

Politechnika Warszawska

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI  
I TECHNIK INFORMACYJNYCH



Instytut Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej

# Praca dyplomowa inżynierska

na kierunku Automatyka i Robotyka

Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku

Adam Sokołowski

Numer albumu 324892

promotor  
Robert Nebeluk

WARSZAWA 2025



## **Efektywny układ stabilizacji odwróconego wahadła na wózku**

**Streszczenie.** W pracy przeprowadzono analizę i porównanie wybranych metod sterowania odwróconym wahadłem na wózku — klasycznym przykładem nieliniowego i niestabilnego układu dynamicznego. Celem badań było opracowanie środowiska symulacyjnego umożliwiającego ocenę skuteczności różnych algorytmów regulacji oraz ich odporności na zakłócenia zewnętrzne. W ramach pracy zaimplementowano i przetestowano następujące podejścia: klasyczny regulator kaskadowy PID–PID, układ złożony PID–LQR, regulator LQR dla całego systemu, sterowanie predykcyjne modelowe MPC bez ograniczeń (MPC\_NO) w kilku wariantach funkcji kosztu, oraz regulator rozmyty Takagi–Sugeno.

Dla każdego z rozważanych regulatorów wykonano symulacje numeryczne w warunkach nominalnych oraz w obecności zakłóceń poziomych działających na wózek. Analizie poddano przebiegi kątów i położeń, a także obliczono wskaźniki jakości regulacji: średni błąd kwadratowy (MSE), średni błąd bezwzględny (MAE), czas regulacji, przeregulowanie, energię sygnału sterującego oraz średni czas obliczeń. Wyniki przedstawiono w postaci wykresów i tabel umożliwiających obiektywne porównanie metod.

Otrzymane rezultaty wskazują, że włączenie metod optymalnych i predykcyjnych pozwala znacząco poprawić stabilność oraz odporność układu w porównaniu z klasycznym sterowaniem PID. Regulator MPC zapewniał najkrótszy czas stabilizacji przy zachowaniu umiarkowanego kosztu sterowania, natomiast regulator rozmyty Takagi–Sugeno wykazał dobrą adaptacyjność przy zmiennych warunkach pracy. Opracowane środowisko może stanowić podstawę do dalszych badań nad sterowaniem nieliniowym, w tym nad integracją metod rozmytych, optymalnych i predykcyjnych.

**Słowa kluczowe:** odwrócone wahadło, regulator PID, regulator LQR, regulator MPC, Takagi–Sugeno, sterowanie predykcyjne, sterowanie optymalne, zakłócenia, stabilizacja, symulacja, układ nieliniowy

## Effective stabilisation system of the inverted pendulum on the cart

**Abstract.** This thesis presents the analysis and comparison of several control methods for an inverted pendulum on a cart — a classical benchmark of nonlinear and unstable dynamics. The aim of the study was to develop a simulation framework enabling an objective evaluation of different control algorithms and their robustness to external disturbances. The implemented control strategies included a classical cascade PID–PID controller, a combined PID–LQR scheme, a full-state LQR controller, a model predictive controller without constraints (MPC\_NO) with alternative cost functions, and a fuzzy Takagi–Sugeno controller.

For each controller, numerical simulations were performed under nominal conditions and under horizontal disturbance forces acting on the cart. The responses of the pendulum angle and cart position were analyzed, and several performance indices were calculated: mean squared error (MSE), mean absolute error (MAE), settling time, overshoot, control energy, and average computation time. The results were visualized in plots and summarized in tables, allowing a comprehensive comparison of control quality and computational efficiency.

The obtained results show that introducing optimal and predictive control significantly improves system stability and robustness compared to classical PID regulation. The MPC controller provided the fastest stabilization with a moderate control effort, while the Takagi–Sugeno fuzzy controller demonstrated good adaptability under varying operating conditions. The developed simulation environment constitutes a solid foundation for further research on nonlinear control, particularly on hybrid combinations of fuzzy, optimal, and predictive methods.

**Keywords:** inverted pendulum, PID controller, LQR controller, MPC controller, Takagi–Sugeno, predictive control, optimal control, disturbances, stabilization, nonlinear system, simulation

# Spis treści

<b>1. Wstęp</b>	7
1.1. Cel pracy	8
1.2. Omówienie literatury	9
<b>2. Model matematyczny układu</b>	11
2.1. Opis fizyczny układu	11
2.2. Równania nieliniowe ruchu	11
2.3. Model nieliniowy w przestrzeni stanów	12
2.4. Model liniowy zlinearyzowany wokół punktu równowagi	13
2.5. Model z zakłóceniem zewnętrznym	13
<b>3. Środowisko</b>	15
<b>4. Metody sterowania</b>	16
4.1. Regulator PID (dla kąta wahadła)	16
4.2. Regulator PD (dla pozycji wózka)	16
4.3. Regulator LQR (Linear–Quadratic Regulator)	16
4.4. Regulator złożony (Composite Controller)	17
<b>5. Eksperymenty</b>	18
5.1. Opis przeprowadzonych eksperymentów	18
5.2. Dobór parametrów regulatorów	19
5.3. Porównanie jakości regulacji – wskaźniki błędów	21
5.4. Podsumowanie eksperymentów	21
<b>Bibliografia</b>	23
<b>Wykaz symboli i skrótów</b>	24
<b>Spis rysunków</b>	24
<b>Spis tabel</b>	24



# 1. Wstęp

Odwrócone wahadło na wózku jest klasycznym przykładem nieliniowego, niestabilnego układu, wykorzystywanym zarówno w dydaktyce, jak i w badaniach nad zaawansowanymi technikami sterowania. Jego atrakcyjność wynika z tego, że choć geometria i parametry są stosunkowo proste, to układ ten pozostaje trudny do stabilizacji i wymaga precyzyjnej regulacji w czasie rzeczywistym. Charakterystyczna podwzбудność underactuation oraz silna wrażliwość na zakłócenia sprawiają, że nawet niewielkie odchylenia prowadzą do gwałtownego narastania błędów i utraty równowagi.

