Report8

PB21000235 胡琦浩

一、问题

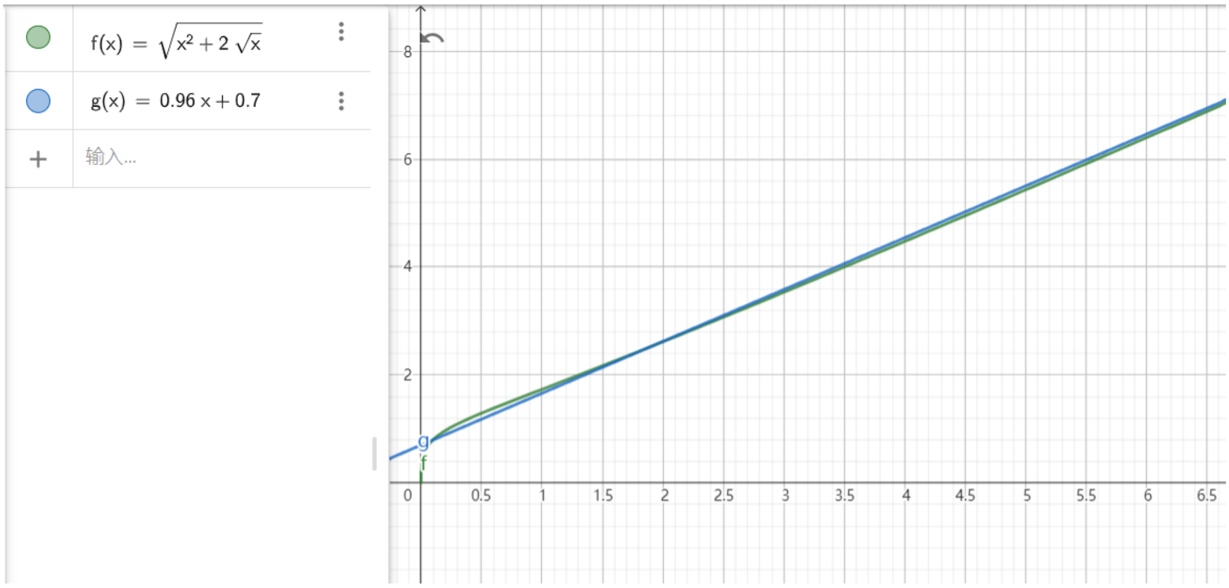
用Monte Carlo方法计算如下定积分，并讨论有效数字位数。

$$\int_0^5 dx\,\sqrt{x^2+2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{7/10} dx\int_0^{4/7} dy\int_0^{9/10} dz\int_0^{2} du\int_0^{13/11} dv\,(5+x^2-y^2+3xy-z^2+u^3-v^3)$$

二、方法

2.1 $\int_0^5 dx\,\sqrt{x^2+2\sqrt{x}}$



采用重要抽样法:

在GeoGebra中选择不同参数的一次函数$g(x)$, 最终选定如图所示的$g(x)=0.96x+0.7$, 可以看出与f(x)吻合的很好。

对$g(x)$归一化处理: $p(x)=\frac{g(x)}{\int_0^5 g(x')\,dx'}=\frac{g(x)}{15.5}=\frac{0.96x+0.7}{15.5}$

则$I_1=\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^5\frac{f(x)}{p(x)}p(x)\,dx=\int_0^5 y(x)p(x)\,dx=<y>$, 式中:$y(x)=\frac{f(x)}{p(x)}$

要得到满足$p(x)$分布的样本，利用直接抽样法: 求$p(x)$的累计函数:$P(x)=\frac{0.48x^2+0.7x}{15.5}=\xi\in[0,1]$，则 $x=\frac{-0.7+\sqrt{0.49+29.76\xi}}{0.96}$

标准值$I_1=15.4390107356$，误差为:$Error=|<y>-15.4390107356|$

标准偏差: $\sigma_s\simeq\frac{5}{\sqrt{N}}\sqrt{<y^2>-<y>^2}$

2.2 $\int_0^{7/10} dx\,\int_0^{4/7} dy\,\int_0^{9/10} dz\,\int_0^2 du\,\int_0^{13/11} dv\,(5+x^2-y^2+3xy-z^2+u^3-v^3)$

直接利用简单抽样的Monte Carlo方法:

$I_2=\frac{1}{N}[\prod_{j=1}^5(b_j-a_j)]\sum_{i=1}^N f(x_i,y_i,z_i,u_i,v_i)=\frac{1}{N}\frac{234}{275}\sum_{i=1}^N f(x_i,y_i,z_i,u_i,v_i)=\frac{234}{275}<f(x,y,z,u,v)>$

标准值$I_2=5.6771209204$，误差为:$Error=\left|\frac{234}{275}<f>-5.6771209204\right|$

标准偏差: $\sigma_s = \frac{234}{275}\frac{\sqrt{<f^2>-<f>^2}}{\sqrt{N}}$

三、实验结果

```
第一个积分值:
总样本数为N=1000,I_1=15.42439623392051, 与标准值的差:0.014614501679490743, 标准偏差:0.07919476445797063
总样本数为N=5000,I_1=15.437915075773487, 与标准值的差:0.0010956598265128292, 标准偏差:0.03143008331104794
总样本数为N=10000,I_1=15.43815604275322, 与标准值的差:0.0008546928467794146, 标准偏差:0.022540410301634166
总样本数为N=50000,I_1=15.437472530282347, 与标准值的差:0.0015382053176526966, 标准偏差:0.013511694122383356
总样本数为N=100000,I_1=15.440750897715418, 与标准值的差:0.0017401621154178315, 标准偏差:0.007044948662392849
总样本数为N=500000,I_1=15.439097040076465, 与标准值的差:8.630447646496009e-05, 标准偏差:0.003266085668922352
总样本数为N=1000000,I_1=15.438984213376123, 与标准值的差:2.652222387666825e-05, 标准偏差:0.0021898689158108713
```

可以看出，随着总样本数的提升，与标准值的差越来越小，在$N > 5 \times 10^5$量级后，有效位数可以达到4位，标准偏差也逐渐变小

```
第二个积分值:
总样本数为N=1000,I_2=5.601947500377724, 与标准值的差= 0.075173420022276, 标准偏差:0.043913304170822155
总样本数为N=5000,I_2=5.643284882442227, 与标准值的差= 0.0338360379577729, 标准偏差:0.019831669621795465
总样本数为N=10000,I_2=5.660796699819352, 与标准值的差= 0.016324220580647975, 标准偏差:0.0141289066812998
总样本数为N=50000,I_2=5.68607612677451, 与标准值的差= 0.00895520637450975, 标准偏差:0.006301782874825872
总样本数为N=100000,I_2=5.675657203903426, 与标准值的差= 0.0014637164965742855, 标准偏差:0.004941562885672373
总样本数为N=500000,I_2=5.677021775067485, 与标准值的差= 9.914533251542679e-05, 标准偏差:0.0028094324619729358
总样本数为N=1000000,I_2=5.676076589673481, 与标准值的差= 0.001044330726519327, 标准偏差:0.0020039940276311585
```

分析同上，特别的$N = 5 \times 10^5$时的误差比$N = 10^6$小，可能是由于前者偶然的产生的随机数比后者更好，不过是小概率。有效位数随着N的增大而变多，可以达到4位

四、总结

此实验学习了Monte Carlo方法求解积分的具体过程，当N足够大时，积分的值精确度越高