



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

OPTYMALIZACJA W SYSTEMACH STEROWANIA

---

# Lewitacja magnetyczna - sterowanie docelowe

---

*Prowadzący:*  
dr inż. Piotr BANIA

*Autorzy:*  
Anna MUSIAŁ  
Grzegorz KRÓL  
Filip KUBICZ  
Kazimierz CHUDZIK

# 1 Wstęp

Sterowanie optymalne - znaczenie tego wyrażenia nie jest od razu jasne. Zależy bowiem przede wszystkim od tego, jakie kryterium oceny przyjmujemy. W klasycznym rozumieniu regulatorem optymalnym jest regulator liniowo-kwadratowy LQ, który minimalizuje wskaźnik biorący pod uwagę uchyb oraz koszt energetyczny sterowania. Co jednak, jeśli chcemy jak najszybciej osiągnąć efekt i przeprowadzić układ do żądanego stanu, nie zważając na jego zachowanie „w drodze”? Rozum podpowiada, że należy układ pobudzić największym dostępnym sterowaniem, a zanim dotrzemy do zadanego punktu, maksymalnym przeciwnym sterowaniem go wyhamować. Rzeczywiście, w pracy [1] dowiedziono że odpowiednio obliczone sterowanie *bang-bang* jest rozwiązaniem problemu sterowania docelowego.

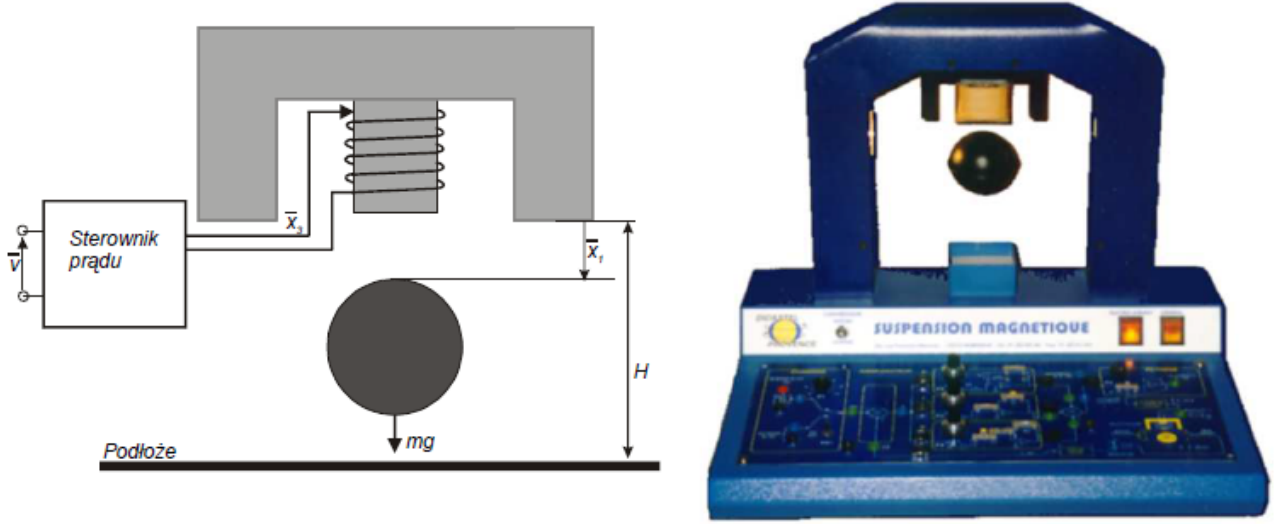
Podczas przedmiotu *Optymalizacja w systemach sterowania* poznaliśmy metodykę wyznaczania sterowania predykcyjnego. W oparciu o pracę [2] przygotowaliśmy algorytm optymalizacji sterowania docelowego układu lewitacji magnetycznej.

