学院________系________专业班级________姓名________学号________

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密　　　　封　　　　线

西南大学 2021-2022 学年第一学期期末试卷

课程名称__概率论与数理统计__（期末; 闭卷） 适用班级（或年级、专业）

考试时间__120__分钟　　班级__________　　学号__________　　姓名__________

一、单项选择题（每题 3 分，共 30 分）

1、设事件 A 与 B 相互独立，已知 $P(A)=0.5, P(A\cup B)=0.8$, 则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$（ D ）

(A) 0.8；　(B) 0.2；　(C) 0.3；　(D) 0.7.

2、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=1-e^{-2x}, x>0$，则根据切比雪夫不等式，$P(|2X-1|\le 2)$ 的下界为（ B ）

(A) 1/4；　(B) 3/4；　(C) 1/16；　(D) 15/16.

3、欲检验假设 $H_0: X\sim N(\mu,\sigma^2), \mu,\sigma^2$ 未知，选取容量为 100 的样本，分成八组进行分布拟合检验的，则所用检验统计量 $\chi^2=\sum_{i=1}^{8}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$ 的自由度为（ A ）

(A) 5；　(B) 6；　(C) 7；　(D) 8.

4、随机变量 X 服从几何分布，若 $E(X)=3D(X)$，则 $P(X>1)=$（ B ）

（A）1/16；　（B）1/4；　（C）3/4；　（D）9/16.

5、设 (X_1, X_2,Λ, X_n) 是来自分布 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{k}{\theta^k}x^{k-1}, & 0\le x\le\theta \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的容量为 n 的简单样本，其中 θ 未知，$k>1$，$\bar{X}$ 为样本均值，若统计量 $c\bar{X}$ 为 θ 的无偏估计，则常数 c 为（ C ）

(A) $k/(k+1)$；　(B) $k/n(k+1)$；　(C) $(k+1)/k$；　(D) $(k+1)/nk$.

6、设 X 的概率密度函数为**错误!未找到引用源。错误!未找到引用源。** $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则 $Y=2X+1$ 的密度函数为（ C ）

(A) $f(y)=\begin{cases}y-1, & 1\le y\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$；　(B) $f(y)=\begin{cases}\frac{y-1}{2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$；

(C) $f(y)=\begin{cases}\frac{y-1}{2}, & 1\le y\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$；　(D) $f(y)=\begin{cases}y-1, & 1\le y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.

7、4 个球随机落入 6 个不同的盒子，则某指定盒子里有一个球的概率为（ B ）

$(A)\ 5^3/6^4$；　$(B)\ C_4^1 5^3/6^4$；　$(C)\ (4+5^3)/6^4$；　(D) 无法确定.

8、设$(X_1, X_2, \cdots X_{10})$是从正态总体$N(\mu, 1)$中抽取的简单随机样本，记$\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$，则

$\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2$服从的分布为 （ B ）

（A）$\chi^2(10)$；　（B）$\chi^2(9)$；　（C）$N(0,1)$；　（D）$t(9)$.

9、设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$独立同分布，且$X_i \sim B(1, 0.2)$，　$i=1,2,\cdots,100$，则

$P(12<\sum_{i=1}^{100} X_i<20)=$ （ D ）

（A）$\Phi(2)$；　（B）$0.5-\Phi(2)$；　（C）0.5；　（D）$\Phi(2)-0.5$.

10、设某随机变量服从正态分布$N(\mu, 16^2)$. 取容量为 100 的样本，得样本均值为$\overline{x}$，u_α为标准正态分布上测分位数，则μ 的置信度为95%的估计区间长度为 （ A ）

（A）$3.2u_{0.025}$；　（B）$16^2 u_{0.025}/5$；　（C）$32u_{0.025}$；　（D）$3.2u_{0.05}$.

二、（本题 15 分）袋中装有 4 只正品硬币，6 只次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽），在袋中任取一只.

