9.10 极点配置

- **问题的提法**

给定单输入单输出线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^1, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times 1}$$

选取线性反馈控制律为 $u = \boldsymbol{v} - K\boldsymbol{x}$

式中 $K \in R^{1\times n}$ **为 <u>状态反馈增益矩阵</u> 或 <u>线性状态反馈矩阵</u>。**

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x + Bv$$

矩阵 $A - BK$ **的特征值即为闭环系统的极点，适当选择反馈矩阵K的值，则可使矩阵** $A - BK$ **构成一个渐近稳定的矩阵，并将系统的闭环极点配置到期望位置，该方法称为极点配置。**

- **极点可配置条件**

假设控制输入u的幅值是无约束的。如果选取控制规律为

$$u = v - Kx$$

K为线性状态反馈矩阵。

现在考虑极点的可配置条件，有如下极点配置定理。

定理　线性定常系统可通过线性状态反馈任意配置其全部极点的充要条件是，被控系统状态完全可控（该条件对单输入－单输出、多输入－多输出系统都适合）。

证明：(以单输入单输出系统为例证明)

1．充分性

若系统（A、b)可控，则存在非奇异线性变换 $x = P\bar{x}$ ，可使系统成为可控标准型

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u$$

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

引入状态反馈 $\quad u = v - kx = v - kP\bar{x} = v - \bar{k}\bar{x}$

则 $\quad \bar{k} = kP = [\bar{k}_n \quad \bar{k}_{n-1} \quad \cdots \bar{k}_2 \quad \bar{k}_1]$

闭环系统的系数矩阵为

$$\bar{A} - \overline{bk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (-a_n - \bar{k}_n) & (-a_{n-1} - \bar{k}_{n-1}) & & \cdots & (-a_1 - \bar{k}_1) \end{bmatrix}$$

由可控标准形，可写出系统的闭环特征方程

$$\det[sI-(\bar{A}-\overline{bk})]=s^n+(a_1+\bar{k}_1)s^{n-1}+\cdots+\left(a_{n-1}+\bar{k}_{n-1}\right)s+a_n+\bar{k}_n$$

n阶特征方程中n个系数，可通过 $\bar{k}_1,\ \bar{k}_2,\cdots\bar{k}_n$ 来独立设置，即 $(\bar{A}-\overline{bk})$ 的特征值可以任意选择，亦即系统的极点可以任意配置。