Cele projektu:

1. Zapoznanie się z algorytmem QTO-RHC proponowanym w [2]
2. Realizacja rozwiązywania równań różniczkowych układu MagLev w przód
3. Rozwiązywanie równań sprzężonych w tył
4. Przyjęcie wskaźnika jakości regulacji
5. Wyznaczenie gradientu wskaźnika jakości po czasach przełączeń i czasie końcowym
6. Optymalizacja numeryczna sterowania bang-bang względem założonego wskaźnika

## 2 Model matematyczny lewitacji magnetycznej

Do zastosowania algorytmu sterowania QTO-RHC niezbędny jest model układu. Decyzja o sterowaniu podejmowana jest na podstawie rozwiązań równań układu i równań sprzężonych. Stanowisko laboratoryjne magnetycznej lewitacji przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1: Stanowisko laboratoryjne magnetycznej lewitacji

Równania różniczkowe układu, po przeskalowaniu skalowania, zmiennych stanu oraz czasu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -e^{-x_1} \cdot x_3^2 + 1 \\ \dot{x}_3 = -cx_3 + u \end{cases} \quad (1)$$

Zastosowane przeskalowanie:

$$\bar{x}_1 = \alpha x_1, \bar{x}_2 = \beta x_2, \bar{x}_3 = \gamma x_3, \bar{v} = \frac{\eta u \tau + I_{i_s}}{k}, \bar{\tau} = \xi t \quad (2)$$

Gdzie  $\bar{x}_1[m]$  oznacza odległość kuli od elektromagnesu,  $\bar{x}_2[m/s]$  jej prędkość,  $\bar{x}_3[A]$  prąd cewki elektromagnesu oraz  $\bar{v}[V]$  napięcie sterujące. Pełne wyprowadzenie modelu można znaleźć w pracy dyplomowej [3].

Współczynniki przeskalowania zebrano w tabeli.

Współczynnik	Wartość
$\alpha$	0,00773746m
$\beta$	0,275507681m/s
$\gamma$	0,28890446065998A
$\xi$	0,2808437120924
$\eta$	10,28701901522286A/s

Tablica 1: Parametry przeskalowania modelu

### 3 Sterowanie optymalne

Jeżeli układ nieliniowy ma postać

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], f \in C^1 \quad (3)$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0 \quad (4)$$

To przyjmując wskaźnik jakości w formie funkcjonału

$$J(u, T) = q(T, x(T)) = T + \frac{1}{2}\rho|x(T) - x_{ref}|^2 \quad (5)$$

**sterowanie optymalne**, tj. takie, które najszybciej doprowadza układ do zadanego położenia ma postać sterowania bang-bang

$$u(t) = \begin{cases} u_{max}, & g^T \psi > 0 \\ u_{min}, & g^T \psi < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Przyjęto że czasy przełączeń sterowania oznaczono przez  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, T$ .  $\psi(t)$  to funkcja oznaczająca równanie sprzężone układu, takie że

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H \quad (7)$$

gdzie  $H$  jest macierzą Hamiltona układu.

Sprawdzenie, czy sterowanie jest optymalne może być przeprowadzone przez wyrysowanie **funkcji przełączającej** i jej porównanie ze sterowaniem. Funkcja przełączająca ma postać

$$\Phi(t) = g^T(x(t)) \cdot \psi(t) \quad (8)$$

#### 3.1 Analiza układu MagLev

Hamiltonian układu 1 ma postać

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 (bx_3^2 e^{ax_1} + g) + \psi_3 (cx_3 + u) \quad (9)$$

Równania sprzężone układu magnetycznej lewitacji [4]:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -ab \cdot e^{ax_1} \cdot x_3^2 \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = -2b \cdot e^{ax_1} \cdot x_3 \psi_2 - c\psi_3 \end{cases} \quad (10)$$

W celu przyspieszenia numerycznej optymalizacji sterowania z użyciem funkcji `fmincon()` z pakietu Optimization MATLABa, należy obliczyć gradient wskaźnika jakości względem czasów przełączeń. Gradient wskaźnika jakości po czasach przełączeń  $\tau_i$  dla układu MagLev jest dany wzorem

