

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Modelowanie i identyfikacja

Sprawozdanie z projektu I, zadanie 32

Adam Sokołowski

Warszawa, 2024

Spis treści

| | |
|--|----|
| 1. Wstęp | 2 |
| 2. Zadanie 1 | 3 |
| 2.1. Wyznaczanie wzoru charakterystyki statycznej | 3 |
| 2.2. Rysunek charakterystyki statycznej | 4 |
| 3. Zadanie 2 | 5 |
| 3.1. Wyznaczanie charakterystyki statycznej zlinearyzowanej w dowolnym punkcie \bar{u} | 5 |
| 4. Zadanie 3 | 6 |
| 4.1. Zlinearyzowana charakterystyka statyczna na tle charakterystyki nieliniowej | 6 |
| 5. Zadanie 4 | 8 |
| 5.1. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego | 8 |
| 6. Zadanie 5 | 9 |
| 6.1. Równania dynamicznego modelu ciągłego zlinearyzowanego w punkcie pracy \bar{u} | 9 |
| 6.2. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego zlinearyzowanego w punkcie pracy \bar{u} | 9 |
| 7. Zadanie 6 | 10 |
| 7.1. Odpowiedzi skokowe modelu ciągłego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla $\bar{u}=0.5$ | 10 |
| 7.2. Odpowiedzi skokowe modelu ciągłego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla $\bar{u}=0.0$ | 11 |
| 7.3. Odpowiedzi skokowe modelu ciągłego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla $\bar{u}=-0.5$ | 13 |
| 8. Zadanie 7 | 15 |
| 8.1. Równania dynamicznego modelu nieliniowego w wersji dyskretniej | 15 |
| 8.2. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu nieliniowego w wersji dyskretniej | 15 |
| 9. Zadanie 8 | 16 |
| 9.1. Odpowiedzi skokowe modelu nieliniowego w wersji ciągłej i dyskretniej | 16 |
| 10. Zadanie dodatkowe | 18 |
| 10.1. Wyznaczenie transmitancji w punkcie \bar{u} | 18 |
| 10.2. Wyznaczenie wzmocnienia statycznego K_{stat} transmitancji w zależności od punktu linearyzacji \bar{u} | 18 |

1. Wstęp

Obiektem poniższych zadań jest nieliniowy ciągły model dynamiczny, który w przestrzeni stanu wygląda następująco:

$$\dot{x}_1(t) = -a_2x_1(t) + x_2(t) \quad (1.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1x_1(t) + x_3(t) \quad (1.2)$$

$$\dot{x}_3(t) = -a_0x_1(t) + b_0(\alpha_1u(t) + \alpha_2u^2(t) + \alpha_3u^3(t) + \alpha_4u^4(t)) \quad (1.3)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (1.4)$$

gdzie: $a_0 = 0,000531632$, $a_1 = 0,0207337$, $a_2 = 0,254652$, $b_0 = 0,00122807$, $\alpha_1 = -0,3$, $\alpha_2 = -0,55$, $\alpha_3 = 0,4$, $\alpha_4 = 0,21$. Sygnał sterujący zmienia się w zakresie $-1 \leq u \leq 1$.

2. Zadanie 1

2.1. Wyznaczanie wzoru charakterystyki statycznej

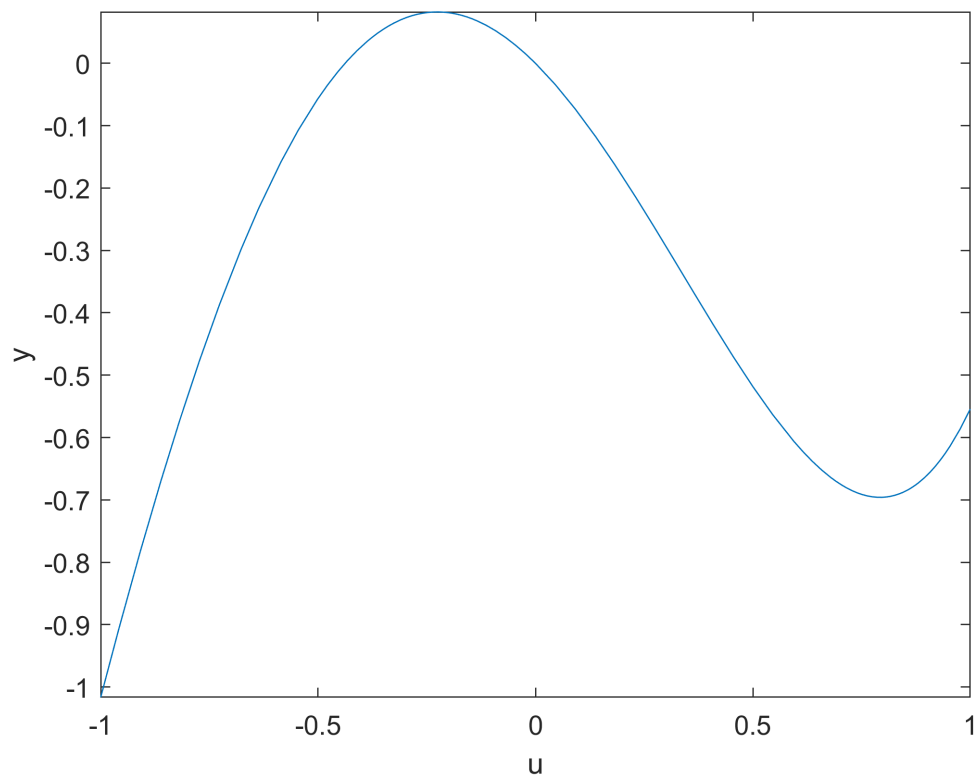
Wzór wyznaczony ręcznie poprzez przyrównanie \dot{x} do zera w równaniach 1.1-1.3 i przekształcenie otrzymanych wzorów w celu wyznaczenia $y(u)$:

