Report10

PB21000235 胡琦浩

一、问题

Monte Carlo方法研究二维平面上荷电粒子在正弦外电场（~ $sin(\omega t)$）中的随机行走。推导速度自相关函数的表达式，它随时间的变化是怎样的行为？能否模拟得到该自相关函数的曲线？是的话与理论曲线进行比较，否的话讨论理由。

二、方法

2.1 数学推导

由$Langevin$方程:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{B}\vec{v} + \vec{F}(t) + q\vec{E}sin(\omega t) \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\vec{v} + \vec{A}(t) + \vec{K}sin(\omega t) \tag{2}$$

式中：$\tau = mB$，$\quad B = \frac{1}{6\pi\eta a}$，$\quad \vec{K} = \frac{q\vec{E}}{m}$

$\vec{A}$代表随机涨落力，则$< A(t) >= 0$

由式(2)解出$\vec{v}$可得:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0)e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau}\int_0^t e^{t'/\tau}(\vec{A}(t') + \vec{K}sin(\omega t'))\,dt' \tag{4}$$

由定义，二维速度自相关函数为:

$$\begin{aligned} C(t) = \frac{1}{2} < \vec{v}(t)\cdot\vec{v}(0) >= \frac{1}{2} < \vec{v}^2(0)e^{-t/\tau} > +\frac{1}{2}e^{-t/\tau}\int_0^t e^{t'/\tau}(< \vec{A}(t')\cdot\vec{v}(0) > + < \vec{K}\cdot\vec{v}(0)sin(\omega t') >)dt' \\ = \frac{1}{2} < \vec{v}^2(0)e^{-t/\tau} > \end{aligned} \tag{5}$$

2.2 算法实现

取时间间隔足够小，则假设:$d\vec{v} \approx \Delta\vec{v}$，$dt \approx \Delta t$，故(2)式可化为:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{v} = -\frac{\Delta t}{\tau}\vec{v} + (\vec{A} + \vec{K}sin(\omega t))\Delta t \\ \vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v} + \Delta\vec{v} \end{aligned} \tag{6}$$

根据式(6)可以算得每个时间t的速度。

选择参数:

