1. Записать общий вид волновых функций одномерного квантового осцилятора

$$\psi(n,\xi) := A_n \cdot e^{\frac{-\xi^2}{2}} \cdot H(n,\xi)$$ - волновая функция, отвечающая n-ому возбужденному уровню

энергии, где $H(n,\xi,d) := (-1)^n \cdot e^{\xi^2} \cdot d^n \cdot \frac{e^{-\xi^2}}{d \cdot \xi^n}$ - полином Эрмита-Чебышева n-ой степени,

а A_n - нормировочный множитель

2. Вычислить нормировочный множитель для полиномов Эрмита-Чебышева и для волновой функции в «x» представлении.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi,n) \times \psi'(\xi,n)\, d\xi \equiv 1$$ - условие нормировки

С применением выражений для волновой функции и полинома Эрмита-Чебышева из пункта 1 нормировочный интеграл приобретает следующий вид

$$\left(A_n\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot \left(H_n\right)^2(\xi)\, d\xi \equiv (-1)^n \cdot \left(A_n\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot H_n(\xi) \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} \xi^{-\xi^2}\, d\xi \cdot (2.1)$$

Интеграл 2.1 равен 1. Выполняя интегрирование по частям n раз приходим к выражению

$$\left(A_n\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} H(n,\xi)\, d\xi \cdot (2.2)$$

Производная n-ого порядка от полинома Эрмита-Чебышева равна $\frac{d^n}{d\xi^n} H(n,\xi) \equiv 2^n n!$

Поэтому интеграл 2.2 принимает вид $\left(A_n\right)^2 \cdot 2^n \cdot n! \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi$

Рассмотрим отдельно интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi$ Запишем его в разных обозначениях

$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$

Тогда $J_0^2 = J_1 * J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy \cdot (2.3)$

В полярных координатах (ρ, φ) интеграл 2.3 принимает вид

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\rho^{2}}\cdot\rho\, d\varphi\, d\rho \equiv \pi\cdot\int_{0}^{\infty} e^{-\rho^{2}}\, d\left(\rho^{2}\right) = -\pi\cdot\frac{1}{e^{\infty^{2}}} - (-\pi)\cdot e^{-0^{2}} = \blacksquare\cdot\pi$$

В итоге для интеграла 2.2 получаем $\left(A_n\right)^{2}\cdot 2^{n}\cdot n!\cdot\sqrt{\pi} = \blacksquare\cdot 1$ Отсюда $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{2^{n}\cdot n!\cdot\sqrt{\pi}}}$

A_n в "x" представлении где $x = x_0 * \xi$: $\overline{A_n} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{x_0\, 2^{n}\cdot n!\cdot\sqrt{\pi}}}$