



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

LABORATORIUM PROBLEMOWE II

---

## Magnetyczna lewitacja

---

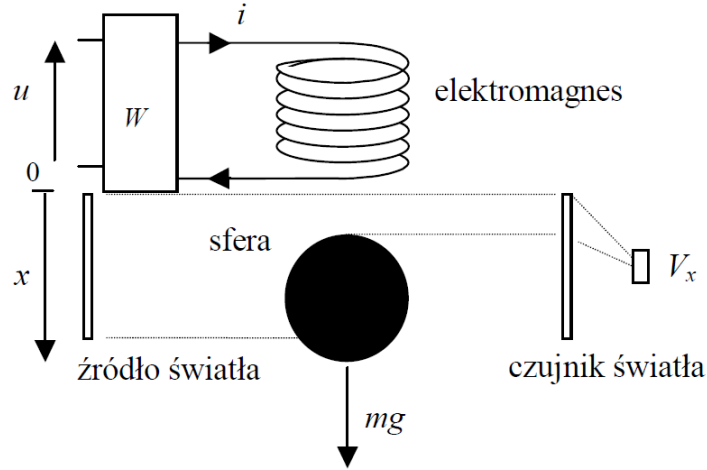
*Autorzy:*  
Piotr PAŁUCKI  
Filip KUBICZ

10 X 2016 - 12 XII 2016

# 1 Model matematyczny stanowiska MagLev

Lewitacja magnetyczna to zjawisko występujące, kiedy ferromagnetyczny obiekt znajdzie się w polu magnetycznym skierowanym pionowo w górę, na tyle silnym, że wytworzona siła zrównoważy działającą na przedmiot grawitację. Zjawisko to stosuje się obecnie w łożyskach magnetycznych w pociągach, rozwijanych głównie w Japonii (MLX01) i w Niemczech (TR-08).

W laboratorium Katedry Automatyki EAIiB AGH znajduje się stanowisko przeznaczone do badania magnetycznej lewitacji. Obiektem unoszącym się jest metalowa sfera. Pole magnetyczne jest wytwarzane przez cewkę umieszczoną ponad sferą. Dzięki pracom [1], [3] i [4] wiemy w jaki sposób modelować zachowanie układu, a także identyfikować jego parametry fizyczne.



Rysunek 1: Schemat stanowiska służący do wyznaczania równań, źródło [3]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2m} \frac{dL(x_1)}{dx_1} x_3^2(t) + 10^{-3}g \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{T}x_3(t) + \frac{k}{T}(u(t) + u_c) \end{cases} \quad (1)$$

Gdzie:

- $x_1$  - położenie sfery  $[m]$
- $x_2$  - prędkość sfery  $[m/s]$
- $x_3$  - prąd w cewce  $[A]$

## 1.1 Analiza modelu

Zmienne stanu i sterowanie spełniają warunki:

$$\begin{cases} x_1(t) \in [0, x_{max}] \\ x_2(t) \in R \\ x_3(t) \in [ku_c, k(u_c + u_{max})] \\ u(t) \in [0, u_{max}] \end{cases} \quad (2)$$

## 2 Identyfikacja

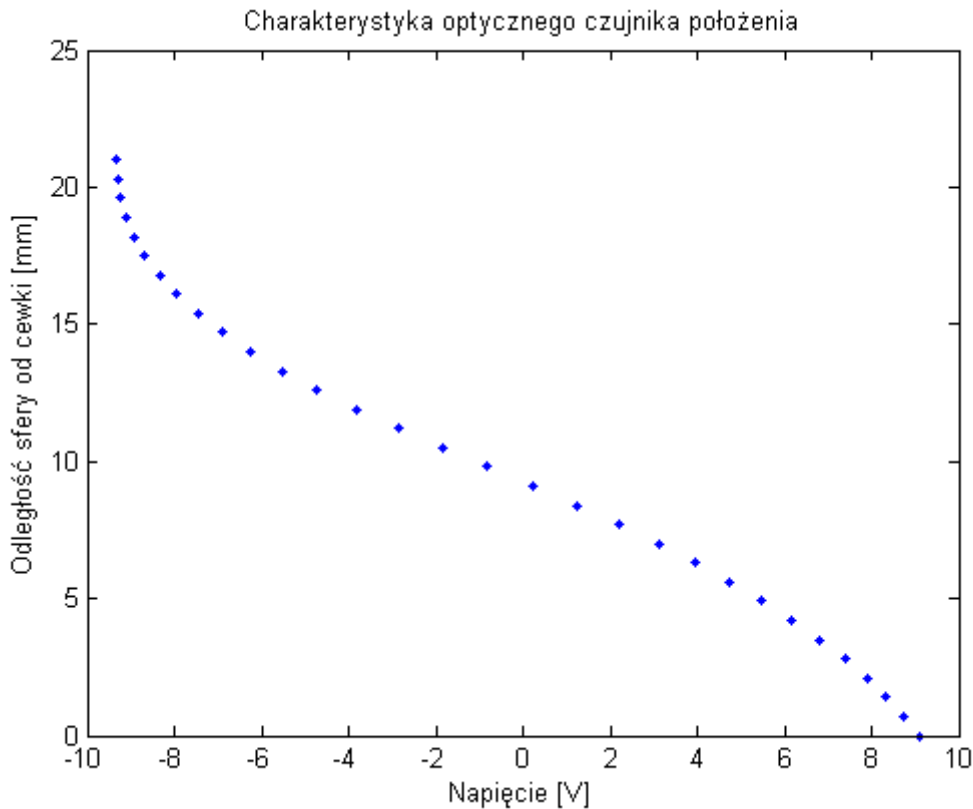
### 2.1 Identyfikacja charakterystyki czujnika położenia