$$\nabla_{\tau_i} J = \Phi(t)(u^+ - u^-) \quad (11)$$

Natomiast gradient wskaźnika jakości po czasie końcowym ma postać

$$\nabla_T J = 1 - H(\psi(T), x(T), u(T^-)) \quad (12)$$

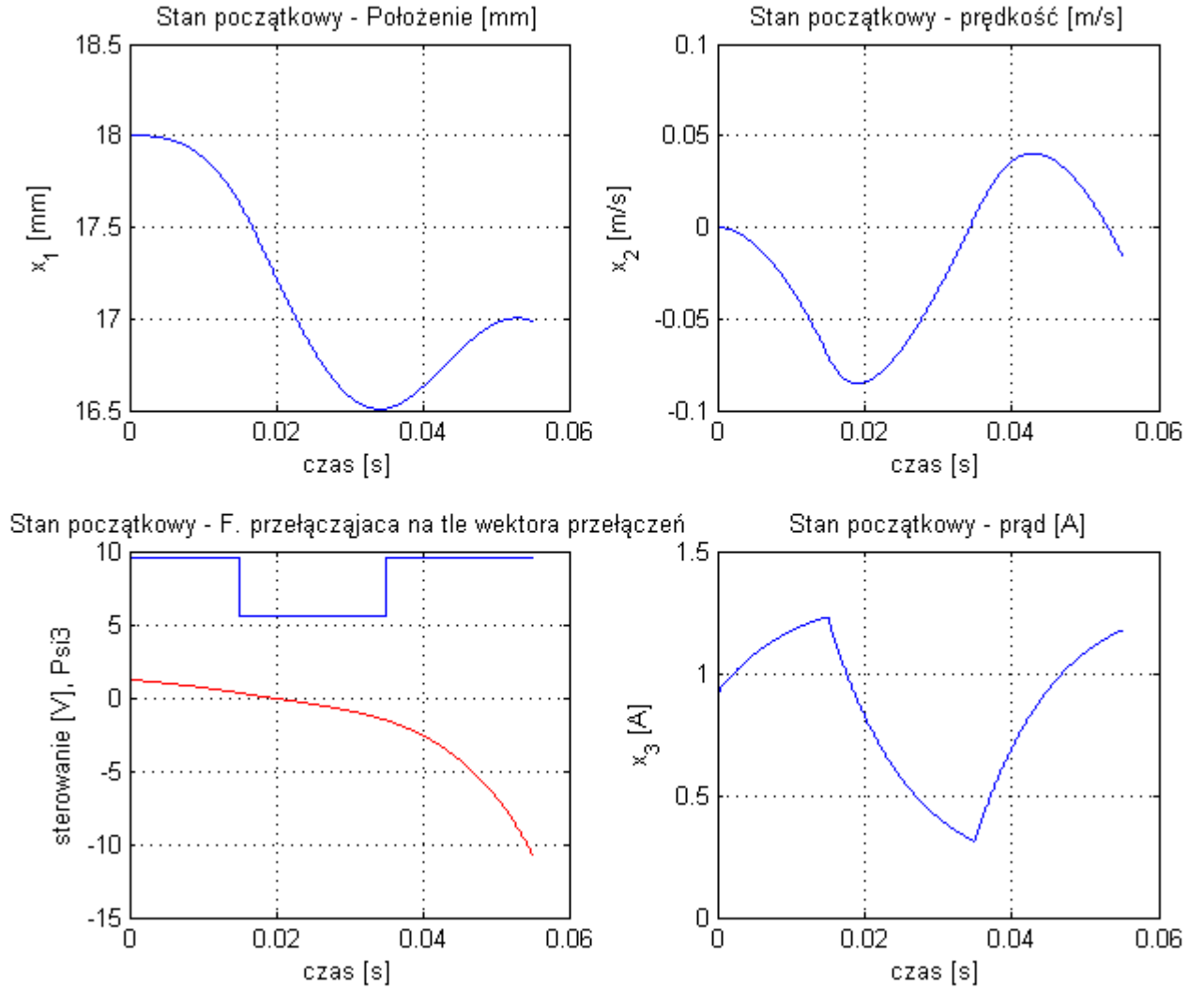
## 4 Optymalizacja w środowisku MATLAB

Model matematyczny i znajomość struktury optymalnego sterowania bang-bang wykorzystano do numerycznej optymalizacji wskaźnika jakości określającego jak najszybsze dotarcie do danego położenia równowagi. Rozwiązywanie równań różniczkowych w środowisku MATLAB odbywało się metodą **Rungego-Kutty czwartego rzędu**.

Funkcja **rk4** rozwiązuje równania stanu "w przód". Parametrami wejściowymi dla funkcji są: punkt początkowy, wektor sterowań, czasy przełączeń oraz krok dyskretyzacji. Funkcja zwraca rozwiązanie równań stanu oraz czas. Różniczkowe równania stanu zawarto w funkcji **rhs**, która jest wywoływana wewnątrz **rk4**.

