密　封　线

西南大学数学与统计学院

《概率论与数理统计》课程试题 【A】卷参考答案和评分标准

2023～2024 学年第 1 学期							期末考试		
考试时间	120 分钟	考核方式	闭卷笔试	学生类别			本科	人数	
适用专业或科类							年级	2022 级	
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	合计
得分									
签名									

阅卷须知：阅卷用红色墨水笔书写，得分用阿拉伯数字写在每小题题号前，用正分表示，不得分则在题号前写 0；大题得分登录在对应的分数框内；统一命题的课程应集体阅卷，流水作业；阅卷后要进行复核，发现漏评、漏记或总分统计错误应及时更正；对评定分数或统分记录进行修改时，修改人必须签名。

特别提醒：学生必须遵守课程考核纪律，违规者将受到严肃处理。

禁止使用计算器。

一、单项选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设 A,B,C 为随机事件，则以下结论一定正确的是　　（ D ）.

A. $A\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　　B. $A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

C. $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$　　D. $(B\overline{C})\cup(BC)=B$

2．设 A,B 为随机事件，且 $P(B)>0,P(A|B)=1$, 则必有　　（ C ）.

A. $P(A\cup B)>P(A)$　　B. $P(A\cup B)>P(B)$

C. $P(A\cup B)=P(A)$　　D. $P(A\cup B)=P(B)$

3．设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(2,9)$，且相关系数 $\rho_{XY}=-1$，则　　（ B ）.

A. $P(Y=3X-2)=1$　　B. $P(Y=-3X+2)=1$

C. $P(Y=3X+2)=1$　　D. $P(Y=-3X-2)=1$

命题教师：　　教研室或系负责人：　　主管院长：　　年　月　日

4．设函数 $f_1(x), f_2(x)$ 分别是两个概率密度，则以下结论正确的是　　（　A　）.

A. $\frac{1}{3}f_1(x)+\frac{2}{3}f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

B. $\frac{1}{2}f_1(x)+\frac{1}{3}f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

C. $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

D. $2f_1(x)-f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

5．设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布分为，

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则　　（　B　）.

A．$a=0.2, b=0.3$　　B. $a=0.4, b=0.1$

C．$a=0.3, b=0.2$　　D. $a=0.1, b=0.4$

6．设随机变量 $X\sim t(n)(n>1), Y=X^2$，则　　（　C　）.

A. $Y\sim\chi^2(n)$　　B. $Y\sim\chi^2(n-1)$　　C. $Y\sim F(1,n)$　　D. $Y\sim F(n,1)$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5, P(A\overline{B})=0.3$, 则 $P(B\overline{A})=$ ___0.2___.

2. 在区间 $(0,2)$ 中随机地取两个数，则两数之和大于1的概率为 ___$\frac{7}{8}$___.

3．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则 $E(|X|)=$ ___$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$___.

4. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $F(x)$ 为 X 的分布函数， $Y=F(X)$,则

$P\left(\frac{1}{3}<Y\le\frac{1}{2}\right)=$ $\underline{\ \frac{1}{6}\ }$.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m\ (m>1)$ 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则 $E\left(\overline{X}+S^2\right)=$ $\underline{\quad 2\lambda \quad}$.

6. 已知随机变量 X 服从区间 $(-1,1)$ 上的均匀分布，$Y=\cos X$ ，则 $\operatorname{Cov}(X,Y)=$ $\underline{\ 0\ }$.

三、本题共 1 小题，共 11 分.

甲、乙、丙 3 人独立地向同一飞机射击，设击中的概率分别为0.4,0.5,0.7,若只有一人击中，则飞机被击落的概率为 0.2；若有两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；若 3 人都击中，则飞机一定被击落，求飞机被击落的概率.

解：设 $A_i\ (i=1,2,3)$ 分别表示甲、乙、丙击中飞机； $B_i\ (i=0,1,2,3)$ 分别表示有 i 人击中飞机；C 表示飞机被击落.则

$$P(B_0)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=0.6\times0.5\times0.3=0.09,$$

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B_2)&=P\left(A_1A_2\overline{A_3}\right)+P\left(A_1\overline{A_2}A_3\right)+P\left(\overline{A_1}A_2A_3\right)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41\end{aligned}$$

$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$, -----------------------(6 分)

$P(C|B_0)=0, P(C|B_1)=0.2, P(C|B_2)=0.6, P(C|B_3)=1$, ------(8 分)

所以，由全概率公式可得飞机被击落得概率为

$$\begin{aligned}P(C)&=P(B_0)P(C|B_0)+P(B_1)P(C|B_1)+P(B_2)P(C|B_2)+P(B_3)P(C|B_3)\\&=0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458.\end{aligned}$$ ----(11 分)

四、本题共 1 小题，共 11 分.