Pomiar położenia sfery w układzie magnetycznej lewitacji jest dokonywany optycznie. Z jednej strony znajduje się źródło światła, a po przeciwnej stronie fotodioda z przetwornikiem A/C, która podaje pewne napięcie  $u_x$ . Podczas identyfikacji poszukujemy zależności tego napięcia od położenia sfery:

$$u_x = g(x_1) \quad (3)$$

Poszukujemy charakterystyki statycznej  $g(x_1)$ , którą otrzymamy przykręcając sferę do śruby i podnosząc ją co ustalony skok 0,7 mm. Za każdym razem dokonujemy pomiaru napięcia podanego przez detektor światła.

Do pracy z modelem potrzebna jest znajomość położenia sfery, dlatego na rysunku 2 przedstawiona została charakterystyka odwrotna do zależności 3.



Rysunek 2: Charakterystyka statyczna optycznego czujnika położenia

W pracy [1] autor dokonał aproksymacji otrzymanej charakterystyki odwrotnej sumą funkcji wykładniczych metodą prób i błędów. Nie będziemy dokonywać takiej aproksymacji, ponieważ podczas pracy z modelem w laboratorium użyjemy bloku *LUT* z *interpolacją* oferowanego przez Simulink.

### 2.2 Identyfikacja parametrów cewki $k, T, u_c$

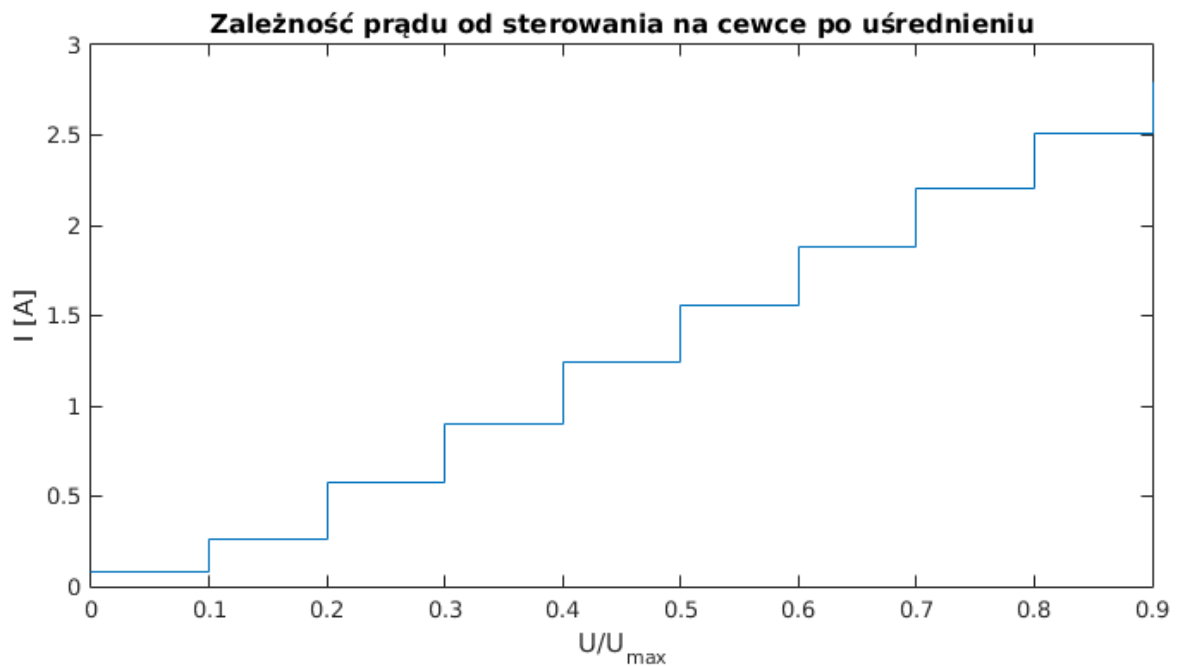
Aby wiedzieć, jak zmienia się prąd cewki w zależności od użytego sterowania, czyli przyłożonego napięcia  $u$ , należy wyznaczyć parametry  $k, T$  oraz  $u_c$ .

