa biblioteka do obliczeń macierzowych i operacji na wielowymiarowych tablicach danych, wykorzystywana do implementacji równań stanu oraz przechowywania przebiegów symulacji.
- **SciPy** [11] – pakiet naukowy dostarczający zaawansowanych algorytmów numerycznych. W pracy użyto modułów:
  - `scipy.linalg` – do rozwiązywania algebraicznego równania Riccatiego (ARE) w algorytmie LQR.
  - `scipy.optimize` – zawierającego solwer `minimize` (metoda SLSQP), wykorzystywany do rozwiązywania zadań optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami w regulatorze MPC.

### 3. Środowisko symulacyjne i implementacja

---

- **Matplotlib** – biblioteka służąca do wizualizacji wyników w postaci wykresów przebiegów czasowych oraz do generowania animacji ruchu wahadła.

#### 3.2. Konfiguracja symulacji

Symulator opiera się na numerycznym całkowaniu wyprowadzonych wcześniej nieliniowych równań dynamiki. Wybrano procedurę całkowania metodą Runge-Kutta czwartego rzędu (RK4). Wybór tej metody podyktowany był kilkoma czynnikami: w odróżnieniu od prostszej metody Eulera, RK4 charakteryzuje się błędem lokalnym rzędu  $\mathcal{O}(\Delta t^5)$ , co zapewnia wysoką dokładność przy umiarkowanym koszcie obliczeniowym. Jednocześnie, w przeciwieństwie do metod adaptacyjnych (np. `ode45`), stały krok czasowy gwarantuje deterministyczne taktowanie pętli sterowania, co jest istotne przy porównywaniu regulatorów. Symulacja prowadzona jest ze stałym krokiem czasowym  $T = 0,1$  s.

**Tabela 3.1.** Parametry fizyczne modelu przyjęte w symulacji

Parametr	Symbol	Wartość	Jednostka
Masa wózka	$M$	2,40	kg
Masa wahadła	$m$	0,23	kg
Długość wahadła	$l$	0,36	m
Przyspieszenie ziemskie	$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>
Ograniczenie sterowania	$F_{\max}$	100,00	N

Symulacje przeprowadzane są dla zadania stabilizacji układu w pionie (tzw. punkt pracy), startując z niezerowych warunków początkowych lub wymuszając zmianę pozycji wózka.

**Warunki początkowe:**

$$x_0 = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T = [\theta_0, 0, 0, 0]^T$$

gdzie  $\theta_0$  to  $0,05$ [rad]. Oznacza to niewielkie (ok.  $2,86^\circ$ ) początkowe wychylenie wahadła, które regulator musi zniwelować.

**Wartości zadane:** Celem układu jest osiągnięcie stanu  $x_{\text{ref}} = [0, 0, x_{\text{ref}}, 0]^T$ , gdzie  $x_{\text{ref}}$  ( $0,10$  m) jest zadaną nową pozycją wózka, przy jednoczesnym utrzymaniu pionowej pozycji wahadła ( $\theta = 0$ ).

#### 3.3. Modelowanie zakłóceń

Aby zweryfikować odporność układów sterowania, zaimplementowano generator zakłóceń zewnętrznych działających na wahadło. Generator ten działa w sposób dyskretny, realizując w każdym kroku symulacji  $k$  następujące operacje:

**1. Próbkowanie szumu:**

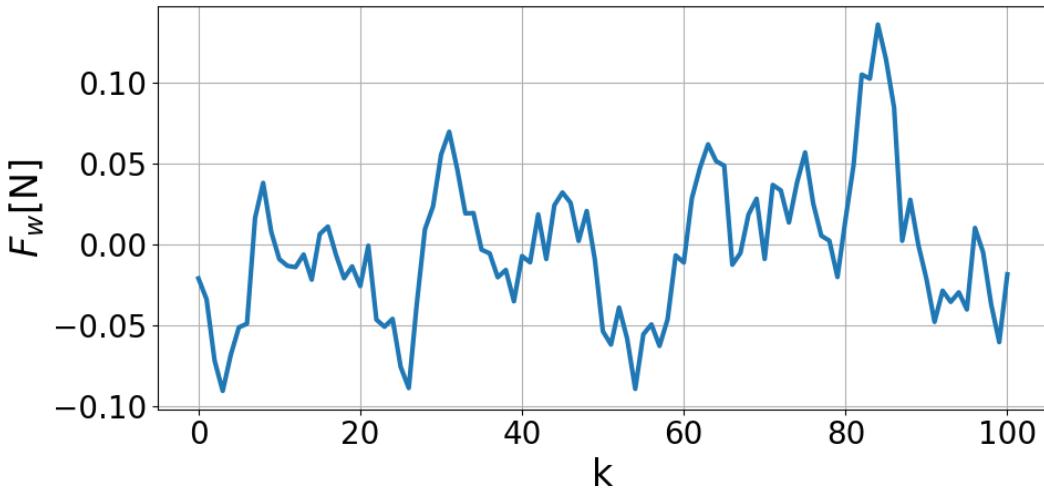
$$w(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (23)$$

gdzie  $\sigma$  jest odchyleniem standardowym siły zakłócającej wyrażonym w niutonach. W przeprowadzonych eksperymentach przyjęto  $\sigma = 2,2$  N, co oznacza, że wartość skuteczna (RMS) siły zakłócającej wynosi około 2,2 N, a chwilowe wartości szczytowe mogą osiągać  $\pm 6,6$  N (przedział  $3\sigma$ ). Parametr ten dobrano empirycznie tak, aby zakłócenia stanowiły znaczące obciążenie dla układu sterowania (porównywalne z kilkoma procentami maksymalnej siły urządzenia wykonawczego  $F_{\max} = 100$  N), lecz nie przekraczały możliwości kompensacyjnych badanych regulatorów.

**2. Wygładzanie (ruchoma średnia):**

$$F_w(k) = \frac{1}{N_s} \sum_{i=0}^{N_s-1} w_{k-i}, \quad (24)$$

gdzie  $F_w(k)$  to wypadkowa siła zakłócająca w danej chwili, a  $N_s$  to długość okna uśredniającego (przyjęto  $N_s = 10$ ). Takie podejście pozwala na uzyskanie ciągłego, wolnozmiennego sygnału lepiej odwzorowującego rzeczywiste zakłócenia zewnętrzne. Przykładowy przebieg wygenerowanego sygnału przedstawiono na Rys. 3.3.



**Rysunek 3.3.** Przykładowa realizacja stochastycznego procesu zakłócenia zewnętrznego działającego na wahadło w czasie symulacji.

**3.4. Wizualizacja i animacja**

Oprócz standardowych wykresów zmiennych stanu i sterowania, środowisko wyposażono w moduł wizualizacji dynamicznej (Rys. 3.4). Implementacja animacji oparta jest na bibliotece Matplotlib i klasie FuncAnimation, która pozwala na cykliczne odświeżanie obiektów graficznych zgodnie z taktowaniem symulacji.

### 3. Środowisko symulacyjne i implementacja

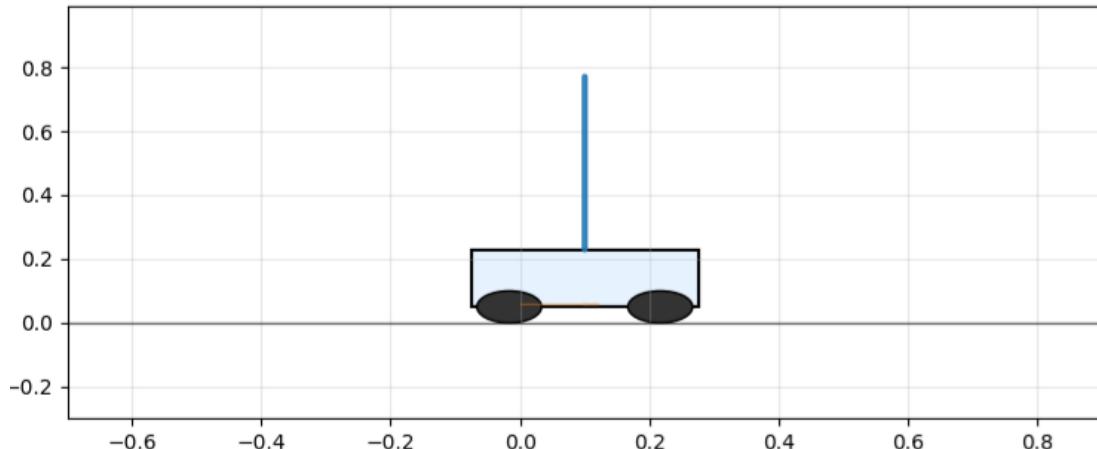
---

Graficzna reprezentacja obiektu (robot) zbudowana jest z prostych prymitywów geometrycznych:

- **Wózek:** obiekt typu `Rectangle`, którego pozycja pozioma aktualizowana jest w każdej klatce na podstawie zmiennej stanu  $x(t)$ .
- **Koła:** obiekty `Circle`, poruszające się wraz z wózkiem.
- **Wahadło:** obiekt liniowy, którego współrzędne końcowe wyznaczane są na podstawie kąta  $\theta(t)$ .

Kluczowym elementem implementacji jest funkcja aktualizująca `update`, wywoływana dla każdego kroku czasowego. Odpowiada ona za przeliczenie współrzędnych kinetycznych oraz przesunięcie okna widoku kamery tak, aby wózek znajdował się zawsze w centrum, co pozwala na obserwację ruchu na długim dystansie. Dodatkowo rysowany jest ślad przebytej drogi przez oś wózka, co ułatwia wizualną ocenę stabilności pozycji.

Wykorzystanie animacji pozwala na szybką, intuicyjną weryfikację poprawności modelu fizycznego oraz ocenę jakości regulacji w sposób trudny do uchwycenia na statycznych wykresach (np. nienaturalne drgania czy gwałtowne, nieciągłe zmiany sygnału sterującego).



**Rysunek 3.4.** Zrzut ekranu z animacji realizowanej w środowisku Python (biblioteka Matplotlib). Widoczny wózek, wahadło oraz zakres ruchu.

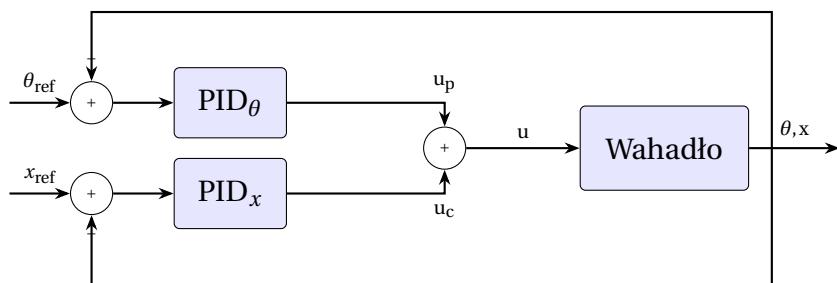
## 4. Algorytmy sterowania

W niniejszym rozdziale przedstawiono szczegółowy opis algorytmów sterowania zaimplementowanych i przeanalizowanych w ramach pracy. Kod regulatorów został zrealizowany w języku Python w postaci klas dziedziczących wspólną strukturę, co zapewnia modularność i łatwą wymienność w pętli symulacyjnej. Każdy regulator wyznacza sygnał sterujący  $u(k)$  (siłę przyłożoną do wózka) na podstawie aktualnego wektora stanu  $x(k) = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T$  oraz wartości zadanych  $x_{\text{ref}}$ .

W literaturze problem sterowania wahadłem odwróconym jest szeroko omawiany jako klasyczny problem testowy dla metod sterowania liniowego i nieliniowego [3], [5]. Poniżej opisano teoretyczne podstawy oraz szczegółowe implementacyjne zbadanych struktur sterowania.

### 4.1. Równoległy regulator PID

Pierwszym zaimplementowanym układem jest regulator o strukturze równoległej, wykorzystujący klasyczne sprzężenie zwrotne typu PID [3]. Zastosowano strukturę równoległą, w której całkowity sygnał sterujący jest sumą reakcji na błąd kąta oraz błąd pozycji.



**Rysunek 4.1.** Schemat blokowy regulatora PID o strukturze równoległej.

Prawo sterowania wyraża się wzorem:

$$u(k) = u_\theta(k) + u_x(k), \quad (25)$$

Definiując uchyby regulacji w  $k$ -tej chwili próbkowania jako  $e_\theta(k) = \theta_{\text{ref}} - \theta(k)$  oraz  $e_x(k) = x_{\text{ref}} - x(k)$ , prawo sterowania w implementacji cyfrowej przyjmuje postać dyskretną.

$$u_\theta(k) = K_{p,\theta} e_\theta(k) + K_{i,\theta} \sum_{j=0}^k e_\theta(j) T - K_{d,\theta} \frac{\theta(k) - \theta(k-1)}{T}, \quad (26)$$

$$u_x(k) = K_{p,x} e_x(k) + K_{i,x} \sum_{j=0}^k e_x(j) T - K_{d,x} \frac{x(k) - x(k-1)}{T}. \quad (27)$$

gdzie  $T = 0,1$  s oznacza okres próbkowania, co pozwala na przejście z opisu w czasie ciągłym  $t$  do dyskretnych chwil  $k$ .

#### 4.1.1. Proces doboru nastaw oraz analiza PID

Dobór nastaw dla regulatora PID został zrealizowany wieloetapowo. Wstępny dobór nastaw przeprowadzono metodą eksperymentalną prób i błędów, jednak nie pozwoliła ona na uzyskanie zadowalających wskaźników jakości, gdyż obiekt wahadła na wózku wymaga bardzo precyzyjnych nastaw, a dobór parametrów metodą prób i błędów jest czasochłonny i nie gwarantuje optymalnych rezultatów.

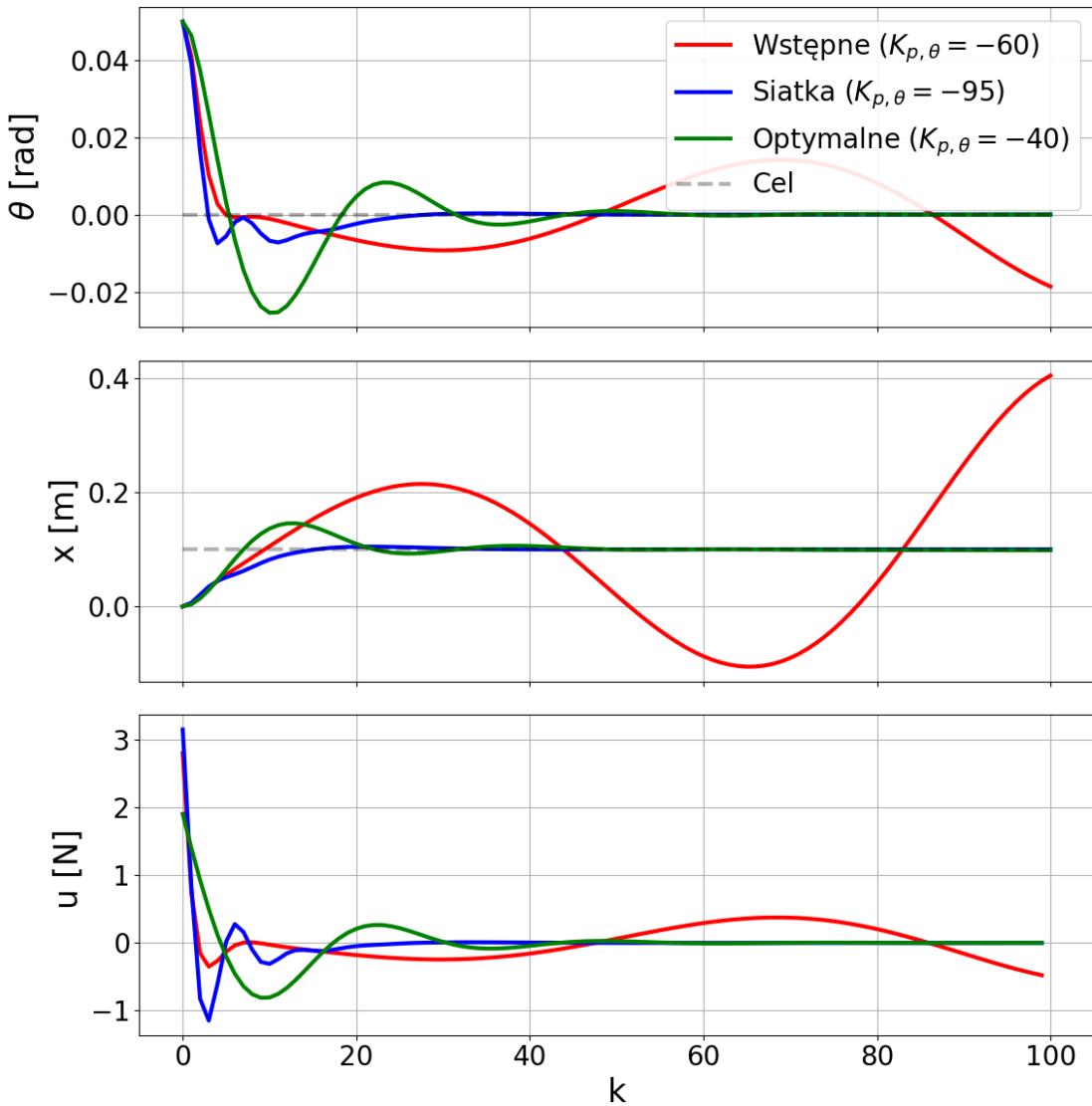
Wstępne próby doboru metodą prób i błędów (Rys. 4.2, linia czerwona) wskazały, że początkowe wzmacnienia ( $K_{p,\theta} = -60$  dla kąta) zapewniały pewną stabilność, ale nie były wystarczające do dynamicznego tłumienia zakłóceń. Następnie aby wyeliminować subiektywność strojenia ręcznego, zastosowano metodę przeszukiwania siatki (ang. *grid search*). Przeszukano siatkę wartości dla każdego z sześciu parametrów. Wyniki dla najlepszej konfiguracji z siatki przedstawiono linią niebieską na Rys. 4.2. Charakteryzują się one znacznie wyższymi wzmacnieniami ( $K_{p,\theta} = -95$ ,  $K_{p,x} = -60$ ). Jednak w tym przypadku jakość sygnału sterującego była niezadowalająca. Ostateczne strojenie (linia zielona) wykonano ręcznie, biorąc pod uwagę wyniki z siatki. Ostateczny regulator PID charakteryzuje się szybkim osiąganiem wartości zadanej oraz wysoką jakością sygnału sterującego. Ujemne znaki nastaw regulatora PID wynikają z przyjętej konwencji układu współrzędnych i zwrotu siły. Analiza porównawcza wykazuje, że redukcja wzmacnienia  $K_{p,\theta}$  w strojeniu ręcznym, mimo zmniejszenia sztywności układu, jest kluczowa dla ograniczenia oscylacji. Pozwala to na uzyskanie gładkiego przebiegu sygnału sterującego, co jest pożądane ze względu na trwałość elementów mechanicznych.

**Tabela 4.1.** Zestawienie parametrów strojenia regulatora PID-PID.

Wariant	Tor Kąta ( $K_p, K_i, K_d$ )	Tor Pozycji ( $K_p, K_i, K_d$ )
Wstępne	-60, -2, -9	-2, -1, -1
Siatka	-95, 0, -14	-16, 0, -14
Optymalne	-40, -1, -8	-1, -0, 1, -3

W implementacji programowej przyjęto następujące nastawy:

- Tor stabilizacji kąta:  $K_{p,\theta} = -40, 0$ ,  $K_{i,\theta} = -1, 0$ ,  $K_{d,\theta} = -8, 0$ .
- Tor pozycji:  $K_{p,x} = -1, 0$ ,  $K_{i,x} = -0, 1$ ,  $K_{d,x} = -3, 0$ .



