9.11状态观测器

1　全维状态观测器

- 问题的提出

状态反馈需要系统全部状态变量，实际中，大部分状态变量难以或不能直接量测获得，当状态变量不能测量时，提出建立状态观测器（或状态估计器、状态重构器）。利用输出y=cx重新构造系统的状态x。当重构状态向量的维数与被控对象状态的维数相等时，观测器称全维状态观测器。

- 观测器模型

设有线性定常系统

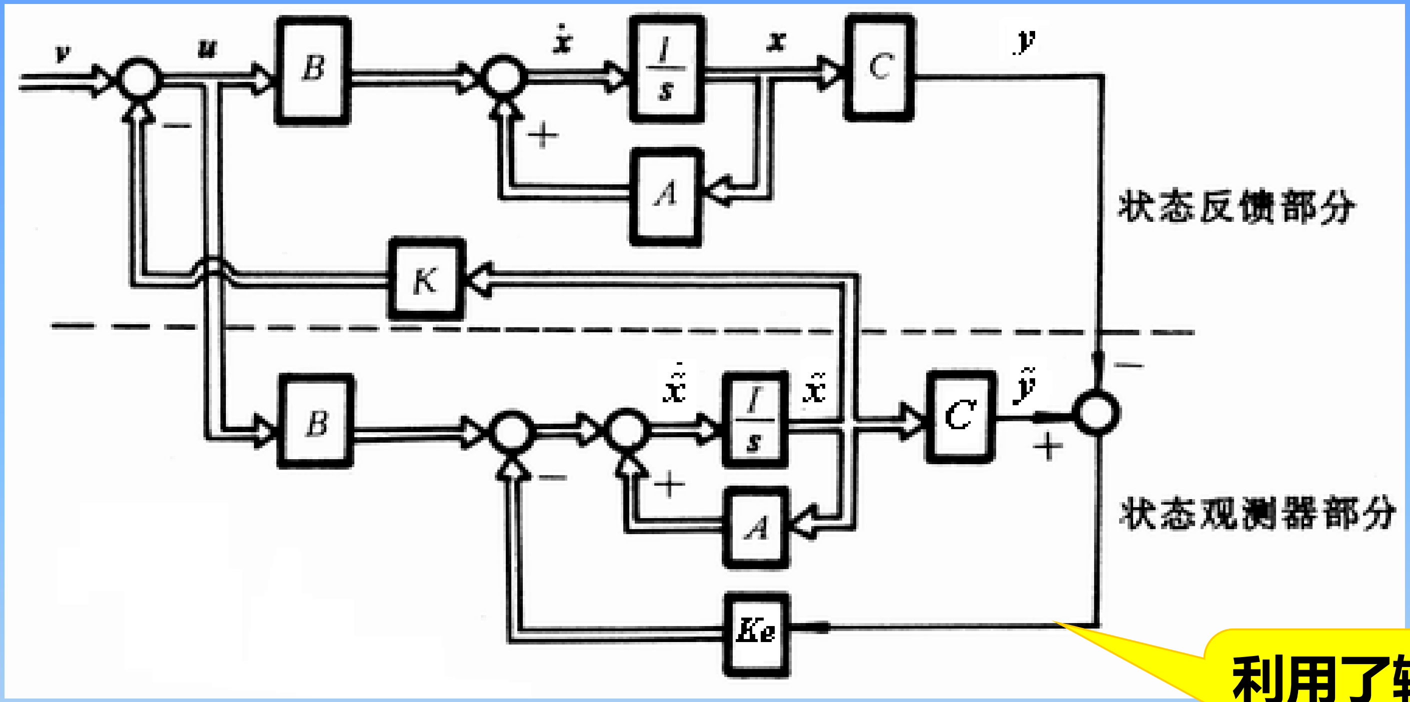
$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$$

构造一计算机模拟系统

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu \qquad \tilde{y} = c\tilde{x}$$

若有 $\dot{x}$ 与 $\dot{\tilde{x}}$ 初始值相同时，便可由模拟的状态变量 $\dot{\tilde{x}}$ 估计得 $\dot{x}$ 。

当 $\dot{x}$ 与 $\dot{\tilde{x}}$ 有差异时，输出 y 与 $\tilde{y}$ 也有差，可利 $y-\tilde{y}$ 对 $\dot{\tilde{x}}$ 观测器模型进行修正。将 $y-\tilde{y}$ 反馈至 $\dot{\tilde{x}}$ 使 $x-\tilde{x} \to 0$ 。