Znaczenie tego modelu wykracza daleko poza cele dydaktyczne. Odwrócone wahadło na wózku służy jako kanoniczny benchmark dla metod sterowania i estymacji stanu, ponieważ łączy w sobie typowe trudności spotykane w systemach rzeczywistych: nieliniowość, niestabilność, ograniczenia aktuatora oraz niepewność parametrów fizycznych. Umożliwia badanie zachowania regulatorów w sytuacjach, w których klasyczne założenia liniowe przestają obowiązywać, a układ wymaga adaptacji lub sterowania optymalnego.

Model ten ma również liczne odpowiedniki w praktyce inżynierskiej. Jego dynamika jest analogiczna do wielu złożonych zjawisk fizycznych i konstrukcji technicznych, w tym:

- stabilizacji robotów dwukołowych, takich jak Segway czy roboty mobilne balansujące na jednej osi,
- stabilizacji rakiet nośnych i pocisków, w których wektor ciągu pełni rolę „siły wózka”, a masa rakiety i położenie środka ciężkości odpowiadają geometrii wahadła,
- sterowania ruchem ramion manipulatorów i żurawi, w których konieczne jest tłumienie oscylacji zawieszonych ładunków,
- równoważenia platform i pojazdów samobalansujących, gdzie zachowanie pionowej pozycji wymaga ciągłego dopasowywania siły napędowej do położenia środka masy.

Ze względu na te analogie, problem stabilizacji odwróconego wahadła jest powszechnie traktowany jako uproszczony model wielu systemów rzeczywistych o podobnej dynamice. Jego badanie pozwala na praktyczne sprawdzenie skuteczności różnych algorytmów sterowania, zanim zostaną one zastosowane w bardziej złożonych lub kosztownych obiektach. Z tego powodu układ ten od dziesięcioleci stanowi ważny punkt odniesienia w badaniach nad nowoczesnymi metodami regulacji — od klasycznych regulatorów PID i LQR po sterowanie predykcyjne, adaptacyjne i rozmyte.

Prostota modelu matematycznego oraz łatwość interpretacji wyników (kąt wychylenia wahadła i położenie wózka) sprawiają, że odwrócone wahadło pozostaje jednym z najbardziej rozpoznawalnych obiektów w teorii sterowania. Łączy ono elegancję analityczną z praktycznymi wyzwaniem inżynierskimi, stanowiąc uniwersalne narzędzie do nauki, testowania i rozwijania metod stabilizacji systemów nieliniowych i niestabilnych.

### 1.1. Cel pracy

Celem niniejszego sprawozdania jest przedstawienie projektu symulacyjnego układu stabilizacji odwróconego wahadła na wózku, będącego klasycznym przykładem niestabilnego i nieliniowego obiektu dynamicznego. W ramach pracy przeprowadzono analizę i porównanie skuteczności różnych metod sterowania, zarówno klasycznych, jak i nowoczesnych, w identycznych warunkach testowych.

Zaimplementowano i zbadano działanie następujących regulatorów:

1. **Regulator PID–PID** — klasyczny układ kaskadowy z dwiema pętlami sprzężenia zwrotnego, w którym jedna pętla odpowiada za stabilizację kąta wychYLENIA wahadła  $\varphi$ , a druga za pozycję wózka  $x$ .
2. **Regulator PID–LQR** — połączenie klasycznego sterowania PID dla położenia wózka z optymalnym regulatorem stanu LQR dla kąta wahadła, stanowiące kompromis między prostotą implementacji a wysoką jakością regulacji.
3. **Regulator LQR** — regulator optymalny zaprojektowany dla pełnego modelu zlinearyzowanego układu, minimalizujący zdefiniowaną funkcję kosztu energii błędów i sygnału sterującego.
4. **Regulator MPC\_NO** — model predykcyjny bez ograniczeń, wykorzystujący optymalizację w horyzoncie czasowym do przewidywania przyszłych stanów układu.
5. **Regulator MPC\_NO z alternatywną funkcją kosztu** — warianty metody MPC o zmodyfikowanym kryterium optymalizacji, kładące nacisk na ograniczenie prędkości stanów lub silniejsze karanie dużych wychyleń wahadła.
6. **Regulator rozmyty Takagi–Sugeno** — metoda bazująca na lokalnych modelach liniowych i regułach typu jeśli-to, stanowiąca przykład podejścia adaptacyjnego i nieliniowego.

Celem porównań było określenie, która z metod zapewnia najlepszy kompromis między dokładnością, szybkością, stabilnością oraz odpornością układu na zakłócenia i zmienność parametrów. Dla każdego z regulatorów przeanalizowano odpowiedź układu w warunkach nominalnych oraz przy obecności zaburzeń zewnętrznych w postaci siły poziomej działającej na wózek.

