一些同调代数（续）

(Prop) $0 \to A \to B \to C \to 0$ exact $\Longrightarrow$ $C \cong B/A \ (\mathrm{Im}(A \to B))$

Pf: $C \cong B/\ker(B \to C) = B/\mathrm{Im}(A \to B)$

短正合列的分裂性.

显然 $0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0$ 是正合列

$(a, c) \mapsto c$

$a \mapsto (a, 0)$

对于本质上是这样形式的短正合列，我们有如下刻画

(Prop.) 下面三个命题等价

设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是短正合列

(1) $\exists\ B \xrightarrow{p} A$ s.t. $p \circ f = \mathrm{id}_A$

(2) $\exists$ ~~B → C~~ $C \xrightarrow{s} B$ s.t. $g \circ s = \mathrm{id}_C$

(3) $\exists\ B \xrightarrow{\sim} A \oplus C$ s.t.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C \arrow[r] & 0 \\
& & A \oplus C \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Pf: 我们只证 (1) $\Rightarrow$ (3)，(2) $\Rightarrow$ (3) 类似，(3) $\Rightarrow$ (1)，(3) $\Rightarrow$ (2) 显然

Claim: $B = f(A) \oplus \ker p$

注意到 $\forall\ b \in B$，$b = \underbrace{(b - f(p(b)))}_{\in \ker p} + \underbrace{f(p(b))}_{\in f(A)}$ 即可.

~~我们建立同构~~ 由于 $\ker g = f(A)$，从而 $g|_{\ker p} : \ker p \to C$ 是同构

从而 $(f|_A)^{-1} \oplus g|_{\ker p} : f(A) \oplus \ker p \to A \oplus C$ 是同构且使图表交换 □

(Rmk) 我们称满足上面3个条件之一的短正合列为分裂（split）的

利用刻画(2)，我们立即有

(Prop) $0 \to A \to B \to C \to 0$ exact, C free $\Longrightarrow$ it is split

例 $0 \to \tilde{H}_0(X) \to H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ split $\Rightarrow H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$

下面定理常用于说明同构关系

(5-lemma)

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

平行两列为正合列，f_1, f_2, f_4, f_5 是同构 则 f_3 也是同构

Pf: 追图 或用蛇形引理推出 □

回到拓扑，我们将同调函子推广到 Top_2 上

Top_2 中对象为 (X, A) 其中 X 是拓扑空间，A 是 X 的子集 （称为拓扑空间对）

态射 $(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ ~~为~~为连续映射 $f: \cancel{X} \longrightarrow Y$ 满足 $f(A) \subset B$ （称为连续映射对）

固定 (X,A) $S.(A)$ 可自然等同为 $S.(X)$ 的子群

我们定义 $S_n(\cancel{X}, A) := S_n(X)/S_n(A)$，$\forall n \in \mathbb{Z}$

注意到 $\partial(S.(A)) \subset S.(A)$，从而 可自然定义 $\partial: S.(X,A) \longrightarrow S.(X,A)$

于是得到相对链复形 $\{S.(X,A), \partial\}$

(Def) (X,A) couple

$S_n(X,A) := S_n(X)/S_n(A)$，$\forall n \in \mathbb{Z}$，$\partial: S.(X,A) \longrightarrow S.(X,A)$，$[\sigma] \longmapsto [\partial\sigma]$

相对同调群 $H_n(X,A) := H_n(S.(X,A))$

注意 $(X,A) \xrightarrow{f} (Y,B)$ 也可诱导 $S.(X,A) \xrightarrow{f_\#} S.(Y,B)$ （因为 $f_\#(S.(A)) \subset S.(B)$）

从而可诱导 $H.(X,A) \xrightarrow{f_*} H.(Y,B)$

容易验证上述构造给出了函子 $H: Top_2 \longrightarrow$ Grd Ab

Rmk $H.(X,\phi) = H.(X)$

(Prop) 有短正合列（分裂）

$$0\to S_\cdot(A)\to S_\cdot(X)\to S_\cdot(X,A)\to 0$$

这是显然的.

于是我们有同调群的长正合列.

(Prop) 有长正合列

$$\cdots\to H_{p+1}(X,A)\xrightarrow{\delta} H_p(A)\to H_p(X)\to H_p(X,A)\xrightarrow{\delta} H_{p-1}(A)\to\cdots$$

(Rmk) 对于 Reduced homology, 我们也有类似结果.

因为 $0\to \tilde{S}_\cdot(A)\to \tilde{S}_\cdot(X)\to S_\cdot(X,A)\to 0$ 也是短正合列

从而有长正合列（上面的 $H_p(A)$, $H_p(X)$ 换为 $\tilde{H}_p(A)$, $\tilde{H}_p(X)$）

(Cor) (X,A) ~~couple~~ pair. A 可缩 则 $H_\cdot(X,A)\cong\tilde{H}_\cdot(X)$

上述长正合列的连接同态 δ 是"自然"的

(Prop) $(X,A)\xrightarrow{f}(Y,B)$ conti 则下图交换

$$\begin{tikzcd}
H_p(X,A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{p-1}(A) \arrow[d, "f_*"] \\
H_p(Y,B) \arrow[r, "\delta"] & H_{p-1}(B)
\end{tikzcd}$$

i.e. δ 是函子 H_p 到 $H_{p-1}\circ K$ 的自然变换, 其中 $K((X,A))=(A,\emptyset)$

这一命题是下面代数事实的直接推论.

