Interpolation

Mathematical Modeling

Prof. Dr. Jingzhi Li

Department of Mathematics,
Southern University of Science and Technology

2025 Spring

1. 插值
2. 插值方法
3. 插值在 MATLAB 中的实现

什么是插值

插值（Interpolation）是数值分析中的一种常用方法，用于根据已知的数据点，在其定义域内估计未知点的数值。

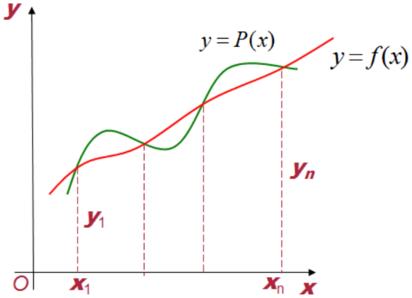
插值的基本思想

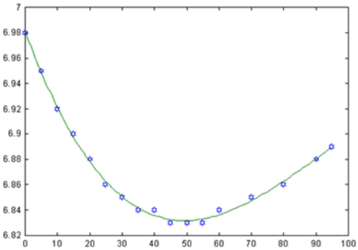
假设我们有一组已知的数据点：

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

其中 $y_i = f(x_i)$，我们希望找到一个函数 $P(x)$，使得它在每个 x_i 上都满足 $P(x_i) = y_i$，并用于估计某个 x 值（$x \in [x_0, x_n]$）对应的函数值。

插值与拟合的区别


y
y = P(x)
y = f(x)
y_n
y_1
O
x_1
x_n
x


7
6.98
6.96
6.94
6.92
6.9
6.88
6.86
6.84
6.82
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

- 插值：构造一个函数精确通过所有已知数据点
- 拟合：构造一个函数逼近已知数据点，不要求经过，只要求在某种意义下它在这些点上的总偏差最小

1. 插值
2. 插值方法
3. 插值在 MATLAB 中的实现

拉格朗日插值法

构造公式为：

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

其中，$L_i(x)$ 是第 i 个拉格朗日基函数，定义为

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

牛顿插值法

牛顿插值多项式具有逐项递增的结构，其一般形式为：

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

其中，$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$ 表示差商项

- 零阶差商：

$$f[x_i] = y_i$$

- 一阶差商：

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

- 高阶差商：

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

分段线性插值

分线段插值就是将每两个相邻的节点用直线连接起来，如此形成的一条折线就是分段线性插值函数，记作 $I_n(x)$，它满足 $I_n(x_i)=y_i$，且 $I_n(x)$ 在每个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上是线性函数 $(i=0,1,\ldots,n-1)$。

$$I_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x\in[x_{i-1},x_i],\ i\neq 0\\ \dfrac{x_i-x}{x_i-x_{i+1}}, & x\in[x_i,x_{i+1}],\ i\neq n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

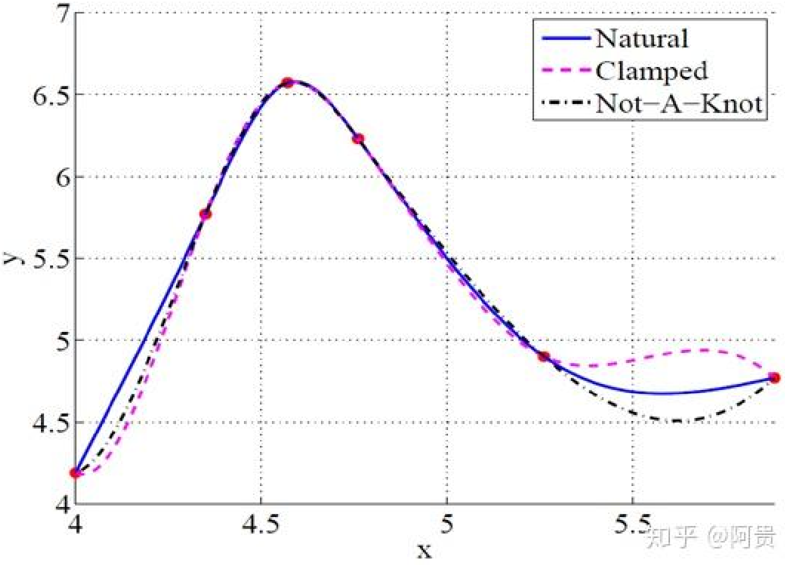
三次样条插值

我们希望在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造一个多项式 $S_i(x)$，使得整个插值函数 $S(x)$ 满足：