**Rysunek 4.2.** Zestawienie przebiegów regulatora PID.

## 4.2. Układ hybrydowy PID-LQR

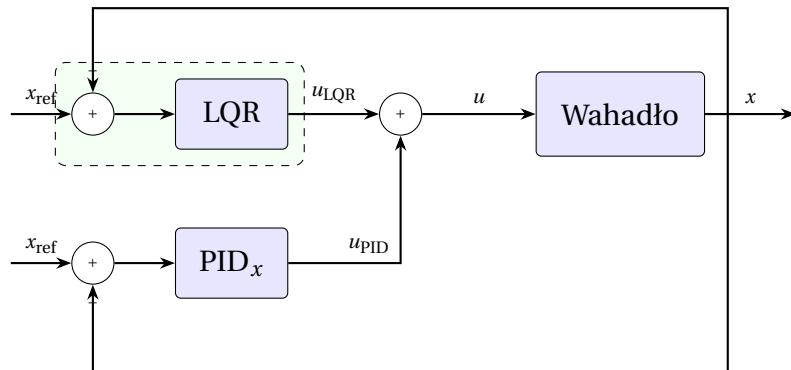
Regulator liniowo-kwadratowy (LQR) stanowi fundamentalną metodę sterowania optymalnego dla systemów liniowych wielowymiarowych MIMO [6]. W odróżnieniu od regulatorów PID, które wymagają empirycznego doboru wzmacnienia dla każdej zmiennej stanu, LQR wyznacza optymalne wzmacnienia automatycznie na podstawie modelu liniowego obiektu oraz macierzy wag  $Q$  i  $R$  definiujących kompromis między jakością regulacji a zużyciem energii. Problem LQR polega na znalezieniu prawa sterowania  $u(k) = -Kx(k)$ , które minimalizuje wskaźnik jakości:

$$J = \sum_0^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)), \quad (28)$$

gdzie  $Q \geq 0$  jest macierzą wag stanu, a  $R > 0$  wagą sterowania. Optymalna macierz wzmocnień  $K$  wyznaczana jest poprzez rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (29)$$

skąd  $K = R^{-1}B^T P$ . Macierze  $A$  i  $B$  pochodzą z linearyzacji modelu wahadła wokół górnego punktu równowagi ( $\theta = 0$ ). Klasa `PIDLQRController` implementuje sterowanie oparte na pełnym wektorze stanu, wspomagane dodatkowym członem PID dla uchybu pozycji, co tworzy strukturę hybrydową opisaną m.in. w [3] oraz [5] (w kontekście porównawczym). Schemat blokowy tego układu przedstawiono na Rys. 4.3.



**Rysunek 4.3.** Schemat blokowy hybrydowego regulatora PID-LQR.

W zaimplementowanym rozwiążaniu, sygnał sterujący składa się z dwóch komponentów:

$$u(k) = u_{\text{LQR}}(k) + u_{\text{PID, pos}}(k). \quad (30)$$

Składnik LQR realizuje stabilizację wokół punktu pracy:

$$u_{\text{LQR}}(k) = -K \cdot (x(k) - x_{\text{ref}}). \quad (31)$$

Dodatkowy człon PID na pętli pozycji (zrealizowany analogicznie do Rów. 27) ma na celu poprawę śledzenia skokowych zmian wartości zadanej  $x_{\text{ref}}$ , co jest częstą praktyką w aplikacjach praktycznych, gdzie LQR zapewnia stabilność, a regulator zewnętrzny dba o uchybę w stanie ustalonym [4].

#### 4.2.1. Dobór wag macierzy Q i R

Dobór wartości elementów macierzy wag  $Q$  i  $R$  zrealizowano w sposób wieloetapowy, ewoluując od konfiguracji bazowej do rozwiązania zoptymalizowanego. W pierwszej kolejności zbadano zachowanie układu dla nastaw jednostkowych, co pozwoliło zidentyfikować podstawowe ograniczenia stabilności. Następnie, wykorzystując wiedzę o dynamice obiektu, przeprowadzono strojenie ręczne, by w końcowym etapie wykorzystać algorytm przeszukiwania po siatce do finalnego dostrojenia parametrów i maksymalizacji wskaźnika jakości regulacji.

W pierwszej fazie (Rys. 4.4, linia czerwona) przyjęcie jednostkowej macierzy diagonalnej  $Q = I$  oraz  $R = 1$  okazało się niewystarczające. Takie podejście traktuje wszystkie uchyby (kąta w radianach i pozycji w metrach) jednakowo, co jest fizycznie nieuzasadnione, gdyż dopuszczalne odchylenia kąta są znacznie mniejsze niż pozycji. Skutkowało to wolną reakcją regulatora, który nie priorytetyzował stabilizacji wahadła, pozwalając na duże wychylenia.

Następnie przeprowadzono strojenie ręczne oparte na regule Brysona (linia niebieska). Założono, że maksymalne dopuszczalne wychylenie kąta wynosi ok. 0,2 rad, co zgodnie ze wzorem  $Q_{ii} = 1/x_{i,\max}^2$  dało wagę  $Q_\theta = 25$ . Jednocześnie zwiększeno karę za sterowanie ( $R = 10$ ), aby uniknąć nasycenia sygnału. Zabieg ten znacząco poprawił sztywność wahadła, jednak czas ustalania wciąż nie był satysfakcyjny.

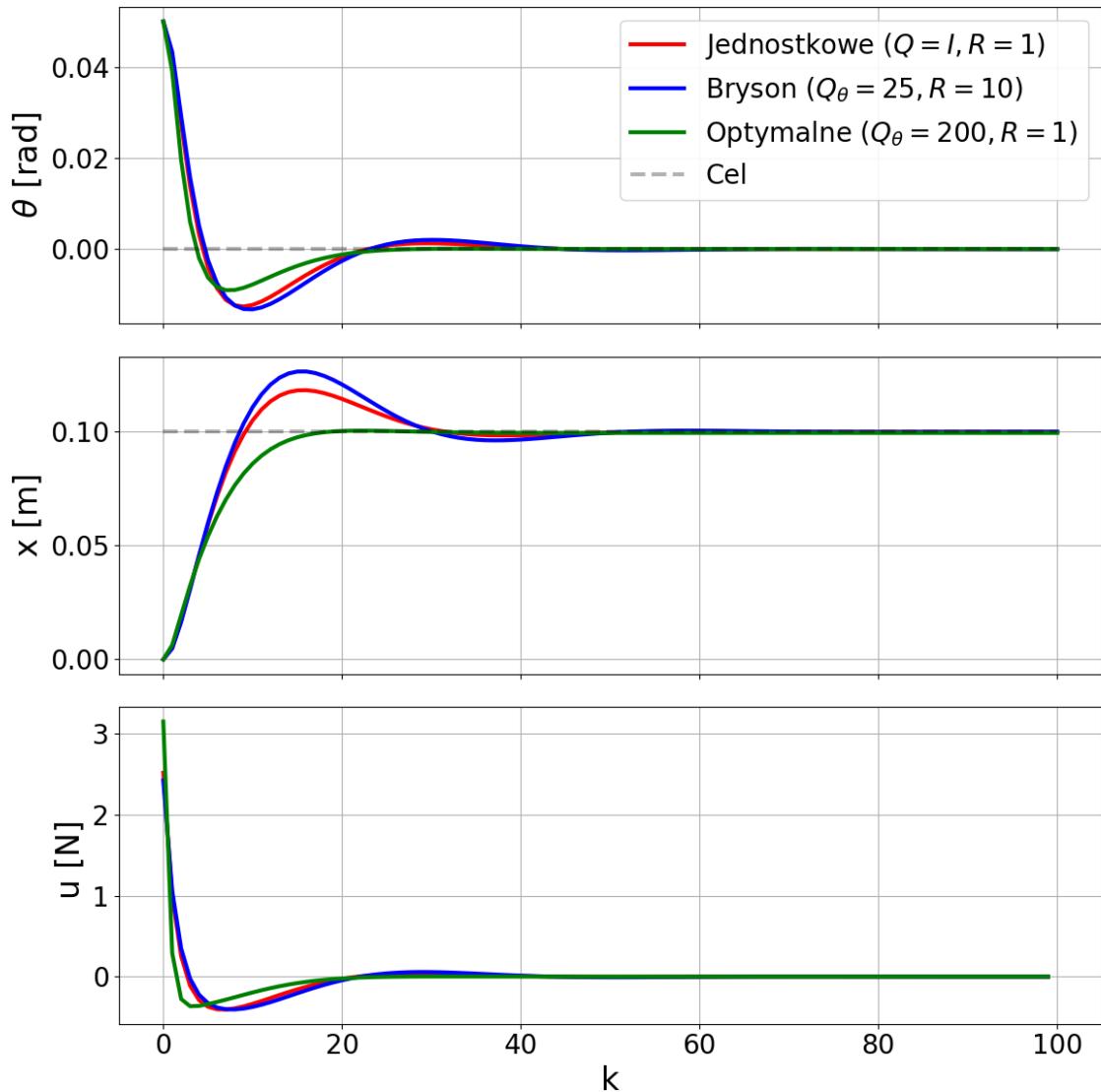
W ostatnim etapie zastosowano optymalizację numeryczną metodą przeszukiwania siatki (linia zielona). Wyniki wskazały na konieczność drastycznego zwiększenia kary za błąd kąta ( $Q_\theta = 200$ ) oraz prędkości ( $Q_{\dot{\theta}} = 3, Q_{\dot{x}} = 40$ ) przy jednoczesnym obniżeniu kary za sterowanie do  $R = 1$ . Taka konfiguracja wymusza bardzo agresywną reakcję układu na nawet najmniejsze odchylenia, wykorzystując pełną dynamikę napędu do szybkiej stabilizacji. Należy zauważyć, że optymalizator wyznaczył strategię dość intuicyjną: kara głównie kąt ( $Q_\theta$ ), zamiast kłaść nacisk na pozycję ( $Q_x$ ), co zmusza obiekt do szybkich korekt stabilizujących wahadło.

**Tabela 4.2.** Zestawienie parametrów strojenia regulatora PID-LQR.

Wariant	Macierz Q	Waga R	PID ( $K_p, K_i, K_d$ )
Jednostkowe	diag([1, 1, 1, 1])	1,0	-4,5, 0, -3
Bryson	diag([25, 1, 4, 1])	10,0	-4,5, 0, -3
Optymalne	diag([200, 3, 35, 40])	1,0	-7,0, 0, 1, -3

Ostatecznie zastosowane wagi to:

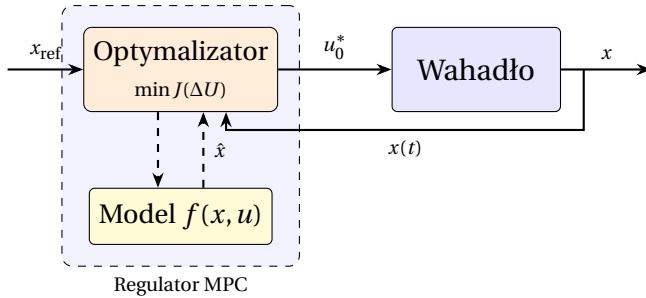
$$Q = \text{diag}([200, 3, 35, 40]), \quad R = 1, K_p = -7,0, K_i = 0,1, K_d = -3,0. \quad (32)$$



Rysunek 4.4. Porównanie nastaw regulatora PID-LQR.

### 4.3. Nieliniowe sterowanie predykcyjne (MPC)

Algorytm MPC (Model Predictive Control) stanowi zaawansowaną metodę sterowania, która w odróżnieniu od LQR, uwzględnia wprost ograniczenia sygnału sterującego oraz nieliniową dynamikę obiektu [7]. Zaimplementowany w klasie `MPCCController` algorytm rozwiązuje w każdym kroku symulacji problem optymalizacji dynamicznej nieliniowej (NMPC). Zasadę działania regulatora MPC ilustruje Rys. 4.5.



**Rysunek 4.5.** Schemat blokowy regulatora MPC z wewnętrzny modelem predykcyjnym.

W każdym kroku algorytmu regulacji predykcyjnej zostaje wyznaczona przyszła sekwencja sygnału sterującego, przedstawiona jako wektor przyrostów sygnału sterującego:

$$\Delta u(k) = [\Delta u(k|k) \quad \Delta u(k+1|k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k)]^T \quad (33)$$

$$\Delta u_p(k) = \Delta u(k+p|k) \quad (15)$$

klasyczna funkcja kosztu dla MPC prezentuje się w następujący sposób:

$$e_p(k) = x_{\text{ref}}(k+p|k) - \hat{x}(k+p|k) \quad (34)$$

$$J(k) = \sum_{p=1}^N e_p(k)^T Q e_p(k) + \sum_{p=0}^{N_u-1} \Delta u_p(k)^T R \Delta u_p(k) \quad (35)$$

przy ograniczeniach:

$$\hat{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (36)$$

$$u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max}, \quad (37)$$

$$(38)$$

gdzie:

- $N$  – horyzont predykcji,
- $N_u$  – horyzont sterowania.
- $f(\cdot)$  – nieliniowy model dyskretny obiektu (całkowanie metodą Rungego-Kutty 4. rzędu),
- $Q$  – macierz kar stanu,
- $R$  – współczynnik kary za zmianę sterowania ( $\Delta u$ ).

Kluczową zaletę MPC, podkreślana w pracach [8] oraz [6], jest możliwość bezpośredniego uwzględnienia ograniczeń (saturacji) już na etapie wyliczania sterowania, co zapobiega zjawisku nasycenia elementu wykonawczego, które mogłoby mieć miejsce w przypadku LQR.

Zadanie optymalizacji rozwiązywane jest numerycznie metodą SQP (Sequential Qu-

adraic Programming) przy użyciu solwera SLSQP z biblioteki `scipy.optimize`. Wybór tego solwera podyktowany był jego dostępnością w popularnych dystrybucjach środowisk naukowych (Anaconda, pip) oraz zdolnością do obsługi ograniczeń nierównościowych.

### 4.3.1. Dobór horyzontu i wag funkcji celu

Dla regulatora MPC kluczowym zagadnieniem był dobór horyzontu predykcji  $N$ , horyzontu sterowania  $N_u$  oraz macierzy wag, determinujących zachowanie układu w stanie nieustalonym. Początkowe ustawienie zbyt krótkiego horyzontu predykcji ( $N = 7$ ) przy małym horyzoncie sterowania ( $N_u = 3$ , Rys. 4.6, linia czerwona) prowadziło do oscylacji układu zamkniętego. Horyzont był zbyt krótki, aby regulator mógł uwzględnić, że rozpędzając wózek w celu korekcji kąta, nie zdąży wyhamować przed odchyleniem się wahadła.

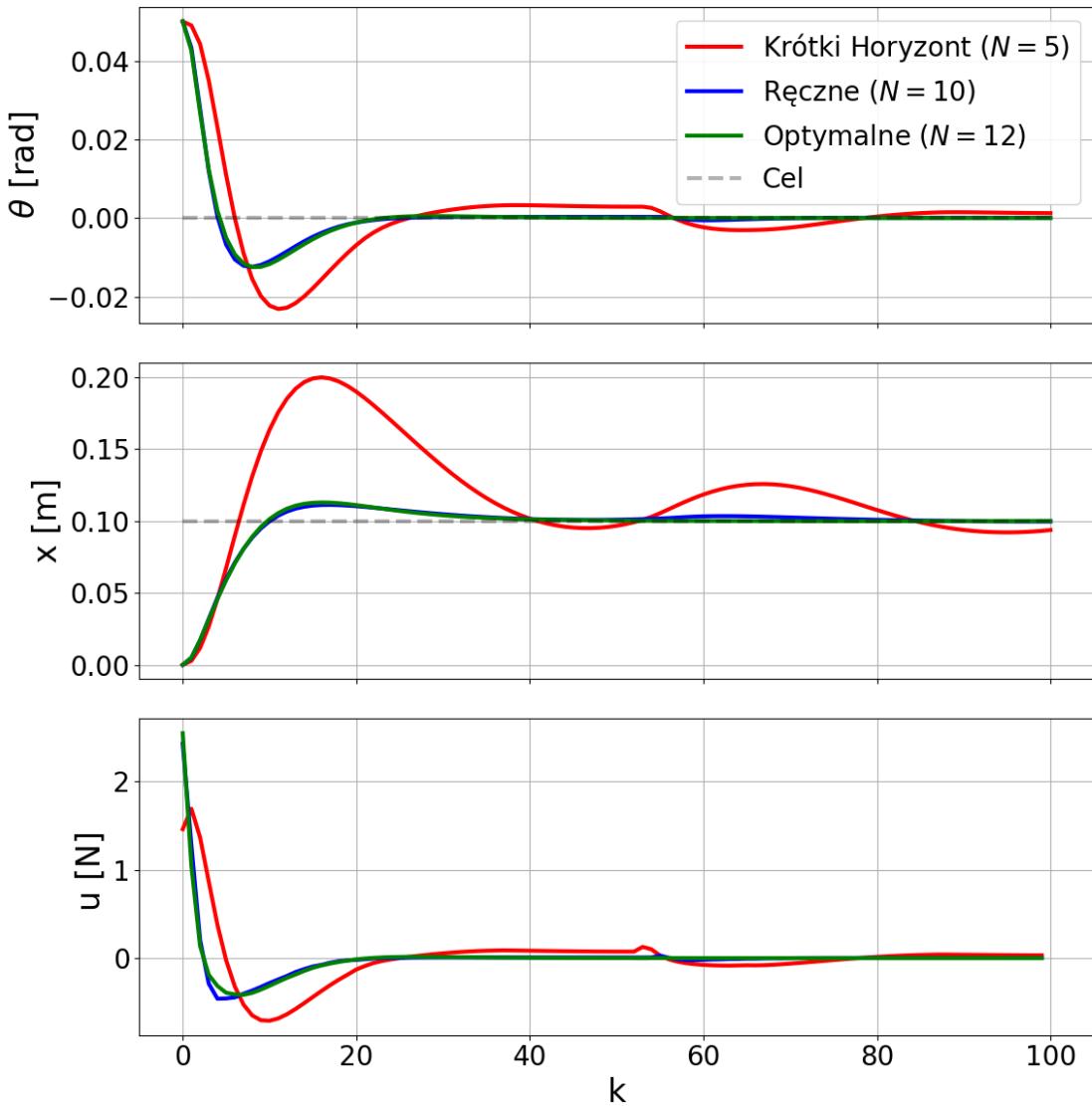
Zwiększenie horyzontu do  $N = 10$  (przy  $N_u = 3$ ) w ramach korekty ręcznej (linia niebieska) bardzo polepszyło jakość trajektorii. Dłuższy horyzont umożliwił dalszą predykcję. Dodatkowa manipulacja wagami  $Q$  pozwoliła na uzyskanie poprawnego sterowania.

Aby zweryfikować dobrane nastawy znów zastosowano algorytm do automatyzacji procesu strojenia, który pozwolił na znalezienie nowych nastaw (linia zielona). Algorytm wyznaczył jeszcze lepsze nastawy regulatora MPC  $N = 12$  przy  $N_u = 4$  oraz nowe wartości macierzy  $Q$  i skalaru  $R$ .

**Tabela 4.3.** Zestawienie parametrów strojenia regulatora MPC.

Wariant	Horyzont N	Ster. $N_u$	Macierz Q	Waga R
Krótki	7	3	<code>diag([10, 1, 10, 1])</code>	0,1
Ręczne	10	3	<code>diag([50, 10, 50, 10])</code>	0,1
Optymalne	12	4	<code>diag([158, 41, 43, 20])</code>	0,086

Ostateczne nastawy regulatora MPC to:  $Q = \text{diag}([158, 41, 43, 20])$ ,  $R = 0,086$ .



Rysunek 4.6. Porównanie nastaw regulatora MPC.

#### 4.4. MPC z rozszerzonym wskaźnikiem jakości (MPC-alt)

Dodatkowo zaimplementowano regulator MPC z alternatywną funkcją kosztu. Jego struktura jest zbliżona do podstawowego MPC, jednak funkcja kosztu została rozbudowana o dodatkowy składnik karzący bezwzględną wartość sygnału sterującego (energię).

Zmodyfikowana funkcja celu:

$$e_p(k) = x_{\text{ref}}(k + p|k) - \hat{x}(k + p|k) \quad (39)$$

$$J(k) = \sum_{p=1}^N e_p(k)^T Q e_p(k) + \sum_{p=0}^{N_u-1} \Delta u_p(k)^T R \Delta u_p(k) + \sum_{p=0}^{N_u-1} u_p(k)^T R_{\text{abs}} u_p(k) \quad (40)$$

Wprowadzenie parametru  $R_{\text{abs}}$  pozwala na bezpośrednie minimalizowanie zużycia

energii sterowania, co jest podejściem powszechnie stosowanym w praktycznych implementacjach algorytmów predykcyjnych [7]. Ograniczenie amplitudy sygnału sterującego nie tylko redukuje wydatek energetyczny (istotny w aplikacjach mobilnych), ale także zmniejsza obciążenie mechaniczne elementów wykonawczych, co wpływa na żywotność napędu.