### 2.2.1 Pomiary w stanie ustalonym cewki

Zależność prądu od napięcia może być dość dobrze przybliżona funkcją liniową [1]

$$i = k(u + u_c) \quad (4)$$

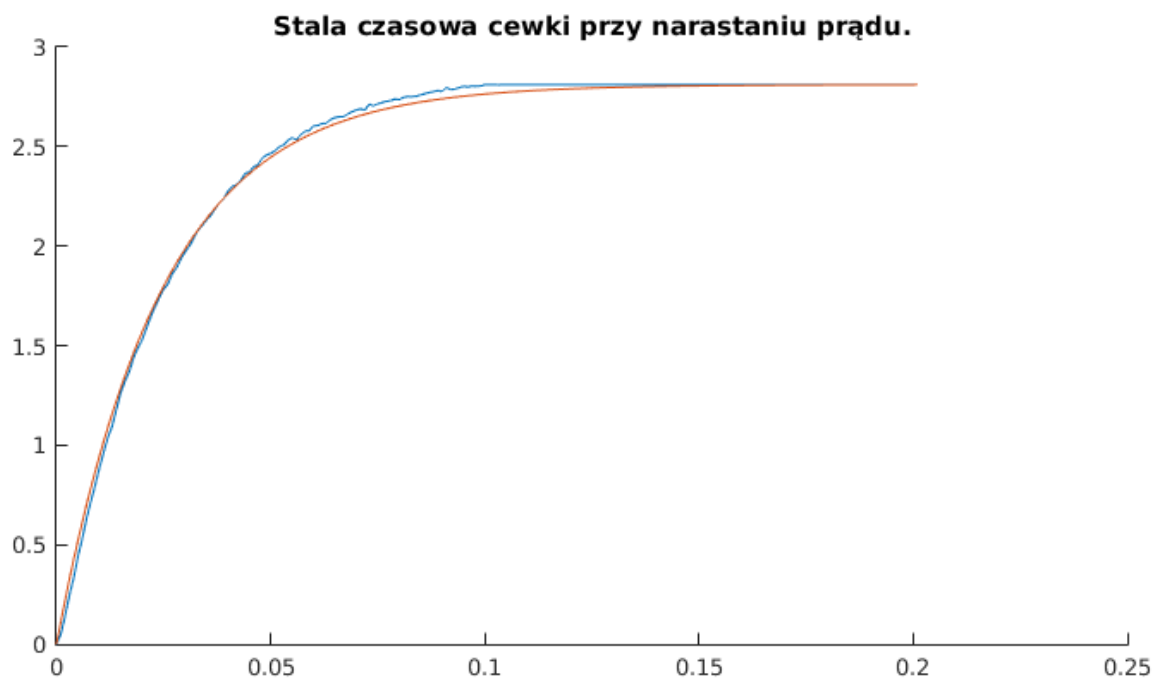
Parametry  $k$  i  $u_c$  (wzmocnienie oraz stałe napięcie na cewce) wyznaczymy mierząc prąd w stanie ustalonym dla różnych wartości napięcia sterującego. Poniżej przedstawiono wykres obrazujący uśrednione pomiary prądu i przy zadanym sterowaniu. Wyznaczone parametry  $k$  i  $u_c$  przedstawia tabela 2.



