Metoda Siecznych

Paweł Drzyzga
Wydział Informatyki i Matematyki
Politechnika Krakowska

2 listopada 2025

Spis treści

1 Opis teoretyczny

1.1 Opis teoretyczny metody – Metoda siecznych

1.1.1 Charakterystyka metody

Metoda siecznych, zwana czasem również „metodą cięciw”, to algorytm numeryczny służący do znajdowania miejsc zerowych funkcji jednej zmiennej, czyli rozwiązywania równania

$$f(x) = 0.$$

W literaturze polskojęzycznej metoda najczęściej opisana jest jako algorytm interpolacji liniowej, który nie wymaga znajomości pochodnej funkcji ani nawet założenia różniczkowalności.

1.1.2 Idea działania

Zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła (przynajmniej na małym odcinku), a na przedziale $[a, b]$ przyjmuje wartości o różnych znakach (równoważnie: $f(a)f(b) < 0$). Wówczas istnieje przynajmniej jeden pierwiastek w tym przedziale. Metoda siecznych polega na zastąpieniu krzywej $y = f(x)$ na odcinku przybliżoną prostą (sieczną) przebiegającą przez punkty $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ i $(x_n, f(x_n))$. Przecięcie tej siecznej z osią x daje nowe przybliżenie x_{n+1}.

1.1.3 Wzór rekurencyjny

W podstawowej postaci możemy zapisać system początkowy i wzór:

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_1 = b, \\ x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)\, x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \end{cases}$$

Alternatywna, często stosowana postać (również poprawna) to:

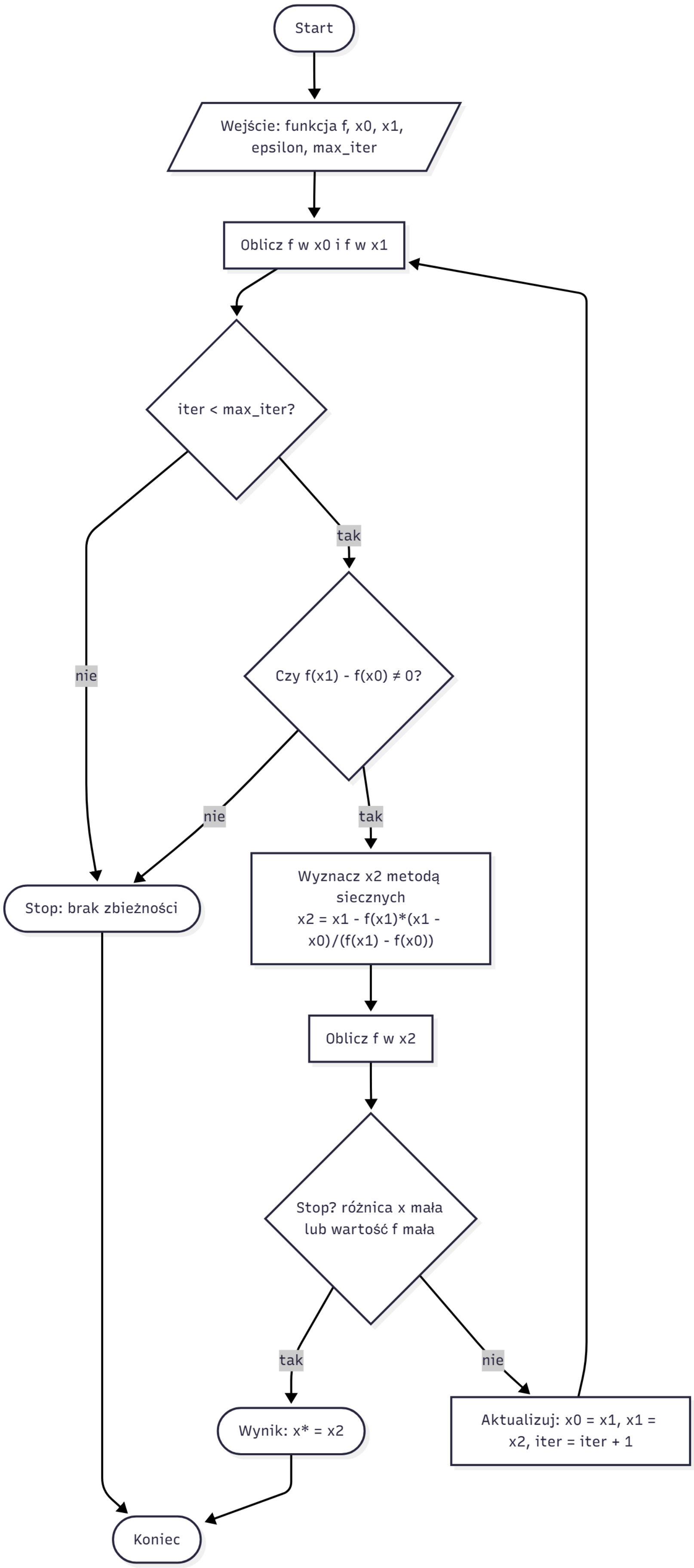
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\, \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

