抽象代数笔记

詹奇

Last updated: **December 16, 2024**

Contents

本文是刘思齐老师的抽象代数课程笔记。

1. 域与线性空间

1.1. 定义与例子

定义 1.1.1 (域): 一个域系指以下资料:
1. 集合 F, 有 $1_F, 0_F \in F$ 满足 $1_F \neq 0_F$, 有时简写为 $1, 0$.
2. F 上的加法记为 $+$, 满足加法结合律, 加法交换律, 有加法单位元 0 与加法逆元 $-a$. (这保障了加法逆元是唯一的).
3. F 上的乘法记为 $*$, 满足乘法结合律, 乘法交换律, 有乘法单位元 1, 对于非零元 a, 有乘法逆元 a^{-1}. (这保障了乘法逆元是唯一的).
4. 乘法对加法的分配律成立.

我们记 F^* 为 F 中所有非零元素的集合.

为了说明为什么我们要求 $0_F \neq 1_F$, 有以下引理:

引理 1.1.1:
1. $0_F \cdot 0_F = 0_F$.
2. $\forall x \in F, x \cdot 0_F = 0_F$

证明:
1. $0_F = 0_F + 0_F = 0_F \cdot 0_F + 0_F \cdot 0_F$, 两边减去 $0_F \cdot 0_F$ 即得.
2. $x \cdot 0_F = x \cdot (0_F + 0_F) = x \cdot 0_F + x \cdot 0_F$, 两边减去 $x \cdot 0_F$ 即得.

□

由此可见, 若 $0_F = 1_F$, 那么 F 中所有元素满足 $x = x \cdot 1_F = x \cdot 0_F = 0_f$, 这显然不是我们所期望的.

同理, 若对于域 F 上的 0_F 有逆元, 那么我们有 $0_F = a \cdot 0_F = 1_F$, 又推出了域中所有元素都是 0_F.

例子 1.1.1 (域):
1. 有理数域 $\mathbb{Q}$, 实数域 $\mathbb{R}$, 复数域 $\mathbb{C}$, 对于我们熟知的加法和乘法运算构成域.
2. $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$.
3. $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) = \left\{x + \sqrt[3]{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$
4. $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) = \left\{x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{4} \mid x_i \in \mathbb{Q}\right\}$.
5. 任取素数 p, $F = \mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$, 其中加法和乘法都是模 p 的. 其中乘法逆的存在是不显然的. 对于 F 中任意一个非零元 k, 有, 我们考虑映射 $T : F_P^* \to F_P^* : y \mapsto ky$, 易证 T 是双射, 从而存在逆元 m 使得 $km = 1$.
6. 设 F 是一个域, 则 $F(x) = \left\{\frac{P(x)}{Q(x)} \mid P(x), Q(x) \in F[x], Q(x) \neq 0\right\}$ 同样构成域.
7. $k = \mathbb{C}\left(x, \sqrt{x^3+2}\right)$, 可以视作 $\mathbb{C}(x)(y)$ 其中 $y^2 = x^3 + 2$, 则 $k = \left\{R_1(x) + R_{x(y)} \mid R_1, R_2 \in \mathbb{C}(x)\right\}$.

定义 1.1.2 (线性空间): 设 F 是一个域, V 是一个集合, 若 V 上定义了加法运算 $+ : V \times V \to V$, 以及数乘运算 $* : F \times V \to V$, 满足以下条件:

1. 对于任意 $u, v, w \in V$, 有 $u + (v + w) = (u + v) + w$.
2. 对于任意 $v \in V$, 有 $v + 0 = v$.
3. 对于任意 $v \in V$, 存在 $w \in V$, 使得 $v + w = 0$.
4. 对于任意 $v \in V$, 有 $1v = v$.
5. 对于任意 $a, b \in F, v \in V$, 有 $a(bv) = (ab)v$.
6. 对于任意 $a \in F, u, v \in V$, 有 $a(u + v) = au + av$.
7. 对于任意 $a, b \in F, v \in V$, 有 $(a + b)v = av + bv$.

线性空间的观点对于研究域的结构有很大的帮助, 例如我们可以将 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ 视作 $\mathbb{Q}$ 上的二维线性空间. $\mathbb{R}$ 可以视作 $\mathbb{Q}$ 上的无穷维线性空间.

例子 1.1.2: $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\alpha) = \{x + \alpha y \mid x, y \in \mathbb{F}_2\}$. 其中的问题是我们该取什么样的 α. 考虑 $\mathbb{F}_2[x]$ 上的所有二次多项式 $f(x) = x^2 + px + q$, 及 $x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1$. 其中前三个都是可约的, 所以我们取 α 满足 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

1.2. 域的同态

我们先从线性空间上的同态(线性映射)开始.

定义 1.2.1 (线性映射): 设 V_1, V_2 是域 F 的线性空间, 若映射 $f : V_1 \to V_2$ 满足:

1. 对于任意 $u, v \in V_1$, 有 $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
2. 对于任意 $a \in F, v \in V_1$, 有 $f(av) = af(v)$.

那么我们称 f 是一个线性空间的同态, 即线性映射.

类似地, 我们可以定义域的同态.

定义 1.2.2 (域的同态): 设 F_1, F_2 是域, 若映射 $f : F_1 \to F_2$ 满足:

1. $f\left(0_{F_1}\right) = 0_{F_2}, f\left(1_{F_1}\right) = 1_{F_2}$.
2. 对于任意 $a, b \in F_1$, 有 $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
3. 对于任意 $a, b \in F_1$, 有 $f(ab) = f(a)f(b)$.

那么我们称 f 是域的同态.

不同于群和环的同态, 事实上域的同态是一个“没什么用”的概念, 有下面的定理:

定理 1.2.1: 设 F_1, F_2 是域, $f : F_1 \to F_2$ 是域的同态, 则 f 是单射.

证明: 设 $a, b \in F_1$ 满足 $f(a) = f(b)$. 设 $x = b - a$. 若 $x \neq 0$, 那么存在 $y \in F_1$, 使得 $xy = 1$. 那么有 $0 \cdot f(y) = (f(b) - f(a)) \cdot f(y) = f(1) = 1$, 矛盾. 所以 $x = 0$, 即 $a = b$. □

这也就说明若存在一个 $\varphi : F_1 \to F_2$, 那么我们视 F_1 为 F_2 的子域, 所以在研究域的时候, 我们不关心域的同态, 而更关心子域和域扩张的概念.

定义 1.2.3 (子域与扩域): 设 F 是域, 若 E 是 F 的子集, 且 E 也构成域, 那么我们称 E 是 F 的子域, 同时称 F 是 E 的扩域, 记为 F/E.

定义 1.2.4 (域的同构): 设 F_1, F_2 是域, 若存在双射 $\varphi : F_1 \to F_2$, 且满足域的同态, 那么我们称 F_1 与 F_2 是同构的. 若 $F_1 = F_2$, 我们称 φ 是域 F_1 的自同构. 我们称在自同构下不变的元素为域 F_1 的不动域.

例子 1.2.1:
1. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)/\mathbb{Q}, \mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$.
2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x + iy \mapsto x - iy$ 是域 $\mathbb{C}$ 的自同构, 其中不动域是实数域 $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ 与 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ 不存在同态.

事实上, $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$ 是某种程度上的“最小”域, 我们有以下定理:

定理 1.2.2: $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$ 没有真子域.

定理 1.2.3: 若 F 是 E 的扩域, 则 F 是 E 上的线性空间, 我们记 $[F : E] = \dim_E F$, 称为 F/E 的次数. 若 $[F : E] < \infty$, 则称 F/E 为有限扩张.

1.3. 域的特征

定义 1.3.1 (域的特征): 设 F 是域, 若存在最小的正整数 n, 使得 $n1_F = 0_F$, 那么我们称 n 为域 F 的特征, 记为 $\mathrm{char}(F) = n$. 若不存在这样的 n, 我们称 F 的特征为 0.

容易看出如果域的特征是正的, 那么它一定是素数. 若 $\mathrm{char}(F) = 0$, 那么 $\mathbb{Q}$ 是 F 的子域; 若 $\mathrm{char}(F) = p$, 那么 $\mathbb{F}_p$ 是 F 的子域. (注意这里的子域可以看作是存在一个域同态而不是严格的包含). 这就是说明了每个域都是 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{F}_p$ 的扩域.

在正特征的域上有一个有趣的运算. 若 $\mathrm{char} F = p > 0$, 我们考虑 $(x + y)^p$, 由二项式定理, 我们有: $(x + y)^p = x^p + y^p + C_p^1 x^{p-1} y + ... + C_p^{p-1} x y^{p-1} + y^p = x^p + y^p$. 我们记 $\sigma : F \to F$ 满足 $x \mapsto x^p$, 由上面的性质容易发现 σ 是一个域同构, 我们称 σ 为域 F 的 Frobenius 自同构.

1.4. 域的扩张

定义 1.4.1: 设 E/F 是一个域扩张, 对于 E 中的子集 S, 有 $F(S)$ 为 E 中包含 $F \cup S$ 的最小子域, 称为 F 在 S 上生成的域. 若 S 是有限的且 $F(S) = E$, 我们称 E 是由 F 上的有限生成扩张. 若对 E 的任意有限子集, $F(S) \neq E$, 则称 E 为无限生成的.

