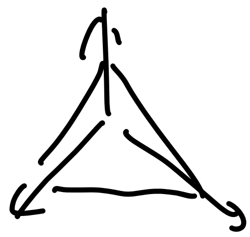
Def) 固定 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 记 $e_0=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$, $\{e_1,\dots,e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基. 我们称 $\{e_0,\dots,e_n\}$ 的凸包为标准 $n$ 单形. 记为 $\Delta^n$.



3-单形

Def) 我们定义 0 单形为一个点.

Fact: $\Delta^n=\{\sum_{i=0}^n t_ie_i \mid t_i\geq 0, \sum_{i=0}^n t_i\leq 1\}$

我们称 $\varphi:(t_0,\dots,t_n)\longmapsto \sum_{i=0}^n t_ie_i$ 为重心坐标.

设 $X$ 是一拓扑空间.

Def) $\forall n\geq 0$, $\mathrm{Sing}_n(X):=\{\sigma:\Delta^n\to X \text{ conti}\}$. 称其中的元素为奇异 $n$ 单形.

Def) $\forall p\in\mathbb{Z}$, 我们定义 $n$ 阶奇异链

$$S_p(X):=\begin{cases}\mathbb{Z}\,\mathrm{Sing}_p(X), & p\geq 0\\ 0, & p<0\end{cases}$$

注意, 由 universal property of free module, 要定义 $S_p(X)$ 上的同态, 只要给定 $\mathrm{Sing}_p(X)$ 上的取值.

下面我们定义一列同态 $\partial_p: S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$，使 $S_\cdot(X)$ 成为所谓的链复形.

① $p \le 0$ 时，$\partial_p := 0$

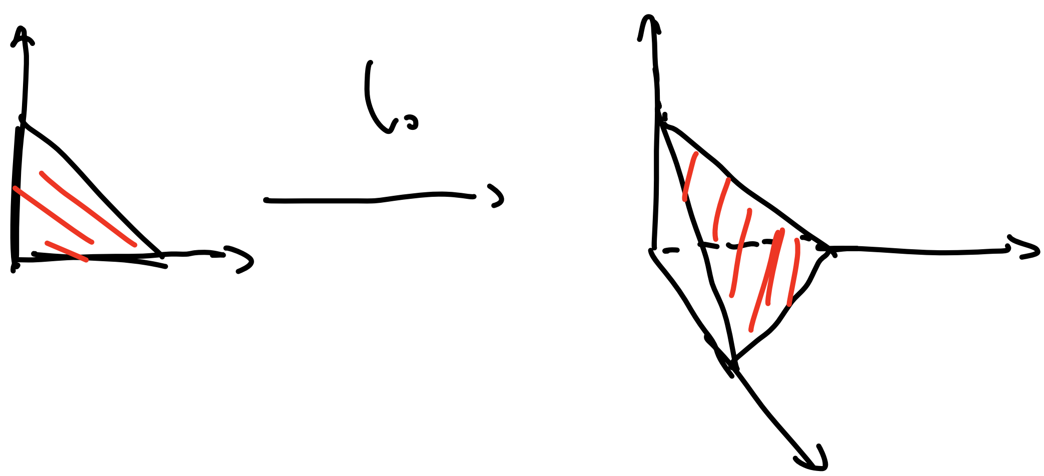
② $p \geq 1$，任取 $\sigma \in Sing_p(X)$，我们定义 $\partial_p(\sigma) \in S_{p-1}(X)$ 为（我们使用了重心坐标表示）

$$\partial(\sigma) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^m \sigma \circ l_m$$