Dodatkowo zestawiono i porównano miary jakości regulacji:

- średni błąd kwadratowy (MSE) oraz średni błąd bezwzględny (MAE) dla trajektorii  $\varphi(t)$  i  $x(t)$ ,
- czas regulacji i przeregulowanie,
- energię sygnału sterującego,
- średni czas obliczeń poszczególnych metod.

Uzyskane wyniki pozwalają na ocenę efektywności, złożoności obliczeniowej oraz odporności na zakłócenia poszczególnych metod sterowania, a także stanowią punkt wyjścia do dalszych badań nad sterowaniem predykcyjnym i rozmytym dla układów nieliniowych.



## 1.2. Omówienie literatury

W literaturze przedmiotu odwrócone wahadło na wózku jest traktowane jako wzorcowy układ niestabilny i nieliniowy, stanowiący użyteczną platformę do porównywania metod regulacji i estymacji stanu. W pracy [1] przedstawiono kompletny model nieliniowy z uwzględnieniem zaburzenia siłowego (wiatru) oraz liniaryzację w otoczeniu punktu równowagi. Na tej podstawie zaprojektowano regulatory PID i LQR, a także rozważono konfiguracje hybrydowe PID+LQR (warianty z jedną i dwiema pętlami PID), porównując odpowiedzi czasowe w warunkach nominalnych i przy zakłóceniach. Wyniki wskazują, że włączenie komponentu LQR poprawia szybkość i gładkość odpowiedzi w stosunku do regulacji wyłącznie typu PID.

Ujęcie konferencyjne [2] poszerza perspektywę o sterowanie predykcyjne (MPC), prezentując jednorodne środowisko symulacyjne i porównania PID, LQR, konfiguracji PID+LQR oraz MPC. Autorzy zestawiają przebiegi stanów i sygnałów sterujących, analizując przypadki bez zakłóceń i z zakłóceniami (szum pasmowo ograniczony). Z punktu widzenia jakości regulacji wyniki potwierdzają przewagę rozwiązań z udziałem LQR nad czystym PID oraz pokazują potencjał MPC w poprawie własności dynamicznych.

Nowsze prace integrują metody optymalne i rozmyte. Artykuł [3] przedstawia rozwiązanie bazujące na połączeniu LQR i regulatora rozmytego Takagi-Sugeno (z kompensacją typu PDC), uzupełnione obserwatorami prędkości kątowej (porównanie obserwatora ESO i wysokorzędowego integral-chain). Otrzymane wyniki wskazują na przyspieszenie zbieżności i poprawę jakości estymacji w stosunku do układu opartego wyłącznie na LQR, co czyni podejścia hybrydowe atrakcyjnymi w obecności zakłóceń i niepewności parametrów.

W polskiej literaturze akademickiej, w tym w pracach zespołów z Politechniki Warszawskiej, porównywano LQR z predykcyjnym regulatorem przestrzeni stanu (SSMPC) na rzeczywistych stanowiskach laboratoryjnych dla wahadła odwróconego [4]. Wykazano między innymi, że LQR dobrze radzi sobie z regulacją do wartości stałej oraz tłumieniem zakłóceń, podczas gdy SSMPC zapewnia łagodniejsze zmiany sterowania i korzystne własności śledzenia trajektorii, co ma znaczenie dla trwałości elementów wykonawczych.

Z punktu widzenia podstaw teoretycznych i zaleceń projektowych dla MPC, prace monograficzne [5] stanowią powszechnie przywoływane źródła. Omawiają one formułowanie funkcji kosztu (w tym składnika terminalnego i kar na przyrosty sterowania), wybór horyzontów, stabilność zamkniętej pętli oraz aspekty obliczeniowe. Po stronie wdrożeń i wykonalności obliczeniowej NMPC, istotne są wyniki uzyskane na stanowiskach rzeczywistych, gdzie rozwiązywano w czasie rzeczywistym zadania nieliniowe z wieloma ograniczeniami [6]. Wątki związane z efektywnością obliczeń i ograniczeniami czasowymi są rozwijane w nowszych pracach, również w czasopiśmie krajowych [7]. Dla ujęć rozmytych i hybrydowych, użyteczne tło eksperymentalne i metodyczne oferują opracowania

poświęcone regulatorom Takagi-Sugeno z kompensacją PDC oraz ich porównaniom z podejściami klasycznymi [8].

Podsumowując, korpus literatury obejmuje: klasyczne porównania PID/LQR wraz z analizą wpływu zakłóceń [1], rozszerzenie o ujęcia predykcyjne i zestandaryzowane scenariusze porównawcze [2], integrację metod optymalnych i rozmytych z estymacją stanów [3], a także wyniki badań laboratoryjnych i zalecenia projektowe dla MPC potwierdzone w pracach monograficznych i wdrożeniowych.

## 2. Model matematyczny układu

### 2.1. Opis fizyczny układu

Rozważany układ stanowi klasyczny przykład niestabilnego i nieliniowego obiektu dynamicznego – wahadło odwrócone na wózku. Składa się on z wózka o masie  $M$ , poruszającego się po torze poziomym, oraz wahadła o masie  $m$  i długości  $l$ , przegubowo zamocowanego do wózka. Punkt zawieszenia znajduje się na jego górnej części, a wahadło może swobodnie wychylać się w płaszczyźnie pionowej.

Układ jest zasilany siłą sterującą  $u(t)$ , przyłożoną do wózka w kierunku poziomym. Zadaniem sterowania jest takie kształtowanie tej siły, aby utrzymać wahadło w pozycji odwróconej ( $\theta = 0$ ), a jednocześnie stabilizować położenie wózka  $x(t)$  wokół zadanej pozycji. Pozycja odwrócona jest położeniem równowagi niestabilnej – najmniejsze zaburzenie powoduje wychylenie i upadek wahadła, jeśli nie zostanie ono aktywnie stabilizowane.