利用了输出至 $\tilde{x}$ 的反馈。

观测器模型为 $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e c(x - \tilde{x})$

若对于任何初始值都能满足 $\lim_{t\to\infty}[\tilde{x}(t) - x(t)] = 0$

则 $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - \tilde{y})$ 可作为系统的状态观测器

- 线性反馈阵K_e的选取

什么条件下，能满足 $\lim_{t\to\infty}[\tilde{x}(t)-x(t)]=0$ ？

K_e如何选定？

➢ **K_e存在的条件**

先求出 $\tilde{x}-x$ 的微分方程。

考虑系统的状态方程和观测器状态方程：

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

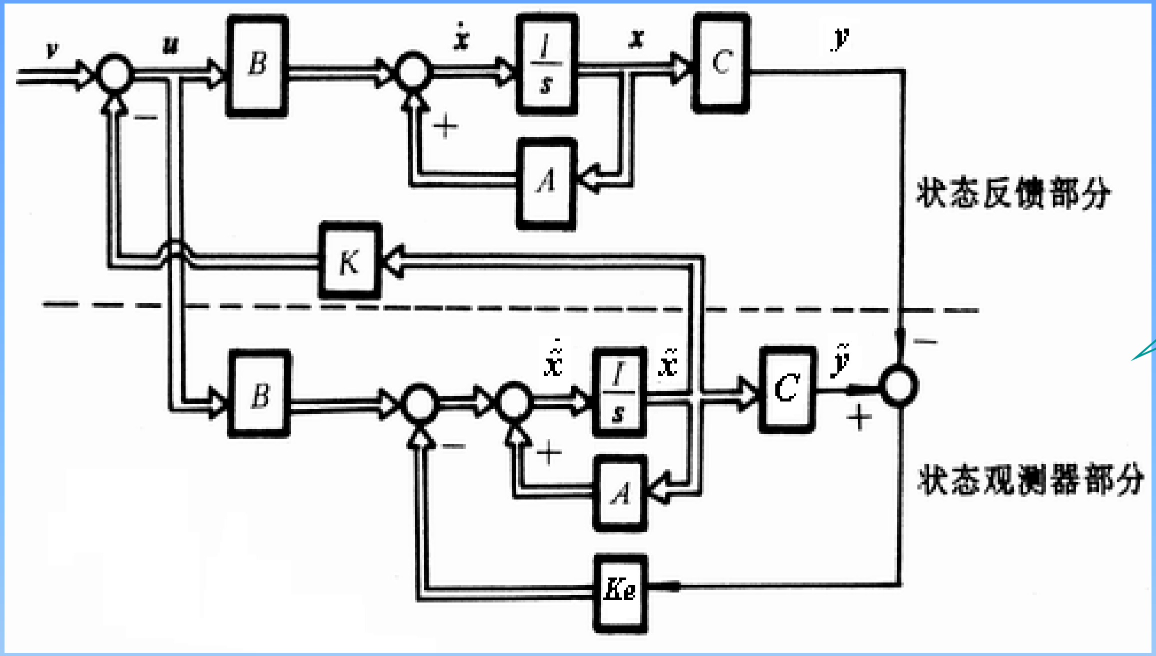
$$\dot{\tilde{x}}=A\tilde{x}+Bu+K_e c(x-\tilde{x})$$

两方程相减，得

$$\dot{\tilde{x}}-\dot{x}=(A-K_e c)(\tilde{x}-x)$$

解得：

$$x(t)-\tilde{x}(t)=e^{(A-K_e C)(t-t_0)}[x(t_0)-\tilde{x}(t_0)]$$



由图分析K_e的存在性

若被控系统（A,B,C）可观测，则其状态可由形如

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e c(x - \tilde{x}) = (A - K_e c)\tilde{x} + Bu + K_e y$$

的全维状态观测器给出估计值，其中矩阵K_e按任意极点配置的需要选择。

➢ K_e的选取

$\lim\limits_{t\to\infty}[\tilde{x}(t)-x(t)]=0$ **的衰减速率取决于估计器的极点配置。**

为满足$\tilde{x}$逼近x的要求，希望$\tilde{x}$越快接近x越好，即希望状态估计器的极点配置在s平面离虚轴较远的地方（比被估计系统的极点更负），但实际中，矩阵K_e参数的选取不能太大。