其中 $l_m: \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$

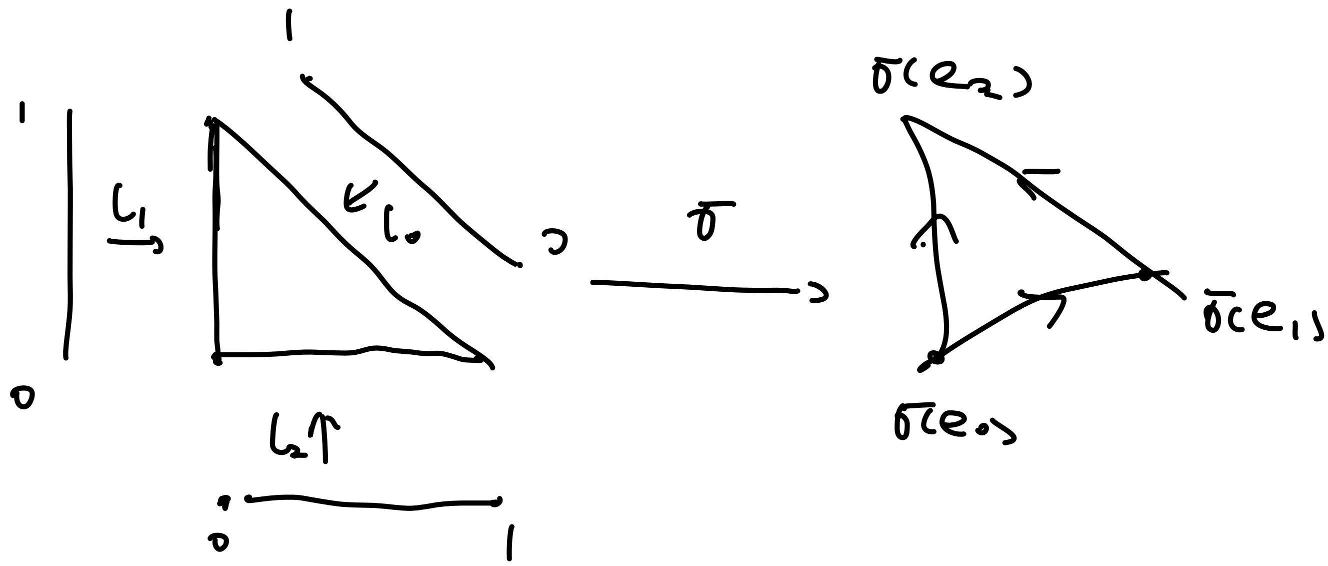
$$(t_0, \cdots, t_{n-1}) \longmapsto (t_0, \cdots, t_{m-1}, 0, t_m, \cdots, t_n)$$

（$l_m$ 几何上看是将 $\Delta^{n-1}$ 嵌入到 $\Delta^n$ 的一个面）




于是不难看出 $\partial_p$ 的几何意义：将 $\sigma$ 映为其 $p+1$ 个面的线性组合，组合系数的目地是为了定向，比如说

考虑奇异2单形 $\sigma: \Delta^2 \longrightarrow X$




$\partial\sigma = \sigma\circ l_0 - \sigma\circ l_1 + \sigma\circ l_2$

$-\sigma\circ l_1$ 可视作条与 $\sigma\circ l_1$ 方向相反的道路

从而 $\partial\sigma$ 可看作 $\sigma$ 的边缘曲线.

Fact: $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$

证明是组合的，略去.

这一事实等价于 $\mathrm{Im}\,\partial_{p+1} \subset \ker\partial_p$

从而我们可定义 $p$-阶同调群如下.

(Def) $H_p(X) := \ker\partial_p / \mathrm{Im}\,\partial_{p+1}$

我们称 $\{S_\cdot(X), \partial_\cdot\}$ 为 $X$ 的奇异链复形.

我们来证明一些基本性质/结果

单点空间的同调

$\forall p\geq 1$, $Sing_p(pt)$ 仅有一个元素. 记其为 $\sigma_p$.

