第五章　一阶线性微分方程组

本章, 研究一阶线性微分方程组的理论和一些特殊线性微分方程组的求解方法。

【例1】 试建立地球人造卫星绕地球运动的微分方程。(忽略其它天体对人造卫星的影响，只计及地球引力场对人造卫星的作用)

〖**解**〗 设从地球表面上一点A，以倾角α，初速度v_0射出一质量为m的物体，如图5.1所示，下面求此物体的运动轨道。

过发射点A和地心O的直线作y轴，y轴与发射方向所成的平面为xoy面，平面通过地心，取垂直于y轴且过地心的直线为x 轴，取开始发射时间为$t=0$，经过时间t后，卫星位于点$P(x,y)$。

根据万有引力定律，地球对卫星的引力大小为

$$F=-f\frac{mM}{x^2+y^2}$$

其方向指向地心，其中f是引力系数，$f=6.685\times10^{-20}km^3/kg\cdot s^2$，$M$是地球质量，$M=5.98\times10^{24}kg$，$\sqrt{x^2+y^2}$是地球与卫星间的距离。如图5.2所示。引力$F$在$x,y$轴方向上的分力分别为

$$F_x=F\cos\theta=-\frac{fmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_y=F\sin\theta=-\frac{fmMy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

卫星在x,y轴上所获得的分加速度分别为$\frac{d^2x}{dt^2}$和$\frac{d^2y}{dt^2}$。由牛顿第二定律，得到卫星的运动方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{fmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2m)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \tag{5.1}$$

这就是一个含有两个未知函数的微分方程组。■

【例2】 (Volterra **捕食－被捕食模型**) 设有捕食种群和被捕食(或称食饵)种群生活在同一小环境中，由于生育、生死和相互作用，两种群个体的数量将随时间变化。试建立两种群个体数量随时间变化的数学模型。

〖**解**〗 设在给定的小环境中，t时刻食饵与捕食者的数量分别为$x(t)$和$y(t)$。假设个体不区分大小，而且没有个体向环境输入或从环境输出，当环境中不存在捕食者时，食饵种群的增长规律用Logistic方程描述为

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=r_1(1-\frac{x}{k_1}) \tag{5.2}$$

其中r_1为常数，等于出生率b_1减去死亡率，k_1为大于0常数。

将(5.2)改写为

$$\frac{dx}{dt}=x(r_1-ax),\quad a=\frac{r_1}{k_1} \tag{5.3}$$

由于捕食者存在，将使食饵的增长率减少，设单位时间内每个捕食者吃掉食饵的数量与该时刻食饵的总量成正比，则t 时刻有$y(t)$个捕食者，它们在单位时间内吃掉食饵的总量为bxy，$b>0$为比例常数。于是(5.3)又改写为

$$\frac{dx}{dt}=x(r_1-ax-by) \tag{5.4}$$

类似的可得到捕食种群的增长规律

$$\frac{dy}{dt}=y(-r_2+cx-dy) \tag{5.5}$$

其中$d>0, r_2>0, c>0$。

(5.4)和(5.5)构成的系统就是捕食一被捕食两种群相互作用的数学模型，这是含有两个未知函数的微分方程组。■

5.1 一阶线性微分方程组的一般理论

5.1.1 一阶线性微分方程组的基本概念

定义 5.1 称

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\quad\cdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases} \tag{5.6}$$

为含有n个未知函数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的***一阶微分方程组***。

定义 5.2 如果存在一组函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$，使得在$[a,b]$上有下面$n$个式子

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad i=1,2,\cdots,n$$

恒成立，则称这组函数是***一阶微分方程组(5.6)在$[a,b]$上的一个解***。

定义 5.3 含有n个任意常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$的解

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ x_2 = \phi_2(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \\ \cdots \quad \cdots \\ x_n = \phi_n(t, c_1, c_2, \cdots, c_n) \end{cases}$$

称为***一阶微分方程组(5.6)的通解***。

定义 5.4 如果一阶微分方程组*(5.6)*中的每一个$f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$对所有未知函数都是一次的，即

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{5.7}$$

称*(5.7)*为***一阶线性微分方程组***。其中，a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$及$f_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$在区间$[a, b]$上连续。

一阶线性方程组的向量表示：

记

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

则方程组(5.7)可写成向量形式

$$X' = A(t)X + F(t) \tag{5.8}$$

定义 5.5 初值问题

$$X' = A(t)X + F(t), \quad X(t_0) = \eta \tag{5.9}$$

的解就是方程组*(5.8)*在包含t_0的区间$\alpha \le t \le \beta$上的解$u(t)$，使$\mathbf{u}(t_0) = \eta$。