#### 4.4.1. Dobór parametrów i analiza wpływu kary za energię

W przypadku wariantu MPC-alt analizowano nieliniowy wpływ parametru  $R_{abs}$  na zachowanie układu. Eksperymenty przeprowadzono przy stałych wagach stanu takich samych jak dla MPC:  $Q = \text{diag}([158, 41, 43, 20])$  oraz przy bardzo niskiej karze za przyrosty sterowania  $R_\Delta = 0,001$ , zmieniając jedynie wartość kary za bezwzględną wartość sterowania.

Wprowadzenie członu  $\sum_{p=0}^{N_u-1} u_p(k)^T R_{abs} u_p(k)$  do funkcji celu ma fundamentalnie inny charakter niż kara za przyrosty sterowania  $R_\Delta$ . Podczas gdy  $R_\Delta$  promuje gładkość sygnału sterującego (ogranicza szybkie zmiany), parametr  $R_{abs}$  bezpośrednio kara za amplitudę siły, co przekłada się na redukcję zużycia energii.

Przyjęcie zbyt dużej wartości kary za sterowanie bezwzględne ( $R_{abs} = 10$ , Rys. 4.7, linia czerwona) spowodowało, że regulator wykazywał tendencję do pasywności. Funkcja kosztu karała każdy niuton siły na tyle intensywnie, że wartość funkcji celu faworyzowała bardzo wolną regulację.

Stopniowe, ręczne zmniejszanie parametru  $R_{abs}$  do wartości 5 (linia niebieska) pozwoliło delikatnie polepszyć jakość regulacji, jednak układ działał zbyt zachowawczo.

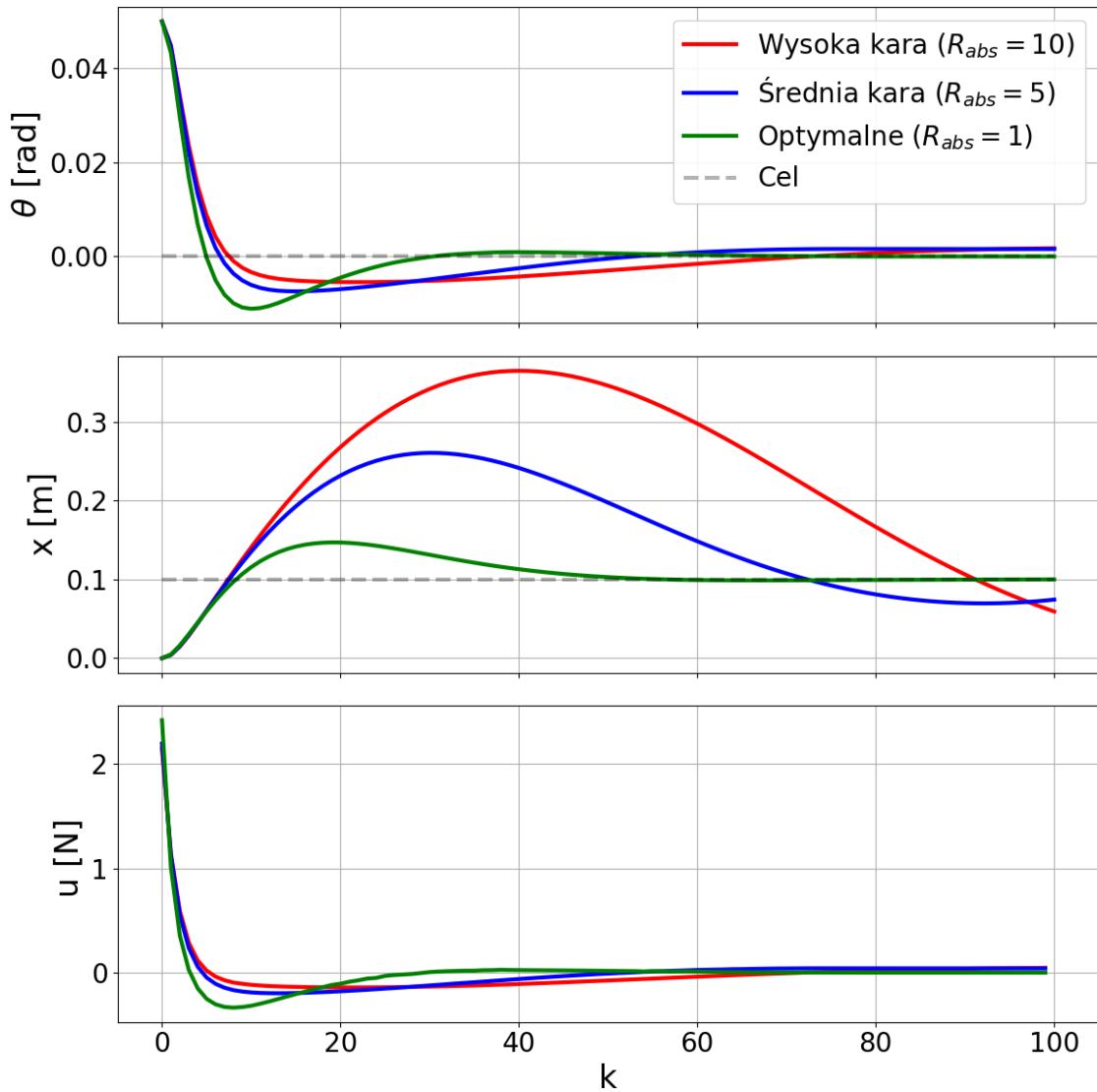
Kolejne próby zmniejszania kary za bezwzględną wartość wskazały, że dla tego zadania najlepszym rozwiązaniem jest zastosowanie niewielkiej, ale niezerowej kary ( $R_{abs} = 1$ , linia zielona). Tak dobrana waga pozwala uniknąć bierności regulatora, jednocześnie ograniczając nadmierne zużycie energii.

**Tabela 4.4.** Analiza wpływu kary energetycznej w MPC-alt (przy stałych  $Q$  i  $R_\Delta$ ).

Wariant	Kara absolutna $R_{abs}$	Uwagi
Wysoka	10,0	Silne tłumienie sterowania
Średnia	5,0	Kompromis
Optymalna	1,0	Najlepsza dynamika

Ostateczne nastawy regulatora MPC-alt to:

$$Q = \text{diag}([158, 41, 43, 20]), R = 0,001, R_{abs} = 1. \quad (41)$$



**Rysunek 4.7.** Analiza wpływu kary za energię  $R_{abs}$  w sterowaniu MPC-alt.

#### 4.5. Liniowy regulator MPC (LMPC)

Zaimplementowano również wariant Liniowego MPC (LMPC), którego implementacja została oparta na strukturze regulatora NMPC, z zastąpieniem modelu nieliniowego modelem zlinearyzowanym. Główna idea polega na wykorzystaniu zlinearyzowanego modelu obiektu wokół punktu równowagi górnej ( $\theta = 0$ ) w celu uproszczenia obliczeń optymalizacyjnych.

Linearyzacja modelu wahadła odwróconego prowadzi do układu w postaci przestrzeni stanów:

$$\dot{x} = A_c x + B_c u, \quad (42)$$

gdzie macierze  $A_c$  i  $B_c$  wyznaczono analitycznie (metodą Jacobiego) dla punktu równowagi  $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ . Model ciągły poddano następnie dyskretyzacji metodą ekstrapulatora

## 4. Algorytmy sterowania

---

zerowego rzędu (ZOH – Zero-Order Hold), uzyskując równanie stanu w postaci dyskretnej:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k. \quad (43)$$

Dyskretyzacja ZOH zakłada, że sygnał sterujący  $u$  pozostaje stały w przedziale  $[k \cdot d t, (k+1) \cdot d t]$ , co odpowiada rzeczywistemu działaniu cyfrowego układu sterowania. Do wyznaczania macierzy  $A_d$  i  $B_d$  wykorzystano funkcję `cont2discrete` z biblioteki `scipy.signal`.

Dzięki zastosowaniu modelu liniowego, predykcja trajektorii stanu (w przeciwieństwie do NMPC) sprowadza się do szybkich operacji macierzowych, bez konieczności numerycznego całkowania równań różniczkowych metodą Rungego-Kutty. Dla zadanej sekwencji sterowania  $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$  predykcja ma postać:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (44)$$

funkcja kosztu przyjmuje postać analogiczną do nieliniowego MPC:

$$e_p(k) = x_{\text{ref}}(k+p|k) - \hat{x}(k+p|k) \quad (45)$$

$$J(k) = \sum_{p=1}^N e_p(k)^T Q e_p(k) + \sum_{p=0}^{N_u-1} \Delta u_p(k)^T R \Delta u_p(k) \quad (46)$$

Do rozwiązania problemu sterowania użyto solvera SLSQP z biblioteki `scipy.optimize`, identycznego jak w przypadku nieliniowego MPC. Zastosowanie tego samego solvera dla obu wariantów MPC pozwala na bezpośrednie porównanie wpływu uproszczenia modelu.

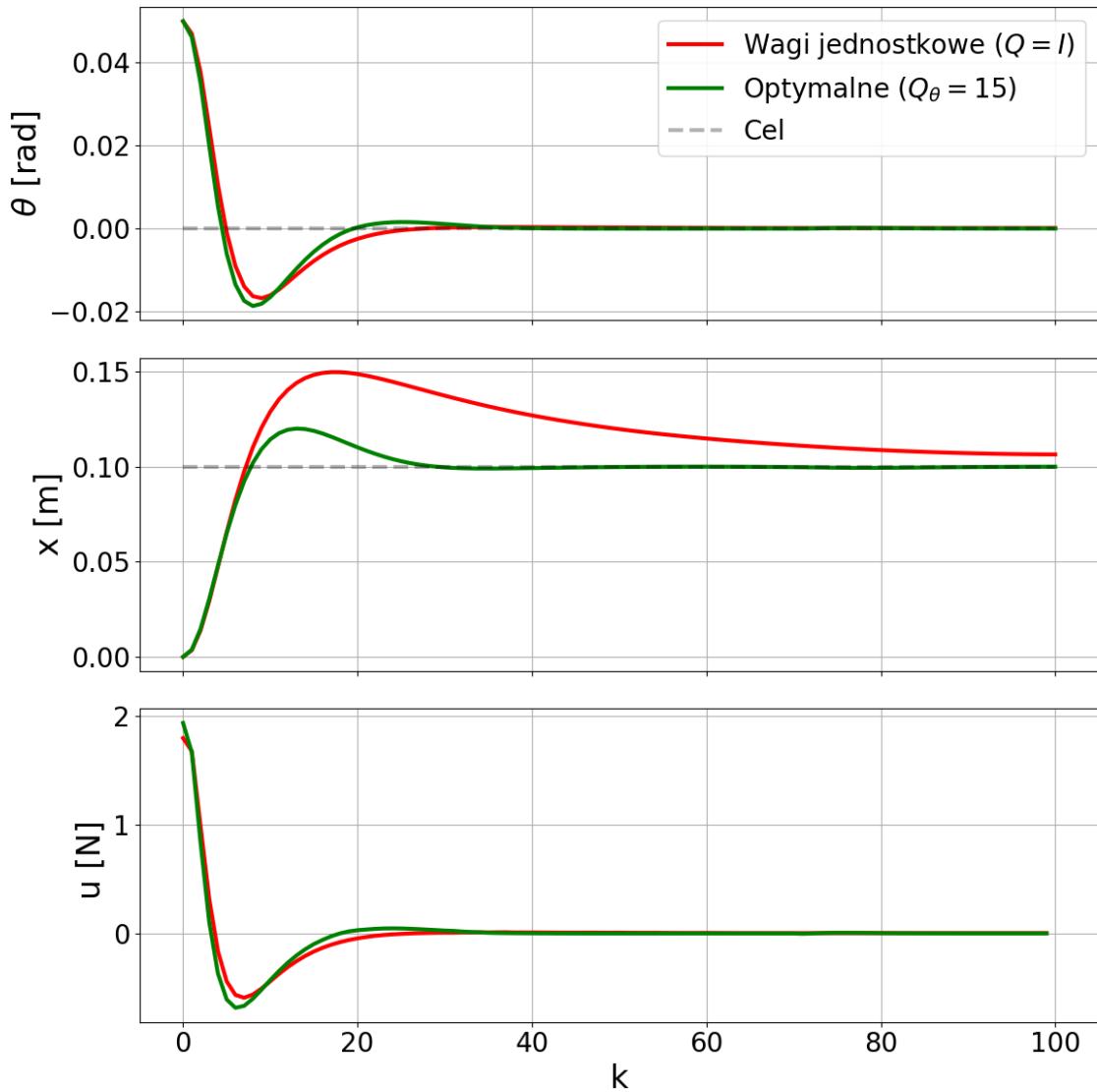
### 4.5.1. Dobór parametrów i analiza działania

Regulator LMPC dostrojono ręcznie metodą prób i błędów (Rys. 4.8). Najpierw przetestowano zestaw wag  $Q = \text{diag}([1, 1, 1, 1])$ ,  $R = 0, 1$  (linia czerwona). Widać, że pozycja wózka nie stabilizuje się wystarczająco szybko. Zdecydowano się w kolejnym kroku zwiększyć wagi w macierzy  $Q$  (linia zielona).

Na Rys. 4.8 przedstawiono porównanie obu konfiguracji. Układ zoptymalizowany zachowuje się stabilnie, płynnie dochodząc do wartości zadanej.

**Tabela 4.5.** Zestawienie parametrów strojenia LMPC.

Wariant	Macierz <b>Q</b>	Waga <b>R</b>
Wagi jedn.	$\text{diag}([1, 1, 1, 1])$	0,1
Optymalne	$\text{diag}([15, 1, 15, 1])$	0,1



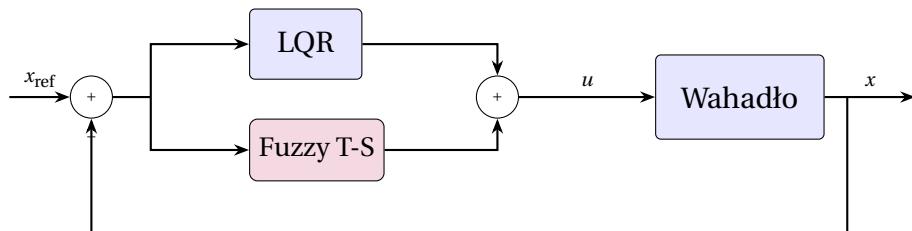
**Rysunek 4.8.** Strojenie liniowego regulatora MPC.

Mimo zastosowania uproszczonego modelu liniowego, regulator poprawnie radzi sobie ze stabilizacją w otoczeniu punktu równowagi. Wybrane parametry dla regulatora LMPC: horyzont predykcji:  $N = 12$ , horyzont sterowania:  $N_u = 4$ , macierz wag stanu:  $Q = \text{diag}([15, 0, 1, 0, 15, 0, 1, 0])$ , waga sterowania:  $R = 0, 1$ .

#### 4.6. Regulator rozmyty wspomagany LQR (Fuzzy-LQR)

Ostatnim zbadanym układem jest sterownik hybrydowy o strukturze równoległej, łączący klasyczny, liniowy regulator LQR z nieliniowym systemem wnioskowania rozmytego typu Takagi-Sugeno (T-S). W przeciwieństwie do układów typu „Gain Scheduling” modyfikujących parametry jednego regulatora, tutaj zastosowano bezpośrednie sumowanie sygnałów sterujących z dwóch niezależnych bloków (Rys. 4.9). LQR zapewnia optymalną

stabilizację w pobliżu punktu pracy, natomiast człon rozmyty generuje dodatkowy sygnał korekcyjny, aktywujący się silniej przy większych uchybach.



**Rysunek 4.9.** Schemat blokowy regulatora Fuzzy-LQR z równoległą strukturą hybrydową.

Sygnal sterujący opisuje równanie:

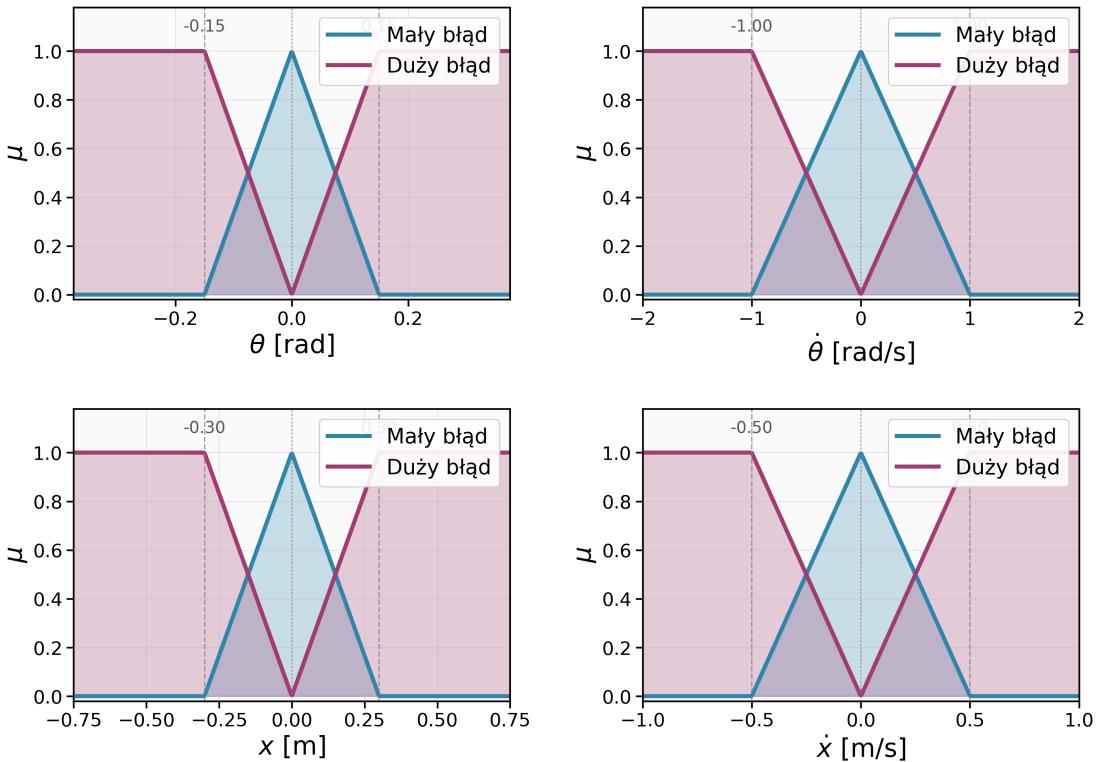
$$u(t) = u_{LQR}(k) + G \cdot u_{Fuzzy}(k), \quad (47)$$

gdzie  $G$  to globalne wzmacnienie skalujące część rozmytą.

Część rozmyta  $u_{Fuzzy}(k)$  wykorzystuje bazę reguł postaci:

JEŚLI  $e_\theta$  jest  $A_i$  ORAZ  $\dot{\theta}$  jest  $B_i$  ... TO  $u_i = -K^{(i)} \cdot x$ ,

gdzie  $K^{(i)}$  jest wektorem wzmacnień lokalnego regulatora liniowego. Zastosowano trójkatne funkcje przynależności (Rys. 4.10), przyjmując zakresy strefy „Małego błędu” na poziomie  $\pm 0.15$  rad dla kąta oraz  $\pm 0.30$  m dla pozycji.



**Rysunek 4.10.** Trójkątne funkcje przynależności dla czterech zmiennych stanu regulatora Fuzzy-LQR. Każda zmienna posiada dwa zbiory rozmyte: „Mały błąd” (aktywny w pobliżu zera) oraz „Duży błąd” (aktywny przy większych odchyleniach od punktu równowagi).

Baza wiedzy składa się z 16 reguł ( $2^4$  kombinacji). Wyjście sterownika obliczane jest jako średnia ważona:

$$u_{\text{Fuzzy}} = G \cdot \frac{\sum_{i=1}^{16} w_i(x) \cdot u_i}{\sum_{i=1}^{16} w_i(x)}, \quad (48)$$

gdzie  $w_i$  to stopień aktywacji  $i$ -tej reguły, a  $G = 0.36$  to globalne wzmacnienie skalujące.