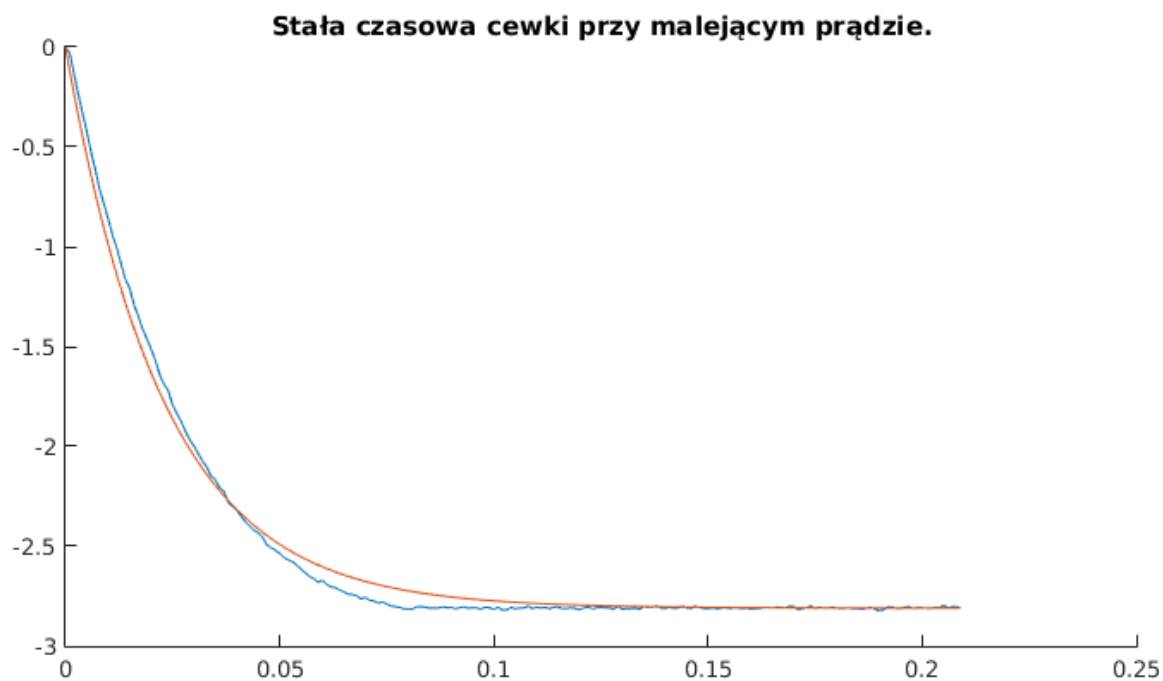
Rysunek 3: Identyfikacja parametrów statycznych cewki

### 2.2.2 Pomiary stanów przejściowych cewki

Stałą czasową cewki  $T$  można wyznaczyć obserwując odpowiedź skokową prądu. Aby możliwe było przejście w tryb sterowania pseudo-napięciowego należy zwolnić sygnał sterujący PWM z wypełnieniem 50%. W tym celu wykorzystano wbudowany preskaler z ustawioną wartością 4096.



Rysunek 4: Identyfikacja parametrów statycznych cewki



Rysunek 5: Identyfikacja parametrów statycznych cewki

Korzystając z metody najmniejszych kwadratów wyznaczono parametry, których wartości umieszczono w tabeli 2.

### 2.3 Identyfikacja indukcyjności cewki $L(x_1)$

W celu identyfikacji zależności indukcyjności cewki od położenia w układzie otwartym należy wykonać serię pomiarów napięcia i prądu dla różnych położań sfery. Zmierzona rezystancja

cewki wynosi  $R = 4,7\Omega$ . Indukcyjność obliczymy ze wzoru

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} \quad (5)$$

gdzie  $\omega$  - częstość napięcia zasilającego ( $\omega = 314 \text{ rad/s}$ )

$U$  - napięcie skuteczne na cewce [V]

$I$  - prąd płynący przez cewkę [A]

$R$  - rezystancja cewki

Poszukujemy funkcji postaci

$$L(x_1) = L_0 + 2 \cdot 10^{-3} \frac{mg}{a^2x + ab} \quad (6)$$

Ze względu na bardzo małe zmiany indukcyjności podczas pomiarów w pętli otwartej, postanowiliśmy użyć regulatora stabilizującego i znaleźć pochodną indukcyjności korzystając z równania drugiego modelu 1. Z pomocą prowadzącego dobrane zostały nastawy pozwalające uzyskać efekt stabilizacji z wystarczającą dokładnością. Przedstawia je tabela 1.

człon	wartość
P	50
I	5
D	2.5
Offset	0.52

Tablica 1: Parametry użytego regulatora PID

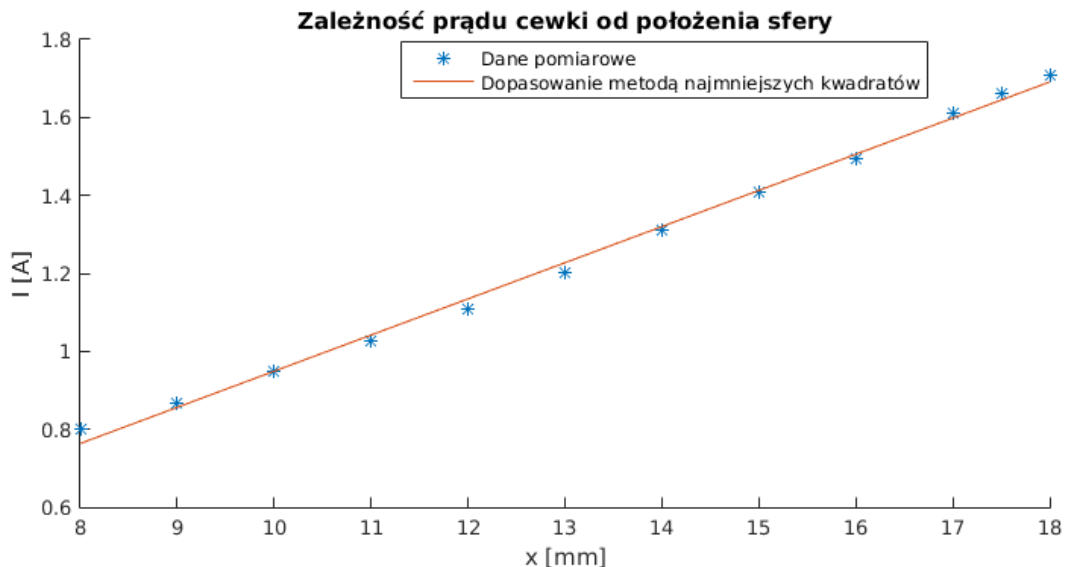
Dysponując możliwością ustawiania pozycji sfery mogliśmy przejść do próby wyznaczenia pochodnej indukcyjności. Poszukiwana postać pochodnej funkcji  $L$ :