Z uwagi na to, że układ ten jest nieliniowy i sprzężony, stanowi on powszechnie wykorzystywany model badawczy w dziedzinie teorii sterowania. Na jego podstawie testuje się zarówno klasyczne metody regulacji, jak i nowoczesne podejścia optymalne i predykcyjne.

Parametry fizyczne układu przyjęto w postaci:

- $M$  – masa wózka [kg],
- $m$  – masa wahadła [kg],
- $l$  – długość pręta wahadła [m],
- $g$  – przyspieszenie ziemskie [m/s<sup>2</sup>].

Przyjęto, że tarcie kół wózka oraz opory w przegubie wahadła są pomijalnie małe, co pozwala uprościć równania ruchu. Układ współrzędnych przyjęto w taki sposób, że pozycja wózka oznaczona jest jako  $x(t)$ , natomiast kąt wychylenia wahadła  $\theta(t)$  mierzony jest względem osi pionowej (rysunek 2.1).

W dalszych rozważaniach zakłada się, że  $\theta(t) = 0$  odpowiada położeniu pionowemu wahadła w górę, czyli stanowi punkt równowagi niestabilnej, który ma zostać ustabilizowany poprzez odpowiedni dobór sygnału sterującego  $u(t)$ .

### 2.2. Równania nieliniowe ruchu

Aby otrzymać matematyczny opis dynamiki układu, należy zapisać równania ruchu wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona. Dla wózka sumę sił działających w kierunku poziomym można zapisać w postaci:

$$(M + m)\ddot{x} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 + ml\cos\theta\ddot{\theta} = u,$$

gdzie pierwszy człon odpowiada za siłę bezwładności wózka i masy wahadła, drugi za siłę odśrodkową działającą w kierunku poziomym, a trzeci za składową siły wynikającą z przyspieszenia kątownego wahadła.

## 2. Model matematyczny układu

Dla samego wahadła, po wykonaniu bilansu momentów względem punktu zawieszenia, otrzymuje się zależność:

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta.$$

Równania te tworzą nieliniowy układ równań różniczkowych drugiego rzędu. Po algebraicznych przekształceniach można uzyskać końcową postać równań ruchu:

$$\ddot{x} = \frac{u + ml\sin\theta\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta}{M + m - m\cos^2\theta},$$
$$\ddot{\theta} = \frac{u\cos\theta - (M + m)g\sin\theta + ml\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2}{l(m\cos^2\theta - (M + m))}.$$

Powyższe równania stanowią kompletny opis nieliniowej dynamiki wahadła odwróconego na wózku. Warto zauważyć, że układ jest silnie sprzężony – zmiana położenia wózka wpływa na ruch wahadła i odwrotnie. Nieliniowość wynika głównie z obecności funkcji trygonometrycznych  $\sin\theta$ ,  $\cos\theta$  oraz iloczynów tych funkcji z prędkościami.

### 2.3. Model nieliniowy w przestrzeni stanów

W celu dalszej analizy oraz projektowania regulatorów korzystne jest zapisanie modelu w postaci równań stanu. W tym celu definiuje się wektor stanu:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix},$$

gdzie  $x_1$  i  $x_2$  opisują kąt oraz prędkość kątową wahadła, natomiast  $x_3$  i  $x_4$  – położenie i prędkość liniową wózka.

W tej notacji model przyjmuje postać:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u),$$

czyli:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{u\cos x_1 - (M + m)g\sin x_1 + ml(\cos x_1\sin x_1)x_2^2}{l(m\cos^2 x_1 - (M + m))}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{u + ml(\sin x_1)x_2^2 - mg\cos x_1\sin x_1}{M + m - m\cos^2 x_1}. \end{aligned}$$

Model w tej postaci jest użyteczny do symulacji nieliniowej w środowisku MATLAB/Si-

mulink, gdyż pozwala bezpośrednio analizować wpływ nieliniowości na stabilność oraz dynamikę układu. Wyjściami (wielkościami obserwowanymi) są kąt wychylenia wahadła i położenie wózka:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = C\mathbf{x}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 2.4. Model liniowy zlinearyzowany wokół punktu równowagi

Ponieważ pozycja odwrócona ( $\theta = 0$ ) stanowi punkt pracy, wokół którego układ ma być stabilizowany, przeprowadza się liniaryzację modelu nieliniowego w tym punkcie. Liniaryzacja umożliwia zastosowanie klasycznych metod analizy i syntezy regulatorów, takich jak LQR, PID czy MPC.

Dla małych wychyleń ( $|\theta| \ll 1$ ) można przyjąć przybliżenia:

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1.$$

Po wstawieniu ich do równań nieliniowych i pominięciu wyrazów wyższego rzędu otrzymuje się model liniowy w postaci przestrzeni stanów:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}.$$

Model ten stanowi podstawę dla dalszego projektowania układów sterowania. Jest to klasyczna postać zlinearyzowanego wahadła odwróconego, szeroko wykorzystywana w literaturze, m.in. w pracach Prasada i in. (2014), Ogaty (2005) czy Burnsa (2001).

Z punktu widzenia teorii sterowania układ taki jest **\*\*sterowalny\*\***, co oznacza, że istnieje sygnał  $u(t)$ , który pozwala doprowadzić system do dowolnego stanu w skończonym czasie. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie regulatorów optymalnych (LQR, MPC) oraz klasycznych (PID).

