Multi-objective Optimization

Mathematical Modeling

Prof. Dr. Jingzhi Li

Department of Mathematics,
Southern University of Science and Technology

2025 Spring

1. 多目标优化
2. 使用 MATLAB 实现多目标优化
3. 课堂练习

问题背景

在购车决策中，消费者往往希望在降低成本的同时，兼顾舒适性、油耗与环保性。然而，这些目标之间常存在冲突，例如降低成本可能牺牲舒适或能效。

多目标决策问题涉及多个相互影响的目标函数，难以同时最优。优化的核心在于在目标之间权衡，在可行解空间中找到一组整体最优且尽可能平衡的解。

多目标优化问题

单目标优化问题

$$\min_{x \in S} f(x)$$

· 目标：满足约束的前提下最小化 $f(x)$

多目标优化问题

$$\min_{x \in S} [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$$

· 目标：满足约束的前提下尽可能使目标空间最优

在多目标优化中，多个目标函数常存在冲突，难以用单一指标全面评价。追求某一目标的最优可能牺牲其他目标，无法体现整体优化效果。为此，引入帕累托最优（Pareto optimality）的概念，用以刻画各目标间的合理平衡解。

帕累托最优解

弱帕累托最优解（weak Pareto optimum）

一个点 x^* 被称为弱帕累托最优解或弱有效解，当且仅当：

$$\nexists x \in S \text{ 使得 } f_i(x) < f_i(x^*) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

即不存在一个解在所有目标函数上都严格优于 x^*。

严格帕累托最优解（strict Pareto optimum）

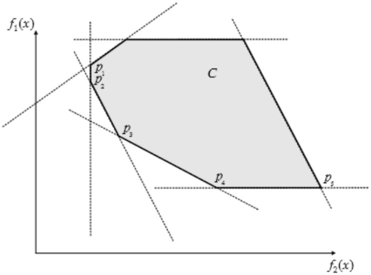
一个点 x^* 被称为严格帕累托最优解或严格有效解，当且仅当：

$$\nexists x \in S \text{ 使得 } f_i(x) \leq f_i(x^*) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

且至少存在一个 i 使得：

$$f_i(x) < f_i(x^*)$$

帕累托最优解



关于弱帕累托最优解与严格帕累托最优解的示例：点 p_1 和 p_5 是弱帕累托最优解，而点 p_2、p_3 和 p_4 是严格帕累托最优解。如果没有额外的主观偏好信息，所有 Pareto 最优解都被认为是同样好的（因为向量不能完全排序）。

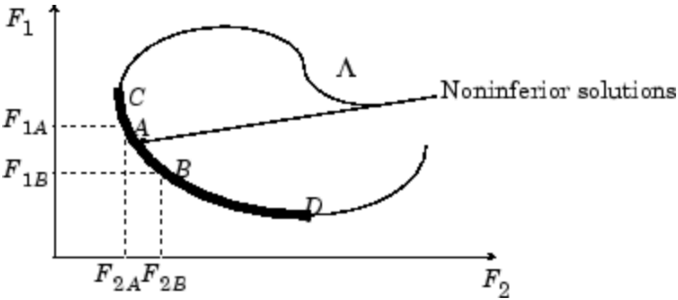
帕累托前沿

帕累托前沿是所有非劣解在目标空间中的函数值构成的集合。
设目标映射为 $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$，则：

$$\mathcal{P} = \{f(x^*) \in \mathbb{R}^n \mid x^* \in S, \nexists x \in S : f_i(x) \le f_i(x^*)\}$$

且严格不等号对某个 i 成立

帕累托最优



非劣解集位于 C 和 D 之间的帕累托前沿曲线上。

求解多目标优化的经典算法

- 线性加权法：为每一目标赋一个权系数，把多目标模型转化成单一目标的模型。但困难是要确定合理的权系数，以反映不同目标之间的重要程度。
- 主要目标法：从 K 个目标中选择最重要的子目标作为优化目标，其余的子目标作为约束条件。
- 目标规划法：不是最小化（或最大化）某个综合目标，而是使各个目标尽可能接近预先设定的“期望目标值”。