$$y(u) = \frac{b_0}{a_0}(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4) \quad (2.1)$$

Aby wyznaczyć wzór w MATLAB stworzono równania przestrzeni stanu (eq1, eq2, eq3, eq4), a następnie rozwiązano układ równań dla u jako argumentu funkcji szukanej - y poleceniem solve. Kod z MATLAB:

```
syms x1 x2 x3 u y
eq1 = -a2*x1 + x2 == 0;
eq2 = -a1*x1 + x3 == 0;
eq3 = -a0*x1+b0*(alpha1*u+alpha2*u^2+alpha3*u^3+alpha4*u^4) == 0;
eq4 = y == x1;
vars = [x1,x2,x3,y];
eqns = [eq1, eq2, eq3, eq4];
sol = solve(eqns, vars);
yu = sol.y;
```

2.2. Rysunek charakterystyki statycznej



Rys. 2.1. Charakterystyka statyczna

Charakterystyka statyczna jest funkcją wielomianową, a jej argumenty przyjmują wartości z przedziału $[-1, 1]$, tak jak podano w treści zadania.

3. Zadanie 2

3.1. Wyznaczanie charakterystyki statycznej zlinearyzowanej w dowolnym punkcie \bar{u}

Do wyznaczenia charakterystyki statycznej zlinearyzowanej w skorzystano z poniższego wzoru do linearyzacji funkcji:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{dy(x)}{dx}|_{x=\bar{x}}(x - \bar{x}). \quad (3.1)$$

Otrzymany wzór na $y(u)$ w postaci zlinearyzowanej wygląda następująco:

$$y(u) \approx \frac{b_0}{a_0}(\alpha_1 u(t) + \alpha_2 \bar{u}^2 + 2\alpha_2 \bar{u}(u(t) - \bar{u}) + \alpha_3 \bar{u}^3 + 3\alpha_3 \bar{u}^2(u(t) - \bar{u}) + \alpha_4 \bar{u}^4 + 4\alpha_4 \bar{u}^3(u(t) - \bar{u})) \quad (3.2)$$

Do otrzymania równania w MATLAB skorzystano z takich funkcji jak `diff` i `subs`:

```
% linearizing y(u) i u0 point
u0 = 0.5; % linearization point
dy_du = diff(yu);
yu_u0 = subs(yu, u0);
```

Wyznaczenie części: $f(\bar{x})$.

```
dyu_u0 = subs(dy_du, u0);
```

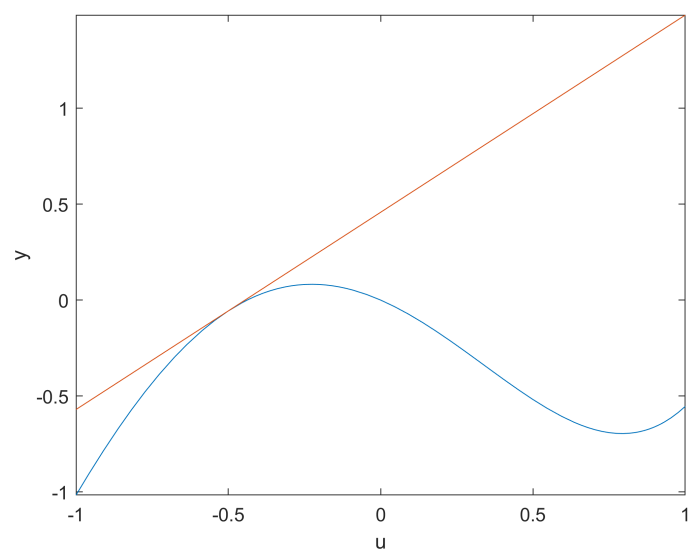
Wyznaczenie części: $\frac{dy(x)}{dx}|_{x=\bar{x}}(x - \bar{x})$.

```
lin_yu = yu_u0 + dyu_u0*(u-u0);
```

