矩阵论期末考试笔记

PPAP

2020 年 12 月 11 日

写在前面的话

(1) 做初等行变换的时候一定要化为行最简型。行最简型就是非 0 行的首非 0 元是 1，并且所在的列只有这一个非 0 元素。

(2) 对于齐次方程而言，从左往右非 0 行的第一个非 0 元作为非自由未知量，剩下作为自由未知量。

(3) 非齐次方程而言，自由未知量全部取 0。

(4) 结果当中尽可能不出现分数。

(5) 关于特征值和特征向量的话只需要注意对应就可以了，不一定特征值非得要从小到大排列。

(6) 该笔记大部分采用的记号和线代里面的记号一致，例如，做初等变换时，我们采用以下记号：

① r 表示行，c 表示列

② $r_1 \leftrightarrow r_2$ 表示第一行和第二行交换

③ $r_1 \times (-1)$ 表示第一行乘以 -1 倍

④ $r_2 + 2r_1$ 表示第一行的两倍加到第二行

⑤ $r_3 - r_2 - r_1$ 表示第一行的 (-1) 倍加到第三行，并且第二行的 (-1) 倍加到第三行

⑥ $r_1 \leftrightarrow r_3 \leftrightarrow r_2$ 表示先第一行和第三行交换，后第三行和第二行交换

⑦ $\overset{r_2+2r_1}{\underset{}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\longrightarrow}}}$ 当中的 $r_2 + 2r_1$ 和 $r_1 \leftrightarrow r_2$ 表示先将第一行的 2 倍加到第二行上，变换之后第一行和第二行交换

(7) 求解 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式当中，$\boldsymbol{A}$ 的余式 $r(\lambda)$ 最少是常数项，最多是比 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式的次数低一次。

(8) 求解 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式当中，一定要体现出矩阵的相乘这个过程。

(9) 试卷的填空题的答案会用蓝色标记。

目录

第一部分　《矩阵论》以及《矩阵分析》历年试题参考答案

1.1　2019-2021-1《矩阵论》试题及其参考解答

一、　填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

(1). 已知线性空间 $F[t]_3=\{f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2;a_0,a_1,a_2\in F\}$ 的两组基

$$\text{(I)：}\ 1,t,t^2\qquad \text{(II)：}\ 2,t+1,(t+1)^2$$

则由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵为 ________.

解析：

注意到 $(2,t+1,(t+1)^2)=(2,1+t,1+2t+t^2)=(1,t,t^2)\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

所以由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵为$\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

(2). 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\\0&1\end{bmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 ________.

解析：

$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4\\4&9\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $\lambda^2-(2+9)\lambda+2=\lambda^2-11\lambda+2$

也就是 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\dfrac{11+\sqrt{113}}{2}=,\lambda_2=\dfrac{11-\sqrt{113}}{2}$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 $d_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\dfrac{11+\sqrt{113}}{2}}$，$d_2=\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{\dfrac{11+\sqrt{113}}{2}}$

(3). 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解为 ________.

解析：

$$\text{我们将 }(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}5&-2&0&1&0&0\\-2&3&-1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2+\frac{2}{5}\times r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}5&-2&0&1&0&0\\0&\frac{11}{5}&-1&\frac{2}{5}&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{5}{11}\times r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} & -1 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & 1 \end{array}\right]$$，所以 $\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{11} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & 1 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{11} & 1 \end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{11} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{11} \end{bmatrix}$

(4). 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解为 __________.

解析：

取 $\boldsymbol{A}$ 的列向量为 $\alpha_1=(1,-1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,1,1)^T$

于是正交化得 $\begin{cases} \beta_1=\alpha_1=(1,-1,1,1)^T \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{2}(1,3,1,1)^T \end{cases}$

所以单位化得 $\gamma_1=\dfrac{1}{2}(1,-1,1,1)^T,\gamma_2=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1,3,1,1)^T$

所以 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2,\gamma_1) \\ 0 & \|\beta_2\| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$

(5). 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如第 (4) 题，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的范数为：

$\|\boldsymbol{B}\|_{m_1}=$ __________；$\|\boldsymbol{B}\|_{m_\infty}=$ __________；$\|\boldsymbol{B}\|_F=$ __________

解析：

由于 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

所以 $||\boldsymbol{B}||_{m_1} = |-3|+|-2|+|-2|+|-3| = 10$，$||\boldsymbol{B}||_{m_\infty} = 2\cdot\max|a_{ij}| = 2\cdot 3 = 6$

$||\boldsymbol{B}||_F = ||\boldsymbol{B}||_{m_2} = \sqrt{|-3|^2+|-2|^2+|-2|^2+|-3|^2} = \sqrt{26}$

二、 (15 分) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子，不变因子，初等因子；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形和 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的 Smith 标准形；

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式.

解析：

(1) 注意到 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -6 & 15 \\ -1 & \lambda-1 & 5 \\ -1 & -2 & \lambda+6 \end{bmatrix}$，注意到存在一阶非零子式 $|15| = 15$，所以 $D_1(\lambda) = 1$

并且注意到 $D_3(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \lambda^3+3\lambda^2+(-6-(-10)+(-12)-(-15)+2-6)\lambda-(-1) = (\lambda+1)^3$

注意到 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -6 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+1)$，$\begin{vmatrix} -6 & 15 \\ \lambda-1 & 5 \end{vmatrix} = -15(\lambda+1)$，$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 15 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5(\lambda+1)$

$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda+1)$，$\begin{vmatrix} -6 & 15 \\ -2 & \lambda+6 \end{vmatrix} = -6(\lambda+1)$，$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 15 \\ -1 & \lambda+6 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3)$

$\begin{vmatrix} -1 & \lambda-1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \lambda+1$，$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 \\ -2 & \lambda+6 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+4)$，$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & \lambda+6 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)$

所以 $D_2(\lambda) = \lambda+1$，所以行列式因子为 $D_1(\lambda) = 1$，$D_2(\lambda) = \lambda+1$，$D_3(\lambda) = (\lambda+1)^2$

所以不变因子为 $d_1(\lambda) = 1$，$d_2(\lambda) = \dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = \lambda+1$，$d_3(\lambda) = \dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda+1)^2$

所以初等因子为 $\lambda+1$，$(\lambda+1)^2$

(2) 由 (1) 知 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$,所以 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的 Smith 标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$

(3) 由 (1)(2) 知 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda+1)^2 = \lambda^2+2\lambda+1$

三、 (15 分) 对于 $\alpha = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$，定义

$$T(\alpha) = (x_1+x_2, x_1-x_3, 0)$$

(1) 证明 T 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换；

(2) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的一组基为 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$，求线性变换 T 在这组基下的矩阵；

(3) 求 T 的核空间的一组基和维数。

解析：

(1) 设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$，$\beta=(y_1,y_2,y_3)$，$k\in\mathbb{R}$，所以 $\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$

由于

$$\begin{aligned}T(\alpha+\beta)&=(x_1+y_1+x_2+y_2,x_1+y_1-x_3+y_3,0)=(x_1+x_2,x_1-x_3,0)+(y_1+y_2,y_1-y_3,0)\\&=T(\alpha)+T(\beta)\end{aligned}$$

并且 $T(k\alpha)=(kx_1+kx_2,kx_1-kx_3,0)=k(x_1+x_2,x_1-x_3,0)=kT(\alpha)$，所以 T 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换

(2) 注意到 $T(\alpha_1)=(1,1,0)=\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$T(\alpha_2)=(2,1,0)=\alpha_1+\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$T(\alpha_3)=(2,0,0)=2\alpha_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$

所以 $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

(3) 设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}$。由于 T 的核空间为 $T(\alpha)=0$，于是就会有：$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1-x_3=0\end{cases}$

于是 $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\overset{r_1-r_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$，所以该方程的解为 $k(1,-1,1)$

所以 T 的核空间的一组基为 $(1,-1,1)$，T 的核空间的维数为 1

四、 (15 分) 已知微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\sin\boldsymbol{A}$；

(2) 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$，并求微分方程组的解.

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$，并且注意到 $R(\boldsymbol{A}) = 2$

所以 0 特征值所对应的特征向量个数为 $3-2=1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化，所以 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)$

(1) 令 $f(\lambda) = \sin\lambda$ 以及 $r(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$

由题意知 $\begin{cases} f(0) = r(0) \\ f'(0) = r'(0) \\ f(1) = r(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a_2 \\ 1 = a_1 \\ \sin 1 = a_0 + a_1 + a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \sin 1 - 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$

并且注意到 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以 $\sin\boldsymbol{A} = (\sin 1 - 1)\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = (\sin 1)\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2-\sin 1 & -1+\sin 1 & \sin 1 \end{bmatrix}$

(2) 令 $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ 以及 $r_1(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$

由题意知 $\begin{cases} 1 = r(0) \\ t = r'(0) \\ e^t = r(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_2 \\ t = a_1 \\ e^t = a_0 + a_1 + a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 - t + e^t \\ a_1 = t \\ a_2 = 1 \end{cases}$

所以 $e^{\boldsymbol{A}t} = (e^t - t - 1)\boldsymbol{A}^2 + t\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} = e^t\boldsymbol{A}^2 + t(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2) + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} -2t+1 & t & 0 \\ -4t & 2t+1 & 0 \\ -e^t+2t+1 & e^t-t-1 & e^t \end{bmatrix}$

所以微分方程组的解 $\boldsymbol{x} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -2t+1 & t & 0 \\ -4t & 2t+1 & 0 \\ -e^t+2t+1 & e^t-t-1 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+1 \\ -2t+1 \\ -e^t+t \end{bmatrix}$

五、 (20 分) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^{+}$；

(3) 求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解；

(4) 求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数最小二乘解；

解析：

(1) 注意到 $\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_3+r_4}\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\1&-1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&-1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_3-r_2}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

于是 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$

(2) 由 (1) 知 $\boldsymbol{C}^H=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^H=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&0&1&-1\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{CC}^H=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7&-1\\-1&3\end{bmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^H(\boldsymbol{CC}^H)^{-1}(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^H=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{20}\begin{bmatrix}3&1\\1&7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{40}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&0&1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{40}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{40}\begin{bmatrix}3&1\\2&14\\-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&0&1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}2&3&-1&1\\8&2&6&-6\\-2&-3&1&-1\end{bmatrix}$$

(3) (方法一) 注意到 $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}2&3&-1&1\\8&2&6&-6\\-2&-3&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_1=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{C}_1=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数

(方法二)

由于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&0&1&-1\\-1&-2&1&-1\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&0&1&-1\\-1&-2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-1&-7\\-1&3&1\\-7&1&7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&0&1&-1\\-1&-2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\-3\end{bmatrix}$

所以 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}7&-1&-7&3\\-1&3&1&1\\-7&1&7&-3\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}-1&3&1&1\\7&-1&-7&3\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-7r_1]{r_1\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-3&-1&-1\\0&20&0&10\\0&0&0&0\end{array}\right]$

$\xrightarrow[r_1+3r_2]{r_2\times\frac{1}{20}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]$，解得 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ 的解为 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

(4) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数最小二乘解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}2&3&-1&1\\8&2&6&-6\\-2&-3&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

六、 (20 分) 设 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的子空间

$$V_1=\left\{\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\middle| x_1+x_2-x_3=0, x_1+x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$V_2=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$$

(1) 求 V_1 的基和维数；

(2) 证明：V_1+V_2 是直和；

(3) 对于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，定义内积

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$$

求 V_1 的正交补 $V_1^{\perp}$ 的一组标准正交基。

解析：

(1) 由题意知需要求解 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$

于是系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

于是 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，于是 V_1 的基为 $\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，维数为 2

(2) 证明：记 $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，由于 $R(\boldsymbol{B})=3$，所以 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$，所以 V_1+V_2 是直和

(3) 设 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\in V_1^{\perp}$, 于是有 $\begin{cases} (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}_1)=0 \\ (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}_2)=0 \end{cases}$,解得 $V^{\perp}$ 的一组基为 $\boldsymbol{Y}_1=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{Y}_2=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

但是 $(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2)=4\neq 0$，所以我们接下来需要正交化，单位化

首先我们做正交化：$\begin{cases} \boldsymbol{Y}_{11}=\boldsymbol{Y}_1=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{Y}_{21}=\boldsymbol{Y}_2-\dfrac{(\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_{11})}{(\boldsymbol{Y}_{11},\boldsymbol{Y}_{11})}\boldsymbol{Y}_{11}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$

然后我们做单位化：注意到 $||\boldsymbol{Y}_{11}||=\sqrt{(\boldsymbol{Y}_{11},\boldsymbol{Y}_{11})}=\sqrt{3}$，并且 $||\boldsymbol{Y}_{21}||=\sqrt{(\boldsymbol{Y}_{21},\boldsymbol{Y}_{21})}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$

所以 $\boldsymbol{Y}_{11}^{\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{Y}_{21}^{\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{33}}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

所以 V_1 的正交补 $V_1^{\perp}$ 的一组标准正交基为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{33}}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

【注意】

1. 第二问当中，证明直和的方式有多种多样。比如说也可以考虑证明 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$ 这个等式成立。

2. 第三问当中我们注意要把此时的矩阵当作一个“向量”，然后即可套用施密特正交化的公式。

1.2 《矩阵分析》2018 年试题及其参考解答

一、 填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 在 $\mathbf{R}^4$ 中，设解空间 $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ 和 $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T | x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$，则 $\dim(V_1 + V_2) =$ __________

解析：

显然 $\dim V_1 = \dim V_2 = 3$，并且注意到 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩为 2

所以 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数为 $n - r(\boldsymbol{A}) = 4 - 2 = 2$

所以由维数定理知 $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 3 + 3 - 2 = 4$

2. 设 $\mathbf{R}_n[x]$ 表示次数小于 n 的 x 实系数多项式全体构成的线性空间，

$$W = \{f(x) \in \mathbf{R}_n[x] | f''(0) = 0\}$$

则 $\dim W =$ __________

解析：

设 $f(x) \in W$，注意到 $f''(0) = 0$，所以 $f(x) = \sum_{i=3}^{n-1} a_i x^i + a_1 x + a_0$

所以 W 的基为 $1, x, x^3, x^4, x^5, \cdots, x^{n-1}$，所以 $\dim W = n - 1$

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^5 - 2\boldsymbol{A}^4 - \boldsymbol{A}^2 + 4\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} =$ __________

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + (1 + 0 + 1)\lambda = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$

于是解得 $\lambda_1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_1 = 2$。注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异

所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式一定是 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$

由于 $\lambda^5 - 2\lambda^4 - \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1) - 2\lambda + 3$

所以 $\boldsymbol{A}^5 - 2\boldsymbol{A}^4 - \boldsymbol{A}^2 + 4\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} = -2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. 若矩阵的初级因子为 $\lambda, \lambda^3, (\lambda - 2)^3, (\lambda - 2)^2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 __________

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $\boldsymbol{A}$ 的最后一个不变因子，并且注意到最后一个不变因子能整除所有的初级因子，所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $\lambda^3(\lambda-2)^3$

5. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&4\\7&0&6\\5&2&0\end{bmatrix}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解为 __________

解析：

注意到 $\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&3&4&1&0&0\\7&0&6&0&1&0\\5&2&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&3&4&1&0&0\\5&-3&2&-1&1&0\\5&2&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&3&4&1&0&0\\5&-3&2&-1&1&0\\0&5&-2&1&-1&1\end{array}\right]$

$$\xrightarrow{r_2-\frac{5}{2}r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&3&4&1&0&0\\0&-\frac{21}{2}&-8&-\frac{7}{2}&1&0\\0&5&-2&1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+\frac{10}{21}r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&3&4&1&0&0\\0&-\frac{21}{2}&-8&-\frac{7}{2}&1&0\\0&0&-\frac{122}{21}&-\frac{2}{3}&-\frac{11}{21}&1\end{array}\right]$$

