Integração Simbólica de Funções Racionais

Ricardo Kaê - DRE : 116 039 521

Instituto de Computação - UFRJ.

2024

- Algoritmo de Hermite
- Algoritmod de *Czichowski*

Introdução. Integração de funções racionais - problema.

Problema. Seja $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ uma função racional em $\mathbb{K}[x]$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo genérico. O problema de integração de funções racionais consiste:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = g(x)$$

em obter a primitiva $g(x) \in \mathbb{K}[x]$ da função f, de modo que:

$$g'(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = f(x)$$

Integração de funções racionais - Técnicas de solução.

No geral, a solução do **problema** de integração indefinida de funções é bem conhecida, de modo que nos cursos iniciais de Cálculo, sabem-se várias técnicas comuns para se aplicar, dependendo do caso do integrando $\int f(x)\, dx$, como por exemplo:

- Substituição Simples, Substituição Trigonométrica
- Integração por Partes, Integração por Frações parciais, etc

O procedimento de solução, segundo **frações parciais**, aplicado quando o integrando é uma função racional, é o que possui o caracter mais algorítmico, por assim dizer, quando comparado com os outros métodos. De forma que, historicamente, nem **Newton** e nem **Leibniz** conseguiram deduzi-lo por completo. Somente com **Johan Bernoulli**, no seculo *XVIII*, que um método pode ser completamente descrito, resultando no *algoritmo* de integração mais antigo que se tem história.

Introdução. Método de Frações parciais.

Em linhas gerais, o método de **frações parciais** consiste em decompor uma função racional $f = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ como uma soma de funções racionais mais simples e integrar essas frações mais simples, individualmente.

Em passos, o método consiste das seguintes etapas:

1. Fatora-se completamente em $\mathbb{R}$, o denominador $D(x)$ de $f(x)$ em polinômios irredutíveis.
2. Obtêm-se as expressões para as **frações parciais**, com coeficientes do numerador a determinar, segundo um sistema linear.
3. Iguala-se a expressão de f com as frações parciais.
4. Coloca-se as **frações parciais** sob o mesmo denominador $D(x)$ de f, de maneira a se obter tal sistema.
5. Resolve-se o sistema linear para obter os coeficientes das frações parciais.
6. Integram-se as frações parciais, cujas primitivas se conhecem.

Introdução. Frações Parciais (exemplo).

Para ilustrar o método, considere como exemplo dos passos (1), (2), (3), (4) e (5) na seguinte função racional,

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2+2}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}$$

1. A fatoração completa de $D(x) = x^4+4x^3+5x^2+4x+4$ sob os reais $\mathbb{R}[x]$ fica dada por:

$$x^4+4x^3+5x^2+4x+4 = (x^2+1)(x+2)^2$$

2. A forma das frações parciais, fica dada, portanto por:

$$\frac{(Ax+B)}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

3. Iguala-se a expressão de f com as frações parciais.

$$\frac{x^2+2}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4} = \frac{(Ax+B)}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

Introdução. Frações Parciais (exemplo).

4. Coloca-se o somatório de **frações parciais** sob o mesmo denominador $D(x)$ de f, de maneira a se obter um sistema linear para os coeficientes: $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x^2+2}{D(x)} = \frac{(Ax+B)(x+2)^2 + C(x+2)(x^2+1) + D(x^2+1)}{D(x)}$$

$$A + C = 0 \qquad 4A + B + 2C + D = 1$$

$$4A + 4B + C = 0 \qquad 4B + 2C + D = 2$$

5. Resolve-se o sistema linear, para obter os coeficientes

$$A = C = \frac{4}{25} \qquad B = \frac{3}{25} \qquad D = \frac{6}{25}$$

6. Calcula-se a integral de f a partir da integral das frações parciais f, que possuem primitivas conhecidas

$$\int f(x)\,dx = \int (\frac{1}{25})\frac{(4x+3)}{x^2+1}\,dx + \int (\frac{4}{25})\frac{1}{x+2}\,dx + \int (\frac{6}{5})\frac{1}{(x+2)^2}$$

Bernoulli. Integração das Frações parciais.

- O método exemplificado nos quadros anteriores foi descrito por **Johan Bernoulli** no século *XVIII* e é usado até os dias de hoje, nos cursos de Cálculo, como mencionado.
- Analisando-se formalmente o método de **Bernoulli**, pode-se obter fórmulas para as primitivas das integrais das **frações parciais**, de forma que esse método de fato resolve o **problema** introduzido e pode ser implementado no computador. [1]

Formalmente, se $f(x) = N(x)/D(x) \in \mathbb{R}(x)$, em que $N, D \in \mathbb{R}[x]$ e $D \neq 0$. Então, pode-se escrever a seguinte integral,

$$\int f \ dx = \int Q \ dx + \int \frac{R}{D} \ dx$$

onde $N = DQ + R$, em que $R = 0$ ou $grau(R) < grau(D)$.

