代数拓扑的精神与概括：构建拓扑结构与代数结构的一些关系。形式化的讲，构建若干函子

$F: Top/Top_2/Top_*\ldots \rightsquigarrow Grp/Mod_R \ldots$

什么是同调论

我们讨论的内容为同调论（⊂代数拓扑），粗略的讲，他建立了拓扑空间与 Abel 群的关系，具体的讲：

对拓扑空间 X，我们可以定义一列 Abel 群 $\{H_q(X)\}_{q\in\mathbb{Z}}$

对连续映射 $f: X \longrightarrow Y$，可以诱导一列群同构.

$f_*: H_\cdot(X) \longrightarrow H_\cdot(Y)$

满足（函子性）

① 对连续映射 $f: X \longrightarrow Y$，$g: Y \longrightarrow Z$

$(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$

② $\forall$ 拓扑空间 X，恒同映射 $id_X: X \longrightarrow X$

所诱导的群同构仍为恒同映射，i.e. $(id_X)_* = id_{H_\cdot(X)}$

承认以上构造后，我们立马可以得知同调群是拓扑不变量，即 $X \simeq Y \Rightarrow H_\bullet(X) \cong H_\bullet(Y)$

「若 $f: X \to Y$ 是同胚，$id_X = f^{-1} \circ f$，$id_Y = f \circ f^{-1}$

$\Rightarrow id_{H_\bullet(X)} = (f^{-1})_* \circ (f)_*$，$id_{H_\bullet(Y)} = (f)_* \circ (f^{-1})_*$

从而 $(f)_*: H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$ 是群同构 」

同调论是一种加性的理论，可计算性强

本课程中，我们主要关心的拓扑空间为流形、CW复形

一些简单的应用

首先，我们要承认一些计算结果

Fact.

(a) 设 X 是拓扑空间

$H_q(X) = 0$, if $q < 0$

若 X 道路连通，则 $H_0(X) = \mathbb{Z}$

若 X 的道路连通分支为 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$，则 $H_\bullet(X) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_\bullet(X_\alpha)$

(特别地，$H_0(X) = \mathbb{Z}^{\oplus A}$，这表明我们可以通过计算

0阶同调群来数连通分支的个数>

(b) 记 $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid |x|=1\}$ $(n\geq 1)$ 则有

$$H_q(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0,n\\ 0, & \text{other}\end{cases}$$

(c) 记 $\{pt\}$ 为单点拓扑空间，则有

$$H_q(pt)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0\\ 0, & \text{other}\end{cases}$$

现在我们可以证明一些耳熟能详的定理.

记 $D^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\leq 1\}$

Thm1 (Brouwer fix point theorem)

$f: D^n \longrightarrow D^n$ 连续，则 f 有不动点，i.e.

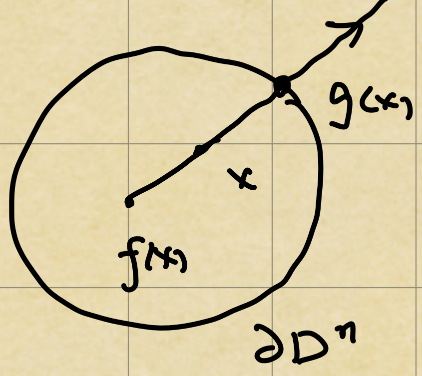
$\exists x\in D^n$, s.t. $f(x)=x$

若f无不动点

Pf: 我们定义一连续映射 $g: D^n \longrightarrow \overset{S^{n-1}}{\overset{\parallel}{\partial D^n}}$

任取 $x\in D^n$，令 $g(x)$ 为从 $f(x)$ 出发指向 x 的射线与 ∂D^n 的交点. 显然 $g|_{\partial D^n}=id_{\partial D^n}$，记 $i:\partial D^n\longrightarrow D^n$, $x\longmapsto x$

则有交换图



$$\begin{tikzcd} \partial D^n \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "id_{\partial D^n}"'] & D^n \arrow[d, "g"] \\ & \partial D^n \end{tikzcd}$$

将 $H_{n-1}(\cdot)$ 作用于图上，即得Abel群间图表

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(\partial D^n) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[dr, "id"'] & H_{n-1}(D^n) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_{n-1}(\partial D^n) \end{tikzcd}$$

所以 g_* 是满射.

