4. Вероятность найти частицу в интервале от x до x+dx

Классическая вероятность $w_{кл}(x)dx := \frac{dt}{T}$ найти частицу в области [x, x+dx] определяется как отношение времени пребывания dt в окрестности данного отрезка к периоду движения.

Если $T \equiv \frac{2\pi}{w_0}$ то $w_{кл}(x)dx := \frac{w_0 \cdot dx}{2\pi \cdot \delta}$ Можно выразить скорость частицы δ как функцию x:

$x := a \cdot \sin\left(w_0 \cdot t\right)$, $a := \sqrt{\frac{2 \cdot E}{\mu \cdot \left(w_0\right)^2}}$ - амплитуда колебаний. В результате имеем:

$\delta \equiv a \cdot w_0 \cdot \cos\left(w_0 \cdot t\right)$ => $\delta \equiv a \cdot w_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Поэтому $w_{кл}(x)dx := \frac{dx}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$ Следовательно $w_{кл}(x) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$

Мы нашли плотность вероятности обнаружить частицу на интервале от x до x+dx.
Найдем саму вероятность, проинтегрировав выражение $dW_n = w_{кл}(x)dx$:

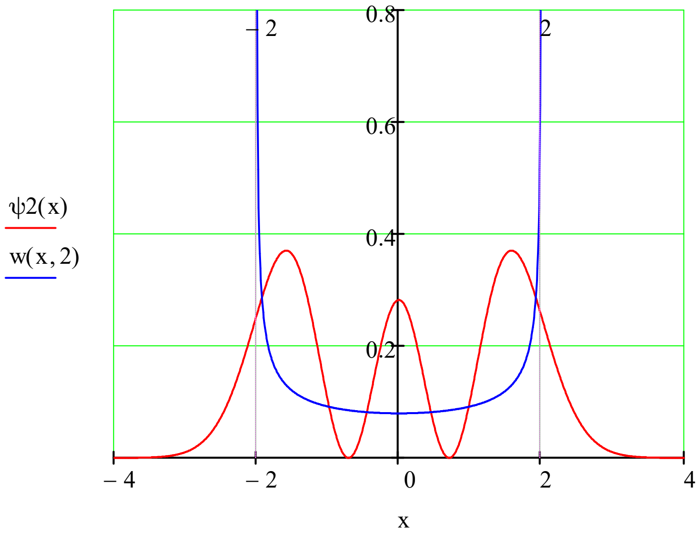
$$\int 1 \, dW_n \equiv \int w_{кл}(x) \, dx \quad -> \quad W_n \equiv \int \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dx \quad = \quad \{u = x/a, dx = adu\} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \equiv \frac{\arcsin(u)}{2 \cdot \pi} \quad = \quad \frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2 \cdot \pi} + C$$

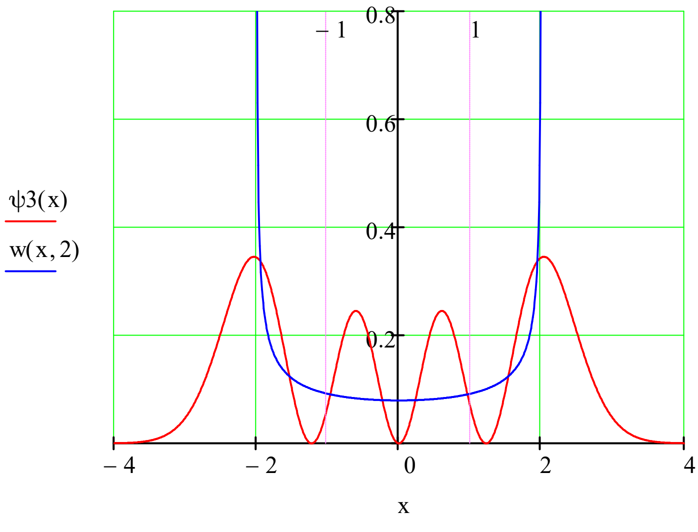
Если считать что a = 1 то

$$W_n \equiv \frac{\arcsin(x)}{2 \cdot \pi}$$

$$\psi2(x) := \left[\left|1\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot\left(4\cdot x^2-2\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{8\cdot\sqrt{\pi}}}\right|\right]^2$$ при n=2



$$\psi3(x) := \left[\left|e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot\left(8\cdot x^3-12\cdot x\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{48\cdot\sqrt{\pi}}}\right|\right]^2$$ при n=3