优化求解器的选取

- Optimization Toolbox
  - `fgoalattain`
  - `fminimax`
- Global Optimization Toolbox
  - gamultiobj
  - paretosearch
- 其他智能优化算法
  - MODE：多目标差分进化算法
  - MOPSO：多目标粒子群优化算法

fgoalattain 和 fminimax

`fgoalattain` 和 `fminimax` 使用目标达到方法求解多目标问题。这种方法的特点是，为每个目标选择一个要达到的目标值，求解器会尝试找出同时满足所有目标值的点，找不到时，会尝试找出对各目标不满足程度相对均衡的点。

$$
\begin{aligned}
\min_{x,\gamma} \quad & \gamma \\
\text{subject to} \quad & F(x) - \text{weight} \cdot \gamma \leq \text{goal}, \\
& c(x) \leq 0, \\
& ceq(x) = 0, \\
& A \cdot x \leq b, \\
& A_{eq} \cdot x = b_{eq}, \\
& lb \leq x \leq ub.
\end{aligned}
$$

`x = fgoalattain(fun,x0,goal,weight)` 尝试从 x0 开始、用 weight 指定的权重更改 x，使 fun 提供的目标函数达到 goal 指定的目标。

`fminimax` 是目标达到方法求解多目标问题的特例。它寻找以下问题的最小值：

$$\min_{x} \max_{i} F_i(x) \quad \text{such that} \quad \begin{cases} c(x) \leq 0, \\ ceq(x) = 0, \\ A \cdot x \leq b, \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq}, \\ lb \leq x \leq ub. \end{cases}$$

gamultiobj

gamultiobj 基于受控的精英遗传算法来寻找一组帕累托最优解。
https://ww2.mathworks.cn/help/releases/R2024b/gads/gamultiobj-algorithm.html

```
[x,fval] = gamultiobj(fun,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)
```

- fun：目标函数句柄
- nvars：决策变量的个数
- x：帕累托最优解集合
- fval：对应每个 x 的目标函数值，形成帕累托前沿
- A,b：线性不等式约束
- Aeq,beq：线性等式约束
- lb,ub：上界和下界
- nonlcon：非线性不等式和等式约束

一个简单的多目标优化示例

考虑以下有两个目标函数的多目标优化问题：

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x)]$$

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2}\|x - [2, -1]^T\|^2 + 2$$

优化问题有两个目标：

- 最小化 $f_1(x)$
- 最小化 $f_2(x)$

这两个目标是冲突的。因此，这就是一个经典的多目标权衡问题，会产生一条帕累托前沿，展示出所有最优的“折中解”。

构造目标函数:

```
func = @(x)[norm(x)^2,0.5*norm(x(:)-[2;-1])^2+2];
```

将句柄和决策变量个数传入函数:

```
[x,fval] = gamultiobj(func,2);
```

加入线性约束:

```
A = [1,1];
b = 1/2;
x = gamultiobj(func,2,A,b);
```

fgoalattain 和 gamultiobj 的区别

特性	fgoalattain	gamultiobj
算法类型	梯度法	遗传算法
全局搜索	否	是
目标设置方式	设定目标值 goals + 权重 weights	直接生成 Pareto 最优解
输出	一个解，尽量接近目标	多个解，组成 Pareto 前沿
是否可导	通常要求目标函数可导	不要求可导
适用问题类型	可导、多目标、可近似目标值的优化问题	任意复杂度、非线性、多峰、多目标问题