1、实现时，会受到装置实际条件的限制（如容量、饱和、过热、应力过大等）；

2、观测器频带增宽，输入u和输出y的噪声将引起$\tilde{x}$的更大噪声，对其它噪声的干扰也很灵敏；

在实际应用中，K_e 选择得比对象稍快一点即可。

- 线性反馈阵K_e的计算

若将系统变换成可观测标准型，设计K_e很方便，可按以下步骤：

定义变换矩阵P，使得

$$P=(WR)^{-1}$$

式中R是可观测性矩阵

$$R^T=[C^T \vdots A^T C^T \vdots \cdots \vdots (A^T)^{n-1} C^T]$$

且对称矩阵W由下式定义，即

$$W=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a_i **是由下式给出的特征方程的系数**

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

由于假设系统是完全可观测的，所以矩阵WR的逆存在。在线性变换$x = P\xi$作用下，系统可变换成可观测标准形

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_o \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_o \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_o \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = CP = [0 \ \ 0 \ \ \cdots \ \ 0 \ \ 1]$$

仿照状态反馈进行极点配置方法中状态反馈矩阵K的确定，有

$$K_e = P\begin{bmatrix} a_n^* - a_n \\ a_{n-1}^* - a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix} = (WR)^{-1}\begin{bmatrix} a_n^* - a_n \\ a_{n-1}^* - a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix}$$

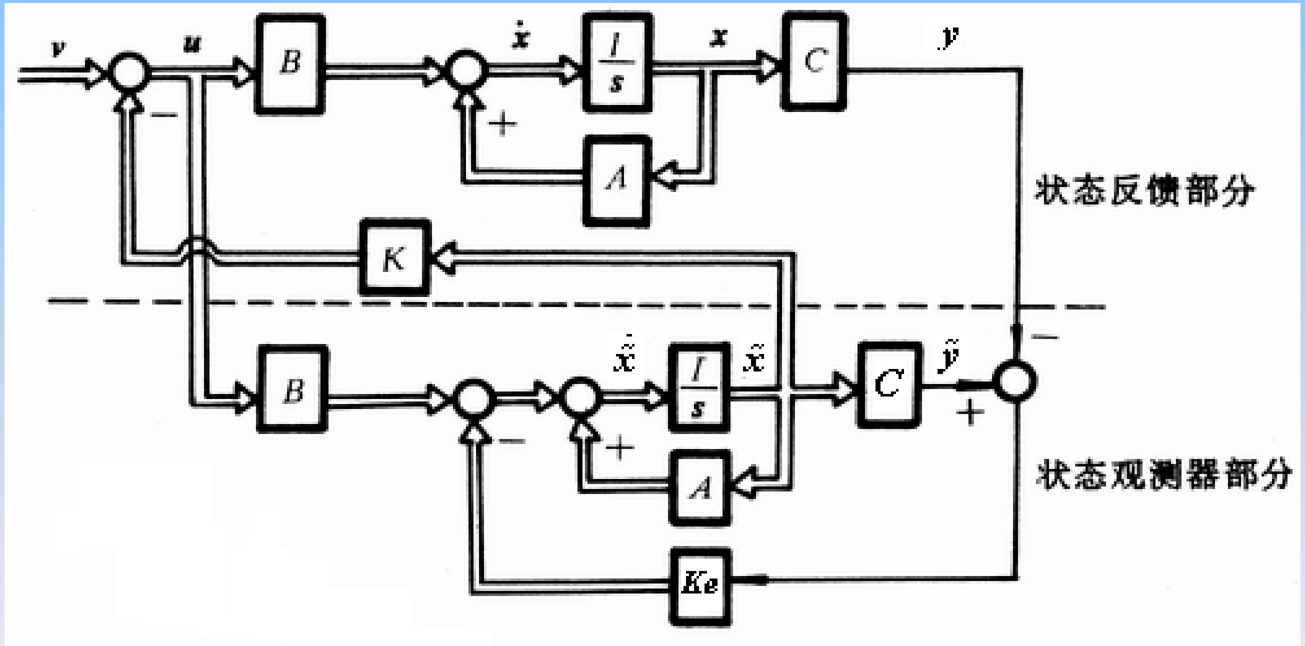
式中， a_i、$a_i^*, i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ **分别是原系统特征多项式和观测器期望特征多项式的系数。上式确定了所需的状态观测器增益矩阵。**