#### 2.5. Model z zakłóceniem zewnętrznym

W rzeczywistych warunkach pracy układ może być narażony na zaburzenia, np. siłę poziomą działającą na wahadło (efekt wiatru lub drgań otoczenia). Aby uwzględnić ten wpływ, do równania sił wprowadza się dodatkowy składnik  $F_w(t)$ :

$$(M + m)\ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} = u + F_w.$$

## 2. Model matematyczny układu

---

Po uwzględnieniu tego zaburzenia i ponownej liniaryzacji wokół  $\theta = 0$  otrzymuje się model w postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1 u + B_2 F_w,$$

gdzie:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Model ten pozwala analizować wpływ zakłóceń na stabilność i jakość regulacji. Jest on szczególnie istotny przy badaniu odporności regulatorów (np. LQR i MPC) na zmienne warunki pracy i siły zewnętrzne.

### 3. Środowisko

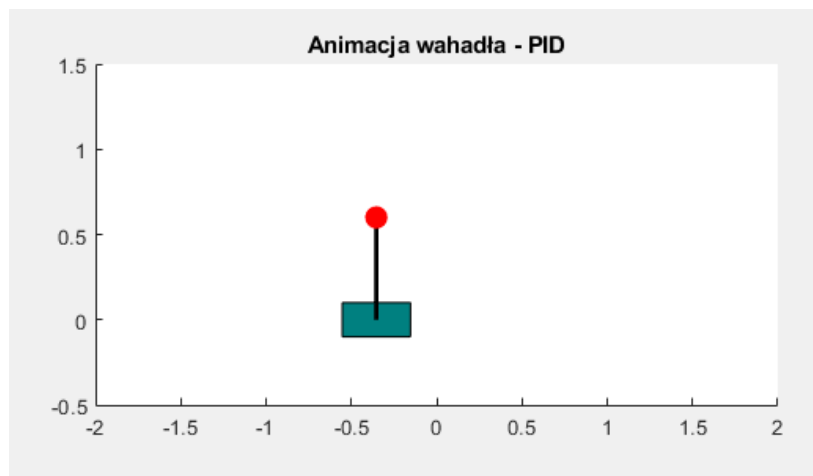
- **Oprogramowanie:** MATLAB R2024a & Simulink.
- **Biblioteki:** Control System Toolbox.
- **Parametry fizyczne układu:**

$$M = 0,5 \text{ kg}, \quad m = 0,2 \text{ kg}, \quad l = 0,3 \text{ m}, \quad I = 0,006 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad b = 0,1 \text{ N}\cdot\text{s/m}, \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

- **Warunki początkowe:**

$$\varphi(0) = 45^\circ, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

- **Czas symulacji:**  $t \in [0, 5]$  s z krokiem  $\Delta t = 0,01$  s.
- **Zaburzenie od wiatru:** Wersja z zakłóceniem realizuje się jako dodanie do równania ruchu siły  $F_w(t)$ . Zby łatwiej było zaobserwować wpływ wiatru na działanie układu, jako zakłócenie przyjęto dwa podmuchy w 1 i 3 sekundzie symulacji
- **Animacja wahadła:** W celu lepszego zobrazowania dynamiki układu, projekt zawiera funkcję `animate_pendulum`, która rysuje ruch wózka i wahadła w czasie. Wózek wizualizowany jest jako prostokąt, drążek wahadła jako linia, a jego koniec jako czerwona kropka.



Rysunek 3.1. Animacja wahadła na wózku

## 4. Metody sterowania

### 4.1. Regulator PID (dla kąta wahadła)

Regulator PID ma transmitancję:

$$C_{\text{PID}}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Dobór parametrów  $K_p, K_i, K_d$  wykonano w MATLAB-ie za pomocą funkcji `pidtune`, działającej na modeli typu TF dla toru prostego (kąt  $\varphi$  w zamknięciu sprzężenia zwrotnego). Regulator ma za zadanie stabilizować kąt wahadła do zera, przy zerowym odchyleniu wózka. W postaci dyskretnej implementacja wygląda tak:

$$u[k] = K_p e[k] + K_i \sum_{j=0}^k e[j] \Delta t + K_d \frac{e[k] - e[k-1]}{\Delta t}, \quad e[k] = -\varphi[k].$$

Regulator PID w kodzie znajduje się w pliku `controllers/pid_controller.m`. Układ zamknięty jest tworzony jako obiekt `ss(feedback(CPID · Ppend, 1))`.

### 4.2. Regulator PD (dla pozycji wózka)

Aby uzyskać lepszą regulację położenia  $x$ , można użyć regulatora PD:

$$C_{\text{PD}}(s) = K_p + K_d s.$$

Dobór nastaw wykonany jest również z wykorzystaniem `pidtune`, lecz z opcją 'PD'. Torem wejścia jest sygnał sterujący  $u$ , a wyjściem – pozycja  $x$ . Model względny utworzono z liniowego modelu stanu, wyciągając transmitancję od  $u \rightarrow x$ .

### 4.3. Regulator LQR (Linear–Quadratic Regulator)

Regulator LQR minimalizuje funkcję kosztu:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u) dt,$$

gdzie  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$  oraz  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ . Rozwiązanie problemu LQR daje wzmocnienie  $\mathbf{K}$  takie, że:

$$u(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t).$$

W MATLAB-ie nastawy otrzymuje się poprzez wywołanie funkcji `lqr(A, B, Q, R)`, a zamknięty układ jest definiowany jako `ss(A - BK, B, C, D)`. Regulacja LQR stabilizuje całość wektora stanu, a w szczególności kąt  $\varphi$ .