(Prop) 设有链复形的交换图, 平行两列为正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}
H_p(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{p-1}(A') \arrow[d] \\
H_p(B) \arrow[r, "\delta"'] & H_{p-1}(B')
\end{tikzcd}$$

Pf: 证明归结于 δ 的定义

利用 δ 的自然性，我们可以证明 $H.(X,A)$ 的同伦不变性

Prop. (X,A), (Y,B) Pairs. $f:(X,A)\to(Y,B)$ 满足 $f:X\to Y$, $f:A\to B$ 都是同伦等价

则 $f_*: H.(X,A)\to H.(Y,B)$ 是同构.

Pf: 因自然性 我们有梯子

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_p(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_p(X,A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_*"] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_{p-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(B) \arrow[r] & H_p(Y) \arrow[r] & H_p(Y,B) \arrow[r, "\delta"] & H_{p-1}(B) \arrow[r] & H_{p-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

于是由 5 引理 可知结论成立. □

例. $H.(D^n,\partial D^n)\to H.(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 是同构.

其中同态由含入映射诱导. 由于 D^n, ∂D^n 分别是 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 的形变收缩核. 故可知其为同构.

「形变收缩核.

设 $A\subset X$. 称 A 为 X 的形变收缩核若存在 $H: X\times I\to X$ s.t. $H_0=id_X$

$H_1(X)\subset A$, $H_t|A = id_A$

由定义, H_1 可看作 $X\to A$ 的映射, 考虑 $A \underset{H_1}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} X$ 则 $\iota\circ H_1 \overset{H}{\simeq} id_X$

$H_1\circ\iota = id_A$. 故 $A\xrightarrow{\iota} X$ 是同伦等价 ⌟

下面,我们发展一些计算（相对）同调的工具

1. 切除定理　　2. M-V 列

Thm (excision)

设 $X\supset A\supset B$ 若 $\bar{B}\subset \mathrm{int}(A)$，~~故~~则含入 $i:(X\setminus B, A\setminus B)\to (X,A)$ 诱导同构 $H_\cdot(X\setminus B, A\setminus B)\longrightarrow H_\cdot(X,A)$

证明依赖于以下引理，这个引理的证明非常技术性，所以我们忽略（可见[Hatcher. AT]）

~~Lemma~~ 设$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$是一族$X$的子集，满足 $\bigcup_{i\in I}\mathrm{int}\,U_i = X$，我们定义 $S^{\mathcal U}_\cdot(X) := \sum_{i\in I} S_\cdot(U_i)$

显然 边缘算子∂可定义在 $S^{\mathcal U}_\cdot(X)\to S^{\mathcal U}_\cdot(X)$ 上，于是 $(S^{\mathcal U}_\cdot(X),\partial)$ 是链复形.

含入 $S^{\mathcal U}_\cdot(X)\longrightarrow S_\cdot(X)$ 显然是链映射，于是诱导 $H^{\mathcal U}_\cdot(X)\to H_\cdot(X)$

(Lem) $S^{\mathcal U}_\cdot(X)\longrightarrow S_\cdot(X)$ 是同伦等价，特别地，$H^{\mathcal U}_\cdot(X)\to H_\cdot(X)$是同构

Proof of excision: 记 $X\setminus B = C$，则 $\mathrm{int}(C)\cup \mathrm{int}(A) = X$

令 $\mathcal U=\{C,A\}$，则要证 $H_\cdot(C, A\cap C)\xrightarrow{i_*} H_\cdot(X,A)$是同构.

回忆群的第二同构定理 $H < G,\ N\lhd G \Longrightarrow \frac{H}{H\cap N}\cong\frac{HN}{N}$ (Ch21—) Ch1

这一事实可以推广到链复形的层次，注意有分解

$$\begin{tikzcd}
\frac{S_\cdot(C)}{S_\cdot(A)\cap S_\cdot(C)} \arrow[rr, "i_\#"] \arrow[dr, "f"'] & & \frac{S_\cdot(X)}{S_\cdot(A)} \\
& \frac{S_\cdot(A)+S_\cdot(C)}{S_\cdot(A)} \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow\ i_* = g_*\circ f_*$

f是同构，这由上述同构定理说明，从而 f_*是同构

注意有交换图，从而由5-引理以及连接同态的自然性，可知 g_*是同构

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\cdot(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & S_\cdot(X) \arrow[r] \arrow[d, "\text{inclusion}"] & S_\cdot(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\cdot(A) \arrow[r] & S_\cdot(A)+S_\cdot(C) \arrow[r] & S^{\mathcal U}_\cdot(X)/S_\cdot(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

