一、单项选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设事件 A 与事件 B 互不相容，则　　　　　　　　　　　　　（ D ）．

A. $P\left(\overline{AB}\right)=0$　　　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$　　　　D. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1$

2．设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数， $f(2+x)=f(2-x)$ ， $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=0.4$ ，

则 $P(X>4)=$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（ B ）．

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

3．设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.4 ，若 $Z=-2X+1$，则 Y 与 Z 的相关系数为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（ C ）．

A. 0.4　　B. 0.8　　C. –0.4　　D. –0.8

4．设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(1,3),Y\sim N(2,5)$，则 $D(XY)=$ （ D ）.

A. 15　　B. 8　　C. 36　　D. 32

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P(X=-1)=P(X=3)=\frac{1}{2}$，则

$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=$ （ B ）.

A. 4　　B. $\frac{4}{n}$　　C. $\frac{3}{n}$　　D. $\frac{1}{n}$

6. X_1，X_2，$\cdots$，$X_n(n>2)$ 为来自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 （ D ）.

A. $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　B. $nS^2\sim\chi^2(n)$

C. $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　D. $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

1．设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5,P(A\overline{B})=0.1$，则 $P(B\overline{A})=$ __0.45__.

2．在区间 $(0,3)$ 中随机地取两个数，则两数之和小于 2 的概率为 __$\frac{2}{9}$__.

3．设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X^2)$__$=\sigma^2+\mu^2$__.

4. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0,\end{cases}$，

$F(x)$ 为 X 的分布函数，$Y=F(X)$, 则 $P\left(\frac{1}{4}<Y\le\frac{1}{3}\right)=$ __$\frac{1}{12}$__.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 是来自二项分布总体 $B(100,0.5)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则 $E(\overline{X}-S^2)=$ __25__.

6. 已知随机变量 $X\sim U(-2,2)$，$Y=e^{|X|}$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$ __0__.

三、本题共 1 小题，共 11 分.

病树的主人外出，委托邻居浇水. 设已知不浇水，树死去的概率为0.8;若浇水则死去的概率为0.15.有0.9的把握确定邻居会记得浇水.

（1） 求主人回来时树还活着的概率；

（2） 若主人回来时树已死去，求邻居忘记浇水的概率.

解：设A表示树还活了，$\overline{A}$表示树死了. B表示邻居记得浇水，$\overline{B}$表示邻居忘记浇水.

(1) 由题设可得，$P(B)=0.9$，$P(\overline{B})=0.1$，

$P(A|B)=0.85, P(\overline{A}|B)=0.15, P(\overline{A}|\overline{B})=0.8, P(A|\overline{B})=0.2$. --------(3 分)

主人回来时树还活着的概率为

$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.9\times 0.85+0.1\times 0.2=0.785.$ ----(6 分)

(2) 由贝叶斯公式可得，

$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})}{1-P(A)}=\frac{0.1\times 0.8}{1-0.785}=0.372.$$ ------(11 分)

四、本题共 1 小题，共 11 分.

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6},-3<x<0,\\ \dfrac{1}{4},0\le x<2,\\ 0,\text{其他},\end{cases}$ 求 $Y=|X|$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解：Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$,

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0;$ --------(2 分)

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P(-y\le X\le y)=\int_{-y}^{y} f_X(x)\,\mathrm{d}x$：

①当 $0\le y<2$ 时，$F_Y(y)=\int_{-y}^{0}\frac{1}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{y}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{5}{12}y;$

②当 $2\le y<3$ 时，$F_Y(y)=\int_{-y}^{0}\frac{1}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{y}{6};$

③当 $y\ge 3$ 时，$F_Y(y)=\int_{-3}^{0}\frac{1}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=1.$ --------(8 分)

故 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{5}{12}y, & 0<y<2,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}y, & 2\le y<3,\\ 1, & y\ge 3.\end{cases}$，因此 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{5}{12}, & 0<y<2,\\ \dfrac{1}{6}, & 2\le y<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ---(11 分)

五、**本题共 1 小题，共 11 分.**

设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},0<x<2,0<y<2x,\\ 0,其他,\end{cases}$求

(1) (X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$; (2) $Z=2X-Y$的概率密度.