则 $\partial\sigma_p = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma_{p-1} = \begin{cases}\sigma_{p-1}, & p\text{为偶}\\ 0, & p\text{为奇}.\end{cases}$

所以 $\{S_\bullet(pt), \partial_\bullet\}$ 本质上为

$$\cdots \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

于是

$$H_p(pt) = \begin{cases}\mathbb{Z}, & p=0\\ 0, & else\end{cases}$$

下面是两个一般的性质.

Prop) 设 $X=\coprod_\alpha X_\alpha$ 是道路连通分支分解. 则

$H_\bullet(X) = \bigoplus_\alpha H_\bullet(X)$

Pf: 练习 □

(Prop) 设 $X$ 道路连通，则 $H_0(X)=\mathbb{Z}$.

Pf: 令 $\varepsilon: S_0(X)\longrightarrow\mathbb{Z}$, $\sum_\sigma n_\sigma\sigma \longmapsto \sum_\sigma n_\sigma$

Claim: $\ker\varepsilon = \operatorname{Im}\partial_1$

$\ker\varepsilon\supset\operatorname{Im}\partial_1$, 由 $\partial_1$ 定义可知

奇异0单形可等同于 $X$ 中的点，我们在下面默认这个等同.

任取 $\sum_{a\in X} n_a a\in\ker\varepsilon$, 固定 $x_0\in X$.

记 $\sigma_a$ 为从 $x_0$ 到 $a$ 的路径

则 $\partial(\sum_{a\in X} n_a\sigma_a) = \sum_{a\in X} n_a(a-x_0) = \sum_{a\in X} n_a a + \underbrace{(\sum_{a\in X} n_a)}_{=0} x_0$

故 $\ker\varepsilon\subset\operatorname{Im}\partial_1$

由定义 $H_0(X)=S_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1 = S_0(X)/\ker\varepsilon$

由于 $\varepsilon$ 是满同态，从而 $H_0(X)=\mathbb{Z}$. □

下面我们来到映射的层面上.

设 $f: X\longrightarrow Y$ conti

则 $f$ 诱导链映射 $f_\#: S_\cdot(X) \longrightarrow S_\cdot(Y)$

即一列映射 $(f_\#)_q: S_q(X) \longrightarrow S_q(Y)$, $\sigma \longmapsto f\circ\sigma$

s.t.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & S_{q-1}(X) \arrow[l] \arrow[d, "f_\#"] & S_q(X) \arrow[l] \arrow[d, "f_\#"] & S_{q+1}(X) \arrow[l] \arrow[d, "f_\#"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & S_{q-1}(Y) \arrow[l] & S_q(Y) \arrow[l] & S_{q+1}(Y) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

i.e. $f_\# \circ \partial = \partial \circ f_\#$

从而可以良好定义

$$f_*: H_\cdot(X) \longrightarrow H_\cdot(Y), \quad [\sigma] \longmapsto [f\circ\sigma]$$

(Prop) $(f\circ g)_\# = f_\# \circ g_\#$

$(f\circ g)_* = f_* \circ g_*$

Pf: 显然 □

从而我们构造了函子 $H_\cdot: \mathrm{Top} \rightsquigarrow \mathrm{grAb}$

已分次 abel 群

我们用下图总结今天的构造过程.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Top} \arrow[rr, "H_\bullet"] \arrow[dr, "S_\bullet"'] & & \mathrm{grAb} \\
& Ch_{\mathbb{Z}} \arrow[ur, "\text{take homology of chain complex}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Rmk.

所谓 R-链复形即为一列 R-模 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 以及同态

$\{C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.t. $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$

而链映射 $f: C \longrightarrow D$ 即为一列同态 $f_n: C_n \longrightarrow D_n$

s.t. $\partial_D \circ f = f \circ \partial_C$

范畴 $Ch_R$ 定义为 $\mathrm{Obj}(Ch_R) = \{R\text{-链复形}\}$

$\mathrm{Hom}(C, D)$ $\{f: C \longrightarrow D \text{ chain map}\}$