文章编号:1674-0874(2014)02-0010-04

有向图的同构判定算法: 出入度序列法

王文霞

(运城学院计算机科学与技术系，山西运城 044000)

摘　要: 同构图指的是在两个图中寻找顶点之间对应的映射,通过映射使得两图中的各条边也保持对应的关系。为了有效提高寻找有向同构图的时间效率、简化操作，首先研究了有向图同构的矩阵存储方式，并针对性的提出了用出入度序列来判断有向图的同构算法。与矩阵存储算法相比，该判定算法的时间更为简短。通过执行判定过程验证了算法的正确性。

关键词: 图的同构；图论算法；入度序列；出度序列

中图分类号: TP301.6　　　**文献标识码:** A

1　有向图同构的相关概念

为了讨论方便,首先介绍一下有向图同构的概念[1-3]。

定义1　在两个有向图$Q=(V(Q),E(Q),\varphi1(Q))$和$P=(V(P),E(P),\varphi2(P))$，如果存在两个双射$\acute{\alpha}:V(Q)\rightarrow V(P)$，$\acute{\varepsilon}:E(Q)\rightarrow E(P)$使得$a\in E(Q)$，$\varphi1(a)=(x,y)<=>\varphi2(\acute{\varepsilon}(a))=(\acute{\alpha}(x),\acute{\alpha}(y))\in E(P)$，则称$(\acute{\alpha},\acute{\varepsilon})$为$Q$和$P$之间的同构映射（isomorphic mapping）。两个图$Q=(V(Q),E(Q),\varphi(Q))$和$P=(V(P),E(P),\varphi(P))$，如果存在同构映射，则成为同构图，记为$Q\cong P$。例如图1为两个有向同构图。

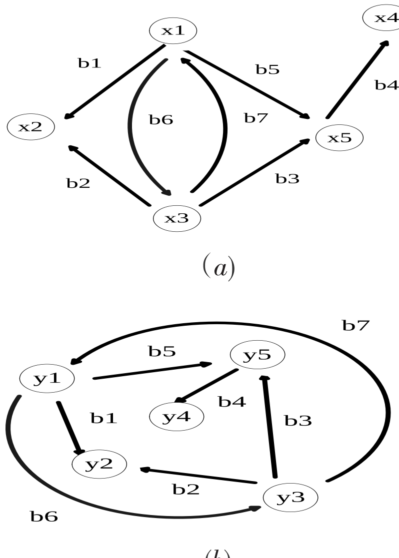


图1　有向同构图

图2为两个有向不同构图。

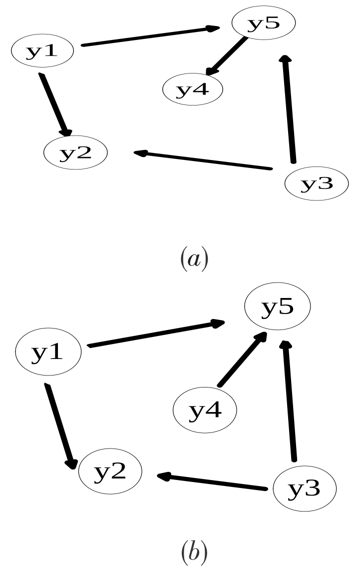


图2　有向不同构图

图1(a)和图1(b)邻接矩阵相同，只是图的形式不同，所以图1的两个图为同构图，邻接矩阵相同时则它们对应的点和边的行、列位置必须相同。如用这种方法来判定两个有向图是不是同构图会有一定的困难，因为我们事先并不知道在图中哪个点和边是对应的，一个稍微复杂点的办法是分别写出$A1$和$A2$的矩阵，然后再进行有限次列与列、行与行的交换，如经过交换后能得到相同的矩阵，则表示$A1$和$A2$图是同构图。最坏情况下判定两个有向图是不是同构图需要进行$M!*N!$次(M，N分别为