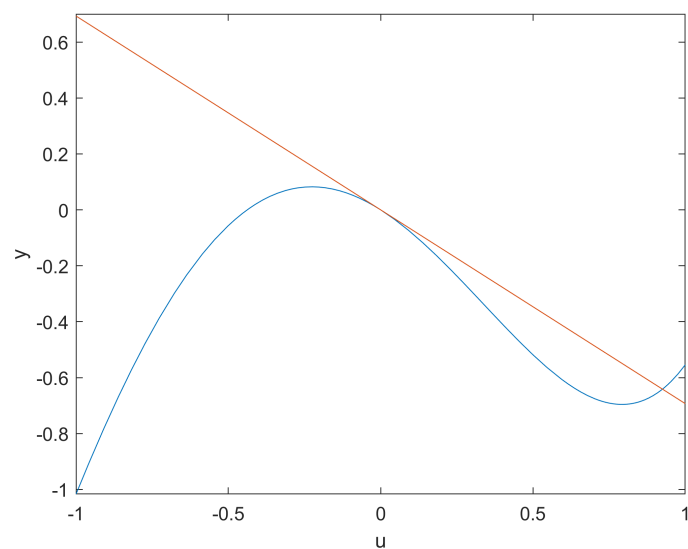
Końcowy wzór.

4. Zadanie 3

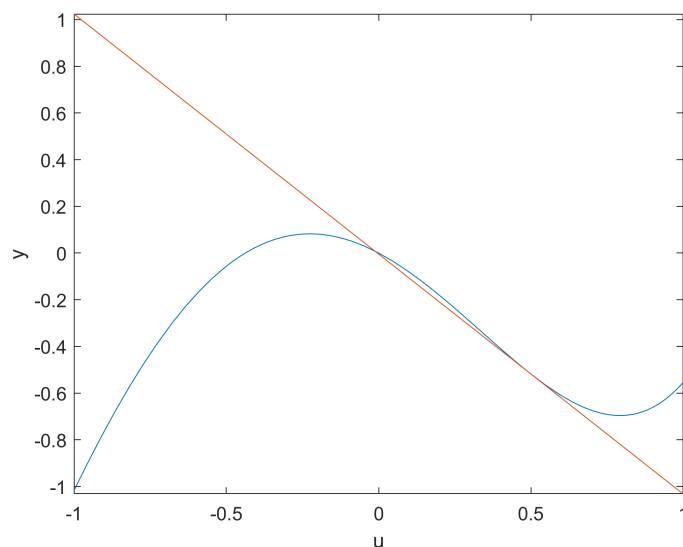
4.1. Zlinearyzowana charakterystyka statyczna na tle charakterystyki nieliniowej



Rys. 4.1. Charakterystyka statyczna dla $u_0 = -0.5$ na charakterystyce nieliniowej



Rys. 4.2. Charakterystyka statyczna dla $u_0 = 0.0$ na charakterystyce nieliniowej

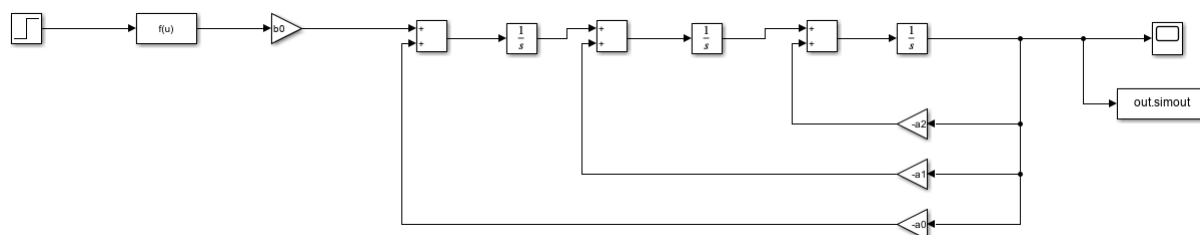


Rys. 4.3. Charakterystyka statyczna dla $u_0=0.5$ na charakterystyce nieliniowej

Na rysunkach 4.1, 4.2 i 4.3 widać, że przybliżanie funkcji nieliniowej jest sensowne jedynie w bliskim otoczeniu punktu linearyzacji, gdyż funkcja aproksymująca szybko zaczyna odbiegać od aproksymowanej. Punkty dobrano tak aby jeden był ujemny, sensownie oddalony od zera i od lewej granicy dziedziny, kolejny był na środku dziedziny, a trzeci był dodatni, oddalony od zera i prawego krańca dziedziny.

