



AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,
INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA AUTOMATYKI

Modelowanie układów fizycznych i biologicznych

Wahadło podwójne

Double pendulum

Autor:

Kierunek studiów:

Opiekun pracy:

Żaneta Błaszczuk, Rafał Kozik, Filip Kubicz, Jakub Nowak, Jakub Porębski

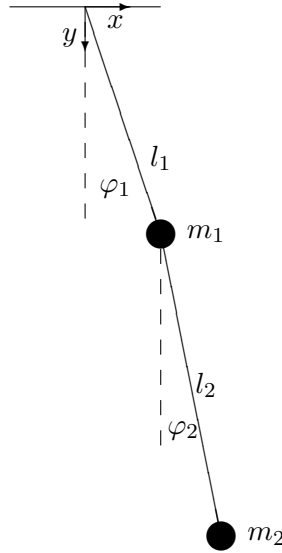
Automatyka i Robotyka

dr inż. Ireneusz Wochlik

Kraków, 2014

1. Teoria

Wahadło podwójne to wahadło matematyczne zawieszone na drugim wahadle matematycznym. Jego schemat pokazuje rys. 1.



Rysunek 1: Schemat wahadła

Wahadło opisuje 5 parametrów: masy m_1 i m_2 , długości l_1 i l_2 oraz przyspieszenie ziemskie g . Można jednak zmniejszyć ich ilość podstawiając:

$$A = \frac{m_1}{m_2} \quad B = \frac{l_2}{l_1} \quad C = \frac{g}{l_1} \quad (1)$$

Stan wahadła opisują cztery parametry: kąty odchylenia od pionu φ_1 i φ_2 oraz prędkości kątowe ω_1 i ω_2 . Ruch opisuje układ czterech równań różniczkowych [1]:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_1 = - \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)(B\omega_2^2 + \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + C((A + 1)\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2))}{A + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3)$$

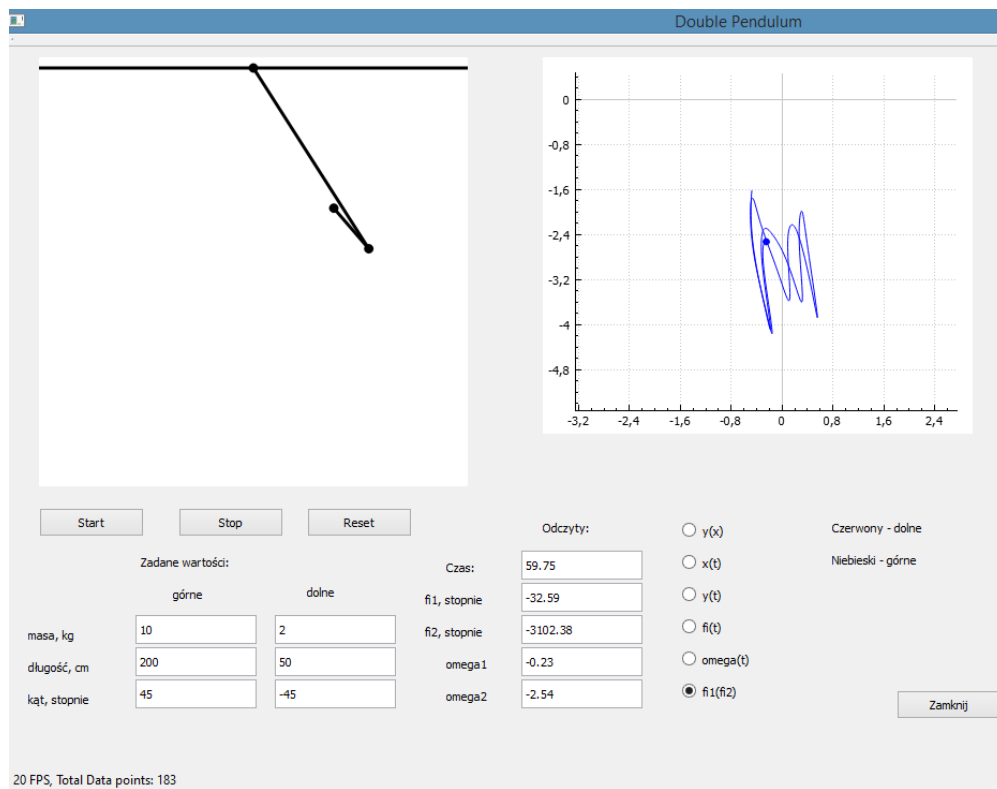
$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{(A + 1)(\omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - C \sin(\varphi_2)) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)((B\omega_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + C(A + 1)\sin(\varphi_1))}{B(A + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))} \quad (5)$$

W modelu wahadła nie uwzględniono tarcia.

2. Implementacja

Równania zostały rozwiązane numerycznie za pomocą metody Rungego-Kutty czwartego rzędu [2] która została zaimplementowana w języku c++. Wyniki zostały zapisane do pliku tekstowego, w każdej linii oddzielone spacjami: czas od początku symulacji, kąty φ_1 , φ_2 oraz prędkości kątowe ω_1 i ω_2 . Wykresy zostały przygotowane w programie Gnuplot. Powstał także program przedstawiający ruch wahadła napisany z wykorzystaniem biblioteki QT. Wygląd programu pokazuje rys. 2. Kody źródłowe przygotowanego oprogramowania znajdują się w repozytorium pod adresem github.com/Qbicz/MUFB



Rysunek 2: Graficzna symulacja ruchu wahadła.