收稿日期: 2013-08-12

作者简介: 王文霞(1979-)，女，山西运城人，硕士，讲师，主要研究方向：算法分析研究。

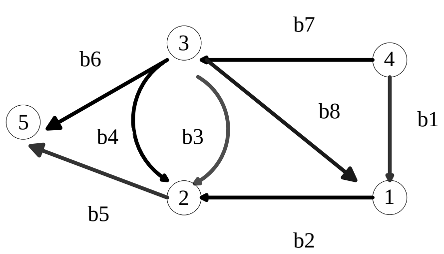
图的顶点数和边数)。

图的同构判定有许多的实际应用,如在模式识别领域等[4]。因此对同构图的判定算法需要理论和实际相结合。

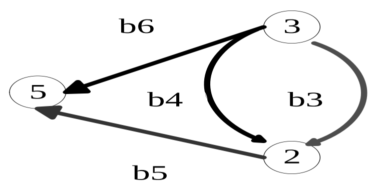
2　有向图的出入度同构判定算法[5]

如有向图是一个包含自环的图,那么处理的方法是在自环的边上增加一个新点把自环图分为两条有向边。容易证明如果对同构图M和N提前做了自环处理,所得图M'和N'依然是同构图,反之也是同构图。

定义2　n个顶点的连通子图　在一个有向图M中n(n为M图的点数 1<=n<最大顶点数)个点以及这n个点之间连接的边组成的子图是连通图,那么这个子图称为图M的n点连通子图,记作$M(v_n)$。例图3是一个n点连通子图。



(*a*)



(*b*)

图3　*n*点连通子图

在图3中顶点(2, 3, 5)以及连接它们边组成了图3(*b*)连通子图,记作M(2, 3, 5)称为M的3点连通子图;顶点(1, 4, 5)为一个不连通的子图。

定义3　n点连通子图的出度和入度　在图M中,与n点连通子图(不包含连通内部的边)称为该连通子图的关联边。如关联边指向该连通子图,称为入度记作$d_i(v_n)$;如关联边的方向是从该连通子图上的顶点出去的称为出度记作$d_o(v_n)$。如上图3(a)中d_i (2, 3, 5)的入度为$b2$和$b7$边,d_o(2, 3, 5)的出度为$b8$边,所以d_i (2, 3, 5)=2,d_o(2, 3, 5)=1。

定义4　n点连通子图的出入度序列计算　假如图M中的n点连通子图一共有x个,则需将这x个n点连通子图的出/入度按降序或升序进行排列,分别记作$s_o(n)$和$s_i(n)$。

图3(a)中共有1, 2, 3, 4, 5这5个顶点,3点连通子图可能有:(1, 2, 3)、(1, 2, 4)、(1, 2, 5)、(1, 3, 4)、(1, 3, 5)、(2, 3, 4)、(2, 3, 5)、(3, 4, 5)。各三点连通子图的出/入度如表1所示:

表1　图3(*a*)三点连通的出/入度

d_i(1,2,3)	2	d_0(1,2,3)	2
d_i(1,2,4)	3	d_0(1,2,4)	2
d_i(1,2,5)	5	d_0(1,2,5)	0
d_i(1,3,4)	0	d_0(1,3,4)	4
d_i(1,3,5)	3	d_0(1,3,5)	3
d_i(2,3,4)	1	d_0(2,3,4)	4
d_i(2,3,5)	2	d_0(2,3,5)	1
d_i(3,4,5)	1	d_0(3,4,5)	4

所以经过排序得到

$s_i(3)$={5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 0},

$s_o(3)$={4, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 0}。

定理　如果有向图M和N同构,M与N的n点连通子图的出/入度分别为($d_i(v_n)$, $d_o(v_n)$)和($d_i'(v_n)$, $d_o'(v_n)$),其中n值的范围为1<=n<=顶点个数减1,那么对任意的一个n都会有$s_i(n)=s_i'(n)$, $s_o(n)=s_o'(n)$。

证明　假设n=x, $x\in(1, 2, 3, \cdots, M-1)$。若$A$与$A'$是同构的,$A$中$x$点连通图的个数应与$A'$中$x$点的连通图的个数是相同的,所以$s_i(x)=s_i'(x)$, $s_o(x)=s_o'(x)$。另外A与A'中任何一个x点连通图所对应的出/入度也应是一样的,即$d_i(v_x)=d_i'(v_x)$, $d_o(v_x)=d_o'(v_x)$,那么由此可进一步推出连通图的出/入度排序也是一样的即$s_i(n)=s_i'(n)$, $s_o(n)=s_o'(n)$。