5.1.2　一阶线性微分方程组与高阶线性微分方程的关系

高阶线性微分方程的转化:

n阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\dfrac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases} \tag{5.10}$$

其中$a_i(t),\ (i = 1, 2, \cdots, n)$和$f(t)$是$[a, b]$上的连续函数，$t_0 \in [a, b], \eta_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$是已知常数。

作变换，令

$$x = x_1,\ \frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = x_3,\ \cdots,\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n$$

于是

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = x_3 \\ \cdots \\ \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = x_n \\ \\ \dfrac{d^n x}{dt^n} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t) \end{cases}$$

而且

$$x(t_0) = \eta_1 = x_1(t_0),\ x'(t_0) = \eta_2 = x_2(t_0),\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n = x_n(t_0)$$

则(5.10)就可转化为下列一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \\ X(t_0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \eta \end{cases} \tag{5.11}$$

高阶线性方程组的降阶:

假设如下线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d^3x}{dt^3} = a_1(t)x + a_2(t)\dfrac{dx}{dt} + a_3(t)\dfrac{d^2x}{dt^2} + b_1(t)y + b_2(t)\dfrac{dy}{dt} + f_1(t) \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = c_1(t)x + c_2(t)\dfrac{dx}{dt} + c_3(t)\dfrac{d^2x}{dt^2} + d_1(t)y + d_2(t)\dfrac{dy}{dt} + f_2(t) \end{cases} \tag{5.12}$$

令

$$x = x_1,\ \frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = x_3;\ y = y_1,\ \frac{dy_1}{dt} = y_2$$

则可将(5.12)化为含有5个未知函数x_1, x_2, x_3, y_1, y_2的一阶线性微分方程组

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & b_1(t) & b_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) & d_1(t) & d_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1(t) \\ 0 \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

5.1.3　存在唯一性定理

定义 5.6 设n维列向量$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$和$n \times n$矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$，定义它们的***范数***为

$$\|X\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

性质：

(1) $\|X\| \geq 0$且$\|X\| = 0$当且仅当$x_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$;
$\|A\| \geq 0$且$\|A\| = 0$当且仅当$a_{ij} = 0\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$;

(2) 对任意常数α，有$\|\alpha X\| = |\alpha|\|X\|$, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$;

(3) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

(4) $\|AX\| \leq \|A\|\|X\|$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$;

(5) $\|\int_a^b X(t)dt\| \leq \int_a^b \|X(t)\|dt$; $\quad \|\int_a^b A(t)dt\| \leq \int_a^b \|A(t)\|dt$。

定义 5.7 向量序列$\{X_k\}$，$X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{nk})^T$称为***收敛的***，如果对每个$i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，数列$\{X_{ik}\}$都是收敛的。

定义 5.8 向量函数序列$\{X_k(t)\}$，$X_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t), \cdots, x_{nk}(t))^T$称为在区间$[a, b]$上***收敛的(一致收敛的)***，如果对每个$i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，函数序列$\{x_{ik}(t)\}$在$[a, b]$上是收敛的（一致收敛的）。

定义 5.9 设$\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(t)$是向量函数级数，如果其部分和所作成的函数向量序列在区间$[a, b]$上收敛（一致收敛），则称$\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(t)$ ***在***$[a, b]$***上是收敛的(一致收敛的)***。

定义 5.10 设$\{A_k\}$是$n\times n$矩阵序列，其中$A_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，如果对一切$i,j=1,2,\cdots,n$，数列$\{a_{ij}^{(k)}\}$都收敛，则称$\{A_k\}$***是收敛的***。

定义 5.11 设$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$是矩阵级数，如果其部分和所作的矩阵序列是收敛的，则称$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$***是收敛的***。

解的存在唯一性定理:

定理 5.1 设$A(t)$是$n\times n$矩阵，$F(t)$是n维列向量，它们都在区间$[a,b]$上连续。则对于区间$[a,b]$上的任何数t_0及任一常数向量$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^T$，方程组$X'=A(t)X+F(t)$存在唯一解$\phi(t)$，定义于整个区间$[a,b]$上，且满足初始条件$\phi(t_0)=\eta$。