3. Wyniki

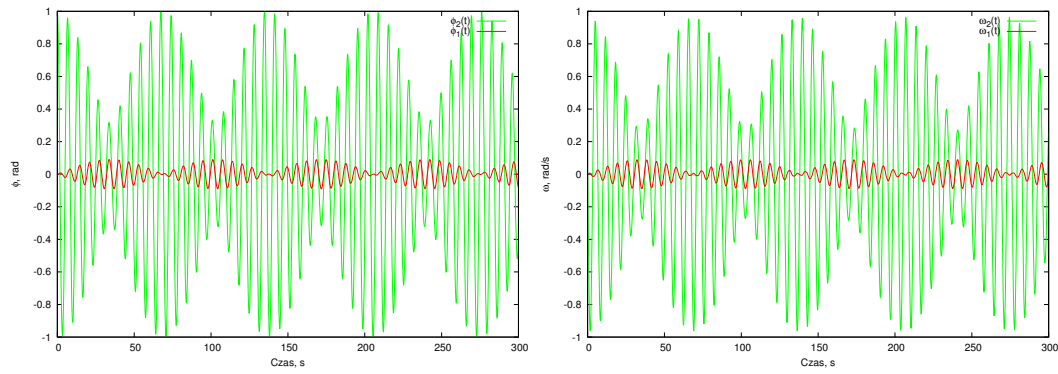
Symulacja została przeprowadzona dla parametrów

$$A = 100 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 1 \quad (6)$$

oraz stanu w chwili:

$$t_0 = 0 \quad , \quad \varphi_1(0) = 0 \quad , \quad \varphi_2(0) = 1 \quad , \quad \omega_1(0) = 0 \quad , \quad \omega_2(0) = 0 \quad (7)$$

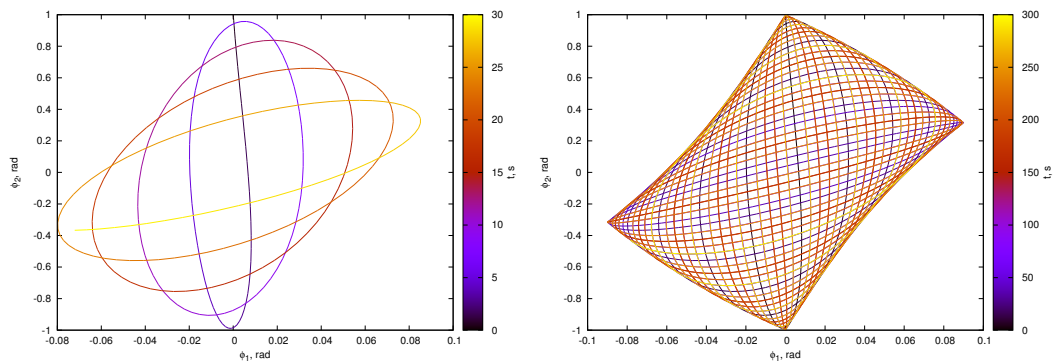
Symulacja trwała 300 sekund z krokiem 0,001 sekundy.



Rysunek 3: Kąty oraz prędkości kątowe w funkcji czasu.

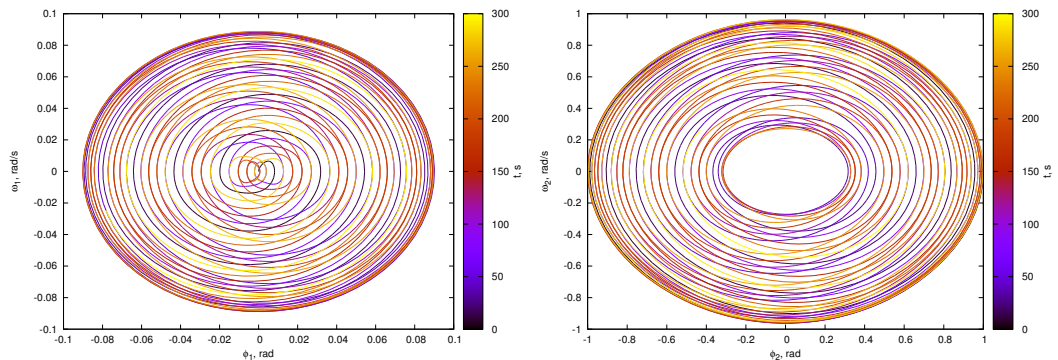
Rys. 3 przedstawia wartości kątów φ_1 , φ_2 oraz prędkości kątowych ω_1 , ω_2 w funkcji czasu. Dla tak dobranych parametrów powstają dudnienia.

Rys. 4 przedstawia trajektorię ruchu wahadła narysowaną w przestrzeniach φ_1 , φ_2 . Dla 300 sekund nie da się zaobserwować żadnej regularności w ruchu wahadła.



Rysunek 4: Trajektorja w przestrzeniach $\varphi_2(\varphi_1(t))$ a) dla pierwszych 30 sekund, b) dla 300 sekund.

Rys. 5 przedstawia trajektorię w przestrzeni fazowej: wykresy prędkości kątowej w funkcji wartości kąta.



Rysunek 5: Trajektorja w przestrzeni fazowej a) $\omega_1(\varphi_1(t))$ b) $\omega_2(\varphi_2(t))$

4. Bibliografia

- [1] Wróblewski J. praca licencjacka „Wahadło podwójne” Warszawa 2011
- [2] Dudek-Dyduch E., Wąs J., Dutkiewicz L., Grobel-Dębska K., Gudowski B. „Metody numeryczne wybrane zagadnienia” Wydawnictwo AGH Kraków 2011