Notes sur le lemme de Urysohn

Hongyu Zhang

March 23, 2022

Il y a beaucoup de relations entre les fonctions continues et les fonctions mesurables. Dans cet article, on s'investit dans cette problème un peu plus. On va discuter les formes différentes du lemme de Urysohn, et ses applications, par exemple, le théorème de Lusin et le théorème de carathéodory.

Dans la théorie de mesure, on a déjà connu bien que toutes les fonctions continues sur un espace muni une mesure borélienne sont mesurables. Réciproquement, le théorème de Lusin nous dit que sous certaines hypothèses, les fonctions mesurables peut etre approximées par des fonctions continues.

1 lemme de Urysohn

D'abord on précise quelques définitions:

Définition 1.1. *Dans un espace topologique, un voisinage d'un point est un ouvert contenant ce point.*

Définition 1.2. *Un espace topologique est dit de Hausdorff si pour $p, q \in X$, $p \neq q$, p a un voisinage W et q a un voisinage V tels que $W \cap V = \emptyset$.*

Définition 1.3. *Un espace topologique est dit localement compact si chaque point a un voisinage dont la fermeture est compacte.*

Dans cet article, on travaille principalement sur un espace de Hausdorff localement compact. L'espace R^k est bien un cas particulier. Maintenant on précise une proprieté élémentaire de l'espace de Hausdorff:

Théorème 1.1. *Soit X est un espace de Hausdorff, K est un sous-ensemble compact. $P \in K^c$, alors il existe deux ouverts W et V tels que $K \subset W, p \in V$, et $W \cap V = \emptyset$.*

Proof. Soient p $\in K^c$, q $\in$ K, comme X est de Hausdorff, il y a deux ouverts O_p et O_q tels que $p \in O_p, q \in O_q$, et $O_p \cap O_q = \emptyset$. Puisque K est compact, il existe $O_{q_1} \dots O_{q_n}$ tels que K $\subset \cup_{i=1}^n O_{q_i}$. On a aussi p $\in \cap_{i=1}^n O_{p_i}$, qui est un ouvert disjoint de $\cup_{i=1}^n O_{q_i}$. On prend W= $\cup_{i=1}^n O_{q_i}$, V=$\cap_{i=1}^n O_{p_i}$. □

Par consequence, dans un espace de Hausdorff, tout sous-ensemble compact est fermé. On a donc le corrolaire ci-dessous:

Corolaire 1.1.1. *Supposons $\{K_\alpha\}$ est une collection de sous-ensembles compacts d'un espace de Hausdorff X avec $\cap_\alpha K_\alpha = \emptyset$, il existe un sous-collection finie de K_α dont l'intersection des éléments est vide.*

Proof. Soit $K_1 \in K_\alpha$. Comme $\cap_\alpha K_\alpha = \emptyset$, $K_1 \subset \cap_{\alpha \neq 1} K_\alpha^c$. D'après le théorème ci-dessus, K_α est fermé. Et puisque K_1 est compact, il existe $\alpha_2 \dots \alpha_n$ tels que $K_1 \subset \cap_{i=2}^n K_{\alpha_i}^c$, i.e., $K_1 \cap (\cap_{i=2}^n K_{\alpha_i}) = \emptyset$. □

Voici un résultat essentiel pour montrer lemme de Urysohn, qui est basé sur le théorème ci-dessus.

Théorème 1.2. *Supposons U est ouvert dans un espace de Hausdorff localement compact X, $K \subset U$, et K est compact. Alors il existe un ouvert V dont la fermeture est compacte tel que:*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Proof. Comme X est localement compact, chaque poi snt de K a un voisinage dont la fermeture est compacte. Comme K est compact, K est inclus dans un union fini de ces ouverts, notons ceci comme G. La fermeture de G est aussi compact. Si U = X, on prend G = V.

Si U $\neq$ X, notons C le complément de U dans X. Soit p $\in$ C, d'après le théorème 1.1, il existe un ouvert W_p tel que K $\subset W_q$ et p $\notin \overline{W}_q$. Alors $\{C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p, p \in C\}$ est une collection d'ensembles compacts dont l'intersection de tous les éléments est vide. En applicant le corolaire 1.1.1, il existe n $\in$ N tel que:

$$C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \dots \cap \overline{W}_{p_n} = \emptyset$$

Ceci entraine que $\overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \dots \cap \overline{W}_{p_n} \subset U$. On prend V $= G \cap W_{p_1} \cap \dots \cap W_{p_n}$, qui est bien inclus dans $\overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \dots \cap \overline{W}_{p_n}$. La fermeture de V est un fermé dans G, donc est aussi compacte.

