本节的目标是建立同调群间的同伦不变性，即

(H I)

$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ conti，$f \sim g$，则 $f_* = g_* : H_\cdot(X) \to H_\cdot(Y)$

作为推论，我们有

$f: X \to Y$ 是同伦等价 $\Rightarrow$ $f_*: H_\cdot(X) \to H_\cdot(Y)$ 是同构.

在证明之前，我们先引入一些同调代数的术语.

(Def)

1) 分次R模指R模C连同直和分解 $C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$.

我们常记其为 $C_\cdot$

2) 设 $C_\cdot, D_\cdot$ 为分次R模，$\varphi: C_\cdot \to D_\cdot$ 是模同态，使得 $\exists d \in \mathbb{Z}$，$\varphi(C_n) \subset D_{n+d}$，$\forall n \in \mathbb{Z}$，则称 φ 是分次同态，上面的 d 称为 φ 的度，常记 $\varphi|_{C_n} = \varphi_n$

Rmk. 上面的定义是从整体的观点出发，我们也可从分量的观点出发. 比如分次R模是一列模，分次同态是一列同态.

(Def)

(1) R 链复形指一分次 R 模 $C_\cdot$ 连同 -1 度分次同态 $\partial: C_\cdot \to C_\cdot$

(2) 链映射指 0 度分次同态 $f: (C_\cdot, \partial_C) \longrightarrow (D_\cdot, \partial_D)$

s.t. $f \circ \partial_C = \partial_D \circ f$

$$\begin{tikzcd}
\cdots & C_{n-1} \arrow[l] \arrow[d] & C_n \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n+1} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & D_{n-1} \arrow[l] & D_n \arrow[l] & D_{n+1} \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

对于链复形 $(C_\cdot, \partial)$，我们定义 $H_n(C_\cdot) := \dfrac{\ker \partial_n}{\mathrm{Im}\, \partial_{n+1}}$

i.e. n 阶同调，记 $H_\cdot(C_\cdot) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(C_\cdot)$

我们称 $\ker \partial_n$ 中元素为 n-cycle，$\mathrm{Im}\, \partial_{n+1}$ 中元素为 n-boundary.

链映射可诱导同调间的同态，

设 $f: C_\cdot \longrightarrow D_\cdot$ 是链映射

定义 $f_*: H_n(C.) \longrightarrow H_n(D.)$, $[x] \longmapsto [f(x)]$.

定义是良好的，因为若 $y = x + \partial z$，则 $f(y) = f(x) + f(\partial z)$

$= f(x) + \partial f(z)$，从而 $[f(y)] = [f(x)]$.

(Def) 设 $C. \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D.$ 是两个链映射. 称 f 与 g 同伦.
若存在1度的分次同态 $h: C. \longrightarrow D.$ 使得 $\partial h + h\partial = f - g$.
(我们称这样的 h 为 f 与 g 间的链同伦)

$$\begin{tikzcd}
\cdots & C_{n-1} \arrow[l] \arrow[dr, "h"'] & C_n \arrow[l] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dr, "h"] & \cdots \arrow[l] \\
 & \cdots & D_n \arrow[l] & D_{n+1} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

上述定义的意义在于，若 $f \overset{h}{\sim} g$，则 $f_* = g_*$.

因任取 $[x] \in H_n(C.)$, $f_*([x]) - g_*([x]) = [f(x) - g(x)]$

$= [\partial h(x)] + [h\partial(x)] = 0$

现回到拓扑，设 $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ conti，$f \overset{H}{\simeq} g$.

f 可分解为

$$X \xrightarrow[j_0]{x \mapsto (x,0)} X\times I \xrightarrow{H} Y$$

于是 $f_* = H_* \circ (j_0)_*$

同理 $g_* = H_* \circ (j_1)_*$

所以要证 $f_* = g_*$，只要证 $(j_0)_* = (j_1)_*$

由于 $(j_i)_*$ 是由 j_i 诱导的链映射诱导，i.e.

$$j_i : X \longrightarrow X\times I \rightsquigarrow (j_i)_\# : S_\cdot(X) \longrightarrow S_\cdot(X\times I)$$

$$\rightsquigarrow (j_i)_* : H_\cdot(X) \longrightarrow H_\cdot(X\times I)$$

从而

$$(j_1)_\# \sim (j_0)_\# \Longrightarrow \text{同伦不变性}.$$

于是同伦不变性的证明归结于寻找 $(j_1)_\#$ 与 $(j_2)_\#$ 间的链同伦.

我们通过所谓的 cross product 来构造，这是一种奇异链元间的乘积.

回忆：X 可缩 指其同伦等价于一个点．等价的讲，存在

$x_0\in X$，$H: X\times I\longrightarrow X$ conti, s.t. $H(x,0)=x$, $H(x,1)=x_0$

$\forall x\in X$．

Lem. 设 X 可缩，则 $H_p(X)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & p=0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

