Report4

PB21000235 胡琦浩

2023 年 10 月 9 日

1 问题

设 pdf 函数满足关系式:

$$p'(x) = a\delta(x) + b \cdot exp(-cx) \tag{1}$$

讨论该函数性质并给出抽样方法。

2 方法

2.1 数学推导

2.1.1 $c = 0$ 且 $b \neq 0$

$p'(x) = a\delta(x) + b,$ 积分可得:$p(x) = aH(x) + bx + A$, 式中 A 为积分常数.

由于 $p(x)$ 满足归一化, 则:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (aH(x) + bx + A)\,dx = a + 2A = 1 \tag{2}$$

简洁起见, 令 $a = 1$, 则 $A = 0$. 故 $p(x) = H(x) + bx$

由于 $p(x)$ 非负, 则 $b \in [-1, 0)$

求累计函数:

$$\xi(x) = \int_{-1}^{x} p(t)\,dt = xH(x) + \frac{1}{2}b(x^2 - 1) \in [0, 1] \tag{3}$$

变化可得:

$$bx^2 + 2xH(x) - (b + 2\xi) = 0 \tag{4}$$

当 $x \in [0, 1]$ 时,$H(x) = 1$, 此时:

$$\Delta = 4 + 4b(b + 2) \geq 0 \tag{5}$$

恒成立

解得:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + b(b + 2\xi)}}{b} \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + b(b + 2\xi)}}{b} \tag{7}$$

要满足约束条件, 则 $\xi \in [-\frac{b}{2}, 1]$ 时,x_1 为此方程的解

当 $x \in [-1, 0)$ 时,$H(x) = 0$, 此时:

$$bx^2 - (b + 2\xi) = 0 \tag{8}$$

解得:

$$x_3 = \sqrt{\frac{b + 2\xi}{b}} \tag{9}$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{b + 2\xi}{b}} \tag{10}$$

要满足约束条件, 则 $\xi \in [0, -\frac{b}{2})$ 时,x_4 为此方程的解

综上所述 (令 $b = -1$, 此时 $p(x) = H(x) - x$):

当 $\xi \in [0, \frac{1}{2})$ 时,$x = -\sqrt{1 - 2\xi}$

当 $\xi \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时,$x = 1 - \sqrt{2 - 2\xi}$

2.1.2 $b=0$

依据前面的假定, 易得:$p'(x)=\delta(x), \quad p(x)=H(x), \quad \xi(x)=xH(x)$
当 $\xi=0$ 时,$x\in[-1,0]$
当 $\xi\in(0,1]$ 时,$x=\xi$

2.1.3 $bc\neq 0$

积分可得:$p(x)=aH(x)-\frac{b}{c}e^{-cx}+A$,$A$ 为积分常数
由归一化条件可得:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = a+\frac{b}{c^2}(e^{-c}-e^{c})+2A=1 \tag{11}$$

考虑到 $x\in[-1,1]$ 时,$p(x)\geq 0$ 恒成立, 故令 $a=e^{\frac{1}{3}}+1-3e^{-\frac{1}{3}}=0.246, b=c=\frac{1}{3}$, 计算可得:$A=e^{\frac{1}{3}}$
故:$p(x)=0.246H(x)-e^{-\frac{x}{3}}+e^{\frac{1}{3}}$
由于较难求出反函数, 故使用舍选法:
显然 $p(x)$ 是一个单调递增的函数, 故 $M=p(1)=2e^{\frac{1}{3}}+1-4e^{-\frac{1}{3}}=0.925$
由简单分布的公式: 令 $x=2\xi_1-1, \quad y=M\xi_2$
当 $M\xi_2\leq p(2\xi_1-1)$ 时, 取 $x=2\xi_1-1$. 否则重新选取 (ξ_1,ξ_2)

2.2 代码实现

2.2.1 $c=0$ 且 $b\neq 0$

先利用 Schrage 方法生成 100000 个随机数储存到 ξ, 然后根据公式 (6) 与 (10) 得出 ξ. 然后作概率直方图与理论 p(x) 进行比较

2.2.2 $b=0$

同 2.2.1 的方法

2.2.3 $bc\neq 0$

先生成 2000000 个随机数, 前 1000000 个赋给 ξ_1, 后 1000000 个赋给 ξ_2
然后根据 2.1.3 中的舍选法得到样本 x 即可, 最后作图检验

3 实验结果

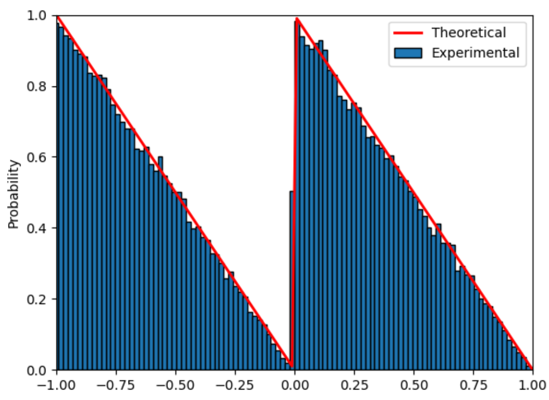

图 1: $c=0$ 且 $b\neq 0$, 样本数 $N=100000$

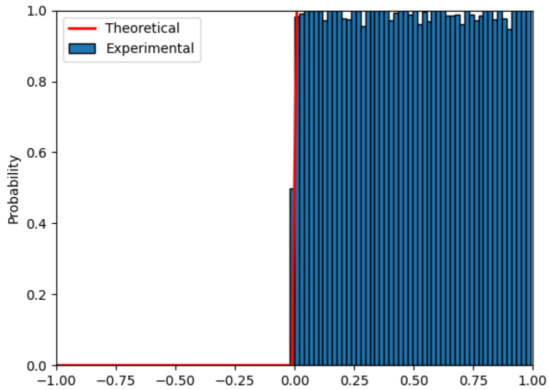

图 2: $b = 0$, 样本数 $N = 100000$

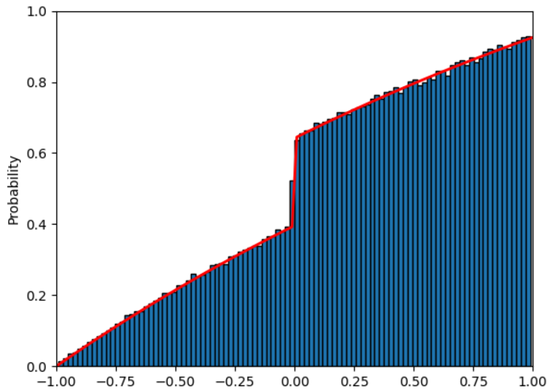

图 3: $bc \neq 0$, 样本数 $N = 540973$

可以看出, 前两种用直接抽样法与理论函数符合的很好, 后面一种用舍选法也与理论函数符合的很好

4 总结

该实验让我熟悉了概率函数密度的性质, 并加深了对舍选法的了解