□

Sur la base de cette conclusion, nous pouvons imaginer un peu plus loin. Si on a déjà construit $K \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U$, on peut encore une fois trouver un nouvel ouvert pris en sandwich entre $\overline{V}_1$ et U tel que:

$$K \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset U$$

Et ce processus peut etre exécuté un nombre infini de fois... et éventuellement on peut construire une suite d'ouverts (et de ses fermetures aussi) qui s'imbriquent les unes dans les autres. On peut aussi établir une suite des fonctions caractéristiques correspondants à ces ouverts et à ces fermés. En passant à la limite, il peut etre possible d'obtenir une fonction continue qui dans un sens 'connecter' χ_K et χ_V. Pour acquérir une conclusion rigoureuse, nous avons besoin de déveloper nouvelles conceptions:

Définition 1.4. *Soit f une fonction réelle sur un espace topologique, si*

$$\{x : f(x) > \alpha\}$$

est ouvert pour tout α réel, on dit que f est lower semi-continue. si

$$\{x : f(x) < \alpha\}$$

est ouvert pour tout α réel, on dit que f est upper semi-continue.

Alors une fonction réelle sur un espace topologique f est continue ssi f est à la fois lower et upper semi-continue. Les fonctions caractéristiques servent d'exemples les plus simples :

(a) Les fonctions caractéristiques des ouverts sont lower semi-continues.

(b) Les fonctions caractéristiques des fermés sont upper semi-continues.

On a aussi un résultat immédiat des définitions: Le supremum d'une collection arbitraire des fonctions lower semi-continues est lower semi-continue. L'infimum d'une collection des foncitons upper semi-continues est upper semi-continue.

On utilisera ce résultat dans le preuve suivant: on approchera la fonction désirable par une suite des fonctions caractéristiques, dont les proprietés sont bien connues. Avant d'introduire le lemme de Urysohn, on définit deux notations:

Notation 1. *La notation*

$$K \prec f$$

signifie que K est un sous-ensemble compact de X, et que la fonction complexe f est continue à support compact, i.e., $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$, et que $f(x) = 1$ pour tout $x \in X$. Et la notation

$$f \prec V$$

signifie que V est ouvert, et que $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$ et que V contient le support de f.

Lemme (de Urysohn)**.** *Supposons X est un espace de Hausdorff localement compact, V est un ouvert dans X, $K \subset V$, et K est compact. Alors il existe une $f \in C_c(X)$, telle que*

$$K \prec f \prec V.$$

Autrement dit, il existe une fonction complexe continue à support compact telle que $\chi_K \leq f \preceq \chi_V$.

Proof. C'est assez facile de trouver des fonctions caractéristiques qui satisfait le théorème ci-dessus, par exemple, χ_K et χ_V. Posons $r_1 = 0, r_2 = 1$, soit $r_3, r_4, r_5...$ une énumération des nombres rationels dans [0,1]. D'après le théorème 1.2, on peut trouver V_0, V_1 tels que:

$$K \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset U$$

Supposons que $n \geq 2$, et que on a déjà trouvé des $V_{r_1} \dots V_{r_n}$ tels que $\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_i}$ pour $r_i < r_j$. Alors pour r_{n+1}, il existe un plus grand nombre r_i de $\{r_1 \dots r_n\}$ qui est inférieure à r_{n+1}, et un plus petit nombre r_j qui est supérieure à r_{n+1}, donc d'après le théorème 1.2, on peut trouvé un ouvert $V_{r_{n+1}}$ tel que:

$$\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r_i}$$

Ainsi, on peut construire une collection $\{V_r\}$ telle que $K \subset V_1$, $\overline{V}_0 \subset V$, la fermeture de tout V_r est compact, et que

$$\forall s, t \in \mathbf{Q} \cap [0,1], (s < t) \Rightarrow (\overline{V}_t \subset V_s)$$

Maintenant supposons

$$f_r(x) = \begin{cases} r, si\ x \in V_r; \\ 0, sinon, \end{cases}$$

$$g_s(X) = \begin{cases} 1, si\ x \in \overline{V}_s; \\ s, sinon, \end{cases}$$

et que f est le supremum des f_r, g est l'infimum des g_s. Comme $f_r\ et\ g_s$ sont fonctions caractéristiques, elles sont semi-continues. Alors f est lower semicontinue, g est upper semi-continue, d'après la remarque de la définition 1.2.