所以 $\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-\frac{21}{2}&-8\\0&0&-\frac{122}{21}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{7}{2}&1&0\\-\frac{2}{3}&-\frac{11}{21}&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{7}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&\frac{11}{21}&1\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{7}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&\frac{11}{21}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-\frac{21}{2}&-8\\0&0&-\frac{122}{21}\end{bmatrix}$

二、 (15 分) 在 $\mathbf{R}^3$ 中有两个基：

I：$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$；

II：$\beta_1=(1,0,1)^T$，$\beta_2=(0,1,1)^T$，$\beta_3=(0,0,1)^T$

若 $\mathbf{R}^3$ 上的线性变换 T，使得 $T(\alpha_1)=(1,4,7)^T$，$T(\alpha_2)=(2,5,8)^T$，$T(\alpha_3)=(3,6,9)^T$

试回答下列问题：

(1) 求 T 在基 I 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求 T 在基 II 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$；

(3) 已知向量 $\alpha=(1,5,9)^T$，求向量 $T(\alpha)$ 在基 II 下的坐标

解析：

(1) 注意到 $T(\alpha_1)=-3\alpha_1-3\alpha_2+7\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-3\\-3\\7\end{bmatrix}$；

$T(\alpha_2)=-3\alpha_1-3\alpha_2+8\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-3\\-3\\8\end{bmatrix}$；$T(\alpha_3)=-3\alpha_1-3\alpha_2+9\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-3\\-3\\9\end{bmatrix}$

所以 $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-3&-3&-3\\-3&-3&-3\\7&8&9\end{bmatrix}$，所以 T 在基 I 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&-3&-3\\-3&-3&-3\\7&8&9\end{bmatrix}$

(2) 注意到 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，并且 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

以及 $T(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\boldsymbol{B}$ 和 $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{A}$

记 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\boldsymbol{P}$，由于 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$，并且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$

于是有 $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=T(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\boldsymbol{P}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\boldsymbol{BP}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$，于是 T 在基 II 下的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\-1&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-3&-3\\-3&-3&-3\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2&2&1\\5&2&1\\1&-2&-1\end{bmatrix}$$

(3) 注意到 $\alpha=(1,5,9)^T=1\beta_1+5\beta_2+3\beta_3=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)(1,5,3)^T$

于是 $T(\alpha)=T[(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}]=T(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}15\\18\\-12\end{bmatrix}$

所以向量 $T(\alpha)$ 在基 II 下的坐标为 $\begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ -12 \end{bmatrix}$

三、 (15 分) 在 $\mathbf{R}^3$ 中对于任意的 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T,\beta=(y_1,y_2,y_3)^T\in\mathbf{R}^3$，定义

$$(\alpha,\beta)=2x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

(1) 证明：$\mathbf{R}^3$ 关于这里的 (α,β) 构成内积空间。

(2) 设 $\varepsilon_1=\dfrac{1}{2}(1,1,1)^T$，求 $\mathbf{R}^3$ 的含有 ε_1 的一个规范正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$。

(3) 设向量 $\boldsymbol{\delta}=(3,6,9)^T$，求向量 $\boldsymbol{\delta}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标。

解析：

(1) 证明：设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T,\beta=(y_1,y_2,y_3)^T\in\mathbf{R}^3,\gamma=(z_1,z_2,z_3)^T\in\mathbf{R}^3,k,l\in\mathbf{R}$

对称性：$(\alpha,\beta)=2x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=2y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3=(\beta,\alpha)$

线性性：

$$\begin{aligned}(k\alpha+l\beta,\gamma)&=2(kx_1+ly_1)z_1+(kx_2+ly_2)z_2+(kx_3+ly_3)z_3\\&=k(2x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)+l(2y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)\\&=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)\end{aligned}$$

正定性：$(\alpha,\alpha)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant 0$，并且当且仅当 $\alpha=\mathbf{0}$ 时，$(\alpha,\alpha)=0$

(2) 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbf{R}^3$，于是就有 $(\boldsymbol{x},\varepsilon_1)=0$

于是 $2x_1+x_2+x_3=0$，所以 $\boldsymbol{x}=k_1(-1,2,0)^T+k_2(-1,0,2)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数

于是可以取 $\alpha_1=(-1,2,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,2)^T$

于是我们来正交化 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1=(-1,2,0)^T\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{2}{3}(-1,-1,3)^T\end{cases}$

于是 $||\beta_1||=\sqrt{(\beta_1,\beta_1)}=\sqrt{6}$，$||\beta_2||=\sqrt{(\beta_2,\beta_2)}=2\sqrt{3}$，$\varepsilon_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2.0)^T$，$\varepsilon_3=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(-1,-1,3)^T$

于是 $\varepsilon_1=\dfrac{1}{2}(1,1,1)^T$，$\varepsilon_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,0)^T$，$\varepsilon_3=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(-1,-1,3)^T$

(3) 注意到 $\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&3\\1&2&-1&6\\1&0&3&9\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&3\\0&3&0&3\\0&1&4&6\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{3}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&3\\0&1&0&1\\0&1&4&6\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&4\\0&1&0&1\\0&0&4&5\end{array}\right]$

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{4}}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{array}\right]\xrightarrow{r_1+r_3}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

所以向量 $\boldsymbol{\delta}=(3,6,9)^T$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $(2\cdot\frac{21}{4},\sqrt{6}\cdot 1,2\sqrt{3}\cdot\frac{5}{4})^T=(\frac{21}{2},\sqrt{6},\frac{5}{2}\sqrt{3})^T$。

【注意】

1. 这道题目里面内积被重新定义了，所以向量的模长需要按照重新定义之后的算法来计算，包括正交化公式的时候内积也是需要用重新定义之后的算法来计算。

2. 第三问的做法的理论如下：

本来按照坐标的定义应该是：$\boldsymbol{\delta}=\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\varepsilon_3x_3=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)(x_1,x_2,x_3)^T$

但是注意到一个大问题：带着根号不方便计算。所以我们可以转化为

$$\boldsymbol{\delta}=2\varepsilon_1y_1+\sqrt{6}\varepsilon_2y_2+2\sqrt{3}\varepsilon_3y_3=(2\varepsilon_1,\sqrt{6}\varepsilon_2,2\sqrt{3}\varepsilon_3)(y_1,y_2,y_3)^T$$

前面的系数表示的是第二问当中求出来的标准正交基当中的分母。

于是就转化为了求 $(y_1,y_2,y_3)^T$，然后 $(x_1,x_2,x_3)^T=(2y_1,\sqrt{6}y_2,2\sqrt{3}y_3)^T$

3. 第三问还有一个做法，注意到 $\boldsymbol{\delta}=\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\varepsilon_3x_3=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)(x_1,x_2,x_3)^T$

并且注意到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是规范正交基。于是 $\begin{cases} x_1=(\boldsymbol{\delta},\varepsilon_1)=\frac{1}{2}(2\cdot3\cdot1+6\cdot1+9\cdot1)=\frac{21}{2} \\ x_2=(\boldsymbol{\delta},\varepsilon_2)=\frac{1}{\sqrt{6}}[2\cdot(-1)\cdot3+2\cdot6]=\sqrt{6} \\ x_3=(\boldsymbol{\delta},\varepsilon_3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}[2\cdot3\cdot(-1)+6\cdot(-1)+9\cdot3]=\frac{5}{2}\sqrt{3} \end{cases}$

注意：这个时候的内积是重新定义的，需要用重新定义的内积来算

四、 (15 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子、不变因子以及初级因子；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式；

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型矩阵 $\boldsymbol{J}$，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$

解析：

(1) 注意到 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & -3\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 3 & 0 & \lambda-5\end{bmatrix}$，由于存在一阶非 0 子式 $|3|=3\neq 0$，所以 $D_1(\lambda)=1$。

并且 $D_3(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^3$，并且存在一个二阶非 0 子式 $\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0\\ 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)$

于是 $D_2(\lambda)$ 只有可能是 1 或者 $\lambda-2$。并且由于 $\begin{vmatrix}0 & -3\\ \lambda-2 & 0\end{vmatrix}=3(\lambda-2)$，$\begin{vmatrix}0 & \lambda-2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3(\lambda-2)$

$\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)$，$\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3\\ 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2$，所以 $D_2(\lambda)=\lambda-2$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子为 $D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=\lambda-2, D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda-2, d_3(\lambda)=\dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-2)^2$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的初级因子为 $\lambda-2$，$(\lambda-2)^2$

(2) $\boldsymbol{A}$ 矩阵的最小多项式就是 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶不变因子，也就是 $(\lambda-2)^2=\lambda^2-4\lambda+4$

(3) 由 (1) 知 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，于是我们设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，于是就有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$

于是我们可以得到 $\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=2\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+2\boldsymbol{p}_3\end{cases}$

于是我们可以由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 解得 $\boldsymbol{x}=k_1(0,1,0)^T+k_2(1,0,1)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数

所以 $\boldsymbol{p}_1=(k_2,k_1,k_2)^T, \boldsymbol{p}_2=(k_4,k_3,k_4)^T$，其中 k_1,k_2,k_3,k_4 为常数

所以 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{p}_2)=\left[\begin{array}{ccc:c}-3 & 0 & 3 & k_4\\ 0 & 0 & 0 & k_3\\ -3 & 0 & 3 & k_4\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}3 & 0 & -3 & -k_4\\ 0 & 0 & 0 & k_3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，于是 $k_3=0$，$\boldsymbol{p}_3=-\dfrac{k_4}{3}(1,0,0)$

所以 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix}k_2 & -3k_5 & k_5\\ k_1 & 0 & 0\\ k_2 & -3k_5 & 0\end{bmatrix}$，其中 k_1,k_2,k_5 是任意常数并且满足 $k_1k_5^2\neq 0$。

【注意】

1. 最后一步的 $k_1k_5^2\neq 0$ 是因为 $|\boldsymbol{P}|=-3k_1k_5^2\neq 0$

2. 求解 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$ 当中 $\boldsymbol{J}$ 的顺序没有要求，$\boldsymbol{P}$ 只需要求解出满足其中的一个 $\boldsymbol{P}$ 就可以了/

五、 (15 分) 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&6\\2&0&2\\1&2&3\\1&0&1\end{bmatrix}\text{以及}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}$；

(3) 由 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}$，求不相容的线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解以及最优最小二乘解；

解析：

(1) 注意到 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_2-2r_4]{r_1-2r_3}\begin{bmatrix}2&4&6\\2&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&4\\2&0\\1&2\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

(2) 由 (1) 得 $\boldsymbol{C}^{H}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{H}=\begin{bmatrix}2&2&1&1\\4&0&2&0\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{H}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}=10\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^{H}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{H})^{-1}(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{H}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1&1\\4&0&2&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1&1\\4&0&2&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}5&-3\\-4&3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1&1\\4&0&2&0\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-2&10&-1&5\\4&-8&2&-4\\2&2&1&1\end{bmatrix}$$

(3) 求最小二乘解有两种方法，这里都写一下。

(方法一) 注意到 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&6\\2&0&2\\1&2&3\\1&0&1\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}2&2&1&1\\4&0&2&0\\6&2&3&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=10\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}9\\14\\23\end{bmatrix}$

所以 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}10&10&20&9\\10&20&30&14\\20&30&50&23\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}10&10&20&9\\0&10&20&5\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}10&0&0&4\\0&10&20&5\\0&0&0&0\end{array}\right]$

$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{10}]{r_1\times\frac{1}{10}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&\frac{2}{5}\\0&1&2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]$，所以最小二乘解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数。

(方法二) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_1$，其中 $\boldsymbol{C}_1$ 为任意的列向量

于是 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{C}_1=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k\\k\\-k\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数

所以极小范数最小二乘解 (也叫最优最小二乘解) 为 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-2&10&-1&5\\4&-8&2&-4\\2&2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

六、 (10 分) 判断矩阵级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&0\\6&0&1\end{bmatrix}^n$$

的敛散性，若收敛，求其和。

解析：

记 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&0\\6&0&1\end{bmatrix}$，注意到 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的 1− 范数 $||\boldsymbol{A}||_1=\frac{7}{10}<1$，所以该矩阵级数收敛

或者注意到 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的特征值为 $\frac{3}{10}$，$\frac{1\pm2\sqrt{3}}{10}$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的绝对值的最大值 (也叫谱半径) 为 $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{10}<1$

所以该矩阵级数收敛。

于是矩阵级数的和为 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=10\begin{bmatrix}\frac{3}{23} & 0 & \frac{2}{69}\\ 0 & \frac{1}{7} & 0\\ \frac{2}{23} & 0 & \frac{3}{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{30}{23} & 0 & \frac{20}{69}\\ 0 & \frac{10}{7} & 0\\ \frac{20}{23} & 0 & \frac{30}{23}\end{bmatrix}$

【注意】

1.$\boldsymbol{A}$ 的特征值的绝对值的最大值也叫做谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})$

2. 若 $\rho(\boldsymbol{A})<1$，则纽曼级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\boldsymbol{A}^n$ 收敛，且值为 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$

3. 若存在一种范数使得 $\|\boldsymbol{A}\|_X<1$，其中 X 表示 1，2，∞，m_1，m_∞，F，这是因为是矩阵范数。

七、 (15 分) 已知初值条件的方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，试回答下列问题：

(1) 求 $e^{\boldsymbol{A}}$；

(2) 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$；

(3) 求该微分方程的通解。

解析：

由于 (2) 出来了，(1) 也就出来了，所以这里直接求第二问和第三问。

令 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$，并且注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

并且注意到 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^2-3\lambda+2$

所以设 $f(\lambda)=m_A(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$，其中 $r(\lambda)=a_0\lambda+a_1$

于是 $\begin{cases} f(1)=r(1) \\ f(2)=r(2) \end{cases}$，也就是 $\begin{cases} e^t=a_0+a_1 \\ e^{2t}=2a_0+a_1 \end{cases}$，于是 $\begin{cases} a_0=-e^t+e^{2t} \\ a_1=2e^t-e^{2t} \end{cases}$

所以 $e^{\boldsymbol{A}t}=f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}+a_1\boldsymbol{E}=(-e^t+e^{2t})\boldsymbol{A}+(2e^t-e^{2t})\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 2e^t-e^{2t} & 0 & 2e^t-2e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ -e^t+e^{2t} & 0 & -e^t+2e^{2t} \end{bmatrix}$

所以 $e^{\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} 2e-e^2 & 0 & 2e-2e^2 \\ 0 & e & 0 \\ -e+e^2 & 0 & -e+2e^2 \end{bmatrix}$

该微分方程的通解为 $\boldsymbol{x}=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix} 4e^t-3e^{2t} \\ e^t \\ -2e^t+3e^{2t} \end{bmatrix}$

1.3 《矩阵论》2017 年试题 (A 卷) 及其参考解答

一、 填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^4-8\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=$ ________.

解析：

(方法一) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $\lambda^2-2\lambda$，并且 $\lambda^4-8\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda=(\lambda^2-2\lambda)(\lambda^2-6\lambda-14)-26\lambda$

所以原式 $=-26\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -26 & -26 \\ -26 & -26 \end{bmatrix}$

(方法二) 注意到 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^4=4\boldsymbol{A}^2=8\boldsymbol{A}$

所以原式 $=8\boldsymbol{A}-8\cdot 4\boldsymbol{A}-2\cdot 2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}=-26\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -26 & -26 \\ -26 & -26 \end{bmatrix}$

2. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 ________.

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)$ 或者是 $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

由于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)$

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&2&1\\5&5&6\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解为 ________.

