Report3

胡琦浩 PB21000235

2023 年 10 月 7 日

1 问题

在球坐标系 (ρ, θ, φ) 下，产生上半球面上均匀分布的随机坐标点，给出其直接抽样方法

2 方法

2.1 数学推导

在此题中, 我们不妨认定 $\rho = 1$, 为一个单位球面. 且 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,$\varphi \in (0, 2\pi)$
由于点在球面上均匀分布, 则 $p(\theta, \varphi)$ 为某点在 (θ, φ) 上的概率即为常数.

$$p(\theta, \varphi) = \frac{1}{S_{\text{上半球面}}} = \frac{1}{2\pi} \tag{1}$$

设 $f(\theta, \varphi)$ 为均匀点在球面上分布的概率密度函数, 则显然:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{sin\theta}{2\pi} \tag{2}$$

由于 θ, φ 相互独立, 则:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{sin\theta}{2\pi} = sin\theta \times \frac{1}{2\pi} = f_1(\theta) \times f_2(\varphi) \tag{3}$$

故:

$$\xi_1 = \int_0^\theta sint\, dt = 1 - cos\theta \tag{4}$$

$$\theta = arccos\xi_1 \tag{5}$$

$$\xi_2 = \int_0^\varphi \frac{t}{2\pi}\, dt = \frac{\varphi}{2\pi} \tag{6}$$

$$\varphi = 2\pi\xi_2 \tag{7}$$

2.2 算法实现

首先利用第一题产生随机数的方法生成 4000 个随机数, 前 2000 个储存到 ξ_1 中, 后 2000 个储存到 ξ_2 中. 然后就可以用直接抽样法, 利用公式 (5),(7) 得到 (θ, φ) 的分布, 再利用坐标变换公式:

$$x = sin(\theta)cos(\varphi) \tag{8}$$

$$y = sin(\theta)sin(\varphi) \tag{9}$$

$$z = cos(\theta) \tag{10}$$

得到 (x, y, z) 的分布, 最后利用 python 中的 matplotlib 库画出散点图

3 实验结果

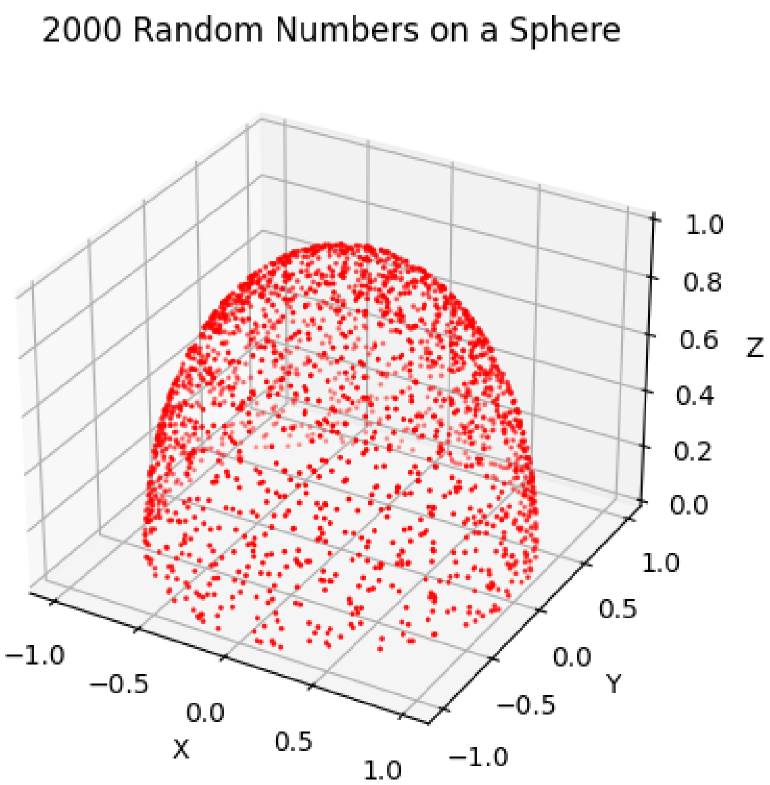

图 1: 实验结果

由图可知, 实验结果较均匀

4 总结

由本实验加强了对直接抽样的了解, 并对 python 作图更加熟练