5.1.4 一阶齐次线性微分方程组解空间的结构

定义 5.12 若线性微分方程组*(5.8)*中的$F(t)\equiv\mathbf{0}$，即

$$X'=A(t)X \tag{5.13}$$

称*(5.13)*为***齐次线性微分方程组***。

若$F(t)\not\equiv\mathbf{0}$，称*(5.8)*为***非齐次线性微分方程组***。

定理 5.2 *(叠加原理)* 如果$X_1(t),X_2(t),\cdots,X_m(t)$是齐次线性微分方程组*(5.13)*的$m$个解，则它们的线性组合$\sum\limits_{i=1}^{m}c_iX_i(t)$也是*(5.13)*的解。其中$c_1,c_2,\cdots,c_m$是任意常数。

【例1】 对习题5.1中第3题，试验证

$$\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)=\begin{bmatrix} t^2+t \\ 2t+1 \end{bmatrix}$$

也是此方程组的解。

问题：

1.方程组(5.13)若有解，必有无穷多个解，如何求其通解呢？

2.方程组(5.13)的解集合构成一个线性空间,这个解空间的维数是多少？基底是什么？

定义 5.13 设$X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$是区间$[a,b]$上的向量函数，如果存在不全为零的常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使下式恒成立

$$c_1X_1(t)+c_2X_2(t)+\cdots+c_nX_n(t)\equiv\mathbf{0},\quad t\in[a.b]$$

则称此组向量函数在区间$[a,b]$上***线性相关***，否则称这组函数***线性无关***。

【例2】 证明向量函数

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix},\quad X_2(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$$

在任何区间上都是线性无关的。

定义 5.14 称区间$[a,b]$上的n个向量函数

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t)\\ x_{21}(t)\\ \vdots\\ x_{n1}(t)\end{bmatrix},\quad X_2(t)=\begin{bmatrix}x_{12}(t)\\ x_{22}(t)\\ \vdots\\ x_{n2}(t)\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad X_n(t)=\begin{bmatrix}x_{1n}(t)\\ x_{2n}(t)\\ \vdots\\ x_{nn}(t)\end{bmatrix}$$

构成的行列式

$$W[X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)]\equiv W(t)\equiv\begin{bmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{bmatrix}$$

为这组向量函数的*Wronski*行列式。

定理 5.3 如果向量函数$X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$在区间$[a,b]$上线性相关，则它们在$[a,b]$上的*Wronski*行列式恒等于零。

定理 5.4 如果向量函数$X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$是方程组*(5.13)*的$n$个解，则它们在区间$[a,b]$上线性无关的充分必要条件为其*Wronski*行列式$W(t)\neq 0,\ t\in[a,b]$。

定理 5.5 方程组*(5.13)*一定存在n个线性无关解。

定理 5.6 *(通解结构定理)* 如果$X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$是方程组*(5.13)*的$n$个线性无关解，则方程组*(5.13)*的通解可以表示为

$$X(t)=c_1X_1(t)+c_2X_2(t)+\cdots+c_nX_n(t) \tag{5.14}$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意常数。且通解*(5.14)*包含了方程组*(5.13)*的所有解。

定理 5.7 *(Liouville公式)* 设$X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$是方程组*(5.13)*的任意$n$个解，则它们的*Wronski*行列式$W(t)$满足一阶线性方程

$$W'(t)=[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W(t)$$

因而有

$$W(t)=W(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds},\qquad t,t_0\in[a,b] \tag{5.15}$$

5.1.5 一阶齐次线性微分方程组的基解矩阵的性质

定义 5.15 如果一个$n\times n$矩阵的每一列都是*(5.13)*的解，则称这个矩阵为*(5.13)*的***解矩阵***。

定义 5.16 称*(5.13)*的n个线性无关解组成的解矩阵为*(5.13)*的***基解矩阵***。记为$\Phi(t)$，即

$$\Phi(t)=[\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_n(t)]$$

其中$\phi_i(t)$, $i=1,2,\cdots,n$是*(5.13)*的n个线性无关解。

基解矩阵的性质:

定理 5.8 *(5.13)*一定存在一个基解矩阵$\Phi(t)$。如果$\psi(t)$是*(5.13)*的任一解，则

$$\psi(t)=\Phi(t)\mathbf{c}$$

其中$\mathbf{c}$是确定的常数列向量。

定理 5.9 *(5.13)*的一个解矩阵$\Phi(t)$是基解矩阵的充分必要条件为在区间$[a,b]$上的某一点t_0处，$\det\Phi(t_0)\neq 0$。

