Optimization

Mathematical Modeling

Prof. Dr. Jingzhi Li

Department of Mathematics,
Southern University of Science and Technology

2025 Spring

最优化问题是数学建模中最常见的问题类型之一。一般说来，凡是寻求最大、最小、最远、最近、最经济、最丰富、最高效、最耗时的目标，都可以划入优化问题的范畴。

问题背景

最优化即在一定的条件下，寻求使目标最小（大）的设计参数或决策。在优化问题中有两个关键对象：目标函数和约束条件（可选）。常规优化问题，其数学表达可以描述为：

$$\min_{x} \quad f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & G_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m_e, \\ & G_i(x) \le 0, \quad i = m_e + 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

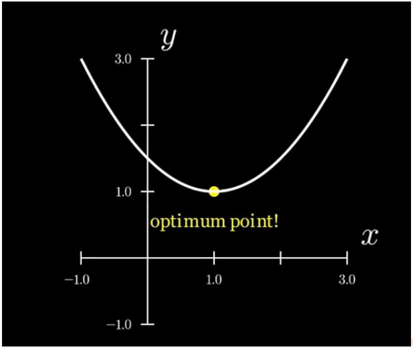
其中 x 为长度 n 的决策变量向量，$f(x)$ 为目标函数，$G(x)$ 为约束函数。

一个直观的例子

考虑如下的优化问题：

$$\min_{x} \quad \frac{1}{2}(x-1)^2+1$$
$$\text{s.t.} \quad x \in \mathbb{R}$$

我们可以画出目标函数的图像



最优化问题的分类

- 线性优化 vs 非线性优化：取决于优化问题的目标函数和约束函数是否存在非线性函数
- 有约束 vs 无约束：取决于优化问题是否有约束
- 连续优化 vs 离散优化：例如整数优化
- 单目标优化 vs 多目标优化：取决于目标函数的个数

Optimization Toolbox

Optimization Toolbox 提供了多个函数，用于求解以下优化问题：

- 线性规划
- 混合整数线性规划
- 二次规划
- 二阶锥规划
- 非线性规划

Optimization Toolbox 有两种求解优化问题的方法：

- 基于问题
- 基于求解器

基于求解器求解优化问题的步骤

1. 根据目标函数和约束选择合适的优化求解器
2. 创建目标函数和约束
3. 调用求解器

优化问题的求解器

`Optimization Toolbox` 的求解器分为四大类别：

- 最小化：找到目标函数出发点 x_0 附近的局部极小值
- 多目标最小化：找到最小化一组函数的最大值或指定的值
- 方程求解器：找到非线性方程 $f(x) = 0$ 出发点 x_0 附近的解
- 最小二乘求解器：最小化平方和

优化决策表

MATLAB 中的优化工具箱提供了数种优化求解器。优化决策表帮助我们根据不同的约束类型和目标类型选择求解器。

约束类型	目标类型				
	线性	二次	最小二乘	平滑非线性	非平滑
无	不适用（f = const，或 min = $-\infty$）	quadprog、信息	mldivide、lsqcurvefit、lsqnonlin、信息	fminsearch、fminunc、信息	fminsearch，*
边界	linprog、信息	quadprog、信息	lsqcurvefit、lsqlin、lsqnonlin、lsqnonneg、信息	fminbnd、fmincon、fseminf、信息	fminbnd，*
线性	linprog、信息	quadprog、信息	lsqcurvefit、lsqlin、lsqnonlin、信息	fmincon、fseminf、信息	*
锥	coneprog、信息	fmincon、信息	lsqcurvefit、fmincon、lsqnonlin、信息	fmincon、信息	*
常规平滑	fmincon、信息	fmincon、信息	lsqcurvefit、fmincon、lsqnonlin、信息	fmincon、fseminf、信息	*
离散，具有边界或线性	intlinprog、信息	*	*	*	*

表中的 * 表示该求解器由全局优化工具箱提供，此外，多目标优化与方程组求解器并未被此表列举。更多详细信息请查看：

https://ww2.mathworks.cn/help/optim/ug/optimization-decision-table.html

Example：基于求解器的混合整数线性规划

- 问题描述:
  我们要混合具有不同化学组成的钢材，以获得 25 吨具有某一特定化学组成的钢材。所得钢材应包含 5% 的碳和 5% 的钼（以重量计），即 25 吨 *5% = 1.25 吨碳和 1.25 吨钼。目标是将混合钢材的成本降至最低。
- 有四种钢锭可供购买。每种钢锭只能购买一块:

i	Weight w_i	%Carbon c_i	%Molybdenum m_i	Cost per Ton p_i
1	5	5	3	350
2	3	4	3	330
3	4	5	4	310
4	6	6	3	280

- 有三种等级的合金钢和一种等级的废钢可供购买，合金和废钢不必整吨购买:

j	%Carbon c_j'	%Molybdenum m_j'	Cost per Ton p_j'
1	8	6	500
2	7	7	450
3	6	8	400
4	3	9	100

Example：对问题进行数学建模

- 定义决策变量
  - $x_i \in \{0,1\}$，表示是否选用第 i 块钢锭（$i = 1,2,3,4$），每块钢锭只能买一块
  - $y_j \geq 0$，表示选用第 j 类合金钢或废钢的吨数（$j = 1,2,3,4$，其中 $j = 4$ 代表废钢）
- 定义目标函数：目标是最小化总成本