例子 1.4.1:
1. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限生成扩张, 也是有限扩张.
2. $\mathbb{R}(x)$ 有理函数域是 $\mathbb{R}$ 上的有限生成扩张, 但不是有限扩张.

3. $F=\mathbb{Q},\ E=\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2^k}}\right), k=1,2,....$ 我们考虑逐步添加元素. $E_1=\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2}}\right), E_2=E_1\left(2^{\frac{1}{2^2}}\right)=\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2^k}}\right)$, 容易得到 $E_k=\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2^k}}\right)$. $F=E_0\subseteq E_1\subseteq ..., E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$.

我们研究的域扩张要解决的问题: 一个尽可能简单的域扩张是什么样的?

定理 1.4.1: 有限扩张一定是有限生成扩张, 反之不然.

证明: 若 $[E:F]=n$, 可推得 $E=\operatorname{Span}_{F(e_1,...,e_n)}, E=F(e_1,...,e_n)$. □

定义 1.4.2 (代数扩张与超越扩张): 设扩域 E/F, 若 $u\in E$ 存在 $f(u)=0, f\neq 0, f\in F[x]$, 则称 u 为 F 上的代数元. 若 $\frac{E}{F}$ 中的每个元素都是代数元, 则称 E/F 为代数扩张. 若存在 $u\in E$ 使得 u 不是任何 $f\in F[x]$ 的根, 则称 u 为超越元, E/F 为超越扩张.

例子 1.4.2:
1. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ 为代数扩张.
2. $\mathbb{Q}(x), \mathbb{Q}(\pi)$ 为超越扩张.

现在我们有了三个“不太大”的扩张, 有限扩张, 有限生成扩张和代数扩张, 我们的目标是理解这三个概念之间的关系, 从而理解域上较小的扩张是什么样的.

我们先证明一些有关代数数的性质.

引理 1.4.1: 设 $E/F, \alpha, \beta$ 是 F 上的代数元, 则 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 也是代数元.

这一引理有不同的证法. 一种证法基于对称多项式的理论直接构造出对应的多项式, 我们这里给出另一种证法.

证明: 设 $f(\alpha)=0, f\in F[x], g(\beta)=0, g\in F[x], \deg f=n, \deg g=m$. 定义 $h(y)=R_x(f(x),g(y-x))\in F[y]$. 其中 $R_{x(A[x],B[x])}$ 为多项式 A,B 关于变量 x 的结式. 我们断言 $h(\alpha+\beta)=0$, 这是因为 $f(x)$ 与 $g(\alpha+\beta-x)$ 有公共根 $x=\alpha$. 对于 $\alpha\beta$ 同理. □

现在我们来看具体的关系.

定理 1.4.2: 有限扩张一定是代数扩张, 反之不然.

证明: 设 $[E/F]=n$ 是有限扩张, 对于任意 $u\in E$, 我们要找 $f\in F[x]$ 使得 $f(u)=0$. 考虑 $1,u,u^2,...\in E$. 由 $\dim_F(E)=n$, 所以 $1,u,u^2,...,u^n$ $F-$线性相关, 所以存在 $b_0,...,b_n\in F$ 不全为 0, 使得 $b_0+b_1u+...+b_nu^n=0$, 故 u 是代数元.

反例: $F=\mathbb{Q}, E=\mathbb{Q}\left(2^{\frac{1}{2^k}}\right), k=1,2,...$ 是代数扩张, 但不是有限生成扩张, 更不是有限扩张. □

由上文的例子我们知道代数扩张不能推出有限生成扩张, 有限生成扩张也不能推出代数扩张. 看起来代数扩张和有限生成扩张都是不太好的扩张, 但下面的定理告诉我们, 有限生成扩张和代数扩张的交集是一个很好的扩张.

定理 1.4.3: 有限生成的代数扩张是有限扩张. 具体来说, 对于域扩张 E/F, 以下两个事实等价:
1. E/F 是有限扩张.
2. $E = F(u_1, ..., u_n)$, 其中 $u_1, ..., u_n$ 是 F 上的代数元. 此时 E/F 是代数扩张.

1. (1) => (2). 设 $[E : F] = n, u_1, ...u_n$ 是 E/F 的基, 则 $E = F(u_1, ..., u_n)$. 因为 E/F 是代数扩张, 所以 $u_1, ..., u_n$ 是代数元.
2. (2) => (1). 为了证明这一点, 我们需要一些定义和引理.

定义 1.4.3 (中间域): 设 E/F, 则域 K 是 E 和 F 的中间域, 若 $F \subseteq K \subseteq E$.

例子 1.4.3: 下图即为中间域的一个例子.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) & \\
\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \arrow[ur] & & \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) \arrow[ul] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

引理 1.4.2 (维数公式): 设 E/F 是有限扩张, K 是一个中间域, 则 $[E : F] = [E : K][K : F]$.

证明: 有限维线性空间的线性子空间自然也是有限的. 设 $u_1, ..., u_n$ 是 K/F 的基, $v_1, .., v_m$ 是 E/K 的基, 下面构造 E/F 的基. 对于 $\beta \in E$, 存在 $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$ 使得 $\beta = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m$, 对于每个 α_i 存在 $a_{i1}, ..., a_{in} \in F$, 使得 $\alpha_1 = a_{ii} u_1 + ... + a_{in} u_n$, 整理可得 $\beta = \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} u_j v_i$. 所以 $\dim_F E \leq n \cdot m$. 下证 $u_j v_i$ 线性无关. 设 $\Sigma_{i,j} c_{ij} u_j v_i = 0$, 推得 $\Sigma_i \left(\Sigma_j c_{ij} u_j\right) v_i = 0$. 由 $v_1, ..., v_m$ 线性无关, 所以 $\Sigma c_{ij} u_j = 0$, 由 $u_1, ..., u_n$ 线性无关, 得 $c_{ij} = 0$. □

引理 1.4.3: 单代数扩张是有限扩张.

证明: 设 $E = F(u)$, u 是 F 上的代数元, 我们要证明 $[E : F] < \infty$. 设 $f \in F(x), f \neq 0$ 使得 $f(u) = 0$, 并且 f 是满足该条件的次数最小的首一多项式. 设 $\deg f = n$, 则 $E = f(u) = \mathrm{Span}_F(1, u, ..., u^{n-1})$, 由此 $\dim_F E = n$, 是有限的. □

回到我们想要证明的结论, 我们同样可以逐个添加元素. $F \subseteq F(u_1) \subseteq F(u_1, u_2) \subseteq ... \subseteq F(u_1, ..., u_n)$. 每次的扩张都是单代数扩张, 也就是有限扩张, 维数就是有限的. 而由维数公式我们知道最终的维数也就是 $[F(u_1, u_2) : F(u_1)] \cdot [F(u_1) : F] \cdot ....$

至此, 我们证明了有限生成的代数扩张一定是有限扩张. □

定理 1.4.4: 若 $F \subseteq K \subseteq E$, 其中 K/F 代数, E/K 代数, 那么 E/K 代数.

证明: 设 $\alpha \in E$, 存在 $f \in K[x], f \neq 0, f(\alpha) = 0$. 设 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a^n, a_i \in K$. 设 $K' = F(a_1, ..., a^n)$, 注意到 $a_1, ..., a_n$ 在 F 上代数, 则 K'/F 是有限扩张. 再注意到 $K'(\alpha)/K'$ 是一个单扩张, 所以 $K'(\alpha)/K'$ 是有限扩张, 可得 $[K'(\alpha) : F] = [K'(\alpha)][K' : F] = \infty$, 也是有限扩张. 因为 $F \subseteq K'$, 所以 $F(\alpha) \subseteq K'(\alpha)$ 也是有限扩张. 所以 $F(\alpha)$ 是代数扩张, α 是代数元. □

1.5. 代数闭包

上一节我们考虑的是小的扩张长什么样, 这一节我们讨论大的扩张, 尤其是大的代数扩张.

定义 1.5.1 (代数闭包): 设 F 是域, 若 E/F 是代数扩张, $K = \{\alpha \in E \mid \alpha \textbf{在} E \textbf{ 代数}\}$, 显然 K 是中间域, 我们称 K 是 F 在 E 中的代数闭包.

若 K 没有真代数扩张, 我们称 K 是代数闭域.

若 K/F 是代数扩张且 K 是代数闭域, 我们称 K 是 F 的一个(绝对)代数闭包.

例如 $\mathbb{C}$ 就是代数闭的.

定理 1.5.1: $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的相对代数闭包就是 $\mathbb{Q}$ 的一个绝对代数闭包.

证明: 我们证明一个更一般的版本: E 是代数闭的, F 是 E 的子域, K 是 F 在 E 中的代数闭包, 则 K 是 F 的绝对代数闭包.

只需证明 K 是代数闭的. 假设 K' 是 K 的一个代数扩张, $\alpha \in K'$, 则由 α 的极小多项式 $f(x) \in K[x]$, 因为 $K \subseteq E$, 所以 $f(x) \in E[x]$, 所以 $f(x) = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_n) \in K[x], a_i \in E$. 另一方面 α_i 是 K 上的代数元, 因为 K 是相对代数闭包, 所以 $a_i \in K$, 所以 $f(x) = x - \alpha$. 最终我们得到 $K' = K$. □

1.6. Galois 群初探

一个自然的问题是我们还没有定义抽象的群, 那么该如何讨论 Galois 群. 事实上在 Galois 研究时他并没有采用抽象的群概念, 而是考虑一种特殊的群, 即置换群.

