BPSK + AWGN 信道

AWGN 信道模型与调制

AWGN 信道模型：$y(t) = x(t) + w(t)$。其中：

1) $w(t)$ 是高斯白噪声。$\{w(t)\}$ 是 “白” 随机过程，即噪声的功率谱恒定为一个常数值，记为 $\frac{N_0}{2}$。$\{w(t)\}$ 也是一个高斯过程。
2) $x(t)$ 是调制后发送的信号波形。
3) $y(t)$ 是接收到的波形。

利用正交基 $\{\phi_j(t), 1 \le j \le L\}$ 可以将信号波形用向量的形式表示，关系如下：

$$x(t) = \sum_{j=1}^{L} x_j \phi_j(t) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_L). \tag{1}$$

因此上述的 AWGN 信道模型可以等效于：

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w}, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{x}$ 就是 L 维空间 $\mathbb{R}^L$ 上一个信号星座 $\mathcal{M} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_M\}$ 上的一个信号点 $\mathbf{x}_m$；噪声向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_L)$ 独立同分布且服从 $\mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$。(方便起见，常常把信号星座标记为 $\mathcal{M} \triangleq \{1, 2, \ldots, M\}$。)
根据 Parseval 定理，信号 $\mathbf{x}$ 的能量是

$$E_{\mathbf{x}} = \sum_j x_j^2. \tag{3}$$

该信号星座的平均能量是

$$E_s = \sum_{\mathbf{x}_m} p(\mathbf{x}_m) E_{\mathbf{x}_m} = \sum_{\mathbf{x}_m} p(\mathbf{x}_m) \sum_{j=1}^{L} x_{m,j}^2. \tag{4}$$

该信号星座的调制速率记为 $R = \log_2 M$ bits/symbol。该信号星座的平均比特能量记为 $E_b = E_s/R$。一般地，假设信号星座上的信号点是等概分布的。

下面我们考查广义的信号调制方案。

- **若 $\mathcal{M} = \{-1, +1\}$，则此模型就是 BPSK+AWGN 模型**。
- 若 $\mathcal{M} = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\}$，则此模型就是 QPSK+AWGN 模型。
- 若 $\mathcal{M}$ 是 $(7,4,3)$ Hamming 码经过 BPSK 调制后的集合，则此模型就是 HammingCode+BPSK+AWGN 模型。
- 若 $\mathcal{M}$ 是 $(1,2,2)$ 卷积码经过 BPSK 调制后的集合，则此模型就是 CovolutionalCode+BPSK+AWGN 模型。

检测问题

假设发送的信号 $\mathbf{x}$，通过信道后，接收机接收到向量 $\mathbf{y}$。问：

1) 发送的是第 m $(m \in \mathcal{M})$ 个信号点 $\mathbf{x}_m$ 的概率有多大？
2) 接收机将 $\mathbf{y}$ 判为哪个信号点的错误概率最小？错误概率是多少？

分析如下：
需要考查后验概率 $p(\mathbf{x}_m|\mathbf{y})$。错误概率最小的判别原则是寻找如下的 $\hat{\mathbf{x}}$

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\max_{\mathbf{x}_m} p(\mathbf{x}_m|\mathbf{y}), \tag{5}$$

这也就是**最大后验概率检测原则**。如果信号点是等概分布的，即 $p(\mathbf{x}_m) = \frac{1}{M}$，则

$$p(\mathbf{x}_m|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x}_m)p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)}{Mp(\mathbf{y})}. \tag{6}$$

因此，最大后验概率原则就等价于如下**最大似然原则**

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\max_{\mathbf{x}_m} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m). \tag{7}$$

考查信道的特征知道

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) = (\pi N_0)^{-\frac{L}{2}} \exp -\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_m\|^2}{N_0}. \tag{8}$$

从而，最大似然原则等价于如下**最小欧式距离原则**

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}_m} \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_m\|. \tag{9}$$

假设有一个最大似然检测器 Φ，每个信号点都有一个检测区间

$$D_m = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^L : p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) > p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{m'}) \text{ for any } m' \in \mathcal{M} \text{ and } m' \neq m\}, \tag{10}$$

而且这些检测区间覆盖了整个空间 $\mathbb{R}^L$。当发送信号 $\mathbf{x}_m$ 时，该检测的错误概率是

$$P_{e|m} = \int_{\mathbf{y}\notin D_m} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m). \tag{11}$$

考察 $P_{e|m}$：

$$P_{e|m} = \sum_{m'\in\mathcal{M}, m'\neq m} \int_{\mathbf{y}\in D_{m'}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m). \tag{12}$$

利用该信号星座进行调制，并通过最大似然原则进行检测的平均错误概率是

$$P_e = \sum_{\mathbf{x}_m} p(\mathbf{x}_m) P_{e|m}, \tag{13}$$

此错误概率 P_e 也就是**误符号率** (SER)，有时也称为**误码率**。通常我们在信号星座 $\mathcal{M}$ 和比特串间建立一个关系，即比特映射 (bit-mapping)，它把星座上的每个信号点映射为一个长度为 $\log M$ 的比特串。当一个符号错了，可能其中的一些比特仍然是对的。此时，考查的是**误比特率** (BER)，它是编码调制技术中另一个关心的错误概率。不同的比特映射关系可能导致不同的 BER，常见的比特映射有 Gray mapping 等。

仿真问题

利用 Monte-Carlo 仿真统计检测的误符号率和误比特率。

1) 取大整数 N。
2) 按照均匀分布，产生信号序列，记为 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N)$，其中 s_i 为 L 维空间 $\mathbb{R}^L$ 上信号星座 $\mathcal{M}$ 上的某个信号点 $\mathbf{x}_m$。
3) 产生噪声序列 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N)$，$z_i$ 是一个 L 维的高斯噪声序列 $z_i = \mathbf{w}$。
4) 收到序列 $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)$，$r_i$ 是一个 L 维向量。

5) 利用最大似然检测原则判断发送的符号序列为 $\hat{\mathbf{s}} = (\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_N)$，它满足：

$$\hat{s}_i = \arg\max_{\mathbf{x}} p(r_i|\mathbf{x}). \tag{14}$$

- 若 $\hat{s}_i = s_i$，则该符号检测正确。
- 若 $\hat{s}_i \neq s_i$，则该符号检测出错；统计该符号中出现错误的比特数。

仿真作业：

考查 BPSK 调制星座下的 AWGN 信道的误比特率和误符号率的性能曲线。

1）画出 BPSK 调制方式下 BER vs. E_b/N_0 的曲线。

2）画出 BPSK 调制方式下 SER vs. E_s/N_0 的曲线。

作业的目的和要求是：

1）掌握编码调制的基本研究手段；

2）学会随机数程序的使用；

3）学会模块化程序；

4）学会 Monte-Carlo 仿真；

注意事项

- 不能互相 Copy 程序。
- 交作业的时候必须附有实现流程图。
- 做出算法流程图，根据流程图实现算法，培养良好的程序修养。
- Deadline: Nov 8, 2015.