2 必要性

如果系统（A，b）不可控，说明系统有状态不受u的控制，则引入状态反馈时，就不可能通过控制来影响不可控极点。

或用反证法证明：假设系统状态不可控，则有

$$rank[\ B\vdots AB\vdots\cdots\vdots A^{n-1}B\ ]=q<n$$

必有状态变量与控制u无关，因此，不可能实现全状态反馈，于是不可控子系统的特征值就不能任意配置。所以，为了任意配置矩阵A-BK的特征值，系统必须是状态完全可控的。

- 变换矩阵P的求取

若系统完全能控，则存在非奇异变换，使系统变换为可控标准型。

定义非奇异变换矩阵为 $P=QW$

$$Q=[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

$$W=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 a_i **为特征多项式的系数**

$$\det[sI-A]=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

- **配置极点的算法（单输入－单输出）**

对于给定系统（A,b)和期望的闭环特征值$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

确定$1\times n$ **维的反馈增益向量k的步骤：**

1 **考察系统的可控性。如果系统是状态完全可控的，则可按下列步骤继续。**

2 **计算A的特征多项式**

$$\det[sI-A]=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

3 **计算由期望闭环特征值决定的期望特征多项式**

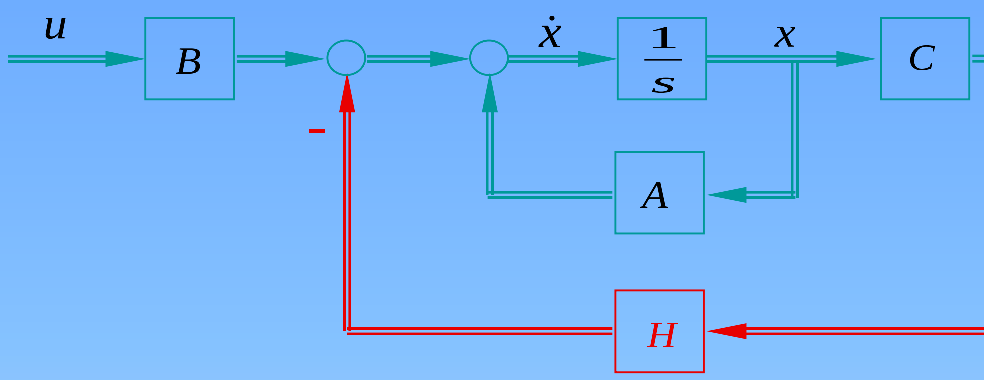
$$a^*(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)$$
$$=s^n+a_1^*s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}^*s+a_n^*$$

4 计算 $\bar{k}=[a_n^*-a_n \quad a_{n-1}^*-a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1^*-a_1]$

5 计算变换矩阵 $P=QW$ **，若给定状态方程已是可控标准型，则** $P=I$

6 状态反馈矩阵为 $K=\bar{K}P^{-1}$

输出反馈与极点配置



$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} - \boldsymbol{h}y \qquad y = C\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - \boldsymbol{h}C)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \qquad y = C\boldsymbol{x}$$

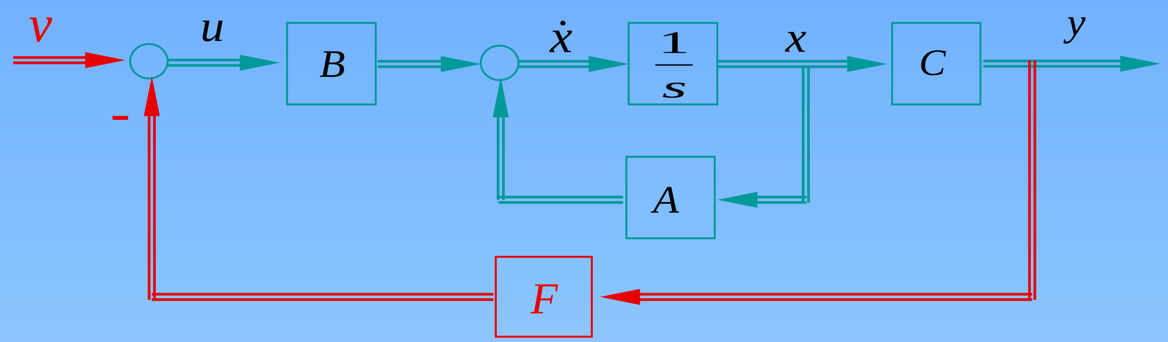
定理　用输出到状态微分的反馈任意配置闭环极点的充要条件是：受控系统状态完全可观测。

证明：**以多输入单输出系统为例，利用对偶定理证明。若（A, B, C）可观测，则对偶系统（A^T, C^T, B^T）可控，由状态反馈极点配置定理可知，（$A^T - C^T h^T$）的特征值可任意配置。**

由于（$A^T - C^T h^T$）特征值与（$A^T - C^T h^T)^T = A - hC$ 的特征值相同，故当且仅当（A, B, C）可观测时，可以任意配置$A - hC$ 的特征值。

为根据期望的闭环极点位置来设计输出反馈矩阵h的参数，只需将期望的系统特征多项式与该输出反馈系统特征多项式 $|\lambda I - (A - hC)|$ 相比较即可。