定义 1.6.1 (对称群): 设集合 $X, S(X) = \{\sigma : X \to X \mid \sigma \textbf{ 是双射}\}$, 我们可以定义映射的复合和逆运算, 也有单位映射 e. 事实上它满足如下性质:

1. $(\sigma\tau)\mu = \sigma(\tau\mu)$.
2. $\sigma e = e\sigma = \sigma$.
3. $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

我们称 (S, e) 是 X 上的对称群.

事实上上述的性质其实就是抽象群的定义.

我们一般不需要研究整个置换, 而是研究一部分的封闭子集, 也就引出了置换群的概念.

定义 1.6.2 (置换群): 若 $G \subseteq S$ 满足于任意 $\sigma, \tau \in G$, 有 $\sigma\tau \in G, \sigma^{-1} \in G$, 则称 G 是 X 上的置换群.

更进一步的, 我们可以定义域 E 上的自同构群, 记为 $\mathrm{Aut}(E) = \{\sigma \in S(E) \mid \sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1, \sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta), ...\}$.

定义 1.6.3 (Galois 群): 设 E/F 是域扩张, 我们定义 $\mathrm{Gal}(E/F) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(E) \mid \sigma|_F = \mathrm{id}_F\}$, 称为 E/F 的 Galois 群.

定理 1.6.1: 若 E/F 是有限扩张, 则 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 是有限群.

证明: 设 $E = \mathrm{Span}_{F(u_1,...,u_n)}$, 其中 u_n 在 F 上代数. 对于 u_1, 有极小多项式 $f_1 \in F[x]$, 满足 $f_1(u_1) = \mu_1^n + a_1 u_1^{n-1} + ... + a_n = 0, a_i \in F$.

设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(E), \sigma|_F = \mathrm{id}_F$, 考虑 σ 作用 f_1. $\sigma(f_1(u_1)) = \sigma(0) = 0 = \sigma(u_1^n + ... + a_n) = f_1(\sigma(\mu_1))$.

这就说明了对于 $X_1 = \{\sigma \in E \mid f_1(\alpha) = 0\}, \sigma|x_1$ 是 X_1 的一个置换. 同样的对于任意 u_1 取 f_i, 定义 $X = \bigcup_{i=1}^n X_i, \sigma$ 是 X 上的一个置换. 由于 X 是有限集, 所以 σ 是有限的. □

定义 1.6.4 (不动域): 设 E 是一个域, 且 $G \leq \mathrm{Aut}(E)$, 定义 $\mathrm{Inv}(G) = \{\alpha \in E \mid \sigma(\alpha) = \alpha, \sigma \in G\}$, 称为 G 的不动域.

定理 1.6.2 (Artin 引理): 设 E 是域, $G \leq \mathrm{Aut}(E)$, 则 $\mathrm{Inv}(G)$ 是 E 的子域, 且 $[E : F] \leq |G|$, 于是 E/F 是有限扩张.

证明: 设 $G = \{\eta_1 = e, ..., \eta_n\}, |G| = n$. 下证对于 $m > n$, E 中的任意 $u_1, ..., u_m$ 是线性相关的. 考虑 $\eta_j\left(x_1\mu_1 + ... + x_{\mu_m}\right) = x_1\eta_{j(\mu_1)} + ... + x_m\eta_{j(\mu_m)} = 0$, 一定有非零解, 所以存在 $(x_1, ..., x_m) \in E^m$. 下证 $x_j \in F$.

我们从这些解挑一个含 0 元素最多的解, 记为 $x = x_1, ..., x_m$, 不妨假设 $x_1 \neq 0, x_1 = 1$, 下证 $x_2, ..., x_m \in F$. 假设 $x_2 \notin F$, 则存在 $\eta \in G$ 使得 $\eta(x_2) \neq x_2$, 考虑 $\eta(x) = (1, \eta(x_2), ..., \eta(x_m))$, 显然 $\eta(x)$ 仍是方程的解, 且 $\eta(x)$ 0 的个数和 x 中个数一样多.

考虑 $\eta(x) - x$ 仍然是方程组的解, 但包含更多的 0, 另一方面 $\eta(x_2) - x_2 \neq 0$, 矛盾! □

事实上我们可以证明 $[E : F] = |G|$, 但这需要一些额外的知识.

有了这两个方向的引理, 我们可以考虑它们的复合, 就有了下面两个问题:

Q1. E/F 是有限扩张, $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ 是有限群, 我们可以定义 $F' = \mathrm{Inv}(G)$ 由定义可知 $F \subseteq F'$. 问题是 F' 与 F 能否相等?

Q2. 有 E 域, $G \leq \mathrm{Aut}(E)$, 我们有 $F = \mathrm{Inv}(G)$, 其中 E/F 是有限扩张, 于是 $G' = \mathrm{Gal}(E/F)$ 是有限群, 由定义可知 $G \subseteq G'$. 问题是 G 与 G' 能否相等?

对于 Q2, 我们的结论是肯定的, 这也被称为 Artin 定理.

而对于 Q1, 则不能保证, Galois 理论研究的就是在什么样的有限扩张 E/F 可以使得 $\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}(E/F)) = F$.

例子 1.6.1:

1. $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), F = \mathbb{Q}$, 易知 $\mathrm{Gal}(E/F) = \{\mathrm{id}\}$, 所以 $F' = E \neq F$. 我们考虑 $\alpha = \sqrt[3]{2}$, 极小多项式 $f(x) = x^3 - 2 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$. 可以看到另外两个复数根都不在 E 中, 方程的其他根没有 E 中.

2. $F = \mathbb{F}_2(T), E = F\left(\sqrt{T}\right), \sqrt{T} = s$, E 可以写成 $\mathrm{Span}_T(1, s)$, 考虑 $\sigma : E \to E$ 是保 F 的一个自同构, $\sigma(1) = 1, \sigma(s) = u$. 因为 $s^2 = T$, 所以 $\sigma(s)^2 = \sigma(T) = T$, 即 $u^2 = T$. 考虑 $u = a + bs, a, b \in F$, $u^2 = a^2 + b^2 T = T$, 得到 $a^2 = T(1 + b^2) = T(1 + b)^2$. 考虑两边的次数, 只能有 $a = 0, b = 1$, 所以 $u = s$, 即 $\sigma(s) = s$, 所以 $F' = E$.

为了避免这两种坏情况, 我们后面要引入分裂域, 正规扩张等概念. 对于这些问题的深入探讨, 要留到最后一部分, 等我们讨论完环论和群论的基础知识.

2. 环与模

2.1. 定义与例子

定义 2.1.1 (环): 设 R 是一个集合, 定义了加法运算 $+ : R \times R \to R$, 以及乘法运算 $* : R \times R \to R$, 满足以下条件:

1. 对于任意 $a, b, c \in R$, 有 $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. 对于任意 $a, b \in R$, 有 $a + b = b + a$.
3. 存在 $0 \in R$, 使得对于任意 $a \in R$, 有 $a + 0 = a$.
4. 对于任意 $a \in R$, 存在 $-a \in R$, 使得 $a + (-a) = 0$.
5. 对于任意 $a, b, c \in R$, 有 $a(bc) = (ab)c$.
6. 对于任意 $a, b, c \in R$, 有 $a(b + c) = ab + ac$.
7. 对于任意 $a, b, c \in R$, 有 $(a + b)c = ac + bc$.

我们称 $(R, +, \cdot)$ 构成一个环.

若存在 $1_R \in R$ 满足 $a1_R = 1_R a = a$, 称 1_R 为单位元, 这样的环称为幺环.

若 $ab = ba$, 我们称 R 是交换环.

例子 2.1.1 (环):

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m = \{0, 1, ..., m - 1\}$.
2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 等所有的域都是环.
3. 多项式环.
4. 有线性空间 V, 则 $\mathrm{End}(V)$ 是一个环.
5. 考虑 $R = m\mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. R 没有单位元.
6. $\mathbb{Z}[i]$ 为 Gauss 整数环. $\mathbb{Z}[\eta_m], \eta_m = e^{2\pi \frac{i}{n}}$.
7. 设集合 X, 环 R, $R^X = \{f : X \to R\}$, 定义 $f + g = x \mapsto f(x) + g(x)$, $fg = x \mapsto f(x)g(x)$, 则 R^X 是一个环.
8. 假设 G 是有限群, F 是群, 我们定义 $R = \mathrm{Span}_{F(G)}$, 不难按定义写出 R 的加法和乘法, 叫做 G 的群代数, 这是群表示论的基础.
9. $\mathbb{H} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1, i, j, k)$,其中 $1, i, j, k$ 是四元数, 定义 $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$, 这是一个含有单位, 非交换, 非零元可逆的环. 容易看出 $(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$.

定义 2.1.2 (模): 设 R 是一个环, M 是一个集合, 定义了加法运算 $+: M \times M \to M$, 以及乘法运算 $*: R \times M \to M$, 满足以下条件:

1. 对于任意 $a, b, c \in M$, 有 $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. 对于任意 $a, b \in M$, 有 $a + b = b + a$.
3. 存在 $0 \in M$, 使得对于任意 $a \in M$, 有 $a + 0 = a$.
4. 对于任意 $a \in M$, 存在 $-a \in M$, 使得 $a + (-a) = 0$.
5. 对于任意 $a, b \in R, x \in M$, 有 $a(x + y) = ax + ay$.
6. 对于任意 $a, b \in R, x \in M$, 有 $(a + b)x = ax + bx$.
7. 对于任意 $a, b \in R, x \in M$, 有 $(ab)x = a(bx)$.
8. 对于任意 $x \in M$, 有 $1x = x$.