$$L'(x) = -2 \cdot 10^{-3} \frac{mg}{(ax + b)^2} \quad (7)$$

W stanie ustalonym zachodzi liniowa zależność prądu w stanie ustalonym od położenia:

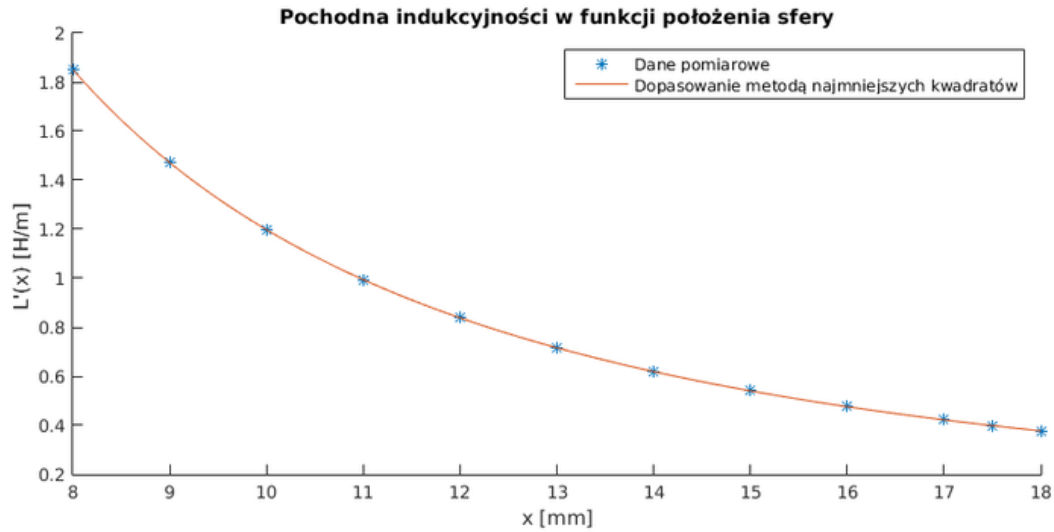
$$I(x) = ax + b = k(u + u_c) \quad (8)$$

Przypuszczenia te potwierdza rysunek 6, przedstawiający dane zebrane podczas identyfikacji obiektu.



Rysunek 6: Identyfikacja prądu cewki w funkcji położenia

Dzięki identyfikacji możliwe było wyznaczenie parametrów prostej wspomnianej we wzorze 8, które niezbędne są do wyznaczenia wzoru na pochodną indukcyjności (wzór 7).



Rysunek 7: Identyfikacja pochodnej indukcyjności cewki w funkcji położenia

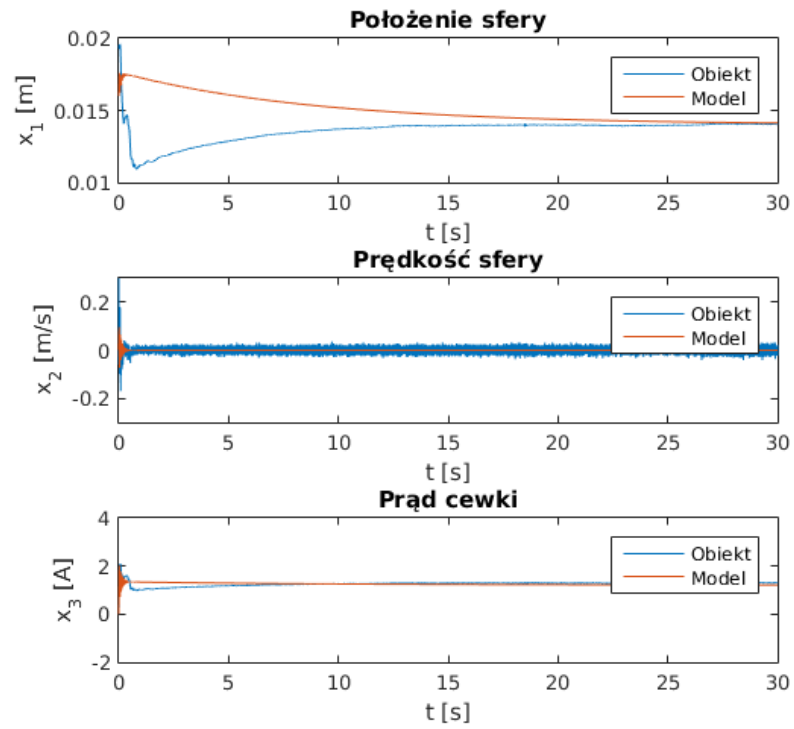
Wszystkie wyznaczone parametry przedstawia tabela 2.