定理 5.10 如果$\Phi(t)$是*(5.13)*在区间$[a,b]$上的基解矩阵，C是非奇异$n\times n$常数矩阵，则$\Phi(t)C$ 也是*(5.13)*在区间$[a,b]$上的基解矩阵。

定理 5.11 如果$\Phi(t),\Psi(t)$是*(5.13)*在区间$[a,b]$上的两个基解矩阵，则存在一个非奇异$n\times n$常数矩阵C，使在区间$[a,b]$上$\Psi(t)=\Phi(t)C$。

【例3】 验证

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^t & e^{3t}\\ -e^t & e^{3t}\end{bmatrix}$$

是方程组

$$X'=\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}X$$

的基解矩阵，并写出通解。

【例4】 试作出以矩阵

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{2t}\\ 0 & e^{-t} & e^{2t}\\ -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t}\end{bmatrix}$$

为基解矩阵的齐次线性微分方程组。

5.1.6 一阶非齐次线性微分方程组解集合的性质

定理 5.12 如果$\bar{X}(t)$是非齐次线性微分方程组*(5.8)*的解，$X(t)$是它对应的齐次线性微分方程组*(5.13)*的解，则$\bar{X}(t)+X(t)$ 仍是非齐次线性微分方程组*(5.8)*的解。

定理 5.13 如果$X_1(t), X_2(t)$是非齐次线性微分方程组*(5.8)*的两个解，则$X_1(t)-X_2(t)$ 是对应的齐次线性微分方程组*(5.13)*的解。

定理 5.14 *(通解结构定理)* 设$\Phi(t)$是齐次线性微分方程组*(5.13)*的一个基解矩阵，$\bar{X}(t)$是非齐次线性微分方程组*(5.8)*的某一解，则非齐次线性微分方程组*(5.8)*的任一解$X(t)$都可表示为

$$X(t)=\Phi(t)\mathbf{c}+\bar{X}(t)$$

其中$\mathbf{c}$是确定的常数列向量。

常数变易法:

设$\Phi(t)$是方程组(5.13)的一个基解矩阵，于是方程组(5.13)的通解为

$$X(t)=\Phi(t)\mathbf{c}$$

我们猜测：方程组(5.8)也有这种形式的解，但$\mathbf{c}$应为t的函数，即假设

$$X(t)=\Phi(t)\mathbf{c}(t) \tag{5.16}$$

是方程组(5.8)的解。其中$\mathbf{c}(t)$是待定的向量函数。

将(5.16)代入方程组(5.8)中，得

$$\Phi'(t)\mathbf{c}(t)+\Phi(t)\mathbf{c}'(t)=A(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t)+F(t) \tag{5.17}$$

因为$\Phi(t)$是方程组(5.13)的基解矩阵，所以

$$\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$$

因此，(5.17)变为

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t)=F(t)$$

又因为$\Phi(t)$是可逆的，从而得

$$\mathbf{c}'(t)=\Phi^{-1}(t)F(t)$$

两边同时积分，得

$$\mathbf{c}(t)=\mathbf{c}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds \tag{5.18}$$

将(5.18)代回(5.16)中，得

$$X(t)=\Phi(t)\mathbf{c}(t_0)+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds$$

于是方程组(5.8)的通解为

$$\begin{aligned}X(t)&=\Phi(t)\tilde{\mathbf{c}}+\Phi(t)\mathbf{c}(t_0)+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds\\&=\Phi(t)\mathbf{c}+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds\end{aligned}\tag{5.19}$$

其中$\mathbf{c}=\tilde{\mathbf{c}}+\mathbf{c}(t_0)$。

方程组(5.8)**的两个特解**:

$$X(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds,\quad X(t_0)=\mathbf{0}\tag{5.20}$$

$$X(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)F(s)ds,\quad X(t_0)=\eta\tag{5.21}$$

【例5】　试求方程组$X'=A(t)X+F(t)$的通解。其中

$$A(t)=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},\quad F(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}\\0\end{bmatrix}$$

及对应方程组$X'=A(t)X$的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{t}&e^{3t}\\-e^{t}&e^{3t}\end{bmatrix}$$

