

Report14

胡琦浩 PB21000235

一、问题

以 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 为迭代方程进行迭代：

- (1) 画出系统状态随参数 λ 的变化图，要求在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态；
- (2) 列出各个倍周期分叉处的 λ 值，求相应的 *Feigenbaum* 常数。

二、方法

3.1 系统状态随参数 λ 的变化图

主要采用迭代法计算：

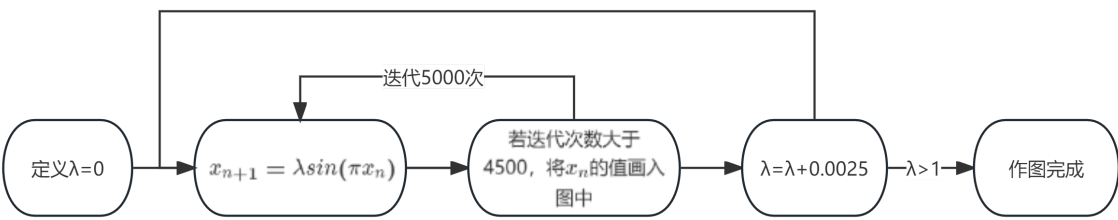


图1：算法流程图

如图所示，只要计算了 $0 < \lambda < 1$ 的情况，一共取了400个值，并定义了初始 $x = 0.5$

3.2 求倍周期分叉处的 λ 值和 *Feigenbaum* 常数

求倍周期分叉处的 λ 值的算法流程：

- (1) 根据得到的倍周期图将 λ 分为 $[0.71, 0.73]$, $[0.83, 0.84]$, $[0.85, 0.87]$, 每隔 10^{-5} 取值（这些范围是倍周期转变点，由下面得到的图可以清晰看出）
- (2) 对应每个 λ 值迭代5000次，在最后500次得到的 x 值储存在 *values* 列表中（认为迭代多次后结果已经稳定）
- (3) 将这 *values* 列表经过如下操作：

```
1 | period = len(set(np.round(values, decimals=8)))
```

`np.round(values, decimals=4)` 是将 *values* 中的所有元素四舍五入到小数点后8位，`set` 则是一个集合(其中的元素具有唯一性)，故可以清晰地得到次 λ 值对应的周期数为多少

- (4) 最后记录 *period* 从 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 8$ 等的 λ 值即可

求 α 的算法流程：

- (1) 根据画出的图将 λ 的范围定为 $[0.77, 0.87]$ ，由于图中只能清晰看得到 $T \leq 8$ 时的图案，故不求 $T = 16$ 及以后的值
- (2) 和上面算法类似，当 $\text{set}(\text{np.round}(\text{values}, \text{decimals}=8))$ 集合内出现一个元素值于0.5的差值小于0.001，则将这个集合储存在字典 my_dict 中，且 $\text{key}=\text{period}$
- (3) 最后输出 my_dict ，然后根据图像的相对位置关系得出 d_m 即可

