

Kamil Jarkowski, Damian Forma, Paweł Drzyzga

Dokumentacja aplikacji

1. Wprowadzenie

Aplikacja ta jest narzędziem służącym do:

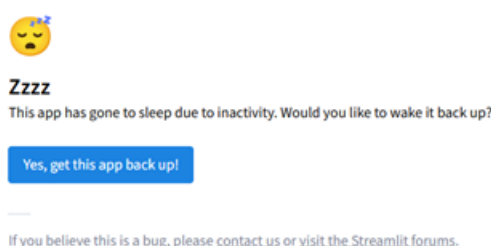
- Obliczania średnicy zbiorów,
- Obliczania odległości między zbiorami,
- (eksperymentalnie) Rysowania kul otwartych, domkniętych, jak i sfer w przestrzeni dwuwymiarowej.

Sama aplikacja została udostępniona przy pomocy oficjalnej strony streamlit pod linkiem <https://kursapp-pg9qzqkjjdkuyezpwiurdn.streamlit.app/>. Cały kod źródłowy aplikacji jest dostępny na platformie GitHub pod adresem https://github.com/Qertal/KursStreamlit/tree/main/projekt_topo.

W całości została ona wykonana w języku Python, głównie przy użyciu biblioteki **Numpy** do obliczeń numerycznych oraz **Streamlit** do stworzenia interfejsu użytkownika. Aplikacja jest prosta w obsłudze, a jej działanie jest intuicyjne. W tej dokumentacji zostaną przedstawione poszczególne sekcje aplikacji oraz ich funkcjonalności.

2. Pierwsze wejście na stronę aplikacji

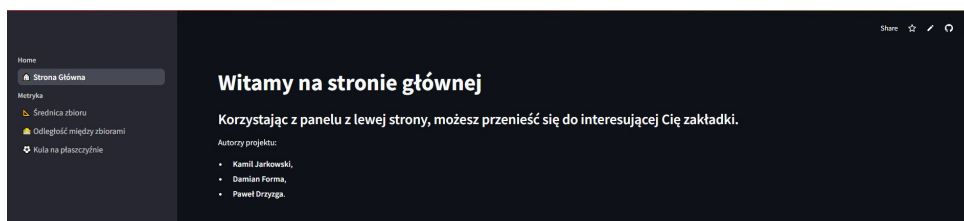
Możliwe, że pierwsze wejście na stronę aplikacji będzie trwało dłużej niż zwykle. Jest to spowodowane tym, że aplikacja jest uruchamiana na serwerze, a nie lokalnie. Dodatkowo, możliwe, że aplikacja będzie w stanie uśpienia (2.1). Wtedy wystarczy kliknąć przycisk z napisem **Yes, get this app back up!**, a aplikacja zostanie uruchomiona ponownie.



Rysunek 2.1. Uśpiona aplikacja

2.1. Strona główna aplikacji

Na stronie głównej aplikacji (2.2) znajdują się wypisani autorzy, a także po lewej stronie mały panel nawigacyjny, który pozwala na przejście do poszczególnych sekcji aplikacji, poprzez kliknięcie w odpowiednią część. Warto zwrócić uwagę, że w każdej chwili można wrócić do strony głównej klikając przycisk **Strona Główna**.



Rysunek 2.2. Strona Główna

Przejdźmy do pierwszej sekcji, a mianowicie do **Średnica zbioru**.

3. Średnica zbioru

Klikając w przycisk **Średnica zbioru** w polu nawigacji, przenosi nas na stronę (3.1), gdzie możemy skorzystać z kalkulatora średnicy zbioru.

Średnica zbioru

Tutaj można obliczyć średnicę zbioru, a dodatkowo można zobaczyć w jaki sposób wygląda macierz odległości (jeśli jej rozmiar nie przekracza 10). Wybierz wymiar przestrzeni w jakiej chcesz się znajdować (n) oraz p odpowiednie dla konkretnej metryki mińkowskiego, jaka Cię interesuje.

