

# 宽度优先搜索与拓扑排序 BFS & Topological Sorting

课程版本 v5.2    主讲 令狐冲



扫描二维码关注微信/微博  
获取最新面试题及权威解答

微信: [ninechapter](#)

微博: <http://www.weibo.com/ninechapter>

知乎: <http://zhuanlan.zhihu.com/jiuzhang>

官网: <http://www.jiuzhang.com>

请在随课教程中先修如下内容：

<http://www.jiuzhang.com/tutorial/algorithm/14>

- 什么是队列，如何自己实现一个队列
- 什么是 Interface, LinkedList 和 Queue 之间的关系是什么？
  - Java 才需要学习，Python和C++可以直接跳过(爽不爽！)
- 什么是拓扑排序 Topological Sorting
- 如何定义一个图的数据结构

宽度优先搜索算法是一个性价比极高的算法

如果你只有很短的时间准备面试(比如一周), 那么你应该把时间花在宽度优先搜索上

- 什么时候使用 BFS
- 二叉树上的 BFS
- 图上的 BFS
- 矩阵上的 BFS
- 拓扑排序 Topological Sorting

# 什么时候应该使用BFS？

## 图的遍历 Traversal in Graph

- 层级遍历 Level Order Traversal
- 由点及面 Connected Component
- 拓扑排序 Topological Sorting

## 最短路径 Shortest Path in Simple Graph

- 仅限简单图求最短路径
- 即，图中每条边长度都是1，或者边长都相等

## 非递归的方式找所有方案 Iteration solution for all possible results

- 这一点我们将在后面 DFS 的课上提到

# 如果题目问最短路径

除了BFS还可能是什么算法？

如果问最长路径呢？

## 最短路径

简单图 → BFS

复杂图 → Dijkstra, SPFA, Floyd (一般面试不考这个)

## 最长路径

图可以分层 → Dynamic Programming

分层: 比如走到第 $i$ 一定会经过第 $i-1$ 层 (棋盘格子图是典型的例子)

不可以分层 → DFS

# 二叉树上的宽度优先搜索

BFS in Binary Tree

# Binary Tree Level Order Traversal

<http://www.lintcode.com/problem/binary-tree-level-order-traversal/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/binary-tree-level-order-traversal/>

图的遍历(层级遍历)

注:树是图的一种特殊形态,树属于图



## 使用队列作为主要的数据结构 Queue

思考: 用栈(Stack)是否可行? 为什么行 or 为什么不行?

## 是否需要实现分层?

需要分层的算法比不需要分层的算法多一个循环

Java / C++:

**size=queue.size()**

如果直接 `for (int i = 0; i < queue.size(); i++)` 会怎么样?

问: 为什么 Python 可以直接写 `for i in range(len(queue))` ?

# Binary Tree Serialization (M+Y)

问:什么是序列化?

# 什么是序列化？

将“**内存**”中结构化的数据变成“**字符串**”的过程

序列化: object to string

反序列化: string to object

# 什么时候需要序列化？

## 1. 将内存中的数据持久化存储时

内存中重要的数据不能只是呆在内存里，这样断电就没有了，所需需要用一种方式写入硬盘，在需要的时候，能否再从硬盘中读出来在内存中重新创建

## 2. 网络传输时

机器与机器之间交换数据的时候，不可能互相去读对方的内存。只能讲数据变成字符流数据(字符串)后通过网络传输过去。接受的一方再将字符串解析后到内存中。

常用的一些序列化手段：

- XML
- Json
- Thrift (by Facebook)
- ProtoBuf (by Google)

一些序列化的例子：

- 比如一个数组，里面都是整数，我们可以简单的序列化为"[1,2,3]"
- 一个整数链表，我们可以序列化为，"1->2->3"
- 一个哈希表(HashMap)，我们可以序列化为，"{\"key\": \"value\"}"

序列化算法设计时需要考虑的因素：

- **压缩率**。对于网络传输和磁盘存储而言，当然希望更节省。
  - 如 Thrift, ProtoBuf 都是为了更快的传输数据和节省存储空间而设计的。
- **可读性**。我们希望开发人员，能够通过序列化后的数据直接看懂原始数据是什么。
  - 如 Json, LintCode 的输入数据

## 二叉树如何序列化？

你可以使用任何你想要用的方法进行序列化，只要保证能够解析回来即可。

LintCode 采用的是 BFS 的方式对二叉树数据进行序列化，这样的好处是，你可以更为容易的自己画出整棵二叉树。

算法描述：

<http://www.lintcode.com/en/help/binary-tree-representation/>

题目及解答：

<http://www.lintcode.com/en/problem/binary-tree-serialization/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/binary-tree-serialization/>

### Binary Tree Level Order Traversal II

<http://www.lintcode.com/en/problem/binary-tree-level-order-traversal-ii/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/binary-tree-level-order-traversal-ii/>

### Binary Tree Zigzag Order Traversal

<http://www.lintcode.com/en/problem/binary-tree-zigzag-level-order-traversal/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/binary-tree-zigzag-level-order-traversal/>

### Convert Binary Tree to Linked Lists by Depth

<http://www.lintcode.com/en/problem/convert-binary-tree-to-linked-lists-by-depth/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/convert-binary-tree-to-linked-lists-by-depth/>

# 图上的宽度优先搜索

BFS in Graph

问:和树上有什么区别?