5. Zadanie 4

5.1. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego



Rys. 5.1. Model ciągły w Simulink nieliniowy

Do zrealizowania reprezentacji graficznej użyto programu Simulink, w którym odtworzono wzory 1.1-1.4 przy użyciu bloków takich jak gain, step, integrator, add i fcn. Blok fcn wykorzystano do tego, aby wpisać w nim następującą część zadanego modelu: $(\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u(t)^2 + \alpha_3 u(t)^3 + \alpha_4 u(t)^4)$.

6. Zadanie 5

6.1. Równania dynamicznego modelu ciągłego zlinearyzowanego w punkcie pracy \bar{u}

$$\dot{x}_1(t) = -a_2x_1(t) + x_2(t) \quad (6.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1x_1(t) + x_3(t) \quad (6.2)$$

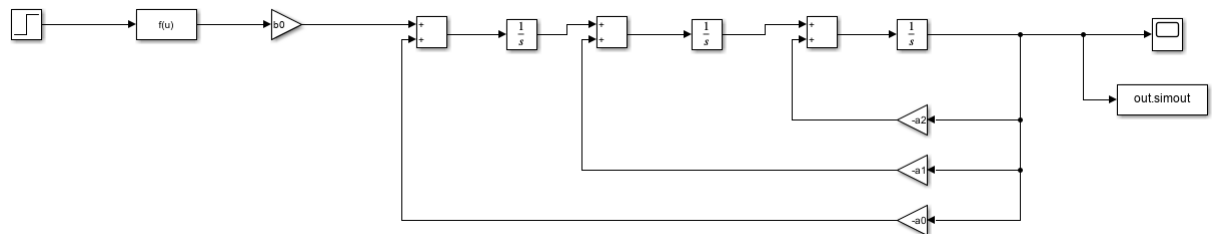
$$\dot{x}_3(t) = -a_0x_1(t) + b_0(\alpha_1u(t) + \alpha_2\bar{u}^2 + 2\alpha_2\bar{u}(u(t) - \bar{u}) \quad (6.3)$$

$$+ \alpha_3\bar{u}^3 + 3\alpha_3\bar{u}^2(u(t) - \bar{u}) + \alpha_4\bar{u}^4 + 4\alpha_4\bar{u}^3(u(t) - \bar{u})) \quad (6.4)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (6.5)$$

Równania otrzymano przy użyciu wzoru 3.1 na części nieliniowej wzorów 1.1-1.4.

6.2. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego zlinearyzowanego w punkcie pracy \bar{u}