图1(*a*)和图1(*b*)这两个为同构图,如果两图之间有细微的差别即不同构,那么将造成某一层次的$d_i(v_x)\neq d_i'(v_x)$, $d_o(v_x)\neq d_o'(v_x)$; $s_i(x)\neq s_i'(x)$, $s_o(x)\neq s_o'(x)$。

据此我们可以得出有向图的同构判定算法的流程图,如图4所示。

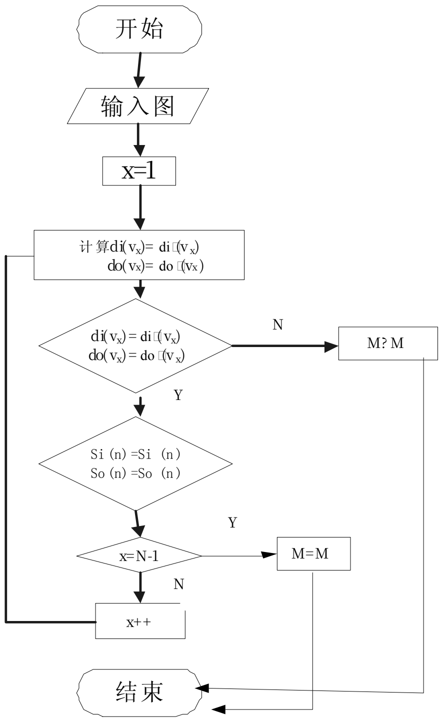


图4　判定同构算法的流程图

下面我们用该算法来判定下图5是不是同构图。

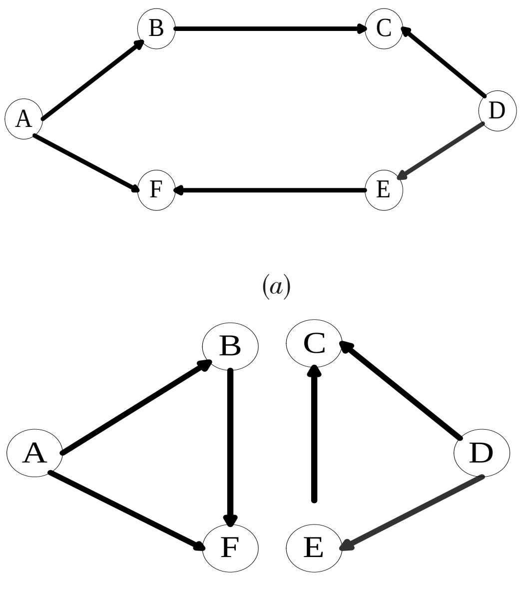


图5　两个不同构的图

计算图5(a)

$s_i(1)=\{2,2,1,1,0,0\}$;

$s_o(1)=\{2,2,1,1,0,0\}$

图5(b)

$s_i'(1)=\{2,2,1,1,0,0\}$

$s_o'(1)=\{2,2,1,1,0,0\}$

可得出 $s_i(1)=s_i'(1)$

$s_o(1)=s_o'(1)$

进一步计算图5(a)

$s_i(2)=\{2,2,1,1,0,0\}$;

$s_o(2)=\{2,2,1,1,0,0\}$

图5(b)

$s_i'(2)=\{2,2,1,1,0,0\}$

$s_o'(2)=\{2,2,1,1,0,0\}$

可得出 $s_i(2)=s_i'(2)$

$s_o(2)=s_o'(2)$;

再进一步计算图5(a)

$s_i(3)=\{1,1,1,1,1,1\}$

$s_o(3)=\{1,1,1,1,1,1\}$

图5(b)

$s_i'(3)=\{0,0\}$;