parametr	wartość
$k$	0.2607
$T_{up}$	0.0245s
$T_{down}$	0.023s
$u_c$	-0.0062
$a$	0.0928
$b$	0.0214

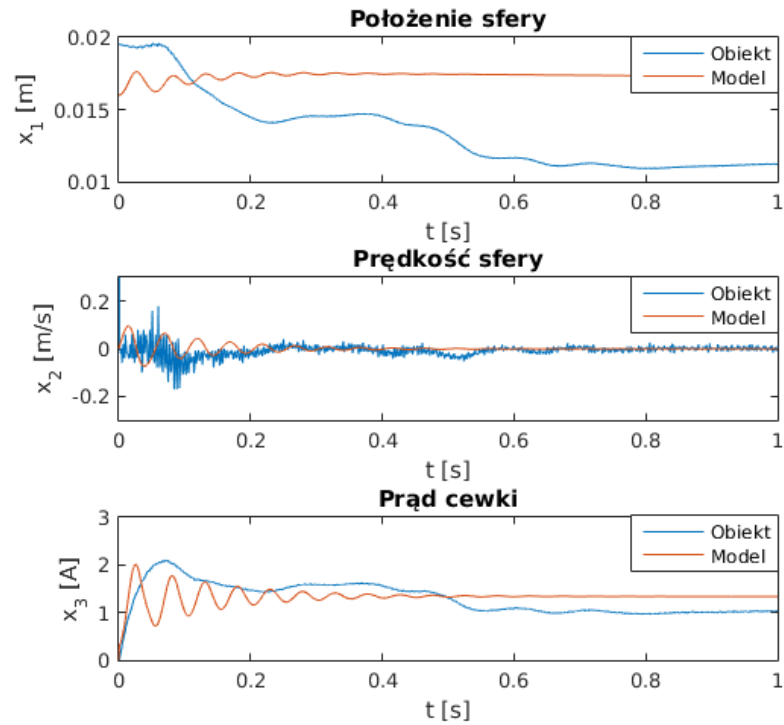
Tablica 2: Parametry wyznaczone w identyfikacji obiektu

## 2.4 Weryfikacja modelu

Poniżej przedstawiono porównanie zaproponowanego modelu obiektu wraz ze zidentyfikowanymi parametrami oraz rzeczywistego obiektu. Jak widać rozbieżności są dość spore, jednak w dłuższym horyzoncie czasowym model przyzwoicie oddaje zachowanie się rzeczywistego układu.



Rysunek 8: Zachowanie obiektu i modelu - długi horyzont czasowy



Rysunek 9: Zachowanie obiektu i modelu - krótki horyzont czasowy



### 3 Regulator liniowo-kwadratowy

Po weryfikacji modelu, równania zostały zlinearyzowane. Przyjęto kilka punktów równowagi: 12mm, 14mm, 16mm i 18mm, aby móc przełączać otrzymany później regulator podczas pracy układu i stabilizować go w różnych punktach pracy.

#### 3.1 Linearyzacja

Linearyzacji modelu nieliniowego dokonuje się w otoczeniu punktu równowagi, zastępując nieliniowe równania stanu

$$\dot{x} = f(x) \quad (9)$$

liniowymi równaniami, które można przedstawić w postaci macierzowej

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (10)$$

Aby otrzymać macierz stanu A, należy wyznaczyć macierz Jacobiego pierwszych pochodnych

$$J = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \quad (11)$$

a następnie obliczyć jej wartości dla poszczególnych punktów stacjonarnych  $x^*$

$$A = J(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) \quad (12)$$

Dla równań magnetycznej lewitacji (1) zlinearyzowana macierz ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2 \cdot 10^{-3} a g x_3^2}{(a x_1 + b)^3} & 0 & \frac{-2 \cdot 10^{-3} g x_3}{(a x_1 + b)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

W punkcie równowagi  $x_{014} = \begin{bmatrix} 0,014 \\ 0 \\ 0,024 \end{bmatrix}$  macierz stanu i wektor sterowań przyjmują wartości

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,0897 & 0 & -0,9139 \\ 0 & 0 & -41,6667 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10,8625 \end{bmatrix}$$