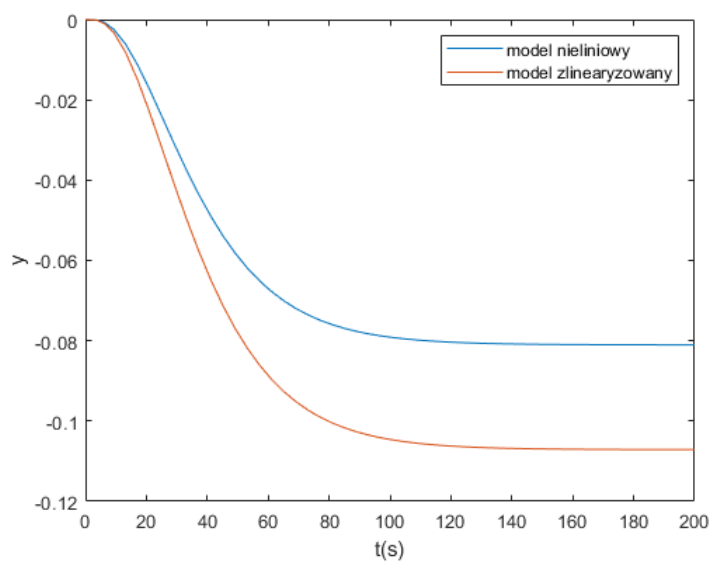


Rys. 6.1. Model ciągły w Simulink liniowy

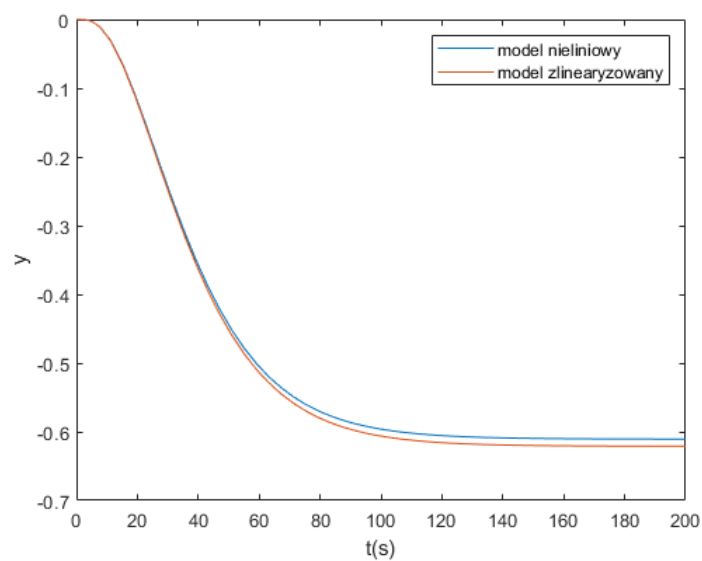
Reprezentację graficzną zrealizowano tak samo jak na Rys. 5.1. Jedyna różnica jest taka, że w bloku fcn zawarto następującą funkcję: $\alpha_1u(t) + \alpha_2\bar{u}^2 + 2\alpha_2\bar{u}(u(t) - \bar{u}) + \alpha_3\bar{u}^3 + 3\alpha_3\bar{u}^2(u(t) - \bar{u}) + \alpha_4\bar{u}^4 + 4\alpha_4\bar{u}^3(u(t) - \bar{u})$.

7. Zadanie 6

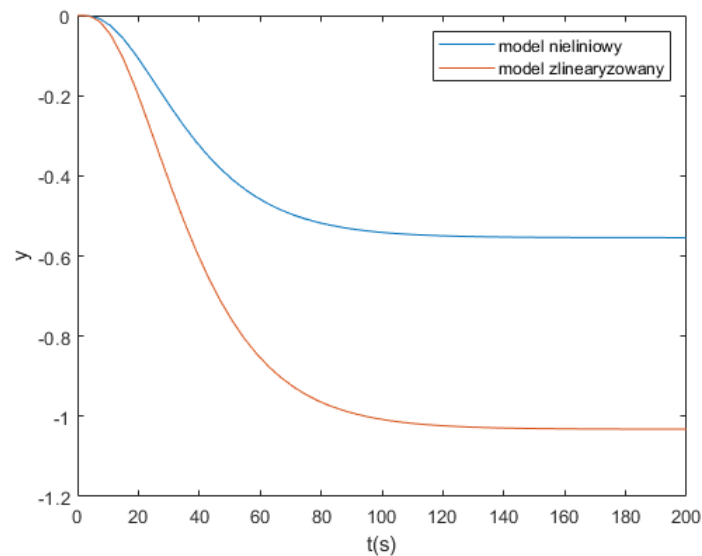
7.1. Odpowiedzi skokowe modelu ciągłego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla $\bar{u}=0.5$



Rys. 7.1. Odpowiedzi skokowe dla skoku małego (0.1)



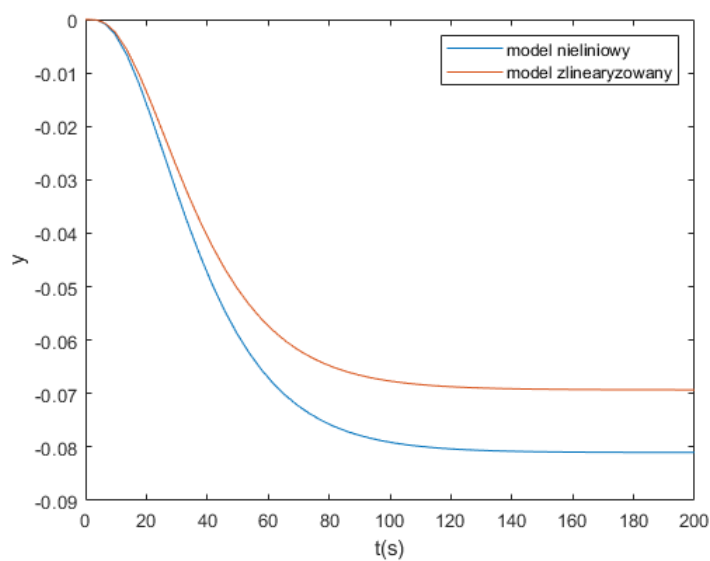
Rys. 7.2. Odpowiedzi skokowe dla skoku średniego (0.6)



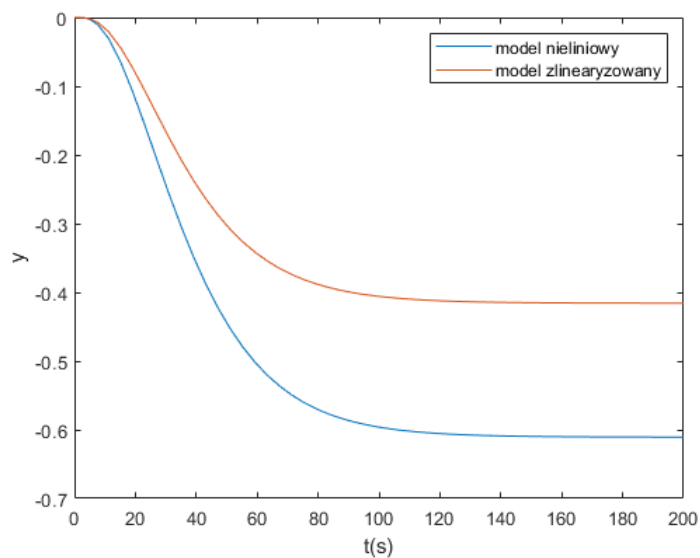
Rys. 7.3. Odpowiedzi skokowe dla skoku dużego (1)

