

Bernstein 過程(reciprocal 過程)とその応用

童 祺俊[Tong Qijun](Accenture 株式会社)

※本発表内容は所属組織の見解を代表するものではありません

Bernstein 過程とは

確率過程において、補間を扱う汎用的な問題設定である。

Bernstein 過程(または reciprocal process)とは通常確率過程とは異なり、過去からの順方向と未来からの逆方向の発展の双方によって特徴づけられる確率過程であり、マルコフ過程の拡張として定義される。

定義: 確率過程 $\{X_t\}_{0 \leq t < 1}$ が Bernstein 過程であるとは前向きと後向きのフィルトレーション $\mathcal{F}_s^+, \mathcal{F}_t^-$ に対して $P(X_t \in A | \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A | X_t, X_s)$ を満たす確率過程である。

マルコフ性を持つ Bernstein 過程

マルコフ性を持つ Bernstein 過程は初期分布・終端分布・遷移カーネル h を用いて特徴づけられる。

命題: $h(x, t, y)$ を遷移核, $X_0 \sim \mu, X_1 \sim \nu$ とする。このとき、Bernstein 過程 $\{X_t\}_{0 \leq t < 1}$ の時刻 t での密度関数 Q は

$$q(x, t_1; z, t_2; y, t_3) := \frac{g(x, t_1 - t_2, z)g(z, t_2 - t_3, y)}{g(x, t_3 - t_1, y)} \text{ として}$$

$$Q(x, t; F, r; y, s) = \int q(x, t; z, r; y, s) dz$$

Schrödinger bridge とエントロピー正則化最適輸送

Schrödinger bridge はマルコフ性を持つ Bernstein 過程の重要な例である。Schrödinger bridge は発展方程式の作用素は以下のシュレーディンガー方程式の解によって求まる。bernstein 過程の周辺分布は対となる発展方程式によって記述される。この解はエントロピー正則化最適輸送問題の双対問題の双対変数と一致することが知られている。

Bernstein 過程の応用

マルコフ性を持つ Bernstein 過程は既に以下のような応用がある。

Bernstein 過程を用いた量子系の記述

量子力学の文脈において、2 対の発展方程式の作用素を複素行列値ハミルトニアンとその随伴 (H, H^*) で表すことで、量子状態を記述する Bernstein 過程を構成することができる。これは複素数行列値連続確率過程+スピンのジャンプ過程を融合したマルコフ Bernstein 過程によるモデリングである。

定義: パウリタイプの Bernstein 過程の密度関数は以下の発展で支配される。

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = H \eta(x, t) \\ \frac{\partial \eta^*(x, t)}{\partial t} = H^* \eta^*(x, t) \end{cases}, \text{境界条件 } \begin{cases} \eta(x, a) = \psi(x) \\ \eta^*(x, b) = \psi^*(x) \end{cases}$$

Schrödinger bridge による生成モデル/サンプリング

Schrödinger bridge からのサンプリングは以下のランジェバン方程式によって構成され、オイラー丸山法によってサンプリングが可能となる。

Schrödinger Bridge による軌道推定

シングルセル解析などにおいて、観測値から途中の対象の経路を推定することが

オープンプロブレム

Schrödinger Bridge 以外のマルコフ性を持つ

Bernstein 過程のモデル化

マルコフ過程の確率制御,最適輸送理論によるモデル化は

非マルコフ過程の Bernstein 過程

マルコフ性を持たない Bernstein 過程は、一般の非マルコフ過程よりは良い性質を持っている。そこには非マルコフ過程よりも扱いやすい 定式化が存在するのではないかと考える

逆問題解析への応用

確率的なシステム(例えば量子系)において、観測の機会が限られる場合、限られた観測から、その中間の状態を推定する逆問題への応用が考えられる。Bernstein 過程の発展方程式を近似する Physics-informed machine learning を構築できるのではないかと考えている

参考文献