8.7　奇点与极限环

绘制相轨迹的目的为了分析系统的运动特性，而系统的平衡点有无穷条相轨迹离开或达到，也就是说，平衡点附近的相轨迹最能反映系统的运动特性。平衡点又称为奇点。另一反映系统运动特性的相轨迹是极限环，它是相平面上一条孤立的封闭的相轨迹，反映了系统的自激振荡状态。下面分别进行讨论它们与系统运动特性的关系。

8.7.1　奇点

由上一讲所述，奇点为系统平衡点，它由方程组 $\begin{cases}\dot{x}_1 = P(x_1, x_2) = 0 \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2) = 0\end{cases}$ 联立求解得到 (x_{10}, x_{20})。

为了研究奇点附近相轨迹的形状及其运动特性，需将 $P(x_1, x_2)$ 和 $Q(x_1, x_2)$ 在平衡点附近展开成泰勒级数。考虑一般情况并忽略高阶无穷小，可令 $x_{10} = x_{20} = 0$，有：

$$P(x_1, x_2) = \left.\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)} x_1 + \left.\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)} x_2$$

$$Q(x_1,x_2)=\left.\frac{\partial Q(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)}x_1+\left.\frac{\partial Q(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)}x_2$$

令：

$$a=\left.\frac{\partial P(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)}\qquad b=\left.\frac{\partial P(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)}$$

$$c=\left.\frac{\partial Q(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)}\qquad d=\left.\frac{\partial Q(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)}$$

则有等效系统为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=ax_1+bx_2\\ \dot{x}_2=cx_1+dx_2\end{cases}$$

特征方程为：

$$\left|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right| = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

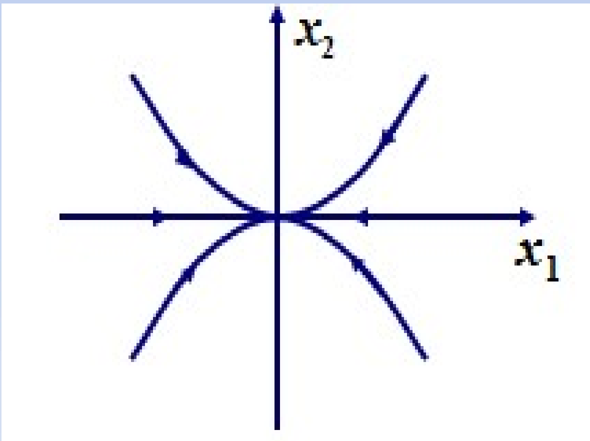
特征方程的根为：

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

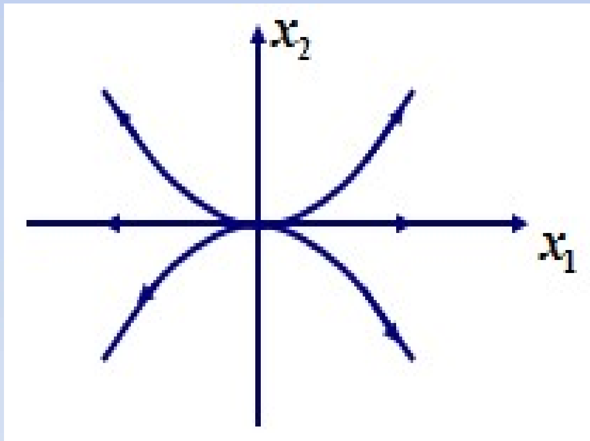
根据特征方程根的性质，可将奇点分为如下5种情况：

（1）同号相异实根

此时$(a+d)^2>4(ad-bc)$，若$a+d<0$，则特征方程的根同为负实根，则微分方程的解是稳定的，此时称为稳定的节点，相轨迹如图8.7.1所示；若$a+d>0$，则根同为正实根，系统不稳定，此时的奇点称为不稳定的节点，对应的相轨迹如图8.7.2所示。