解析：

注意到 $|\boldsymbol{A}|=-5\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&3&4&1&0&0\\3&2&1&0&1&0\\5&5&6&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-\frac{3}{2}r_1]{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&3&4&1&0&0\\0&-\frac{5}{2}&-5&-\frac{3}{2}&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

所以 $\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-\frac{5}{2}&-5\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{3}{2}&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&1&1\end{bmatrix}$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解为 $\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-\frac{5}{2}&-5\\0&0&1\end{bmatrix}$

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+i&0&-3\\5&4i&0\\-2&3&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的范数 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}=$ ________；$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=$ ________；

$\|\boldsymbol{A}\|_F=$ ________；

解析：

由题意知 $\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=\sqrt{2}+3+5+4+2+3+1=18+\sqrt{2}$

$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}=3\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|=3\cdot 5=15$

$\|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|^2}=\sqrt{2+9+25+16+4+9+1}=\sqrt{66}$

5. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\-1&1&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{bmatrix}$，设 V_1 和 V_2 分别为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，则 $\dim(V_1+V_2)=$ ________.

解析：

由于 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_4-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4\times\frac{1}{4}]{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_2\times 2]{r_3\times\frac{1}{-4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-3\times r_3]{r_2-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_4]{r_1-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_2]{r_3\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间维数为 2，$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解空间维数为 2。$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$

所以由维数定理知 $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3$

【注意】

第一步的理由是，你需要通过 $\begin{cases} \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0} \end{cases}$ 求 $\dim(V_1 \cap V_2)$，之后方便使用维数定理。

二、 (15 分) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子，不变因子，初等因子；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形；

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式。

解析：

注意到 $\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}$

所以 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda-2)^3$

(1) 行列式因子 $D_3(\lambda) = (\lambda-2)^3$，注意到 $|2| = 2 \neq 0$，所以 $D_1(\lambda) = 1$

并且由于 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)$，$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda-2)$，$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)$

$\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)$，$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 2(\lambda-2)$，$\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)$

$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)$，$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)$，$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)$

所以 $D_2(\lambda) = (\lambda-2)$，所以行列式因子为 $D_1(\lambda) = 1$，$D_2(\lambda) = (\lambda-2)$，$D_3(\lambda) = (\lambda-2)^3$

所以不变因子为 $d_1(\lambda) = 1$，$d_2(\lambda) = \dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = \lambda - 2$，$d_3(\lambda) = \dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda-2)^2$

所以初级因子为 $\lambda - 2$，$(\lambda-2)^2$

(2) 由 (1) 知 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(3) 由于 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}(1, 1, -1)$，所以 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 = \boldsymbol{O}$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda-2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

三、 (15 分) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，并记

$$V = \left\{ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \middle| \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} \right\}$$

为线性空间，对于任意的 $\boldsymbol{X} \in V$，定义：$T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{XB}$。

(1) 证明：T 是 V 上的线性变换；

(2) 求 V 的一组基，并求 T 在所求基下的矩阵。

解析：

(1) 证明：设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2 \in V$，$k \in \mathbf{R}$，于是就会有：

$T(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2) = (\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B} = T(\boldsymbol{X}_1) + T(\boldsymbol{X}_2)$

$T(k\boldsymbol{X}_1) = (k\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B} = kT(\boldsymbol{X}_1)$

所以 T 是 V 上的线性变换

(2) 由于 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA}$

所以 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$，也就是 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{11} + 2x_{12} \\ x_{21} & x_{21} + 2x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \\ 2x_{21} & 2x_{22} \end{bmatrix}$

于是 $\begin{cases} x_{11} = x_{11} + x_{21} \\ x_{11} + 2x_{12} = x_{12} + x_{22} \\ x_{21} = 2x_{21} \\ x_{21} + 2x_{22} = 2x_{22} \end{cases}$ ，于是 $\begin{cases} x_{21} = 0 \\ x_{11} + x_{12} = x_{22} \end{cases}$ ，所以 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{11} + x_{12} \end{bmatrix}$

所以 V 的一组基为 $\boldsymbol{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以 $T(\boldsymbol{X}_3) = \boldsymbol{X}_3\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{X}_3 - \boldsymbol{X}_4 = (\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$T(\boldsymbol{X}_4) = \boldsymbol{X}_4\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}_4 = (\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

所以 $T(\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4) = (\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，也就是 T 在基 $\boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

四、 (15 分) 已知微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = x_0 \end{cases}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) (7 分) 求 $e^{\boldsymbol{A}}$；

(2) (8 分) 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$，并求微分方程组的解。

解析：

由于第一问是第二问的特殊情况，所以我们接下来只求解第二问。

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，也就是 $\lambda^3 - 6\lambda^2 + (2 + 8 + 2)\lambda - 8 = 0$，也就是 $(\lambda - 2)^3 = 0$

并且注意到 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}(1, 1, -1)$

所以 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}(1, 1, -1)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}(1, 1, -1) = \boldsymbol{O}$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

由于 $f(\lambda) = e^{\lambda t}$，所以设 $r(\lambda) = a_0\lambda + a_1$ 于是我们就有 $\begin{cases} f(2) = r(2) \\ f'(2) = r'(2) \end{cases}$

也就是 $\begin{cases} e^{2t} = 2a_0 + a_1 \\ te^{2t} = a_0 \end{cases}$，于是 $\begin{cases} a_0 = te^{2t} \\ a_1 = (1-2t)e^{2t} \end{cases}$

所以 $e^{\boldsymbol{A}t} = f(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}) = te^{2t}\boldsymbol{A} + (1-2t)e^{2t}\boldsymbol{E} = te^{2t}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} + (1-2t)e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= te^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} & -te^{2t} \\ -2te^{2t} & (1-2t)e^{2t} & 2te^{2t} \\ -te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{bmatrix}$

所以 $e^{\boldsymbol{A}} = e^{\boldsymbol{A}t}\big|_{t=1} = \begin{bmatrix} 2e^2 & e^2 & -e^2 \\ -2e^2 & -e^2 & 2e^2 \\ -e^2 & -e^2 & 2e^2 \end{bmatrix}$，所以该微分方程组的解为 $\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} (t+1)e^{2t} \\ (1-2t)e^{2t} \\ (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}$

五、 (20 分) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆 $\boldsymbol{A}^+$；

(3) 求 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解；

(4) 求 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的极小范数最小二乘解。

解析：

(1) 由于 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$

(2) 由于 $\boldsymbol{C}^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{CC}^H=\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & \frac{13}{4}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}24 & -12\\ -12 & 13\end{bmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^H(\boldsymbol{CC}^H)^{-1}(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^H=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ -2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\cdot 4\cdot\frac{1}{12\times 14}\begin{bmatrix}13 & 12\\ 12 & 24\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}4 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{252}\begin{bmatrix}13 & 12\\ 12 & 24\\ -13 & -12\\ -8 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{252}\begin{bmatrix}16 & -3\\ -24 & 36\\ -16 & 3\\ -68 & 60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{126}\begin{bmatrix}-8 & 5 & 13\\ 12 & 24 & 12\\ 8 & -5 & -13\\ 34 & 26 & -8\end{bmatrix}$$

(3) 由题意得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}_1=\frac{1}{63}\begin{bmatrix}5\\ 24\\ -5\\ 26\end{bmatrix}+\frac{1}{42}\begin{bmatrix}29 & -12 & 13 & 8\\ -12 & 18 & 12 & -12\\ 13 & 12 & 29 & -8\\ 8 & -12 & -8 & 8\end{bmatrix}\boldsymbol{C}_1$$，其中 $\boldsymbol{C}_1$ 为任意列向量

(4)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的极小范数最小二乘解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}=\frac{1}{126}\begin{bmatrix}10\\ 48\\ -10\\ 52\end{bmatrix}=\frac{1}{63}\begin{bmatrix}5\\ 24\\ -5\\ 26\end{bmatrix}$

六、 (20 分) 对 $\mathbf{R}^3$ 中任意的 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T,\beta=(y_1,y_2,y_3)^T$，定义：

$$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3$$

(1) (5 分) 证明 (α,β) 为 $\mathbf{R}^3$ 的内积；

(2) (10 分) 已知 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$，求 $W=\mathrm{Span}\{\gamma\}$ 的正交补 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基；

(3) (5 分) 设 $\boldsymbol{\delta}=(3,6,9)^T$，求满足 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in W}||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\delta}||$ 的 $\boldsymbol{x}$；

解析：

(1) 证明：设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T,\beta=(y_1,y_2,y_3)^T,\gamma'=(z_1,z_2,z_3)^T,k,l\in\mathbf{R}$

对称性：由于 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3$，所以 $(\beta,\alpha)=y_1x_1+y_2x_2+2y_3x_3$，所以 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

线性性：由于

$$\begin{aligned}(k\alpha+l\beta,\gamma')&=(kx_1+ly_1)z_1+(kx_2+ly_2)z_2+(kx_3+ly_3)z_3=k(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)+l(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)\\&=k(\alpha,\gamma')+l(\beta,\gamma')\end{aligned}$$

正定性：由于 $(\alpha,\alpha)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2\geqslant 0$，并且当且仅当 $\alpha=\mathbf{0}$ 时，$(\alpha,\alpha)=0$

(2) 首先我们来求解与 γ 正交的向量

设 $\boldsymbol{x}_1=(a_1,a_2,a_3)^T\in W^{\perp}$，由 $(\boldsymbol{x},\gamma)=0$，得 $a_1+a_2+2a_3=0$，于是得到

$\boldsymbol{x}_1=k_1(-1,1,0)^T+k_2(-2,0,1)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数

然后我们来正交化

记 $\alpha_1=(-1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-2,0,1)^T$

于是 $\beta_1=\alpha_1=(-1,1,0)^T$，于是 $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-2,0,1)^T-\dfrac{2}{2}(-1,1,0)^T=(-1,-1,1)^T$

最后我们来单位化

$||\beta_1||=\sqrt{(\beta_1,\beta_1)}=\sqrt{2}$，$||\beta_2||=\sqrt{(\beta_1,\beta_1)}=\sqrt{1+1+2}=2$

所以 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基为 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$，$\gamma_2=\dfrac{1}{2}(-1,-1,1)^T$

(3) 设 $\boldsymbol{x}\in W$，于是 $\boldsymbol{x}=(k,k,k)^T$，于是 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\delta}=(k-3,k-6,k-9)$

由于 $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\delta}||=\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\delta})}=\sqrt{(k-3)^2+(k-6)^2+2(k-9)^2}$

所以等价于求解 k 使得 $f(k)=(k-3)^2+(k-6)^2+2(k-9)^2$ 最小，所以我们就会有：

$f'(k)=2(k-3)+2(k-6)+4(k-9)=8k-54=0$，于是解得 $k=\dfrac{27}{4}$

于是满足 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in W}||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\delta}||$ 的 $\boldsymbol{x}=\dfrac{27}{4}(1,1,1)^T$

【注意】
本题第三问当中 $f'(k)$ 其实就相当于 $2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\delta},(1,1,1)^T)=0$，所以我们也可以考虑 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta})=0$ 时的 k 的求解。

1.4 《矩阵分析》2016 年 (A 卷) 试题及其参考解答

(必做题全做，选做题按要求选择 3 题。答题时不必抄题，标明题目序号)

一、必做题

1. (15 分) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$

   (1) 求 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的 Smith 标准形；(7 分)

   (2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型.(8 分)

解析：

(1) 由题意知 $\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+(\lambda+1)r_3]{r_2+4r_3} \begin{bmatrix}0 & -1 & (\lambda+1)(\lambda-2)\\ 0 & \lambda-3 & 4(\lambda-2)\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_2+(\lambda-3)r_1} \begin{bmatrix}0 & -1 & (\lambda+1)(\lambda-2)\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix}-1 & 0 & \lambda-2\\ 0 & -1 & (\lambda+1)(\lambda-2)\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[c_3+(\lambda+1)(\lambda-2)c_2]{c_3+(\lambda-2)c_1} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix} \xrightarrow[c_2\times(-1)]{c_1\times(-1)} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix}$

所以 $\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的 Smith 标准形为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix}$

(2) 由 (1) 知 $\boldsymbol{A}$ 的初级因子为 $(\lambda-1)^2, \lambda-2$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

2. (10 分) 设 $||\bullet||_m$ 是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbf{R}^n$ 且 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，对于任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，定义

$$||\boldsymbol{x}||_v=||\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m$$

证明 $||\bullet||_v$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的向量范数，且与矩阵范数 $||\bullet||_m$ 相容

解析：

(1) 正定性：注意到 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$R(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T)=1$，于是 $||\boldsymbol{x}||_v=||\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m>0$；

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$R(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T)=0$，于是 $||\boldsymbol{x}||_v=||\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m=0$

(2) 齐次性：注意到 $||k\boldsymbol{x}||_v=||(k\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^T||_m=||k\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m=|k|||\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m=|k|||\boldsymbol{x}||_v$

(3) 三角不等式：注意到 $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}||_v=||(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}^T||_m=||\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T+\boldsymbol{z}\boldsymbol{y}^T||_m\leqslant||\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m+||\boldsymbol{z}\boldsymbol{y}^T||_m=||\boldsymbol{x}||_v+||\boldsymbol{z}||_v$

所以 $||\bullet||_v$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的向量范数。接下来我们来证明 $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||_v\leqslant||\boldsymbol{A}||_m||\boldsymbol{x}||_v$

由于 $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||_v=||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m=||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m\leqslant||\boldsymbol{A}||_m||\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T||_m=||\boldsymbol{A}||_m||\boldsymbol{x}||_v$

【注意】

1. 最后一行的几个等号和不等号的说明：第一个等号用的是题目当中的定义，第二个等号是利用的矩阵乘法的结合律，然后不等号是因为矩阵范数的相容性，最后一个等号用的是反用题目当中的定义。

2. 有同学可能会疑惑：为什么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 那个地方是 v 不是 m 呢？你要注意：$\boldsymbol{x}$ 是列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵。

3. (15 分) 已知

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 求 A 的最小多项式；(5 分)

(2) 计算 e^{At} 以及 $\cos A$。(10 分)

解析：

(1) 注意到 A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + (3 + 2 + (-2))\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$

并且由于 $A - E = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} (1, 1, -3)$，所以 $(A - E)^2 = O$

所以 A 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

(2) 令 $f_1(\lambda) = e^{\lambda t}$，$f_2(\lambda) = \cos(\lambda t)$，于是我们有

$f_1(\lambda) = m_A(\lambda) q_1(\lambda) + r_1(\lambda)$，$f_2(\lambda) = m_A(\lambda) q_2(\lambda) + r_2(\lambda)$

于是 $r_1(\lambda) = a_0\lambda + a_1$ 以及 $r_2(\lambda) = b_0\lambda + b_1$

于是 $\begin{cases} f_1(1) = r_1(1) \\ f_1'(1) = r_1'(1) \end{cases}$，也就是 $\begin{cases} e^t = a_0 + a_1 \\ te^t = a_0 \end{cases}$，于是 $\begin{cases} a_0 = te^t \\ a_1 = (1 - t)e^t \end{cases}$

所以 $e^{At} = a_0 A + a_1 E = te^t A + (1 - t)e^t E = e^t E + te^t (A - E) = \begin{bmatrix} e^t - 2te^t & -2te^t & 6te^t \\ -te^t & e^t - te^t & 3te^t \\ -te^t & -te^t & 3te^t + e^t \end{bmatrix}$

以及 $\begin{cases} f_2(1) = r_2(1) \\ f_2'(1) = r_2'(1) \end{cases}$，也就是 $\begin{cases} \cos t = b_0 + b_1 \\ -t\sin t = b_0 \end{cases}$，于是 $\begin{cases} b_0 = -t\sin t \\ b_1 = \cos t + t\sin t \end{cases}$