5.2 一阶常系数线性微分方程组

本节介绍一类特殊的一阶线性微分方程组—**常系数线性微分方程组**的求解问题。

设A是$n \times n$常数矩阵，则常系数非齐次线性微分方程组为

$$X' = AX + F(t) \tag{5.22}$$

其对应的常系数齐次线性微分方程组为

$$X' = AX \tag{5.23}$$

5.2.1 矩阵指数函数$\exp(At)$

定义 5.17 设A是$n \times n$常数矩阵，称

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots \tag{5.24}$$

为*矩阵指数*。其中E为n阶单位矩阵，A^n是矩阵A的n次幂，规定$A^0 = E$。

性质：

(1) 如果矩阵A, B可交换，即$AB = BA$，则

$$\exp A \cdot \exp B = \exp(A + B) \tag{5.25}$$

(2) 对任何矩阵A，$(\exp A)^{-1}$存在，且

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A) \tag{5.26}$$

(3) 如果T是非奇异矩阵，则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T \tag{5.27}$$

定义 5.18 称

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \tag{5.28}$$

为*矩阵指数函数*。

定理 5.15 矩阵

$$\Phi(t) = \exp(At)$$

是方程组*(5.23)*的基解矩阵，且$\Phi(0) = E$。

性质：

(1) 方程组(5.23)的通解可以表示为

$$X(t) = \exp(At)\mathbf{c}$$

(2) 如果$\Phi(t)$是方程组(5.23)的另外一个不同于$\exp(At)$的基解矩阵，则

$$\exp(At) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) \tag{5.29}$$

问题: **当**A**是某些特殊矩阵时，如何求解**$\exp(At)$?

【例1】 设A是一个对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

试求$X' = AX$的基解矩阵$\exp(At)$。

【例2】 试求$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X$的基解矩阵$\exp(At)$。

5.2.2 常系数齐次线性微分方程组的解法

本节，介绍方程组(5.23)的基解矩阵$\Phi(t)$的几种计算方法。

分析:我们猜测：方程组(5.23)会不会有形如

$$X(t) = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{c}, \quad (\lambda, \mathbf{c}\text{未知}, \quad \mathbf{c} \neq 0) \tag{5.30}$$

的解呢？

将(5.30)代入方程组(5.23)中，得

$$(\lambda E - A)\mathbf{c} = 0$$

这意味着，$e^{\lambda t} \cdot \mathbf{c}$是方程组(5.23)的解的充分必要条件为：$\lambda$是矩阵$A$的特征根且$\mathbf{c}$是对应于$\lambda$的特征向量。于是求方程组(5.23)的基解矩阵$\Phi(t)$的问题，转化成了求矩阵$A$的特征根和特征向量的问题。

(1) **矩阵**A**的特征根是单根的情形**

定理 5.16 *如果方程组(5.23)的系数矩阵A的n个特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$彼此互异，且$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}$是它们对应的特征向量，则方程组(5.23)的一个基解矩阵为*

$$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}, \cdots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v_n}] \tag{5.31}$$

注1 *如果矩阵A的特征值全为实数，则(5.31)中得到的$\Phi(t)$是实的基解矩阵；如果矩阵A的特征根中有复数，则(5.31)中得到的$\Phi(t)$是复的基解矩阵，但可以通过(5.29)求出实的基解矩阵*$\exp(At)$。

【例3】 求方程组$X' = AX$的基解矩阵。其中

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

【例4】 求方程组$X' = AX$的基解矩阵。其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

定理 5.17 若实系数齐次线性微分方程组*(5.23)*有复值解$X(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$，则其实部$\mathbf{u}(t)$和虚部$\mathbf{v}(t)$都是*(5.23)*的解。

(2) 矩阵A的特征根有重根的情形

空间分解法

设矩阵A有k个不同的特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，它们的重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_k$。显然$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$。根据线性代数的知识，由$(A - \lambda_i E)^{n_i}\mathbf{u} = 0$能得到$n_i$个线性无关的特征向量，组成子空间$V_i\ (i = 1, 2, \cdots, k)$，使得$n$维欧式空间可表成它们的直和，即$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ 。这意味着，对任意的$\mathbf{u} \in V$，存在唯一的向量$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k$，其中$\mathbf{u_i} \in V_i\ (i = 1, 2, \cdots, k)$，使得

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k \tag{5.32}$$

在此基础上，我们先求初值问题

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \eta \end{cases} \tag{5.33}$$