我们称 $(M, +, \cdot)$ 构成一个 左R-模. 同理可以定义右R-模.

例子 2.1.2 (模):

1. 域上的线性空间是模.
2. $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$, 定义 $(a, \overline{x}) \mapsto \overline{a \cdot x}$. 更进一步的, 如果 G 是交换群, 可以定义 $\mathbb{Z} \times G \to G$, 其中 $(a, g) \mapsto g^a$, 我们称为 $\mathbb{Z} - j$ 模.
3. (还有很多例子但我懒得写了)

2.2. 环与模同态

定义 2.2.1 (环同态): 设 R, S 是两个环, $\varphi: R \to S$ 是一个映射, 若满足:

1. 对于任意 $a, b \in R$, 有 $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
2. 对于任意 $a, b \in R$, 有 $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

则称 φ 是一个环同态. 若 R, S 都是幺环, 且 $\varphi(1_R) = 1_S$, 则称 φ 是幺环同态.

其他的一些我们所期待的性质都是可以推出的, 例如 $\varphi(0) = 0, \varphi(-a) = -\varphi(a), \varphi(a^n) = \varphi(a)^n$ 等.

定义 2.2.2 (模同态): 设 R 是环, M, N 是两个模, $\varphi: M \to N$ 是一个映射, 若满足:

1. 对于任意 $a, b \in M$, 有 $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
2. 对于任意 $a \in R, x \in M$, 有 $\varphi(ax) = a\varphi(x)$.

则称 φ 是一个模同态.

例子 2.2.1:

1. 考虑 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ 上的一个映射 $a \mapsto (n \bmod m)$ 是环同态. 有趣的是不存在环同态 $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}$. 假设存在, 则 $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, ..., \varphi(m) = m$, 但是 $\varphi(m) = \varphi(0) = 0$, 矛盾.
2. 1 中的例子不难推广到 $\mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m$.
3. $R = F[x]$, 对于 $\alpha \in F$, 定义 $\varphi(f) = f(\alpha)$, 则 φ 是一个环同态.

定义 2.2.3: 设 $\varphi: R \to S$ 是一个环同态, 则 $\ker(\varphi) = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\}$, 称为 φ 的核. 而 $\operatorname{img}(R) = \{\varphi(a) \mid a \in R\}$, 称为 φ 的像.

对于模也是一样的, 我们不再赘述.

注意到环的核与像都是在加法与乘法下封闭的, 我们可以从中提炼出子环的概念.

定义 2.2.4: 设 R 是一个环, $S \subseteq R$, 若满足 S 是 R 的子集, 且对于任意 $a, b \in S$, 有 $a+b, ab \in S$, 则称 S 是 R 的子环.

显然, 对于环同态, 它的核与像是一个子环. 不过核有一个更强的性质: $a \in \ker(\varphi), b \in R \Rightarrow ab \in \ker(\varphi)$, 这是因为 $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0\varphi(b) = 0$. 这启示我们子环和子环之间也是不同的. 对于这种子环称为理想.

定义 2.2.5: 设 R 是一个环, $I \subseteq R$, 若满足 I 是 R 的子集, 且对于任意 $a \in I, b \in R$, 有 $ab \in I$, 则称 I 是 R 的左理想. 右理想类似定义.

不难看出, 对于交换环来说 aR 自然构成一个理想, 因为 $ax + ab = a(x+y), axay == a(axy)$. 这种理想称为由 a 生成的主理想.

例子 2.2.2:

1. $\mathbb{Z}$ 中的理想都是主理想. 假设 I 是 $\mathbb{Z}$ 的一个理想, 且 $I \neq \{0\}$, 则存在 $m \in I, m > 0$ 是最小的, 则 $I = m\mathbb{Z}$. 若存在 $n > 0$ 不能表示为 m 的倍数, 则根据裴蜀定理, 存在 $x, y \in \mathbb{Z}$ 使得 $mx + ny = \gcd(m, n) < m$, 矛盾.
2. 考虑 $R = \mathbb{Z}\left(\sqrt{-5}\right), I = \left\{a + b\sqrt{-5} \mid a \equiv b \bmod 2\right\}$, 不难证明 I 是 R 的一个理想. 它不是主理想, 可以视作 $I = \operatorname{Span}\left\{2, 1 + \sqrt{-5}\right\}$.

我们知道域有特征的概念, 但当我们考虑环的时候, 这个概念似乎不太好. 以 $\mathbb{Z}_6$ 为例, 它的特征是 6, 然而对于元素 2 来说, $3 \cdot 2 = 0$, 这似乎是一个特征为 3 的环. 为了解决这个问题, 我们引入了零因子的概念.

定义 2.2.6: 设 R 是一个环, 若存在 $a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0$, 使得 $ab = 0$, 则称 a 和 b 是 R 中的零因子.

若交换幺环 R 中没有零因子, 则称 R 是一个整环.

而在整环上, 特征有了非常好的定义, 我们有下面的定理.

定理 2.2.1: 设 R 是一个整环, 若 $a \in R, a \neq 0, m \in \mathbb{N}, ma = 0$, 则存在素数 p 使得 $\forall b \in R, pb = 0$.

证明: 任取 $b \in R$, 考虑 $0 = 0 \cdot b = (ma)b = a(mb) = 0 \Rightarrow mb = 0$. 找素数与域上的证明类似. □

2.3. 子环, 理想与商环

上文已经介绍过子环和理想的概念. 我们讨论一些例子.

例子 2.3.1:

1. 所有环同态的 ker 都是理想. (后面会证明所有的理想也都是某一个环同态的 ker).
2. R 和 $\{0_R\}$ 是 R 的理想, 称为平凡理想.
3. 若 R 是幺环, I 是理想, 且 $1_R \in I$, 则 $I = R$.
4. 若 R 是域, 则 R 的理想只有 $\{0_R\}$ 和 R 本身.
5. $R = \mathbb{C}[x]$, 我们证明这也是主理想环. 首先 $\mathbb{C}[x]$ 是一个整环. 假设理想 $I \neq 0, I \neq 1$, 假设存在多项式 $P(x) \in I, \deg p \geq 1$. 不妨设 P 在 I 是次数最下的, 这对于任意 $Q(x) \in I$, 考虑带余除法 $Q(x) = a(x)P(x) + b(x)$, 其中 $\deg b < \deg P$, 由理想定义可知 $a(x)P(x) \in I \Rightarrow b(x) \in I$. 从而 $b = 0$.
6. 考虑 R= $\mathbb{C}[x, y]$ 考虑 $I = xR + yR = \{p \in R \mid p(0,0) = 0\}$, 这不是主理想.

上面的讨论引出了生成的概念.

定义 2.3.1: 设 R 是一个环, $a \in R$, 考虑 a 所生成的理想 $I_a = (a) = \left\{\sum_{i=1}^{k} f_k a g_k \mid f_k, g_k \in R, k \in \mathbb{N}\right\}$.

定义 2.3.2: 设环 R, I 是 R 的一个理想, 定义 R 上的二元关系 $\underset{I}{\sim}$: $a \underset{I}{\sim} b \Leftrightarrow b - a \in I$, 不难验证这是一个等价关系. 在等价类 R/I 上定义 $(a+I)+(b+I) \coloneqq a+b+I$; $(a+I)(b+I) \coloneqq (ab+I)$. 可以验证这是良定义的, 且构成一个环, 称为 R 关于 I 的商环.

不难发现, 考虑 $\pi : R \to R/I, a \mapsto a+I$, 则 π 是一个满射环同态, 且 $\ker(\pi) = I$.

例子 2.3.2:
1. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$
2. $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$

2.4. 同态基本定理与中国剩余定理

定理 2.4.1 (第一同态定理): 设 $\varphi : R \to S$ 是一个环同态, 则 $R/\ker(\varphi) \cong \operatorname{img}(\varphi)$.

证明: 记 $I = \ker(\varphi)$ 考虑映射 $\psi : R/I \to \operatorname{Img}(\varphi), a+I \mapsto \varphi(a)$, 不难验证各种性质⋯ □

定理 2.4.2: 若 $\varphi : R \to S$ 是满同态, $J = \ker(\varphi)$ 是 R 的理想, 那么
1. 对于 R 中包含 J 的子环 R', 记 $S' = \varphi(R')$, 则 S' 是 S 的子环; 反之对于 S 的子环 S', 记 $R' = \varphi^{-1}(S')$, 则 R' 是 R 中包含 J 的子环.

特别的, 上述两条若将“子环”换成“理想”也成立, 且此时 $R/R' \cong S/S'$.

2. 对于每个包含于 J 的 R 的理想 I, 存在唯一的环同态 $\overline{\varphi} : R/I \to S$ 使得 $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi_I$, 其中 π_I 是 R 到 R/I 的商同态, 且此时 $\ker(\overline{\varphi}) = J/I$, 于是 $(R/I)/(J/I) \cong R/J$.