由于$\tau >> \Delta t$，不妨取：$\tau = 1s$，$\Delta t = 10^{-3}s$

总时间：$T = 10s$，此时：$e^{-T/\tau} = e^{-10} \approx 4.54\times 10^{-5} \to 0$满足要求

由于只需保证总时间T内可以观测到足够多的电场震荡周期，故取：$\omega = 2\pi \quad rad/s$

涨落力通常不会很大，故取：$A_{max} = 0.01m/s^2$

由于不知道电磁力的数量级，则分为两种情况讨论：(1)强电场力，此时假设$K = 1m/s^2$ (2)弱电场力，此时假设$K = 0.01m/s^2$

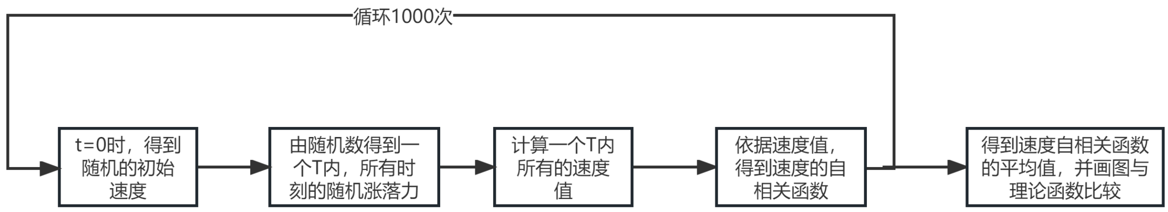

图1：算法的具体流程

三、实验结果

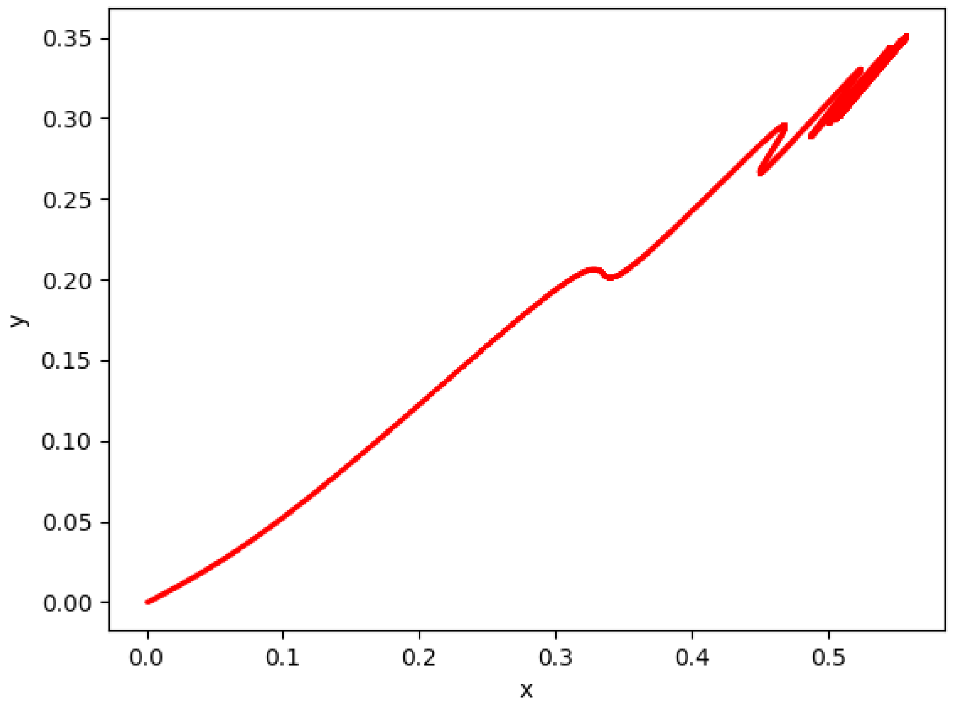