的解，利用这个解就能把基解矩阵$\exp(At)$求出来。

根据(5.32)，我们有

$$\eta = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k \tag{5.34}$$

再根据通解公式$X(t) = \exp(At)\mathbf{c}$，得到满足初始条件$X(0) = \eta$的特解为

$$\begin{aligned} X(t) &= \exp(At)\eta = \exp(At)\sum_{i=1}^{k}\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k}\exp(At)\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k}\exp(At)\cdot E\cdot\mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k}\exp(At)\cdot e^{\lambda_i t}\cdot\exp(-\lambda_i Et)\cdot\mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i t}\cdot\exp(A-\lambda_i E)t\cdot\mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i t}\{E + t(A-\lambda_i E) + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda_i E)^2 + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}(A-\lambda_i E)^{n_i-1}\}\mathbf{v}_i \end{aligned} \tag{5.35}$$

其中

$$(A-\lambda_i E)^l \mathbf{v_i}=\mathbf{0}, \quad l \geq n_i, \quad i=1,2,\cdots,k$$

令η依次取n阶单位向量：$\mathbf{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T, \mathbf{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T, \cdots, \mathbf{e}_n=(0,0,\cdots,1)^T$，代入(5.35)中，得到$n$个解$X_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$构成的$\Phi(t)$就是方程组的一个解矩阵。又因为

$$\Phi(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=E$$

于是我们得到了$\exp(At)$。

定理 5.18 *如果方程组(5.23)的系数矩阵A有k个不同的特征根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，它们的重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$，且$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$。令$\eta$分别取$n$阶单位向量$\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\cdots,\mathbf{e_n}$，则满足初值问题(5.33)的解可由(5.35)确定，分别记为$X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$，于是方程组(5.23)的一个基解矩阵为*

$$\exp(At)=[X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)]$$

注2 如果矩阵A只有一个n重特征根，则n维欧式空间不必分解。此时(5.35)变为

$$X(t)=e^{\lambda t}\{E+t(A-\lambda E)+\frac{t^2}{2!}(A-\lambda E)^2+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A-\lambda E)^{n-1}\}\eta \tag{5.36}$$

再根据定理5.18，得方程组(5.23)的一个基解矩阵

$$\exp(At)=e^{\lambda t}\{E+t(A-\lambda E)+\frac{t^2}{2!}(A-\lambda E)^2+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A-\lambda E)^{n-1}\} \tag{5.37}$$

【例5】 求方程组$X'=AX$的基解矩阵。其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

【例6】 求方程组$X'=AX$的基解矩阵。其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

待定系数法

分析:假设2×2的矩阵A有一个二重特征根λ，根据线性代数的知识，存在非奇异矩阵T，使矩阵A相似于若当标准型，即

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

作变换，令$X=TZ$，其中$X=[x_1,x_2]^T$, $Z=[z_1,z_2]^T$，于是方程组$X'=AX$变为$(TZ)'=TZ'=ATZ$，即

$$Z'=T^{-1}ATZ=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}Z$$

也就是

$$\begin{cases}\dfrac{dz_1}{dt}=\lambda z_1+z_2\\[2ex] \dfrac{dz_2}{dt}=\lambda z_2\end{cases}\tag{5.38}$$

解方程组(5.40)得：

$$z_1=(c_2t+c_1)e^{\lambda t},\quad z_2=c_2e^{\lambda t}$$

其中c_1,c_2为任意常数。

取$c_1=1,c_2=0$和$c_1=0,c_2=1$，得到方程组(5.40)的两个线性无关解

$$\bar{Z}_1(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}\\ 0\end{bmatrix},\quad \bar{Z}_2(t)=\begin{bmatrix}te^{\lambda t}\\ e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

再利用$X=TZ$，得原方程组$X'=AX$的两个解

$$\bar{X}_1(t)=T\bar{Z}_1(t)=\begin{bmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda t}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\end{bmatrix}e^{\lambda t}$$
$$\bar{X}_2(t)=T\bar{Z}_2(t)=\begin{bmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}te^{\lambda t}\\ e^{\lambda t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}t+t_{12}\\ t_{21}t+t_{22}\end{bmatrix}e^{\lambda t}$$

显然$\bar{X}_1(t)$和$\bar{X}_2(t)$是线性无关的。事实上，由它们构成的解矩阵$\Phi(t)=[\bar{X}_1(t),\bar{X}_2(t)]$满足

$$\det\Phi(0)=\begin{vmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{vmatrix}=|T|\neq 0$$