1 ☐ Metryka maksimum

2 Wartość p dla metryki mińkowskiego
0,01

3 Wybierz n dla przestrzeni 4 Wybierz liczbę punktów w tej przestrzeni
1 1

5

Rysunek 3.1. Formularz **Średnica zbioru**

Możemy zauważyć, różne sposoby interakcji ze stroną (numerki z listy poniżej są zgodne z numerkami na rysunku):

1. W tym miejscu, możemy wybrać, czy metryka z której chcemy skorzystać, jest to metryka Czebyszewa, z racji na jej utrudnioną w sposobie zapisu symbolikę, została ona odizolowana od reszty, od klasycznego wyboru rodzaju metryki.
2. Jeśli nie zdecydujemy się na wybór metryki Czebyszewa, możemy określić jakie użyjemy p ($p \in \mathbb{R}_+$) dla metryki Minkowskiego, czyli $d(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$. Możliwe jest wybranie wartości $p < 1$, co skutkuje użyciem wzoru $d(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)$. W momencie gdy wybierzemy metrykę Czebyszewa, pole to automatycznie znika.
3. W tym miejscu wybieramy wymiary przestrzeni, w której będziemy pracować. Czyli chodzi konkretnie o n dla przestrzeni \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).
4. Tutaj wybieramy ile punktów będzie w naszej przestrzeni. Wybierając > 10 punktów, na sam koniec, nie zostanie wyświetlona macierz odległości, z racji na jej rozmiar. Warto mieć to na uwadze.
5. Na koniec mamy przycisk **Generuj pola**, który generuje pola, które są potrzebne do wpisania punktów.

Po kliknięciu przycisku **Generuj pola**, zostanie wyświetlona "siatka pól" (3.2), gdzie możemy wpisać współrzędne punktów, które chcemy użyć do obliczenia średnicy zbioru. Warto zauważyć, że pola są automatycznie uzupełnione losowymi liczbami całkowitymi z przedziału $[-15, 15]$, ale można je edytować. Po wprowadzeniu punktów, należy kliknąć przycisk **Oblicz**.

Wybierz n dla przestrzeni

4

Wybierz liczbę punktów w tej przestrzeni

4

Generuj pola

Wprowadź współrzędne dla 4 punktów w przestrzeni \mathbb{R}^4

Punkt 1:

Współrzędna 1

10

Współrzędna 2

10

Współrzędna 3

0

Współrzędna 4

11

Punkt 2:

Współrzędna 1

14

Współrzędna 2

3

Współrzędna 3

0

Współrzędna 4

12

Punkt 3:

Współrzędna 1

0

Współrzędna 2

3

Współrzędna 3

0

Współrzędna 4

5

Punkt 4:

Współrzędna 1

12

Współrzędna 2

14

Współrzędna 3

14

Współrzędna 4

9

Oblicz

Rysunek 3.2. Formularz Średnica zbioru 2

Po kliknięciu przycisku **Oblicz**, pierwsze co zostanie wyświetlone, to macierz odległości między punktami (3.3). Jest to macierz symetryczna, gdzie d_{ij} to odległość między punktem i a punktem j . Następnie zostanie wyświetlona średnica zbioru, czyli maksymalna odległość między punktami.

Macierz odległości:

$$D(X) = \begin{bmatrix} 0.00 & 4.07 & 3.06 & 4.07 & 4.09 & 4.10 & 4.08 & 4.08 & 4.10 \\ 4.07 & 0.00 & 4.05 & 4.08 & 4.09 & 4.10 & 4.08 & 4.10 & 4.07 \\ 3.06 & 4.05 & 0.00 & 4.06 & 4.08 & 4.11 & 4.08 & 4.07 & 4.08 \\ 4.07 & 4.08 & 4.06 & 0.00 & 4.08 & 4.10 & 3.07 & 3.07 & 3.06 \\ 4.09 & 4.09 & 4.08 & 4.08 & 0.00 & 4.11 & 4.10 & 4.06 & 3.07 \\ 4.10 & 4.10 & 4.11 & 4.10 & 4.11 & 0.00 & 4.04 & 4.12 & 4.09 \\ 4.08 & 4.08 & 4.08 & 3.07 & 4.10 & 4.04 & 0.00 & 4.11 & 4.09 \\ 4.08 & 4.10 & 4.07 & 3.07 & 4.06 & 4.12 & 4.11 & 0.00 & 3.07 \\ 4.10 & 4.07 & 4.08 & 3.06 & 3.07 & 4.09 & 4.09 & 3.07 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Średnica zbioru: 4.1225

Rysunek 3.3. Macierz odległości i średnica zbioru

4. Odległość między zbiorami

Teraz z lewego panelu wybieramy przycisk **Odległość między zbiorami**, co przenosi nas do sekcji poświęconej (jak sama nazwa wskazuje) obliczaniu odległości między dwoma zbiorami (4.1).