#### 4.4. Regulator złożony (Composite Controller)

Koncepcja regulatora złożonego polega na połączeniu dwóch oddzielnych pętli:

- Pętla LQR, pracująca na wektorze stanu  $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}]^T$ , w celu stabilizacji kąta  $\varphi$ .
- Pętla PID/PD, pracująca wyłącznie na torze położenia  $x$ , w celu stabilizacji położenia wózka wokół zera.

Sygnały sterujące sumują się:

$$u_{\text{composite}}(t) = u_{\text{LQR}}(t) + u_{\text{pos}}(t),$$

gdzie

$$u_{\text{LQR}}(t) = -K_{\text{lqr}} \mathbf{x}(t), \quad u_{\text{pos}}(t) = K_p^x e_x + K_i^x \int_0^t e_x(\tau) d\tau + K_d^x \frac{de_x}{dt}, \quad e_x = -x(t).$$

Implementacja znajduje się w pliku `controllers/composite_controller.m`. W kodzie symulacyjnym obliczenia wykonuje się w pętli dyskretnej:

1. Od aktualnego stanu  $\mathbf{x}[k]$  obliczamy  $u_{\text{LQR}}[k] = -K_{\text{lqr}} \mathbf{x}[k]$ .
2. Na podstawie odchylenia  $e_x[k] = -x[k]$  obliczamy  $u_{\text{pos}}[k]$  zgodnie z równaniem PD lub PID.
3. Suma  $u[k] = u_{\text{LQR}}[k] + u_{\text{pos}}[k]$  jest podawana do układu stanu:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] + \Delta t (A \mathbf{x}[k] + B u[k]).$$

## 5. Eksperymenty

### 5.1. Opis przeprowadzonych eksperymentów

W celu porównania skuteczności różnych strategii sterowania dla odwróconego wahadła na wózku, przeprowadzono szereg symulacji numerycznych. Każdy eksperyment polegał na zasymulowaniu zachowania układu w odpowiedzi na tę samą konfigurację początkową:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 45^\circ, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Symulacje trwały 5 sekund, z krokiem czasowym  $\Delta t = 0,01$  s. Rozważono trzy warianty regulatorów:

- **LQR** – regulator liniowo-kwadratowy oparty na pełnym stanie,
- **PID** – regulator PID zaprojektowany dla modelu przenoszenia kąta  $\varphi$ ,
- **Composite** – układ złożony: regulator PID dla pozycji wózka  $x$  i LQR dla kąta  $\varphi$ .

Każdy z powyższych regulatorów został przetestowany w dwóch wariantach:

1. bez zakłóceń,
2. z zakłóceniem w postaci dwóch podmuchów.

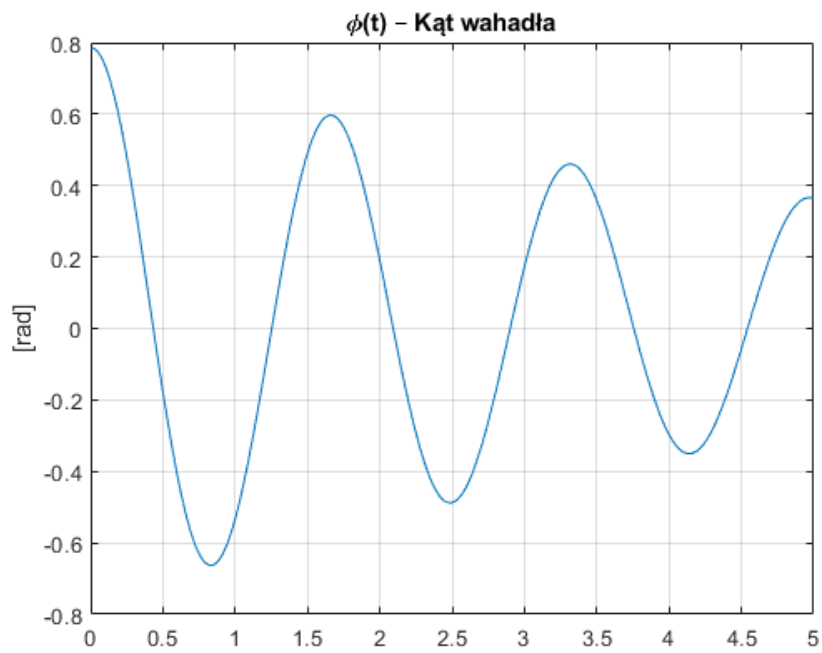
W trakcie symulacji zarejestrowano:

- trajektorię kąta wahadła  $\varphi(t)$ ,
- trajektorię położenia wózka  $x(t)$ ,
- sygnał sterujący  $u(t)$ .