一旦选择了所期望的特征值（或所期望的特征方程），只要系统完全可观测，就能设计全维状态观测器。

• 观测器引入对闭环系统的影响

· 根据系统性能要求，在系统中引入状态反馈，配置期望极点。 当引入观测器后，状态反馈矩阵K 需重新设计？

· 状态观测器设计好后，状态反馈的引入，对观测器反馈矩阵K_e的影响？



状态完全能控、能观线性定常系统的状态方程为

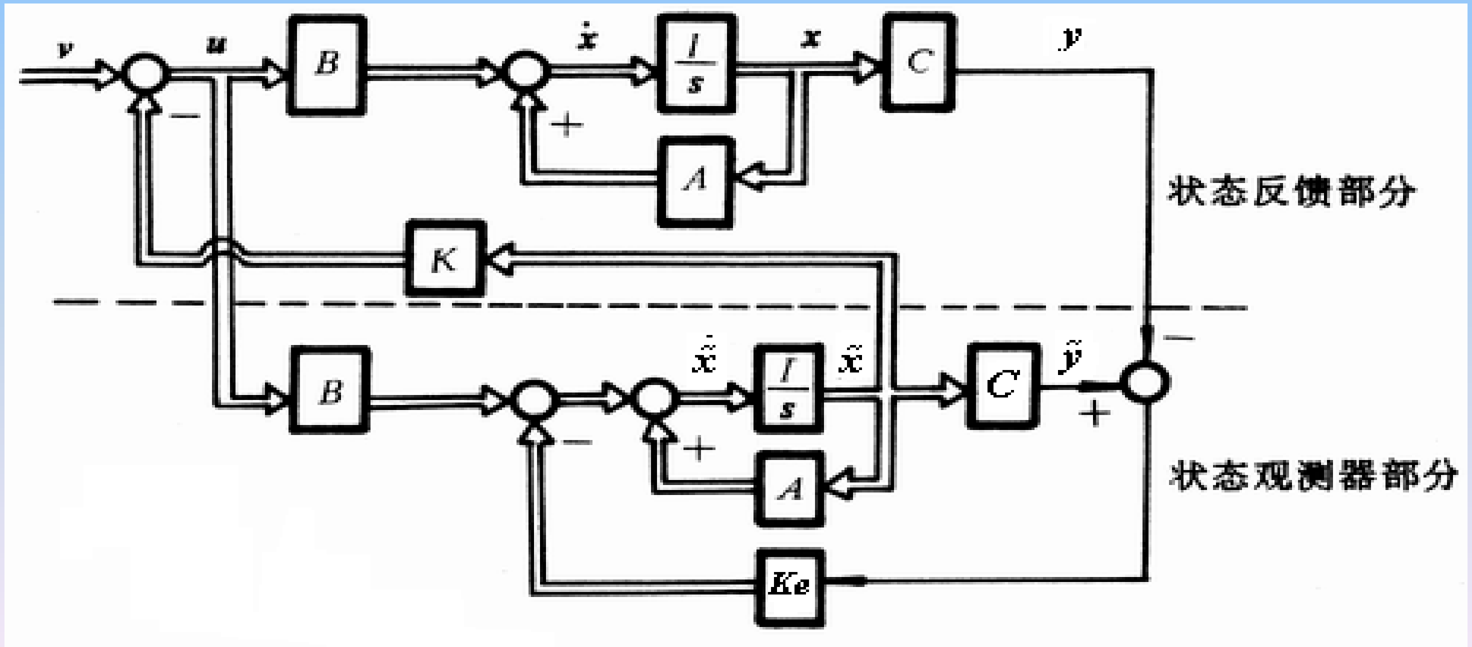
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

引入状态观测器，将观测状态 $\tilde{x}(t)$反馈到输入端，

$$u = v - K\tilde{\mathbf{x}}$$

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x} + Bv = (A - BK)x + BK(x - \tilde{x}) + Bv$$



系统实际状态与估计状态的差为

$$\dot{\tilde{x}}-\dot{x}=(A-K_e c)(\tilde{x}-x)$$

$$\dot{x}=Ax-BK\tilde{x}+Bv=(A-BK)x+BK(x-\tilde{x})+Bv$$

将上二式合并，

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{x}}-\dot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-K_e C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}-x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}v$$

该系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix}sI-A+BK & -BK\\ 0 & sI-A+K_e C\end{vmatrix}=0$$