所以 $\cos(At) = b_0 A + b_1 E = -(t\sin t)A + (\cos t + t\sin t)E = \cos t E - (t\sin t)(A - E)$

$$= \begin{bmatrix} 2t\sin t + \cos t & 2t\sin t & -6t\sin t \\ t\sin t & t\sin t + \cos t & -3t\sin t \\ t\sin t & t\sin t & -3t\sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

所以 $\cos A = \cos(At)|_{t=1} = \begin{bmatrix} 2\sin 1 + \cos 1 & 2\sin & -6\sin 1 \\ \sin 1 & \sin 1 + \cos 1 & -3\sin 1 \\ \sin 1 & \sin 1 & -3\sin 1 + \cos 1 \end{bmatrix}$

4. (10 分) 求下列矩阵的满秩分解：

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

解析：

注意到 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_4]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2+r_1]{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_1-r_2}\begin{bmatrix}0&1&-1&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，所以 $B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\-1&-1\\1&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}$

二、选做题 (在第 5、6 题中任选 1 题；在第 7 至第 10 题任选 2 题)

5. (20 分) 设 $V=\left\{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times2}\middle|a_{11}=a_{22}\right\}$ 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的一个线性子空间，对于任意的 $X\in V$，定义：$T(X)=PX+XP$，其中 $P=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

(1) 求 V 的一组基和维数；(5 分)

(2) 证明 T 是 V 上的线性变换，并求 $\ker(T)$ 的基；(5 分)

(3) 确定 V 的一组基，使得 T 在这组基下的矩阵为对角矩阵。(10 分)

解析：

(1) 由于 $a_{11}=a_{12}$，所以 V 的一组基为 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，维数为 3；

(2) 由于 $T(X_1+X_2)=P(X_1+X_2)+(X_1+X_2)P=(PX_1+X_1P)+(PX_2+X_2P)=T(X_1)+T(X_2)$

并且 $T(kX)=P(kX)+(kX)P=kPX+kXP=k(PX+XP)=kT(X)$

所以 T 是 V 上的线性变换。并且注意到 $X\in V$，所以 $X=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{11}\end{bmatrix}$

由于 $\ker(T)=\{X\in V|T(X)=O\}$，所以 $PX+XP=O$

所以 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{11}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，于是我们就得到了 $a_{12}+a_{21}=0,a_{11}=0$

所以 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$，所以 $\ker(T)$ 的基为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) 由 (1) 知 V 的一组基为 $\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(方法一) 此时我们就会有：$T(\boldsymbol{E}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{E}_2 + 2\boldsymbol{E}_3 = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$T(\boldsymbol{E}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_1 = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$；$T(\boldsymbol{E}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_1 = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

所以 T 在 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0, 2, -2$(别忘了第三章那个秒杀公式哦)

特征值为 0 的一个特征向量为 $(0, -1, 1)^T$，特征值为 2 的一个特征向量为 $(1, 1, 1)^T$，特征值为 -2 的一个特征向量为 $(-1, 1, 1)^T$，所以令 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$

于是我们可以令 $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3) = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{P} = (-\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3, -\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3)$

于是我们找到了一组基 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(方法二) 我们假定 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$，并假定对角线元素为 k，于是我们需要满足 $T(\boldsymbol{X}) = k\boldsymbol{X}$

于是我们就有：$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

所以我们就可以得到 $\begin{bmatrix} a_{12} + a_{21} & 2a_{11} \\ 2a_{11} & a_{12} + a_{21} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$，所以 $\begin{cases} a_{12} + a_{21} = ka_{11} \\ 2a_{11} = ka_{12} = ka_{21} \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = 0 \\ a_{11} = 0 \\ a_{12} + a_{21} = 0 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} k = -2 \\ a_{11} = -a_{21} = -a_{12} \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} k = 2 \\ a_{21} = a_{11} = a_{12} \end{cases}$

于是 $\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，于是对应的对角矩阵为 $=\begin{bmatrix}0&&\\&-2&\\&&2\end{bmatrix}$

6. (20 分) 设函数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}$ 是适当阶的常数矩阵。试证：

(1) 当 $\boldsymbol{A}(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，有 $\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}\mathrm{d}t=\left(\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}$；(10 分)

(2) 当 $\boldsymbol{A}(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可微时，有 $\int_a^b \boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}(b)-\boldsymbol{A}(a)$。(10 分)

解析：

(1) 证明：由于 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$，于是 $a_{ij}(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续

并且我们知道 $\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}=(c_{ij}(t))_{m\times s}$，其中 $c_{ij}(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)b_{kj}$

并且由于 $\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right)_{m\times n}$，所以

$$\begin{aligned}\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}\mathrm{d}t&=\left(\int_a^b c_{ij}(t)\mathrm{d}t\right)_{m\times s}=\left(\int_a^b \sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)b_{kj}\mathrm{d}t\right)_{m\times s}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}\int_a^b a_{ik}(t)b_{kj}\mathrm{d}t\right)_{m\times s}=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b a_{ik}(t)\mathrm{d}t\right)b_{kj}\right]_{m\times s}=\left(\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

(2) 证明：由于 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$，并且 $\boldsymbol{A}'(t)=(a'_{ij}(t))_{m\times n}$，于是 $a_{ij}(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续可微

并且由于 $\int_a^b \boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b a'_{ij}(t)\mathrm{d}t\right)_{m\times n}$，所以

$$\int_a^b \boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^b a'_{ij}(t)\mathrm{d}t\right)_{m\times n}=\left[a_{ij}(b)-a_{ij}(a)\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}(b)\right]_{m\times n}-\left[a_{ij}(a)\right]_{m\times n}=\boldsymbol{A}(b)-\boldsymbol{A}(a)$$

7. (15 分) 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_4=1\\x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\x_3+x_4=1\end{cases}$，试回答下列问题：

(1) 求广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}$；(8 分)

(2) 求该线性方程组的极小模最小二乘解。(7 分)

解析：

由题意知系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

(1) 注意到 $\boldsymbol{A} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_2-r_1} \begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{C}^H=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^H=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^H=\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{C}^H(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^H)^{-1}(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^H=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-4\\-5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1&-4\\-5&2&7\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5&1&-4\\5&1&-4\\-5&2&7\\0&3&3\end{bmatrix}$$

(2) 极小范数最小二乘解为 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\frac{1}{15}(2,2,4,6)^T$

8. (15 分) 求下列矩阵的 $\boldsymbol{QR}$ 分解，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&14&9\\6&43&3\\6&22&15\end{bmatrix}$

解析：

$\alpha_1=(3,6,6)^T,\alpha_2=(14,43,22)^T,\alpha_3=(9,3,15)^T$

于是我们可以利用施密特正交化公式得 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1=(3,6,6)^T\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-2,11,-10)^T\\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\dfrac{1}{5}(14,-2,-5)^T\end{cases}$

于是我们将 β_1,β_2,β_3 单位化之后，得

$\gamma_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^T$，$\gamma_2=\frac{1}{15}(-2,11,-10)^T$，$\gamma_3=\frac{1}{15}(14,-2,-5)^T$

所以 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15}\\ \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{15}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}9 & 48 & 15\\ 0 & 15 & -9\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

9. (15 分) 设 $C[-1,1]$ 表示实数域 $\boldsymbol{R}$ 上所有在 $[-1,1]$ 上连续的函数构成的线性空间，$\mathbf{R}[x]_3$ 表示实数域 $\boldsymbol{R}$ 上次数小于 3 的多项式在添上零多项式构成的线性子空间。在 $C[-1,1]$ 中定义

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x,\quad \forall f(x),g(x)\in C[-1,1].$$

(1) 证明 (f,g) 是 $C[-1,1]$ 上的内积；(5 分)

(2) 求 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组标准正交基；(5 分)

(3) 求 x^3 在 $\mathbf{R}[x]_3$ 上的正交投影。(5 分)

解析：

(1) 设 $f(x),g(x),h(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续函数，并设 $k,l\in\mathbf{R}$

对称性：$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} g(x)f(x)\mathrm{d}x=(g,f)$

线性性：$(kf+lg,h)=\int_{-1}^{1}[kf(x)+lg(x)]h(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} kf(x)h(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1} lg(x)h(x)\mathrm{d}x=k(f,h)+l(g,h)$

正定性：注意到 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续函数，并且 $(f,f)=\int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$

所以 $(f,f)=\int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x=0$ 当且仅当 $f(x)\equiv 0$ 时成立。

(2) 我们已经知道了 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组基为 $1,x,x^2$，分别记为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

然后我们需要做的事情就是正交化。

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1=1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=x-\dfrac{(x,1)}{(1,1)}1=x\\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=x^2-\dfrac{(x^2,1)}{(1,1)}1-\dfrac{(x^2,x)}{(x,x)}x=x^2-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

然后我们需要做的事情就是单位化。

注意到 $||\beta_1||=\sqrt{(\beta_1,\beta_1)}=\sqrt{2}$，$||\beta_2||=\sqrt{(\beta_2,\beta_2)}=\sqrt{\int_{-1}^{1} x\cdot x\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$||\beta_3|| = \sqrt{(\beta_3,\beta_3)} = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)\mathrm{d}x} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$$

于是 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组标准正交基为 $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \gamma_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \gamma_3 = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2-\dfrac{1}{3}\right)$

(3) 由于 $(x^3,\gamma_1)=0$，$(x^3,\gamma_2)=\dfrac{\sqrt{6}}{5}$，$(x^3,\gamma_3)=0$，所以 x^3 在 $\mathbf{R}[x]_3$ 上的正交投影为 $\dfrac{\sqrt{6}}{5}\gamma_2 = \dfrac{3}{5}x$

【注意】

1. 第一问有个非常坑人的点：如果 $f(x)$ 不给连续函数，而是 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可积，那么由 $\int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x = 0$ 并不能推出 $f(x)\equiv 0$，因为存在反例：$f(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$，其中 $n=1,2,\cdots$

2. 第三问，正交投影的定义。就是一个向量在一组标准正交基下的坐标。用表达式表示就是：

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基，并设 $\alpha\in\mathbf{R}^n$，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$，则形如

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

我们称作是 α 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的正交投影。

10. (15 分) 求下列矩阵的奇异值分解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{bmatrix}$

于是 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=25$，$\lambda_2=0$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 $d_1=\sqrt{\lambda_1}=5$，$d_2=\sqrt{\lambda_2}=0$，所以 $\mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

于是 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=25$ 的单位特征向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$，对应于 $\lambda_2=0$ 的单位特征向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)^T$

所以 $\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{V}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$，$\boldsymbol{V}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)^T$

所以 $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{U}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$

于是 $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^H = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

第二部分　课后重点习题答案

2.1　第一章　线性空间和线性变换课后习题

1. 设 $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2} \middle| a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$

(1) 证明 W 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的子空间；

(2) 试求 W 的一组基；

(3) 试求 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ 在所求的基下的坐标；

解析：

(1) 设 $\boldsymbol{A}_1 \in W, \boldsymbol{A}_2 \in W, k \in \mathbf{R}$，由于 $\boldsymbol{A}_1 \in W, \boldsymbol{A}_2 \in W$

所以设 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & -a_{11}-b_{11} \end{bmatrix} \in W$，所以该运算对加法封闭

由于 $k\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & -ka_{11} \end{bmatrix} \in W$，所以该运算对数乘封闭

并且由于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\in W$，所以 W 是一个非空集合。所以 W 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的子空间。

(2) 由于 W 当中满足 $a_{11}+a_{22}=0$，所以设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\in W$

于是 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&-x_{11}\end{bmatrix}$，所以存在三个自由未知量

所以令 $x_{11}=1,x_{12}=0,x_{21}=0$，于是可以得出 $\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

所以令 $x_{11}=0,x_{12}=1,x_{21}=0$，于是可以得出 $\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

所以令 $x_{11}=0,x_{12}=0,x_{21}=1$，于是可以得出 $\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

于是 W 的一组基为 $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

(3) 由于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2\\5&-3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 下的坐标为 $(3,2,5)^T$

【注意】

1. 第三问里面的基的顺序和坐标的顺序要对应一致就可以

2. 注意：证明数域 F 当中，U 是 V 的子空间 (V 是 F 上的向量空间) 的方法是，证明 U 满足下面几个条件：

① U 是一个非空集合。

② 对于任意的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in U$，恒有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in U$

③ 对于任意的“向量” $\boldsymbol{\alpha}\in U$ 以及数 $k\in F$，恒有 $k\boldsymbol{\alpha}\in U$

3. 上述解释当中的②和③可以合称为：对于 U 中的“向量”满足加法和数乘运算封闭

4. 在第 2 点当中的这个“向量”不一定指的就是列向量，也可以是矩阵，也可以是多项式函数，一定要学会广义化

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times2}$.

(1) 证明 $C(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{2\times2}\,|\,\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\}$ 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的子空间

(2) 求 $C(\boldsymbol{A})$ 的维数与一组基

解析：

(1) 设 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2 \in C(\boldsymbol{A}), k \in \mathbf{R}$

由于 $\boldsymbol{AB}_1 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}$，并且 $\boldsymbol{AB}_2 = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}$

所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) = \boldsymbol{AB}_1 + \boldsymbol{AB}_2 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{A}$

所以 $\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 \in C(\boldsymbol{A})$，也就是该集合对加法运算封闭。

由于 $\boldsymbol{AB}_1 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}$，并且 $k \in \mathbf{R}$

所以 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}_1) = k\boldsymbol{AB}_1 = k\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A} = (k\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{A}$，所以 $k\boldsymbol{B}_1 \in C(\boldsymbol{A})$，也就是该集合对数乘运算封闭。

由于 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} \in C(\boldsymbol{A})$，所以 $C(\boldsymbol{A})$ 是非空集合

所以 $C(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{2\times2} \big| \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}\}$ 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的子空间

(2) 设 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \in C(\boldsymbol{A})$，于是我们就有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

也就是 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$，于是 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{11}+x_{12} \\ x_{21} & x_{21}+x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

所以我们就会有：$\begin{cases} x_{11} = x_{11} + x_{21} \\ x_{11} + x_{12} = x_{12} + x_{22} \\ x_{21} = x_{21} \\ x_{21} + x_{22} = x_{22} \end{cases}$，于是有 $\begin{cases} x_{11} = x_{22} \\ x_{21} = 0 \end{cases}$

于是 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{11} \end{bmatrix}$，所以你会发现有两个自由未知量，所以

令 $x_{11} = 1, x_{12} = 0$，于是有 $\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；令 $x_{11} = 0, x_{12} = 1$，于是有 $\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以 $C(\boldsymbol{A})$ 的维数为 2，一组基为 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$

【注意】

和第一道题一样，需要注意子空间的证明方法，以及子空间的维数与一组基。

3. 在 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 当中，$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\varepsilon_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}0&3\\-1&4\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_4=\begin{bmatrix}1&-3\\0&2\end{bmatrix}$ 是两组基。

(1) 试求 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的过渡矩阵；

(2) 试求 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的过渡矩阵；

(3) 试求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&3\\0&2\end{bmatrix}$ 在这两组基下的坐标。

解析：

我们考虑将题目的两组基进行重组可以得到:

基 $\varepsilon_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\varepsilon_2'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\varepsilon_3'=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\varepsilon_4'=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$；基 $\boldsymbol{\eta}_1'=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2'=\begin{bmatrix}0\\3\\-1\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3'=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_4'=\begin{bmatrix}1\\-3\\0\\2\end{bmatrix}$

(1) 由题意知 $(\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\boldsymbol{\eta}_3',\boldsymbol{\eta}_4')=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3',\varepsilon_4')\boldsymbol{P}$

由于 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3',\varepsilon_4')=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\boldsymbol{\eta}_3',\boldsymbol{\eta}_4')=\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\0&3&1&-3\\0&-1&0&0\\2&4&1&2\end{bmatrix}$