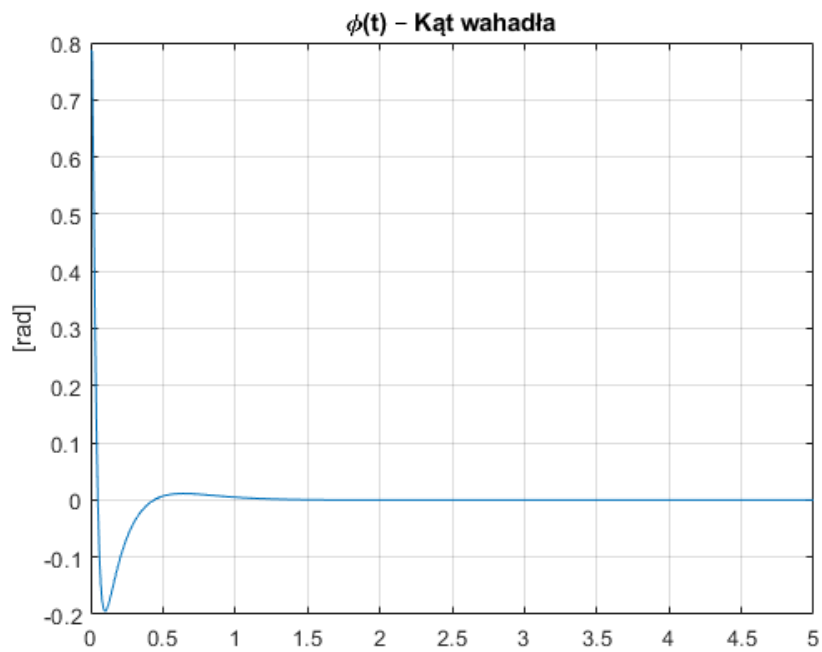
Na podstawie zebranych danych obliczono również dwie metryki jakości:

- **MSE** – średni błąd kwadratowy:  $\text{MSE}_\varphi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi[k]^2$ ,
- **MAE** – średni błąd bezwzględny:  $\text{MAE}_\varphi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\varphi[k]|$ ,

## 5.2. Dobór parametrów regulatorów



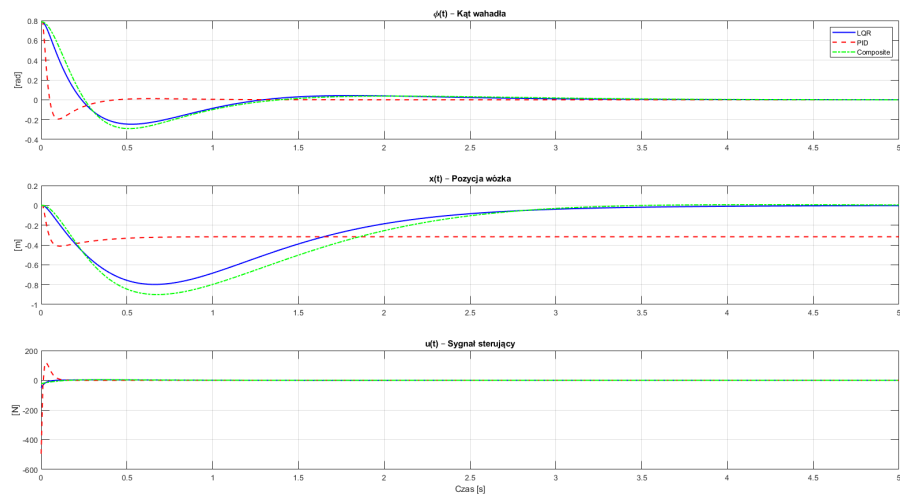
**Rysunek 5.1.** Źle dostrojony regulator PID.



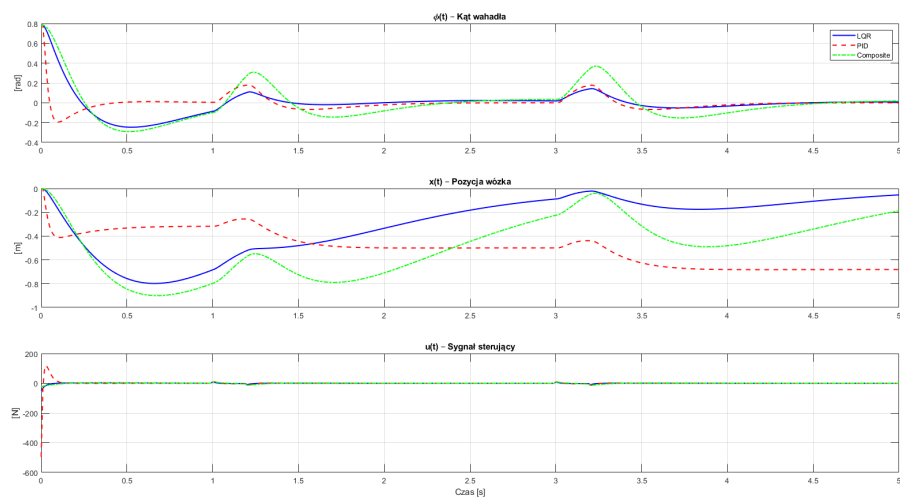
**Rysunek 5.2.** Dostrojony regulator PID przy użyciu pidtune.

Regulator PID dostrojono przy użyciu gotowej funkcji pidtune, natomiast regulator LQR dostrojono ręcznie.

## 5. Eksperymenty



Rysunek 5.3. Sygnały wyjściowe.



Rysunek 5.4. Sygnały wyjściowe z zakłóceniami.