解：(1)边缘概率密度$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2,\\ 0,其他；\end{cases}$

边缘概率密度$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{y}{8},0<y<4,\\ 0,其他；\end{cases}$-------（6 分）

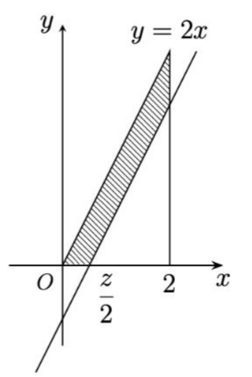
(2) $Z=2X-Y$的分布函数为$F_Z(z)=P(2X-Y\le z)=\iint\limits_{2x-y\le z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（如图所示）

①当$z\le 0$时， $F_Z(z)=0;$

②当$0<z<4$时，$F_Z(z)=1-\dfrac{1}{4}\left(2-\dfrac{z}{2}\right)^2$;------(9 分)

③当$z\ge 4$时，$F_Z(z)=1.$

所以$Z=2X-Y$的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{8},0<z<4,\\ 0,其他.\end{cases}$------（11 分）



六、**本题共 1 小题，共 11 分.**

设总体 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布 $U(0,1)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>1)$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$Y=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,求

(1) Y 的分布函数；　　　　(2) $E(Y),D(Y)$.

解：(1) X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ x, 0<x<1,\\ 1, x\ge 1.\end{cases}$ Y 的分布函数为 ------(3 分)

$$\begin{aligned}F_Y(x)&=P(Y\le x)=P\left(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x\right)=1-P\left(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>x\right)\\&=1-P(X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x)=1-P(X_1>x)P(X_2>x)\cdots P(X_n>x)\\&=1-\left[1-F_X(x)\right]^n=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1-(1-x)^n, 0<x<1.\cdots\cdots(6\text{分})\\ 1, x\ge 1\end{cases}\end{aligned}$$

(2)由 Y 的分布函数可得，其概率密度为 $f_Y(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, 0<x<1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$

所以 $E(Y)=\int_0^1 x\cdot n(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 n(1-x)x^{n-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}$.-------(8 分)

$$E(Y^2)=\int_0^1 x^2\cdot n(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 n(1-x)^2x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}.$$ ------(11 分)

七、本题共 1 小题，共 10 分.

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量；(2) 求参数 λ 最大似然估计量.

解：(1)

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}u^2e^{-u}du=\frac{2}{\lambda}$$

解得 $\lambda=\dfrac{2}{\mu_1}$，故 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_{矩}=\dfrac{2}{\overline{X}}$; ---------(5 分)

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.似然函数为

$$L(\lambda)=\lambda^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

对数似然函数为 $\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$，

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\dfrac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ 解得， $\alpha=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$，所以 λ 的最大似然估计量为

$\hat{\alpha}_{似然}=\dfrac{2}{\overline{X}}$. -------------(10 分)

八、**本题共 1 小题，共 10 分.**

某食品厂用自动装罐机装水果罐头，每罐标准重量为 600 克. 为了保证质量，每隔一定时间需要检查机器工作情况. 这天抽得 25 罐，测得其重量的平均值为 $\bar{x}=602$ 克，样本标准差 $s=3.6$ 克.假定产品重量服从正态分布，试问能否认为这天机器工作正常?(取 $\alpha=0.05$，$t_{0.025}(24)=2.0639$)

解：①提出假设 $H_0:\mu=600;\ \ H_1:\mu\neq 600$；

②选取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-600}{S/\sqrt{25}}$； --------(4 分)

③对给定得显著性水平 $\alpha=0.05$，拒绝域为

$$|t|\geq t_{0.025}(24)=2.0639\text{；}$$

④代入观测值得 $|t|=\dfrac{|602-600|}{3.6/5}=2.7778>2.0639$ ； --------(8 分)

⑤拒绝 H_0：$\mu=600$ 认为这天机器工作不正常. -------- (10 分)