[1] Contudo, a eficiência desse método é baixa, pois requer que o polinômio do denominador seja completamente fatorado - algo que custa caro, computacionalmente.

Bernoulli. Integração das Frações Parciais.

- Como Q é um polinômio, é facil integrá-lo. Portanto, para obter a integral de f basta integrar R/D quando R tem grau menor que D.
- Segundo **Bernoulli**, esse procedimento inicia-se calculando **(1)** a fatoração completa de D sob $\mathbb{R}$, corpo dos reais.
- Como o corpo sob o qual ocorre a fatoração são os reais $\mathbb{R}$, então os fatores de D só podem ser polinômios de grau um ou dois, já que essas são as únicas possibilidades de polinômios irredutíveis em $\mathbb{R}$. Assim, a fatoração completa de D assume a seguinte forma geral:

$$D = c\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{e_i} \times \prod_{j=1}^{m}(x^2+b_jx+c_j)^{f_j}$$

  Isto é, como um produto de polinômios de grau um e dois, com suas respectivas multiplicidades $e_i,\ f_j \in \mathbb{Z}$ positivas, cada e $a_j'^{s'}, b_j'^{s}, c_j's \in \mathbb{R}$ constantes reais.

Na sequência do método de **Bernoulli**, computa-se **(2)** a decomposição em frações parciais de R segundo a fatoração de D. Assim,

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{e_i} \frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{f_j} \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{(x^2 + b_j x + c_j)^k}$$

onde $A_{ik}^{'s}, B_{jk}^{'s}, C_{jk}^{'s} \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$\int R = \int \frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} + \int \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{(x^2 + b_j x + c_j)^k}$$

para integrar R basta conhecer as integrais das parcelas acima.

Bernoulli. Método recursivo.

Para ambas integrais acima, pode-se mostrar que as seguintes fórmulas recursivas calculam suas primitivas. [2]

$$\int \frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} = \begin{cases} A_{i1}\ log(x-a_i) & \text{se } k=1 \\ \\ A_{ik}\ \dfrac{(x-a_i)^{1-k}}{1-k} & \text{se } k>1 \end{cases}$$

Para a parcela de grau 2 com multiplicidade $k=1$,

$$\int \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2+b_jx+c_j} = \frac{B_{j1}}{2}\ log(x^2+b_jx+c_j) +$$

$$+\ \frac{2C_{j1}-b_jB_{j1}}{\sqrt{4c_j-b_j^2}}\ arctan(\frac{2x+b_j}{\sqrt{4c_j-b_j^2}})$$

[2] A forma mais simples de mostrar isso, seria derivando as mesmas

Bernoulli. Método recursivo.

E para parcela quadrática com multiplicidade $k > 1$,

$$\int \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{(x^2 + b_j x + c_j)^k} = \frac{(2C_{jk} - b_j B_{jk})x + b_j C_{jk} - 2c_j B_{jk}}{(k-1)(4c_j - b_j^2)(x^2 + b_j x + c_j)^{k-1}} +$$

$$+ \int \frac{(2k-3)(2C_{jk} - b_j B_{jk})}{(k-1)(4c_j - b_j^2)(x^2 + b_j x + c_j)^{k-1}}$$

A integral no fim da fórmula acima, sugere que o algoritmo deve ser aplicado de maneira recursiva, até que $k = 1$ (caso base), no qual determina-se o valor dessa primitiva e na sequência, a recursão se encarrega de resolver as integrais pendentes.

Bernoulli. Conclusão e Síntese.

Uma síntese final, quanto ao método de **Frações Parciais** de **Bernoulli**:

- O método resolve o **problema** de integração de funções racionais, como já sabia-se e pode ser implementado no computador, de maneira recursiva, segundo as fórmulas acima e *lookup tables* (tabelas de consultas). [3]
- O método confirma que a integral de uma função racional é dada por duas partes: Uma parte racional (que é **algébrica**) e outra parte que é uma soma de logarítmos e arcos tangentes (também chamada de **transcendental**).
- A eficiência computacional do método é baixa, visto que ela necessita da fatoração completa do polinômio do denominador de f, que é algo que custa caro.

[3] Pela pesquisa feita para esse trabalho, achou-se alguns sistemas de computação algébrica que ainda adotam essa técnica para calcular simbolicamente integrais, assemelhando-se a maneira manual de efetuar tais cálculos.

Outros métodos de Integração de Funções Racionais.

Além do algoritmo de **Bernoulli**, há outros métodos mais eficientes de integração simbólica de funções racionais, como:

- Hermite
- Horowitz-Ostrogradsky (alternativa ao algoritmo de Hermite)
- Rothstein-Trager
- Lazard-Rioboo-Trager (efetua cálculos sob extensão do corpo de base)
- Czichowski (aplica bases de Grobner)

No geral, esses métodos operam apenas obtendo uma parte da integral da função racional, cada um. O algoritmo de Hermite por exemplo, calcula a primitiva da parte algébrica da integral da função racional f. Enquanto que os três últimos da lista acima são algoritmos para determinar a parte transcendental da mesma integral.