Zastosowana struktura równoległa pozwala na uzyskanie efektu nieliniowego kształtuowania wzmacnienia. W zaimplementowanym algorytmie wzmacnienia  $K^{(i)}$  nie są stałe, lecz zależą od stopnia krytyczności danej reguły:

$$K^{(i)} = K_{\text{base}} + \alpha \cdot L_i, \quad (49)$$

gdzie  $L_i \in \{0, \dots, 4\}$  to liczba zmiennych stanu znajdujących się w strefie „Dużego błędu”. Przykładowo, dla kąta  $\theta$  wzmacnienie bazowe wynosi 100.0, ale każda zmienna w stanie „Dużym” dodaje do niego wartość  $\alpha = 20.0$ . Dzięki temu, w sytuacjach awaryjnych (duże wychylenia i prędkości), efektywne wzmacnienie układu wzrasta drastycznie (nawet o 80%), zapewniając silną reakcję powrotną, podczas gdy wokół zera układ zachowuje się łagodnie.

#### 4.6.1. Dobór reguł i funkcji przynależności

Strojenie rozmytego regulatora Fuzzy-LQR jest zadaniem złożonym ze względu na dużą liczbę parametrów definiujących bazę reguł i funkcje przynależności. W przeciwieństwie do klasycznego regulatora LQR, gdzie dobór sprowadza się do ustalenia wag w macierzach  $Q$  i  $R$ , tutaj należy podjąć szereg decyzji dotyczących kształtu, rozmieszczenia i liczby funkcji przynależności dla każdej ze zmiennych stanu. Ponadto, konieczne jest zdefiniowanie reguł wnioskowania, które determinują zachowanie układu w poszczególnych obszarach przestrzeni stanu. Niewłaściwy dobór tych parametrów może prowadzić do niestabilności, gwałtownych przełączeń sterowania lub braku pożąданej poprawy dynamiki względem regulatora bazowego.

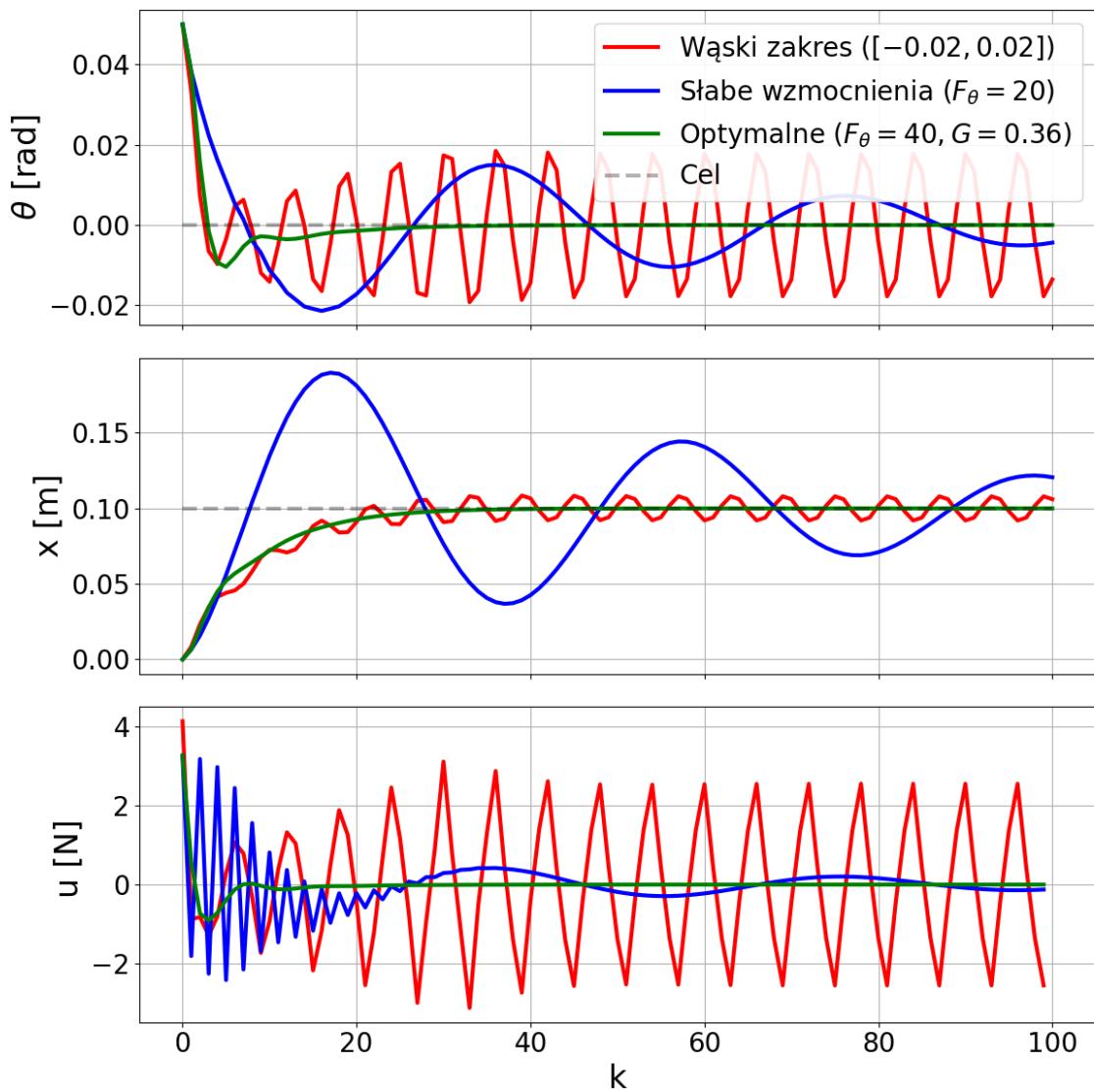
Błędne zdefiniowanie zbyt wąskich funkcji przynależności dla strefy „małego błędu” (Rys. 4.11, linia czerwona) skutkowało gwałtownym przełączaniem się regulatora na reguły o wysokich wzmacnieniach (drgania przełączeniowe). Opierając się na literaturze [5], dobrano ręcznie szerokości funkcji przynależności (linia niebieska). Rozszerzenie zakresu wyeliminowało drgania, jednak wzmacnienia reguł były zbyt słabe. Ostatecznie, algorytm wyznaczył wartość wzmacnienia dla kąta ( $F_\theta = 40.0$ ) i zmniejszył globalne wzmacnienie ( $G = 0.36$ ), co przedstawiono linią zieloną na wykresie.

Strojenie regulatora Fuzzy-LQR okazało się zadaniem znacznie bardziej wymagającym niż w przypadku pozostałych badanych algorytmów. Wynika to z kilku czynników:

- Wysoka wymiarowość przestrzeni parametrów — dla 16 reguł, z których każda definiuje 4 wzmacnienia, plus parametry funkcji przynależności.
- Silne sprzężenia między parametrami — zmiana jednego wzmacnienia wpływa na zachowanie całej bazy reguł.
- Zależność od scenariusza testowego — parametry zoptymalizowane dla warunków nominalnych mogą dawać gorsze wyniki przy zakłócieniach i odwrotnie.

**Tabela 4.6.** Parametry regulatora Fuzzy-LQR.

Wariant	Zakres $\theta_{small}$	Wzmocnienia Reguł
Wąski	$[-0,02; 0,02]$	Standardowe
Słabe	$[-0,2; 0,2]$	$F_\theta = 20$ (bazowe)
Optymalne	$[-0,2; 0,2]$	$F_\theta = 40, G = 0,36$



Rysunek 4.11. Strojenie regulatora Fuzzy-LQR.

Ostatecznie użyty zestaw parametrów to:  $F_\theta = 40$ ,  $F_{\dot{\theta}} = 1$ ,  $F_x = 15$ ,  $F_{\dot{x}} = 20$ ,  $G = 0.36$ .

## 5. Eksperymenty

Rozdział ten definiuje scenariusze testowe, przyjęte miary oceny jakości sterowania oraz procedurę doboru nastaw regulatorów. Precyzyjne określenie warunków eksperymentu jest kluczowe dla zapewnienia powtarzalności badań oraz obiektywnego porównania testowanych algorytmów.

### 5.1. Plan eksperymentów

W celu weryfikacji skuteczności strategii sterowania, przyjęto jednolity zestaw testów symulacyjnych. Każdy z zaimplementowanych regulatorów (PID-PID, PID-LQR, MPC, MPC-alt, Fuzzy-LQR, LMPC) poddany został badaniom w następujących scenariuszach:

#### 1. Eksperiment 1: Stabilizacja w punkcie pracy (warunki nominalne).

Symulacja odpowiedzi układu na niezerowe warunki początkowe przy braku zakłóceń zewnętrznych.

- Początkowy kąt wychylenia wahadła:  $\theta(0) = 0,05 \text{ rad} (\approx 2,87^\circ)$ .
- Początkowa pozycja wózka:  $x(0) = 0 \text{ m}$ .
- Zerowe prędkości początkowe:  $\dot{\theta}(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ .

Wybór wartości  $\theta(0) = 0,05 \text{ rad}$  podyktowany jest dwoma czynnikami: jest to wychylenie na tyle małe, że mieści się w obszarze stosowności modelu zlinearyzowanego (istotne dla LQR), a jednocześnie wystarczająco duże, aby wymagać aktywnej interwencji regulatora. Wartość ta jest również powszechnie stosowana w literaturze przedmiotu jako standardowy warunek testowy [3]. Celem jest sprawdzenie zdolności regulatora do sprowadzenia układu do pionu ( $\theta = 0, x = 0$ ) oraz ocena czasu regulacji i przeregulowań.

#### 2. Eksperiment 2: Odporność na zakłócenia zewnętrzne.

Symulacja z tymi samymi warunkami początkowymi, przy czym na wahadło oddziaływała losowa siła zakłócająca  $F_w(t)$  (modelująca zakłócenia zewnętrzne) generowana zgodnie z procedurą opisaną w Rozdziale 3. Przyjęto odchylenie standardowe siły zakłócającej  $\sigma = 2,2 \text{ N}$ , co odpowiada wartości skutecznej (RMS) siły zakłócającej rzędu  $2,2 \text{ N}$  i chwilowym wartościami szczytowym do  $\pm 6,6 \text{ N}$ . Jest to poziom zakłóceń stanowiący znaczące obciążenie dla układu sterowania (kilka procent  $F_{\max}$ ), lecz nieprzekraczający możliwości kompensacyjnych regulatorów. Test ten pozwala ocenić odporność układu zamkniętego na zakłócenia zewnętrzne.

#### 3. Eksperiment 3: Odporność na zmianę parametrów modelu.

Symulacja w warunkach nominalnych (bez zakłóceń), przy czym parametry rzeczywistego obiektu różnią się od wartości użytych do strojenia regulatorów. W eksperymencie zwiększoano masę wahadła  $m$  o 100%, co odpowiada sytuacji, w której model użyty do syntezy regulatora jest niedokładny względem rzeczywistego układu fizycznego:

- Nominalna masa wahadła:  $m_{\text{nom}} = 0,23 \text{ kg}$ .

- Rzeczywista masa wahadła:  $m_{\text{real}} = 0,253 \text{ kg}$  (+100%).

Test ten ma na celu ocenę wrażliwości poszczególnych regulatorów na niepewność parametryczną modelu — kluczową właściwość w zastosowaniach praktycznych, gdzie dokładne wartości parametrów fizycznych są rzadko znane z wysoką precyzją. Zmiana masy wahadła wpływa bezpośrednio na dynamikę układu, modyfikując zarówno moment bezwładności, jak i położenie środka ciężkości, co stanowi istotne wyzwanie dla algorytmów sterowania.

## 5.2. Wskaźniki jakości regulacji

Do ilościowej oceny jakości sterowania wykorzystano następujące wskaźniki błędów, obliczane dla zdyskretyzowanych przebiegów kąta  $\theta(k)$  ( $N$  próbek):

- **MSE (Mean Squared Error)** – Średni błąd kwadratowy, karający silnie duże odchyłki.

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - y_{\text{ref}}(k))^2 \quad (50)$$

- **MAE (Mean Absolute Error)** – Średni błąd bezwzględny, informujący o przeciętnym uchybie.

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y(k) - y_{\text{ref}}(k)| \quad (51)$$

- **ISE (Integral of Squared Error)** – Sumaryczne kryterium kwadratowe, będące miarą energii uchybu.

$$\text{ISE} = \sum_{k=1}^N (y(k) - y_{\text{ref}}(k))^2 \quad (52)$$

- **IAE (Integral of Absolute Error)** – Sumaryczne kryterium modułu błędu, akumulujące całkowity uchyb.

$$\text{IAE} = \sum_{k=1}^N |y(k) - y_{\text{ref}}(k)| \quad (53)$$

- **Energia sterowania L2 ( $E_{u,L2}$ )** – Koszt kwadratowy sterowania, powiązany z energią elektryczną/mechaniczną.

$$E_{u,L2} = \sum_{k=1}^N u(k)^2 \quad (54)$$

- **Energia sterowania L1 ( $E_{u,L1}$ )** – Koszt absolutny sterowania (zużycie paliwa/zasobów).

$$E_{u,L1} = \sum_{k=1}^N |u(k)| \quad (55)$$

- **Czas regulacji  $t_s$  (Settling Time)** – Czas, po którym sygnał wyjściowy trwale wchodzi w kanał tolerancji i już go nie opuszcza. W niniejszej pracy przyjęto tolerancję  $\varepsilon = 2\%$  wartości początkowego wychylenia, tj.  $|\theta| < 0,001 \text{ rad}$  dla kąta oraz  $|x| < 0,002 \text{ m}$  dla pozycji.

- **Przeregulowanie  $M_p$  (Overshoot)** – Maksymalne procentowe odchylenie sygnału od wartości zadanej w odniesieniu do wartości skoku.

$$M_p = \frac{\max(y) - y_{\text{ref}}}{y_{\text{ref}}} \cdot 100\% \quad (56)$$

- **Uchyb ustalony  $e_{ss}$  (Steady-state Error)** – Średnia wartość uchybu w końcowej fazie symulacji (ostatnie 10% czasu), określająca dokładność statyczną regulacji.

Dodatkowo analizie poddano charakterystyki jakościowe przebiegów czasowych, takie jak czas regulacji (czas, po którym błąd trwale mieści się w paśmie  $\pm 2\%$ ) oraz maksymalne przeregulowanie.

## 6. Analiza wyników

Rozdział ten poświęcony jest szczegółowej analizie wyników badań symulacyjnych, które zostały przeprowadzone w celu weryfikacji skuteczności i jakości działania zaprojektowanych układów sterowania. Głównym celem eksperymentów było zbadanie zachowania wahadła odwróconego w dwóch diametralnie różnych sytuacjach: podczas stabilizacji punktu pracy w idealnych warunkach nominalnych oraz w trakcie pracy pod wpływem losowych zakłóceń zewnętrznych. Dodatkowo zakres badań obejmował weryfikację odporności układów na zmiany parametrów modelu oraz analizę złożoności obliczeniowej algorytmów.

Podczas analizy wyników szczególny nacisk położono na trzy kluczowe aspekty sterowania. Pierwszym z nich jest stabilizacja kątowa, czyli zdolność układu do utrzymania pręta wahadła w pionie (pozycja równowagi chwiejnej). Jest to zadanie priorytetowe, gdyż jego niezrealizowanie prowadzi do upadku wahadła i niepowodzenia procesu regulacji. Drugim, równie istotnym aspektem, jest stabilizacja pozycji wózka. Wymogiem jest, aby proces stabilizacji kąta nie odbywał się kosztem nadmiernego przemieszczenia wózka poza zadany obszar roboczy. W systemach rzeczywistych, takich jak suwnice czy roboty balansujące, utrzymanie pozycji jest często równie krytyczne co sama stabilizacja ładunku. Ostatnim jest jakość sygnału sterującego, która ma bardzo duże znaczenie jeśli rozpatrujemy rzeczywiste układy napędowe. Wysoka zmienność sygnału sterującego, oscylacje wysokoczęstotliwościowe czy gwałtowne skoki amplitudy mogą prowadzić do szybkiego zużycia mechanicznego elementów wykonawczych, a także generować niepożądane straty energii.

Dla zachowania przejrzystości analizy, badane algorytmy pogrupowano w dwie rodziny: regulatory klasyczne, do których zaliczono równoległy układ PID-PID oraz hybrydowy PID-LQR, regulatory zaawansowane, obejmujące predykcyjny algorytm MPC (w dwóch wariantach funkcji kosztu), liniowy LMPC oraz sterownik rozmyty Fuzzy-LQR.

### 6.1. Stabilizacja w warunkach nominalnych

Pierwszy scenariusz testowy miał na celu weryfikację dynamiki układu w odpowiedzi na niezerowe warunki początkowe. Symulacja rozpoczęła się od wychylenia wahadła o kąt około 2.8 stopnia (0.05 radiana). Jest to typowy test odpowiedzi skokowej, pozwalający ocenić szybkość działania (czas regulacji) oraz tłumienie oscylacji przez poszczególne regulatory.

#### 6.1.1. Charakterystyka regulatorów klasycznych

Na Rysunkach 6.1, 6.2 oraz 6.3 przedstawiono zbiorcze zestawienie przebiegów czasowych dla grupy regulatorów klasycznych. Analizując wykres kąta wychylenia  $\theta$  (Rys. 6.1), można zaobserwować wyraźną przewagę regulatora hybrydowego.

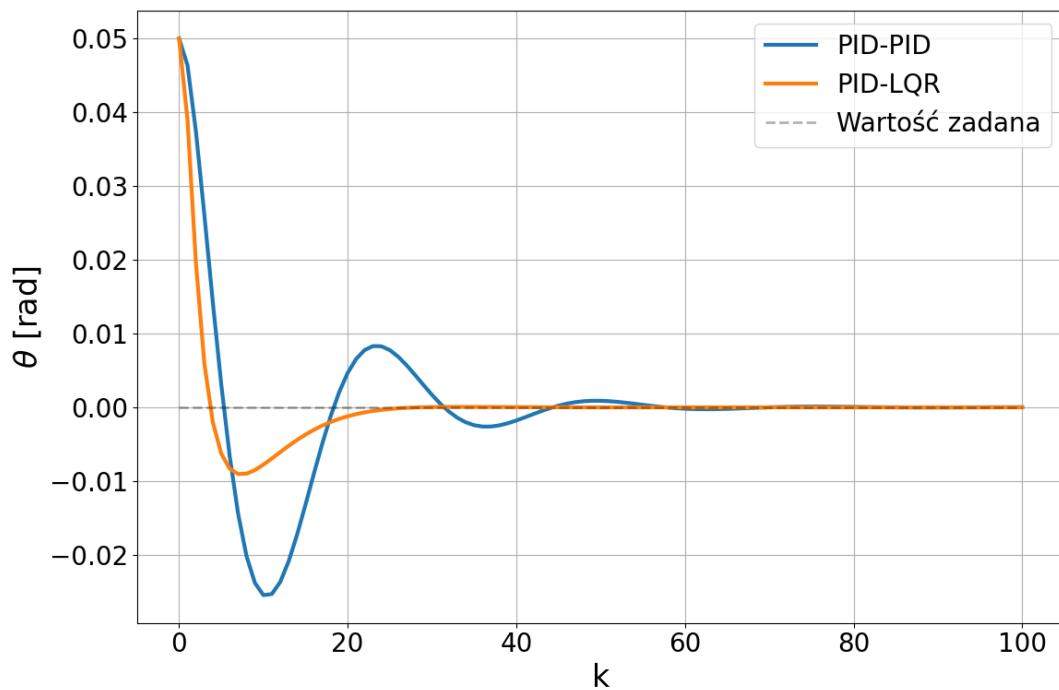
## 6. Analiza wyników

---

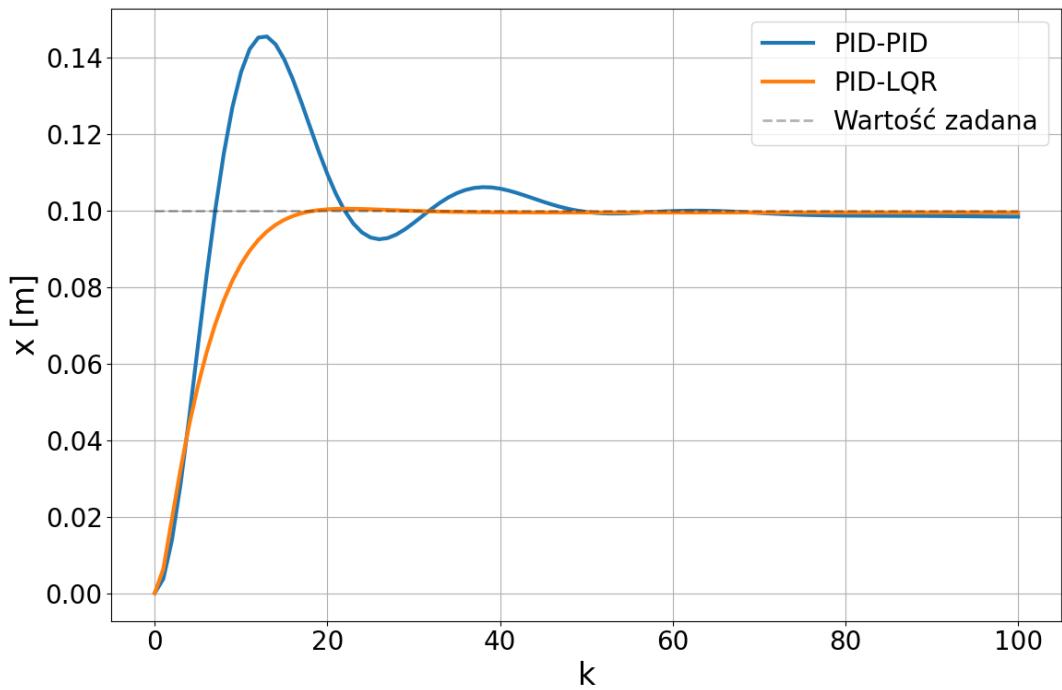
Zoptymalizowany regulator PID-LQR, wykorzystujący duże wzmocnienia dla błędu pozycji, charakteryzuje się krótkim czasem regulacji ( $T_s \approx 2,1$  s). Jest to wynik dwukrotnie lepszy od regulatora PID-PID ( $T_s \approx 4,2$  s), który wykazuje znacznie dłuższy okres dochodzenia do równowagi.