On vérifie facilement les faits suivants: $0 \leq f \leq 1$ sur X et $f(x) = 1$ sur K, le support de f se trouve à l'intérieure de $\overline{V}_0$ donc son support est compact. $0 \leq g \leq 1$ et le support de g se trouve à l'intérieure de V. Alors il suffit de montrer que f = g.

Soient r, s deux nombres rationels dans [0,1], alors $f_r(x) \leq g_s(x)$ pour tout x $\in$ X. En effet, s'il existe un x $\in$ X tel que $f_r(x) > g_s(x)$, il ne peut que $f_r(x) = r,\ et\ g_s(x) = s$, donc on a $r > s$. Mais cela entraine que $V_r \subset V_s$ donc $g_s(x) = 1,\ et\ f_r(x) > 1$. Cela contredit notre hypothèse. En passant à la limite, on a $f \leq g$. Supposons $f < g$, soit x $\in$ X, on prend p, q deux nombres rationels tel que $f(x) < p < q < g(x)$, donc $\overline{V}_q \subset V_p$. Comme $f_p(x) \leq f(x) < p$, x $\notin V_p$. Comme $g_q(x) > g(x) > q$, on a $x \in \overline{V}_p$. Ceci est absurde. On conclut que f = g. □

2 Théorème de Lusin

Dans cette section, on discute les applications du lemme de Urysohn, notamment, le théorème de Lusin et comment on utilise ce lemme dans la probabilité.

Maintenant on muni l'espace de Hausdorff localement compact X une tribu engendrée par les ouverts de X. D'après le théorème de représentation de Riesz, la seul mesure μ sur X a deux proprietés:

(a) Pour tout emsemble mesurable E, on a

$$\mu(E) = inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V\ est\ ouvert\}.$$

(b) pour tout ouvert E ou emsemble mesurable E tel que $\mu(E) < \infty$, on a

$$\mu(E) = sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K\ est\ compact\}.$$

Théorème 2.1 (de Lusin)**.** *Supposons que f est une fonction complexe mesurable sur un espace de Hausdorff localement compact, μ est une mesure sur X, $\mu(A) < \infty$, $f(x) = 0$ si $x \notin A$, et $\varepsilon > 0$. Donc il existe g $\in C_c(X)$ tel que*

$$\mu(x : f(x) \neq g(x)) < \varepsilon. \tag{1}$$

De plus, nous pouvons l'arranger pour que

$$\sup_{x\in X}|g(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)|. \tag{2}$$

Proof. D'abord on suppose que $0 \leq f \leq 1$ et A est compact. Alors il existe une suite croissante de fonctions simples $\{S_n\}$ convergeant vers f. Plus précisément, posons $\delta_n = 2^{-n}$. Pour tout entier positive n et tout nombre réel alors il existe un entier unique $k = k_n(t)$ tel que $k\delta_n \leq t \leq (k+1)\delta_n$. Posons alors que

$$s_n(t) = \begin{cases} k_n(t)\delta_n(t), \; si\ 0 \leq t \leq n, \\ n, \qquad\qquad , \; si\ t > n. \end{cases}$$

Posons $t_1 = s_1$ et $t_n = s_n - s_{n-1} =$, on a $f = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$. On peut vérifier aussi (éventuellement par le biais du dessin) que $2^n t_n$ est une fonction caractéristiques d'un ensemble $T_n \subset A$.

Maintenant on prends un ouvert V contenant A et la fermeture de V est compacte, qui est possible car X est localement compact. D'après la remarque (a) et (b) ci-dessus, il existe K_n et V_n tels que $K_n \subset T_n \subset V_n$ et que $\mu\{V_n - K_n\} < 2^{-n}\varepsilon$. D'après le lemme de Urysohn, il existe $h_n \in C_c(X)$ tel que $K_n \prec h_n \prec V_n$.