证明:
1. R' 是子环 $\Rightarrow S' = \varphi(R')$ 是子环, 容易得到.
2. S' 是子环 $\Rightarrow R'$ 是子环, 容易得到.
3. R' 是理想 $\Rightarrow S' = \varphi(R')$ 是理想. 设 $s_1 \in S', s_2 \in S$, 要证明 $s_1 s_2 \in S'$. 由定义知存在 $r_1 \in R' s.t. s_1 = \varphi(r_1)$, 由满同态知存在 $r_2 \in R s.t. s_2 = \varphi(r_2)$, 则 $s_1 s_2 = \varphi(r_1)\varphi(r_2) = \varphi(r_1 r_2) \in S'$.
4. S' 是理想 $\Rightarrow R'$ 是理想.
5. 要证 $R/R' \cong S/S'$, 定义 $\psi : a + R' \mapsto \varphi(a) + S'$, 良定义不难看出. 容易验证 ψ 是单的, 满的, 且为环同态.

定理的第一条证明完毕, 我们回答了对于包含 ker 的子环或者理想的情况.

6. 首先 I 是 J 的理想. 定义 $\overline{\varphi} : R/I \to S, a+I \mapsto \varphi(a)$, 同样不难证明这是良定义的, 满的, 同态.

在验证完 $\ker(\overline{\varphi}) = J/I$ 后, 由第一同构定理自然有 $R/I/\ker(\overline{\varphi}) \cong \operatorname{Img}(\overline{\varphi}) = S \cong R/J$, 这一结论我们称为第三同构定理.

7. $\overline{\varphi}(a+I) = \varphi(a) = 0 \Rightarrow a \in \ker(\varphi) = J \Rightarrow a+I \in J/I \Rightarrow \ker(\overline{\varphi}) \subseteq J/I$. 另一边也是显然的.
8. 最后证明唯一性.

这一部分回答的是被 ker 包含的理想的情况. □

上面回答了两个理想有包含关系的情况, 下面我们考虑两个理想的和与积, 显然它们都是理想.

定理 2.4.3 (第二同构定理): $\varphi : I/(I \cap J) \to (I + J)/J, x + I \cap J \mapsto x + J$ 是一个环同构.

例子 2.4.1: $R = \mathbb{Z}, I = 2\mathbb{Z}, J = 3\mathbb{Z}, I + J = \mathbb{Z}, I \cap J = 6\mathbb{Z}$, 则 $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

定义 2.4.1: 设 I, J 是 R 的理想, 若 $I + J = R$, 则称 I, J 互素. 对于幺环, 这一条件等价于 $1_R \in I + J$.

定理 2.4.4 (中国剩余定理): 设 I, J 是 R 的互素理想, 则 $R/(I \cap J) \cong (R/I) \times (R/J)$.

证明:
1. 构造 $\varphi : R \to (R/I) \times (R/)J, x \to (x + I, x + J)$.
2. 由于 $I + J = R \Rightarrow x = y + z, y \in I, z \in J$, 所以 $\varphi(x) = (z + I, y + J)$.
3. 我们要说明 φ 是满的.
4. 不难看出 $\ker(\varphi) = I \cap J$. 由环同构第一定理知结论成立.

□

接下来我们将推广到多个理想的情况, 这时我们需要额外的条件.

定义 2.4.2 (理想的乘积): 设 I, J 是 R 的理想, 定义 $IJ = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N}\right\}$. 这是一个理想.

$IJ \subseteq I \cap J$, 但一般来说不相等. 例如 $R = \mathbb{Z}, I = 2\mathbb{Z}, J = 2\mathbb{Z}$, 则 $IJ = 4\mathbb{Z}, I \cap J = 2\mathbb{Z}$.

我们关注什么时候 $IJ = I \cap J$.

引理 2.4.1: 设 R 是一个交换幺环, $I_1, ..., I_n$ 是 R 的理想, 且两两互素, 则
1. $I_1 ... I_n = I_1 \cap ... \cap I_n$.
2. $I_1 + ... + I_{n-1}$ 与 I_n 互素.

证明: 采用数学归纳法.
1. 当 $n = 2$ 时 (2) 是显然的. 对于 (1), 显然有 $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$. 考虑 $x \in I_1 \cap I_2$, 由 $I_1 + I_2 = R$, 所以 $1_R = y + z, y \in I_1, z \in I_2$. 于是 $x = x1_R = xy + xz = yx + xz \in I_1 I_2$.
2. 当 $n > 2$ 时, $I_n + I_k = R$, 所以 $R = \Pi_{k=1}^{n-1}(I_n + I_k) = I_n + I_1 ... I_{n-1} \Leftrightarrow I_n + I_1 \cap ... \cap I_{n-1} = R$. (1) 同样由归纳假设易得.

□

由这一引理和前面二元版本的中国剩余定理, 我们可以得到多元版本的中国剩余定理.

定理 2.4.5 (中国剩余定理): 设 R 是交换幺环, $I_1, ..., I_n$ 是两两互素的理想, 此时有同构 $R/(I_1 \cap ... \cap I_n) = (R/I_1) \times ... \times (R/I_n)$

例子 2.4.2: $R = \mathbb{Z}, I_1 = 3\mathbb{Z}, I_2 = 5\mathbb{Z}, I_3 = 7\mathbb{Z}$, 可以得到 $R/(I_1 \cap I_2 \cap I_3) \cong R/I_1 \times R/I_2 \times R/I_3$, 即 $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

2.5. 整环与整除性

环 $\supseteq$ 幺环 $\supseteq$ 交换幺环 $\supseteq$ 整环 $\supseteq$ 整闭整环 $\supseteq$ GCD 环 $\supseteq$ **唯一分解整环** $\supseteq$ **主理想整环** $\supseteq$ **欧几里得整环** $\supseteq$ 域.

我们这里只涉及部分概念.

定义 2.5.1 (整环): 设 R 是一个非平凡的交换幺环, 若 R 没有零因子, 则称 R 是一个整环.

我们知道对于整数环 $\mathbb{Z}$, 存在有理数域 $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$, 一个自然的想法是对于任意整环 R, 是否存在域 F 使得 $R \supseteq F$? 这个问题的答案是肯定的.

我们首先定义 $S = R/\{0\}$, 显然 S 在乘法下依旧封闭且 $1_R \in S$. 下面要构造一个域 F, 其中的元素形如 $\frac{r}{s}, r \in R, s \in S$. 考虑 $(r, s) \in R \times S$, 定义等价关系 $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \Leftrightarrow r_1 s_2 = r_2 s_1$.

考虑 $F = R \times S / \sim$, 我们可以在上面定义加法和乘法, 容易验证这是一个域, 我们称为 R 的分式域.

定理 2.5.1: 设 R 是一个整环, F 是其分式域, 若有另一个域 F' 以及单的环同态 $\varphi : R \to F'$, 则存在唯一的域同态 $\psi : F \to F'$ 使得 $\varphi = \psi \circ i_R$. 换句话说, 分式域是整环的最小域.

定义 2.5.2 (素理想): 设 R 是一个非零交换幺环, I 是 R 的理想, 若 R/I 是一个整环, 则称 I 是 R 的素理想.

定理 2.5.2: I 是素理想 $\Leftrightarrow I \neq R$ 且对于任意 $a, b \in R$, 若 $ab \in I$, 则 $a \in I$ 或者 $b \in I$.

证明: 1.($\Rightarrow$) R/I 非零可推出 $I \neq R$. $ab \in I \Rightarrow ab + I = (a + I)(b + I) = 0_{R/I}$. R/I 是整环可推出 $a + I = 0 \vee b + I = 0$, 即 $a \in I \vee b \in I$.

2. 反之, $I \neq R$ 可推出 R/I 非零. 考虑 $a + I, b + I \in R/I$, 若 $(a + I)(b + I) = 0$, 则 $ab \in I$, 由条件知 $a \in I \vee b \in I$, 即 $a + I = 0 \vee b + I = 0$.

□

定义 2.5.3 (极大理想): 设 R 是一个非零交换幺环, m 是 R 的理想, 若 R/m 是一个域, 则称 m 是 R 的极大理想.

显然极大理想是素理想. 和素理想一样, 极大理想也有另一种定义方式:

定理 2.5.3: m 是极大理想 $\Leftrightarrow m \neq R$ 且对于包含 m 的理想只能是 m 或者 R.

证明:

1. $\Rightarrow$ R/m 是域, 所以 R/m 的理想只能是 0 或者 R/m, 所以 R 中包含 m 的理想只能是 m 或者 R.
2. 若 R/m 不是域, 则一定存在非平凡的理想, 则 m 一定含于这个非平凡理想, 与条件矛盾.

□

定义 2.5.4 (整除): 设 R 是一个整环, $a, b \in R$, 若存在 $c \in R$ 使得 $a = bc$, 则称 b 整除 a, 记作 $b \mid a$.

定义 2.5.5 (单位): 设 R 是一个整环, 若 a 有乘法逆, 则称 a 是一个单位. R 中所有单位构成一个群, 记为 R^x.

例子 2.5.1:
1. $R = \mathbb{Z}, R^x = \{1, -1\}$.
2. $R = \mathbb{Z}[i], R^x = \{1, -1, i, -i\}$.
3. $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, 牵扯到 Pell 方程.