所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\boldsymbol{\eta}_3',\boldsymbol{\eta}_4')=\begin{bmatrix}-1&0&2&1\\0&3&1&-3\\0&-1&0&0\\2&4&1&2\end{bmatrix}$

(2) 由题意知 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3',\varepsilon_4')=(\boldsymbol{\eta}_1',\boldsymbol{\eta}_2',\boldsymbol{\eta}_3',\boldsymbol{\eta}_4')\boldsymbol{P}_1$；由于 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3',\varepsilon_4')=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}^{-1}$

于是我们来求出 $\boldsymbol{P}^{-1}$，做初等行变换得

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}-1&0&2&1&1&0&0&0\\0&3&1&-3&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0&0&1&0\\2&4&1&2&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&-\frac{5}{19}&\frac{3}{19}&\frac{37}{19}&\frac{7}{19}\\0&1&0&0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&\frac{6}{19}&\frac{4}{19}&\frac{24}{19}&\frac{3}{19}\\0&0&0&1&\frac{2}{19}&-\frac{5}{19}&-\frac{11}{19}&\frac{1}{19}\end{array}\right]$$

所以 $\boldsymbol{P}_1 = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 37 & 7 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \\ 6 & 4 & 24 & 3 \\ 2 & -5 & -11 & 1 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}_1 = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 37 & 7 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \\ 6 & 4 & 24 & 3 \\ 2 & -5 & -11 & 1 \end{bmatrix}$

(3) 由于 $\boldsymbol{A} = -\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_4 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)(-1, 3, 0, 2)^T$

所以 $\boldsymbol{A}$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $(-1, 3, 0, 2)^T$

我们设 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

于是就有 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4)(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)(-1, 3, 0, 2)^T$

所以 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4)^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)(-1, 3, 0, 2)^T = \boldsymbol{P}_1(-1, 3, 0, 2)^T = \frac{1}{19}(28, 0, 12, -15)^T$

【注意】

1. 对应的分量拼起来的时候位置必须要完全一致

2. 过渡矩阵的定义需要熟练记忆。

4. 设 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in F^{2\times 2}$，$\forall \boldsymbol{X} \in F^{2\times 2}$ 定义 $T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{XB}$。

(1) 证明 T 是 $F^{2\times 2}$ 上的线性变换；

(2) 试求 T 在基 $\boldsymbol{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵。

解析：

(1) 设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2 \in F^{2\times 2}$，$k \in \mathbf{R}$

由于 $T(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2) = (\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B} = T(\boldsymbol{X}_1) + T(\boldsymbol{X}_2)$

$T(k\boldsymbol{X}) = (k\boldsymbol{X})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{XB}) = kT(\boldsymbol{X})$，所以 T 是 $F^{2\times 2}$ 上的线性变换

(2) 由于线性变换 T 在 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的像为

$T(\boldsymbol{E}_{11}) = \boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_{11} + \boldsymbol{E}_{12} = (\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22})(1, 1, 0, 0)^T$

$$T(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{12}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})(1,-1,0,0)^T$$

$$T(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})(0,0,1,1)^T$$

$$T(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_{21}-\boldsymbol{E}_{22}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})(0,0,1,-1)^T$$

所以 $T(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$

所以 T 在基 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$

【注意】

1. 证明线性变换的方法：保持加法和数乘不变。

也就是证明对于任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$k\in\mathbf{R}$，恒有：$T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=T(\boldsymbol{\alpha})+T(\boldsymbol{\beta})$ 以及 $T(k\boldsymbol{\alpha})=kT(\boldsymbol{\alpha})$

2. 已知一个线性变换 T 以及一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，如何求解该线性变换在该基下的矩阵？分两步走：

① 求出这个线性变换 T 在这个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 当中的每一个“向量”下的“像”，也就是得出 $T(\boldsymbol{\alpha}_i)$，并将得出的这个“像”变成这个基当中的向量的线性组合，也就是

$$T(\boldsymbol{\alpha}_i)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

② 利用 $T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$ 即可得出题目当中所要求该线性变换矩阵 $\boldsymbol{A}$

5. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\4&0\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times2}$，在 $R^{2\times2}$ 上定义线性变换 $T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XB}$。试求 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的一个基，使得 T 在所求的基 F 的矩阵为对角矩阵

解析：

$\mathbf{R}^{2\times2}$ 的标准基为 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_{12}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})(0,1,0,0)^T$$

$$T(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}=4\boldsymbol{E}_{11}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})(4,0,0,0)^T$$

$$T(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_{22}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})(0,0,0,1)^T$$

$$T(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{bmatrix}0&0\\4&0\end{bmatrix}=4\boldsymbol{E}_{21}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})(0,0,4,0)^T$$

所以 $T(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}0&4&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&4\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

所以 T 在基 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}0&4&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&4\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

由于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&4&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&4\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,-2,-2$

所以特征值 2 对应的特征向量为 $(2,1,0,0)^T$ 和 $(0,0,2,1)^T$

特征值 -2 对应的特征向量为 $(-2,1,0,0)^T$ 和 $(0,0,-2,1)^T$

所以令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\1&0&1&0\\0&2&0&-2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{bmatrix}2&&&\\&2&&\\&&-2&\\&&&-2\end{bmatrix}$

所以令

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22}) &= (\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{P} \\
&= (\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (2\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}, 2\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}, -2\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}, -2\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22})
\end{aligned}
$$

也就是 $\boldsymbol{A}_{11} = 2\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{12} = 2\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A}_{21} = -2\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{22} = -2\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22}$ 是 V 的一组基，并且 T 在这个基下的矩阵为对角矩阵 Λ

(方法二：王博提供，感谢王博同学。)

假定基为 $\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{21}$，$\boldsymbol{A}_{22}$，并设对角矩阵当中的元素为 k_1,k_2,k_3,k_4

因为在这组基下的矩阵为对角矩阵，所以我们可以取基当中的一个向量 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

并且在题目对应的线性变换下，这个向量对应于对角矩阵当中的 k

于是就有 $\boldsymbol{XB} = k\boldsymbol{X}$，也就是 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$，也就是 $\begin{bmatrix} 4x_{12} & x_{11} \\ 4x_{22} & x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_{11} & kx_{12} \\ kx_{21} & kx_{22} \end{bmatrix}$

于是我们就有 $\begin{cases} 4x_{12} = kx_{11} \\ x_{11} = kx_{12} \\ 4x_{22} = kx_{21} \\ x_{21} = kx_{22} \end{cases}$，解得 $k = \pm 2$，这个时候你会发现，本来应该是 4 个不一样的 k

但是你只解出了两个不一样的 k，说明对角矩阵当中有重的特征值

于是 $k = 2$ 时，$x_{11} = 2x_{12}$，$x_{21} = 2x_{22}$，于是 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{12} & x_{12} \\ 2x_{22} & x_{22} \end{bmatrix}$

$k = -2$ 时，$x_{11} = -2x_{12}$，$x_{21} = -2x_{22}$，于是 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_{12} & x_{12} \\ -2x_{22} & x_{22} \end{bmatrix}$

所以基为 $\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0\\2&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-2&-1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0\\-2&-1\end{bmatrix}$，此时对应的矩阵为 $\begin{bmatrix}2&&&\\&2&&\\&&-2&\\&&&-2\end{bmatrix}$

【注意】

1. 初等变换之后选取每一行的首非零元所在的列作为非自由变量

2. 线性变换在不同基的矩阵之间的转换关系推导过程如下：

假定 $(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{P}$

此时 $T(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22})=T(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$

3. 一定要注意：怎么才叫线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 下的矩阵呢？定义如下：

$T(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n})=(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n})\boldsymbol{A}$，注意：标红色的这俩东西要一模一样才行呢。

4. 王博同学这么做的理由是这样的：

由于线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$ 下的矩阵为 Λ

于是 $T(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n})=(T(\boldsymbol{\alpha_1}),T(\boldsymbol{\alpha_2}),T(\boldsymbol{\alpha_3}),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha_n}))=(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n})\Lambda$

6. 在多项式空间 $F[t]_3$ 中，设 $f(t)=x_1+x_2t+x_3t^2$，定义变换

$$T[f(t)]=(x_2+x_3)+(x_1+x_3)t+(x_1+x_2)t^2$$

(1) 证明 T 是 $F[x]_3$ 的线性变换；

(2) 试求 T 在基 $1,t,t^2$ 下的矩阵；

(3) 试求 $F[x]_3$ 的一组基，使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵。

解析：

(1) 假定 $f_1(t)=x_{11}+x_{12}t+x_{13}t^2$，$f_2(t)=y_{11}+y_{12}t+y_{13}t^2$，$k\in\mathbf{R}$

此时 $f_1(t)+f_2(t)=(x_{11}+y_{11})+(x_{12}+y_{12})t+(x_{13}+y_{13})t^2$

此时

$$\begin{aligned}T[f_1(t)+f_2(t)]&=(x_{12}+y_{12}+x_{13}+y_{13})+(x_{11}+y_{11}+x_{13}+y_{13})t+(x_{11}+y_{11}+x_{12}+y_{12})t^2\\&=[(x_{12}+x_{13})+(x_{11}+x_{13})t+(x_{11}+x_{12})t^2]+[(y_{12}+y_{13})+(y_{11}+y_{13})t+(y_{11}+y_{12})t^2]\\&=T[f_1(t)]+T[f_2(t)]\end{aligned}$$

说明该变换保持加法不变

由于 $kf(t)=kx_1+kx_2t+kx_3t^2$

所以 $T[kf(t)]=(kx_2+kx_3)+(kx_1+kx_3)t+(kx_1+kx_2)t^2=k[(x_2+x_3)+(x_1+x_3)t+(x_1+x_2)t^2]=kT[f(t)]$

说明该变换保持数乘不变。所以 T 是一个线性变换。

(2) 由于 $T[f(t)]=x_1(t+t^2)+x_2(1+t^2)+x_3(1+t)$

所以 $T(1)=t+t^2=(1,t,t^2)(0,1,1)^T$，$T(t)=1+t^2=(1,t,t^2)(1,0,1)^T$，$T(t^2)=1+t=(1,t,t^2)(1,1,0)^T$

所以 $T(1,t,t^2)=(1,t,t^2)\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，所以 T 在基 $1,t,t^2$ 下的矩阵是 $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

(3) 记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,-1,2$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 对应的特征向量为 $(-1,1,0)^T$ 和 $(-1,0,1)^T$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2 对应的特征向量为 $(1,1,1)^T$

于是令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$

于是我们可以得出基 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(1,t,t^2)\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=(-1+t,-1+t^2,1+t+t^2)$

于是 $F[x]_3$ 在基 $-1+t,-1+t^2,1+t+t^2$ 下的对角矩阵为 Λ

【注意】

1.$F[t]_3$ 表示的是次数小于 3 的多项式，但是更多的时候写的是 $\mathbf{R}[t]_3$

2. 线性变换具有保持加法和数乘不变的性质，保持加法和数乘不变的性质的也只有线性变换。

2.2 第二章 内积空间课后习题

1. 对 $\mathbf{R}^3$ 中任意向量

$$\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T,\quad \beta=(y_1,y_2,y_3)^T$$

定义

$$(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

证明：这是 $\mathbf{R}^3$ 上的内积；并求 $\mathbf{R}^3$ 的一组标准正交基。

解析：

证明：$\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T, \beta = (y_1, y_2, y_3)^T, \gamma = (z_1, z_2, z_3)^T$

注意到 $(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$，所以 $(\beta, \alpha) = y_1 x_1 + 2y_2 x_2 + 3y_3 x_3 = (\alpha, \beta)$

并且 $(k\alpha, \beta) = (kx_1) y_1 + 2(kx_2) y_2 + 3(kx_3) y_3 = k(x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3) = k(\alpha, \beta)$

由于

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta, \gamma) &= (x_1 + y_1) z_1 + 2(x_2 + y_2) z_2 + 3(x_3 + y_3) z_3 \\ &= (x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + 3x_3 z_3) + (y_1 z_1 + 2y_2 z_2 + 3y_3 z_3) \\ &= (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)\end{aligned}$$

并且 $(\alpha, \alpha) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \geqslant 0$，并且 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 时 $(\alpha, \alpha) > 0$。

所以这是 $\mathbf{R}^3$ 上的内积

我们显然能够找到一组正交基为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 0, 0)^T, \boldsymbol{p}_2 = (0, 1, 0)^T, \boldsymbol{p}_3 = (0, 0, 1)^T$

于是我们需要做的事情就是将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化

由于 $||\boldsymbol{p}_1|| = \sqrt{(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1)} = \sqrt{1} = 1$，$||\boldsymbol{p}_2|| = \sqrt{(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_2)} = \sqrt{2}$，$||\boldsymbol{p}_3|| = \sqrt{(\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_3)} = \sqrt{3}$

所以 $\mathbf{R}^3$ 的一组标准正交基为 $\boldsymbol{p}_1^\circ = (1, 0, 0)^T$，$\boldsymbol{p}_2^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0)^T$，$\boldsymbol{p}_3^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(0, 0, 1)^T$

【注意】

1. 证明内积的方法需要证明以下东西全部成立：

①:$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$　②:$(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$　③:$(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$　④:$(\alpha, \alpha) \geqslant 0$

其中 α, β, γ 任意并且都 $\in V$，$k \in \mathbf{R}$

2. 如果内积没有重新定义的话，默认采用线性代数里面的定义，但是如果重新定义了的话就要采用新的定义来做。

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶实对称矩阵，然而

$$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \qquad \beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$$

定义 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\boldsymbol{A}\beta$，证明 $\mathbf{R}^n$ 对所定义的 (α,β) 构成欧氏空间的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

解析：

设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^n,k\in\mathbf{R}$ 且 α,β,γ,k 均任意。

①：证明 $\mathbf{R}^n$ 对所定义的 (α,β) 构成欧氏空间 $\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵

由于 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\boldsymbol{A}\beta$，并且 $(\beta,\alpha)=\beta^T\boldsymbol{A}\alpha$，由于 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$，所以 $\alpha^T\boldsymbol{A}\beta=\beta^T\boldsymbol{A}\alpha$

由于 $\alpha^T\boldsymbol{A}\beta$ 的本质是一个数，所以 $(\alpha^T\boldsymbol{A}\beta)^T=\alpha^T\boldsymbol{A}\beta$，也就是 $\beta^T\boldsymbol{A}^T\alpha=\beta^T\boldsymbol{A}\alpha$

由于这个式子对于任意的 α 和 β 都成立，所以只能让 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$

为什么只能让 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ 呢？参见后面的**【注意】**，这里就不再讲了，我们直接往下走

由于对于任意的 $\alpha\neq\mathbf{0}$，恒有 $(\alpha,\alpha)=\alpha^T\boldsymbol{A}\alpha>0$(这里用的是欧氏空间的内积的定义)

所以 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

②：证明 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵 $\Rightarrow\mathbf{R}^n$ 对所定义的 (α,β) 构成欧氏空间

由于 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵。

由于 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\boldsymbol{A}\beta$ 从本质上是一个数，所以 $\alpha^T\boldsymbol{A}\beta=(\alpha^T\boldsymbol{A}\beta)^T$

也就是 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\boldsymbol{A}\beta=\beta^T\boldsymbol{A}^T\alpha=\beta^T\boldsymbol{A}\alpha=(\beta,\alpha)$

并且 $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha+\beta)^T\boldsymbol{A}\gamma=(\alpha^T+\beta^T)\boldsymbol{A}\gamma=\alpha^T\boldsymbol{A}\gamma+\beta^T\boldsymbol{A}\gamma=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

并且 $(k\alpha,\beta)=(k\alpha)^T\boldsymbol{A}\beta=k\alpha^T\boldsymbol{A}\beta=k(\alpha,\beta)$