#### 3.2 Synteza regulatora LQ

Regulator liniowo-kwadratowy dla nieskończonego horyzontu czasowego to liniowy regulator od całego stanu, który sterowaniem

$$u = -Kx \quad (13)$$

Sprowadza zlinearyzowany układ do zerowego punktu równowagi. Minimalizuje przy tym funkcję celu

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt \quad (14)$$

Macierz  $K$  jest dana wzorem

$$K = R^{-1}B^T P \quad (15)$$

gdzie  $P$  to rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (16)$$

Dla macierzy wag

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Macierz regulatora optymalnego LQ została obliczona jako:

$$K = \begin{bmatrix} -2,4362 \\ -4,7518 \\ 0,2278 \end{bmatrix}$$

Powstały układ zamknięty charakteryzuje się wartościami własnymi

$$E = eig(A - BK) \quad \begin{bmatrix} -43,058 \\ -0,5413 + 0,4204i \\ -0,5413 - 0,4204i \end{bmatrix}$$

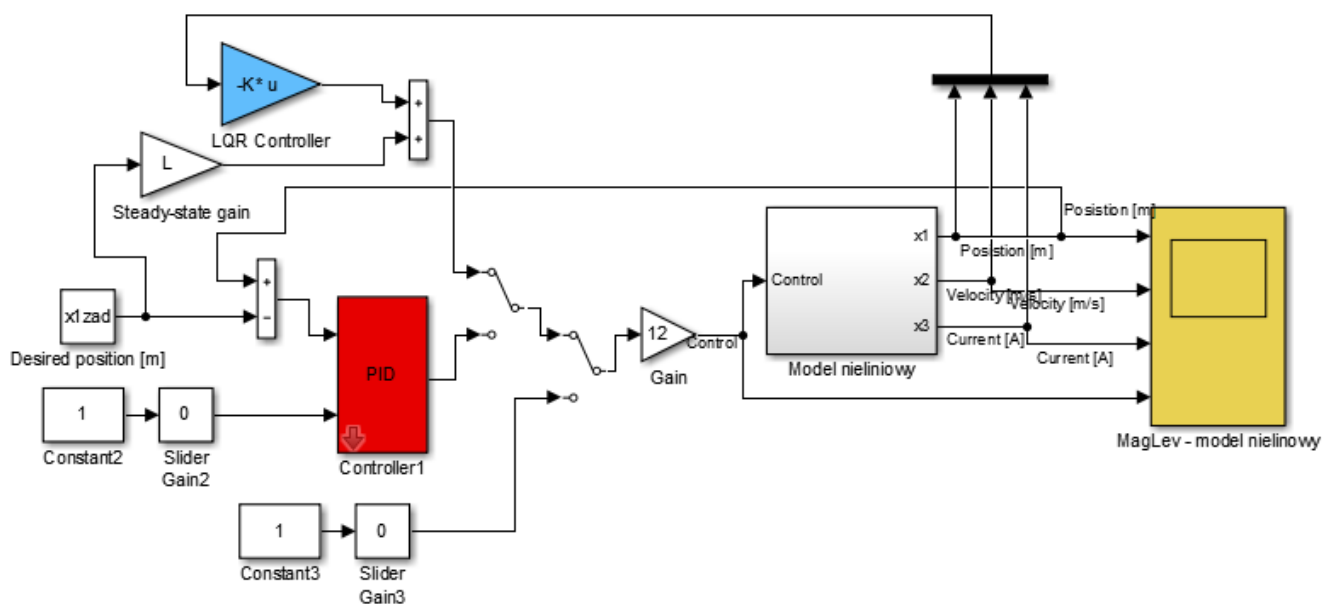
Jak wspomniano na początku rozdziału, chcemy stabilizować układ w niezerowych punktach równowagi, gdzie sterowanie ma pewną ustaloną, niezerową wartość. W tym celu używamy prawa sterowania zaczerpniętego z pracy [2]