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4},-2<x<0,\\ \frac{1}{2},0\le x<1,\\ 0,\text{其他},\end{cases}$ 求 $Y=X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解：Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(X^2\le y\right)$,

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0;$ --------(2 分)

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x$:

①当 $0\le y\le 1$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y};$

②当 $1<y\le 4$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y};$

③当 $y>4$ 时，$F_Y(y)=\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=1.$ --------(8 分)

故 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0<y\le 1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1<y\le 4,\\ 1, & y>4.\end{cases}$ ，因此 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8}y^{-\frac{1}{2}}, & 0<y\le 1,\\ \frac{1}{8}y^{-\frac{1}{2}}, & 1<y\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ---(11 分)

五、本题共 1 小题，共 11 分.

设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},0<x<2,0<y<x,\\0,其他\end{cases}$。求

(1) (X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；（2）求$Z=X-Y$的概率密度.

解：(1)边缘概率密度$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2,\\0,其他;\end{cases}$

边缘概率密度$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2},0<y<2,\\0,其他;\end{cases}$ -------（6 分）

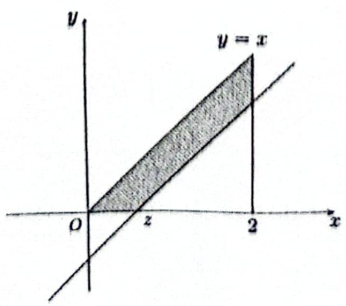
(2) $Z=X-Y$的分布函数为$F_Z(z)=P(X-Y\le z)=\iint\limits_{x-y\le z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（如图所示）

①当$z\le 0$时， $F_Z(z)=0$;

②当$0<z<2$时，$F_Z(z)=1-\dfrac{(2-z)^2}{4}=z-\dfrac{z^2}{4}$;------(9 分)

③当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=1$.

所以$Z=X-Y$的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2},0<z<2,\\0,其他.\end{cases}$ ------（11 分）



六、**本题共 1 小题，共 11 分.**

设总体X服从区间$(0,\theta)$上的均匀分布$U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$是来自总体X的简单随机样本，$T=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,求

(1)T的分布函数；(2)$E(T),D(T)$.

解：(1)X的分布函数为$F_X(x)=\begin{cases}0,x\le 0,\\ \dfrac{x}{\theta},0<x<\theta,\\ 1,x\ge\theta.\end{cases}$ T的分布函数为 ------(3 分)

$$F_T(x)=P(T\le x)=P(\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x)=P(X_1\le x,X_2\le x,\cdots,X_n\le x)$$

$$=P(X_1\le x)P(X_2\le x)\cdots P(X_n\le x)=[F_X(x)]^n=\begin{cases}0,x\le 0\\ \dfrac{x^n}{\theta^n},0<x<\theta.\cdots\cdots(6分)\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$$

(2)由T的分布函数可得，其概率密度为$f_T(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n},0<x<\theta,\\ 0,\quad 其他.\end{cases}$

所以 $E(T)=\int_0^\theta x\cdot\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\theta^n}\int_0^\theta nx^n\mathrm{d}x=\dfrac{n}{n+1}\theta.$------(8 分)

$$E(T^2)=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta nx^{n+1}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$D(T)=E(T^2)-[E(T)]^2=\frac{n}{n+2}\theta^2-\frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2.$$ ------(11 分)

七、本题共 1 小题，共 10 分.

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\alpha)=\begin{cases}\alpha x^{-\alpha-1}, & x>1,\\ 0, & x\le 1.\end{cases}$ 其中未知参数 $\alpha>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求

(1) α 的矩估计量；(2) α 的最大似然估计量.

解：(1) $\mu_1=E(X)=\int_1^{+\infty}x\alpha x^{-\alpha-1}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\alpha x^{-\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$,解得 $\alpha=\dfrac{\mu_1}{\mu_1-1}$，故 α 的矩估计量为 $\hat{\alpha}_{矩}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$;---------(5 分)

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.似然函数为

$$L(\alpha)=\alpha^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-\alpha-1}$$

对数似然函数为 $\ln L(\alpha)=n\ln\alpha-(\alpha+1)\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)=n\ln\alpha-(\alpha+1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$，

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\dfrac{n}{\alpha}-\sum_{i=1}^n \ln x_i=0$ 解得，$\alpha=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$，所以 α 的最大似然估计量为

$\hat{\alpha}_{似然}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$.-------------(10 分)

八、本题共 1 小题，共 10 分.

某食品厂用自动装罐机装水果罐头，每罐标准重量为 500 克. 为了保证质量，每隔一定时间需要检查机器工作情况. 这天抽得 16 罐，测得其重量的平均值为 $\bar{x}=503$ 克，样本标准差 $s=6.4$ 克.假定产品重量服从正态分布，试问能否认为这天机器工作正常?(取 $\alpha=0.05$，$t_{0.025}(15)=2.1315, t_{0.05}(15)=1.7531$)

解：①提出假设 $H_0: \mu=500$; $H_1: \mu\neq 500$；

②选取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-500}{S/\sqrt{16}}$；　　　　-------(4 分)

③对给定得显著性水平 $\alpha=0.05$，拒绝域为

$$|t|\geq t_{0.025}(15)=2.1315；$$

④代入观测值得 $|t|=\dfrac{|503-500|}{6.4/4}=1.875<2.1315$；　-------(8 分)

⑤接受 $H_0: \mu=500$, 认为这天机器工作正常.　-------- (10 分)