$s_o'(3)=\{0,0\}$

可得出 $s_i(3)\neq s_i'(3)$

$s_o(3)\neq s_o'(3)$

所以判定图5(a)和图5(b)是不同构的。

3　算法分析

该算法的核心是计算x点连通子图的出/入度，当$n=i$时，i点连通图的数目最大为C_N^i，那么随着n的变化，图中的连通图的数目最大为$\sum_{i=1}^{N-1}c_n^i\approx 2^N$，所以该算法在最坏情况下为指数，比起前面提到的矩阵形式存储的时间复杂性为$M!*N!$来说就好许多，因为$M!*N!\approx(M/e)^M\sqrt{2\pi M}\,(N/e)^N\sqrt{2\pi N}$。

利用该算法判断给出的两个图是不同构的更为简单，只需找到一个$s_i(n)\neq s_i'(n)$或者$s_o(n)\neq s_o'(n)$，而矩阵变换行、列只有完成所有的变换后仍未找到相同的才可以判定这两个图是不同构的图，这样算下来本算法所需的时间就会少一些。

参考文献

[1]李锋，陆韬. 任意图同构判定及其应用 [J]. 复旦大学学报：自然科学版，2006，45(4)：480－484.

[2]李锋，商慧亮. 有向图的同构判定算法：出入度序列法 [J]. 应用科学学报，2002，20(3)：258－260.

[3]侯爱民. 求解图同构的判定算法 [J]. 计算机工程与应用，2011，47(16)：56－61.

[4]徐俊明. 图论及其应用(第3版) [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.
[5]张先迪, 李正良. 图论及其应用 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
[6]燕子宗, 张宝琪. 图论及其应用 [J]. 重庆科技学院学报: 自然科学版, 2007, 9(2): 121 - 123.

An Isomorphism Testing Algorithm for Directed Graphs : the In-degree and Out-degree Sequence Method

WANG Wen-xia
(Department of Computer Science and Technology, Yuncheng University, Yuncheng Shanxi, 044000)

Abstract: Isomorphic graph refers to seeking the corresponding mapping between the vertices of the two graphs. Through mapping, correspondence of each sideline of the two graphs will also be kept. In order to improve the time efficiency and simplify the operation in seeking directed isomorphic graphs, the paper firstly studies the storage mode of matrix and then puts forward an isomorphism algorithm which uses in-degree and out-degree sequence to test directed graphs. Compared with Matrix Storage Algorithm, this testing algorithm economizes on time. The correctness of this algorithm is verified through the execution of decision procedure.

Key words: graph isomorphism; graph theory algorithm; in-degree sequence; out-degree sequence

〔责任编辑　高海〕

(上接第9页)

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&4&3&2&0&3\\0&1&1&0&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&4&-8&-9\\0&1&0&1&-5&0\\0&0&1&1&12&12\end{bmatrix}\qquad 所以\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}4&-8&-9\\1&-5&0\\1&12&12\end{bmatrix}。$$

参考文献

[1]同济大学数学系. 线性代数 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
[2]常秀芳, 李高. 伯努利方程的几种新解法 [J]. 雁北师范学院学报, 2007, 23(2): 89 - 91.
[3]吴传生,王卫华. 线性代数 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[4]李高, 常秀芳. 不定方程 $x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+xz)$ 的解及其性质 [J]. 山西大同大学学报: 自然科学版, 2011, 27(3): 6 - 10.
[5]李高, 常秀芳. 二阶变系数线性微分方程及其衍生方程 [J]. 河北北方学院学报, 2011, 27(5): 13 - 15.

On the Solution of a Liear Matrix Equation in Elementary Transformation

CHANG Xiu-fang[1], LI Gao[1], LI Shu-xuan[2]
(1. School of Coal Engineering, Shanxi Datong University, Datong Shanxi, 0370031;
2. School of Accounting, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing, 400054)

Abstract: Rversible phalanx can be expressed as the product of finite elementary matrix and the eleentary rransformationmatrix. This paper provides the solutions of a linear matrix equation in elementary transformations.

Key words: elementary row transformation; elementary column transformation; elementary matrix; a linear matrix equation; matrix equation solution

〔责任编辑　高海〕