



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,  
INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA AUTOMATYKI

Modelowanie układów fizycznych i biologicznych

*Podwójne wahadło*

*Double pendulum*

Autor:

*Żaneta Błaszczuk, Rafał Kozik, Filip Kubicz, Jakub Nowak, Jakub Porębski*

Kierunek studiów:

*Automatyka i Robotyka*

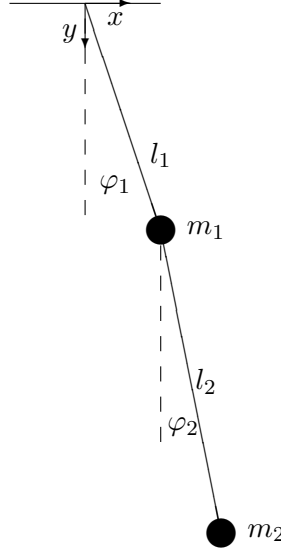
Opiekun pracy:

*dr inż. Ireneusz Wochlik*

Kraków, 2014

## 1. Teoria

Wahadło podwójne jest to wahadło matematyczne zawieszone na drugim wahadle matematycznym. Jego schemat pokazuje rys. 1. Wahadło opisuje 5 parametrów: masy  $m_1$  i  $m_2$ , długości  $l_1$  i  $l_2$  oraz przyspieszenie



Rysunek 1: Schemat wahadła

ziemskie  $g$ . Można je zmniejszyć ich ilość podstawiając:

$$A = \frac{m_1}{m_2} \quad B = \frac{l_2}{l_1} \quad C = \frac{g}{l_1} \quad (1)$$

Stan wahadła opisują cztery parametry: kąty odchylenia od pionu  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  oraz prędkości kątowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Ruch opisuje układ czterech równań różniczkowych [1]:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_1 = - \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)(B\omega_2^2 + \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + C((A + 1) \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2))}{A + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 \quad (4)$$

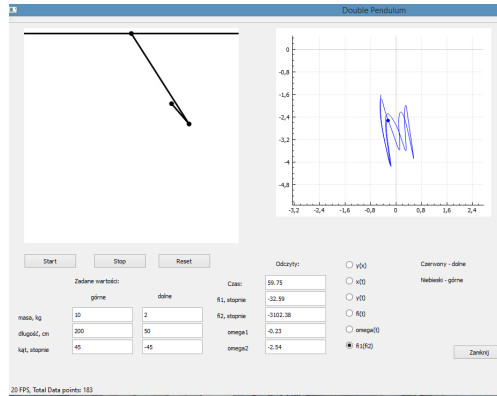
$$\dot{\omega}_2 = \frac{(A + 1)(\omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - C \sin(2\varphi_2)) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)(B\omega_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + C(A + 1) \sin(\varphi_1))}{B(A + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))} \quad (5)$$

W modelu nie uwzględniono tarcia.

## 2. Implementacja

Równania zostały rozwiązane numerycznie za pomocą metody Rungego-Kutty czwartego rzędu [2] która została zaimplementowana w języku c++. Wyniki zostały zapisane do pliku tekstowego, w każdej linii oddzielone spacjami: czas od początku symulacji, kąty  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  oraz prędkości kątowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Wykresy

zostały przygotowane w programie gnuplot. Powstał także program przedstawiający ruch wahadła napisany z wykorzystaniem biblioteki QT. Wygląd programu pokazuje rys. 2. Kody źródłowe przygotowanego oprogramowania znajdują się w repozytorium pod adresem [www.github.com/Qbicz/MUFB](http://www.github.com/Qbicz/MUFB).



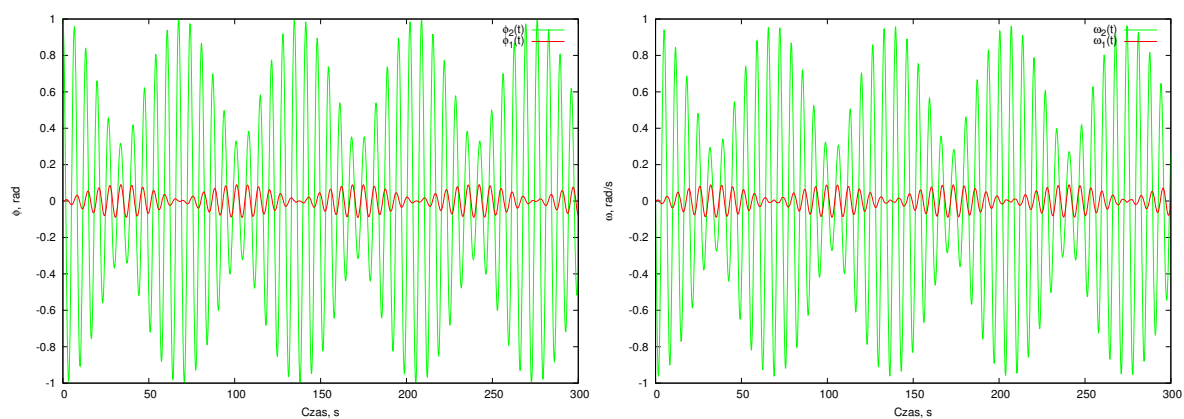
Rysunek 2: Graficzna symulacja ruchu wahadła.

