



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,  
INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA AUTOMATYKI

Modelowanie układów fizycznych i biologicznych

*Wahadło podwójne*

*Double pendulum*

Autor:

Kierunek studiów:

Opiekun pracy:

*Żaneta Błaszczuk, Rafał Kozik, Filip Kubicz, Jakub Nowak, Jakub Porębski*

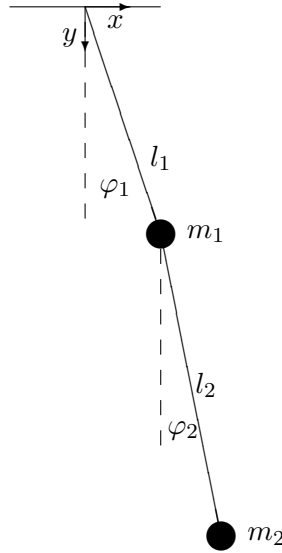
*Automatyka i Robotyka*

*dr inż. Ireneusz Wochlik*

Kraków, 2014

## 1. Teoria

Wahadło podwójne to wahadło matematyczne zawieszone na drugim wahadle matematycznym. Jego schemat pokazuje rys. 1.



Rysunek 1: Schemat wahadła

Wahadło opisuje 5 parametrów: masy  $m_1$  i  $m_2$ , długości  $l_1$  i  $l_2$  oraz przyspieszenie ziemskie  $g$ . Można jednak zmniejszyć ich ilość podstawiając:

$$A = \frac{m_1}{m_2} \quad B = \frac{l_2}{l_1} \quad C = \frac{g}{l_1} \quad (1)$$

Stan wahadła opisują cztery parametry: kąty odchylenia od pionu  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  oraz prędkości kątowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Ruch opisuje układ czterech równań różniczkowych [1]:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_1 = - \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)(B\omega_2^2 + \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + C((A + 1)\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2))}{A + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3)$$

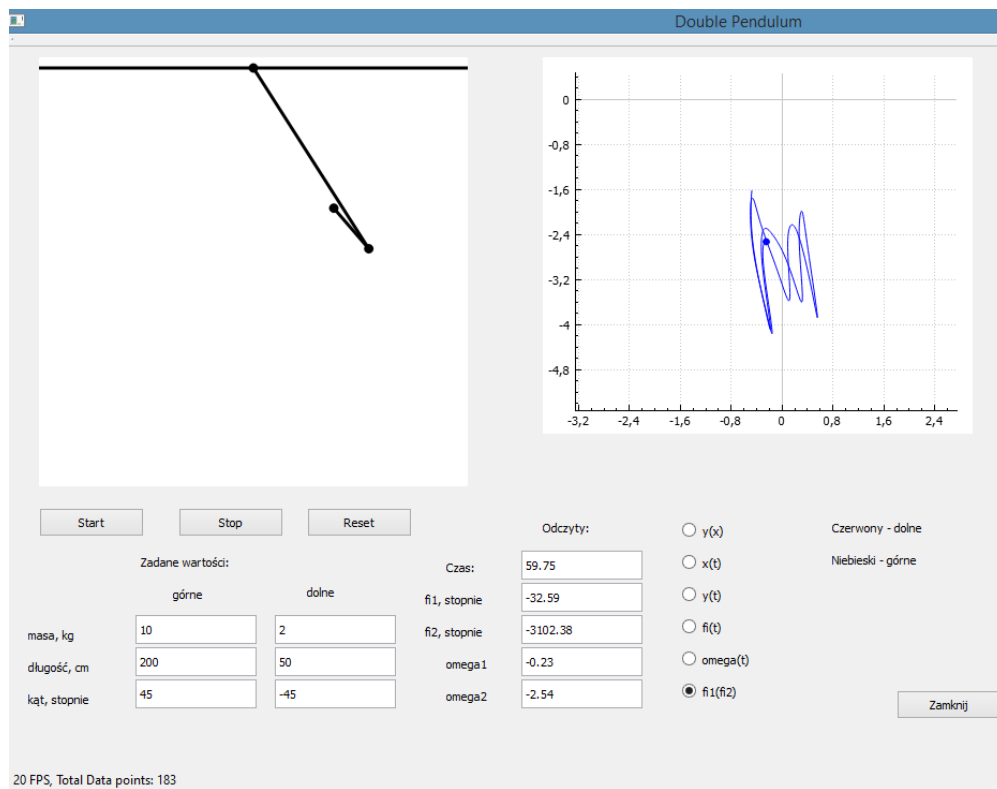
$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{(A + 1)(\omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - C \sin(\varphi_2)) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)((B\omega_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + C(A + 1)\sin(\varphi_1))}{B(A + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))} \quad (5)$$

W modelu wahadła nie uwzględniono tarcia.

## 2. Implementacja

Równania zostały rozwiązane numerycznie za pomocą metody Rungego-Kutty czwartego rzędu [2] która została zaimplementowana w języku c++. Wyniki zostały zapisane do pliku tekstowego, w każdej linii oddzielone spacjami: czas od początku symulacji, kąty  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  oraz prędkości kątowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Wykresy zostały przygotowane w programie Gnuplot. Powstał także program przedstawiający ruch wahadła napisany z wykorzystaniem biblioteki QT. Wygląd programu pokazuje rys. 2. Kody źródłowe przygotowanego oprogramowania znajdują się w repozytorium pod adresem [github.com/Qbicz/MUFB](https://github.com/Qbicz/MUFB)



Rysunek 2: Graficzna symulacja ruchu wahadła.