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^{4} x_i w_i p_i + \sum_{j=1}^{4} y_j p'_j$$

- 定义约束条件
  - 总重量为 25 吨

$$\sum_{i=1}^{4} x_i w_i + \sum_{j=1}^{4} y_j = 25$$

  - 总碳含量和钼含量各为 1.25 吨

$$\sum_{i=1}^{4} x_i w_i \cdot \frac{c_i}{100} + \sum_{j=1}^{4} y_j \cdot \frac{c_j'}{100} = 1.25$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i w_i \cdot \frac{m_i}{100} + \sum_{j=1}^{4} y_j \cdot \frac{m_j'}{100} = 1.25$$

  - 整数约束

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

  - 非负约束

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Example：MATLAB 表示

- 选择 intlinprog 函数作为求解器，函数语法如下：
`[x,fval] = intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)`

$$\min_x \quad f^T x$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} x(\text{intcon}) \text{ are integers} \\ A \cdot x \le b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

其中，f、x、intcon、b、b_{eq}、lb 和 ub 是向量，A 和 A_{eq} 是矩阵。

基于问题的优化工作流

1. 使用 `optimproblem` 创建一个优化问题对象，语法如下
2. 使用 `optimvar` 创建命名变量
3. 将问题中的目标函数与约束定义为命名变量中的表达式
4. 对于非线性问题，将初始点设置为结构体，其字段是优化变量名称
5. 使用 `solve` 求解优化问题

基于问题的函数的具体语法

- `prob = optimproblem`：返回 `OptimizationProblem` 对象，属性如下
  - Constraints - 问题约束
  - Description - 问题标签
  - Objective - 目标函数
  - ObjectiveSense - 优化意义（min 或 max）
  - 一个优化问题中的所有名称必须具有唯一性。
- `x = optimvar(name,n,Name,Value)`
- `show(obj)`：显示关于优化对象的信息

使用优化实时编辑器求解优化问题

1. 主页 - 文件 - 新建实时脚本
2. 插入 - 任务 - 优化
3. 选择基于问题或基于求解器

工厂、仓库、销售分配模型：设施

在 $[1, N] \times [1, N]$ 的二维整数网格上随机分布着

- $\lfloor fN^2 \rfloor$ 个工厂
- $\lfloor wN^2 \rfloor$ 个仓库
- $\lfloor sN^2 \rfloor$ 个销售网点

其中 f, w, s 分别代表着工厂、仓库和销售网点的密度。这里我们取

$$N = 20, f = 0.05, w = 0.05, s = 0.1$$

生产与配送

共有 P 种产品由工厂生产。设 $P = 20$。

每个销售网点 s 对产品 p 的需求为 $d(s,p)$。需求指的是在一个时间区间内可销售的数量。该模型的一个约束是必须满足这些需求，即系统必须精确地生产并配送满足需求的数量。

每个工厂和仓库都有容量限制：

- 工厂 f 对产品 p 的产量不能超过 $pcap(f,p)$；
- 仓库 w 的容量为 $wcap(w)$；
- 从仓库 w 向销售网点在单位时间内运输的产品 p 的数量不能超过 $turn(p) \cdot wcap(w)$，其中 $turn(p)$ 是产品 p 的周转率。

假设每个销售网点只能从一个仓库接收其全部供货。该问题的一部分目标是确定一种成本最小的销售网点与仓库的分配方式。

成本

将产品从工厂运输到仓库，再从仓库运输到销售网点的成本，取决于设施之间的距离以及具体产品的运输成本。如果设施 a 与 b 之间的距离为 $\text{dist}(a, b)$，那么产品 p 在这两个设施之间的运输成本为：

$$\text{dist}(a, b) \times tcost(p)$$

在本示例中，距离使用的是网格距离（Grid Distance），也称为 L_1 距离，即 x 坐标差值与 y 坐标差值的绝对值之和。
在工厂 f 中生产一单位产品 p 的成本为 $\text{pcost}(f, p)$。

优化问题

给定一组设施的位置，以及需求和容量约束，目标是求解：

- 每个工厂中每种产品的生产水平；
- 产品从工厂到仓库的配送计划；
- 产品从仓库到销售网点的配送计划。

这些决策变量必须满足以下条件：

- 满足所有销售网点的需求；
- 总成本最小；
- 每个销售网点必须仅从一个仓库接收其所有产品。

对问题数学建模

- $x(p,f,w)$：从工厂 p 运输到仓库 f 的产品 w 的数量；
- $y(s,w)$：二元变量，当销售网点 s 与仓库 w 关联时，取值为 1。

目标函数：

$$\min \sum_f \sum_p \sum_w x(p,f,w) \cdot (pcost(f,p) + tcost(p) \cdot dist(f,w))$$

$$+ \sum_s \sum_w \sum_p d(s,p) \cdot tcost(p) \cdot dist(s,w) \cdot y(s,w)$$

约束：

$$\sum_{w} x(p,f,w) \leq pcap(f,p) \quad \text{（工厂产能）}$$

$$\sum_{f} x(p,f,w) = \sum_{s} (d(s,p) \cdot y(s,w)) \quad \text{（需求得到满足）}$$

$$\sum_{w} y(s,w) = 1 \quad \text{（每个销售网点与一个仓库关联）}$$

$$x(p,f,w) \geq 0 \quad \text{（非负变量）}$$

$$y(s,w) \in \{0,1\} \quad \text{（二元变量）}$$