Pf: 我们利用链同伦的想法．

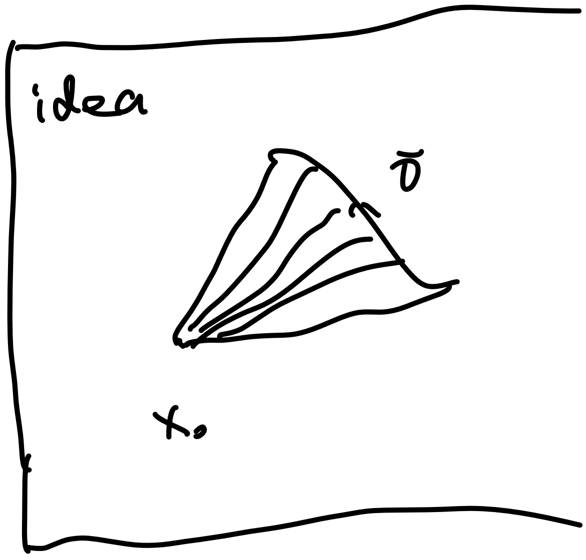
任取 $\sigma\in Sing_n(X)$，$n\geq 0$．

定义 $D\sigma\in Sing_{n+1}(X)$ 为

$$D\sigma(t_0,\cdots,t_{n+1})=H\left(\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0},\cdots,\frac{t_{n+1}}{1-t_0}\right),t_0\right)$$

直接计算可知，$n\geq 1$ 时

$$(D\sigma)^{(m)}=\begin{cases}\sigma, & m=0\\ D(\sigma^{(m-1)}), & \text{else}\end{cases}$$



我们将 D 延拓到 $S_*(X)$ 上．

固定 $n\geq 1$，$\forall\sigma\in S_n(X)$

$$D(\partial\sigma)=D\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma^{(i)}\right)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i D(\sigma^{(i)})$$

$$\partial(D\sigma)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k (D\sigma)^{(k)}=\sigma+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k D(\sigma^{(k-1)})$$

于是 $D\partial + \partial D|_{S_n(X)} = \mathrm{id}_{S_n(X)} - 0$

这说明 $(\mathrm{id}_{S_n(X)})_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(X) \quad = 0$

从而 $H_n(X) = 0$ □

Thm. 存在映射 $\times$: {奇异链} $\times$ {奇异链} $\longrightarrow$ {奇异链}

(0) $\times : S_p(X) \times S_q(Y) \longrightarrow S_{p+q}(X\times Y)$，双线性

(1) $\forall a \in X,\ b \in Y,\ \sigma \in Sing_p(X),\ \tau \in Sing_q(Y)$

$(a\times\tau)(t) = (a, \tau(t))$，$(\sigma \times a)(t) = (\sigma(t), a)$

(2) (自然性) $f: X \to X'$，$g: Y \to Y'$.

则 $(f\times g)_*(\sigma\times\tau) = (f_*\sigma)\times(g_*\tau)$

(3) $\partial(\sigma\times\tau) = \partial\sigma\times\tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma\times\partial\tau$

Pf: 首先将所有平凡的情形都定义为0

记 $\iota_p = \mathrm{id}_{\Delta_p}$

「注意若上述$\times$存在，$\overset{\text{由(2)}}{,}$ $\sigma\times\tau = \sigma_*\iota_p \times \tau_*\iota_q = (\sigma\times\tau)_*(\iota_p\times\iota_q)$

即 $\sigma\times\tau$ 由 $\iota_p\times\iota_q$ 决定 」

下面我们来构造

①我们先定义奇异0单形，与奇异0或1单形的乘积.

$\forall X, Y$ top，$a\in Sing_0(X)$，$b\in Sing_0(X)$，$\sigma\in Sing_1(X)$，$\tau\in Sing_1(Y)$

定义 $a\times b=(a,b)$，$a\times\tau(t)=(a,\tau(t))$，$\sigma\times b(t)=(\sigma(t),b)$

②固定 $p>0$，$q>0$. 若 X 已对所有阶数之和小于 $p+q$ 的链定义. 且满足 (0)-(5).

由于 $\partial(\underbrace{\partial c_p\times c_q+(-1)^p c_p\times\partial c_q}_{\in S_{p+q-1}(\Delta_p\times\Delta_q)}) = (-1)^{p-1}\partial c_p\times\partial c_q+(-1)^p\partial c_p\times\partial c_q$

$= 0$

故由 $H_{p+q}(\Delta_p\times\Delta_q)=0$

存在 $\Delta_p\times\Delta_q$ 上的奇异 $p+q$ 链，其边缘为

$\partial c_p\times c_q+(-1)^p c_p\times\partial c_q$，我们就定义其为 $c_p\times c_q$

然后对任意的 $\sigma\in Sing_p(X)$，$\tau\in Sing_q(Y)$

定义 $\sigma\times\tau := (\sigma\times\tau)_*$

③由②归纳地定义所有情形. □

Ref. [Bredon 《Topology and Geometry》]

我们称上面构造的这个映射为 Cross product.

注意：Cross product 的构造不是唯一的.

现在我们说明 $(j_1)_\# \sim (j_0)_\#$

令 $h(\sigma) = (-1)^{|\sigma|}\sigma \times id_{[0,1]}$

$$\begin{tikzcd}
S_{n-1}(X) \arrow[dr, "h"] & S_n(X) \arrow[l] \arrow[d, shift right, "(j_1)_\#"'] \arrow[d, shift left, "(j_0)_\#"] \arrow[dr, "h"] & \\
& S_n(X\times I) & S_{n+1}(X\times I) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

则 $\partial h(\sigma) = (-1)^{|\sigma|}\partial\sigma \times id_{[0,1]} - ((j_1)_\# - (j_0)_\#)\sigma$

$h\partial(\sigma) = (-1)^{|\sigma|-1}\partial\sigma \times id_{[0,1]}$

从而 $\partial h + h\partial = (j_0)_\# - (j_1)_\#$ #