即 $$|sI-A+BK||sI-A+K_e C|=0$$

极点配置单独设计时产生的极点

观测器单独设计时产生的极点

说明观测-状态反馈控制系统的闭环极点包括由极点配置单独设计产生的极点和由观测器单独设计产生的极点。

如果系统的阶次为n，则观测器也是n阶的（如果采用全维状态观测器），整个闭环系统的特征方程为$2n$阶的。

分离定理

若受控系统（***A*, *B*, *C***）可控可观测，用状态观测器的估计值形成状态反馈时，其系统的极点配置和观测器设计可分别独立进行，即***K***与***Ke***可分别独立进行设计。

2 降维状态观测器

设状态向量x为n维向量，输出向量y为可量测的m维向量。由于m个输出变量是状态变量的线性组合，所以m个状态变量不必进行估计，观测器只需估计n-m个状态变量即可。这样的n-m阶观测器称降维观测器。

- **降维观测器模型的建立**

设可观测线性系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

引入非奇异线性变换

$$x = Q^{-1}\overline{x}$$

$$Q_{n\times n}=\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}\quad \begin{matrix} \text{(n-m)行} \\ \text{m行} \end{matrix}$$

C为$(m\times n)$矩阵，D是使Q非奇异的任意$(n-m)\times n$矩阵。

将x分为$\bar{x}_1$和$\bar{x}_2$两部分，其中其中$\bar{x}_2$是m个可由y直接获得的状态。

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u \qquad \bar{y}=\bar{C}\bar{x}$$

其中， $\bar{x}=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$

$$\bar{A}=QAQ^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \qquad \bar{B}=QB=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{C}=CQ^{-1}=C\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}^{-1}$$

因为

$$C = C\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} = \overline{C}\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}$$

有

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} \underset{n-m列}{0} & \underset{m列}{I} \end{bmatrix} \quad m行$$

所以

$$\overline{y} = \overline{C}\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \overline{x}_2$$

状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} u$$

可写成

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u$$

$$\dot{\bar{y}} = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}_2 u$$

令 $v = \bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u$

则v可作为n-m维子系统的输入

令 $z = \dot{\bar{y}} - \bar{A}_{22}\bar{y} - \bar{B}_2 u$

z可作为n-m维子系统的输出

n-m维子系统的动态方程为

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + v$$

$$z = \bar{A}_{21}\bar{x}_1$$

被控对象可观测，子系统亦可观测，n-m维子系统的状态观测器为

$$\dot{\tilde{\bar{x}}}_1 = \bar{A}_{11}\tilde{\bar{x}}_1 + v + K_e(z - \tilde{z})$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - \tilde{y})$$

➢ K_e的设计

状态观测器可进一步写成

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\bar{x}}}_1 &= \bar{A}_{11}\tilde{\bar{x}}_1 + v + K_e(z - \tilde{z}) \\
&= \bar{A}_{11}\tilde{\bar{x}}_1 + \bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u + K_e(\bar{A}_{21}\bar{x}_1 - \bar{A}_{21}\tilde{\bar{x}}_1) \\
&= (\bar{A}_{11} - K_e\bar{A}_{21})\tilde{\bar{x}}_1 + (\bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u) + K_e(\dot{y} - \bar{A}_{22}\bar{y} - \bar{B}_2 u)
\end{aligned}
$$

再选状态变量，消去导数项 $\dot{y}$

$$w = \tilde{\bar{x}}_1 - K_e y$$

$$\dot{w} = \dot{\tilde{\bar{x}}}_1 - K_e \dot{y}$$

$$\dot{w} = (\bar{A}_{11} - K_e\bar{A}_{21})w + (\bar{B}_1 - K_e\bar{B}_2)u + [(\bar{A}_{11} - K_e\bar{A}_{21})K_e + \bar{A}_{12} - K_e\bar{A}_{22}]\bar{y}$$

由以上分析可知，状态反馈向量由两部分组成，

观测器给出

$$\tilde{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\bar{x}}_1 \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w + K_e \bar{y} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} K_e \\ I_m \end{bmatrix} \bar{y} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & K_e \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

输出 $\bar{y} = \bar{x}_2$

降维观测器的误差

$$\dot{\bar{x}} - \dot{\tilde{\bar{x}}} = (\bar{A}_{11} - K_e \bar{A}_{21})(\bar{x}_1 - \tilde{\bar{x}}_1)$$

选择K_e可任意配置状态观测器的极点，并使误差有满意的衰减速率。