

模式识别 第一次作业

2021 年 9 月 17 日

说明

- 作业用中文撰写，务必注明题号，鼓励使用 LaTeX。
- 编程题需要提交源码，并指出运行环境以及环境依赖以方便查看。编程语言建议使用 python, 源码中提供简单注释；
- 文档按“学号 _ 姓名.pdf”命名，“.pdf”和代码文件全部打包成“学号 _ 姓名.zip”提交。
- 本次作业截止时间为 2021 年 9 月 30 日，请到课程网站及时提交。

1. 对于一个 c 类分类问题，假设各类先验概率为 $P(w_i)$, $i = 1, \dots, c$; 条件概率密度为 $P(\mathbf{x}|w_i)$, $i = 1, \dots, c$, (\mathbf{x} 表示特征向量); 将第 j 类样本判别为第 i 类的损失为 λ_{ij} 。

(1) 请写出贝叶斯风险最小决策和最小错误率决策的决策规则；

(2) 引入拒识 (表示为第 $c+1$ 类), 假设决策损失为

$$\lambda(\alpha_i|w_j) = \begin{cases} 0, & i = j \quad i, j = 1, \dots, c \\ \lambda_r, & i = c+1 \\ \lambda_s, & otherwise \end{cases}$$

请写出最小损失决策的决策规则 (包括分类规则和拒识规则)。

2. 对于特征维度为 1 维的二分类问题, 假设 $p(x|w_i) \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$, 且 $p(w_1) = p(w_2) = 0.5$ 。

(1) 证明最小错误率为

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu,$$

其中 $a = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{2\sigma}$ 。

(2) 利用不等式

$$P_e \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{a^2}{2}}$$

证明当 $\frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma}$ 趋于无穷时, P_e 趋于零。

3. 对一个 c 类分类问题, 特征向量 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^d$, 假设各类先验概率相等, 每一类条件概率密度为高斯分布。

(1) 请写出类条件概率密度函数的数学形式;

(2) 请写出在下面两种情况下的最小错误率决策判别函数: (a) 类协方差矩阵不等; (b) 所有类协方差矩阵相等。

(3) 在基于高斯概率密度的二次判别函数中, 当协方差矩阵为奇异时, 判别函数变得不可计算。请说出两种克服协方差奇异的方法。

4. 请说明 ZCA 白化的作用, 推导 ZCA 中的去相关变换矩阵, 并分析与 PCA 的异同。

5. (编程题) 请选择 MNIST 或 CIFAR10 中的一个数据集, 从中挑选两个类别运用 LDF 与 QDF 对其进行两类分类, 并对结果分析讨论。