Rysunek 4.1. Odległość między zbiorami

Tak jak wcześniej, mamy różne sposoby interakcji ze stroną (numerki z listy poniżej są zgodne z numerkami na rysunku):

1. Tak jak wcześniej, możemy wybrać metrykę Czebyszewa, która jest odizolowana od reszty, ze względu na jej utrudnioną w sposobie zapisu symbolikę.
2. W momencie, kiedy nie zdecydujemy się na metrykę Czebyszewa, możemy wybrać wartość p dla metryki Minkowskiego, tak jak wcześniej.
3. W tym miejscu wybieramy wymiary przestrzeni, w której będziemy pracować. Czyli chodzi konkretnie o n dla przestrzeni \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).
4. Tutaj wybieramy ile punktów będzie w pierwszym zbiorze E.
5. Tutaj wybieramy ile punktów będzie w drugim zbiorze F.

Po kliknięciu przycisku **Generuj punkty**, zostaną wygenerowane pola, w które możemy wpisać współrzędne punktów zbiorów E i F (4.2). Warto zauważyć, że pola są automatycznie uzupełnione losowymi liczbami całkowitymi z przedziału $[-15, 15]$, ale można je edytować. Po wprowadzeniu punktów, należy kliknąć przycisk **Oblicz**. Wszystko to jest analogiczne do poprzedniej sekcji, z tą różnicą, że mamy dwa zbiory punktów.

Zbiór E

Wprowadź współrzędne 2 punktów w przestrzeni \mathbb{R}^3

Punkt 1:

x1

0,00 - +

x2

8,00 - +

x3

3,00 - +

Punkt 2:

x1

12,00 - +

x2

3,00 - +

x3

14,00 - +

Zbiór F

Wprowadź współrzędne 2 punktów w przestrzeni \mathbb{R}^3

Punkt 1:

x1

2,00 - +

x2

5,00 - +

x3

6,00 - +

Punkt 2:

x1

8,00 - +

x2

5,00 - +

x3

6,00 - +

Oblicz odległość

Rysunek 4.2. Odległość między zbiorami: pola

Po zdefiniowaniu punktów, klikamy przycisk **Oblicz odległość**, a aplikacja wypisze najpierw punkty dla obu zbiorów, a następnie obliczy odległość między zbiorami (4.3).

Dane punktów zbiorów E i F zostały zapisane.

Punkty zbioru E:

| 0 | 1 | 2 |
|----|---|----|
| 0 | 8 | 3 |
| 12 | 3 | 14 |

Punkty zbioru F:

| 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 6 |
| 8 | 5 | 6 |

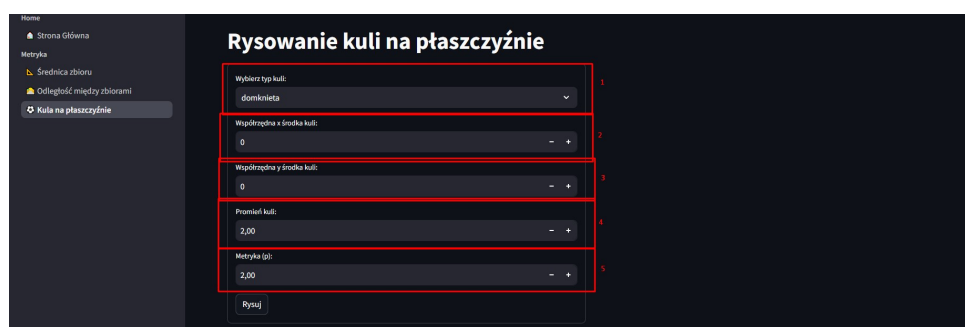
Odległość między zbiorami E i F:

$$d(E, F) = 8.0000$$

Rysunek 4.3. Odległość między zbiorami: wyniki

5. Rysowanie kul i sfer (eksperymentalnie)

W tej sekcji aplikacji możemy rysować kule otwarte, domknięte oraz sfery w przestrzeni dwuwymiarowej. Aby skorzystać z tej funkcji, należy kliknąć przycisk **Kule na płaszczyźnie** (tak, jestem świadomy tego, że sfera nie jest kulą), co przeniesie nas do sekcji (5.1).