由于$\bar{X}_1(t)$和$\bar{X}_2(t)$的每个分量都是不超过一次的多项式和一个指数函数乘积的形式，即可以用下述形式来描述

$$X(t)=(R_0+R_1t)e^{\lambda t}$$

定理 5.19 如果方程组*(5.23)*的系数矩阵A有k个不同特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，重数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_k$，且$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$。则对$n_i$重特征根$\lambda_i$，方程组*(5.23)*有$n_i$个线性无关解，形如

$$X(t) = (R_0 + R_1 t + \cdots + R_{n_i-1} t^{n_i-1}) e^{\lambda_i t} \tag{5.39}$$

其中向量$R_0, R_1, \cdots, R_{n_i-1}$由矩阵方程确定*:*

$$\begin{cases} (A - \lambda_i E) R_0 = R_1 \\ (A - \lambda_i E) R_1 = 2R_2 \\ \qquad \cdots \quad \cdots \\ (A - \lambda_i E) R_{n_i-2} = (n_i - 1) R_{n_i-1} \\ (A - \lambda_i E)^{n_i} R_0 = \mathbf{0} \end{cases} \tag{5.40}$$

取遍所有λ_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$，就得到方程组*(5.23)*的一个基解矩阵。

【例7】 用空间分解法和待定系数法求解例5。

【例8】 用空间分解法和待定系数法求解例6。

5.2.3 常系数非齐次线性微分方程组的解法

常系数非齐次线性微分方程组的通解公式:

$$X(t) = \exp[(t - t_0)A]\eta + \int_{t_0}^{t} \exp[(t - s)A] F(s) ds \tag{5.41}$$

【例9】 求方程组$X' = AX + F(t)$满足初始条件$X(0) = \eta$的解。其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.3 应用实例

【例1】 胆固醇流动的仓室模型

在研究传染病的传播、种群生态、环境的污染、药物在人体的分布等问题中，经常把所研究的事物看成由有限个部分组成的系统，而每个部分称为一个**仓室**。它具有以下特点:

(1) 每个仓室有固定的容量，内含每个时刻都均匀分布着的物质(或能量);

(2) 各个仓室间以及仓室与外部环境间均可进行物质(或能量)交换，并服从物质(或能量)守恒定律。

这样的系统称为**仓室系统**。下面根据人体内胆固醇的吸收、合成、排泄等机理来建立胆固醇流动的仓室模型。

人体内血浆中的胆固醇既可从食物中吸收，也可以在体内通过肝脏等器官合成，且血浆中过量的胆固醇通过肝脏、肠等排出体外。把具有吸收和排泄胆固醇功能的器官组成的系统称仓室C_1，如血浆、肝脏、肠道和皮肤等都属于仓室C_1。把与胆固醇有关的其他器官构成的系统称为仓室C_2，如动脉壁等属于仓室C_2，即在仓室C_2中，胆固醇既不能从外部吸收，也不能向外部排放。仓室C_2和C_1都可以合成胆固醇，且两个仓室的胆固醇可以相互交换，如图5.3所示。

图5.3给出了两个仓室中胆固醇的转移率k_{21}及k_{12}，其中k_{21}代表单位时间每克胆固醇从仓室C_1流动到仓室C_2的量，k_{12}代表单位时间每克胆固醇从仓室C_2流动到仓室C_1的量。其他参数的意义为: k_{01}代表单位时间每克胆固醇从仓室C_1排泄的量，J_0代表单位时间通过从食物中吸收而流进仓室C_1的胆固醇的量，J_i是代表单位时间通过人体合成而流进仓室C_i的胆固醇的量$(i = 1, 2)$。

设x_1和x_2分别代表在t时刻，仓室C_1和C_2中胆固醇的总量，通过上述分析和假设，可建立下面关于胆固醇的仓室模型

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -(k_{01} + k_{21})x_1 + k_{12}x_2 + J_0 + J_1 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = k_{21}x_1 - k_{12}x_2 + J_2 \end{cases} \tag{5.42}$$

(5.42)是常系数非齐次线性微分方程组。令$k_{11} = k_{01} + k_{21}$，将其改写成向量形式$X' = AX + F$，即

$$X = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & -k_{12} \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} J_0 + J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}$$

方程组(5.42)对应的齐次线性微分方程组的特征方程为

$$\lambda^2 + (k_{11} + k_{12})\lambda + (k_{11}k_{12} - k_{12}k_{21}) = 0$$

其判别式为

$$\Delta = (k_{11} + k_{12})^2 - 4(k_{11}k_{12} - k_{12}k_{21}) = (k_{11} - k_{12})^2 + 4k_{12}k_{21}$$