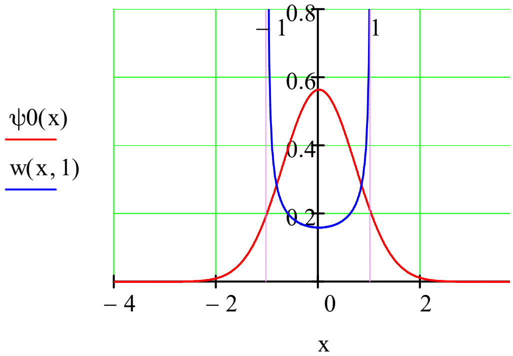
5. Графики плотности вероятности

Функция плотности вероятности для классического осцилятора нам известна. Найдем теперь функцию плотности вероятности для квантового осцилятора как квадрат модуля волновой функции: $|\psi_n(x)|^2$

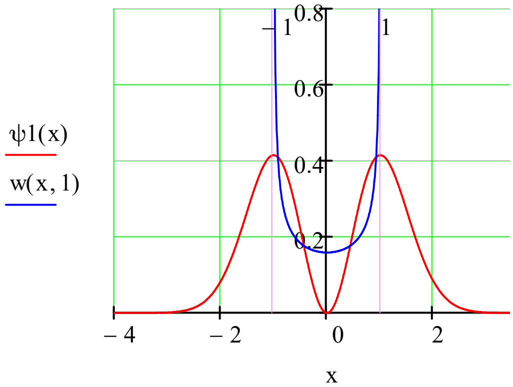
$(x_0 = 1)$

$$w(x,a) \equiv \frac{1}{2\cdot\pi\cdot a\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

$$\psi0(x) \equiv \left(\left|1\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\right|\right)^2$$ при n = 0

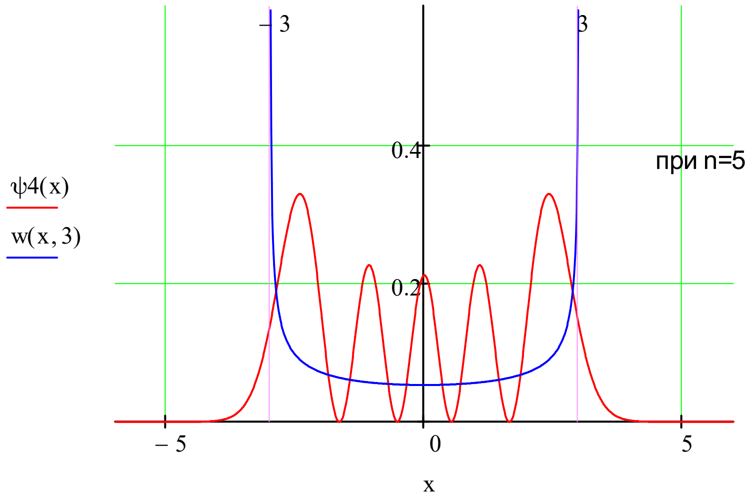


$$\psi1(x) \equiv \left(\left|1\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot 2\cdot x\cdot\sqrt{\frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi}}}\right|\right)^2$$ при n = 1



при n = 4

$$\psi 4(x) := \left[\left| e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \left(16 \cdot x^4 - 48 \cdot x^2 + 12\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{4! \cdot 2^4 \cdot \sqrt{\pi}}} \right|\right]^2$$



при n=5

$$\psi 5(x) := \left[\left| e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \left(32 \cdot x^5 - 160 \cdot x^3 + 15 \cdot 8 \cdot x\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{5! \cdot 2^5 \cdot \sqrt{\pi}}} \right|\right]^2$$