综上 i_*是同构 □

(Cor) 我们称 (X,A) 为 good pair 若 $\exists\, U\subset X$ s.t. 满足 $\bar{A}\subset \mathrm{int}\,U$ 且 A 是 U 的形变收缩核. 此时 $H_\cdot(X,A)\xrightarrow{\pi_*} H_\cdot(X/A, A/A)$ 是同构.
特别地, $H_\cdot(X,A)\cong \tilde{H}_\cdot(X/A)$

Pf: 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
H_\cdot(X,A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_\cdot(X,U) \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_\cdot(X-A, U-A) \arrow[l, "\text{excision}"'] \arrow[d, "\sim"] \\
H_\cdot(X/A, X/A) \arrow[r, "\sim"] & H_\cdot(X/A, U/A) & H_\cdot(X/A-A/A, U/A-A/A) \arrow[l, "\text{excision}"']
\end{tikzcd}$$

□

例. $(D^n, \underset{S^{n-1}}{\overset{}{\partial D^n}})$ 是 good pair, 于是有长正合列.

$$\cdots\longrightarrow \tilde{H}_p(\partial D^n)\longrightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{\tilde{H}_p(D^n)}}\longrightarrow \tilde{H}_p(\underset{S^n}{\underset{\parallel}{D^n/\partial D^n}})\xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{p-1}(\underset{S^{n-1}}{\underset{\parallel}{\partial D^n}})\longrightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{\tilde{H}_{p-1}(D^n)}}\longrightarrow\cdots$$

故 $\tilde{H}_p(S^n)=\tilde{H}_{p-1}(S^{n-1})\quad \forall p\in\mathbb{Z}$.

显然 $\tilde{H}_p(S^0)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & p=0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ 故 $\tilde{H}_p(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & p=n\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

例. $\bigvee\limits_{\alpha\in I} S^n_\alpha = (\coprod\limits_{\alpha\in I} S^n_\alpha)/1_\alpha\sim 1_\beta,\ \forall \alpha,\beta\in I$ $\cancel{= \coprod\limits_{\alpha\in I} S^n_\alpha/(1_\alpha)_{\alpha\in I}}$ $= \coprod\limits_{\alpha\in I} S^n_\alpha/\{1_\alpha\}_{\alpha\in I}$

由 $(\coprod\limits_{\alpha\in I} S^n_\alpha, \{1_\alpha\}_{\alpha\in I})$ 是 good pair. 于是 $H_\cdot(\coprod\limits_{\alpha\in I} S^n_\alpha, \{1_\alpha\}_{\alpha\in I}) \cong \tilde{H}_\cdot(\bigvee\limits_{\alpha\in I} S^n_\alpha)$

$$\parallel$$

$$\bigoplus_{\alpha\in I}\tilde{H}(S^n_\alpha)$$

M-V sequence.

M-V 列 ~~在同调论中也是可以~~ 可看作 Van-Kampen thm 的同调类比.

(Thm) 设 ~~$X = U \cap V$, int~~

设 $U, V \subset X$ s.t. $\mathrm{int}(U) \cup \mathrm{int}(V) = X$ 则有长正合列

$$\cdots \to H_{p+1}(X) \to H_p(U\cap V) \xrightarrow{\text{sum}} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{\text{dif}} H_p(X) \to H_{p-1}(U\cap V) \to \cdots$$

Pf: 令 $\mathcal{A} = \{U, V\}$. 注意, 有短正合列.

$$0 \to S_\cdot(U\cap V) \to S(U) \oplus S(V) \to S^{\mathcal{A}}(X) \to 0$$

$$\tau \longmapsto (\tau, \tau) \qquad (\sigma, \tau) \longmapsto (\sigma - \tau)$$

由前引理 $H^{\mathcal{A}}_\cdot(X) \cong H_\cdot(X)$ □

在 de rham 上同调中也有类似结果, 且证明更加简单.

回忆 $H_{dR}(M)$ 定义为上链复形 $\langle \Omega^i(M), d \rangle$ 的同调群

i.e. $H^p_{DR}(M) := \dfrac{\ker d_p}{\mathrm{Im}\, d_{p-1}}$

我们有短正合列. 其中 $\{U, V\}$ 是 M 的开覆盖

$$0 \to \Omega^i(M) \xrightarrow{\text{restrict}} \Omega^i(U) \oplus \Omega^i(V) \xrightarrow{\text{dif}} \Omega^i(U\cap V) \to 0$$

$$(\omega, \tau) \longmapsto (\omega - \tau)$$

唯一非平凡的是 $(\omega, \tau) \longmapsto \omega - \tau$ 的满性

任取 $\theta \in \Omega^i(U\cap V)$, 取从属于 $\{U, V\}$ 的单位分解 ρ_U, ρ_V

则 $\rho_V\theta \in \Omega^i(U)$, $\rho_U\theta \in \Omega^i(V)$ 从而 $(\rho_V\theta, -\rho_U\theta) \longmapsto \theta$ ⊣

因而我们也有 $H_{dR}(M)$, $H_{dR}(U)$, $H_{dR}(V)$ 之间的长正合列