

武汉理工大学研究生考试试题（2017）A 卷

课程：矩阵论

（答题时不必抄题，标明题目序号）

一. 填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^4 - 8A^3 - 2A^2 + 2A =$ _____

2. 若矩阵 A 相似于对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 的最小多项式为 _____

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, 则 A 的 LU 分解为 _____

4. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -3 \\ 5 & 4i & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的范数 $\|A\|_{m_1} =$ _____;

$\|A\|_{m_\infty} =$ _____; $\|A\|_F =$ _____;

5. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, 设 V_1 和 V_2 分别为齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 的解空间, 则 $\dim(V_1 + V_2) =$ _____

二. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- (1) 求 A 的行列式因子, 不变因子, 初等因子;
- (2) 求 A 的 Jordan 标准形;
- (3) 求 A 的最小多项式。

三. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mid AX = XA \right\}$$

为线性空间, 对于任意的 $X \in V$, 定义: $T(X) = XB$

(1) (5 分) 证明: T 是 V 上的线性变换;

(2) (10 分) 求 V 的一组基, 并求 T 在所求基下的矩阵.

四. (15 分) 已知微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), & A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, & x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(1) (7 分) 求 e^A ;

(2) (8 分) 求 e^{At} , 并求微分方程组的解。

五. (20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

(1) 求 A 的满秩分解;

(2) 求 A 的广义逆 A^+ ;

(3) 求 $Ax = b$ 的最小二乘解;

(4) 求 $Ax = b$ 的极小范数最小二乘解。

六. (20 分) 对 \square^3 中任意的 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = (y_1, y_2, y_3)$, 定义

$$(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3.$$

(1) (5 分) 证明 (α, β) 为 \square^3 上的内积;

(2) (10 分) 已知 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, 求 $W = \text{span}\{\gamma\}$ 的正交补 W^\perp 的一组

标准正交基;

(3) (5 分) 设 $\delta = (3, 6, 9)$, 求满足 $\min_{x \in W} \|x - \delta\|$ 的 x 。