并且 $(\alpha,\alpha)=\alpha^T\boldsymbol{A}\alpha$，由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $\alpha\neq\mathbf{0}$ 时，$\alpha^T\boldsymbol{A}\alpha>0$

所以 $\mathbf{R}^n$ 对所定义的 (α,β) 构成欧氏空间

【注意】

1. 为什么对于任意的 α 和 β 都有 $\beta^T\boldsymbol{A}^T\alpha=\beta^T\boldsymbol{A}\alpha$ 成立，那就只能让 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ 呢？理由如下：

令 $\alpha=\varepsilon_i=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$(表示的是第 i 个分量为 1，其他分量为 0)

$\beta=\varepsilon_j=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$(表示的是第 j 个分量为 1，其他分量为 0)

于是就会有 $\beta^T\boldsymbol{A}\alpha=a_{ji}$，于是 $\beta^T\boldsymbol{A}^T\alpha=a_{ij}$，由 $\beta^T\boldsymbol{A}^T\alpha=\beta^T\boldsymbol{A}\alpha$ 知 $a_{ji}=a_{ij}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称矩阵

2. 证明 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵分为两步：

① 证明 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵

② 证明 $\boldsymbol{A}$ 正定 (可考虑顺序主子式、正定的定义等等，这些在第三章会有讲)

3. 和第二题一样，证明内积的方法需要证明四个东西全部成立：

3. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \end{cases}$ 的解空间的一组标准正交基。

解析：

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$，于是 $R(\boldsymbol{A})=2$

于是 x_1,x_2 作为非自由未知量，所以 x_3,x_4,x_5 作为自由未知量

令 $x_3=1,x_4=0,x_5=0$ 得 $x_1=0,x_2=1$

令 $x_3=0,x_4=1,x_5=0$ 得 $x_1=-1,x_2=1$

令 $x_3=0,x_4=0,x_5=1$ 得 $x_1=4,x_2=-5$

所以解空间为 $\boldsymbol{x}=k_1(0,1,1,0,0)^T+k_2(-1,1,0,1,0)^T+k_3(4,-5,0,0,1)^T$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

现在只是解出了线性无关的三个向量 $\alpha_1=(0,1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(-1,1,0,1,0)^T$，$\alpha_3=(4,-5,0,0,1)^T$

所以接下来要做的事情就是正交化，单位化。

于是用施密特正交化公式得

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1=(0,1,1,0,0)^T \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,1,0,1,0)^T-\dfrac{1}{2}(0,1,1,0,0)^T=(-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0)^T \\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\dfrac{1}{5}(7,-6,6,13,5) \end{cases}$$

于是我们将 β_1,β_2,β_3 单位化，得 $\beta_1^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0)^T$，$\beta_2^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{7}}(-2,1,-1,1,0)$，$\beta_3^\circ=\dfrac{1}{3\sqrt{35}}(7,-6,6,13,5)$

所以齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \end{cases}$ 的解空间的一组标准正交基为

$$\beta_1^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0)^T,\quad \beta_2^\circ=\frac{1}{\sqrt{7}}(-2,1,-1,1,0),\quad \beta_3^\circ=\frac{1}{3\sqrt{35}}(7,-6,6,13,5)$$

【注意】

施密特正交化公式在第三章有详细的说明，需要自己查看哦

4. 设 T 是欧氏空间 V 上的正交变换，V 的两个子空间分别为：

$$V_1 = \{\boldsymbol{x}|T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in V\}$$
$$V_2 = \{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in V\}$$

证明：$V_1 = V_2^{\perp}$

解析：

设 $\forall \boldsymbol{p} \in V_1$，$\forall \boldsymbol{q} \in V_2$，则会有 $T\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}$

由于 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{p}, T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) - (T\boldsymbol{p}, T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = 0$

所以 $\boldsymbol{p} \in V_2^{\perp}$，也就是 $V_1 \subset V_2^{\perp}$

对于 $\forall \boldsymbol{x} \in V_2^{\perp}$，我们可以取 $\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x} \in V_2$

于是我们就会有：$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}) = 0$(这一步利用的是正交补的定义)，于是 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x})$

又因为 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x})$(正交变换的保内积性)

所以 $(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}) = (T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$(第二个等号用的是内积的对称性)，所以 $(T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}) = 0$

又由于 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}) = 0$，所以 $(\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}) = 0$

于是 $\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，也就是 $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$，也就是 $\boldsymbol{x} \in V_1$，也就是 $V_2^{\perp} \subset V_1$

于是 $V_1 = V_2^{\perp}$

【注意】

1. 证明两个集合相等的方法就是：证明这两个集合互为子集

2. 正交变换保持内积不变。意思就是：T 是一个正交变换，α 和 β 是任意的两个相同维数的向量，(α, β) 定义为内积的时候，一定有 $(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta)$

3. 正交补的定义：设 V_1 和 V_2 都是欧氏空间的两个子集，设 $\alpha \in V_1$，且 $\beta \in V_2$，若对于任意的 α 与 β，使得 α 与 β 的内积为 0 的时候，我们把 V_2 叫做 V_1 的正交补，V_1 也叫做 V_2 的正交补。

4. 在一开始的过程里面 $\boldsymbol{q}$ 不能写为 $\boldsymbol{p} - T\boldsymbol{p}$，这是因为 V_2 表示的是里面的向量可以写为 $\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}$ 的形式，但是这个 $\boldsymbol{x}$ 不一定是 V_1 里面的，更不一定就是 V_1 里面的 $\boldsymbol{p}$

5. 正交变换的保内积性是 $(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

6. 每一个等号都要有充分的理由说明。

2.3 第三章　矩阵的标准形课后习题

1. 利用凯莱——哈密尔顿定理证明：任意可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 都可以表示为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式。

解析：

由题意知 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|=0$

所以由凯莱——哈密尔顿定理知 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

于是 $\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}=-(-1)^n|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{(-1)^{n-1}|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{E})$

【注意】

1. 凯莱——哈密尔顿定理：若 λ 表示复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并且有 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，其中 $f(\lambda)$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$。证明：$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}^4-12\boldsymbol{A}^3+19\boldsymbol{A}^2-29\boldsymbol{A}+37\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵，并把 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的多项式

解析：

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-6\lambda+7$

所以由凯莱——哈密尔顿定理知 $\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

由于 $2\lambda^4-12\lambda^3+19\lambda^2-29\lambda+37=(\lambda^2-6\lambda+7)(2\lambda^2+5)+\lambda+2$

所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$

由于 $\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，所以 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E})+12\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，也就是 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E})=-23\boldsymbol{E}$

所以两边取行列式得 $|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}|=(-23)^2\neq 0$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆，并且 $\boldsymbol{B}^{-1}=-\dfrac{1}{23}(\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E})$

【注意】

证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆的方式有很多，因为这道题目是一个二阶矩阵，所以可以考虑把 $\boldsymbol{B}$ 表示出来。

3. 试在复数域内，求下列矩阵的 Jordan 标准形；

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 7 & -3\\ -2 & -5 & 2\\ -4 & -10 & 3\end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$　　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&&\\-4&-1&&\\&&2&1\\&&-1&0\end{bmatrix}$，其中未写出的元素都是 0。

解析：

(1) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 是一个秩为 1 的矩阵，并且 $1+(-3)+4=2\neq 0$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{bmatrix}$，此时对应的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&0&3\\0&1&2\end{bmatrix}$

(2) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\lambda^3-(3-5+3)\lambda^2+(5+(-3)-1)\lambda-1=0$，于是 $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0$

也就是 $(\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-i)=0$

(本来在实数域内 $(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$，但是题目要求复数域内求解，所以在复数范围内需要再次分解)

由于三个特征值不一样，所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix}1&&\\&i&\\&&-i\end{bmatrix}$

(3) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\lambda^3-(3-1-5)\lambda^2+(5+1-3)\lambda-(-1)=0$，于是 $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$

解得特征值为 3 个 -1，此时我们可以考虑利用行列式因子的方法

于是 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{bmatrix}$

由于 $D_1(\lambda)=1$(因为 $|2|=2$)，并且 $D_3(\lambda)=(\lambda+1)^3$

由于 $\begin{vmatrix}\lambda-3&0\\-3&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)$，并且 $\begin{vmatrix}\lambda-3&-8\\-3&-6\end{vmatrix}=-6(\lambda+1)$，并且 $\begin{vmatrix}0&-8\\\lambda+1&-6\end{vmatrix}=8(\lambda+1)$

并且 $\begin{vmatrix}\lambda-3&-8\\-2&-(\lambda+5)\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2$，并且 $\begin{vmatrix}-3&\lambda+1\\2&0\end{vmatrix}=-2(\lambda+1)$

并且 $\begin{vmatrix}-3&-6\\2&\lambda+5\end{vmatrix}=-3(\lambda+1)$，并且 $\begin{vmatrix}\lambda+1&-6\\0&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+5)$

所以 $D_2(\lambda)=\lambda+1$

所以 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的不变因子为 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda+1$，$d_3(\lambda)=\dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda+1)^2$

所以 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的初级因子为 $\lambda+1$，$(\lambda+1)^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & 1\\ & & -1\end{bmatrix}$

(4) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\lambda^3-(4-2+1)\lambda^2+(-1+2+2)\lambda-(1)=0$，于是 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$

解得特征值为 3 个 -1，此时我们考虑利用变为史密斯标准型的方法。

于是 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-4 & -5 & 2\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{bmatrix}$

于是对特征矩阵做初等变换得

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-4 & -5 & 2\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda-1\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ \lambda-4 & -5 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-(\lambda-4)r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda-1\\ 0 & \lambda & -2\lambda+1\\ 0 & -1-\lambda & -\lambda^2+5\lambda-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-(\lambda-1)c_1]{c_2-c_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -2\lambda+1\\ 0 & -1-\lambda & -\lambda^2+5\lambda-2\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3+2c_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & -1 & -\lambda^2+3\lambda-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -\lambda^2+3\lambda-3\\ 0 & \lambda & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3\times(-1)]{r_3+\lambda r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda^2-3\lambda+3\\ 0 & 0 & 1-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)]{c_3-(\lambda^2-3\lambda+3)c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3\end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子为 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$，$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的初级因子为 $(\lambda-1)^3$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$

(5) 注意到这是一个分块矩阵，我们可以记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{O}$ 表示 2 阶 0 矩阵

并且注意到 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征矩阵为 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1\\ 4 & \lambda+1\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}_1$ 的行列式因子为 $D_1(\lambda)=1$(因为存在一个一阶非 0 子式 $|4|=4$)，$D_2(\lambda)=(\lambda-1)^2$

所以 $\boldsymbol{A}_1$ 的不变因子为 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=(\lambda-1)^2$

所以 $\boldsymbol{A}_1$ 的初级因子为 $(\lambda-1)^2$，所以 $\boldsymbol{A}_1$ 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}$

同理注意到 $\boldsymbol{A}_2$ 的特征矩阵为 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}_2$ 的行列式因子为 $D_1(\lambda)=1$(因为存在一个一阶非 0 子式 $|1|=1$)，$D_2(\lambda)=(\lambda-1)^2$

所以 $\boldsymbol{A}_2$ 的不变因子为 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=(\lambda-1)^2$

所以 $\boldsymbol{A}_2$ 的初级因子为 $(\lambda-1)^2$，所以 $\boldsymbol{A}_2$ 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}$

【注意】

1. 如果只是知道一个三阶矩阵的特征值是 1, 1, 0，那么这个矩阵的 Jordan 标准型可能为 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}$ 或者 $\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}$，此时需要看不变因子才能决定，特别的对于三阶矩阵可以看秩。

2. 更为高阶的矩阵较为一般的方法是看不变因子组。

3. 求解约当标准型的方法：

(1) 求解行列式因子、不变因子、初级因子；

(2) 求解史密斯标准型、不变因子、初级因子；

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{bmatrix}$，试求 $\boldsymbol{A}^k$

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，于是 $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$

于是 $(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$，于是 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $1,1,2$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵为 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & -1\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 4 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}$

所以行列式因子 $D_1(\lambda)=1$(因为存在一阶非零子式 $|4|=4$)，$D_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

所以 $D_2(\lambda)=1$(因为存在一个二阶非零子式 $\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1$)

所以不变因子为 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$，$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，所以初级因子为 $(\lambda-1)^2$ 和 $\lambda-2$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$，也就是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，接下来我们要找到 $\boldsymbol{P}$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2 的特征向量为 $(0,1,0)^T$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 的全部特征向量为 $k_1(1,-1,2)^T$

设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$，于是 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$，也就是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2,2\boldsymbol{p}_3)$

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=2\boldsymbol{p}_3\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{p}_3=(0,1,0)^T$，$\boldsymbol{p}_1=k_1(1,-1,2)^T$，此时 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1$

于是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{p}_1)=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & k_1\\ 1 & 1 & 0 & -k_1\\ -4 & 0 & 2 & 2k_1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -k_1\\ 0 & 2 & 1 & -k_1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，于是解得 $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{k_1}{2}(-1,-1,0)^T$

所以 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{4}\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}^k$，由于 $\boldsymbol{J}^k=\begin{bmatrix}1 & k & \\ & 1 & \\ & & 2^k\end{bmatrix}$

于是 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-2&-1&1\\4&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&k&\\&1&\\&&2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{4}\\-1&0&\frac{1}{2}\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2k&0&k\\2k+1-2^k&2^k&2^k-k-1\\-4k&0&2k+1\end{bmatrix}$

解析：

1. 求解的 $\boldsymbol{P}$ 当中 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 的系数是有一定的关系的，所以拼起来的时候一定要注意

2. 求解 $\boldsymbol{A}^n$ 的一些方法：

(1) 若 $R(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}^n=[tr(\boldsymbol{A})]^{n-1}\boldsymbol{A}$，其中 $tr(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 矩阵当中主对角线的元素之和

(2) (利用矩阵相似) 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$($\boldsymbol{P}$ 可以求出)，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$(若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则化为对角矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化，则化为 Jordan 标准型)，则需要考虑变为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}^n$，于是根据 $\boldsymbol{J}$ 以及 $\boldsymbol{P}$ 就可以求出。

(3) (二项式定理) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，并且需要满足 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 可交换以及 $\boldsymbol{B}$ 或者 $\boldsymbol{C}$ 是一个幂 0 矩阵(也就是存在一个正整数 m，使得 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{C}^m=\boldsymbol{O}$)

(4) 尝试乘法，也就是计算 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，然后找到和原来的矩阵的关系或者是和特殊矩阵的关系。

5. 求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-2&2\end{bmatrix}$ 的最小多项式

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-3\lambda^2+(0+3+0)\lambda-(1)=(\lambda-1)^3$

由于 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}$，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{O}$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$

【注意】

1. 一个矩阵的最小多项式从本质上是一个多项式，并且需要满足：

$$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$$

当中 k_i 至少为 1，至多为该矩阵的特征多项式当中 $(\lambda-\lambda_i)$ 的次数。

2. 对于这道题目而言，需要注意到 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 是一个秩为 1 的矩阵，并且注意到 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}(1,2,-1)$，

于是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}(1,2,-1)\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}(1,2,-1)=\boldsymbol{O}$

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$

(1) 给出 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能的最小多项式；

(2) 给出 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能的 Jordan 矩阵。

解析：

由题意知 $\boldsymbol{A}$ 是一个 4 阶矩阵。

(1) 根据上一题的【注意】可以知道 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能最小多项式为

$$
\begin{aligned}
m_{\boldsymbol{A}_1}(\lambda)&=(\lambda-2)(\lambda-3)\\
m_{\boldsymbol{A}_2}(\lambda)&=(\lambda-2)^2(\lambda-3)\\
m_{\boldsymbol{A}_3}(\lambda)&=(\lambda-2)(\lambda-3)^2\\
m_{\boldsymbol{A}_4}(\lambda)&=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2
\end{aligned}
$$