Co istotne, wyższa dynamika PID-LQR idzie w parze z oszczędnością energetyczną. Zużywa on o blisko 40% mniej energii ( $E_u \approx 0.59$ ) niż regulator PID-PID ( $E_u \approx 0.95$ ). Oznacza to, że precyjnie dobrane wzmocnienia LQR pozwalają stłumić wychylenie szybkim i skutecznym impulsem, podczas gdy PID-PID działa w sposób bardziej zachowawczy, ale rozciagnięty w czasie, co ostatecznie generuje większy koszt energetyczny.

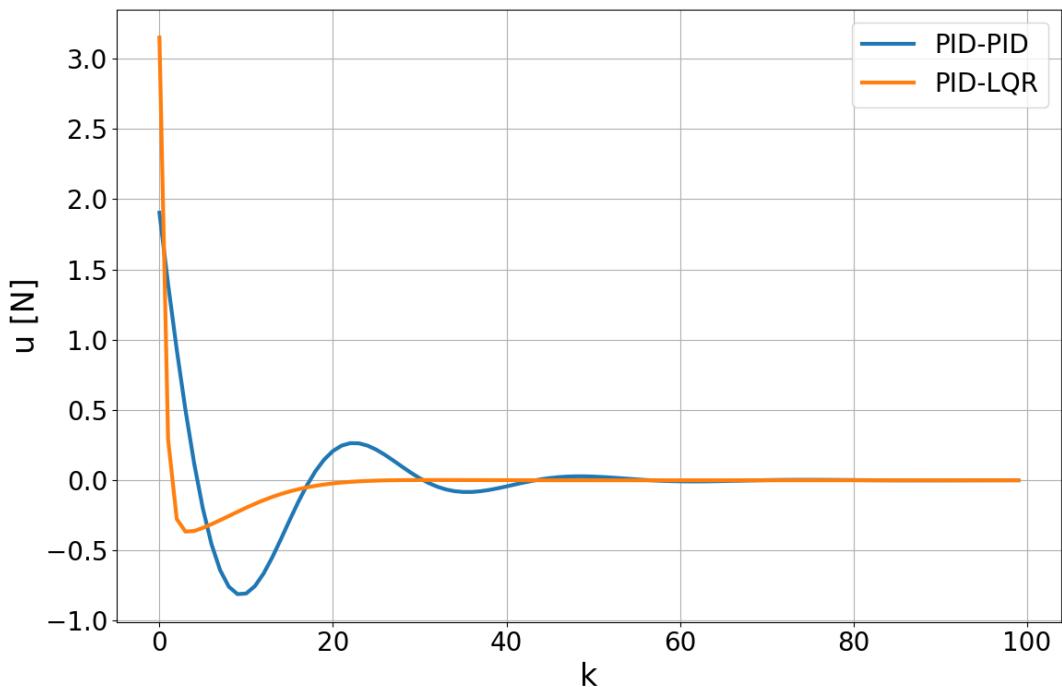
Warto jednak zauważyć, że PID-LQR utrzymuje wózek w węższym zakresie roboczym ( $\text{Max}|x| \approx 0.10$  m) niż PID-PID (0.15 m), przy jednocześnie krótszym czasie ustalania pozycji ( $T_{s,x} \approx 1,6$  s w porównaniu do 4,6 s). Pod każdym względem PID-LQR oferuje lepszą jakość regulacji niż klasyczny układ PID-PID.



Rysunek 6.1. Przebieg kąta  $\theta$  dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).



Rysunek 6.2. Przebieg pozycji  $x$  dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).



Rysunek 6.3. Sygnał sterujący  $u$  dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne).

### 6.1.2. Charakterystyka regulatorów zaawansowanych

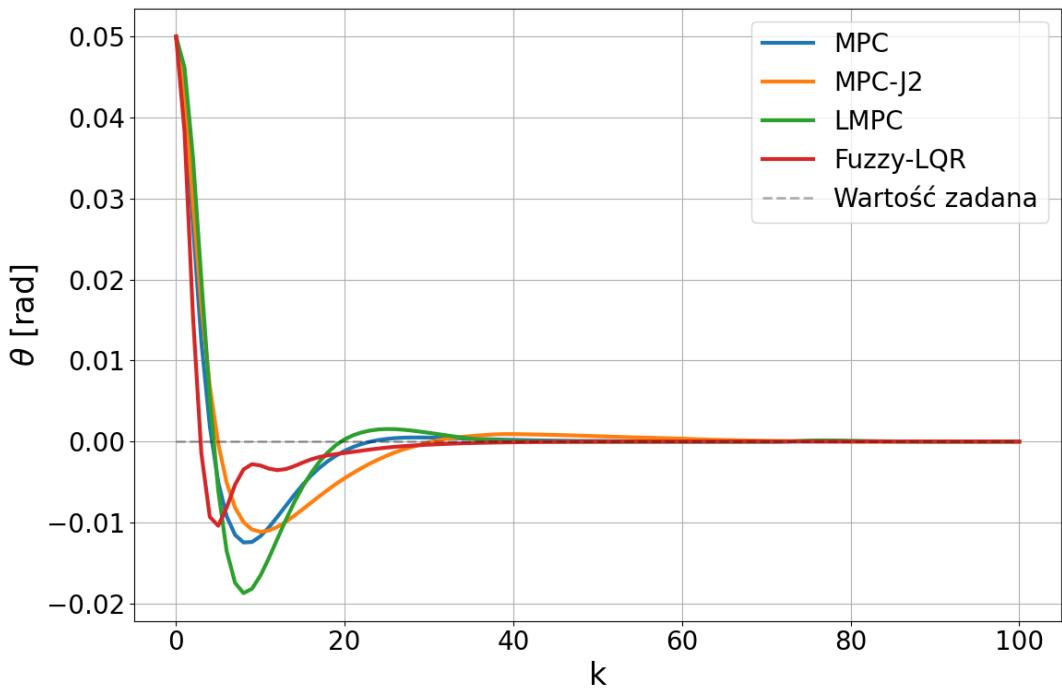
W grupie regulatorów zaawansowanych, których wyniki zaprezentowano na Rysunkach 6.4, 6.5 i 6.6, można zaobserwować szerokie spektrum zachowań, wynikające z różnic w sformułowaniu zadań sterowania.

Najlepsze wyniki w warunkach nominalnych osiąga regulator PID-LQR oraz MPC-*alt* (J2), mimo funkcji kosztu karającej bezpośrednio sterowanie, uzyskuje czas regulacji ( $T_s \approx 2,7$  s). Lepszą dynamikę wykazuje standardowy MPC ( $T_s \approx 2,1$  s), który dorównuje PID-LQR. Potwierdza to, że odpowiednio nastrojony regulator predykcyjny może łączyć wysoką dynamikę z oszczędnością energii ( $E_u \approx 0,51$  dla MPC-*alt*).

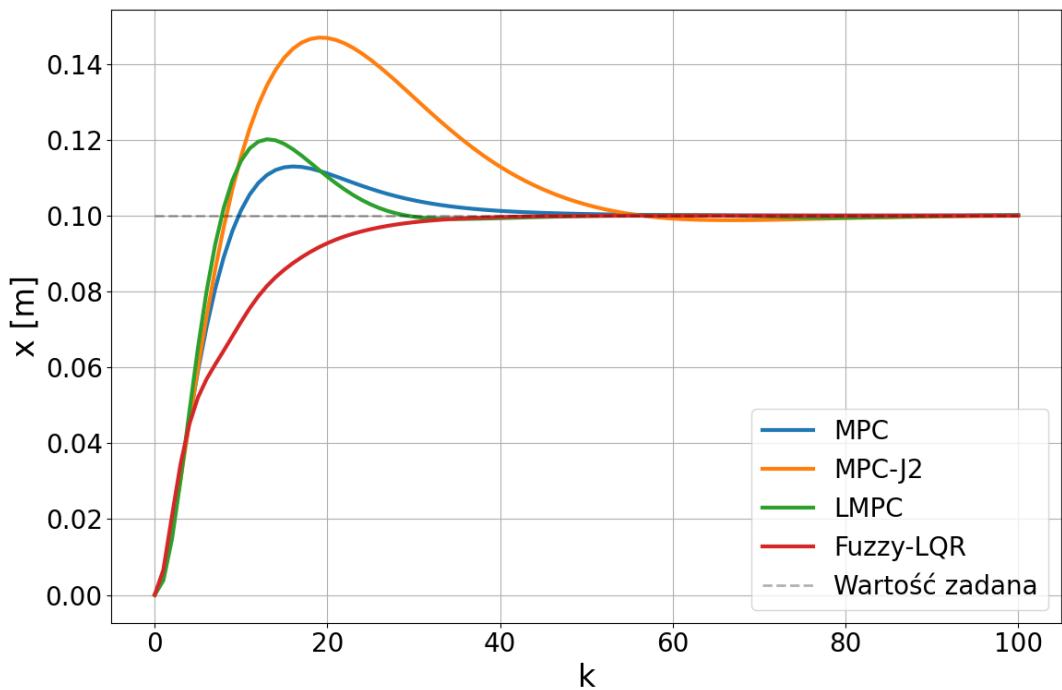
Standardowy regulator MPC (nieliniowy) działa równie szybko jak PID-LQR. Jego czas regulacji wynosi  $T_s \approx 2,1$  s. Mimo dobrej reakcji, charakteryzuje się bardzo niskim kosztem energetycznym ( $E_u \approx 0,56$ ), ustępując pod tym względem jedynie wariantowi J2 i PID-LQR.

Liniowy regulator predykcyjny LMPC plasuje się pośrodku stawki. Osiaga czas regulacji  $T_s \approx 3,1$  s przy zużyciu energii  $E_u \approx 0,79$ . Gorsze wyniki energetyczne w porównaniu do nieliniowych wariantów MPC (0,79 vs 0,51 – 0,56) wynikają z uproszczeń modelu liniowego, który nie odwzorowuje idealnie dynamiki obiektu nawet w pobliżu punktu pracy, wymuszając częstsze korekty sterowania.

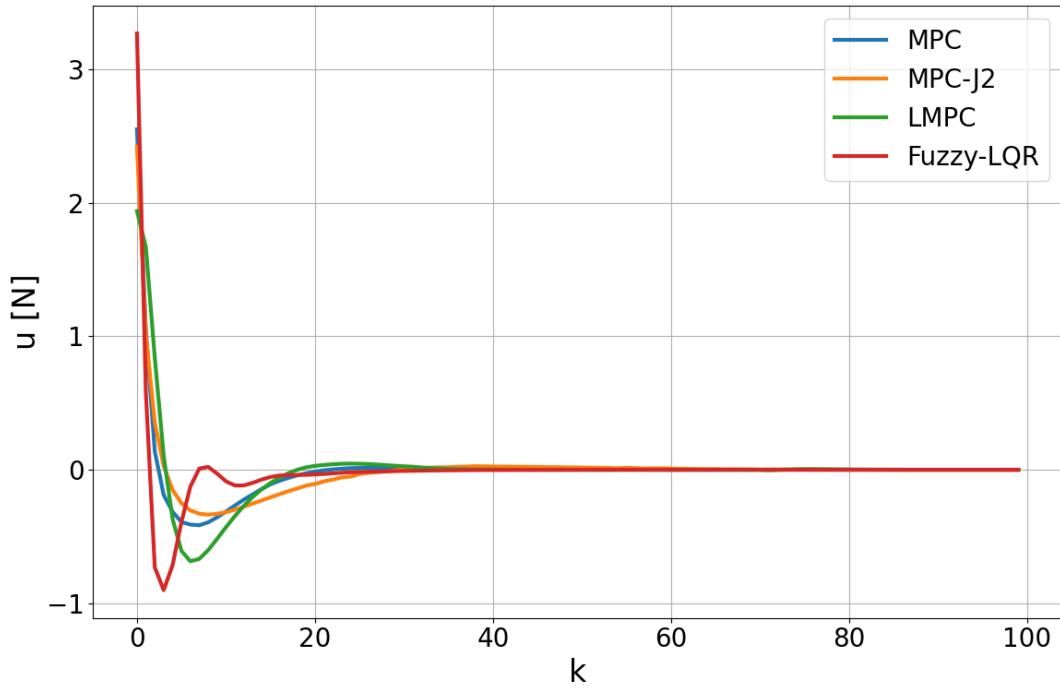
Zdecydowanie odmienną charakterystykę prezentuje regulator Fuzzy-LQR. W tym zestawieniu uzyskuje on umiarkowany wynik energetyczny ( $E_u \approx 0,78$ ), zbliżony do regulatora LMPC. Wyróżnia się dobrym czasem regulacji ( $T_s \approx 2,3$  s), ustępując nieznacznie PID-LQR i MPC. Sugeruje to, że w warunkach nominalnych, hybrydowa struktura regulatora pozwala na dynamiczną reakcję, zachowując rozsądny balans między szybkością a kosztem sterowania.



**Rysunek 6.4.** Przebieg kąta  $\theta$  dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).



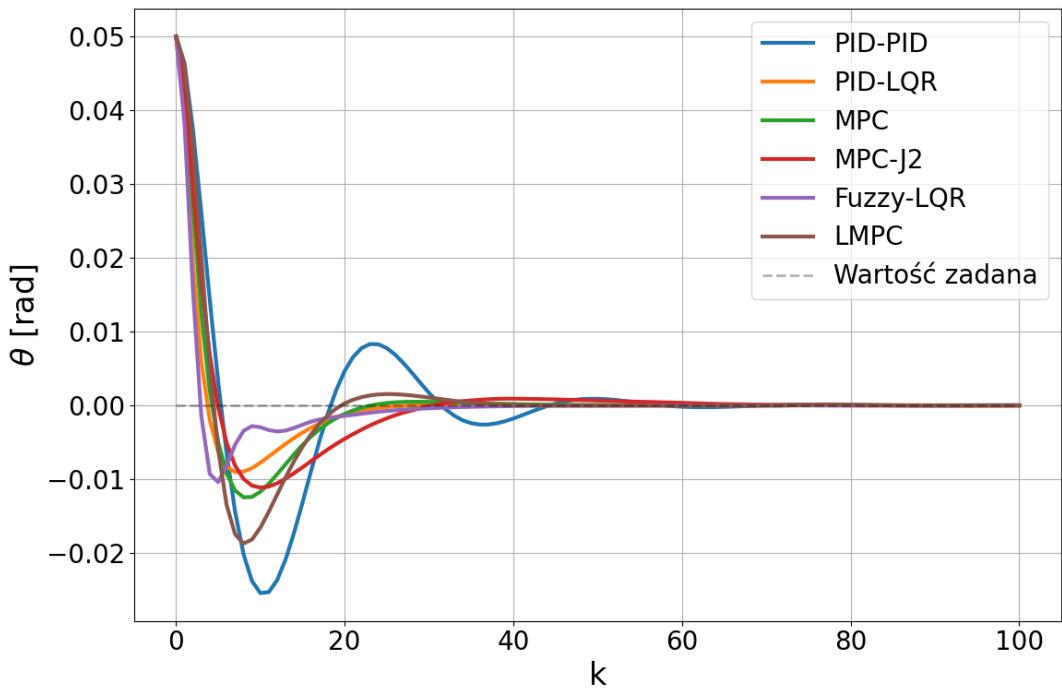
**Rysunek 6.5.** Przebieg pozycji  $x$  dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).



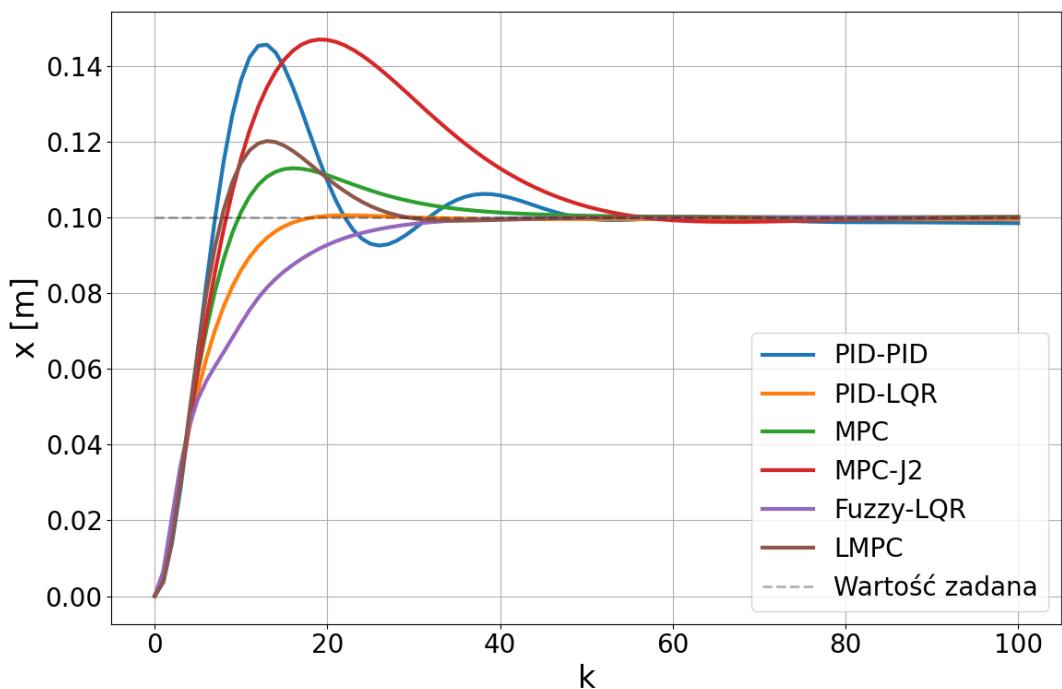
Rysunek 6.6. Sygnał sterujący  $u$  dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).