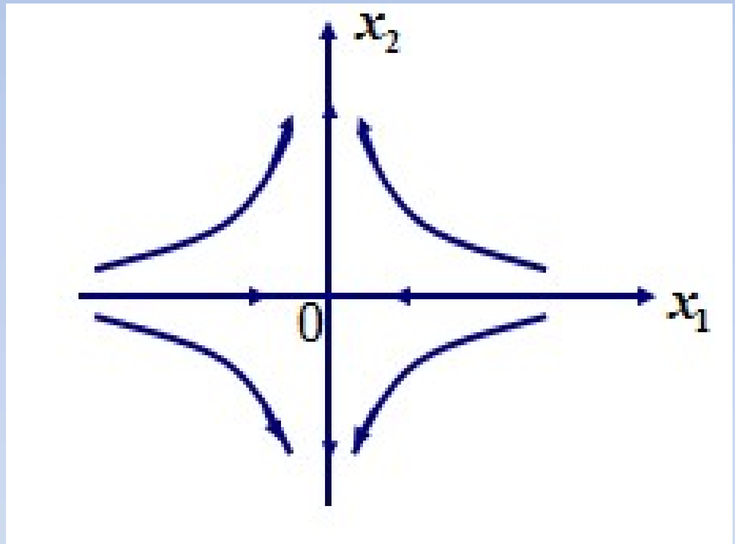
8.7.1 稳定节点



8.7.2 不稳定焦点

（2）异号实根

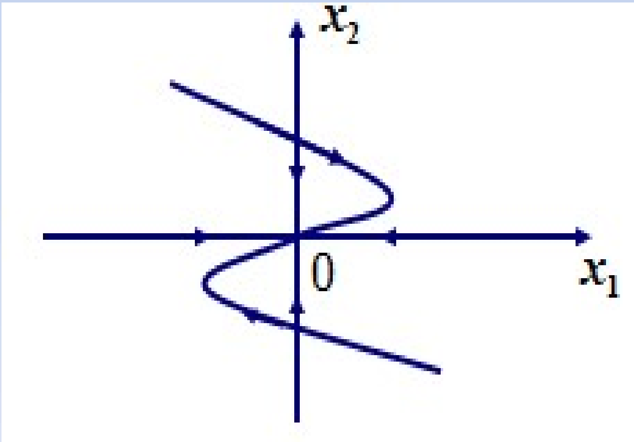
此时$ad-bc<0$，一个根大于0,一个根小于0，此时奇点称为鞍点。相轨迹如图8.7.3所示。



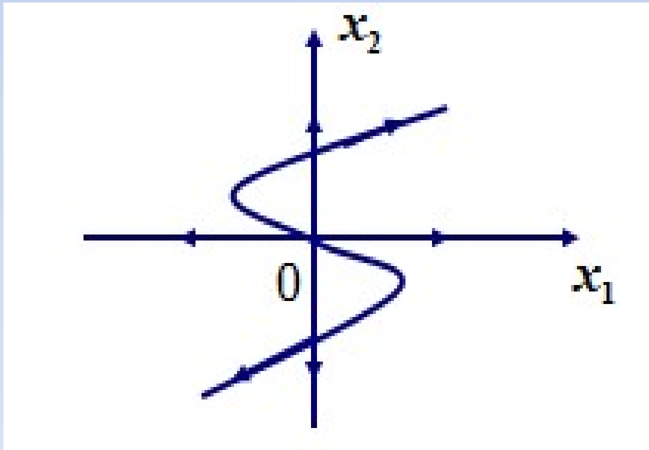
8.7.3　鞍点

（3）重根

此时$(a+d)^2=4(ad-bc)$ 若$a+d<0$，则系统方程的根为两个相等的负实根，此时奇点为退化的稳定节点，相应的相轨迹如图8.7.4所示；若$a+d>0$，则特征方程的根为两个相等的正实根，此时奇点称为退化的不稳定节点，对应的相轨迹如图8.7.5所示。



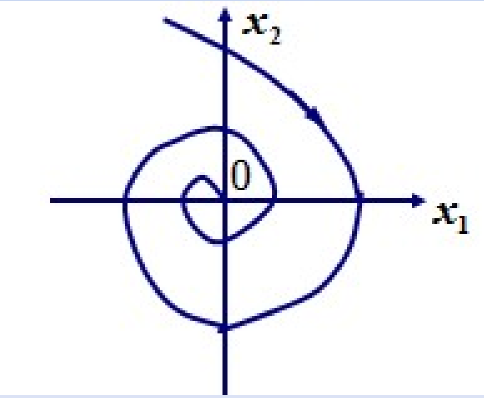
8.7.4 退化的稳定节点



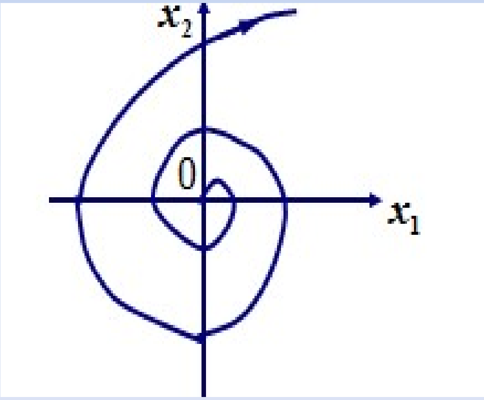
8.7.5 退化的不稳定节点

（4）共轭复根

此时满足条件$(a+d)^2 < 4(ad-bc)$, 特征方程的根为一对共轭复根。若$a+d<0$, 方程的根为一对具有负实部的共轭复根，对应的相轨迹如图8.7.6所示，系统产生衰减振荡，此时奇点称为稳定焦点；若$a+d>0$, 则为一对具有正实部的共轭复根，对应的根轨迹如图8.7.7所示，此时奇点称为不稳定的焦点。