(2) 由 (1) 知所有可能的 Jordan 矩阵为

$$
\boldsymbol{J}_1=\begin{bmatrix}2&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&3\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&3&\\&&&3\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_3=\begin{bmatrix}2&&&\\&2&&\\&&3&1\\&&&3\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_4=\begin{bmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&3&1\\&&&3\end{bmatrix}
$$

【注意】

1. 如何根据特征多项式写出所有可能的最小多项式？

注意到最小多项式是特征多项式的因式，并且最小多项式是最后一个不变因子。对于这道题而言 $\lambda=2$ 和 $\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，最小多项式是最后一个不变因子，包含了 $(\lambda-2)(\lambda-3)$ 这个因式。

2.4 第四章 矩阵的分解课后习题

1. 试求下列矩阵的 $\boldsymbol{LU}$ 分解：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\4&1&0\\-2&2&1\end{bmatrix}$$

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均不为 0，所以 $\boldsymbol{A}$ 矩阵存在 $\boldsymbol{LU}$ 分解并且这样的 $\boldsymbol{LU}$ 分解唯一

并且注意到

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&1&1&1&0&0\\4&1&0&0&1&0\\-2&2&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&1&1&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&3&2&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+3r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&1&1&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&0&-4&-5&3&1\end{array}\right]$$

所以 $\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&-2\\0&0&-4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\-5&3&1\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-5&3&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&-3&1\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解为 $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&-3&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&-2\\0&0&-4\end{bmatrix}$，此时 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$

【注意】

1. 复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解 (三角分解) 的定义：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$

(1)$\boldsymbol{L}$ 表示主对角线元素全为 1的下三角矩阵和 $\boldsymbol{U}$ 表示上三角矩阵。所谓的上三角矩阵和下三角矩阵指的是非零元素的排列呈三角形状。所以 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 必然可逆。

(2) 如何判定复方阵 $\boldsymbol{A}$ 能否 $\boldsymbol{LU}$ 分解，并且 $\boldsymbol{LU}$ 分解是否唯一呢？

若$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均不为 0，则 $\boldsymbol{A}$ 必然存在 $\boldsymbol{LU}$ 分解，并且 $\boldsymbol{LU}$ 分解必然唯一。

2. 复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解当中，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 如何求解呢？

(1) 求解 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{P}$，方法是：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow{r}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{P})$，这个 r 指的是初等行变换，而这里的初等行变换指的是只能做第一行的某个倍数加到二三行或者第二行的某个倍数加到第三行。

(2) 求解 $\boldsymbol{L}$，方法是：$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{P}^{-1}$，于是就回到了 $\boldsymbol{P}$ 的逆矩阵的求解问题了。

2. 试求下列矩阵的 $\boldsymbol{QR}$ 分解：

(1) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix}0&4&1\\1&1&1\\0&3&2\end{bmatrix}$

解析：

(1) 注意到这是一个可逆方阵，所以令 $\alpha_1=(1,0)^T$，于是 $\alpha_2=(1,1)^T$

于是利用施密特正交化公式得 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1=(1,0)^T\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(0,1)^T\end{cases}$ ，单位化得 $\gamma_1=(1,0)^T$，$\gamma_2=(0,1)^T$

于是 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}||\beta_1||&(\alpha_2,\gamma_1)\\0&||\beta_2||\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$

(2) 注意到这不是一个方阵，但是列满秩，所以令 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$

于是利用施密特正交化公式得 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1=(1,1,0)^T\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{2}(-1,1,2)^T\end{cases}$

单位化得 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$

于是 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\0&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}||\beta_1||&(\alpha_2,\gamma_1)\\0&||\beta_2||\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0&\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$

(3) 注意到这是一个可逆方阵，所以令 $\alpha_1=(0,1,0)^T$，于是 $\alpha_2=(4,1,3)^T$，$\alpha_3=(1,1,2)^T$

于是利用施密特正交化公式得 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1=(0,1,0)^T\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(4,0,3)^T\\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\dfrac{1}{5}(-3,0,4)^T\end{cases}$

单位化，得 $\gamma_1=(0,1,0)^T$，$\gamma_2=\dfrac{1}{5}(4,0,3)^T$，$\gamma_3=\dfrac{1}{5}(-3,0,4)^T$

于是 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}0&\dfrac{4}{5}&-\dfrac{3}{5}\\1&0&0\\0&\dfrac{3}{5}&\dfrac{4}{5}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}||\beta_1||&(\alpha_2,\gamma_1)&(\alpha_3,\gamma_1)\\0&||\beta_2||&(\alpha_3,\gamma_2)\\0&0&||\beta_3||\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

【注意】

1. 施密特正交化公式，参见最后一章里面的特征值、特征向量这一节

2. 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解的定义：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$

(1) 如何判定复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能否进行 $\boldsymbol{QR}$ 分解？若 $\boldsymbol{A}$ 列满秩，则 $\boldsymbol{QR}$ 分解必然可以进行

(2) 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解当中 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 如何求解？

step1：取出 $\boldsymbol{A}$ 的所有列向量 α

step2：对于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量进行正交化得到 β，单位化得到 γ。(注意：如果非 0 向量的话直接用正交化公式；若是 0 向量，则用正交化公式的时候 β 要换成 γ)

step3：$\boldsymbol{Q}$ 就是 step2 当中的 γ 拼成的矩阵，$\boldsymbol{R}$ 就是 $\begin{bmatrix} ||\beta_1|| & (\alpha_2,\gamma_1) & \cdots & (\alpha_n,\gamma_1) \\ 0 & ||\beta_2|| & \cdots & (\alpha_3,\gamma_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ||\beta_n|| \end{bmatrix}$

3. 试对下列矩阵作满秩分解

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

并求 $\boldsymbol{A}^+$

解析：

对 $\boldsymbol{A}$ 矩阵做初等行变换，得

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-4r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{0.5\times r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$，并且 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$；所以 $\boldsymbol{C}^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$，并且 $\boldsymbol{B}^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{CC}^H = \begin{bmatrix} 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 24 \end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{C}^H(\boldsymbol{CC}^H)^{-1}(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 12 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{84}\begin{bmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{35}\cdot\frac{1}{42}\begin{bmatrix}92 & 26 & -80\\ 156 & 108 & 120\\ 262 & 106 & -100\\ 14 & -28 & -140\end{bmatrix}=\frac{1}{1470}\begin{bmatrix}92 & 26 & -80\\ 156 & 108 & 120\\ 262 & 106 & -100\\ 14 & -28 & -140\end{bmatrix}$$

【注意】

1. 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ 的定义：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$

(1) 如何判定复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能否进行满秩分解？若 $\boldsymbol{A}$ 的秩非零，则 $\boldsymbol{A}$ 必然可以满秩分解

(2) 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解当中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如何求解？

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换，变为行最简型$\boldsymbol{H}$，然后化为行最简型之后，记住 $\boldsymbol{H}$ 的非 0 行的首 1 元 (每一行的第一个非 0 元素是 1) 所在的列的序号。此时 $\boldsymbol{B}$ 就是 $\boldsymbol{H}$ 当中非 0 行的首 1 元 (每一行的第一个非 0 元素是 1) 所在的列的序号。$\boldsymbol{C}$ 就是 $\boldsymbol{H}$ 当中去掉了 0 行之后的矩阵。

2.$\boldsymbol{A}$ 的加号逆矩阵，也就是 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的求解公式：$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^{H}(\boldsymbol{CC}^{H})^{-1}(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{H}$。其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，也就是满秩分解当中的那个矩阵。

3.$\boldsymbol{A}^{H}$ 表示的是复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置，也就是 $\boldsymbol{A}$ 矩阵当中给的元素先全部变成他的共轭复数，然后取转置。当然，对于实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，$\boldsymbol{A}^{H}=\boldsymbol{A}^{T}$。

4. 试求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

的奇异值分解

解析：

由题意知 $\boldsymbol{A}^{H}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{A}^{H}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 12\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^{H}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=15$，$\lambda_2=0$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值 $d_1=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{15}$，$d_2=\sqrt{\lambda_2}=0$

于是 $\boldsymbol{A}^{H}\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=15$ 和 $\lambda_2=0$ 特征值对应的标准正交的特征向量为

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^{T}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)^{T}$

于是令 $\boldsymbol{V}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，于是 $\boldsymbol{V}_1=\gamma_1$，$\boldsymbol{V}_2=\gamma_2$

所以 $\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\\1&2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，所以可以取 $\boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

所以也就可以得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^H=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

【注意】

1. 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解的定义：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^H$

2. 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解当中 $\boldsymbol{U}$，Σ，$\boldsymbol{V}$ 怎么求解呢？

(1) 首先求解 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 以及 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i，然后需要注意特征值从大到小排列

(2) 于是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 $d_i=\sqrt{\lambda_i}$，并求出 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 对应的相互正交的单位向量。得到正交矩阵 $\boldsymbol{V}$

(3) 将 (2) 得到的 $\boldsymbol{V}$ 矩阵当中的非 0 特征值所对应的特征向量按照特征值的顺序拼成 $\boldsymbol{V}_1$，0 特征值所对应的特征向量按照特征值的顺序拼成 $\boldsymbol{V}_2$

(4) 此时 $\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 就是题目当中的矩阵，$\boldsymbol{V}_1$ 就是 (2)(3) 当中得到的正交矩阵，$\boldsymbol{D}$ 指的是非 0 特征值 d_i 从大到小排列成的对角矩阵。

(5) 由 (4) 得出了 $\boldsymbol{U}_1$，于是我们需要找到 $\boldsymbol{U}_2$ 当中一组向量，使得 $\boldsymbol{U}_2$ 的向量与 $\boldsymbol{U}_1$ 构成标准正交基。于是 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)$

(6) 根据 (5) 当中得到的 $\boldsymbol{U}$ 和 (2) 当中的 $\boldsymbol{V}$，利用 $\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Sigma}$ 得出 $\boldsymbol{\Sigma}$，别直接计算，因为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是一个与 $\boldsymbol{A}$ 一模一样维数的矩阵，主对角线元素放的是 d_i。

(7) 最后写为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^H$ 的形式

5. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}^{+}$。

解析：

由于 $\boldsymbol{A}$ 列满秩，所以 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{B}^{H}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&3\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6&-2\\-2&10\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^{H}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{H})^{-1}(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{H}=\dfrac{1}{56}\begin{bmatrix}10&2\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&3\end{bmatrix}=\dfrac{1}{56}\begin{bmatrix}12&20&-4\\8&4&16\end{bmatrix}=\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix}3&5&-1\\2&1&4\end{bmatrix}$

【注意】

1.$\boldsymbol{A}$ 的加号逆矩阵，也就是 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的求解公式：$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^{H}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{H})^{-1}(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{H}$。其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$，也就是满秩分解当中的那个矩阵。

2.$\boldsymbol{A}^{H}$ 表示的是复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置，也就是 $\boldsymbol{A}$ 矩阵当中给的元素先全部变成他的共轭复数，然后取转置。当然，对于实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，$\boldsymbol{A}^{H}=\boldsymbol{A}^{T}$。

3.若 $\boldsymbol{A}$ 列满秩，则 $\boldsymbol{C}$ 可以取与 $\boldsymbol{A}$ 的列数相同维数的单位矩阵。$\boldsymbol{B}$ 可以取 $\boldsymbol{A}$ 矩阵。

2.5 第五章　范数理论及其应用课后习题

1. 设 $||\boldsymbol{B}||_m$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵的范数，$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵，对于任意的 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，定义 $||\boldsymbol{A}||=||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}||_m$，求证：$||\boldsymbol{A}||$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数。

解析：

(1) 正定性：由于 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$||\boldsymbol{A}||=||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}||_m=||\boldsymbol{J}||_m$，因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{J}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $||\boldsymbol{J}||_m>0$

并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{O}$，所以 $||\boldsymbol{J}||_m>0$

(2) 齐次性：$||k\boldsymbol{A}||=||\boldsymbol{P}^{-1}(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}||_m=||k\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}||_m=|k|||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}||_m=|k|||\boldsymbol{A}||$

(3) 三角不等式：$||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||=||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}||_m\leqslant||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}||_m+||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}||_m=||\boldsymbol{A}||+||\boldsymbol{B}||$

(4) 相容性：$||\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}||=||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}||_m=||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}||_m\leqslant||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}||_m\cdot||\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}||_m=||\boldsymbol{A}||||\boldsymbol{B}||$

所以 $||\boldsymbol{A}||$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数。

【注意】

1. 证明是矩阵范数的方法就是证明如下四个性质全部满足：

(1) 正定性：也就是证明 $||\boldsymbol{A}||=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 成立

(2) 齐次性：也就是证明对于任意的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵以及数 k，恒有 $||k\boldsymbol{A}|| = |k|||\boldsymbol{A}||$

(3) 三角不等式：也就是证明对于任意的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵和任意的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵，恒有 $||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|| \leqslant ||\boldsymbol{A}|| + ||\boldsymbol{B}||$

(4) 相容性：也就是证明对于任意的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵和任意的 $\boldsymbol{B}$ 矩阵，恒有 $||\boldsymbol{AB}|| \leqslant ||\boldsymbol{A}|| \cdot ||\boldsymbol{B}||$

2. 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & -3 \\ 5 & 4i & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

试求 $||\boldsymbol{A}||_{m_1}$，$||\boldsymbol{A}||_F$，$||\boldsymbol{A}||_{m_\infty}$，$||\boldsymbol{A}||_1$，$||\boldsymbol{A}||_\infty$

解析：

对于此题，$n = 3$

由题意知 $||\boldsymbol{A}||_{m_1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \sqrt{2}+3+5+4+2+3+1 = 18+\sqrt{2}$

$||\boldsymbol{A}||_F = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{2+9+25+16+4+9+1} = \sqrt{66}$

$||\boldsymbol{A}||_{m_\infty} = 3 \cdot 5 = 15$

$||\boldsymbol{A}||_1 = \max\{\sqrt{2}+5+2, 4+3, 3+1\} = 7+\sqrt{2}$

$||\boldsymbol{A}||_\infty = \max\{\sqrt{2}+3, 5+4, 2+3+1\} = 9$

【注意】

1. 注意前提条件：n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 里面的常用范数：(里面的绝对值的理解是取模)

(1) m_1- 范数：$||\boldsymbol{A}||_{m_1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

(2) m_2- 范数 (也叫 $F-$ 范数)：$||\boldsymbol{A}||_{m_2} = ||\boldsymbol{A}||_F = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$

(3) $m_\infty-$ 范数：$||\boldsymbol{A}||_{m_\infty} = n \cdot \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$

(4) $1-$ 范数 (列范数)：$||\boldsymbol{A}||_1 = \max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

(5) $\infty-$ 范数 (行范数)：$||\boldsymbol{A}||_\infty = \max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

(6) $2-$ 范数：$||\boldsymbol{A}||_2 = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\max\limits_{i}\lambda_i(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})}$

3. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，定义

$$||\boldsymbol{A}||=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$$

则 $||\boldsymbol{A}||$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数

解析：

(1) 正定性：由于 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$||\boldsymbol{A}||>0$；并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时，$||\boldsymbol{A}||=0$

(2) 齐次性：由于 $||k\boldsymbol{A}||=n\cdot\max\limits_{i,j}|ka_{ij}|=|k|\cdot n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|=|k|\cdot||\boldsymbol{A}||$

(3) 三角不等式：由于

$$||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}|\leqslant n\cdot(\max_{i,j}|a_{ij}|+\max_{i,j}|b_{ij}|)=||\boldsymbol{A}||+||\boldsymbol{B}||$$