Rysunek 5.1. Rysowanie kul i sfer

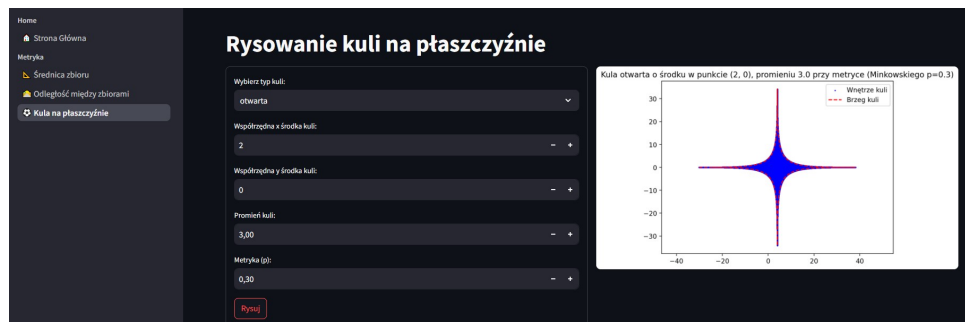
W tej sekcji mamy możliwość wyboru:

1. Wybieramy czy chcemy rysować kulę otwartą, domkniętą czy sferę (choć **Wybierz typ kuli** może być mylące, to tak, da się wybrać sferę).
2. Wybieramy pierwszą współrzędną środka kuli/sfery.
3. Wybieramy drugą współrzędną środka kuli/sfery.
4. Wybieramy promień kuli/sfery.
5. Wybieramy metrykę. Nie ma tutaj niestety do wyboru metryki Czebyszewa. Jednak z punktu widzenia stricte rysowania, możemy wybrać górną granicę p jaka jest narzucona, w tym przypadku jest to $p = 75$. Wartość ta bardzo dobrze przybliża kulę bądź sferę w przestrzeni dwuwymiarowej z metryką Czebyszewa.

Warto wspomnieć, że zostało wprowadzone tutaj trochę limitów, są one skutkiem ograniczeń przy rysowaniu wykresów i generowaniu punktów, zarówno ze strony logicznej jak i technicznej (ograniczenia złożoności obliczeniowej). Głównie chodzi o to że:

1. promień kuli/sfery musi być z przedziału $[1.5, 10]$ (sam promień paradoksalnie nie ma zbyt dużego wpływu na to jak my ten rysunek i tak będziemy widzieć),
2. p dla metryki Minkowskiego musi być z przedziału $[0.2, 75]$

Klikając przycisk **Rysuj**, aplikacja wygeneruje wykres z kulą/sferą w przestrzeni dwuwymiarowej (5.2).



Rysunek 5.2. Rysowanie kul i sfer: wykres

6. Podsumowanie i możliwości rozwoju

Jak widać, aplikacja jest dość prosta w budowie jak i w obsłudze. Spełnia jednak ona swoje zadanie, czyli pozwala na obliczanie średnicy zbiorów, odległości między zbiorami oraz (poza koncertowo) rysowanie kul otwartych, domkniętych i sfer w przestrzeni dwuwymiarowej. W ramach rozwoju aplikacji, można by pomyśleć o obsłudze wyrażeń niewymiernych przy obliczaniu średnicy zbiorów, czy też odległości między zbiorami. Dodatkowo można by dodać możliwość wyboru pomiędzy obliczeniami numerycznymi a symbolicznymi, co pozwoliłoby na uzyskanie dokładniejszych wyników. Może to być przydatne narzędzie dla studentów matematyki, którzy są na początku swojej drogi z topologią.