1.1.4 Wymagania i zbieżność

Aby metoda miała szansę działać prawidłowo, typowo wymagamy między innymi:

- funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$,
- wartości na końcach mają różne znaki (np. $f(a)f(b) < 0$), co zapewnia istnienie pierwiastka.

2 Schemat blokowy



Rysunek 1: Schemat blokowy metody siecznych.

3 Pseudokod algorytmu

Algorithm 1 Metoda siecznych dla wyznaczania ekstremum funkcji jednej zmiennej

Require: Funkcja $f(x)$, przybliżenia początkowe x_0, x_1, tolerancja ϵ, maksymalna liczba iteracji $maxit$, krok różniczkowania h

Oblicz pochodną numeryczną: $g(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ (jeśli pochodna analityczna nie jest dostępna)
$g_0 \leftarrow g(x_0), \quad g_1 \leftarrow g(x_1)$
$iter \leftarrow 0$
while $iter < maxit$ **do**
  if $g_1 - g_0 = 0$ **then**
    przerwij ▷ dzielnik równy zero
  end if
  $x_2 \leftarrow x_1 - g_1 \cdot \dfrac{x_1 - x_0}{g_1 - g_0}$
  if $|x_2 - x_1| < \epsilon$ **then**
    return $x_{min} = x_2$, $f_{min} = f(x_2)$, liczba iteracji $= iter$
  end if
  $x_0 \leftarrow x_1$
  $g_0 \leftarrow g_1$
  $x_1 \leftarrow x_2$
  $g_1 \leftarrow g(x_1)$
  $iter \leftarrow iter + 1$
end while
return komunikat: *"Osiągnięto maksymalną liczbę iteracji"*

4 Implementacja w Matlab

```
function [xmin, fmin, iter, hist] = secant_extremum(f, x0, x1, tol, maxit, h)

    if nargin < 4 || isempty(tol),   tol   = 1e-8; end
    if nargin < 5 || isempty(maxit), maxit = 100;  end
    if nargin < 6 || isempty(h),     h     = 1e-6; end

    % Funkcja pomocnicza: numeryczna pochodna centralna
    g = @(x) (f(x + h) - f(x - h)) / (2*h);

    xkm1 = x0;
    xk   = x1;
    gkm1 = g(xkm1);
    gk   = g(xk);

    hist = [0, xkm1, gkm1; 1, xk, gk];

    for k = 1:maxit
        denom = (gk - gkm1);
        if denom == 0
            warning('SECANT_EXTREMUM:ZeroDenominator', 'Dzielnik równy zero - przerywam.');
            break;
        end
        xkp1 = xk - gk * (xk - xkm1) / denom;

        hist = [hist; k+1, xkp1, g(xkp1)]; %#ok<AGROW>

        if abs(xkp1 - xk) < tol
            xk = xkp1;
            break;
        end

        xkm1 = xk;   gkm1 = gk;
        xk   = xkp1; gk   = g(xk);
    end

    xmin = xk;
    fmin = f(xmin);
    iter = size(hist,1)-1;
```

```
end
```

5 Prosty przykład liczbowy

Przykład: metoda siecznych dla $g(x) = x^2 - 2$ na przedziale $[1, 2]$

Dane początkowe: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $g(x) = x^2 - 2$. Iteracyjny wzór metody siecznych:

$$x_{k+1} = x_k - g(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{g(x_k) - g(x_{k-1})}.$$

Iteracja 1.