(4) 相容性：由于 $||\boldsymbol{AB}||=n\cdot\max\limits_{i,j}|c_{ij}|$，其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_{kj}$

$\leqslant n\cdot\max\limits_{i,j}\sum\limits_{k=1}^{m}|a_{ki}||b_{kj}|\leqslant n\cdot\max\limits_{i,j}(n\max\limits_{k}\{|a_{ki}||b_{kj}|\})=n\cdot n\max\limits_{i,j}(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\{|a_{ki}||b_{kj}|\})\leqslant n\cdot n\cdot\max\limits_{i,j}(|a_{ij}||b_{ij}|)$

$\leqslant(n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|)\cdot(n\cdot\max\limits_{i,j}|b_{ij}|)=||\boldsymbol{A}^T||\cdot||\boldsymbol{B}||$

4. 求解下列方程组的极小范数最小二乘解：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\x_1+x_3=0\\2x_1+2x_3=1\\2x_1+4x_2+6x_3=3\end{cases}$$

解析：

注意到 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&0&2\\2&4&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\3\end{bmatrix}$，并且 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\\2&0\\2&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{CC}^H=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B}=10\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$

所以 $A^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&0&4\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&0&4\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}5&-3\\-4&3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&0&0&4\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-1&5&10&-2\\2&-4&-8&4\\1&1&2&2\end{bmatrix}$

所以最小二乘解为 $x=A^{+}b+(E-A^{+}A)C_1=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}C_1$，其中 C_1 为任意列向量

所以极小范数最小二乘解就是 $\hat{x}=A^{+}b=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

【注意】

求解非齐次方程组 $Ax=b$ 的极小范数二乘解的步骤：

(1) 求出 A 的满秩分解 $A=BC$

(2) 由 (1) 求解 $A^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}$

(3) 得出最小二乘解为 $x=A^{+}b+(E-A^{+}A)C_1$，其中 C_1 为任意列向量。(也可以考虑求解 $A^{T}Ax=A^{T}b$)

(4) 得出极小范数最小二乘解就是 $\hat{x}=A^{+}b$

2.6 第六章 矩阵分析及其应用课后习题

1. 设

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$$

求 e^{A}，e^{At}，$\sin A$

解析：

A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^3$

并且 $A-2E=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，所以 $(A-2E)^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}=O$

所以 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=a_0+a_1\lambda$，令 $f_1(\lambda)=e^{\lambda t}$，$f_2(\lambda)=\sin\lambda$

首先我们求解 e^{A} 与 e^{At}，于是就有

$\begin{cases} f_1(2) = r(2) \\ f_1'(2) = r'(2) \end{cases}$，也就是 $\begin{cases} e^{2t} = a_0 + 2a_1 \\ te^{2t} = a_1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_0 = e^{2t} - 2te^{2t} \\ a_1 = te^{2t} \end{cases}$

所以 $f_1(\boldsymbol{A}) = e^{\boldsymbol{A}t} = e^{2t}\boldsymbol{E} + te^{2t}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A} = e^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

然后我们求解 $\sin\boldsymbol{A}$，于是就有

$\begin{cases} f_2(2) = r(2) \\ f_2'(2) = r'(2) \end{cases}$，也就是 $\begin{cases} \sin 2 = a_0 + 2a_1 \\ \cos 2 = a_1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_0 = \sin 2 - 2\cos 2 \\ a_1 = \cos 2 \end{cases}$

所以 $f_2(\boldsymbol{A}) = \sin\boldsymbol{A} = \sin 2\cdot\boldsymbol{E} + \cos 2\cdot(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = \begin{bmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2 - \cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2 + \cos 2 \end{bmatrix}$

【注意】

$e^{\boldsymbol{A}t}$ 的求解也可以考虑 $\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]$

2. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 以及 $\sin(\boldsymbol{A}t)$

解析：

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$，由于 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$，并且 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

所以 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

所以 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$

令 $f_1(\lambda) = e^{\lambda t}$ 和 $f_2(\lambda) = \sin(\lambda t)$

于是设 $r_1(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2$，$r_2(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$

首先我们来求解 $e^{\boldsymbol{A}t}$

那么就会有：$\begin{cases} f_1(1)=r_1(1) \\ f_1(2)=r_1(2) \\ f_1'(2)=r_1'(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^t=a_0+a_1+a_2 \\ e^{2t}=a_0+2a_1+4a_2 \\ te^{2t}=a_1+4a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=4e^t-3e^{2t}+2te^{2t} \\ a_1=-4e^t+4e^{2t}-3te^{2t} \\ a_2=e^t-e^{2t}+te^{2t} \end{cases}$

所以 $f(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=(4e^t-3e^{2t}+2te^{2t})\boldsymbol{E}+(-4e^t+4e^{2t}-3te^{2t})\boldsymbol{A}+(e^t-e^{2t}+te^{2t})\boldsymbol{A}^2$

$=e^t(4\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)-e^{2t}(3\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)+te^{2t}(2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$

注意到 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&0\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&4\\0&-1&0\\0&3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&12&-4\\0&-1&0\\0&-3&0\end{bmatrix}$

以及 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&0\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&4\\0&0&0\\0&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&13&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以 $e^{\boldsymbol{A}t}=e^t\begin{bmatrix}0&12&-4\\0&0&0\\0&-3&1\end{bmatrix}-e^{2t}\begin{bmatrix}-1&12&-4\\0&-1&0\\0&-3&0\end{bmatrix}+te^{2t}\begin{bmatrix}0&13&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}&12e^t-12e^{2t}+13te^{2t}&-4e^t+4e^{2t}\\0&e^{2t}&0\\0&-3e^t+3e^{2t}&e^t\end{bmatrix}$

于是 $\sin(\boldsymbol{A}t)=\begin{bmatrix}\sin(2t)&12\sin t-12\sin(2t)+13t\cos 2t&-4\sin t+4\sin(2t)\\0&\sin(2t)&0\\0&-3\sin t+3\sin(2t)&\sin t\end{bmatrix}$

【注意】

判断 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式的时候，如果出现了重复的特征值，也可以通过 $R(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})$ 来判定最小多项式。这是因为若特征值 λ 对应的几何重数小于代数重数时，$\boldsymbol{A}$ 不可对角化，所以最小多项式必然有重根。

3. 设

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}&te^t&1\\e^{-t}&2e^{2t}&0\\3t&0&0\end{bmatrix}$$

求 (1)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{A}(t)|$；(2)$\displaystyle\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$；$\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$

解析：

(1)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}2e^{2t}&(t+1)e^t&0\\-e^{-t}&4e^{2t}&0\\3&0&0\end{bmatrix}$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{A}(t)|=\dfrac{\mathrm{d}(6e^{3t})}{\mathrm{d}t}=18e^{3t}$

(2) $\int A(t)\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} & (t-1)e^t & t \\ -e^{-t} & e^{2t} & 0 \\ \frac{3}{2}t^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + C$，其中 $C = (C_{ij})_{3\times 3}$ 为任意常数矩阵，并且 C_{ij} 之间互不影响

所以 $\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \frac{e^2-1}{2} & 1 & 1 \\ 1-e^{-1} & e^2-1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. 试求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t)$ 满足初始条件 $x(0) = x_0$ 的解，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = (1,0,0)^T$$

解析：

注意到 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - \lambda^2 + (-1+1-2+(-1)-2)\lambda - 3 = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

注意到 $A+E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，所以 $R(A+E) = 2$，此时 $\lambda = -1$ 对应的线性无关特征向量只有一个。

所以 A 一定不可对角化，所以 $m_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$

所以设 $f(\lambda) = e^{\lambda t}$，$r(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$，于是

$$\begin{cases} f(-1) = r(-1) \\ f'(-1) = r'(-1) \\ f(3) = r(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-t} = a_0 - a_1 + a_2 \\ te^{-t} = a_1 - 2a_2 \\ e^{3t} = a_0 + 3a_1 + 9a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{16}(15e^{-t} + 12te^{-t} + e^{3t}) \\ a_1 = \frac{1}{8}(-e^{-t} + 4te^{-t} + e^{3t}) \\ a_2 = \frac{1}{16}(-e^{-t} - 4te^{-t} + e^{3t}) \end{cases}$$

于是 $f(\lambda) = \frac{1}{16}(15e^{-t} + 12te^{-t} + e^{3t})E + \frac{1}{8}(-e^{-t} + 4te^{-t} + e^{3t})A + \frac{1}{16}(-e^{-t} - 4te^{-t} + e^{3t})A^2$

$= \frac{1}{16}\left[-e^{-t}(A+5E)(A-3E) - 4te^{-t}(A-3E)(A+E) + e^{3t}(A+E)^2\right]$

由于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}6&2&1\\1&4&1\\2&0&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-2&2&1\\1&-4&1\\2&0&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}$

所以 $e^{\boldsymbol{A}t}=\dfrac{1}{16}\begin{bmatrix}8e^{-t}+8e^{3t}&-4e^{-t}+16te^{-t}+4e^{3t}&-6e^{-t}-8te^{-t}+6e^{3t}\\-4e^{-t}+4e^{3t}&14e^{-t}-8te^{-t}+2e^{3t}&-3e^{-t}+4te^{-t}+3e^{3t}\\-8e^{-t}+8e^{3t}&-4e^{-t}-16te^{-t}+4e^{3t}&10e^{-t}+8te^{-t}+6e^{3t}\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{3t}\\-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{3t}\\-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{3t}\end{bmatrix}$

5. 试求解微分方程组初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1+x_3+1\\\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_1+2x_2-1\\\dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=-4x_1+3x_3+2\\x_1(0)=1,x_2(0)=0,x_3(0)=1\end{cases}$$

解析：

由题意知原式可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$

由题意知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

并且注意到 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\-4&0&2\end{bmatrix}$，所以 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$，故特征值 1 对应的线性无关的特征向量是 1 个

所以 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化，所以 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，所以设 $g(\lambda)=e^{\lambda t}$，$r(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2$

于是 $\begin{cases}g(1)=r(1)\\g'(1)=r'(1)\\g(2)=r(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^t=a_0+a_1+a_2\\te^t=a_1+2a_2\\e^{2t}=a_0+2a_1+4a_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=-2te^t+e^{2t}\\a_1=2e^t+3te^t-2e^{2t}\\a_2=-e^t-te^t+e^{2t}\end{cases}$

所以 $e^{At}=(-2te^t+e^{2t})\boldsymbol{E}+(2e^t+3te^t-2e^{2t})\boldsymbol{A}+(-e^t-te^t+e^{2t})\boldsymbol{A}^2$

$=-e^t\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})-te^t(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+e^{2t}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2$

注意到 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\-4&0&3\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\-4&0&2\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-3&0&1\\1&0&0\\-4&0&1\end{bmatrix}$

所以 $e^{At}=\begin{bmatrix}e^t-2te^t&0&te^t\\e^t+2te^t-e^{2t}&e^{2t}&-e^t-te^t+e^{2t}\\-4te^t&0&e^t+2te^t\end{bmatrix}$

所以微分方程组的解为 $\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-0)}\boldsymbol{x}(0)+e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$

也就是 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}e^t-te^t\\te^t\\e^t-2te^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^t-1\\-e^t+1\\2e^t-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^t-te^t-1\\-e^t+te^t+1\\3e^t-2te^t-2\end{bmatrix}$

【注意】

注意到 $\boldsymbol{f}(t)$ 是一个常数向量，所以我们在求解 $\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$ 的时候我们可以考虑区间再现公式变成 $\int_0^t e^{\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{f}(t-s)\mathrm{d}s$，这么做会使得计算得到大大的简化。

第三部分　计算过程中用到的线性代数知识

3.1　可逆矩阵的逆矩阵的求解

一般从考试的角度而言，求的是三阶可逆矩阵，那么三阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵如何计算呢？方法是：初等行变换。也就是什么意思呢？$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$，这里的初等行变换可以做线代里面的初等行变换

特别的，我们对于二阶矩阵有：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，并且 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

有的同学可能会说，这不好记啊！自己弄了一个小口诀 (仅供参考，如果有更好的方法可以私信)：

撇上元素乘 -1，捺上元素来交换，除上一个行列式，逆矩阵即可出来。

当然有的口诀是"主换副反，除行列式"，先解释一下上面这句话吧，这话啥意思呢？就是观察 $\boldsymbol{A}$ 这个矩阵，b 和 c 相当于是在"撇"上，a 和 d 相当于是在"捺"上。

3.2　矩阵的乘法

矩阵的乘法首先需要满足：左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数。然后矩阵乘法规则如下：

左边矩阵的第 i 行乘右边矩阵的第 j 列就是新矩阵当中的第 i 行第 j 列元素。

3.3 矩阵的 k 次方的计算

假定 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则有

(1) 若 $R(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}^k=[tr(\boldsymbol{A})]^{k-1}\boldsymbol{A}$，其中 $tr(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 矩阵当中主对角线的元素之和

(2) (利用矩阵相似) 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$($\boldsymbol{P}$ 可以求出)，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$(若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则化为对角矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化，则化为 Jordan 标准型)，则需要考虑变为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}^k$，于是根据 $\boldsymbol{J}$ 以及 $\boldsymbol{P}$ 就可以求出。

(3) (二项式定理) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，并且需要满足$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 可交换以及$\boldsymbol{B}$ 或者 $\boldsymbol{C}$ 是一个幂 0 矩阵(也就是存在一个正整数 m，使得 $\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{C}^m=\boldsymbol{O}$)

(4) 尝试乘法，也就是计算 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，然后找到和原来的矩阵的关系或者是和特殊矩阵的关系。

(5) 考虑利用 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式来化简计算

3.4 秩为 1 的矩阵拥有的结论

说起这个秩为 1 的矩阵，拥有比较多的结论，我们首先说一下大条件吧。

大条件：$\boldsymbol{A}=\alpha\beta^T$，其中 α 和 β 是非 0 向量的 n 维列向量

于是我们有以下结论：

(1). $R(\boldsymbol{A})=1$

(2). $\forall m\in\mathbf{N}^+$，一定有 $\boldsymbol{A}^m=(tr(\boldsymbol{A}))^{m-1}\boldsymbol{A}$

(3). $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $n-1$ 个 0 和 1 个 $tr(\boldsymbol{A})=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\alpha,\beta)$

(4). 若 $tr(\boldsymbol{A})=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\alpha,\beta)=0$，则特征值为 0 的特征向量当中必然有 α

(5). 若 $tr(\boldsymbol{A})=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\alpha,\beta)\neq 0$，则特征值为 $tr(\boldsymbol{A})=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\alpha,\beta)$ 的特征向量必然是 α

(6). 若 $tr(\boldsymbol{A})=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\alpha,\beta)=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化，但可以化为 Jordan 标准型

(7). 若 $tr(\boldsymbol{A})=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\alpha,\beta)\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

(8). $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的求解等价于 $\beta^T\boldsymbol{x}=0$ 的求解

3.5 特征值、特征向量、二次型

3.5.1 内积

设 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 是一个 n 维列向量，于是 α 与 β 的内积为 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，在没有重新定义的情况下才用这个定义。

3.5.2 特征值如何求解

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，于是求解 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的方法就是令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，然后解关于 λ 的方程就可以了。特别的，若 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，则有

$$\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda-|\boldsymbol{A}|=0$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，并且 A_{ii} 表示 $\boldsymbol{A}$ 矩阵当中的 a_{ii} 元的代数余子式，$|\boldsymbol{A}|$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

3.5.3 施密特正交化公式

对于任意的 m 个 n 维 (其中 $m\leqslant n$) 线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，都可以做施密特正交化，正交化公式如下：

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m=\alpha_m-\dfrac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\dfrac{(\alpha_m,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3-\cdots-\dfrac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}=\alpha_m-\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\dfrac{(\alpha_m,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i\right] \end{cases}$$