因此$\Delta > 0$，故系数矩阵A有两个互异的特征根

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k_{11}+k_{12}) \pm \sqrt{(k_{11}-k_{12})^2 + 4k_{12}k_{21}}}{2}$$

其相应的特征向量为

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} k_{12}+\lambda_1 \\ k_{21} \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} k_{12}+\lambda_2 \\ k_{21} \end{bmatrix}$$

因此，$\Phi(t) = [\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}]$是方程$X' = AX$的基解矩阵，又因为$\mathbf{X}_0 = -A^{-1}F$是方程$X' = AX + F$的解，故方程$X' = AX + F$的通解为

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} - A^{-1}F$$

即方程组(5.42)的通解为

$$\begin{cases} x_1 = c_1(k_{12}+\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + c_2(k_{12}+\lambda_2)e^{\lambda_2 t} + \dfrac{J_0+J_1+J_2}{k_{21}-k_{11}} \\ \\ x_2 = c_1 k_{21} e^{\lambda_1 t} + c_2 k_{21} e^{\lambda_2 t} + \dfrac{k_{21}(J_0+J_1)+k_{11}J_2}{k_{12}(k_{21}-k_{11})} \end{cases}$$

【例2】 人造卫星的轨道方程

我们来求解本章的例1中得到的微分方程组(5.1)。

当$t = 0$时，卫星在地表面以倾角α，初速度v_0射出，所以，在$t = 0$时，$x(0) = 0, y(0) = R$ ($R = 6370km$为地球半径)。卫星的初速度在x, y轴上的分量分别为

$$\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0\cos\alpha,\quad \frac{dy}{dt}|_{t=0} = v_0\sin\alpha$$

因此，初始条件为

$$x(0) = 0,\ y(0) = R,\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0\cos\alpha,\ \frac{dy}{dt}|_{t=0} = v_0\sin\alpha \tag{5.43}$$

将方程(5.1)两端消去m后，以y乘第一个方程，以x乘第二个方程，然后相减，得

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

因为

$$\frac{d}{dt}(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}) = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}$$

故

$$\frac{d}{dt}(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}) = 0$$

对上式两边积分，得

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_1 \tag{5.44}$$

再以$\frac{dx}{dt}$乘方程组(5.1)中第一个方程，以$\frac{dy}{dt}$乘方程组(5.1)中第二个方程，然后两式相加，得

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{fM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt})$$

由于

$$\frac{d}{dt}[(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2]=2(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2})$$

及

$$\frac{d}{dt}[\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}]=-\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt})$$

从而得

$$\frac{d}{dt}[(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2]=\frac{d}{dt}[\frac{2fM}{\sqrt{x^2+y^2}}]$$

对上式两边积分，得

$$(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+c_2 \tag{5.45}$$

将方程(5.43)和(5.44)相结合，得到与方程组(5.1)等价的低阶方程组

$$\begin{cases} x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1 \\ (\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+c_2 \end{cases} \tag{5.46}$$

作极坐标变换，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，并求导得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \end{cases} \tag{5.47}$$

将上式代入(5.46)，得

$$\begin{cases} r^2\frac{d\theta}{dt}=c_1 \\ (\frac{dr}{dt})^2+r^2(\frac{d\theta}{dt})^2=\frac{2fM}{r}+c_2 \end{cases} \tag{5.48}$$

将(5.48)中的$\frac{d\theta}{dt}$消去，得

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}} \tag{5.49}$$

将(5.48)中的第一个式子和(5.49)相结合，得

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{c_1}\sqrt{c_2 + \frac{2fM}{r} - \frac{c_1^2}{r^2}}$$

这是一个变量分离方程，其解为

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - c)} \tag{5.50}$$

其中，$p = \frac{c_1^2}{fM}$，$e = \sqrt{1 + \frac{c_2 c_1^2}{(fM)^2}}$，$p, e, c$是三个任意常数。

根据初始条件(5.43)，得

$$\begin{cases} c_1 = -Rv_0\cos\alpha \\ c_2 = v_0^2 - \dfrac{2fM}{R} \\ \sin c = \dfrac{\frac{p}{R}}{e} \end{cases} \tag{5.51}$$

(5.50)就是所求的卫星运动轨道的极坐标方程。当$e = 0$时，轨道是圆；当$0 < e < 1$时，轨道是椭圆；当$e = 1$时，轨道是抛物线；当$e > 1$时，轨道是双曲线。