Funkcja **r4k\_inv** rozwiązuje równania sprzężone "wstecz". Parametrami wejściowymi dla funkcji są: rozwiązanie równań stanu, wektor sterowań, czasy przełączeń, krok dyskretyzacji, punkt docelowy oraz współczynnik  $\rho$ . Funkcja zwraca rozwiązanie równań sprzężonych. Różniczkowe równania sprzężone zawarto w funkcji **rhs\_inv**, który jest wywoływany wewnątrz funkcji **rk4\_inv**.

Funkcja celu (nazwana **funkcja\_celu\_z\_gradientem**) wykonuje opisane powyżej czynności, a więc rozwiązuje równania stanu „w przód” oraz równania sprzężone „wstecz”. Następnie wylicza wskaźnik jakości dla danego wektora przełączeń. Wskaźnik jakości obliczany jest dla stanu końcowego zgodnie ze wzorem 5. Największą wagę we wskaźniku jakości przypisano dla położenia oraz prędkości kulki, ponieważ uznano, że parametry te powinny być w jak największym stopniu zgodne z oczekiwanymi. Ostatnim etapem w napisanej funkcji celu jest obliczenie gradientów wskaźnika jakości dla chwil przełączeń oraz czasy końcowego zgodnie ze wzorem 12. Parametrami wejściowymi funkcji celu są: punkt początkowy, krok dyskretyzacji, czasy przełączeń, współczynnik  $\rho$ , punkt docelowy oraz wektor sterowań. Funkcja celu zwraca obliczoną wartość wskaźnika jakości oraz wektor gradientów wskaźnika jakości.