当采用**输出至输入的反馈**时（如图），以多输入单输出系统为例，反馈矩阵 $F \in R^{p\times 1}$ ，



$$u = v - Fy$$

$$\dot{x} = (A - BFC)x + Bv$$

若令输出反馈 $FC = K$ 等价为状态反馈，适当选择F可使极点任意配置。但是，当比例的状态反馈变换为输出反馈时，则F阵不是常数阵，给物理实现带来困难。

应用输出至输入的比例反馈，不一定能实现极点任意配置的例题。

例1 双输入单输出系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

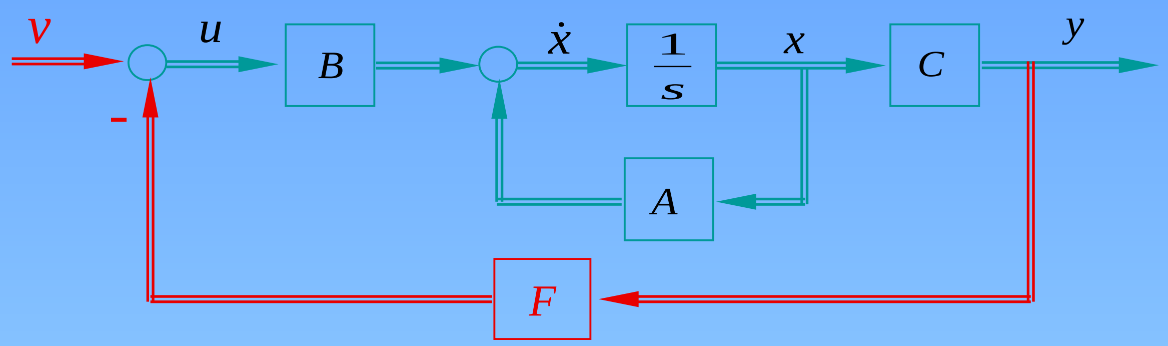
特征多项式为

$$|\mathrm{sI}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}s & 0 & -5\\ -1 & s & 1\\ 0 & -1 & s+3\end{vmatrix}=s^3+3s^2+3s-5$$

系统不稳定，但系统能观测。

讨论采用输出至输入的反馈，配置极点，使系统稳定。

当采用输出至输入的反馈时（如图）， $F \in R^{2\times1}$



$$u = v - Fy$$

$$\dot{x} = (A - BFc)x + Bv$$

确定线性反馈阵$F=[f_1, f_2]^T$。

$$A-BFC=\begin{bmatrix}0&0&5\\1&0&-1\\0&1&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&0\\1&-2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\f_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&5+2f_1\\1&0&-1-f_1+2f_2\\0&1&-3-f_2\end{bmatrix}$$

闭环特征多项式为

$$\left|sI-(A-BFC)\right|=\begin{bmatrix}s&0&-2f_1-5\\-1&s&f_1-2f_2+1\\0&-1&s+f_2+3\end{bmatrix}$$

$$=s^3+(f_2+3)s^2+(f_1-2f_2+1)s-(2f_1+5)$$

若取 $f_1=-3,\quad f_2=-2$ **能使系统稳定，但不能实现极点任意配置。**

例2 单输入双输出系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

特征多项式为

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & 1\\ 1 & 0 & s\end{vmatrix}=s^3-1$$

系统不稳定。

$$Q=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$rankQ=3$$

系统可控。

$$R^T=\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$rankR=3$ ，系统能观测。

讨论采用输出至输入的反馈，配置极点，使系统稳定。

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BFc})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Bv}$$

$$A-BFC=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1 & f_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -f_1 & 0 & -1-f_2\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left|sI-(A-BFc)\right|=\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ f_1 & s & 1+f_2\\ 1 & 0 & s\end{bmatrix}=s^3+f_1s-(f_2+1)$$

无论如何选取F都不能使系统稳定，极点配置无意义。

引入反馈对系统性能的影响

反馈的引入，使系统的系数矩阵发生了变化，对系统的性能影响？

可控性、可观性、稳定性、系统性能？

- **状态反馈和输出反馈可使系统稳定。**
- **状态反馈不影响系统的可控性，但可能改变系统的可观性。**
- **输出至状态微分的反馈不影响系统的可观性，但可能改变系统的可控性。**
- **输出至参考输入的反馈不改变系统的可控性和可观性。**
- **状态反馈和输出反馈不改变系统的零点。**