$$g(x_0) = 1^2 - 2 = -1, \qquad g(x_1) = 2^2 - 2 = 2.$$

$$x_2 = 2 - 2 \cdot \frac{2-1}{2-(-1)} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \qquad g\big(\tfrac{4}{3}\big) = \tfrac{16}{9} - 2 = -\tfrac{2}{9} \approx -0.222222.$$

Iteracja 2.

$$x_3 = \frac{4}{3} - \big(-\tfrac{2}{9}\big)\,\frac{\frac{4}{3} - 2}{-\frac{2}{9} - 2} = \frac{4}{3} - \Big(-\tfrac{2}{9}\Big) \cdot \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{20}{9}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{15} = \frac{7}{5},$$

$$g\big(\tfrac{7}{5}\big) = \tfrac{49}{25} - 2 = -\tfrac{1}{25} = -0.04.$$

Iteracja 3.

$$x_4 = \frac{7}{5} - \big(-\tfrac{1}{25}\big)\,\frac{\frac{7}{5} - \frac{4}{3}}{-\frac{1}{25} - \big(-\frac{2}{9}\big)} = \frac{7}{5} - \Big(-\tfrac{1}{25}\Big) \cdot \frac{\frac{1}{15}}{\frac{41}{225}} = \frac{7}{5} + \frac{3}{205} = \frac{58}{41},$$

$$g\big(\tfrac{58}{41}\big) = \big(\tfrac{58}{41}\big)^2 - 2 = \tfrac{3364}{1681} - 2 = \tfrac{2}{1681} \approx 0.00118977.$$

Iteracja 4.

$$x_5 = x_4 - g(x_4)\,\frac{x_4 - x_3}{g(x_4) - g(x_3)} = \tfrac{58}{41} - \tfrac{2}{1681} \cdot \frac{\frac{58}{41} - \frac{7}{5}}{\frac{2}{1681} - \big(-\frac{1}{25}\big)} = \tfrac{33\,456}{23\,657},$$

$$g\big(\tfrac{33\,456}{23\,657}\big) = \big(\tfrac{33\,456}{23\,657}\big)^2 - 2 = \frac{-3362}{23\,657^2} \approx -6.01 \times 10^{-6}.$$

$$\boxed{x_2 = \tfrac{4}{3}, \quad x_3 = \tfrac{7}{5}, \quad x_4 = \tfrac{58}{41}, \quad x_5 = \tfrac{33\,456}{23\,657} \approx 1.4142 \approx \sqrt{2}.}$$

Dla przejrzystości zestawmy wszystkie wartości x_n i $g(x_n)$:

n	x_n (dokładnie)	x_n ($\approx$)	$g(x_n)$ (dokładnie)	$g(x_n)$ ($\approx$)
0	1	1.000000	-1	-1.000000
1	2	2.000000	2	2.000000
2	$\frac{4}{3}$	1.333333	$-\frac{2}{9}$	-0.222222
3	$\frac{7}{5}$	1.400000	$-\frac{1}{25}$	-0.040000
4	$\frac{58}{41}$	1.414634	$\frac{2}{1681}$	0.001190
5	$\frac{33\,456}{23\,657}$	1.414200	$-\frac{3362}{23\,657^2}$	-6.01×10^{-6}

Widzimy, że kolejne przybliżenia x_n szybko zbliżają się do $\sqrt{2} \approx 1.41421356$, a wartości $g(x_n)$ zmieniają znak naprzemiennie, co jest charakterystyczne dla zbieżności metody siecznych w pobliżu pierwiastka.

6 Porównanie

Tabela 1: Porównanie wyników metody siecznych (dla $f'(x) = 0$) i `fminbnd` (nowy zestaw 15 funkcji).

funkcja $f(x)$	a	b	$x_{\min}^{\text{sec}}$	$f(x_{\min}^{\text{sec}})$	it_{sec}	$x_{\min}^{\text{fminbnd}}$	$f(x_{\min}^{\text{fminbnd}})$	it_{fminbnd}
$(x-2)^2 + 0.2 * \sin(5x)$	-3	5	2.14166	-0.171736	11	2.14166	-0.171736	12
$\exp(x) - 3x$	-2	2	1.09861	-0.295837	7	1.09861	-0.295837	11
$(x-1)^2 + 1$	-1	3	1	1	3	1	1	5
$\cos(x) + x^2$	-3	3	0	1	3	1.1436e-08	1	26
$(x+3)^2 + 0.1x$	-4	-2	-3.05	-0.3025	3	-3.05	-0.3025	5

