约定：下面均在 Mod_R 中讨论

(Def)

设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

称 f 与 g 在 B 处正合，若 $\mathrm{Im} f = \ker g$.

单射和满射可用正合列刻画.

Prop.

$0 \longrightarrow A \longrightarrow B$ 正合 $\Longleftrightarrow$ $A \to B$ 单

$A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ 正合 $\Longleftrightarrow$ $A \longrightarrow B$ 满

$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ 正合 $\Longleftrightarrow$ $A \longrightarrow B$ 同构.

Pf: 定义 $\square$

(Def)

(1) 形如 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 的正合列

为短正合列

(2) 设 $A_\bullet$, $B_\bullet$, $C_\bullet$ 为链复形.

若 $0 \longrightarrow A_\cdot \longrightarrow B_\cdot \longrightarrow C_\cdot \longrightarrow 0$

满足 $0 \longrightarrow A_n \longrightarrow B_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$ 为正合列，$\forall n \in \mathbb{Z}$

则称其为链复形的短正合列.

下面命题指出链复形的短正合列诱导同调的长正合列.

(Zig-Zag lemma)

设链复形间的短正合列 $0 \longrightarrow A_\cdot \xrightarrow{f} B_\cdot \xrightarrow{g} C_\cdot \longrightarrow 0$

则存在分次同态 $\delta: H_p(C_\cdot) \longrightarrow H_{p-1}(A_\cdot)$，$\forall p \in \mathbb{Z}$.

使得有长正合列.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & H_{p+2}(C_\cdot) \arrow[dll, "\delta"'] \\
H_{p+1}(A_\cdot) \arrow[r] & H_{p+1}(B_\cdot) \arrow[r] & H_{p+1}(C_\cdot) \arrow[dll, "\delta"'] \\
H_p(A_\cdot) \arrow[r] & H_p(B_\cdot) \arrow[r] & H_p(C_\cdot) \arrow[dll, "\delta"'] \\
H_{p-1}(A_\cdot) & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

附：证明的方式是所谓的追图技巧.

我们只给出大概的想法.

① 平行的同态是链映射诱导

② 固定 p，δ 可构造如下

$$
\begin{tikzcd}
 & & B_p \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C_p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{p-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B_{p-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C_{p-1} & \\
0 \arrow[r] & A_{p-2} \arrow[r, "f"] & B_{p-2} & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \exists y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \\
\exists z \arrow[r, mapsto] & \partial y &
\end{tikzcd}
$$

i.e. 取 $[x]\in H_p(C_\cdot)$，由 $B_p\to C_p$ surj. 则

$\exists y\in B_p$ s.t. $g(y)=x$

注意 $g(\partial y)=\partial(g(y))=\partial x=0$

故 $\partial y\in\ker g=\operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, z\in A_{p-1}$ s.t. $f(z)=\partial y$

由于 $f(\partial z)=\partial(f(z))=\partial\partial y=0 \Rightarrow \partial z\in\ker f=\{0\}$

故 z 是 cycle

从而可令 $\delta[x] := [z] \in H_{p-1}(A)$ $\square$

Rmk)

在实际应用中，大多时候我们不需要用到δ的具体构造，偶尔用到时，如不特别说明，默认δ是用上述方式定义（但不唯一）

还有一常用的也可用追图证明的定理

(5-lemma)

设交换图

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & A_4 \arrow[r] \arrow[d] & A_5 \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

若平行两列为正合列， $A_i \longrightarrow B_i$ $(i=1,2,4,5)$ 为同构

则 $A_3 \longrightarrow B_3$ 也为同构.

证明：略.

回到拓扑，我们在 Top_2 中工作.

拓扑空间对指有序对 (X, A)，其中 X 是拓扑空间，$A \subset X$

拓扑空间对间的态射 $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ 指 $f: X \to Y$

conti，且 $f(A) \subset B$.

上述构造给出了范畴 Top_2

我们可将同调推广到 Top_2 上.

设 (X,A) top. pair. $S_\cdot(X,A) := S_\cdot(X)/S_\cdot(A)$

$\partial: S_p(X,A) \longrightarrow S_{p-1}(X,A)$ 由 $\partial: S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$ 诱

导，从而我们得到链复形 $(S_\cdot(X,A), \partial)$.

记 $H_\cdot(X,A) = H_\cdot(S_\cdot(X,A))$，称为相对

同调群. $A = \phi$ 时 $H_\cdot(X,A)$ 退化为 $H_\cdot(X)$.

类似，拓扑对之间的态射也可诱导相对同调间的态射.

从而相对同调的构造给出了函子 $H_\cdot : \mathrm{Top}_2 \longrightarrow \mathrm{Grad\,Ab}$.

注意有短正合列 $0 \to S_\cdot(A) \longrightarrow S_\cdot(X) \longrightarrow S_\cdot(X,A) \longrightarrow 0$

从而由 Zig-zag lemma，我们得到相对同调与同调间的关系.

(Thm) 我们有长正合列.

$$\to H_{p+1}(X,A) \xrightarrow{\delta} H_p(A) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_p(X,A) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

上面的 δ 具有自然性.

(Naturality of δ)

设 $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ conti

则

$$\begin{tikzcd}
H_p(X,A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{p-1}(A) \arrow[d] \\
H_p(Y,B) \arrow[r, "\delta"] & H_{p-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Pf：用 δ 的定义去验证（比较繁琐）□

结合线性以及5-引理，可见相对同调也有同伦不变性.

Thm)

设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ conti，$f:X\to Y$，$f:A\to B$ 均为同伦等价. 则 $f_*: H_*(X,A)\to H_*(Y,B)$ 是同构.

Pf: 我们有"梯子"

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_p(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_p(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H_{p-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\arrow[r] & H_p(B) \arrow[r] & H_p(Y) \arrow[r] & H_p(Y,B) \arrow[r] & H_{p-1}(B) \arrow[r] & H_{p-1}(Y) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

例. $H_*(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\cong} H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$