### 6.1.3. Zestawienie wyników

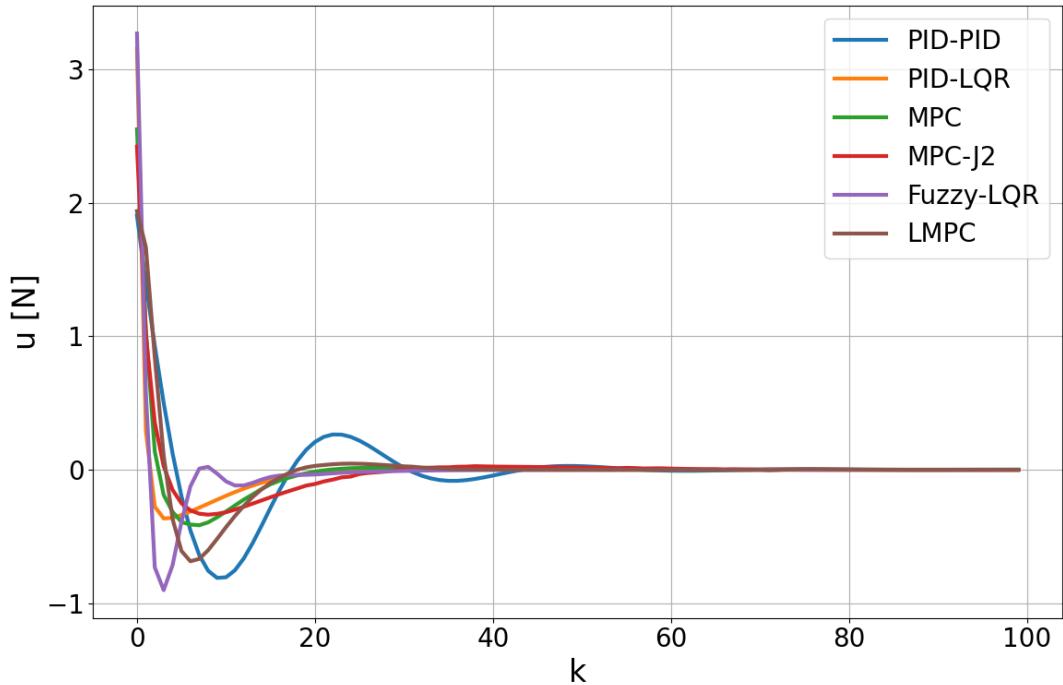
W celu bezpośredniego porównania wszystkich zaimplementowanych strategii sterowania, na Rysunkach 6.7–6.9 zestawiono przebiegi czasowe dla wszystkich regulatorów. Wykresy te potwierdzają, że w idealnych warunkach nominalnych najlepszą dynamikę oferują regulatory PID-LQR oraz MPC, które najszybciej sprowadzają wahadło do pionu przy umiarkowanym przemieszczeniu wózka. Widać wyraźny kontrast między metodami szybkimi a zachowawczym regulatorem PID-PID, który charakteryzuje się znacznie dłuższym czasem regulacji. Zestawienie to uwidacznia również różnicę w charakterystyce sygnałów sterujących – od gładkich przebiegów dla MPC, po bardziej agresywne działania Fuzzy-LQR, co przekłada się na omówione wcześniej różnice w kosztach energetycznych.



Rysunek 6.7. Przebieg kąta  $\theta$  dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).



Rysunek 6.8. Przebieg pozycji  $x$  dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).



**Rysunek 6.9.** Sygnał sterujący  $u$  dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne).

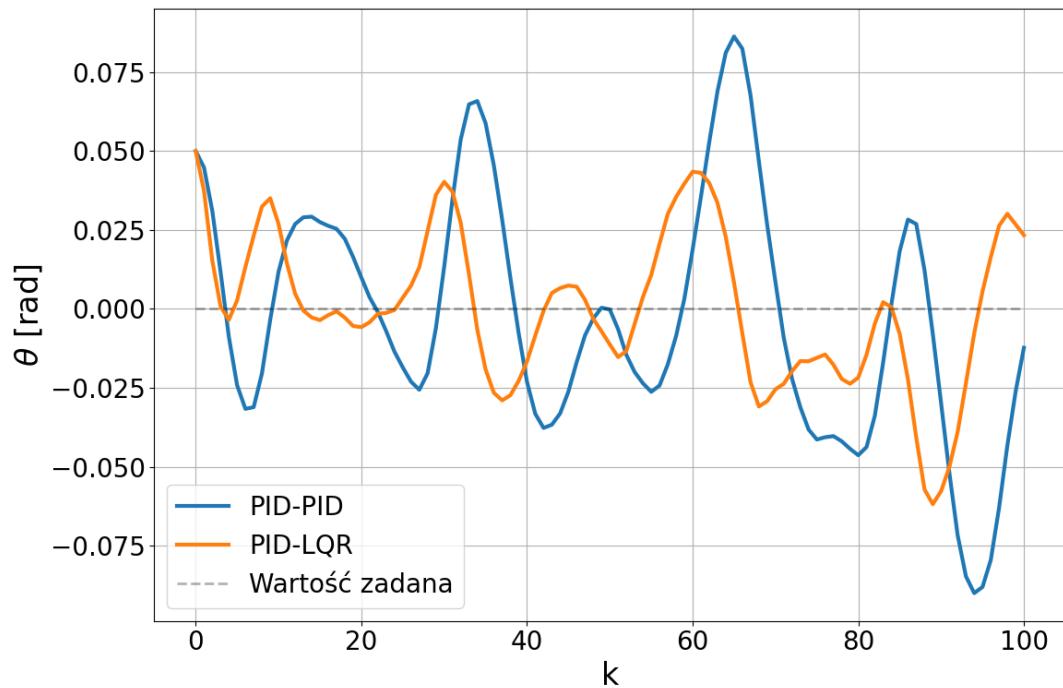
## 6.2. Analiza odporności na zakłócenia

Drugi scenariusz badawczy polegał na wprowadzeniu do układu sygnału zakłócającego, modelującego losowe zakłócenia zewnętrzne o zmiennej sile i kierunku. Test ten miał na celu sprawdzenie odporności regulatorów na zakłócenia zewnętrzne, czyli ich zdolności do utrzymania stabilności mimo działania nieznanych, zewnętrznych sił.

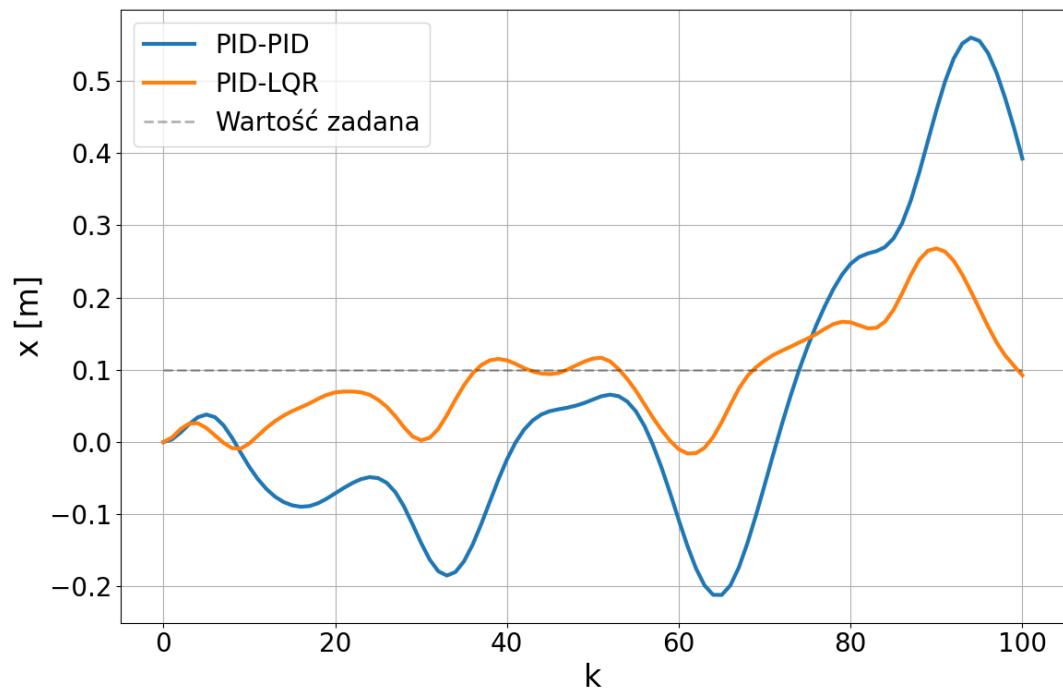
Podstawowym problemem fizycznym w tym scenariuszu jest zjawisko sprzężenia dryfu. Aby skompensować siłę zakłócającą pchającą wahadło np. w prawo, wózek musi nieustannie przyspieszać w prawo, aby przemieścić się pod środek ciężkości wahadła i wytworzyć moment siły bezwładności przeciwdziałający zakłóceniu. Oznacza to, że skuteczna kompensacja wychylenia kątowego nieuchronnie prowadzi do przemieszczania się wózka (dryfu). Istotą problemu jest znalezienie kompromisu — jak bardzo pozwolić wózkowi uciec, by utrzymać wahadło w pionie.

### 6.2.1. Charakterystyka regulatorów klasycznych

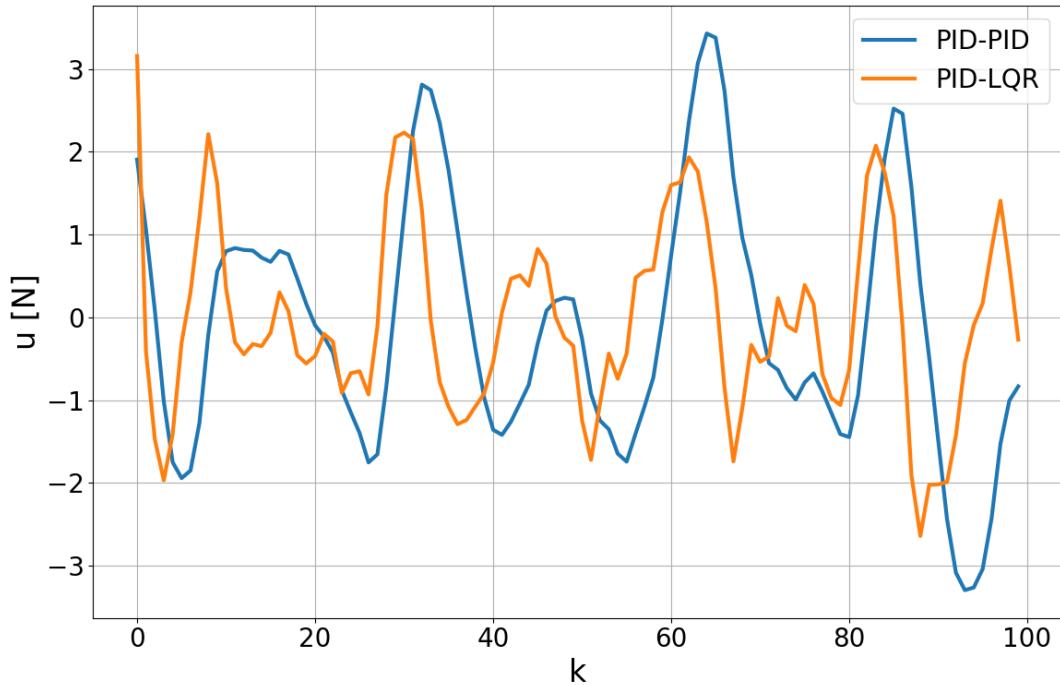
W grupie klasycznej (Rys. 6.10–6.12) nastąpiła istotna zmiana w stosunku do wcześniejszych analiz. Nowe strojenie PID-LQR, nastawione na karę za zmianę pozycji, przyniosło znakomite rezultaty. Regulator ten znaczowo poprawił stabilizację kąta ( $\text{Max}|\theta| \approx 0.062$  vs 0.090 rad dla PID-PID) oraz ograniczył dryf pozycji ( $\text{Max}|x| \approx 0.27$  m vs 0.56 m). Co kluczowe, osiągnął to przy niemal dwukrotnie niższym zużyciu energii ( $E_u \approx 12.56$ ) niż regulator PID-PID (22.78). Świadczy to o tym, że szybka i zdecydowana reakcja na pojawiające się zakłócenie jest bardziej ekonomiczna niż długotrwała walka z oscylacjami.



**Rysunek 6.10.** Przebieg kąta  $\theta$  pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.



**Rysunek 6.11.** Dryf pozycji  $x$  pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.



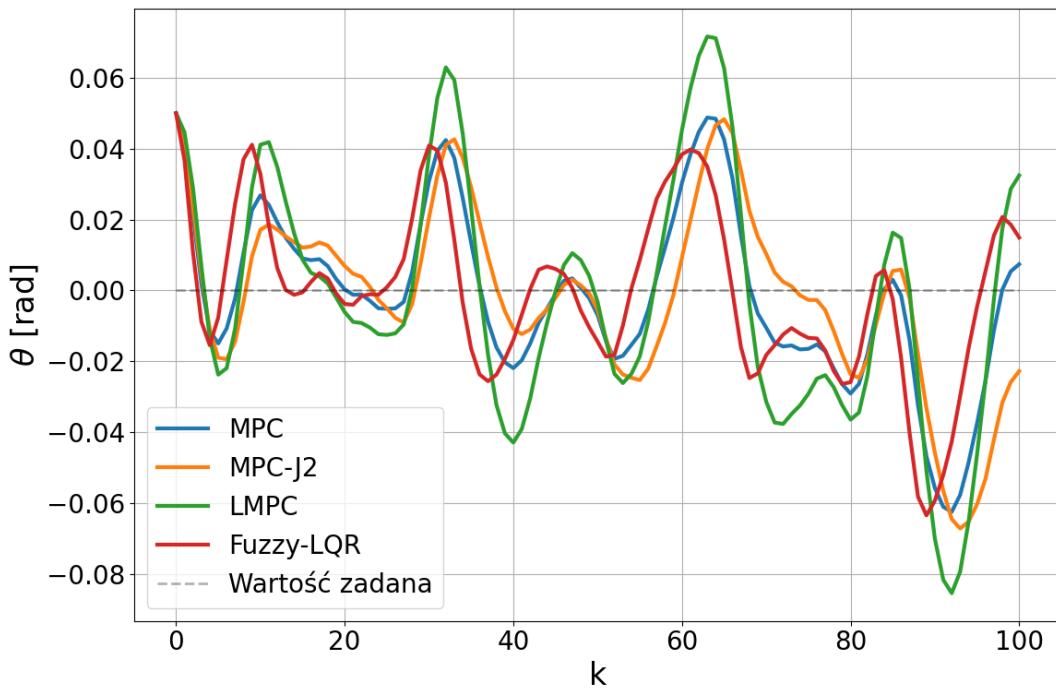
**Rysunek 6.12.** Sygnał sterujący  $u$  pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.

### 6.2.2. Charakterystyka regulatorów zaawansowanych

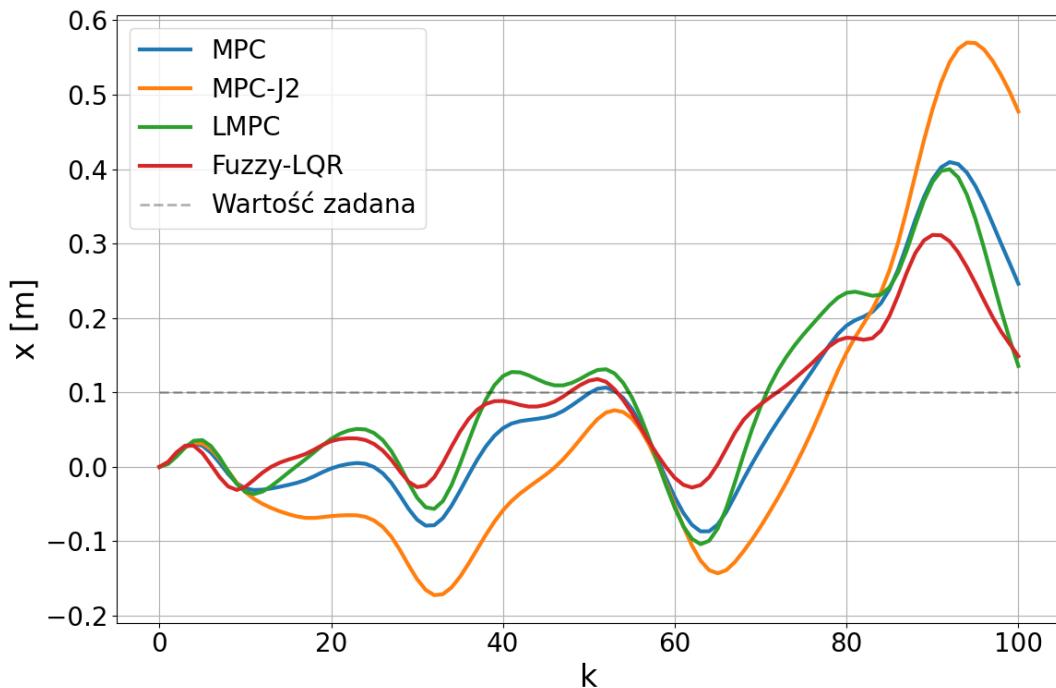
W grupie zaawansowanej (Rys. 6.13–6.15) Fuzzy-LQR potwierdza swoją skuteczność, choć nie dominuje już we wszystkich kategoriach. Uzyskał on bardzo dobre wyniki stabilizacji: małe wychylenie kątowe ( $\text{Max}|\theta| \approx 0.063$  rad) oraz niski dryf wózka ( $\text{Max}|x| \approx 0.31$  m). Pod względem zużycia energii ( $E_u \approx 13.97$ ) ustępuje on jednak nieco regulatorom MPC i PID-LQR. Mimo to, niskie wartości wskaźników całkowych błędu ( $IAE_\theta$ ) świadczą o wysokiej jakości regulacji i zdolności do szybkiego tłumienia zakłóceń.

Regulator MPC wykazał zrównoważoną charakterystykę. Pozwolił na nieco większy dryf (0.41 m) i zużył więcej energii (12.44) niż Fuzzy-LQR. Wariant MPC-alt, w przeciwieństwie do wcześniejszych prób, utrzymał stabilność układu. Jednakże, wysoka kara za wartość sterowania ograniczyła jego zdolność do szybkiej reakcji, co skutkowało największym dryfem wózka w grupie ( $\text{Max}|x| \approx 0.57$  m), porównywalnym z PID-PID. Mimo to, jego zużycie energii pozostało na umiarkowanym poziomie (12.3).

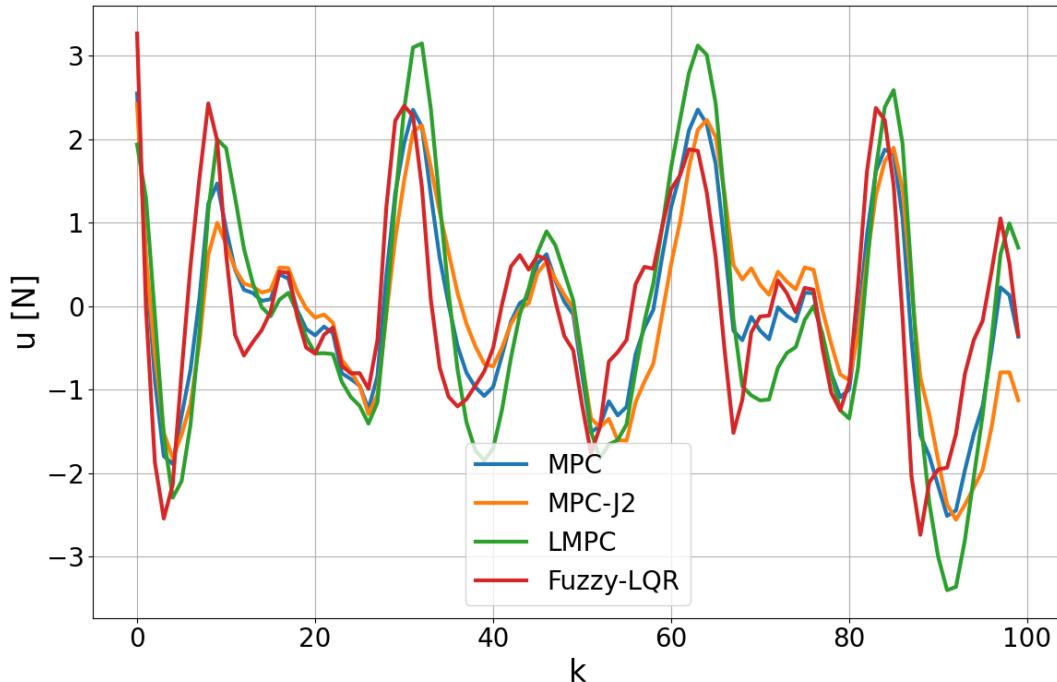
Regulator LMPC dobrze poradził sobie ze stabilizacją. Jednak gorzej poradził sobie jeśli chodzi o koszt energetyczny ( $E_u \approx 22.7$ ), zbliżony do wyniku regulatora PID-PID. Ograniczenia modelu liniowego w obliczu silnych zakłóceń wymusiły mniejszą efektywność sterowania, co widać również w nieco gorszej stabilizacji kąta (0.085 rad) w porównaniu do nieliniowego MPC.