在谈论整数的唯一分解性时, 我们一般只讨论正数的情况; 同样的, 在谈论任意一个环的时候, 我们也希望不用考虑正负号的问题, 也就是模掉单位群:

定义 2.5.6 (相伴): $a \sim b \Leftrightarrow \exists u \in R^x, s.t. a = ub$. 不难证明这是一个等价关系.

我们下文所讨论的相等即是在相伴意义下的.

定义 2.5.7:
1. $a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0$, 若 $a \mid b, b \nmid a$, 则称 a 是 b 的一个真因子.
2. $a \in R, a \neq 0$, 若 a 不能分解为一系列真因子的乘积, 则称 a 是不可约的.
3. $a \in R, a \neq 0$, 若 (a) 是素理想, 则称 a 是素的.

一个自然的问题是不可约元与素元有何关系? 结论是素元肯定是不可约的, 不可约的不一定是素元.

例子 2.5.2:
1. $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3) = \mathbb{C}[t^2, t^3]$, 考虑 $x = x + (y^2 - x^3)$, 它是不可约的, 但不是素的.
2. $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right], a = 2$, 这也是不可约但是不是素的例子.

引理 2.5.1: R 是整环, $q \in R, q \neq 0, q \notin R^x$, q 不可约 $\Leftrightarrow (q)$ 是极大主理想.

利用上述引理不难证明:

定理 2.5.4: 素元一定是不可约元.

证明: 设 p 是素的, $(p) \subseteq (a)$, 则 $p = ab$, 由素的定义, 则 $a \in (p)$ 或 $b \in (p)$. 若 $a \in (p)$, 则 $(a) = (q)$; 若 $b \in (p)$, 可得 $a \in R^x \Rightarrow (a) = R$. □

另一方面, 在环上加一些限制之后, 不可约元就一定是素的. 这一限制就是可以谈论最大公因子.

定义 2.5.8: 对于整环 R, $a, b \in R$ 且非零.
- 若 $d \in R$ 满足 $d \mid a$且$d \mid b$, 则称 d 是一个公因子.
- 设 d 是一个公因子, 若对 a, b 的另一个公因子 c 有 $c \mid d$, 则称 d 是 gcd.
- 若对任意的 $a, b \in R$, 存在 a, b 的 gcd, 则称其为 GCD 整环.

例子 2.5.3: $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$, 取 $a = 4, b = 2\left(1 + \sqrt{-3}\right)$, 2 和 $1 + \sqrt{-3}$ 都是公因子.

定理 2.5.5: 若 R 是 GCD 整环, 则 R 的不可约元是素元. 我们也称满足不可约元一定是素元的整环满足素性条件.

定义 2.5.9: 设整环 R, $a \in R$ 非零非单位, 若 a 可分解为有限个不可约元的乘积, 且这个分解在相伴意义下唯一, 则称 R 是唯一分解整环 UFD.

不难看出 UFD 一定是 GCD, 反之不然.

定义 2.5.10: 设 R 是整环, 若 R 中不存在如下形式的序列, $a_1, a_2, \ldots,$, 其中每个 a_{i+1} 都是 a_i 的真因子, 则称 R 满足因子链条件 (ACCP).

定理 2.5.6: 设 R 是整环, 则 R 是 UFD 等价于 ACCP + 素性条件.

一个显然的推论是 ACCP + 素性条件 $\Leftrightarrow$ UFD.

定义 2.5.11: 设 R 是整环, 若 R 中的每个理想都是主理想, 则称 R 是主理想整环, 简称 PID.

定理 2.5.7: PID 是 UFD, 反之不然.

)这段内容我个人比较无感, 就跳过了.

2.6. 多项式环

对于一个交换幺环 R, 不难定义 $R[x]$.

定义 2.6.1: 设 R 是 UFD, 对于 $f \in R[x]$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, 称 $d = \gcd_{R(a_0, \ldots, a_n)}$ 为 f 的最大公因子, 若 d 是单位, 则称 f 是本原的.

2.7. 主理想整环上的有限生成模分类

定义 2.7.1: 设 R 是 PID, M 是 R 上的模, 若存在 $a_1, ..., a_n \in M$, 使得 $M = (a_1, ..., a_n)$, 则称 M 是有限生成的.

定理 2.7.1: 对于任意主理想整环上的有限生成模, 存在真理想的降链 $(d_1) \supseteq (d_2) \supseteq ... \supseteq (d_n)$, 使得 $M = (R/(d_1)) \times ... \times (R/(d_n))$, d_i 叫不变因子.

证明有时间再讲.

3. 群与群作用

3.1. 定义与例子

定义 3.1.1: 回顾一下, 若集合 G 上定义了一个二元运算 $\cdot : G \times G \to G$, 满足结合律, 有单位元, 有逆元, 则称 $(G, \cdot)$ 是一个群.

若群 G 上定义了一个映射 $G \times X \to X$, 满足 $1x = x, (ab)x = a(bx)$, 则称 (G, X) 是一个群作用.

同样不难定义群上的子群, 群同态.

例子 3.1.1:

1. 域, 线性空间, 环, 模在加法下都是群.
2. 有限群.
   1. $|G| = 1, G = \{e\}$;
   2. $|G| = 2, G = \{e, a\}, a^2 = e$, 此时 $G = \mathbb{Z}_2$.;
   3. $|G| = 3, G = \{e, a, a^2\}, a^3 = e$, 此时 $G = \mathbb{Z}_3$;
   4. $|G| = 4, G_1 = \{e, a, a^2, a^3\}, a^4 = e$, 此时 $G_1 = \mathbb{Z}_4$. $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
   5. $|G| = 5, G = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}, a^5 = e$, 此时 $G = \mathbb{Z}_5$.
   6. $|G| = 6, G_1 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}, a^6 = e$, 此时 $G = \mathbb{Z}_6$. $G_2 = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. 这是第一个非交换群.
3. 无限群.
   1. $\mathrm{GL}(V) = \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ 线性, 可逆}\}$, 称为一般线性群.
   2. $\mathrm{SL}(V) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \det(\varphi) = 1\}$, 称为特殊线性群.
   3. $O(V) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi \text{ 保内积}\}$, 称为正交群.
   4. $\mathrm{SO}(V) = \{\varphi \in O(V) \mid \det(\varphi) = 1\}$, 称为特殊正交群.
4. 多面体群

3.2. 子群, 正规子群与商群

定义 3.2.1: 设 $(G, \cdot)$ 是一个群, $H \subseteq G$, 若 H 是 G 的子集, 且对于任意 $a, b \in H$, 有 $a \cdot b \in H$ 且 $a^{-1} \in H$, 则称 H 是 G 的子群.

定义 3.2.2 (陪集): 设 G 是一个群, $H \subseteq G$ 是一个子群, $a \in G$, 定义左陪集 $aH = \{ah \mid h \in H\} \triangleq G/H$, 右陪集 $Ha = \{ha \mid h \in H\} \triangleq H/G$.

定义 3.2.3 (正规子群): 设 G 是一个群, $H \subseteq G$ 是一个子群, 若对于任意 $a \in G$, 有 $aH = Ha$, 则称 H 是 G 的正规子群, 记为 $H \lhd G$.

定义 3.2.4: 设 $H \lhd G$, 在 G/H 上定义 $(xH)(yH) = (xy)H$, 则 G/H 是一个群, 称为 G 关于 H 的商群.

例子 3.2.1:

1. 在交换群上, 正规子群等价于子群.
2. $G_1 = \{1, c, c^2, c^3\}$, $H = \{1, c^2\}$, $G_1/H = \{H, cH\}$; 考虑另一个四个元素的群 $G_2 = \{1, a, b, ab\}$, $H = \{1, a\}$, $G_2/H = \{H, bH\}$.

我们可以发现 $H_1 \cong H_2, G_1/H_1 \cong G_2 \cong H_2$, 然而 $G_1 \neq G_2$.

3. 定义群的中心 $Z(G) = \{a \in G \mid \forall b \in G, ab = ba\}$, 容易验证 $Z(G) \lhd G$.
4. 定义交换子 $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.

$[a, b]^{-1} = [b, a], g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$. 所有交换子也构成子群, 而事实上是正规子群, 记为 $[G, G]$. $G/[G, G]$ 是一个交换群.

定理 3.2.1: 子群 $|H| \mid |G|$.

3.3. 同态基本定理

定义 3.3.1: 设 $(G, \cdot)$ 和 $(H, *)$ 是两个群, $\varphi : G \to H$ 是一个映射, 若满足 $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$, 则称 φ 是一个群同态.

定理 3.3.1: 设群同态 $\varphi : G \to H$, 则 $G/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Img}(\varphi)$.

定理 3.3.2: 若群同态 $\varphi : G \to H$ 是满的, 则 $H \cong G/\ker(\varphi)$.

定义 3.3.2: 设 H, K 是 G 的子群, 定义 $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. 若 K 是正规子群, 则 HK 是子群, 且 $K \lhd HK$.

例子 3.3.1: $G = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, $H = \{1, s\}$, $K = \{1, sr\}$, HK 不是子群.

三同构定理的证明和之前环的情况类似, 我们不再赘述.