1. 在每个区间上 $S(x) = S_i(x)$ 是一个三次多项式
2. 整个函数 $S(x)$ 在节点处函数值连续、一阶导数连续、二阶导数连续；
3. 满足给定的边界条件

边界条件

- 第一类边界条件（固定边界条件）：端点的一阶导数为给定的值
- 第二类边界条件: 端点的二阶导数为给定的值
- 非扭结边界条件： 强制要求插值函数在第二个点和倒数第二个点三阶连续可导
- 周期边界条件； 将左端点的一阶导数和二阶导数与右端的导数匹配
- 自然边界条件： 端点的二阶导数为 0


Natural
Clamped
Not−A−Knot
7
6.5
6
y 5.5
5
4.5
4
4
4.5
5
5.5
x
知乎 @阿贵

1. 插值
2. 插值方法
3. 插值在 MATLAB 中的实现

MATLAB 中的插值函数

- interpx： x 维函数插值
- spline： 三次样条插值
- pchip： 三次 Hermite 插值
- csape： 可以指定边界条件的三次样条插值
- griddata： 对散点进行插值
- ppval： 计算插值函数在给定点的值

interp1

$$vq = interp1(x, v, xq, method)$$

- x 为包含插值节点的 n 维向量
- v 为函数在插值节点的值，也是 n 维向量
- xq 为需要插值点，可以是一个点，也可以是向量
- method 为指定的插值方法
  - 'linear' 为分段线性插值，是默认值
  - 'near' 为最近邻法
  - 'pchip' 为三次 Hermite 插值
  - 'spline' 为三次样条插值

所有插值方法要求 x 是单调的

spline,pchip

- $s = spline(x, y, xq)$，等价于 $vq = interp1(x, v, xq, 'spline')$
- $pp = spline(x, y)$：pp 代表分段多项式，以结构体的形式返回
  - pp.breaks 插值节点
  - pp.coefs 插值分段多项式系数
  - pp.pieces 多项式个数
  - pp.order 分段多项式系数个数，即次数 +1
  - pp.dim 插值维数

spline 的边界条件

- 若 x 与 y 的长度相等，则边界条件为非扭结边界条件
- 若 y 比 x 多 2 个分量，则采用第一类边界条件:

$$y = [f'(x_0), y_0, \cdots, y_n, f'(x_n)]$$

ppval

$$v = ppval(pp, xq)$$

在给定点 xq 处计算分段多项式 pp

csape

csape 属于 Curve Fitting Toolbox，用于指定边界条件的三次样条插值。

$$pp = csape(x, y, conds)$$

边界条件由 conds 给出:

- 'complete'：第一类边界条件（缺省边界条件）

$$f_0^{'} = y(1), f_n^{'} = y(n+2)$$

- 'not-a-knot'：非扭结
- 'periodic'：周期边界条件
- 'second'：第二类边界条件

$$f_0^{''} = y(1), f_n^{''x} = y(n+2)$$

- 'variational'：自然边界条件

griddata

$$vq = griddata(x, y, v, xq, yq)$$

使 v = f(x,y) 形式的曲面与向量 (x,y,v) 中的散点数据拟合。griddata 函数在 (xq,yq) 指定的查对曲面进行插值并返回插入的值 vq。曲面始终穿过 x 和 y 定义的数据点。

课堂练习

y \ x	100	200	300	400	500
100	636	697	624	478	450
200	698	712	630	478	420
300	680	674	598	412	400
400	662	626	552	334	310

在一丘陵地带测量高程，x 和 y 方向每隔 100 m 测一个点，得到高程如表所列，试插值一曲面，确定合适的模型，并由此找出最高点和该点的高程。