图2：K=1时的随机行走

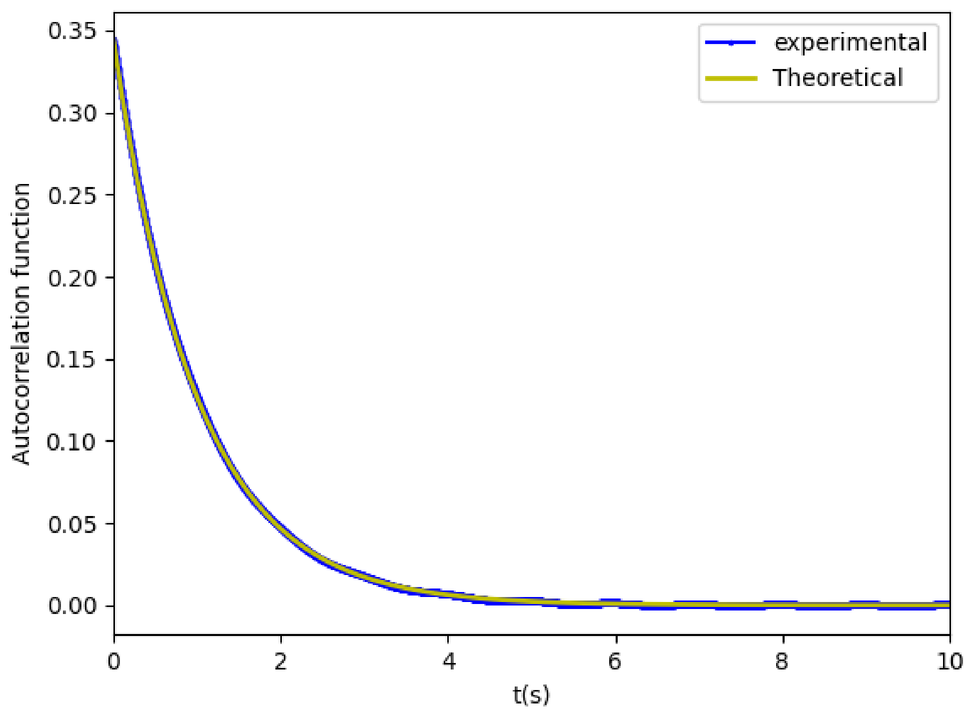

图3：K=1时(强电场)，速度的自相关函数与理论函数的比较

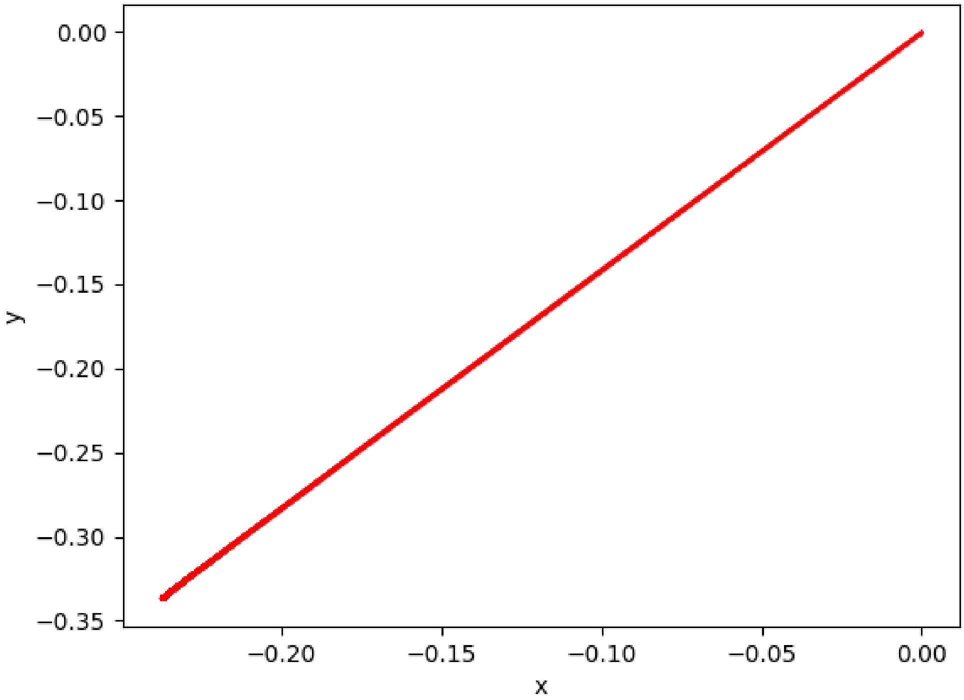

图4：K=0.01时的随机行走

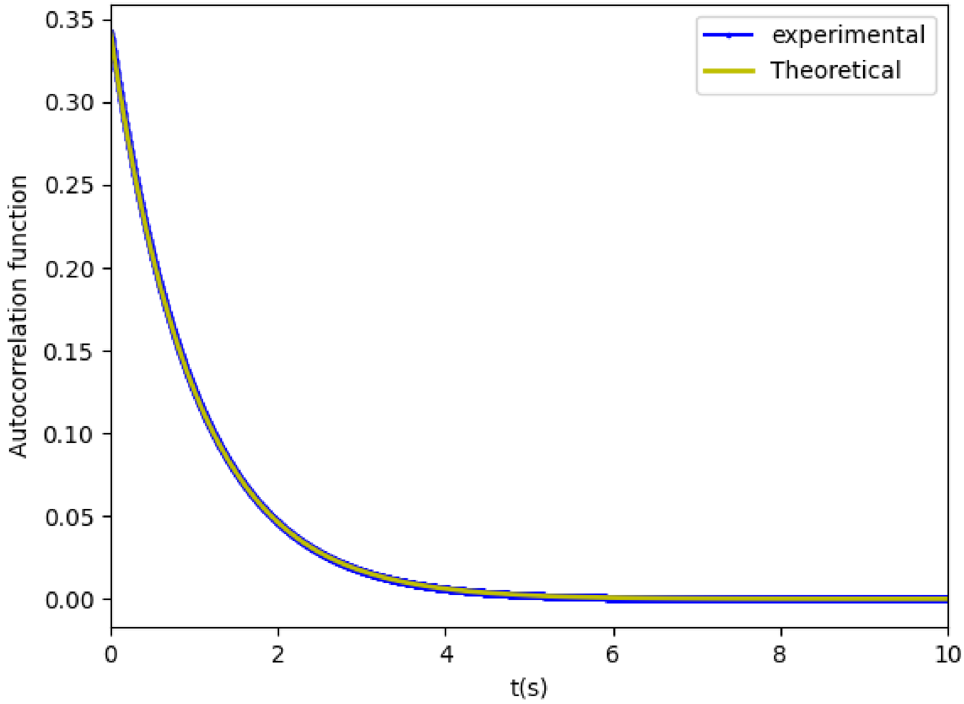

图5：K=0.01时(弱电场)，速度的自相关函数与理论函数的比较

由图示结论可以看出，无论电场强度多大，我们的模拟结果都与理论曲线十分接近，也验证了理论$C(t)$与K无关的结论。

而图3与图5尾处的波动则是由于$< v(0) >$不精确为0导致的。

四、总结

此次实验模拟外加电场下的随机运动，理论上得出速度的自相关函数与外加电场无关的结论，并在实验上验证成功

加深了对随机运动的理解