（1）求投掷一次出现国徽的概率；

（2）如果连续三次投掷都得到国徽，问这只硬币是正品的概率为多少？

解答：令 A=“取到正品”，B=“出现国徽”，C=“出现三次国徽”

（1）　$P(B)=\frac{4}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{10}\times 1=\frac{4}{5}$

（2）$P(C)=\frac{4}{10}\times(\frac{1}{2})^3+\frac{6}{10}\times 1=\frac{13}{20}$

则 $P(A|C)=\frac{\frac{4}{10}\times(\frac{1}{2})^3}{13/20}=\frac{1}{13}$

学院＿＿＿＿＿＿系 专业班级＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 学号

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密 封 线

三、（本题 15 分）若 (X, Y) 为二维连续随机变量，且已知

$$f(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}, & x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

计算：（1）$f(x, y)$；（2）$P(X+Y\ge 1)$；（3）$P(Y<\frac{2}{3}\big|X=\frac{1}{2})$.

解答:

(1) $f(x,y)=f_{Y|X|}(y|x|)f_X(x)$

$$=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2}4x(1-x^2) & x\le y\le 1, 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}8xy & x\le y\le 1, 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $P(X+Y\ge 1)=\int_{0.5}^{1}dy\int_{1-y}^{y}8xydx$

$$=\frac{5}{6}$$

(3) $f_{Y|X}(y\big|x=\frac{1}{2})=\begin{cases}\dfrac{8y}{3}, & 0.5\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$P(Y<\frac{2}{3}\Big|X=\frac{1}{2})=\int_{1/2}^{2/3}\frac{8}{3}y\,dy$$

$$=\frac{7}{27}$$

四、（本题 15 分）设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{8}, & 0<x<2, 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

求：（1）$Cov(X,Y)$；（2）X,Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解答:

(1) $E(X)=\int_0^2\int_0^2 x\dfrac{x+y}{8}dxdy=\dfrac{7}{6}$

$E(Y)=\int_0^2\int_0^2 y\dfrac{x+y}{8}dxdy=\dfrac{7}{6}$

$E(XY)=\int_0^2\int_0^2 xy\dfrac{x+y}{8}dxdy=\dfrac{4}{3}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{7}{6}\dfrac{7}{6}=-\dfrac{1}{36}$

(2) $E(X^2)=\int_0^2\int_0^2 x^2\dfrac{x+y}{8}dxdy=\dfrac{5}{3}$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{5}{3}-\dfrac{7}{6}\cdot\dfrac{7}{6}=\dfrac{11}{36}$

同理 $D(Y)=\dfrac{11}{36}$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\dfrac{1}{36}}{\sqrt{\dfrac{11}{36}}\cdot\sqrt{\dfrac{11}{36}}}=-\frac{1}{11}$$

学院＿＿＿＿＿系＿＿＿＿专业班级＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿学号

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密　　　封　　　线

五、（本题 15 分） 设随机变量 X 的概率密度为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-1}{\theta}}, & x>1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$\theta>0$ 为未知参数，设 (X_1,X_2,Λ,X_n) 为 X 的简单随机样本.

求：（1）θ 的矩估计量；　　　（2）θ 的极大似然估计量.

解答：

（1）

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-1}{\theta}}dx$$
$$=1+\theta$$

令 $1+\hat{\theta}=\overline{X}$ 得 $\hat{\theta}=\overline{X}-1$

（2）

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i-1}{\theta}}$$
$$=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)}$$

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)=0$

得 $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}{n}=\overline{X}-1$

六、（本题 10 分）某种生产线的感冒冲剂规定每包重量为 12 克，超重或者过轻都是严重问题，从过去的资料得知总体标准差是 0.6 克，质检员每两小时抽取 25 包冲剂称重检查，并做出是否停工的决策.假定产品重量服从正态分布.

（1）建立适当的原假设与备择假设；　　（2）在 $\alpha = 0.05$ 时，检验的拒绝域是什么？

（3）当 $\bar{x} = 12.25$ 时，是否应该停工？　（$u_{0.05} = 1.64, u_{0.025} = 1.96$）

解答：

假设总体服从 $N(\mu, 0.6^2)$

（1）$H_0: \mu = 12 \quad H_1: \mu \neq 12$

（2）当原假设成立时检验统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - 12}{\sigma}\sqrt{n} = \dfrac{\overline{X} - 12}{0.6}\sqrt{25} \sim N(0,1)$

故 拒绝域 $W = \{|U| \geq U_{0.025} = 1.96\}$

（2）当 $\bar{x} = 12.25$ 时，统计量 $u = \dfrac{12.5 - 12}{0.6}\sqrt{25} = 4.16 \geq 1.96$ 落入拒绝域

故应该停工