Odpowiedzi modelu zlinearyzowanego odbiegają od odpowiedzi nieliniowego na Rys. 7.1 i 7.3, natomiast na Rys. 7.2 prawie się nakładają. Wynika to z tego, że dla skoku średniego wybrany punkt linearyzacji dobrze aproksymuje funkcję nieliniową.

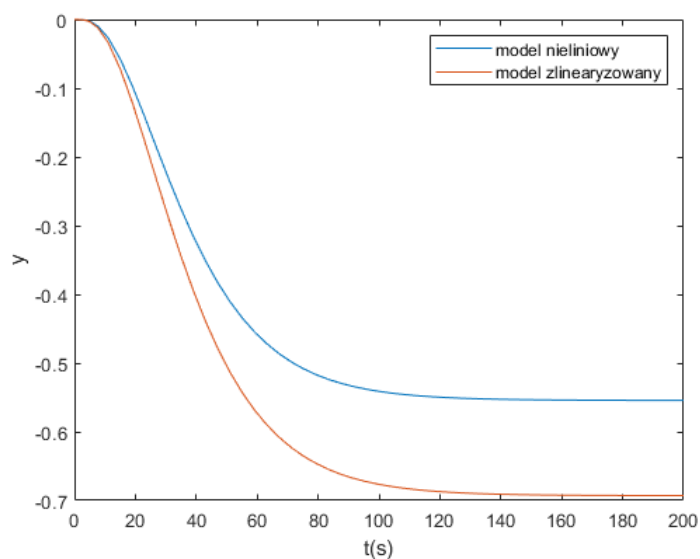
7.2. Odpowiedzi skokowe modelu ciągłego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla $\bar{u}=0.0$



Rys. 7.4. Odpowiedzi skokowe dla skoku małego (0.1)



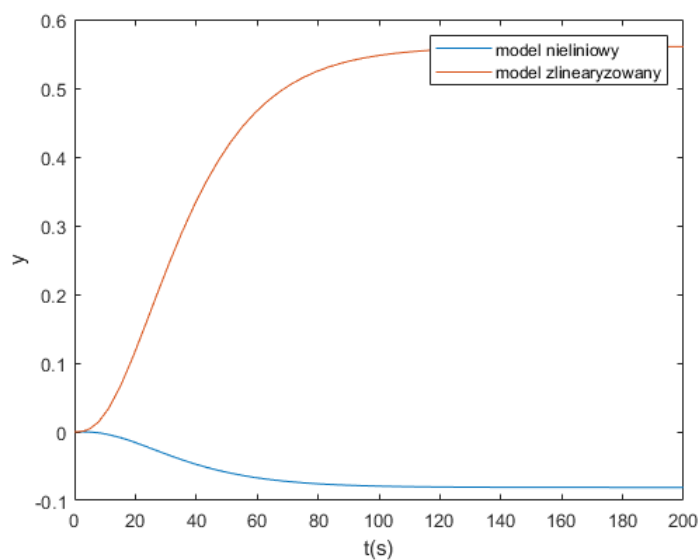
Rys. 7.5. Odpowiedzi skokowe dla skoku średniego (0.6)



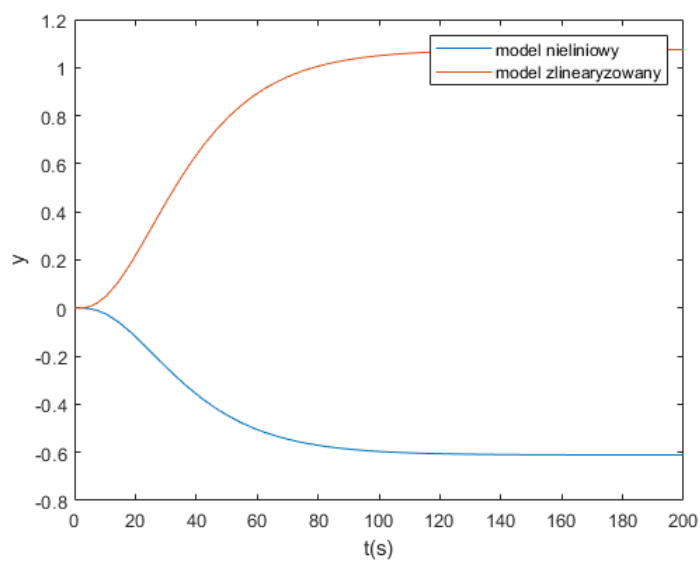
Rys. 7.6. Odpowiedzi skokowe dla skoku dużego (1)

Dla punktu linearyzacji równego 0. Odpowiedzi skokowe na Rys. 7.4-7.6 nie pokrywają się dla żadnego skoku, jednak cały czas zachowują podobny kształt.