### 5.3. Porównanie jakości regulacji – wskaźniki błędów

**Tabela 5.1.** Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta  $\varphi(t)$  – bez zakłóceń

Regulator	MSE $_{\varphi}$	MAE $_{\varphi}$
LQR	0.0161	0.0585
PID	0.0042	0.0126
Composite	0.0209	0.0677

**Tabela 5.2.** Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta  $\varphi(t)$  – z zakłóceniem

Regulator	MSE $_{\varphi}$	MAE $_{\varphi}$
LQR	0.0171	0.0687
PID	0.0067	0.0402
Composite	0.0322	0.1226

### 5.4. Podsumowanie eksperymentów

Przeprowadzone eksperymenty pozwoliły na porównanie trzech różnych strategii sterowania odwróconym wahadłem na wózku w identycznych warunkach początkowych oraz w obecności zakłóceń. Na podstawie analizy sygnałów oraz wartości wskaźników błędów (MSE i MAE) można sformułować następujące wnioski:

- Regulator **PID** wykazał najlepszą skuteczność w warunkach bez zakłóceń, osiągając najniższe wartości MSE i MAE, co sugeruje dobrą zdolność do szybkiego i precyzyjnego tłumienia wychylenia wahadła.
- W obecności zakłóceń regulator PID nadal utrzymywał dobrą jakość regulacji, jednak zauważalnie większy błąd bezwzględny (MAE) wskazuje na ograniczoną odporność na zaburzenia w porównaniu do LQR.
- Regulator **LQR**, choć nieco mniej precyzyjny w warunkach nominalnych, wykazał większą stabilność i odporność na zakłócenia, co czyni go solidnym wyborem w sytuacjach, gdzie przewiduje się obecność niestandardowych sił.
- Układ **Composite**, łączący zalety obu strategii, nie przyniósł oczekiwanej poprawy jakości regulacji. W szczególności zauważono pogorszenie wskaźników błędów, co może być związane z nieoptymalnym podziałem zadań między PID i LQR.

Podsumowując, dobór odpowiedniego regulatora powinien być uzależniony od warunków pracy układu – w sytuacjach nominalnych lepiej sprawdza się PID, natomiast w obecności zakłóceń bardziej odpowiedni może okazać się LQR.



## Bibliografia

- [1] L. B. Prasad, B. Tyagi i H. O. Gupta, “Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input”, *International Journal of Automation and Computing*, t. 11, nr 6, s. 661–670, 2014. DOI: 10.1007/s11633-014-0818-1
- [2] E. S. Varghese, A. K. Vincent i V. Bagyaveereswaran, “Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC”, t. 263, nr 5, s. 052 007, 2017. DOI: 10.1088/1757-899X/263/5/052007
- [3] T.-V.-A. Nguyen i N.-H. Tran, “An Integrated Controller for Stabilizing an Inverted Pendulum: LQR and Fuzzy Logic Control with Observer-Based State Estimation”, *Journal of Applied Science and Engineering*, t. 27, nr 5, s. 2493–2502, 2024, Open Access (CC BY 4.0). DOI: 10.6180/jase.202405\_27(5).0006
- [4] A. Jezierski, J. Mozaryn i D. Suski, “A Comparison of LQR and MPC Control Algorithms of an Inverted Pendulum”, w: *Trends in Advanced Intelligent Control, Optimization and Automation*, seria Advances in Intelligent Systems and Computing, W. Mitkowski, J. Kacprzyk, K. Oprzędkiewicz i P. Skruch, red., t. 577, Politechnika Warszawska, Cham: Springer, 2017, s. 65–76. DOI: 10.1007/978-3-319-60699-6\_8
- [5] E. F. Camacho i C. Bordons, *Model Predictive Control*, 2 wyd. London: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5
- [6] A. Mills, A. Wills i B. Ninness, “Nonlinear Model Predictive Control of an Inverted Pendulum”, w: *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, IEEE, 2009, s. 2335–2340. DOI: 10.1109/ACC.2009.5160600
- [7] S. P. Diwan i S. S. Deshpande, “Computationally efficient nonlinear model predictive controller using parallel particle swarm optimization”, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, t. 70, nr 4, e140696, 2022. DOI: 10.24425/bpasts.2022.140696
- [8] A. I. Roose, M. Smiley i A. Y. Ali, “Fuzzy-logic control of an inverted pendulum on a cart”, *Computers & Electrical Engineering*, t. 63, s. 260–272, 2017, ISSN: 0045-7906. DOI: 10.1016/j.compeleceng.2017.05.016

## Wykaz symboli i skrótów

$x$  – Położenie wózka [m]

$\dot{x}$  – Prędkość wózka [m/s]

$\varphi$  – Kąt odchylenia wahadła od pionu [rad]

$\dot{\varphi}$  – Prędkość kątowna wahadła [rad/s]

$u$  – Sygnał sterujący (siła działająca na wózek) [N]

**LQR** – Linear-Quadratic Regulator – regulator liniowo-kwadratowy

**PID** – Proporcjonalno-Całkująco-Różniczkujący regulator

**MSE** – Mean Squared Error – średni błąd kwadratowy

**MAE** – Mean Absolute Error – średni błąd bezwzględny

$\Delta t$  – Krok czasowy symulacji [s]

$N$  – Liczba próbek w sygnale dyskretnym

## Spis rysunków

3.1 Animacja wahadła na wózku . . . . .	15
5.1 Źle dostrojony regulator PID. . . . .	19
5.2 Dostrojony regulator PID przy użyciu pidtune. . . . .	19
5.3 Sygnały wyjściowe. . . . .	20
5.4 Sygnały wyjściowe z zakłóceniami. . . . .	20

## Spis tabel

5.1 Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ – bez zakłóceń . . . . .	21
5.2 Wartości wskaźników MSE i MAE dla kąta $\varphi(t)$ – z zakłóceniem . . . . .	21