定义 3.3.3:
1. 设 G 是有限群, 若有 G 的子群链 $G = G_0 > G_1 > ... > G_k = k$ 满足每个 G_i 都是 G_{i-1} 的正规子群, 则称 k 是 k-次正规子群.
2. 若有 G 的子群链 $G = G_0 > G_1 > ... > G_k = \{e\}$ 满足每个 G_i 都是 G_{i-1} 的正规子群, 则称为一个次正规子群链.
3. 对于一个次正规子群链, 若 G_i / G_{i-1} 都是单群(没有非平凡的正规子群), 则称为一个合成列, 这些单群称为合成因子.

定理 3.3.3 (Jordan-Holder 定理): 有限群 G 的极小合成列有相同的长度, 且合成因子在同构意义下唯一. 即给定 $G = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_s = \{e\}, G = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_t = \{e\}$, 要证 $t = s$ 且 G_i / G_{i-1} 与 H_i / H_{i-1} 在调整顺序后两两同构.

证明: 对 s 归纳.
- 当 $s = 1$ 时, G 是单群, 显然成立.
- 假设 $s - 1$ 时成立, 考虑 s 的情形. 若 $G_1 = H_1$, 则结论显然成立.

若 $G_1 \neq H_1$, 因为 $G_0 / G_1, H_0 / H_1$ 都是单群, 所以 G_1, H_1 都是极大正规子群. 考虑 $G' = G_1 \cdot H_1$ 也是正规的. 可见 $G' = G$. 设 $G_1 \wedge H_1 = N_2$. 则 $G_0 / G_1 = G_1 \cdot H_1 / G_1 = H_1 / G_1 \wedge H_1 = H_1 / N_2$, $H_0 / H_1 = G_1 / N_2$. 取极小合成列 $N_2 \lhd N_3 \lhd ... \lhd N_r = \{e\}$. 构造 $G = G_0 \lhd G_1 \lhd N_2 \lhd ... \lhd N_r = H_0 \lhd H_1 \lhd N_2 \lhd ... \lhd N_r = \{e\}$. 可得 $r = s, r = t$, 故 $s = t$. 通过这四个合成列的相互关系与归纳假设, 可得结论. □

在这一定理基础上, 对于研究所有有限群, 我们可以 1. 找出所有有限单群, 2. 在给定合成因子的前提下找出所有 G. 看起来第二个问题比较简单, 但事实上第二个问题到现在也没有很好的算法; 而第一个问题有限单群的分类已经基本完成了:

(1) $\mathbb{Z}_p, p$ 为素数 (2) $A_n, n \geq 5$ (3) 李型单群 (4) 从(3)导出的 (5) 散在单群 26 个

3.4. 群作用与 Sylow 定理

这一节我们假设 G 是一个有限群, 被作用的空间也是有限的.

定义 3.4.1: 设群 G 与集合 X, 若映射 $\mu : G \times X \to X, (g, x) \mapsto gx$ 满足:
1. $ex = x$
2. $(gh)x = g(hx)$

则称 (G, X) 是一个群作用.

1. 对于 $g \in G$, 考虑 $t_g : X \to X, x \mapsto gx$ 是一个平移.
2. 对于 $x \in G$, 考虑 $Gx = \{gx \mid g \in G\}$, 称为 x 的轨道. 和陪集一样, 轨道只能相等或者不相交.
3. 我们还可以定义 $\operatorname{stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$, 称为 x 的稳定化子群. 若 $\operatorname{stab}(x) = G$, 则称 x 是一个不动点.

引理 3.4.1: 存在双射 $G / \operatorname{stab}(x) \to Gx$.

根据这一引理我们可以得到一个计数的结果: $|G_x| = [G : \operatorname{stab}(x)] = |G| \ / \ |\operatorname{stab}(x)|$.

设 $O=\{Gx \mid x\in X\}\subseteq 2^X$, 构造 $\pi: X\to O, x\mapsto Gx$ 满射. 由选择公理知道存在单射 $\theta: O\to X$ 满足 $\pi\circ\theta=\mathrm{id}$. 记 $C=\mathrm{Img}(\theta)$, 与每一个轨道恰好有一个交点, 称为一个截面.

若 x_1, x_2 属于同一个轨道 Gx, 容易看出来 $\mathrm{stab}(x_2)$ 与 $\mathrm{stab}(x_1)$ 只差一个共轭作用.

完成了这些准备工作, 我们考虑 $X=\bigcup_{x\in C}Gx$, 可知 $|X|=\sum_{x\in C}|Gx|=\sum_{x\in C}[G:\mathrm{Stab}(x)]$.

下面考虑 G 在自身的共轭作用, 取 $X=G, \mu(g,x)=gxg^{-1}$. x 的轨道就是 $\{gxg^{-1} \mid g\in G\}$, 称为 x 的共轭类. x 的稳定化子就是中心化子. 若 x 是不动点, 则是一个平凡共轭类. 若不是, 则称为非平凡共轭类. 非平凡共轭类记 T.

通过这一区分, 我们知道 $|G|=|Z|+\sum_{\mathrm{T}}[G:\mathrm{stab}(x)]$. 这里的后项是非平凡共轭类的集合.

例子 3.4.1:
1. 若 $|G|=p^m$, p 为素数, 则称为 G 为一个 p 群, 类方程为 $p^m=|Z|+\sum_{x\in\mathrm{T}}[G:C(x)]$. 我们可知 $p\mid |Z|$.
2. 设有 n 个轨道, 则 $n=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\ X^g|$, 其中 $X^g=\{x\in X \mid gx=x\}$.

证明: $\sum_{g\in G}|X^g|=\sum_{x\in X}|\ \mathrm{stab}(x)\ |=\sum_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|}=|G|\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}=|G|\ n$.

接下来我们进入 Sylow 定理的讨论. 这一定理在探讨什么时候 $d\mid |G|$, 问是否存在 $H<G, |H|=d$. Sylow 定理告诉我们当 d 是素数的阶数时, 这一结论是对的.

引理 3.4.2: 设 G 是有限交换群, p 是素数, $p\mid |G|$, 则 G 中存在阶数为 p 的元素.

证明: 对群 G 的阶数归纳.
- $|G|=1$, 成立.
- 当阶数 $<|G|$ 时交换群都成立, 考虑 G. 任取 $a\in G, a\neq e$, 设 a 的阶数为 m, 若 $p\mid m$ 显然可找到这样的 p 阶元; 反之, $H=<a>$ 是正规子群. 考虑 G/H, 由归纳假设⋯

□

定理 3.4.1 (Sylow-I): 假设有限群 G, 素数 p, 且 $p^k\mid |G|$, 则 G 有 p^k 阶子群.

证明: 对 $|G|$ 归纳.
- $|G|=1$, 成立.
- 设对 $|G|<n$ 成立, 考虑 $|G|=n$. 有方程 $|G|=|Z|+\sum_{x\in\mathrm{T}}[G:C(x)]$. 若 p 不整除 $|Z|$, 则一定存在 $p^k\mid C(x)$, 成立; 若 $p\mid |Z|$, 那么由上引理得到 Z 有 p 阶子群 $H=<a>$. H 是 G 的正规子群, 考虑 $G/H=G'$, $|G'|<|G|$, $p^{k-1}\mid |G'|$. 由归纳假设得到 G' 有 p^{k-1} 阶子群 H', 那么我们就能得到 G 有 p^k 阶子群.

□

定义 3.4.2:
1. 若 $|H|=p^k$, 则称 H 叫 p-群.
2. 若 $G, p, |G|$ 中 p 的阶为 m,

则该群中的 p^m 阶子群叫 p –Sylow 子群.

定理 3.4.2 (Sylow-II): 群 G 中的任意两个 $p-$Sylow 子群都共轭.

一个显然的推论是如果只有一个 Sylow 子群, 则这个群是正规的.

证明: 我们要证明: 设 P 是 $p-$Sylow 子群, H 是 G 的 p-子群, $|H| = p^k$, 则存在 $g \in G$, 使得 $H \subseteq gPg^{-1}$.

考虑群作用: $\mu : H \times G/P \to G/P, (h, gP) \mapsto h_gP$, 因为 $|P| = p^m$, 所以 $|G/P| = \frac{|G|}{p^m}$, 从而 p 不整除.

考虑 μ 的轨道, $|H(gP)| = 1 \vee p^l, 1 \leq l < k$. 因为不整除, 所以至少有一个不动点, 所以 $H \subseteq gPg^{-1}$.□

定理 3.4.3 (Sylow-III): 给定群 G, P 同上, 设 G 的 $p-$Sylow 的个数为 n_P, 再设 $[G : P] = m$, 则 $n_p \mid m$, 且 $n_p = 1(\operatorname{mod} p)$.

证明: 设 G 的所有子群集合为 S, 考虑群作用 $G \times S \to S, (g, H) \mapsto gHg^{-1}$. 设 P 是 G 的一个 $p-$Sylow 子群, 先问它的稳定化子是什么. 由 Sylow-II 定理我们知道 $n_p = |GP| = [G : \operatorname{stab}(P)] = [G : N_G(P)]$. 另一方面, $m = [G : P] = [G : N_G(P)][N_G(P) : P] = n_p[N_G(P) : P]$, 从而 $n_p \mid m$.

考虑另一个群作用, $P \times G/P \to G/P, (h, gP) \mapsto hgP. \cdots$ □

这些定理实在看的人有点累, 不过我们利用上述三定理可以对有限群的结构做许多有趣的研究.