Posons g = $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}h_n$, alors g est uniformément convergente, donc g est continue. Comme $\{h_n \neq 2^n t_n\} \subset \{V_n - K_n\}$, alors $\mu\{h_n \neq 2^n t_n\} \leq \mu\{V_n - K_n\} \leq 2^{-n}\varepsilon$. Donc $\mu\{g \neq h\} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\{V_n - K_n\} \leq \varepsilon$.

(1) est aussi valable pour que A est compact et que f est complexe mesurable bornée. Maintenant on vérifie le cas où A n'est pas nécessairement compact. D'après la remarque (b) ci-dessus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un K compact tel que $\mu\{A - K\} < \varepsilon$. Soit f est une fonction complexe mesurable, posons $B_n = \{|f(x)| > n\}$, alors $\cap B_n = \emptyset$, $\mu\{B_n\} \leq \mu\{A\} \leq \infty$, et $\{B_n\}$ est décroissante, donc $\lim_{n\to\infty} B_n = 0$. Comme $(1 - \chi_{B_n})f$ est bornée, et elle est équale à f en dehors de B_n. On conclut alors que (1) est valable pour tout A de mesure finie et toute f complexe mesurable sur X.

Finalement, posons R = $\sup_{x\in X}|f(x)|$, et pour tout nombre complexe, posons $\phi(z) = z, si\ |z| \leq R$, $\phi(z) = Rz/|z|,\; si\ z > R$. Alors ϕ est une fonction continue qui transforme la plane complexe en un disque de rayon R. Alors posons $g_1 = \phi g$ est une fonction qui satisfait (2). □

Corolaire 2.1.1. *Sous l'hypothèses du théorème de Lusin, on suppose que $|f(x)| \leq 1$. Alors il existe une suite $\{g_n\}$ telle que $g_n \in C_c(X)$, $|g_n(x)| \leq 1$ et*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad p.p.$$

Mainteant il y a une question: que aura lieu pour $|f| > 1$?

Proof. D'après le théorème de Lusin, pour tout entier positif n, il existe une fonction correspondante g_n telle que $g_n \in C_c(X)$, $|g_n| \leq 1$, et que $g_n = f$ en dehors de E_n où $\mu\{E_n\} \leq 2^{-n}$. Comme $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{E_n\} < \infty$, d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour presque tout x ∈ X, il existe un nombre fini de n tel que $x \in E_n$. C'est-à-dire que pour presque tout x de X, il existe un nombre positif N assez grand tel que pour tout $n > N,\; f = g_n$. □

On rappel une application classique dans la théorie de probabilités.

Théorème 2.2. *Soient $X_1 \dots X_n$ n variables aléatoires réelles sur un espaces de probabilité, alors $X_1 \dots X_n$ sont indépendants ssi pour $f_1 \dots f_n$ continues à support compact de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}_+$ on a*

$$E[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)] = \prod_{i=1}^{n} E[f_i(X_i)].$$

Proof. D'après le théorème de Fubini, la condition est nécessaire. Réciproquement, soient $A_1 \dots A_n$ des ensembles boréliennes, alors pour tout $0 \leq i \leq n$, il existe une suite de fonctions $(f_i^k)_k$ continues à support compact convergeant p.p. vers χ_{A_i} et $|f_i^k| \leq 1$. Donc d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{k\to\infty} E[f_i^k(X)] = E[\chi_{A_i}(X)] = P(A_i) \tag{3}$$

$$\lim_{k\to\infty} E[\prod_{i=1}^{n} f_i^k(X_i)] = E[\prod_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(X_i)] = P_{(X_1 \dots X_n)}(A_1 \times \cdots \times A_n) \tag{4}$$

$$\Longrightarrow P_{(X_1 \dots X_n)}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

D'après le lemme de classe monotone, on peut vérifier que $P_{(X_1 \dots X_n)} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}$ □

Voici une autre application du théorème de Lusin dans l'espace $L^p(\mu)$.

Théorème 2.3. *Supposons X est un espace de Hausdorff localement compact muni une tribu et une mesure. Pour $1 \leq p < \infty$, $C_c(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$.*