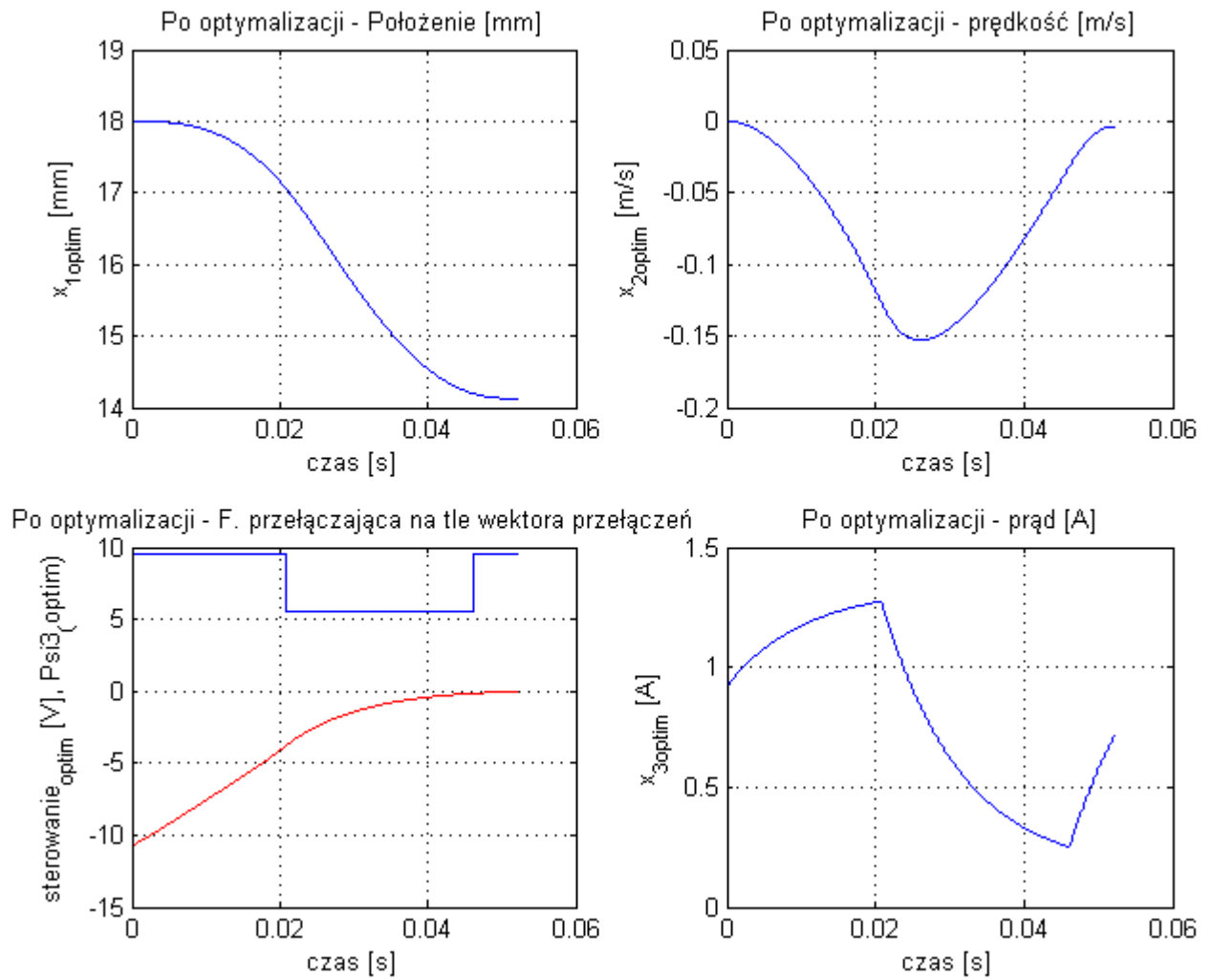


Rysunek 2: Rozwiązanie przed optymalizacją z wektorem przełączeń  $\tau = [0.015, 0.035, 0.055]$

#### 4.1 Wykorzystanie ustawień `fmincon()`

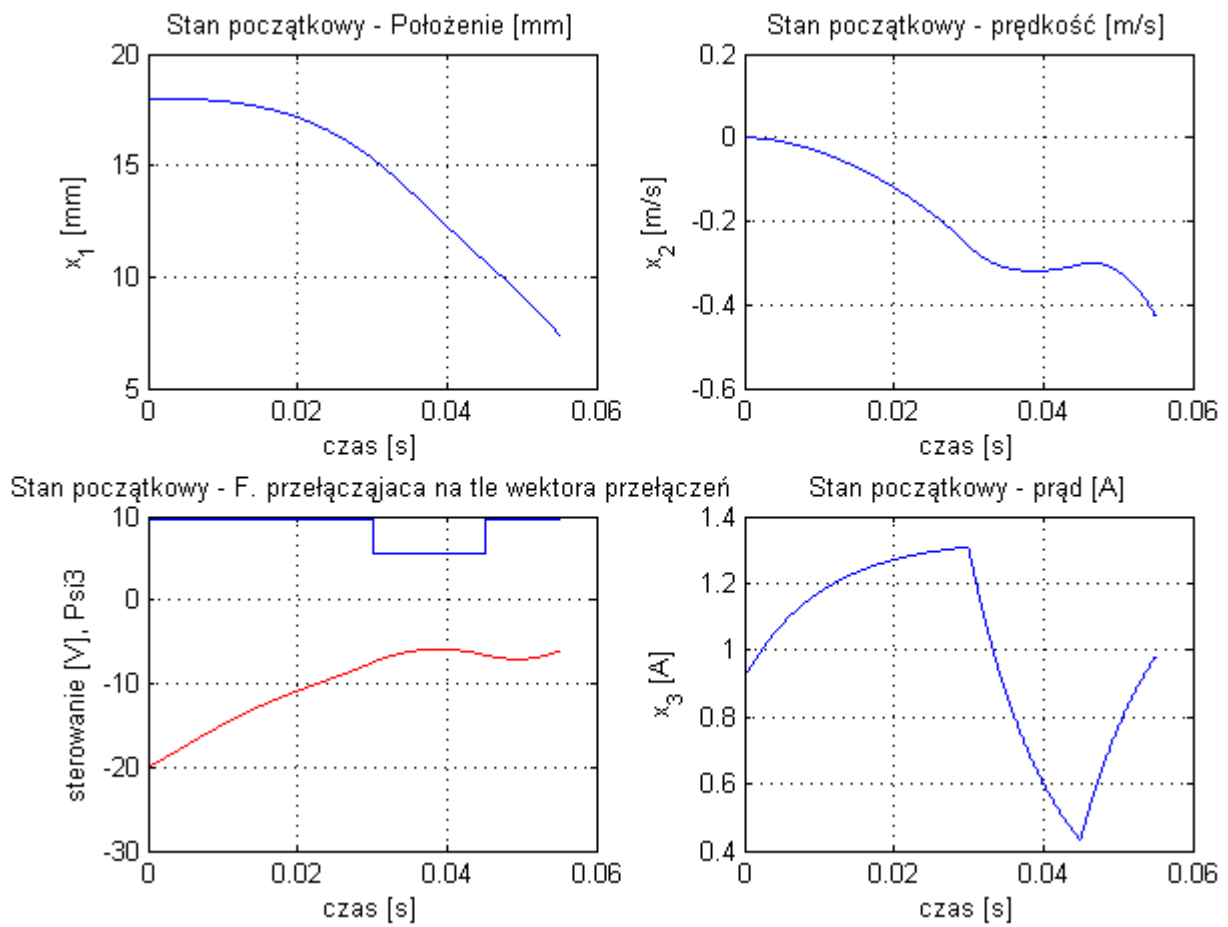
Skrypt `MagLev_main` jest głównym programem służącym do optymalizacji lewitacji magnetycznej. Na początku można określić indywidualne czasy przełączeń, wektor sterowań, zadane stany początkowy i końcowy oraz krok dyskretyzacji. W dalszej części programu rozwiązywane są równania stanu "w przód" i równania sprzężone "wstecz" dla parametrów początkowych. Rysowane są również wykresy przedstawiające zmienne stanu, funkcję sterującą oraz funkcję przełączającą dla warunków początkowych oraz obliczany jest wskaźnik jakości wraz z gradientem.