三、实验结果

3.1 系统状态随参数 λ 的变化图

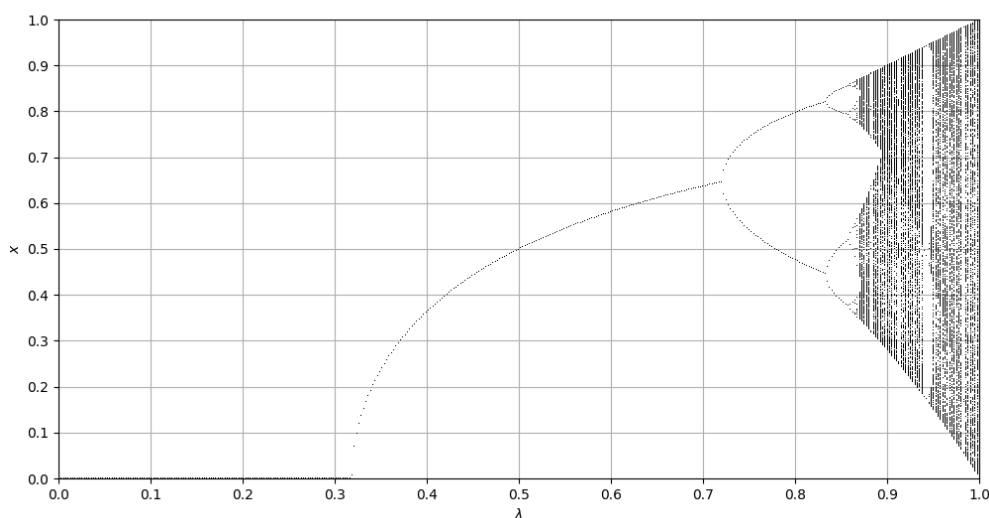


图2：定值状态、倍周期分叉和混沌状态

图中可以清晰的可以看出： $0 < \lambda < 0.318$ 时， x 序列都收敛于0； $0.318 < \lambda < 0.717$ 时，系统处于定值状态； $0.717 < \lambda < 1$ 时，系统处于分别倍周期分叉和混沌状态。

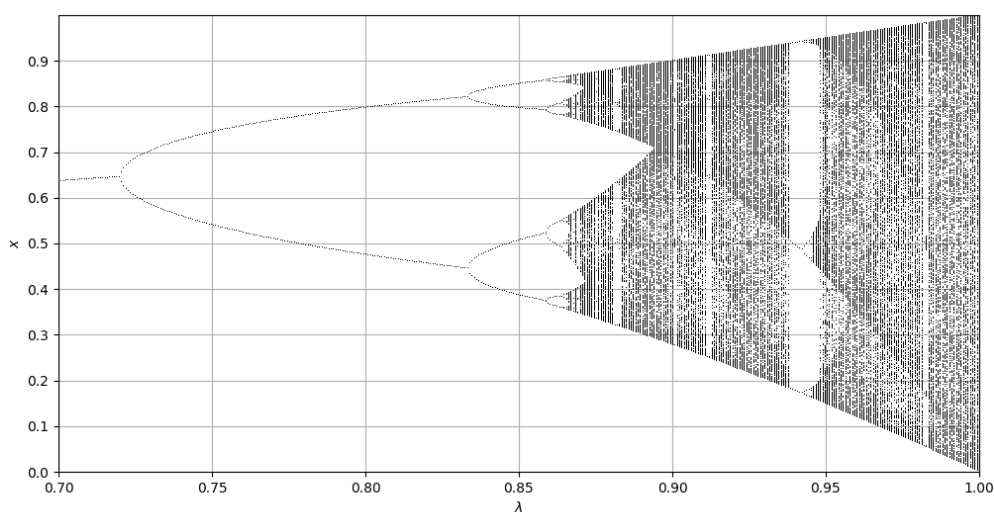


图3：放大后的倍周期和混沌状态

图中可以清晰得看到 $T = 2, 4, 8$ 的分叉点，而 $T = 16$ 并无法清晰看出

3.2 求倍周期分叉处的 λ 值和 *Feigenbaum* 常数

由: $\lambda_\infty - \lambda_m = A\delta^{-m}$, ($m \gg 1$)

则 $\delta = \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m}$

表1：横轴方向倍周期分岔中的标度行为

m	T	λ_m	δ
1	1→2	0.71909	
2	2→4	0.83292	4.424
3	4→8	0.85865	4.721
4	8→16	0.86410	4.658
5	16→32	0.86527	4.680
6	32→64	0.86552	5.000
7	64→128	0.86557	

最后得到的 δ 值需要舍去，因为我的 λ 值精确到 10^{-5} ，而 $m = 6, 7$ 时， λ 值差就在最后一位，故误差较大需舍去

而由图表可以看出与理论值 $\delta = 0.669$ 的值相差不大，在其附近跳动

$\alpha = d_m/d_{m+1}$

表2：纵轴方向倍周期分岔中的标度行为

m	T	d_m	α
1	2	0.27943	
2	4	0.10887	2.56664
3	8	0.04138	2.63098

可以看出结果较接近于理论值 $\alpha = 2.50291$

四、总结

利用迭代法得到 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 得到系统状态随 λ 图，清晰地看出了定值态，倍周期分叉态和混沌态

最后还验证了*Feigenbaum* 常数是一个与迭代方程无关的普适常数