## 3. Wyniki

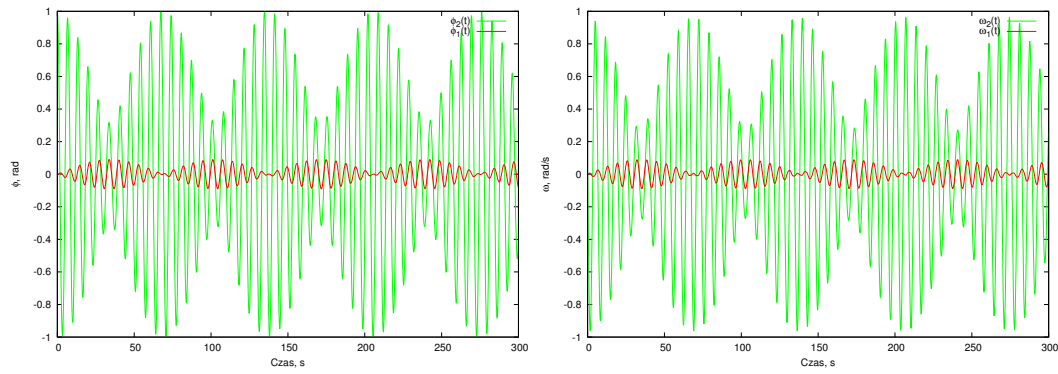
Symulacja została przeprowadzona dla parametrów

$$A = 100 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 1 \quad (6)$$

oraz stanu w chwili:

$$t_0 = 0 \quad , \quad \varphi_1(0) = 0 \quad , \quad \varphi_2(0) = 1 \quad , \quad \omega_1(0) = 0 \quad , \quad \omega_2(0) = 0 \quad (7)$$

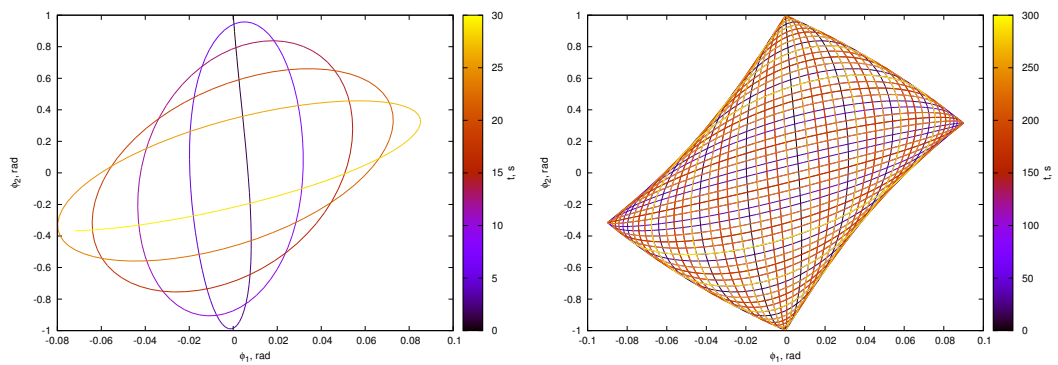
Symulacja trwała 300 sekund z krokiem 0,001 sekundy.



Rysunek 3: Kąty oraz prędkości kątowe w funkcji czasu.

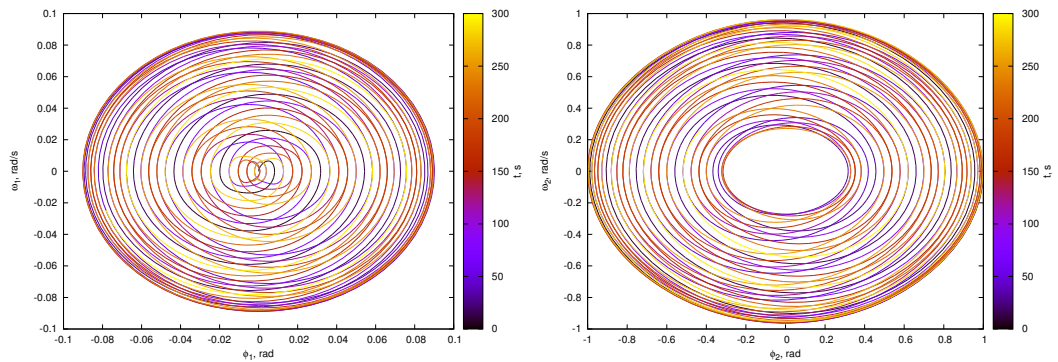
Rys. 3 przedstawia wartości kątów  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  oraz prędkości kątowych  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  w funkcji czasu. Dla tak dobranych parametrów powstają dudnienia.

Rys. 3 przedstawia trajektorię ruchu wahadła narysowaną w przestrzeniach  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Dla 300 sekund nie da się zaobserwować żadnej regularności w ruchu wahadła.



Rysunek 4: Trajektoria w przestrzeniach  $\varphi_1$  oraz  $\varphi_2$  a) dla pierwszych 30 sekund, b) dla 300 sekund.

Rys. 3 przedstawia trajektorię w przestrzeni fazowej: wykresy prędkości kątowej w funkcji wartości kąta.



Rysunek 5: Trajektoria w przestrzeni fazowej  $\omega(\varphi(t))$

## 4. Bibliografia

- [1] Wróblewski J. praca licencjacka „Wahadło podwójne” Warszawa 2011
- [2] Dudek-Dyduch E., Wąs J., Dutkiewicz L., Grobler-Dębska K., Gudowski B. „Metody numeryczne wybrane zagadnienia” Wydawnictwo AGH Kraków 2011