paretosearch

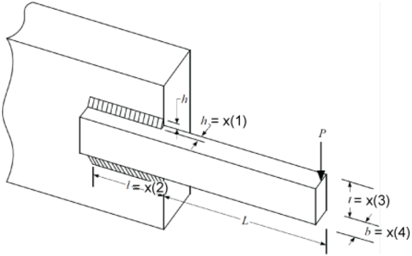
paretosearch 函数基于模式搜索来寻找一组帕累托前沿。https://ww2.mathworks.cn/help/releases/R2024b/gads/paretosearch-algorithm.html paretosearch 函数的语法与 gamultiobj 类似

gamultiobj 与 paretosearch 对比

特性	**gamultiobj**	**paretosearch**
探索性（全局搜索能力）	强，容易跳出局部最优	中等，局部区域挖掘能力强，全局能力较弱
收敛速度	较慢，需较多代数	较快，迭代次数少
结果分布（帕累托前沿）	分布较宽、跳跃大，有时不够均匀	分布更均匀，但范围不够广
调参灵活性	参数丰富（种群规模、交叉概率、变异概率等）	参数较少，简单易用
稳定性	有一定随机性	更稳定，受初始化影响小

1. 多目标优化
2. 使用 MATLAB 实现多目标优化
3. 课堂练习

焊接梁的设计优化



该草图代表焊接到基板上的梁。该梁在距基板 L 处支撑负载 P。梁通过上焊缝和下焊缝焊接到基板上，每条焊缝的长度为 l，厚度为 h。该梁的横截面为矩形，宽度为 b，高度为 t。梁的材质是钢。

两个目标是梁的制造成本和施加载荷 P 时梁末端的挠度。载荷 P 固定为 6,000 磅，距离 L 固定为 14 英寸。

设计变量包括:

- $x(1) = h$，焊缝厚度
- $x(2) = l$，焊缝长度
- $x(3) = t$，梁的高度
- $x(4) = b$，光束的宽度

梁的制造成本与梁中的材料量 $(l + L)tb$ 加上焊缝中的材料量 lh^2 成正比。第一个目标是

$$F_1(x) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.04811x_3x_4(14 + x_2).$$

梁的挠度与 P 成正比，与 bt^3 成反比。第二个目标是

$$F_2(x) = \frac{P}{x_4x_3^3}C, \quad 其中\, C = \frac{4(14)^3}{30 \times 10^6} \approx 3.6587{\times}10^{-4}, \quad P = 6,000.$$

这个问题有几个约束:

- 焊缝厚度不能超过梁宽度。用符号表示：$x(1) \leq x(4)$。
- 焊缝上的剪应力 $\tau(x)$ 不能超过 13,600 psi。要计算剪应力，首先计算初步表达式:

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}x_1x_2}$$

$$R = \sqrt{x_2^2 + (x_1 + x_3)^2}$$

$$\tau_2 = \frac{(L + x_2/2)R}{\sqrt{2}x_1x_3\left(\frac{x_2^2}{3} + (x_1 + x_3)^2\right)}$$

$$\tau(x) = P\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \frac{2\tau_1\tau_2x_2}{R}}$$

总之，焊缝上的剪应力有约束：$\tau(x) \leq 13600$。

- 焊缝上的法向应力 $\sigma(x)$ 不能超过 30,000 psi。正常压力是

$$\sigma(x) = \frac{6L}{x_4 x_3^2} P \leq 30 \times 10^3$$

- 垂直方向的屈曲载荷能力必须超过施加的载荷 6,000 磅。使用杨氏模量 $E = 30 \times 10^6$ psi 和 $G = 12 \times 10^6$ psi 的值，屈曲载荷约束为：

$$\frac{4.013 E x_3 x_4^3}{6L^2} \left(1 - \frac{x_3}{2L} \sqrt{\frac{E}{4G}} \right) \geq 6000$$

- 变量的边界为 $0.125 \leq x(1) \leq 5$、$0.1 \leq x(2) \leq 10$、$0.1 \leq x(3) \leq 10$、$0.125 \leq x(4) \leq 5$。