# Bernstein 過程(reciprocal 過程)とその推定について

**童 祺俊(Accenture 株式会社)**

※本発表内容は所属組織の見解を代表するものではありません

## 1. Bernstein 過程(reciprocal 過程)

Bernstein 過程(または reciprocal process)とは通常の確率過程とは異なり、現在までの情報だけではなく未来からの情報の双方向によって特徴づけられる確率過程である

> **定義 1.1** : $\{X_t\}$を$a \le t \le b$で定義される確率過程とする.$X_t$が Bernstein 過程であるとは$\mathcal{F}_s$:forward filteration,$\mathcal{F}_t$ : backward filteration に対して $P(X_t \in A|\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A|X_t, X_s)$を満たす確率過程である.

bernstein 過程$X_t$の周辺分布は時刻$s$の初期分布と$t$の終端分布そして遷移確率カーネルによって定まる.

> **定義 1.2** : $\{X_t\}$

bernstein 過程の周辺分布は対となる発展方程式によって記述される.

## 2. Schrödinger bridge とエントロピー正則化最適輸送

Bernstein 過程の定義の通り,一般に Bernstein 過程はマルコフ性を持たない。Bernstein 過程かつマルコフ性を持つ確率過程は Schrödinger bridge に帰着できることが知られている。Schrödinger bridge はエントロピー正則化最適輸送と密接に関係し,その発展方程式の作用素は以下のシュレーディンガー方程式の解によって求まる. この解はエントロピー正則化最適輸送問題の双対問題の双対変数と一致する.

## 3. Bernstein 過程の応用

### 3.1. 複素行列値確率過程への拡張

量子力学の文脈において、2 対の発展方程式の作用素を複素行列値ハミルトニアンとその随伴$H, H^*$で表すことで、量子状態を記述する Bernstein 過程を構成することができる.

> **定義 3.1.1** : パウリタイプの Bernstein 過程の密度関数は以下の発展で支配される.
> $\begin{cases} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} = H\eta(x,t) \\ \frac{\partial \eta^*(x,t)}{\partial t} = H^*\eta(x,t) \end{cases}$, 境界条件 $\begin{cases} \eta(x,a) = \chi(x) \\ \eta^*(x,b) = \chi^*(x) \end{cases}$

### 3.2. Schrödinger bridge からのサンプリング

Schrödinger bridge からのサンプリングは以下のランジェバン方程式によって構成され、オイラー丸山法によってサンプリングが可能となる。

### 3.3. 平均場ニューラルネットワークによる軌道推定

## 4. オープンプロブレム