例子 3.4.2:

1. 设 p, q 是素数, $p < q$, 则 pq 阶群 G 一定不是单群.

考虑 G 的 q-Sylow 子群, 那么 $n_q \mid p, n_q = 1(\operatorname{mod} q)$, 所以 $n_q = 1$, 从而 G 有正规子群.

2. 若 $|G| = 2024 = 2^3.11.23, n_{23} \mid 2^3.11, n_{23} = 1(\operatorname{mod} 23)$, 所以 $n_{23} = 1$, 从而 G 有一个 23 阶正规子群.

$G/P_{23} = G_1, |G_1| = 2^3.11, n_{11} \mid 2^3, n_{11} = 1(\operatorname{mod} 11)$, 所以 $n_{11} = 1$, 从而 G_1 有一个 11 阶正规子群.

3. $|G| = 56 \Rightarrow G$ 不是单群. $n_7 = 1 \vee n_7 = 8$. 若 $n_7 = 1$, 则 G 有正规子群;

若 $n_7 = 1$, 证毕; 若 $n_7 = 8$, 则 G 有 8 个 7 阶子群, 我们断言这些子群的交只能是单位元. 所以 G 中有一个 e, 8 x 6 个七阶元, 还剩 7 个元素. 再考虑 $2-$Sylow 子群, 阶是 8, 恰好只有一个子群, 所以是正规子群.

4. $|G| = 108 \Rightarrow G$ 不是单群.

定理 3.4.4: 最小的非交换单群是 60 阶的. (就是 A_5)

证明:

1. 平凡群显然是交换.
2. 素数阶群都交换 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59$.
3. pq 型的都不单 $6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 57, 58, 5, 8, 15, 21, 33, 39, 51, 35, 55$.
4. p^k 阶的都是交换的或者不单 $4, 9, 25, 49, 8, 27, 16, 32$.
5. 2^2p 型群, $|G| = 12, 20, 28, 44, 52$, 继续利用 Sylow 定理可以解决.
6. 3^2p 型群, $|G| = 18, 57, n_3 = 1$, 不是单群.

还有 24 和 36 阶群, 我们需要引入一个引理

引理 3.4.3: 若有限群 G 有子群 H, $[G : H] = n$, 则 H 一定包含一个 G 的正规子群 K, 且 $[G : K] \mid n!$. 特别的, 如果 $|G|$ 不整除 $n!$, 则 K 是非平凡的正规子群.

考虑 24 阶群, $24 = 2^3 \cdot 3$. 由 Sylow 第三定理则 $n_2 \mid 3, n_2 = 1 (\operatorname{mod} 2)$, 所以 $n_2 = 1 \vee 3$. 若是第一种情况, 则证毕; 若是第二种情况, 设 H 是一个八阶子群, 且 $24 > 3! = 6$, 由引理知存在正规子群 K.

36 阶群同理. □

3.5. 对称群

上一节我们已经知道 60 阶以下的群都是交换群或者不单的, 我们接下来要构造并证明一个 60 阶的非交换单群.

对于奇置换, 偶置换, 轮换, 循环等等定义我们不再赘述.

偶置换构成的群是 A_n, 它是 S_n 的正规子群, 且 $|S_n : A_n| = 2$.

引理 3.5.1: A_n 可由 3-循环生成.

引理 3.5.2: $n \geq 5$ 时, 所有 3-循环都是共轭的.

定理 3.5.1: $A_n, n \geq 5$ 是单群.

证明: 设 K 是 A_n 的正规子群, $K \neq \{e\}$, 要证 $K = A_n$. 由引理 1 知只需要证明包含所有 3-循环, 由引理 2 知只需要证明包含一个 3-循环. □

3.6. 交换群

定义 3.6.1 (直积): 若 G_1, G_2 是群, 则 $G = G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ 是一个群, 称为 G_1 和 G_2 的直积.

我们可以将 G_1, G_2 视作 G 的子群, 由嵌入映射 $G_1 \to G_1 \times G_2, g_1 \mapsto (g_1, e)$, 而且不难证明这样的子群是正规子群.

这件事情我们也可以反过来做, 若 G 由两个正规子群 G_1, G_2 满足 $G_1 \cap G_2 = e$ 且 $G_1 G_2 = G$, 则 $g_1 g_2 = g_2 g_1$. 此时可以证明 $G_1 \times G_2 = G$. 我们有更一般的结果:

定理 3.6.1: 设群 $G, G_1, ..., G_s$ 是 G 的正规子群, 若 $G = G_1.G_s, G_i \cap (G_1 G_2 ... G_{i-1} G_{i+1} ... G_s) = e$, 则 $G = G_1 \times ... \times G_s$.

例子 3.6.1: 设循环群 $G, |G| = m \cdot n$, 若 $(m, n) = 1$, 则 $G = G_m \times G_n$.

更一般的, 如果 $|G| = p_1^{\{k_1\}} ... p_s^{\{k_s\}}$, 则 $G = \mathbb{Z}_{p_1}^{k_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_s}^{k_s}$.

定理 3.6.2: 给定群 G 是有限生成的交换群, 则 G 可分解为 $G = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_s$, 其中 C_i 或者是无限循环群, 或者存在一个 $t \leq s$, 使得 $C_1, \ldots, C_t$ 是有限循环群, $C_{t+1}, \ldots, C_s$ 是无限循环群, 且 $m_i \mid m_{i+1}$, $m_i = |C_i|$.

证明太复杂了, 略 :(

3.7. 可解群

定义 3.7.1: 设群 G, 若存在一个正规子群链 $G = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_s = \{e\}$, 使得 $G_{i+1} \lhd G_i$ 是交换群, 则称 G 是可解群.

对于有限群，有一个等价的定义为：一可解群为一有着其商群皆为素数阶的循环群之合成列的群。

定理 3.7.1 (Feit-Thompson 定理): 任意奇阶有限群都是可解群.

4. Galois 理论

回顾一下在域论最后的两个问题:

Q1. E/F 是有限扩张, $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ 是有限群, 我们可以定义 $F' = \mathrm{Inv}(G)$ 由定义可知 $F \subseteq F'$. 问题是 F' 与 F 能否相等?

Q2. 有 E 域, $G \leq \mathrm{Aut}(E)$, 我们有 $F = \mathrm{Inv}(G)$, 其中 E/F 是有限扩张, 于是 $G' = \mathrm{Gal}(E/F)$ 是有限群, 由定义可知 $G \subseteq G'$. 问题是 G 与 G' 能否相等?

对于 Q2, 我们的结论是肯定的, 这也被称为 Artin 定理. 而对于 Q1, 我们可以直接定义满足这样性质的扩张为 Galois 扩张, 但这样定义太过于麻烦了,我们需要一个更好的刻画.

而在后续的工作中, 我们会引入正规扩张和可分扩张的概念, 并证明正规+可分可以推出 Galois 扩张.

4.1. 分裂域

定义 4.1.1: 假设域 F, $f \in F[x]$ 首一, 若有 F 的扩域 E 满足:

1. f 在 E 中可分解为一次因子的乘积 $f = (x - a_1)\ldots(x - a_n)$;
2. $E = F(a_1, \ldots, a_n)$;

则称 E 是 f 的分裂域.

引理 4.1.1: 如果 $f \in F[x]$ 不可约, 则存在 F 的扩域 E 使得 f 在 E 中至少有一个根.

证明: 取 $E = F[x]/(f(x))$. 首先 $F[x]$ 是主理想整环, f 不可约, 所以 (f) 是极大理想, 从而 E 是域. 考虑 $\alpha = x + f(\alpha) \in E$, 而 $f(\alpha) = f(x) + (f(\alpha)) = (f(\alpha)) = 0 \in E$. □

推论 3.7.1.1: 如果 $f \in F[x], \deg f \geq 1$, 则存在 F 的扩域 E 使得 f 在 E 中至少有一个根.

定理 4.1.1: 如果 $f \in F[x]$, 则存在 F 的扩域 E 使得 f 在 E 中分解为一次因子的乘积, 即分裂域存在.

定理 4.1.2: 这样的扩域是唯一的.(同构意义下).

4.2. 可分扩张与正规扩张

定义 4.2.1:
1. 若 f 的每个不可约因子在 E 中都没有重根, 则称 f 为可分多项式.
2. 设 E/F 是一个域扩张, 若 $u \in E$, u 在 F 上代数, 设 $g(x) \in F[x]$ 是 u 的极小多项式, 若 g 是可分多项式, 则称 u 是可分的.
3. 若 代数扩张 E/F 中每个元素都是可分的, 则称 E/F 是可分扩张.

定理 4.2.1: $f(x) \in F[x]$ 在分裂域 E 无重根的充要条件是 f 与 f' 互素.

一个显然的推论是特征为 0 的域以及有限域上的代数扩张都是可分扩张.

定理 4.2.2: 有限可分扩张一定是单扩张.

定义 4.2.2: 设 E/F 是代数扩张, 若 F 中任一不可约多项式在 E 中或者无根, 或者全部有根, 则称 E/F 是正规扩张.

显然, 分裂域是正规扩张.

定理 4.2.3: 有限的正规扩张一定是某个多项式的分裂域.

定理 4.2.4: 设 E/F 有限正规, K 是中间域, 则以下等价:
1. K/F 是正规扩张;
2. $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$, 则 $\sigma(K) = K$;

4.3. Galois 扩张