当 $n>1$ 时 $H_{n-1}(D^n) = 0$, $H_{n-1}(\partial D^n) = \mathbb{Z}$

则说明存在 0 到 $\mathbb{Z}$ 的满射. 矛盾

当 $n=1$ 时 $H_{n-1}(D^n) = \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(\partial D^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

同样矛盾.

综上 f 必然有不动点 $\square$

在进入下一个定理前，我们先引入一个概念.

Def (degree)

设 $f: S^n \to S^n$ 连续，考虑群同构 $f_*: \overset{\mathbb{Z}}{\overset{\shortparallel}{H_n(S^n)}} \to \overset{\mathbb{Z}}{\overset{\shortparallel}{H_n(S^n)}}$

则 $f(1) \in \mathbb{Z}$，记 $\deg f = f(1)$，称为 f 的映射度.

Fact: $\deg \mathrm{id}_{S^n} = 1$, $\deg -\mathrm{id}_{S^n} = (-1)^{n+1}$

若 f, g 同伦，则 $\deg f = \deg g$

Thm2 (Hairy Ball Theorem)

$n \in 2\mathbb{Z}_{>0}$，则 S^n 上不存在处处非0连续切向量场 i.e.

不存在 $V: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ 连续，且 $V(x) \perp x$，$\forall x$.

S^2上切向量场

构造同伦

Pf: 反证，设存在这样的 V.

不妨设 $|V| \equiv 1$ (否则考虑 $\frac{V(x)}{|V(x)|}$)

令 $H(x,t) = \sin\frac{t}{\pi} V(x) + \cos\frac{t}{\pi} x$，$(x,t) \in S^n \times [0,1]$

则 H 是 id_{S^n} 到 $-id_{S^n}$ 的同伦.

于是 $\deg id_{S^n} = \deg(-id_{S^n}) \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1$, 矛盾! □

Euler 多面体公式与欧拉示性数

你可能听说过以下结果

对于可形变为球面的多面体，有 $V-E+F=2$

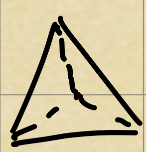
(V: 顶点数, E: 棱数, F: 面数)

我们可以试几个例子

① 

$V=8$, $E=12$, $F=6$

$V-E+F=2$

② 

$V=4$, $E=6$, $F=4$

$V-E+F=2$

③

$V=16$, $E=32$, $F=16$

$V-E+F=0$

这是因为这个多面体不可开续为 S^2

我们可以用拓扑的语言精确的描述上面的现象

Thm3 (Euler 定理)

设 Σ 是 n 维有限 CW 复形，则有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(\Sigma)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \operatorname{rank}(H_k(\Sigma))$$

(我们常记 $\chi(\Sigma)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H_k(\Sigma)$ 并称其为 Σ

的Euler示性数）

我们来解释一下上面的名词(以 $n=2$ 为例)

一个2维有限CW复形 Σ，指通过以下过程获得的拓扑空间.

「k-胞腔指k-维闭球.

取 c_0 个 0-胞腔，编号为 $\{D_j^0\}_{j=1}^{c_0}$

c_1 个 1-胞腔，—— $\{D_j^1\}_{j=1}^{c_1}$

c_2 个 2-胞腔，—— $\{D_j^2\}_{j=1}^{c_2}$

记 $X_0=\coprod_{j=1}^{c_0} D_j^0$，用映射 $\varphi_1: \coprod_{j=1}^{c_1}\partial D_j^1 \longrightarrow X_0$，

把 $\coprod_{j=1}^{c_1} D_j^1$ 粘到 X_0 上，得到 $X_1 = X_0\cup_{\varphi_1}(\coprod_{j=1}^{c_1} D_j^1)$

再用映射 $\varphi_2: \coprod_{j=1}^{c_2}\partial D_j^2 \longrightarrow X_1$，粘合得到

$\Sigma = X_1\cup_{\varphi}(\coprod_{j=1}^{c_2} D_j^2)$ 」

而 $c_k(\Sigma)$ 为 Σ 所含 k-胞腔的个数

现我们可以"证明"经典的Euler定理，

显然多面体是2维有限CW复形

且 V, E, F 分别对应不同维数胞腔的个数

于是 $V-E+F = H_0(\Sigma) - H_1(\Sigma) + H_2(\Sigma)$

而由 $H_0(S^2) = \mathbb{Z}$, $H_1(S^2) = 0$, $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$

故 $\Sigma \cong S^2$ 时，$V-E+F=2$.