**Rysunek 6.13.** Przebieg kąta  $\theta$  pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.



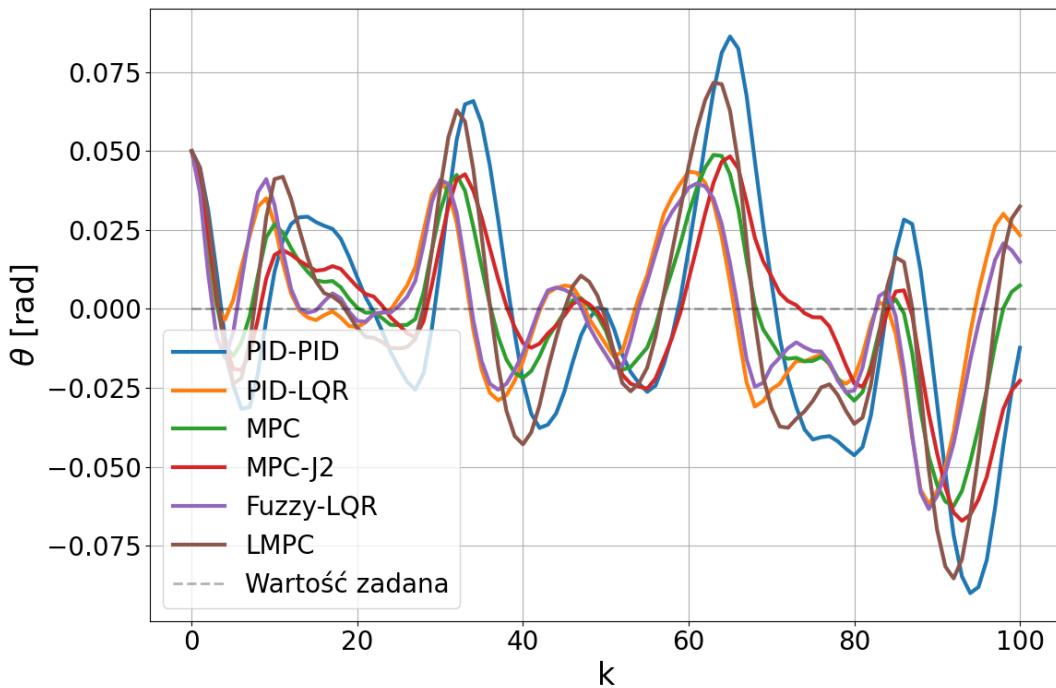
**Rysunek 6.14.** Dryf pozycji x pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.



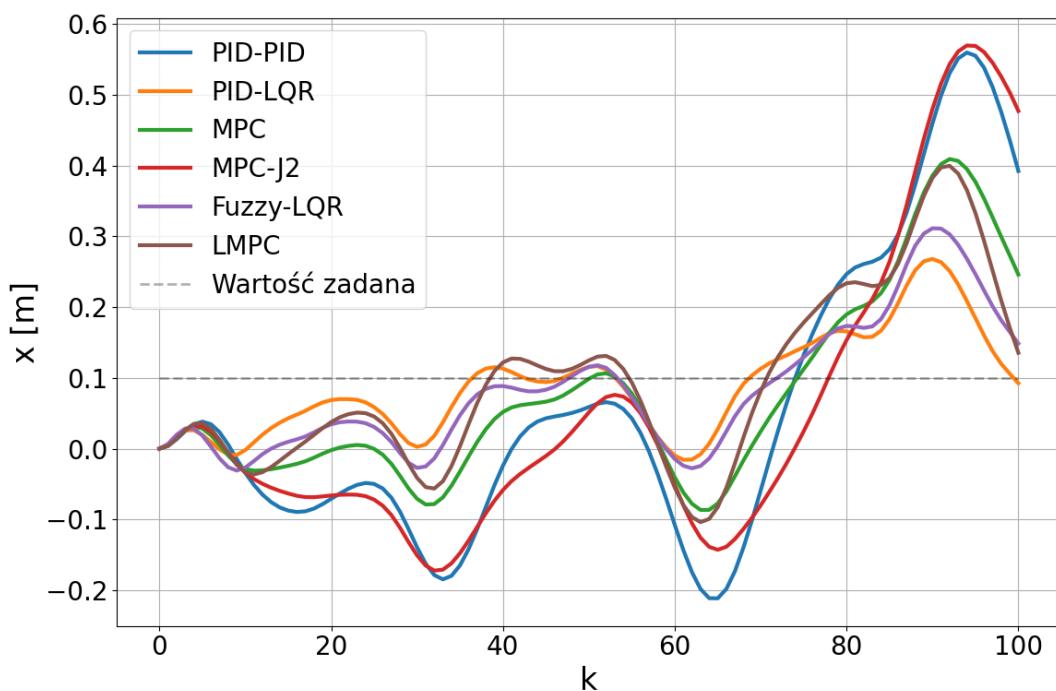
**Rysunek 6.15.** Sygnał sterujący  $u$  pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.

### 6.2.3. Zestawienie wyników

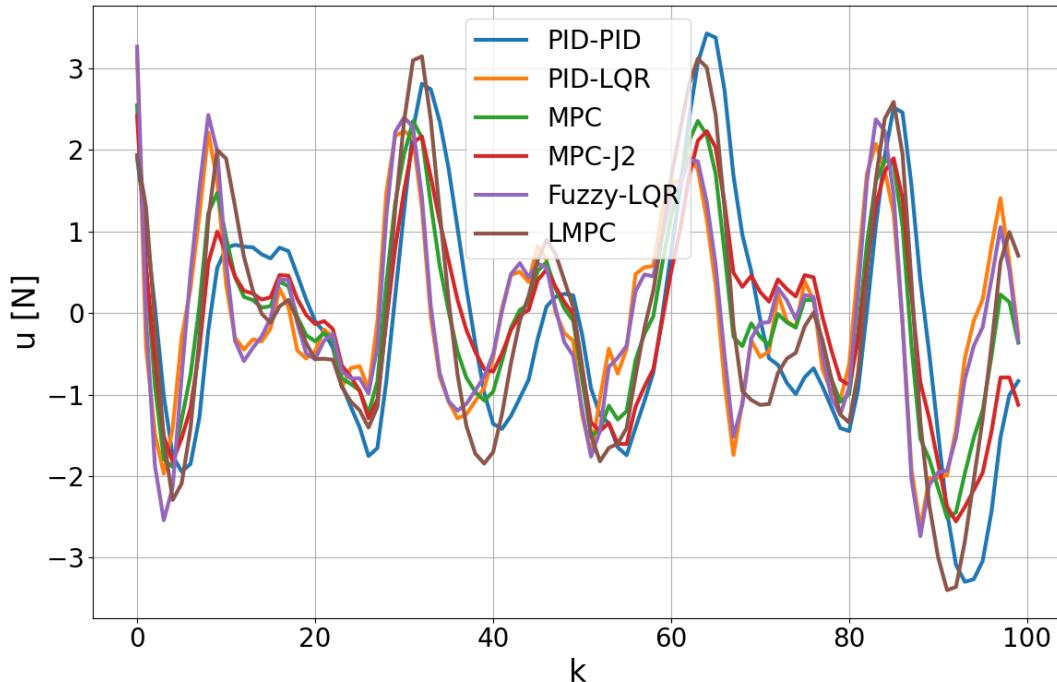
Analogicznie do warunków nominalnych, przeprowadzono zbiorcze zestawienie wyników dla wszystkich badanych regulatorów w obecności zakłóceń (Rys. 6.16–6.18). Wykresy te dobrze pokazują przewagę regulatora Fuzzy-LQR oraz PID-LQR w tłumieniu zakłóceń. Widać wyraźnie, że metody te utrzymują oscylacje wahadła w najwcześniej paśmie, podczas gdy klasyczny PID-PID oraz predykcyjne MPC pozwalają na znacznie większe wychylenia. Zestawienie sygnałów sterujących ujawnia koszt tej precyzji - Fuzzy-LQR charakteryzuje się najbardziej aktywnym sterowaniem, co jednak w ogólnym rozrachunku (dzięki szybkiej stabilizacji) nie prowadzi do najgorszego zużycia energii.



Rysunek 6.16. Przebieg kąta  $\theta$  pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.



Rysunek 6.17. Dryf pozycji  $x$  pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.



**Rysunek 6.18.** Sygnał sterujący  $u$  pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.

### 6.3. Analiza odporności na zmianę parametrów modelu

Trzeci scenariusz badawczy miał na celu ocenę wrażliwości regulatorów na niepewność parametryczną modelu. W praktycznych zastosowaniach przemysłowych dokładne wartości parametrów fizycznych układu są rzadko znane z wysoką precyzją. Mogą one ulegać zmianom w czasie (np. zużycie mechaniczne, zmiana ładunku), dlatego odporność na takie perturbacje jest kluczową właściwością regulatora.

W eksperymencie zwiększoano masę wahadła o 100% względem wartości nominalnej ( $m_{\text{nom}} = 0,23 \text{ kg} \rightarrow m_{\text{real}} = 0,46 \text{ kg}$ ), podczas gdy regulatorzy pozostały nastrojone dla parametrów nominalnych.

Wyniki eksperymentu zaprezentowano na Rysunkach 6.19, 6.20 oraz 6.21. Kluczową obserwacją jest fakt, że wszystkie badane regulatory zachowały stabilność mimo niedokładnego modelu. Świadczy to o odpowiednim zapasie stabilności wynikającym z procesu optymalizacji nastaw.

Analizując przebieg kąta  $\theta$  (Rys. 6.19), można zauważyc, że zarówno regulatory klasyczne (w szczególności PID-LQR), jak i predykcyjne (MPC, MPC-alt) wykazują wysoką odporność na zmianę parametrów. Wbrew obawom o wrażliwość metod opartych na modelu, algorytmy predykcyjne skutecznie kompensują błąd modelowania. Mechanizm sprzężenia zwrotnego oraz przesuwny horyzont predykacji pozwalają na bieżącą korektę sterowania, dzięki czemu spadek jakości regulacji jest minimalny.

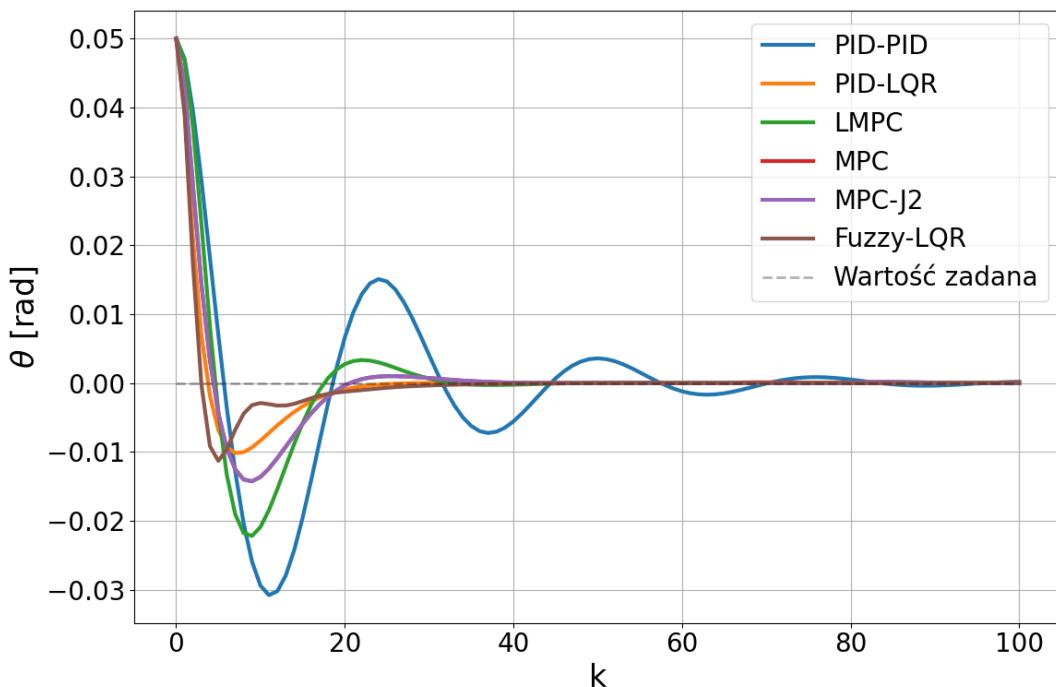
Regulator PID-LQR, dzięki wysokim wzmacnieniom, a także regulator MPC, utrzymy-

mują precyzyję stabilizacji zbliżoną do warunków nominalnych. Wskazuje to, że dla perturbacji parametrów (rzędu 100%), dobrze nastrojony regulator liniowy oraz nieliniowy MPC są równie skuteczne.

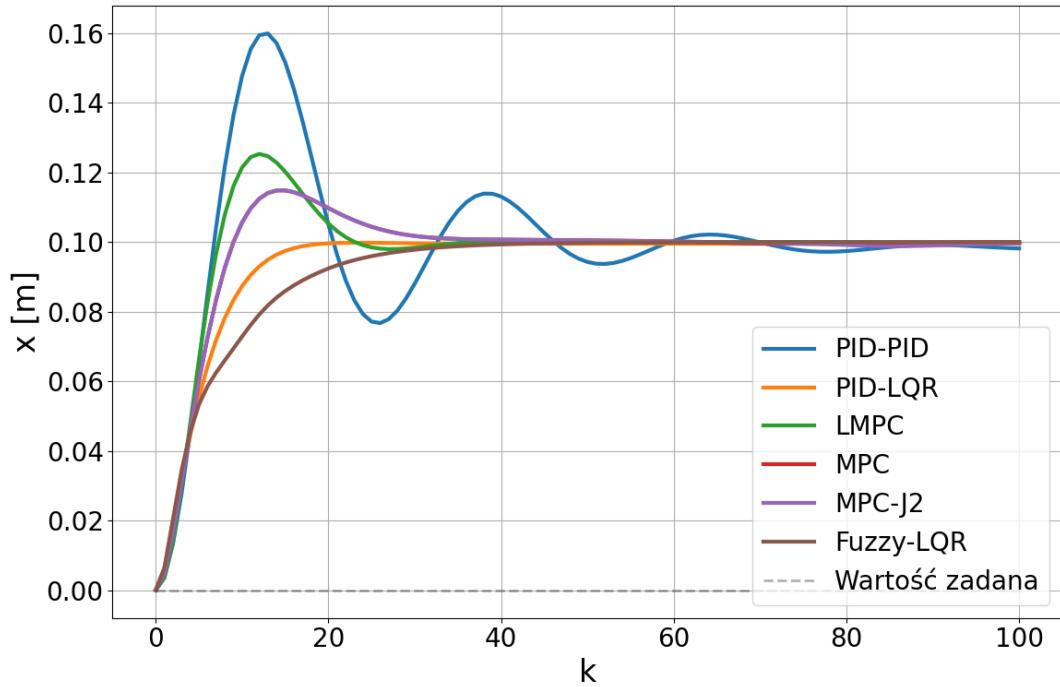
Zdecydowanie najsłabsze wyniki w tym zestawieniu osiągnął klasyczny układ PID-PID. Charakteryzuje się on najdłuższym czasem regulacji ( $T_s \approx 6,8$  s) oraz największym uchybem całkowym ( $IAE_\theta \approx 0,065$ ). Brak adaptacji oraz brak modelu predykcyjnego sprawiają, że regulator ten z trudem kompensuje tak znaczną zmianę dynamiki obiektu, co prowadzi do powolnego i oscylacyjnego dochodzenia do równowagi. Regulator LMPC plasuje się pośrodku stawki – radzi sobie lepiej niż PID-PID, ale ustępuje nieliniowym odpowiednikom MPC, co wynika z ograniczeń modelu liniowego.

Regulator Fuzzy-LQR w tym scenariuszu prezentuje się bardzo dobrze. Osiąga czas regulacji  $T_s \approx 2,3$  s oraz bardzo niski uchyb całkowy ( $IAE_\theta \approx 0,016$ ), przewyższając pod tym względem nawet PID-LQR. Co ważne, jego zużycie energii ( $E_u \approx 0,80$ ) jest niskie i porównywalne z innymi regulatorami, co stanowi znaczącą poprawę w stosunku do historycznych wyników. Elastyczność logiki rozmytej pozwala na skutecną adaptację do zmienionej dynamiki obiektu bez ponoszenia nadmiernych kosztów sterowania.

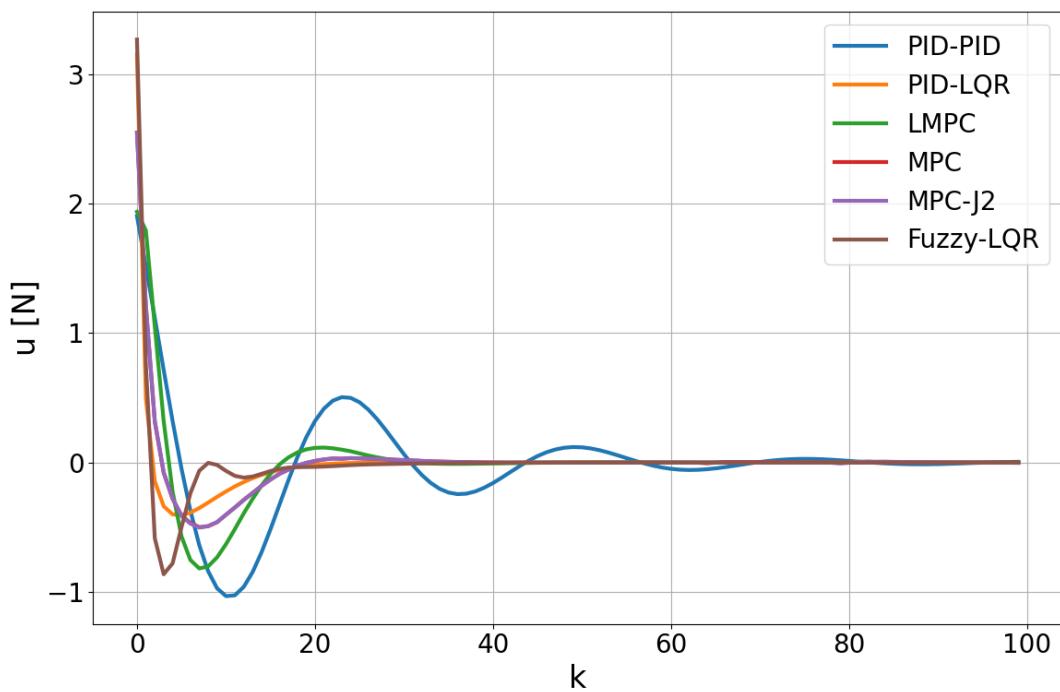
Na wykresie sterowania (Rys. 6.21) widać wzrost amplitudy sygnałów sterujących dla wszystkich regulatorów, co jest fizyczną koniecznością przy sterowaniu obiektem o większej bezwładności. Największą aktywność wykazuje regulator Fuzzy-LQR, co potwierdza jego agresywną charakterystykę działania.



**Rysunek 6.19.** Przebieg kąta  $\theta$  przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).



Rysunek 6.20. Przebieg pozycji  $x$  przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).



Rysunek 6.21. Sygnał sterujący  $u$  przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).

### 6.3.1. Analiza wrażliwości na zakres zmian

W celu pełniejszej oceny zapasów odporności poszczególnych regulatorów przeprowadzono dodatkową analizę wrażliwości. Zbadano zachowanie układów sterowania w szerskim zakresie zmian masy wahadła: od  $-75\%$  do  $+200\%$  wartości nominalnej. Dla każdej wartości perturbacji obliczono wskaźnik całkowy błędu bezwzględnego kąta ( $IAE_\theta$ ), który jest miarą skumulowanego uchybu w czasie symulacji.

