Report 12

胡琦浩　PB21000235

一、问题

推导正方格子点阵上键逾渗的重整化群变换表达式 $p'=R(p)$，求临界点 p_c与临界指数ν，与正确值相比较。

表1.6.1.3-1 各种点阵下座逾渗与键逾渗的逾渗阈值 p_c

维数	点 阵	座逾渗 p_c	键逾渗 p_c	配位数
2	三角形	0.500000	0.34729	6
2	正方形	0.592746	0.50000	4
2	Kagome	0.6527	0.45	4
2	蜂房形	0.6962	0.65271	3
3	面心立方	0.198	0.119	12
3	体心立方	0.246	0.1803	8
3	简立方	0.3116	0.2488	6
3	金刚石	0.428	0.388	4
3	无规密堆积	0.27(实验值)		
4	简立方	0.197	0.160	8
5	简立方	0.141	0.118	10
6	简立方	0.107	0.094	12

二、方法

2.1 临界点p_c

正方形上的键逾渗模型就是将正方形里面的格点已概率p相连，形成格点间的联通或阻断。重整化群的方法是将某一个元胞在标度变换下不断做粗粒平均，将原来的体系中的元胞数量不断减少，获得体系临界信息的方法。

在本题中选取$b=2$的元胞。

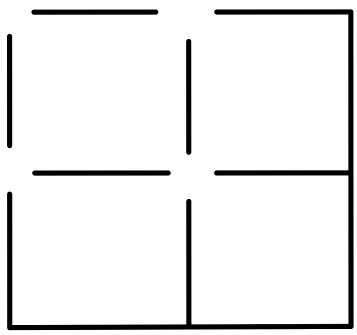

图1：选取的元胞

考虑上下联通形成逾渗通路的情况

(1) 8个键

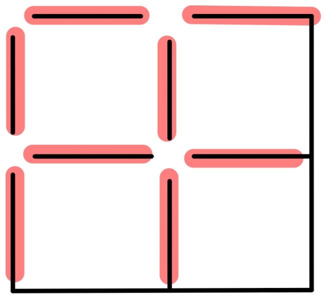

图2：8个键的情况

只有一个，概率为：p^8

(2) 7个键

只需在8个键的图中任意去掉一根线即可，不会影响上下联通性，则概率为：$8p^7(1-p)$

(3) 6个键

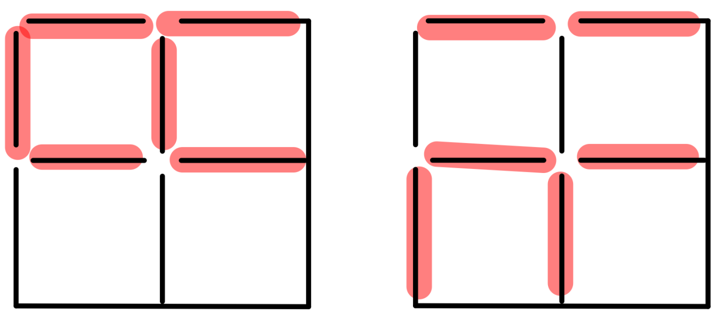

图3：6个键但上下不联通的情况

8个键中随便去除两个，再排除图3的两种情况，则概率为：$(C_8^2-2)p^6(1-p)^2=26p^6(1-p)^2$

(4) 5个键

在图3中任意去掉一个键都无法联通，且另外如图4所示

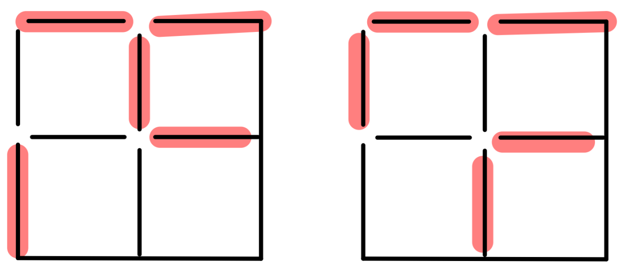

图4：4个键另外的情况

也不能联通，故共计$C_6^1\times2+2=14$种，剩余$C_8^5-14=42$种，则概率为：$42p^5(1-p)^3$

(5) 4个键

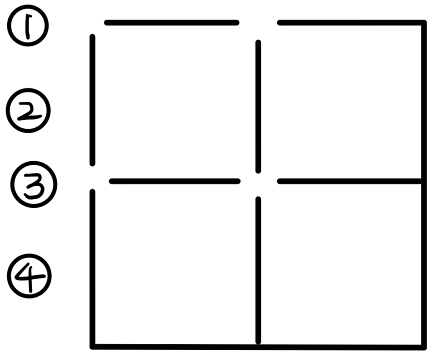

图5：将元胞分为4层

由图可知：每层最多可取两条线段，因此共取4条线段分类讨论(此时上下不联通)：

- ① ② ③ ④层都各取一条：

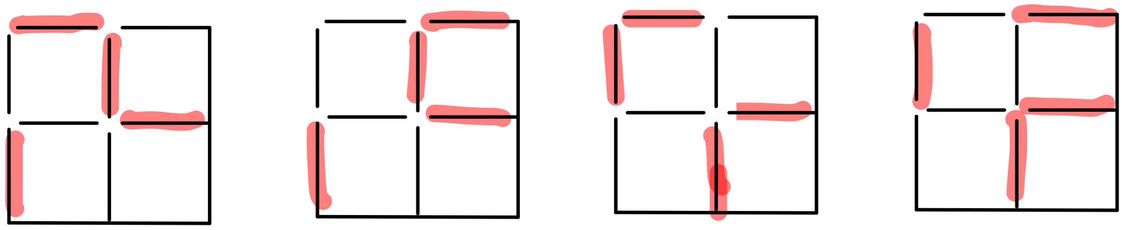