### 3. Wyniki

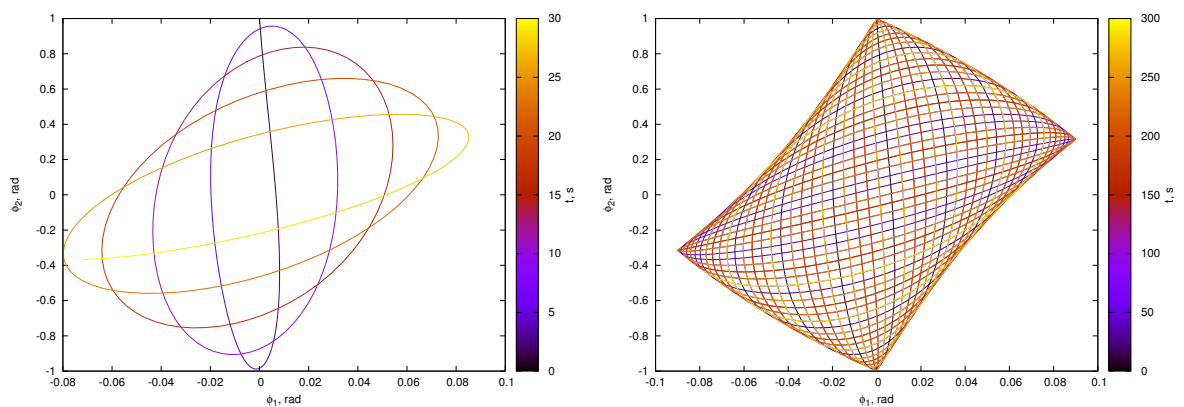
Symulacja została przeprowadzona dla parametrów  $A = 100$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$  oraz stanu w chwili  $t_0 = 0$   $\varphi_1(0) = 0$ ,  $\varphi_2(0) = 1$ ,  $\omega_1(0) = 0$  i  $\omega_2(0) = 0$ . Symulacja trwała 300 sekund z krokiem co 0,001 sekundy. Rys. 3 przedstawia wartości kątów  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\omega_1$  oraz  $\omega_2$  w funkcji czasu. Dla tak dobranych parametrów powstają dudnienia. Rys. 3 przedstawia trajektorię ruchu wahadła narysowaną w przestrzeni  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Dla 300 sekund nie da się zaobserwować żadnej regularności w ruchu wahadła. Rys. 3 przedstawia trajektorie w przestrzeni fazowej: wykresy prędkości kątowej w funkcji wartości kąta.

### 4. Bibliografia

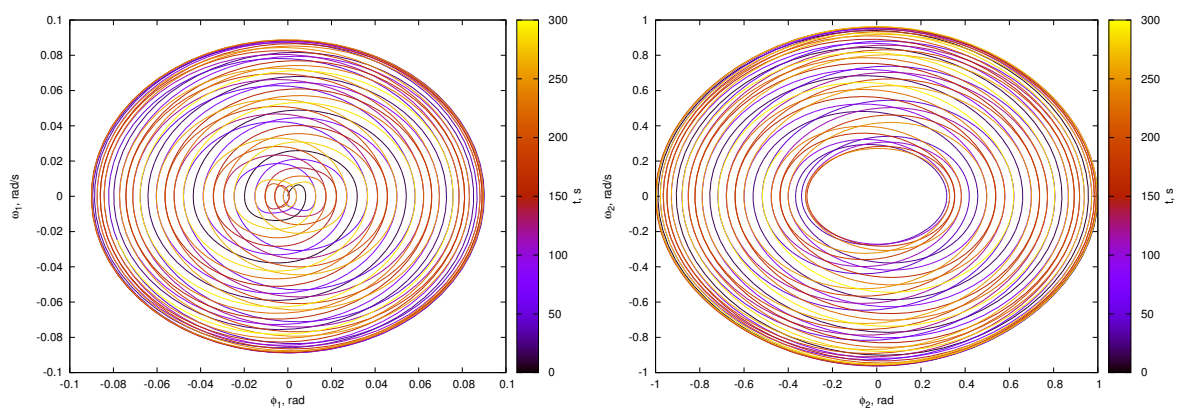
- [1] Wróblewski J. praca licencjacka "Wahadło podwójne" Warszawa 2011
- [2] Dudek-Dyduch E., Wąs J., Dutkiewicz L., Grobel-Dębska K., Gudowski B. "Metody numeryczne wybrane zagadnienia" Wydawnictwo AGH Kraków 2011



Rysunek 3: Kąty oraz prędkości kątowe w funkcji czasu.



Rysunek 4: Trajektoria w przestrzeni  $\phi_1, \phi_2$  a) dla pierwszych 30 sekund i b) dla 300 sekund.



Rysunek 5: Trajektoria w przestrzeni fazowej.