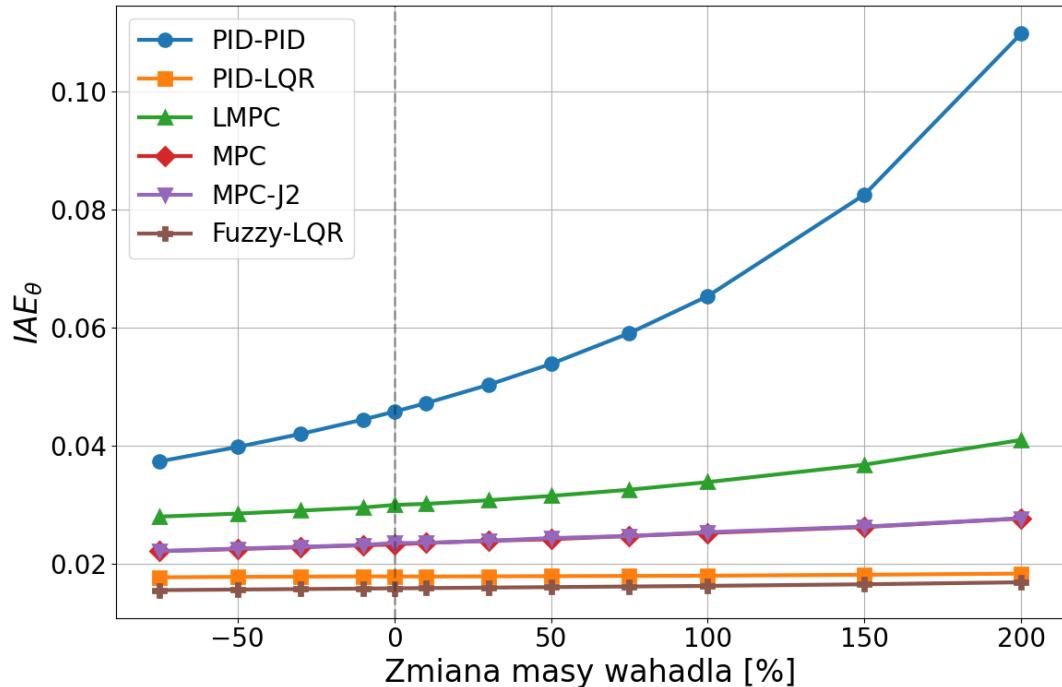
Wyniki analizy przedstawiono na Rysunku 6.22. Można zaobserwować kilka istotnych prawidłowości:

- Regulator Fuzzy-LQR wykazuje najlepszą odporność na niepewność parametryczną, osiągając najwyższe wartości  $IAE_\theta$  w całym badanym zakresie. Co więcej, jego charakterystyka jest praktycznie płaska — zmiana masy wahadła nie wpływa istotnie na jakość regulacji. Wynika to z adaptacyjnej natury logiki rozmytej, która dostosowuje wagę reguł do obserwowanego stanu układu.
- Regulatory klasyczne (PID-PID, PID-LQR) również charakteryzują się płaską charakterystyką w całym zakresie perturbacji, choć z nieco wyższymi wartościami błędu niż Fuzzy-LQR. Ich jakość regulacji jest mało wrażliwa na niepewność parametryczną dzięki strukturze opartej na sprzężeniu zwrotnym od błędu.
- Regulatory predykcyjne (MPC, MPC-alt) wykazują najwyższe wartości wskaźnika  $IAE_\theta$ . Jest to spodziewane zachowanie, gdyż algorytm optymalizacji wykorzystuje wewnętrzny model, który odbiega od rzeczywistej dynamiki obiektu. Niemniej jednak, regulatory te zachowują stabilność w całym badanym zakresie, a wzrost błędu wraz z perturbacją jest umiarkowany.

Analiza ta pokazuje, że regulatory wykorzystujące mechanizmy adaptacyjne Fuzzy-LQR lub proste sprzężenie zwrotne od błędu (PID, LQR) mogą oferować lepszą odporność na niepewność modelu niż metody predykcyjne, których skuteczność zależy od dokładności wewnętrznego modelu obiektu.

### 6.4. Szczegółowe zestawienie ilościowe

Poniższe tabele stanowią numeryczne podsumowanie omówionych wyżej zjawisk. Dane zostały zgrupowane w sposób ułatwiający porównanie osiągów w dwóch domenach: stabilizacji wahadła (kąt) oraz stabilizacji wózka (pozycja).



**Rysunek 6.22.** Analiza wrażliwości: zależność wskaźnika  $IAE_\theta$  od zmiany masy wahadła dla poszczególnych regulatorów. Linia pionowa oznacza warunki nominalne.

**Tabela 6.1.** Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - warunki nominalne

Wskaźnik	PID-PID	PID-LQR	MPC	MPC-alt	Fuzzy-LQR	LMPC
$MSE_\theta$	0,00011	0,00005	0,00006	0,00007	0,00005	0,00008
$IAE_\theta$	0,04567	0,01805	0,02323	0,02848	0,01578	0,02992
$T_{s,\theta}$	4,20000	2,10000	2,10000	2,70000	2,30000	3,10000
$MSE_x$	0,00051	0,00038	0,00038	0,00073	0,00043	0,00039
$T_{s,x}$	4,60000	1,60000	3,60000	5,20000	3,00000	2,70000
$E_u$	0,95046	0,59229	0,55762	0,51499	0,77627	0,78994

**Tabela 6.2.** Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - zakłócenia zewnętrzne

Wskaźnik	PID-PID	PID-LQR	MPC	MPC-alt	Fuzzy-LQR	LMPC
$MSE_\theta$	0,00146	0,00057	0,00058	0,00063	0,00054	0,00118
$IAE_\theta$	0,30988	0,18541	0,18151	0,18607	0,17797	0,27259
$Max \theta $	0,09006	0,06187	0,06246	0,06715	0,06344	0,08539
$MSE_x$	0,04382	0,00522	0,01843	0,04383	0,00859	0,01551
$Max x $	0,55997	0,26817	0,40938	0,56993	0,31153	0,39981
$E_u$	22,77583	12,56274	12,43920	12,26560	13,96835	22,74390

**Tabela 6.3.** Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - odporność na zmianę parametrów modelu (+100% masy wahadła)

Wskaźnik	PID-PID	PID-LQR	MPC	MPC-alt	Fuzzy-LQR	LMPC
$MSE_{\theta}$	0,00015	0,00005	0,00007	0,00007	0,00005	0,00009
$IAE_{\theta}$	0,06524	0,01854	0,02517	0,02530	0,01620	0,03379
$T_{s,\theta}$	6,80000	2,00000	2,00000	2,00000	2,30000	2,90000
$MSE_x$	0,00065	0,00038	0,00038	0,00038	0,00043	0,00040
$T_{s,x}$	8,30000	1,60000	3,00000	3,00000	3,10000	2,20000
$E_u$	1,49205	0,62520	0,64753	0,64818	0,79775	1,01039

### 6.5. Porównanie złożoności obliczeniowej

Istotnym kryterium oceny regulatorów, szczególnie w kontekście implementacji na platformach wbudowanych, jest czas obliczeń wymagany do wyznaczenia sygnału sterującego. W Tabeli 6.4 zestawiono średnie czasy wykonania jednej iteracji pętli sterowania dla poszczególnych algorytmów, zmierzone na komputerze z procesorem Intel Core i5-8250U (1.6 GHz).

**Tabela 6.4.** Średni czas obliczeń jednej iteracji pętli sterowania

Regulator	Czas [ms]	Względem PID
PID-PID	< 0,02	1 ×
PID-LQR	< 0,02	1 ×
Fuzzy-LQR	0,04	2 ×
LMPC	2,8	140 ×
MPC	11,3	565 ×
MPC-alt	14,7	735 ×

Regulatory klasyczne (PID-PID, PID-LQR) oraz rozmyty (Fuzzy-LQR) charakteryzują się zaniedbywalnym czasem obliczeń, rzędu mikrosekund. Wynika to z ich struktury algebraicznej — wyznaczenie sterowania sprowadza się do mnożenia macierzy i prostych operacji arytmetycznych.

W przypadku regulatorów predykcyjnych czas obliczeń jest o blisko trzy razy wielkości wyższy (ok. 3–15 ms), co wynika z konieczności rozwiązywania w każdym kroku zadania optymalizacji nieliniowej (lub kwadratowej dla LMPC). Wartości te pozostają jednak znacznie poniżej kroku symulacji, co potwierdza możliwość pracy MPC w czasie rzeczywistym dla rozpatrywanego obiektu. Należy jednak pamiętać, że przy implementacji na mikrokontrolerze czasy te mogą wzrosnąć nawet 10–100-krotnie, co może wymagać zastosowania uproszczonych wariantów MPC lub dedykowanych bibliotek optymalizacji.

## 7. Podsumowanie

Zrealizowano założone cele badawcze, implementując i poddając optymalizacji sześć strategii sterowania, od klasycznych PID, przez regulatory hybrydowe, aż po zaawansowane metody predykcyjne i rozmyte.

Przeprowadzone badania symulacyjne pozwoliły na sformułowanie istotnych wniosków dotyczących doboru metody sterowania do konkretnych zastosowań. Kod źródłowy projektu dostępny na github. Wyniki wskazują jednoznacznie, że nie istnieje uniwersalny regulator dominujący we wszystkich aspektach. Wybór odpowiedniego algorytmu zawsze wiąże się z fundamentalnym kompromisem inżynierskim między jakością regulacji, definiowaną jako precyzaja utrzymania punktu pracy, a kosztami eksploatacyjnymi i obciążeniem układu wykonawczego.

Wśród badanych metod szczególną skutecznością w zadaniach wymagających najwyższej precyzyji wyróżnił się system rozmyty Fuzzy-LQR, który najefektywniej niwelował wpływ zakłóceń zewnętrznych, choć kosztem większego zużycia energii. Z kolei w warunkach nominalnych najbardziej ekonomicznym i bezpiecznym dla mechaniki układu rozwiązaniem okazało się sterowanie predykcyjne MPC, które w sposób jawny uwzględnia ograniczenia fizyczne napędu. Jako rozwiązanie uniwersalne, łączące zalety obu podejść, wskazać można regulator hybrydowy PID-LQR, oferujący dobry balans między wydajnością a zużyciem energetycznym. Badania potwierdziły również, że kluczowym czynnikiem wpływającym na stabilność i odporność układu jest właściwy dobór funkcji kosztu i parametrów regulatora.

## Bibliografia

- [1] T. P. Azevedo Perdicoúlis i P. Lopes dos Santos, "The Secrets of Segway Revealed to Students: Revisiting the Inverted Pendulum", *MATEC Web of Conferences*, t. 211, s. 15 003, 2018. DOI: 10.1051/matecconf/201821115003
- [2] Q. H. Ngo i K. S. Hong, "Sliding-Mode Antisway Control of an Offshore Container Crane", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, t. 17, nr 2, s. 201–209, 2012. DOI: 10.1109/TMECH.2010.2100045
- [3] L. B. Prasad, B. Tyagi i H. O. Gupta, "Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input", *International Journal of Automation and Computing*, t. 11, nr 6, s. 661–670, 2014. DOI: 10.1007/s11633-014-0818-1
- [4] E. S. Varghese, A. K. Vincent i V. Bagyaveereswaran, "Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC", w: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, t. 263, 2017, s. 052 007. DOI: 10.1088/1757-899X/263/5/052007
- [5] T.-V.-A. Nguyen i N.-H. Tran, "An Integrated Controller for Stabilizing an Inverted Pendulum: LQR and Fuzzy Logic Control with Observer-Based State Estimation", *Journal of Applied Science and Engineering*, t. 27, nr 5, s. 2493–2502, 2024. DOI: 10.6180/jase.202405\_27(5).0006
- [6] A. Jezierski, J. Mozaryn i D. Suski, "A Comparison of LQR and MPC Control Algorithms of an Inverted Pendulum", w: *Trends in Advanced Intelligent Control, Optimization and Automation*, seria Advances in Intelligent Systems and Computing, t. 577, Cham: Springer, 2017, s. 65–76. DOI: 10.1007/978-3-319-60699-6\_8
- [7] E. F. Camacho i C. Bordons, *Model Predictive Control*, 2 wyd. London: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5
- [8] A. Mills, A. Wills i B. Ninness, "Nonlinear Model Predictive Control of an Inverted Pendulum", w: *Proceedings of the American Control Conference*, 2009, s. 2335–2340. DOI: 10.1109/ACC.2009.5160600
- [9] A. I. Roose, M. Smiley i A. Y. Ali, "Fuzzy-logic control of an inverted pendulum on a cart", *Computers & Electrical Engineering*, t. 63, s. 260–272, 2017. DOI: 10.1016/j.compeleceng.2017.05.016
- [10] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt i in., "Array programming with NumPy", *Nature*, t. 585, s. 357–362, 2020. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2
- [11] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant i in., "SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python", *Nature Methods*, t. 17, s. 261–272, 2020. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2

## Wykaz symboli i skrótów

- $T$  – krok czasowy symulacji [s]  
 $\Delta u$  – przyrost sygnału sterującego [N]  
 $\dot{\theta}$  – prędkość kątowa wahadła [rad/s]  
 $\dot{x}$  – prędkość wózka [m/s]  
 $\mu$  – funkcja przynależności (logika rozmyta)  
 $\theta$  – kąt odchylenia wahadła od pionu [rad]  
 $F_w$  – siła zakłócająca (wiatr) [N]  
 $g$  – przyspieszenie grawitacyjne [ $m/s^2$ ]  
 $G$  – wzmocnienie globalne regulatora rozmytego  
 $J$  – funkcja kosztu (wskaźnik jakości)  
 $K$  – wektor wzmocnień regulatora LQR  
 $K_d$  – wzmocnienie członu różniczkującego  
 $K_p$  – wzmocnienie członu proporcjonalnego  
 $l$  – długość wahadła [m]  
 $M$  – masa wózka [kg]  
 $m$  – masa wahadła [kg]  
 $N_c$  – horyzont sterowania (MPC)  
 $N_p$  – horyzont predykcji (MPC)  
 $Q$  – macierz wag stanu  
 $R$  – macierz wag sterowania  
 $R_{abs}$  – kara za bezwzględną wartość sterowania  
 $R_\Delta$  – kara za przyrosty sterowania  
 $t_s$  – czas ustalania [s]  
 $u$  – sygnał sterujący (siła działająca na wózku) [N]  
 $u_{sat}$  – ograniczenie (saturacja) sygnału sterującego [N]  
 $w_i$  – waga  $i$ -tej reguły rozmytej  
 $x$  – położenie wózka [m]  
 $x_{ref}$  – wartość zadana (referencyjna)  
IAE – Integral of Absolute Error – całka z błędem bezwzględnego  
ISE – Integral of Squared Error – całka z błędem kwadratowym  
LQR – Linear-Quadratic Regulator – regulator liniowo-kwadratowy  
MAE – Mean Absolute Error – średni błąd bezwzględny  
MPC – Model Predictive Control – sterowanie predykcyjne  
MSE – Mean Squared Error – średni błąd kwadratowy  
PID – regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący  
LMPC – Linear Model Predictive Control – liniowe sterowanie predykcyjne  
SLSQP – Sequential Least Squares Programming – algorytm optymalizacji  
SNR – Signal-to-Noise Ratio – stosunek sygnału do szumu

## Spis rysunków

2.1	Diagram układu odwróconego wahadła na wózku. . . . .	11
2.2	Schemat blokowy nieliniowego modelu wahadła w przestrzeni stanów. . . . .	14
2.3	Symulacja odpowiedzi swobodnej układu (z uwzględnionym tłumieniem) na małe wychylenie początkowe. Układ opuszcza niestabilny punkt równowagi ( $\theta \approx 0$ ) i stabilizuje się w pozycji wiszącej ( $\theta = \pi$ ). . . . .	16
3.1	Schemat blokowy pętli symulacyjnej (rdzeń obliczeniowy). . . . .	17
3.2	Architektura przepływu danych w zrealizowanej aplikacji. . . . .	17
3.3	Przykładowa realizacja stochastycznego procesu zakłócenia zewnętrznego działającego na wahadło w czasie symulacji. . . . .	19
3.4	Zrzut ekranu z animacji realizowanej w środowisku Python (biblioteka Matplotlib). Widoczny wózek, wahadło oraz zakres ruchu. . . . .	20
4.1	Schemat blokowy regulatora PID o strukturze równoległej. . . . .	21
4.2	Zestawienie przebiegów regulatora PID. . . . .	23
4.3	Schemat blokowy hybrydowego regulatora PID-LQR. . . . .	24
4.4	Porównanie nastaw regulatora PID-LQR. . . . .	26
4.5	Schemat blokowy regulatora MPC z wewnętrznym modelem predykcyjnym. .	27
4.6	Porównanie nastaw regulatora MPC. . . . .	29
4.7	Analiza wpływu kary za energię $R_{abs}$ w sterowaniu MPC-alt. . . . .	31
4.8	Strojenie liniowego regulatora MPC. . . . .	33
4.9	Schemat blokowy regulatora Fuzzy-LQR z równoległą strukturą hybrydową. .	34
4.10	Trójkątne funkcje przynależności dla czterech zmiennych stanu regulatora Fuzzy-LQR. Każda zmienna posiada dwa zbiory rozmyte: „Mały błąd” (aktywny w pobliżu zera) oraz „Duży błąd” (aktywny przy większych odchyleniach od punktu równowagi). . . . .	35
4.11	Strojenie regulatora Fuzzy-LQR. . . . .	37
6.1	Przebieg kąta $\theta$ dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne). . . . .	42
6.2	Przebieg pozycji $x$ dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne). . . . .	43
6.3	Sygnal sterujący $u$ dla regulatorów klasycznych (Warunki nominalne). . . . .	43
6.4	Przebieg kąta $\theta$ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne). . . .	45
6.5	Przebieg pozycji $x$ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne). .	45
6.6	Sygnal sterujący $u$ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne). .	46
6.7	Przebieg kąta $\theta$ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne). . .	47
6.8	Przebieg pozycji $x$ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne). .	47
6.9	Sygnal sterujący $u$ dla regulatorów zaawansowanych (Warunki nominalne). .	48
6.10	Przebieg kąta $\theta$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.	49
6.11	Dryf pozycji $x$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne. .	49

6.12 Sygnał sterujący $u$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory klasyczne.	50
6.13 Przebieg kąta $\theta$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.	51
6.14 Dryf pozycji $x$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.	51
6.15 Sygnał sterujący $u$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – regulatory zaawansowane.	52
6.16 Przebieg kąta $\theta$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.	53
6.17 Dryf pozycji $x$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.	53
6.18 Sygnał sterujący $u$ pod wpływem zakłóceń zewnętrznych – wszystkie regulatory.	54
6.19 Przebieg kąta $\theta$ przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).	55
6.20 Przebieg pozycji $x$ przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).	56
6.21 Sygnał sterujący $u$ przy zmienionych parametrach modelu (+100% masy wahadła).	56
6.22 Analiza wrażliwości: zależność wskaźnika $IAE_\theta$ od zmiany masy wahadła dla poszczególnych regulatorów. Linia pionowa oznacza warunki nominalne.	58

## Spis tabel

3.1 Parametry fizyczne modelu przyjęte w symulacji . . . . .	18
4.1 Zestawienie parametrów strojenia regulatora PID-PID. . . . .	22
4.2 Zestawienie parametrów strojenia regulatora PID-LQR. . . . .	25
4.3 Zestawienie parametrów strojenia regulatora MPC. . . . .	28
4.4 Analiza wpływu kary energetycznej w MPC-alt (przy stałych $Q$ i $R_\Delta$ ). . . . .	30
4.5 Zestawienie parametrów strojenia LMPC. . . . .	32
4.6 Parametry regulatora Fuzzy-LQR. . . . .	36
6.1 Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - warunki nominalne . . . . .	58
6.2 Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - zakłócenia zewnętrzne . . . . .	58
6.3 Wskaźniki jakości (Kąt i Pozycja) - odporność na zmianę parametrów modelu (+100% masy wahadła) . . . . .	59
6.4 Średni czas obliczeń jednej iteracji pętli sterowania . . . . .	59