图6：① ② ③ ④各取一条但不联通的情况

有且只有这4种情况

- ① ② ③每层至少1条，共4条

由于缺少第四层的线条，此分类不可能上下联通，故① 取2条，② ③各取1条，一共$C_2^1\times C_2^1=4$种，此外同理令②取2条，① ③也一共4种。因此此情况一共$3\times4=12$种。

- ① ③ ④每层至少1条，共4条

此情况跟上一种一摸一样，缺少第二层的线条，不可能上下联通，故一共12种。

- ① ② ④每层至少1条，共4条

此情况不管是②还是④取两条线段，都会形成上下联通。因此只有①取两条线段。

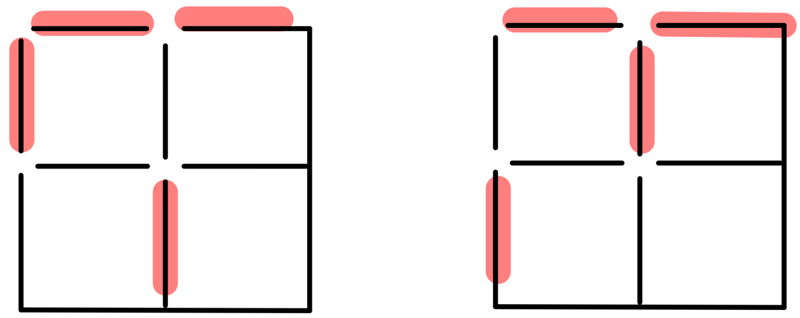

图7：① ② ④每层至少1条，共4条

如图所示，只有2种情况

- 只取两层的线段，每层都取2条线段

①②，①③，①④，②③，③④，只有这5种情况才不构成上下联通，一共$5 \times (C_2^2 \times C_2^2) = 5$种

综上所述，一共由$(4 + 12 + 12 + 2 + 5 =)35$种情况上下不联通，故联通的情况有$(C_8^4 - 35) = 35$种情况，概率为：$35p^4(1-p)^4$

(6) 3个键

由于键数较少，故直接考虑上下联通的情况。

- 3条键全在②④层上

此时无论如何都可以联通，故共$C_4^3 = 4$种

- 只有2条键在②④层上

当这两条键在同一列时，①③层任意选择都可以联通，一共$2 \times (C_2^1 \times C_2^1) = 8$种

当这两条键不在同一列时，显然只有图8中的2种可能：

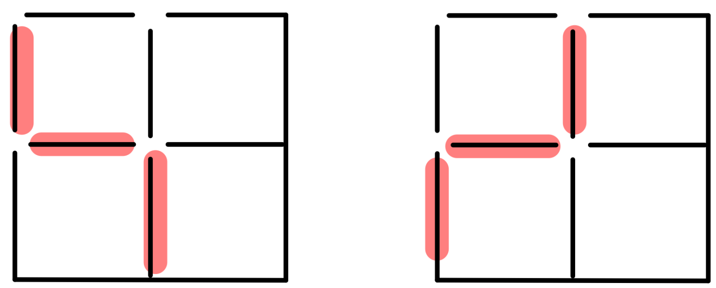

图8：两条键不在同一列

故一共$(4 + 8 + 2 =)14$种可能，概率为：$14p^3(1-p)^5$

(7) 2个键

显然此种情况只有两种可能，即2条键在②④层上并且在同一列，则概率为：$2p^2(1-p)^6$

综上所述

$p' = R(p|b=2) = p^8 + 8p^7(1-p) + 26p^6(1-p)^2 + 42p^5(1-p)^3 + 35p^4(1-p)^4 + 14p^3(1-p)^5 + 2p^2(1-p)^6$

则满足：$p^* = R(p^*)$

代入解得：舍去平凡解0或1，得到$p^* = 0.5$，与表中结论相同

2.2 求解临界指数ν

依据公式：$\nu = \frac{\ln b}{\ln\left(dp'/dp\right)_{p=p^*}}$

代入数据可得：$\nu = \frac{\ln 2}{ln 1.625} = 1.427$，与理论值有一定的偏差