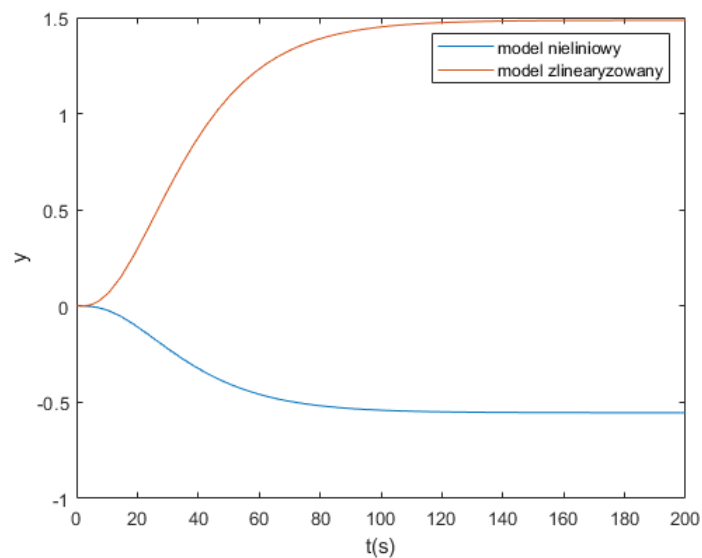
7.3. Odpowiedzi skokowe modelu ciągłego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla $\bar{u} = -0.5$



Rys. 7.7. Odpowiedzi skokowe dla skoku małego (0.1)



Rys. 7.8. Odpowiedzi skokowe dla skoku średniego (0.6)



Rys. 7.9. Odpowiedzi skokowe dla skoku dużego (1)

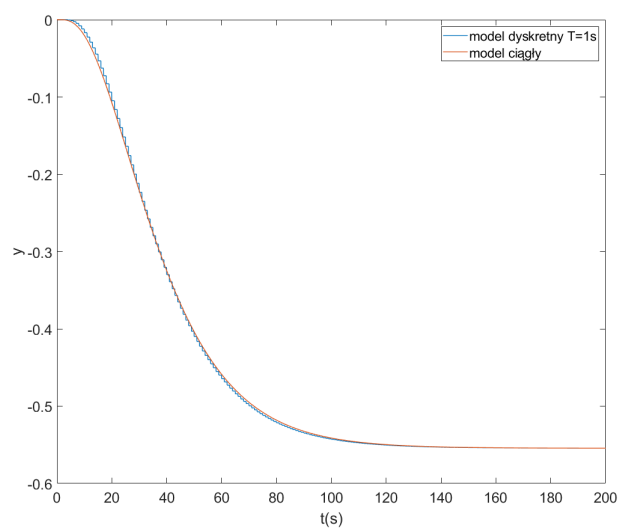
Na Rys. 7.7 - 7.9 nastąpiło odwrócenie charakterystyki modelu zlinearyzowanego wynikające z tego, że punkt linearyzacji jest ujemny.

Widać również, że na Rys. 7.1-7.9 wartości, dla których odpowiedzi skokowe modelu nieliniowego się stabilizują odpowiadają wartościom charakterystyki statycznej dla danego skoku u .

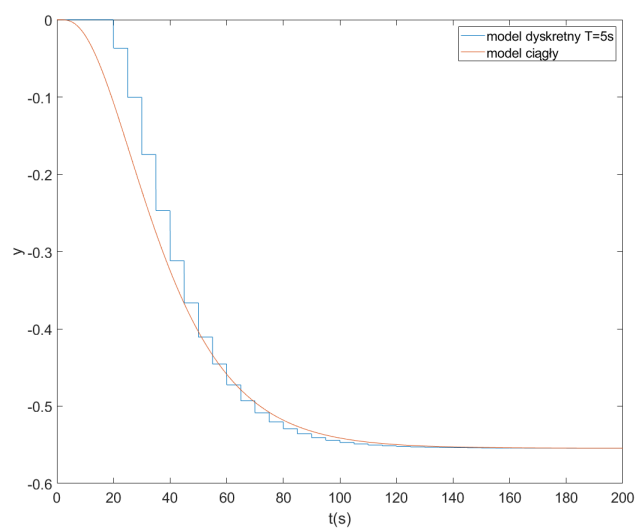
Reprezentację graficzną zrealizowano tak samo jak na Rys. 5.1. Jedyna różnica jest taka, że zamiast bloków integratorużyto bloki Discrete-Time Integrator, w których jako sample time podano okres próbkowania.

