

**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,  
INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA AUTOMTYKI

Modelowanie układów fizycznych i biologicznych

*Podwójne wachadło*

*Double pendulum*

Autor:

Kierunek studiów:

Opiekun pracy:

*Żaneta Błaszczuk, Rafał Kozik, Filip Kubicz, Jakub Nowak, Jakub Porębski*

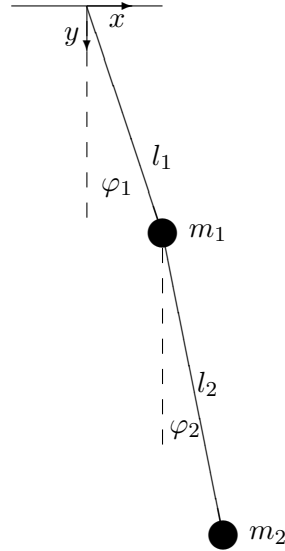
*Automatyka i Robotyka*

*dr*

Kraków, 2014

## 1. Teoria

Wachadło podwójne jest to wachadło matematyczne zawieszone na drugim wachadle matematycznym. Jego schemat pokazuje rys. 1. Wachadło opisuje 5 parametrów masy  $m_1$  i  $m_2$ , długości  $l_1$  i  $l_2$  oraz



Rysunek 1: Schemat wachadła

przyspieszenie ziemskie  $g$ . Można je zmniejszyć ich ilość podstawiając:

$$A = \frac{m_1}{m_2} \quad B = \frac{l_2}{l_1} \quad C = \frac{g}{l_1} \quad (1)$$

Stan wachadł opisują cztery parametry: kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  oraz prędkości kątowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Ruch opisuje układ czterech równań różniczkowych:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_1 = - \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)(B\omega_2^2 + \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + C((A + 1) \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2))}{A + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{(A + 1)(\omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - C \sin(\varphi_2)) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)((B\omega_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + C(A + 1) \sin(\varphi_1))}{B(A + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))} \quad (5)$$

W modelu nie uwzględniono tarcia.

## 2. Implementacja

Równania zostały rozwiązane numerycznie za pomocą metody Rungego-Kutty czwartego rzędu która została zaimplementowana w języku c++:

```
1 void next_step(
2     e1 = next_e1();
```

```
3   e2 = next_e2();
4
5   float k1_1 = h*n_e1(p1,p2,w1,w2);
6   float k1_2 = h*n_e2(p1,p2,w1,w2);
7   float k1_3 = h*(w1);
8   float k1_4 = h*(w2);
9
10  float k2_1 = h*n_e1(p1+k1_3/2, p2+k1_4/2, w1+k1_1/2, w2+k1_2/2);
11  float k2_2 = h*n_e2(p1+k1_3/2, p2+k1_4/2, w1+k1_1/2, w2+k1_2/2);
12  float k2_3 = h*(k1_1/2+w1);
13  float k2_4 = h*(k1_2/2+w2);
14
15  float k3_1 = h*n_e1(p1+k2_3/2, p2+k2_4/2, w1+k2_1/2, w2+k2_2/2);
16  float k3_2 = h*n_e2(p1+k2_3/2, p2+k2_4/2, w1+k2_1/2, w2+k2_2/2);
17  float k3_3 = h*(k2_1/2+w1);
18  float k3_4 = h*(k2_2/2+w2);
19
20  float k4_1 = h*n_e1(p1+k3_3, p2+k3_4, w1+k3_1, w2+k3_2);
21  float k4_2 = h*n_e2(p1+k3_3, p2+k3_4, w1+k3_1, w2+k3_2);
22  float k4_3 = h*(k3_1+w1);
23  float k4_4 = h*(k3_2+w2);
24
25  w1 += (k1_1+2*k2_1+2*k3_1+k4_1)/6;
26  w2 += (k1_2+2*k2_2+2*k3_2+k4_2)/6;
27  p1 += (k1_3+2*k2_3+2*k3_3+k4_3)/6;
28  p2 += (k1_4+2*k2_4+2*k3_4+k4_4)/6;
29
30  i++;
31 }
```

### 3. Wyniki

### 4. Bibliografia

1. Wróblewski J. praca licencjacka Wahadło podwójne Warszawa 2011