Dessa forma, eles atuam em pares (segundo em cadeia) e são mais eficientes que o algoritmo de **Bernoulli**, que funciona como fundamentos para os mesmos.

Hermite e Czichowski.

O par de procedimentos escolhido, nesse trabalho, para calcular simbolicamente integrais foi o algoritmo de Hermite e o algoritmo de Czichowski.

Procedimento de Hermite. Operando sob $\mathbb{Q}$, o algoritmo obtêm a parte racional da integral de f e o integrando da parte transcendente.

- Entrada: Uma função racional $f = \dfrac{N}{D}$
- Saída: Uma lista [R, N, D] onde:
  1. R: A primitiva racional (ou algébrica) da integral de f
  2. $\dfrac{N}{D}$: A função racional cuja integral resulta numa primitiva transcendental (i.e, dada como uma soma de logarítmos), onde $grau(N) < grau(D)$ e D é livre de quadrados.
- Complexidade: Quadrática - $O(m^2)$, com m sendo a multiplicidade máxima da fatoração livre de quadrados de D.

Hermite e Czichowski.

Procedimento de Czichowski. Operando sob $\mathbb{C}$, o algoritmo calcula as bases de *Grobner* para um ideal especifico de uma função racional $f = \frac{N}{D}$ em que $grau(N) < grau(D)$ e D é livre de quadrados e obtêm os coeficientes complexos que permitem escrever a primitiva da integral transcendental.

- Entrada: Uma função racional $f = \frac{N}{D}$ em que $grau(N) < grau(D)$ e D é livre de quadrados.
- Saída: Uma lista L de pares $(c_j,\ v_j) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}[x]$, tais que

$$\int \frac{N}{D} = \sum_{i=1}^{s} c_i \ log(v_i)$$

- Complexidade: Laço linear com procedimento de *Buchberger* interno. Logo, a complexidade segue o algoritmo de *Buchberger*.

Hermite e Czichowski - Esquemático para integração.

Assim, pela relação de entrada e saída dos procedimentos de Hermite e Czichowski, têm-se um seguinte esquema em cadeia, para operação de integração racional, como ilustra-se abaixo:

$$f = \frac{N}{D} \longrightarrow hermite \xrightarrow[\int \frac{\bar{N}}{\bar{D}} = \sum_i^m c_i log(v_i)]{\int f = v + \int \frac{\bar{N}}{\bar{D}}} czichowski \longrightarrow (c_i, v_i)$$

Figura: Esquemático para os procedimentos de integração. Saida do procedimento de Hermite é dada como entrada $\int \frac{\bar{N}}{\bar{D}} = \sum c_i \ log(v_i)$ para o procedimento de Czichowski, onde o mesmo encontra os pares (c_i, v_i), que vão na primitiva logarítmica (ou transcendental) da integral racional de saída de Hermite.

Hermite.

- A lógica do algoritmo de Hermite é similar ao de Bernoulli, isto é, a cada passo (iterativo ou recursivo), a meta é reduzir a integral racional sendo operada ao cálculo da primitiva de uma função racional cujo denominador é livre de quadrados.
- A cada passo a integral é reescrita como uma soma de duas parcelas. A primeira é uma função racional e a segunda é a primitiva de uma outra função racional.
- Entretanto, esta nova função da qual ainda precisaremos achar a primitiva terá um denominador cuja multiplidade máxima é menor que a do passo anterior. O processo termina quando a função racional que ainda falta integrar tem denominador livre de quadrados.

Czichowski.

Implementação e Execução - Relatório final.

A implementação dos procedimentos de Integração citados (hermite e czichowski) foram feitos no *Máxima* (arquivo *integracao.mac* - que acompanha essa apresentação), onde:

- Usou-se algumas funções internas da plataforma para implementação dos procedimentos principais e auxiliares, como por exemplo, a função *sqfr* do *Máxima* - que já calcula a fatoração livre de quadrados de um dado polinômio, bem como a *poly_reduced_grobner* para obter as bases reduzidas de Grobner de um conjunto gerador de um ideal.
- Teve-se um bom log de saída, possibilitando a construção de um *notebook* de exercícios.
- Pode-se comparar os resultados com a função *integrate* do *Máxima*.

Referências.

1. Polinômios e Computação Algébrica - Severino Collier Coutinho
2. Symbolic Integration I, Transcendental Functions - Manuel Bronstein
3. Sobre a Integração Indefinida de Funções Racionais Complexas: teoria e implementação de algoritmos racionais - Daniel de Souza Grilo
4. Algorithms for computer algebra (1992) - Keith O. Geddes, Stephen R. Czapor, George Labahn
5. Integração automática de funções racionais - Severino Collier Coutinho