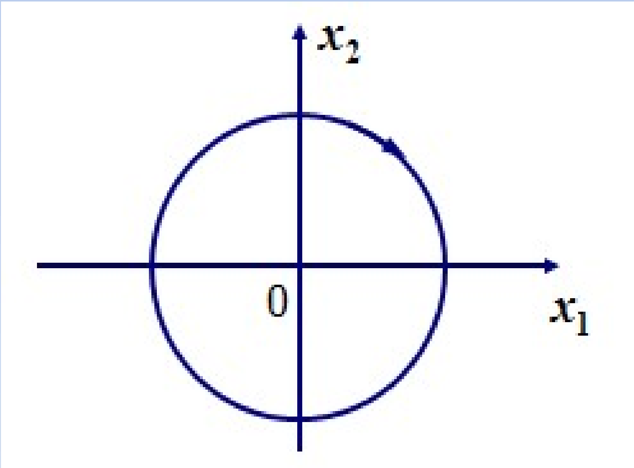
8.7.6 稳定焦点



8.7.7 不稳定焦点

（5）纯虚数根

此时满足条件$(a+d)=0$，$ad-bc>0$。特征方程的根为一对共轭纯虚根。此时的奇点称为中心点，对应的相轨迹如下图8.7.8所示，系统会产生等幅振荡。

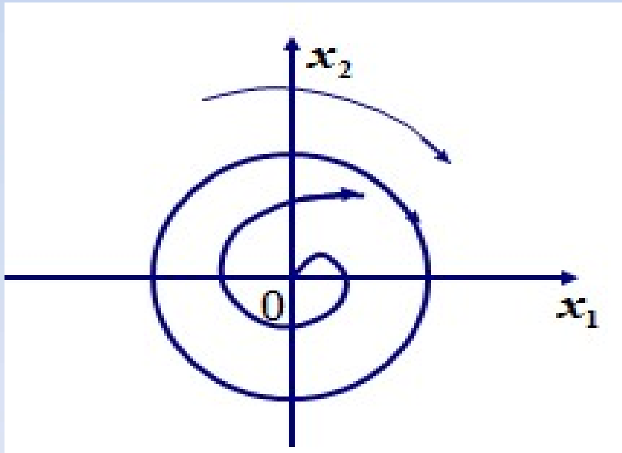


8.7.8　中心点

8.7.2 极限环

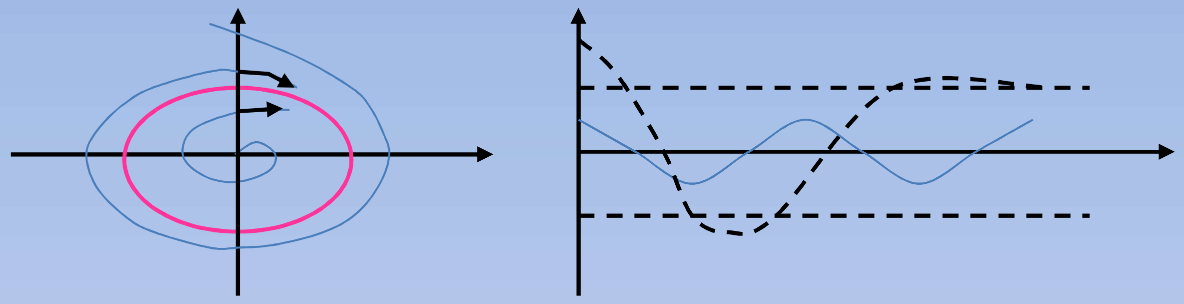
相平面图上的一根孤立的封闭相轨迹称为极限环,它对应的系统会产生自激振荡，如图8.7.9所示。

由于极限环作为相轨迹，它既不趋于平衡点，也不趋于无穷远，而是一个自闭的环。所以它是相平面图的一种奇线，它把相平面分隔成内部平面和外部平面，相轨迹不能从内部直接穿过极限环而进入外部平面，反之亦然。