$$u = -K_x x - K_r r \quad (17)$$

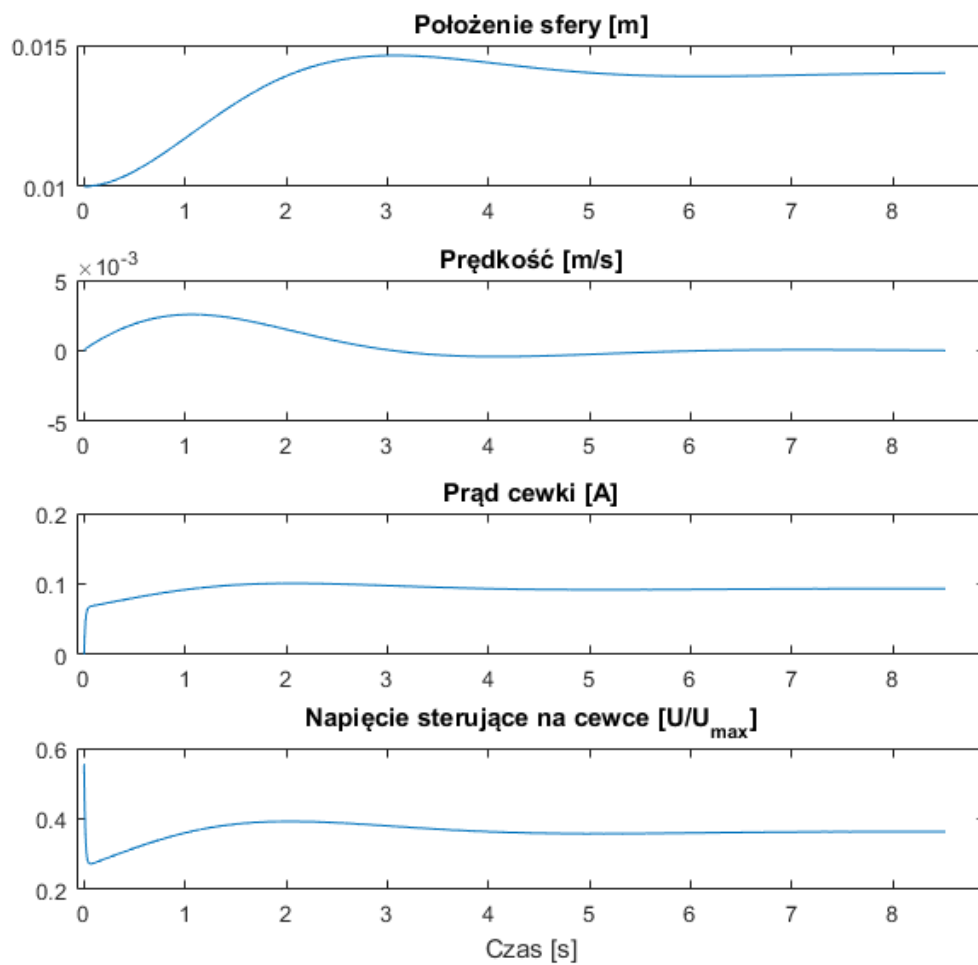
gdzie  $r$  jest wartością zadaną, a  $K_r$  macierzą wag sprzężenia w przód (feed-forward) od wartości zadanej. Wartość macierzy  $K_r$  wyznacza się rozwiązując zmodyfikowane równanie Riccatiego [2].

$$\text{Stabilizacja modelu z regulatorem LQR dla linearyzacji w punkcie równowagi } x_{014} = \begin{bmatrix} 0,014 \\ 0 \\ 0,024 \end{bmatrix}$$

została przedstawiona na wykresie 11.



Rysunek 10: Model nieliniowy z regulatorem LQ dostosowanym do stabilizacji w niezerowych punktach równowagi



Rysunek 11: Stabilizacja modelu nieliniowego MagLev regulatorem LQ dla modelu zlinearyzowanego wokół stanu ustalonego 14 mm

## 4 Wnioski

Podczas zajęć przygotowaliśmy model matematyczny stanowiska lewitacji magnetycznej, wykonaliśmy identyfikację parametrów modelu oraz zaprojektowaliśmy ciągły regulator LQ z niezerową wartością zadaną dla zlinearyzowanego modelu.

Otrzymany model nie jest dobrze zbieżny z rzeczywistym obiektem. Spowodowało to oczywiste trudności przy linearyzacji i projektowaniu regulatora liniowo-kwadratowego. Regulator stabilizujący model okazał się nie zapewniać stabilności obiektu w laboratorium.

Do sukcesów możemy zaliczyć sprawną współpracę dzięki systemowi kontroli wersji Git. Jego użycie praktycznie wyeliminowało obawy o aktualność używanych plików, danych i modeli w obrębie wszystkich używanych komputerów.

Jako przyczyny niewystarczającego dostrojenia modelu możemy podać małą ilość czasu w laboratorium - pierwsze kilka spotkań poświęciliśmy na obsługę niedawno zmodernizowanego stanowiska, później z kolei współdzieliliśmy stanowisko ze studentami, którzy również chcieli przetestować swoje metody regulacji na rzeczywistym obiekcie.

## Literatura

- [1] Piotr Bania. Model i sterowanie magnetyczną lewitacją. Praca magisterska, 1999.
- [2] Groves et al. Reference Command Tracking for a Linearized Model of an Air-breathing Hypersonic Vehicle.
- [3] Piotr Bania. Stabilizujące sprzężenie zwrotne dla systemu magnetycznej lewitacji. *Automatyka, Tom 4, Zeszyt 2, s. 117-139*, 2000.
- [4] Adam Piłat. Sterowanie układami magnetycznej lewitacji. Praca doktorska, 2002.