Continued on next page

Tabela 1: Porównanie wyników metody siecznych (dla $f'(x) = 0$) i `fminbnd` (nowy zestaw 15 funkcji).

funkcja $f(x)$	a	b	$x_{\min}^{\text{sec}}$	$f(x_{\min}^{\text{sec}})$	it_{sec}	$x_{\min}^{\text{fminbnd}}$	$f(x_{\min}^{\text{fminbnd}})$	it_{fminbnd}
$(x+1)^2 + \exp(-x)$	-1	0	-0.314923	1.83948	6	-0.314923	1.83948	8
$(x-0.5)^2 + 0.2$	-1	2	0.5	0.2	3	0.5	0.2	5
$x * \sin(x) + x^2/10$	-0.5	0.5	0	0	3	-1.38778e-17	2.11852e-34	5
$\tanh(x) + x^2$	-1	0	-0.420916	-0.220532	6	-0.420916	-0.220532	9
$(x-5)^2 + \sin(x)$	4.9	5.1	4.90452	-0.972483	5	4.90452	-0.972483	9
$x^2 + 0.1 * \sin(x)$	-3	3	-0.0499377	-0.00249792	6	-0.0499377	-0.00249792	9
$\log(1+\exp(x)) + (x-2)^2/10$	-1	0	-0.222731	1.08202	5	-0.222731	1.08202	12
$x^2 + \exp(-x)$	-2	2	0.351734	0.827184	7	0.351734	0.827184	10
$(x+0.2)^2$	-1	1	-0.2	0	3	-0.2	0	5
$(x+0.5)^4 + \cos(3x)/3$	-1	0	-0.9352	-0.278823	18	-0.9352	-0.278823	11

7 Podsumowanie i wnioski

W pracy przeprowadzono eksperyment badawczy nad metodą siecznych w dwóch zastosowaniach: (i) wyznaczanie pierwiastka równania $g(x) = 0$ (klasyczna postać), oraz (ii) wyznaczanie ekstremum funkcji jednej zmiennej przez rozwiązywanie równania $f'(x) = 0$ z pochodną aproksymowaną różnicą centralną. Przygotowano opis teoretyczny, schemat blokowy, implementację oraz przykład liczbowy, a w sekcji *Porównanie* zestawiono wyniki jakościowe i ilościowe.

Najważniejsze obserwacje z eksperymentu są następujące:

- **Zbieżność.** Zbieżność w tym algorytmie występuje bardzo szybko. W praktyce przekłada się to na szybki spadek błędu, co dobrze ilustruje przykład wyznaczania $\sqrt{2}$.
- **Koszt obliczeniowy.** W wariancie korzeniowym jedna iteracja wymaga jednej oceny funkcji. W wariancie ekstremum (z $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$) potrzeba dwóch ocen f na krok.
- **Wrażliwość na punkty startowe.** Skuteczność i szybkość zbieżności silnie zależą od doboru x_0, x_1. Gdy wartości pochodnej/funkcji w punktach startowych są bardzo zbliżone, pojawia się niestabilność (mianownik bliski zeru) i skoki przybliżeń — konieczne są zabezpieczenia w kodzie.
- **Kryteria stopu.** Stosowanie łącznego kryterium $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \ i \ |f(x_k)| < \varepsilon_f$ jest praktycznie skuteczniejsze niż samo kryterium w przestrzeni x.

Wnioski praktyczne.

- *Rekomendacja użycia:* metoda siecznych jest dobrym wyborem, gdy pochodna nie jest dostępna, a zależy nam na szybkości. Sprawdza się też jako szybkie „dowykańczanie” po wstępnym zawężeniu przedziału.
- *Inicjalizacja:* warto zaczynać z pary (x_0, x_1) uzyskanej metodą przedziałową zapewniającą $f(x_0)f(x_1) < 0$ (dla problemu korzeniowego). Zwiększa to szanse zbieżności i stabilność iteracji.

Podsumowując, metoda siecznych jest atrakcyjnym kompromisem między prostotą implementacji, kosztem obliczeń i szybkością zbieżności. Przy właściwej inicjalizacji i z rozsądnymi zabezpieczeniami stanowi praktyczne narzędzie zarówno do wyznaczania pierwiastków, jak i ekstremów funkcji jednej zmiennej.