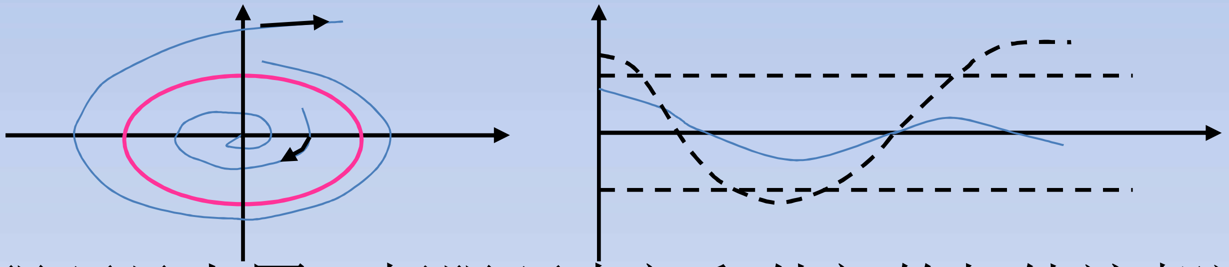


8.7.9 极限环

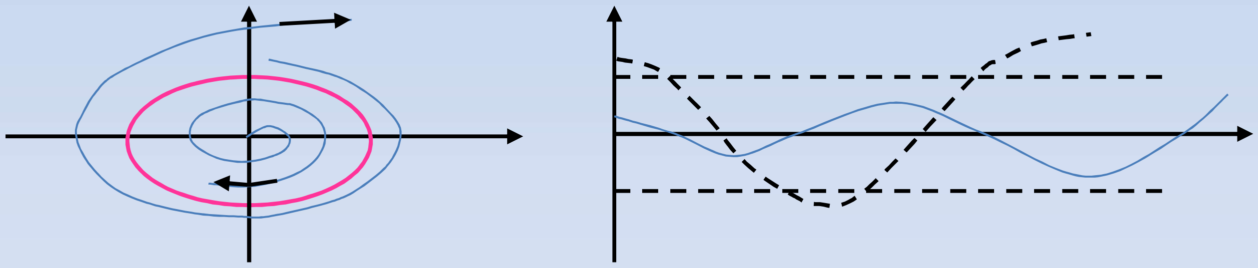
极限环具有稳定的、不稳定的和半稳定的。



稳定的极限环见上图，极限环内部和外部的相轨迹都向极限环逼近。



不稳定的极限环见上图，极限环内部和外部的相轨迹都逐渐远离极限环而去。



半稳定的极限环见上图，要么内部的相轨迹向极限环逼近，外部的相轨迹远离而去；要么外部的相轨迹向极限环逼近，外部的相轨迹远离而去。

将奇点类型的分析和极限环类型的判断两者结合起来就能对整个系统的运动特性做出分析。以下题为例：

例一：已知一非线性系统方程为：
$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
分析系统的运动特性。

解： 令$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta$ 有：
$$\dot{x}_1 = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$
$$\dot{x}_2 = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

带入系统方程得：
$$\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta} = r\sin\theta + r\cos\theta(1-r^2) \qquad \cdots(1)$$
$$\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta} = -r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2) \qquad \cdots(2)$$

由(2)得：
$$\dot{\theta} = \frac{-r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2) - \dot{r}\sin\theta}{r\cos\theta} \qquad \cdots(3)$$

联立(1)(3)得：
$$\dot{r} = r(1-r^2)$$

由(1)得：

$$\dot{r}=\frac{r\sin\theta+r\cos\theta(1-r^2)+r\sin\theta\cdot\dot{\theta}}{\cos\theta} \quad \cdots(4)$$

联立(2)(4)得： $\dot{\theta}=-1$ 即：$\begin{cases}\dot{r}=r(1-r^2)\\ \dot{\theta}=-1\end{cases}$

因此有两种情况： $r=0$ 或 $1-r^2=0$

(1) r=0, 此时$x_1=0, x_2=0$为系统的奇点，有：

$$a=\left.\frac{\partial P(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)}=1 \qquad b=\left.\frac{\partial P(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)}=1$$

$$c=\left.\frac{\partial Q(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(0,0)}=-1 \qquad d=\left.\frac{\partial Q(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(0,0)}=1$$

特征方程的根为：

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+d\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}=1\pm j$$

显然奇点(0,0)为不稳定的焦点。

(2)$r=1$ 此时在相平面上为一封闭相轨迹。

假定$r<1$,取$r=R_1$,有：$\dot{r}=R_1(1-R_1^{\;2})>0$

因此封闭相轨迹内部的相轨迹向单位圆逼近。

当$r>1$时,取$r=R_2$,有：$\dot{r}=R_2(1-R_2^{\;2})<0$

因此单位圆外部的相轨迹也向单位圆逼近。

综上所述，单位圆为稳定的极限环，奇点为不稳定的焦点，说明平衡点的运动特性是不稳定的。而单位圆外部的相轨迹是向单位圆逼近，振荡幅值会越来越小，从这个意义上分析,系统产生的是衰减振荡，并且是有界的。