

西南大学《高等数学》2022-2023学年第一学期 期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，满分 15 分）

1. 旋转曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2, 4)$ 处的法线方程为 _____.
 2. 设 L 为半圆 $x^2 + y^2 = r^2, x \geq 0$, 则 $\int_L (x^2 + y) ds =$ _____.
 3. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h (0 < h < a)$ 截出的顶部, 则 $\iint_{\Sigma} z dS =$ _____.
 4. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 则其以 2π 为周期的 Fourier 在 $x = \pi$ 处收敛于 _____.
 5. 函数 $u = xy^2z$ 在点 $P(1, -1, 2)$ 处的方向导数最大值等于 _____.

二、选择题（每小题 3 分，满分 15 分）

1. 函数 $u = xyz$ 在附加条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ ($x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$) 下的极值等于 ().

(A) $27a^3$ (B) $9a^3$ (C) $3a^3$ (D) a^3

2. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 ().

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

3. 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的某邻域内有定义, 且有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$,

则下列结论不正确的是 () .

- (A) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续 (B) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在
 (C) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微 (D) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处某方向 l 的方向导数不存在

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2 + n\alpha + 1}{n} \pi$, 其中 α 为常数, 则下列结论正确的是 () .

(A) 当 $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 等整数时, 级数发散
 (B) 当 $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 等整数时, 级数绝对收敛
 (C) 当 $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 等整数时, 级数条件收敛
 (D) 当 $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 等整数时, 级数条件收敛

5. 方程 $y'' - y' = e^x + 1$ 的一个特解形式为 () .

- (A) $ae^x + b$ (B) $ax^x + b$ (C) $ae^x + bx$ (D) $axe^x + bx$

三、(本题满分 12 分) 设 $z = f(\frac{x}{2} - y) + g(x, xy)$, 其中 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 dz 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、(本题满分 12 分) 设 D 为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D |x^2 + y^2 - 1| dx dy.$$

五、(本题满分 12 分) 已知点 $O(0, 0)$ 及点 $A(1, 1)$, 且曲线积分

$$I = \int_{\overrightarrow{OA}} (ax \cos y - y^2 \sin x) dx + (by \cos x - x^2 \sin y) dy$$

与路径无关, 试确定常数 a, b , 并求 I .

六、(本题满分 14 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (2x + z) dy dz + z dx dy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 其法向量与 z 轴正向夹角为锐角.

七、(本题满分 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n}$ 的和.

八、(本题满分 6 分) 求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.