Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ et $b \in \mathbb{R}^n$, de composantes $(b_1, \dots, b_n)$. On cherche $x \in \mathbb{R}^n$, de composantes $(x_1, \dots, x_n)$, solution de

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = b_1, \\ x_{i-1} + 4x_i + x_{i+1} = b_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ x_{n-1} + 4x_n = b_n. \end{cases}$$

1. On a montré à la question 1)b) que $Ker(A) = 0$ avec A la matrice carrée définie à la question 2). Ainsi la matrice A est inversible et la solution du système est $x = A^{-1}b$.
2. On suppose, dans cette question uniquement, que $b = 0$.
   (a) Pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, on a :
   $4|x_i| \leqslant |x_{i-1}| + |x_{i+1}| \leqslant 2\|x\|_\infty$, avec $4|x_1| \leqslant |x_2| \leqslant \|x\|_\infty$ et $4|x_n| \leqslant |x_2| \leqslant \|x\|_\infty$, d'où le résultat.
   (b) Ainsi on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|x_i| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_\infty$. Or si $\|x\|_\infty \neq 0$, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \neq 0$ ce qui contredit l'inégalité précédente.
3. Afin de résoudre le système, on considère la méthode itérative suivante : $x^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^n$ et

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha x_1^{(k)} + \frac{\alpha-1}{4}(x_2^{(k)} - b_1), \\ x_i^{(k+1)} = \alpha x_i^{(k)} + \frac{\alpha-1}{4}(x_{i-1}^{(k)} + x_{i+1}^{(k)} - b_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ x_n^{(k+1)} = \alpha x_n^{(k)} + \frac{\alpha-1}{4}(x_{n-1}^{(k)} - b_n). \end{cases}$$

   avec pour paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, on a :

$$|x_i^{(k+1)} - x_i| = |\alpha x_i^{(k)} + \frac{(\alpha-1)}{4}(x_2^{(k)} - b_1) - x_1| \leqslant |\alpha(x_1^{(k)} - x_1) + \alpha x_1 - x_1 + (\frac{\alpha-1}{4})(b_i - x_{i+1} - x_{i-1})|$$

$$\leqslant |\alpha(x_1^{(k)} - x_1) + (\frac{\alpha-1}{4})(b_i - x_{i+1} - x_{i-1}) + (\frac{\alpha-1}{4})(x_{i+1}^{(k)} - x_{i+1} + x_{i+1}^{(k)} - x_{i-1})|$$

$$\leqslant |\alpha| \times \|x^{(k)} - x\|_\infty + |\frac{\alpha-1}{4}| \times 2 \times \|x^{(k)} - x\|_\infty \leqslant \big(|\alpha| + |\frac{\alpha-1}{2}|\big)\|x^{(k)} - x\|_\infty.$$

   Pour $j = 2$ et $j = n$ on a la majoration suivante :

$$|x_j^{(k+1)} - x_j| \leqslant (|\alpha| + |\frac{\alpha-1}{4}|)\, \|x^{(k)} - x\|_\infty.$$

   Le passage à la borne supérieure à gauche de l'inégalité achève la preuve.
   (b) La condition $|\alpha| > 1$ n'est pas compatible avec l'inégalité $|\alpha| + \frac{|\alpha-1|}{2} < 1$ on cherche l'intervalle $]\alpha_{min}; \alpha_{max}[$ dans l'intervalle $]-1; 1[$. Or pour $\alpha \in [0; 1]$ on a : $|\alpha| + \frac{|\alpha-1|}{2} < 1 \iff \alpha < 1$ et pour $\alpha \in]-1; 0[$ on a : $-\alpha + \frac{1-\alpha}{2} < 1 \iff -3\alpha < 1 \iff \alpha > -\frac{1}{3}$.
   Ainsi l'intervalle cherché est $]-\frac{1}{3}; 1[$.
   (c) Pour $\alpha \in]\frac{1}{3}, 1[$, on a par récurrence pour tout $k \geqslant 1$:

$$\|x^{(k)} - x\|_\infty \leqslant \big(|\alpha| + |\frac{\alpha-1}{4}|\big)^k \, \|x^{(0)} - x\|_\infty,$$

   et la convergence vers 0 est assurée par la condition sur α.
   (d) Le minimum de la quantité $|\alpha| + \frac{|\alpha-1|}{2}$ est le minimum sous la contrainte $|\alpha| + \frac{|\alpha-1|}{2} < 1$. Ce minimum vaut $\frac{1}{2}$ et est atteint en $\alpha_0 = 0$. En effet il suffit de minimiser $\frac{\alpha+1}{2}$ sur $]0; 1[$ et $\frac{-3\alpha+1}{2}$ sur $]-\frac{1}{3}; 1[$. On reconnait pour $\alpha_0 = 0$ la méthode de Jacobi.

Exercice 2