# 哈希表

图中存在环

存在环意味着, 同一个节点可能重复进入队列

Java: *HashMap / HashSet*

C++: *unordered\_map*

Python: *dict*

# Clone Graph (F)

<http://www.lintcode.com/problem/clone-graph/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/clone-graph/>

图的遍历(由点及面)

# Word Ladder

<http://www.lintcode.com/problem/word-ladder/>

<http://www.jiuzhang.com/solution/word-ladder/>

最典型的BFS问题 —— 隐式图 (Implicit Graph) 最短路径

# 休息5分钟

take a break

# 矩阵中的宽度优先搜索

BFS in Matrix

图 Graph

N个点, M条边

M最大是  $O(N^2)$  的级别

图上BFS时间复杂度 =  $O(N + M)$

- 说是 $O(M)$ 问题也不大, 因为M一般都比N大

所以最坏情况可能是  $O(N^2)$

矩阵 Matrix

R行C列

$R \times C$ 个点,  $R \times C \times 2$  条边(每个点上下左右4条边, 每条边被2个点共享)。

矩阵中BFS时间复杂度 =  $O(R * C)$

# Number of Islands

<http://www.lintcode.com/problem/number-of-islands/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/number-of-islands/>

图的遍历(由点及面)

# 坐标变换数组

```
int[] deltaX = {1,0,0,-1};
```

```
int[] deltaY = {0,1,-1,0};
```

问：写出八个方向的坐标变换数组？



# 更多 Union Find 有关的问题

将在《九章算法强化班》中讲解

**并查集 Union Find**

# Knight Shortest Path

<http://www.lintcode.com/problem/knight-shortest-path/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/knight-shortest-path/>

简单图最短路径

follow up: speed up? (见随课教程)

# 拓扑排序 Topological Sorting

几乎每个公司都有一道拓扑排序的面试题！

BFS or DFS?

# 独孤九剑——破枪式

能够用 BFS 解决的问题，一定**不要用** DFS 去做！

因为用 Recursion 实现的 DFS 可能造成 StackOverflow!  
(NonRecursion 的 DFS 一来你不会写，二来面试官也看不懂)

入度(In-degree):

有向图(Directed Graph)中指向当前节点的点的个数(或指向当前节点的边的条数)

算法描述:

1. 统计每个点的入度
2. 将每个入度为 0 的点放入队列(Queue)中作为起始节点
3. 不断从队列中拿出一个点, 去掉这个点的所有连边(指向其他点的边), 其他点的相应的入度 - 1
4. 一旦发现新的入度为 0 的点, 丢回队列中

拓扑排序并不是传统的排序算法

一个图可能存在多个拓扑序(Topological Order), 也可能不存在任何拓扑序

# Topological Sorting

<http://www.lintcode.com/problem/topological-sorting/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/topological-sorting/>

该问题保证一定存在至少一个拓扑序

## 拓扑排序的四种不同问法

---

求任意1个拓扑序 (Topological Order)

问是否存在拓扑序 (是否可以被拓扑排序)

求所有的拓扑序

求是否存在且仅存在一个拓扑序

## 拓扑排序的四种不同问法

---

求任意1个拓扑序 (Topological Order)

问是否存在拓扑序 (是否可以被拓扑排序)

求所有的拓扑序 **DFS**

求是否存在且仅存在一个拓扑序 **Queue中最多同时只有1个节点**



# Course Schedule I && II (GAFZ)

<http://www.lintcode.com/problem/course-schedule/>

<http://www.lintcode.com/problem/course-schedule-ii/>

换了个皮，第二问需要判断是否没有拓扑序

# Alien Dictionary (GFTSAP)

<http://www.lintcode.com/problem/alien-dictionary/>

<http://www.jiuzhang.com/solution/alien-dictionary/>

相似问题: <http://www.lintcode.com/problem/sequence-reconstruction/>

考点1: 如何构建图

考点2: 如何存储图

考点3: 如何拓扑排序

- **图上的BFS**

- 判断一个图是否是一棵树
- <http://www.lintcode.com/problem/graph-valid-tree/>
- 搜索图中最近值为target的点
- <http://www.lintcode.com/problem/search-graph-nodes/>
- 无向图联通块
- <http://www.lintcode.com/problem/connected-component-in-undirected-graph/>
- 序列重构(判断是否只有一个拓扑排序)
- <http://www.lintcode.com/problem/sequence-reconstruction/>

- **矩阵上的BFS**

- 僵尸多少天吃掉所有人
- <http://www.lintcode.com/problem/zombie-in-matrix/>
- 建邮局问题 Build Post Office II
- <http://www.lintcode.com/problem/build-post-office-ii/>

- 能用 BFS 的一定不要用 DFS (除非面试官特别要求)
- BFS 的两个使用条件
  - 图的遍历 (由点及面, 层级遍历)
  - 简单图最短路径
- 是否需要层级遍历
  - `size = queue.size()`
- 拓扑排序必须掌握!
- 坐标变换数组
  - `deltaX, deltaY`
  - `inBound`

请在随课教程中自学如下内容：

<http://www.jiuzhang.com/tutorial/algorithm/367>

另外两种宽度优先搜索算法的实现方式

双向宽度优先搜索算法 (Bidirectional BFS)