Optymalizacja początkowego rozwiązania wykonywana jest z użyciem funkcji wbudowanej `fmincon()` w programie Matlab. Dodano ograniczenia nierównościowe, aby zachować odpowiednie wartości czasów przełączeń. Dodatkowo ustawiono dolną i górną granicę dla szukanych optymalnych czasów przełączeń. Nie mogą różnić się one o wielkość większą niż delta od początkowych czasów przełączeń. Zdecydowano się na to dodatkowe ograniczenie, ponieważ umożliwił on szybsze znalezienie sterowania optymalnego przez funkcję `fmincon`. Dodatkowo w opcjach funkcji `fmincon` zastosowano algorytm „active-set”, włączono opcję gradientu obliczanego w funkcji celu oraz ustawiono ograniczenia na maksymalną liczbę iteracji oraz wywołań funkcji. Ograniczenia te zastosowano, ponieważ zauważono, że obliczane wyniki są zadowalające dużo wcześniej, niż funkcja `fmincon` domyślnie kończy pracę. Ostatnim etapem optymalizacji jest



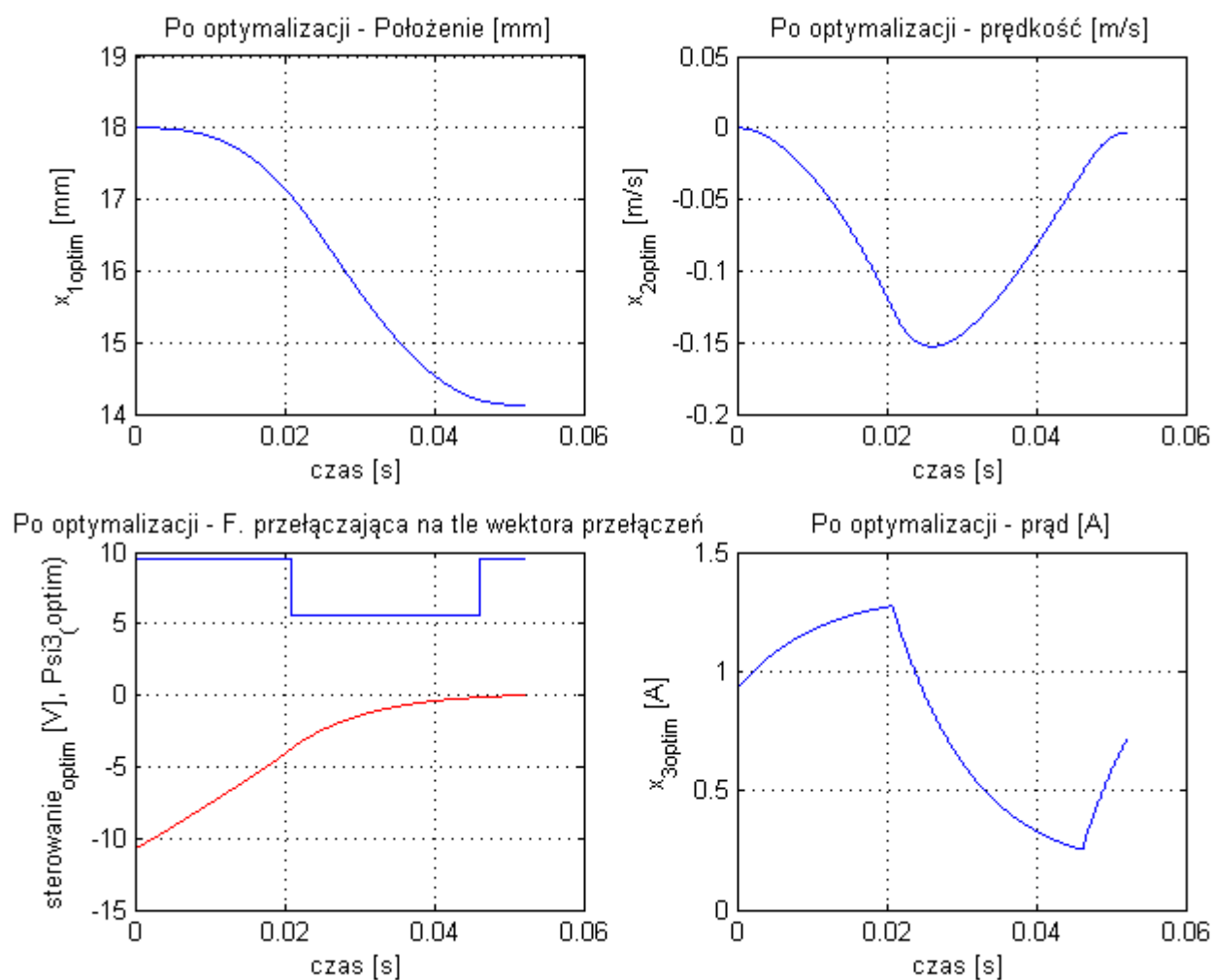
Rysunek 3: Przebieg dla sterowania po optymalizacji

obliczenie i wyświetlenie wartości zmiennych stanu, funkcji sterującej i funkcji przełączającej dla znalezionych, zoptymalizowanych wartości przełączeń.



Rysunek 4: Rozwiązanie przed optymalizacją z wektorem przełączeń  $\tau = [0.03, 0.045, 0.055]$





Rysunek 5: Przebieg dla sterowania po optymalizacji, dobrane numerycznie  $\tau = [0.7412, 1.6434, 1.8554]$

## 5 Wnioski

Sterowanie docelowe metodą QTO-RHC pozwala na predykcję funkcji sterującej dla obiektów nieliniowych. Często znalezienie sterowania optymalnego jest trudnym zadaniem, które wymaga dużych nakładów obliczeniowych i czasowych. Naszym zadaniem optymalizacji była stabilizacja położenia i prędkości metalowej kulki lewitującej w polu magnetycznym. W trakcie laboratoriów wykorzystywano algorytm Rungego-Kutty, za pomocą którego rozwiązywano równania różniczkowe „w przód” oraz „wstecz”. Została napisana funkcja do obliczania wskaźnika jakości wraz z gradientami, która następnie została poddana minimalizacji przy pomocy funkcji `fmincon` programu Matlab. Jako jedną z opcji funkcji `fmincon` ustawiono wykorzystanie obliczanego wewnątrz funkcji celu gradientu wskaźnika jakości. Przyspieszyło to znalezienie sterowania odpowiadającego założeniom projektowym. Rozwiązanie problemu optymalizacji było możliwe dzięki wcześniejszej znajomości modelu matematycznego rozważanego obiektu wraz z równaniami stanu i sprzężonymi. Niestety, obliczona i zaprezentowana na wykresach funkcja przełączająca nie potwierdza optymalności znalezionej odpowiedzi.

## Literatura

- [1] Peter L. Falb Michael Athans. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*. Courier Corporation, 1966.
- [2] Piotr Bania. *Algorytmy sterowania optymalnego w nieliniowej regulacji predykcyjnej*. AGH, 2008.
- [3] Piotr Bania. Model i sterowanie magnetyczną lewitacją, 1999.
- [4] Andrzej Turnau. *Sterowanie docelowe układami nieliniowymi w czasie rzeczywistym - algorytmy inteligentne i optymalnoczynasowe*. Wydawnictwa AGH, 2002.