9. Zadanie 8

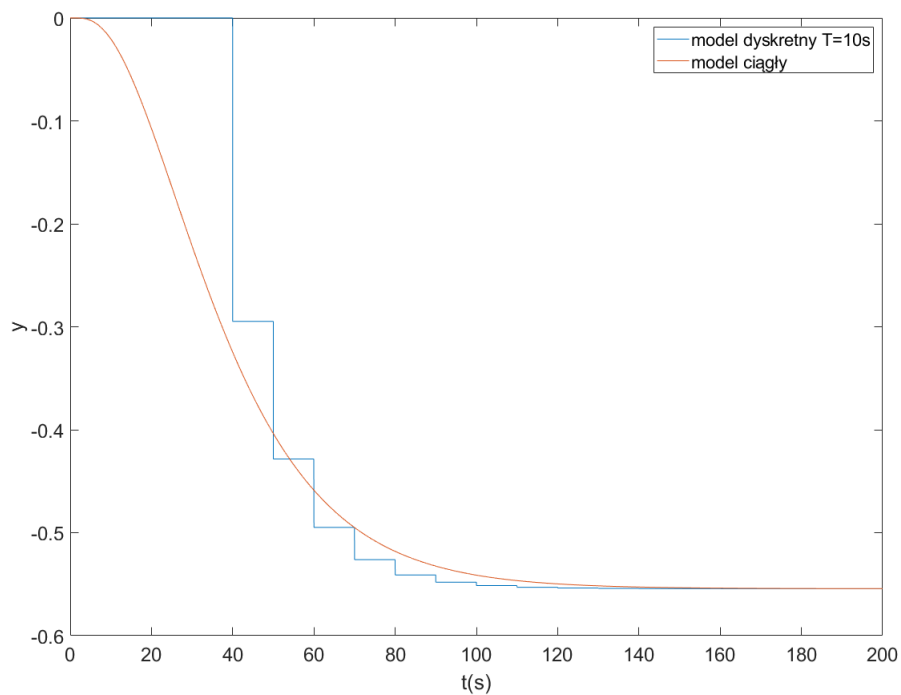
9.1. Odpowiedzi skokowe modelu nieliniowego w wersji ciągłej i dyskretnej



Rys. 9.1. Odpowiedzi skokowe modelu nieliniowego i dyskretnego $T=1s$



Rys. 9.2. Odpowiedzi skokowe modelu nieliniowego i dyskretnego $T=5s$



Rys. 9.3. Odpowiedzi skokowe modelu nieliniowego i dyskretnego $T=10$ s

Model dyskretny pokrywa się z modelem ciągłym dla małego czasu próbkowania, im większy czas próbkowania tym większe powstają odstępstwa między charakterystykami modelu dyskretnego i ciągłego. Im mniejszy okres próbkowania tym mniejsze będą różnice między charakterystykami.

10. Zadanie dodatkowe

10.1. Wyznaczenie transmitancji w punkcie \bar{u}

Do wyznaczenia transmitancji użyto funkcji `ss2tf`, jako parametry podano macierze reprezentujące model w przestrzeni stanu, a część zlinearyzowaną zmodyfikowano usuwając tzw. "offset".

```
u0 = 0.5;
fun = alpha1 + 2*alpha2*u0 + 3*alpha3*u0^2 + 4*alpha4*u0^3;
A = [-a2 1 0; -a1 0 1; -a0 0 0];
B = [0; 0; b0*fun];
C = [1 0 0];
D = 0;
[NUM, DEN] = ss2tf(A, B, C, D);
```

10.2. Wyznaczenie wzmocnienia statycznego K_{stat} transmitancji w zależności od punktu linearyzacji \bar{u}

Współczynniki licznika i mianownika otrzymane w poprzednim podpunkcie zmieniono na funkcję transmitancji, a następnie obliczono wzmocnienie statyczne tej transmitancji.

```
G = tf(NUM, DEN);
static_gain = dcgain(G);
```

- Wzmocnienie statyczne dla $\bar{u} = 0.5$ wynosiło -1.0280,
- Dla $\bar{u} = 0.0$ wynosiło -0.6930,
- Dla $\bar{u} = -0.5$ wynosiło 1.0280.

Patrząc na rysunki 4.1, 4.2, 4.3 można zauważyć, że wzmocnienie statyczne transmitancji jest nachyleniem zlinearyzowanej charakterystyki statycznej w danym punkcie \bar{u} .