7.6 线性采样系统的稳定性

（1）一般概念

稳定性是指线性采样系统的重要问题，一个系统只有稳定才能正常工作。

在线性连续系统的分析中，我们曾经指出，稳定系统的特征方程的根全部位于s平面的左半部。这一概念也适用于线性采样系统。

线性采样系统特征方程可以令脉冲传递函数的分母为零而得到，特征方程根的位置就确定了系统是否稳定。为了在z平面上讨论线性采样系统的稳定性，我们必须知道s平面和z平面的对应关系。

（2）s平面与z平面的映射关系

由于z变换中定义：$z=e^{sT}$，设 $s=\sigma+j\omega$则 $|z|=e^{\sigma T}$

$\angle z=\omega T$，得

$$\begin{cases} \sigma>0 & |z|>1 \\ \sigma<0 & |z|<1 \\ \sigma=0 & |z|=1 \end{cases}$$

这样就有如下图所示的s平面与z平面的映射关系

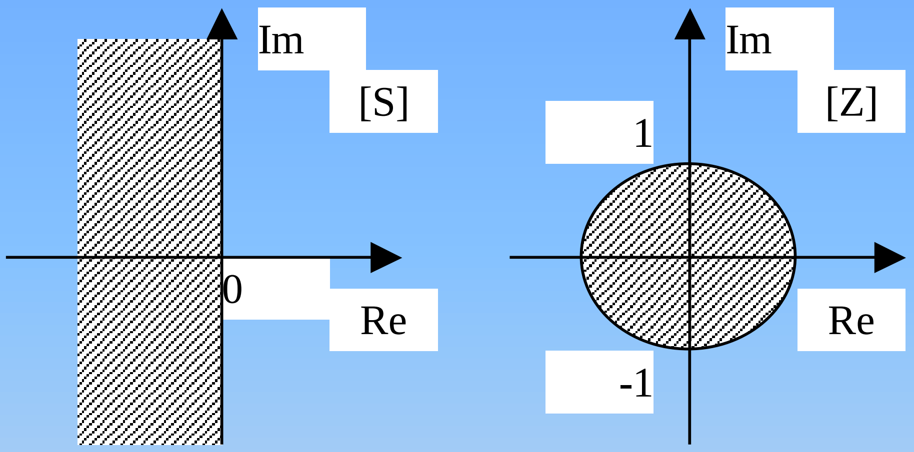
分析：离散系统的特征方程实际上是将s平面的信息，通过z变换转移到了z平面。考察

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{j\omega T}$$

$$\sigma < 0 \qquad |z| = \frac{1}{e^{-T\sigma}} < 1$$

$$\sigma = 0 \qquad |z| = 1$$

$$\sigma > 0 \qquad |z| = e^{T\sigma} > 1$$

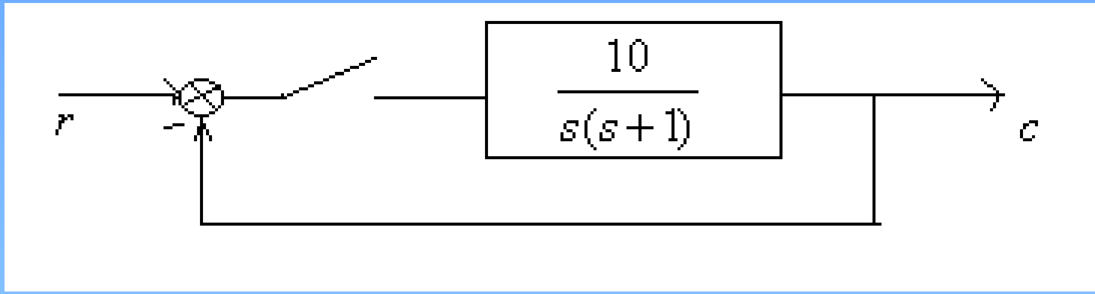


线性离散闭环控制系统脉冲传递函数为 $G_B(z) = \dfrac{G(z)}{1 + G(z)}$

则其特征方程为 $1 + G(z) = 0$

线性离散控制系统稳定的充要条件：线性离散闭环控制系统特征方程的根的模小于1，则系统是稳定的。

例7-17 已知离散系统结构如下图示，当T=1时，分析稳定性。



【解】

$$G(z)=Z[\frac{10}{s(s+1)}]=\frac{6.32z}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$1+G(z)=0\Rightarrow z^2+4.952z+0.368=0$$

$$\Rightarrow z_1=-0.076 \qquad z_2=-4.876$$

$\because |z_2|>1$ 　所以系统不稳定。

劳 斯 稳 定 判 据

- 在分析连续系统时，曾应用Routh稳定判据判断系统的特征根位于s右半平面的个数，并依此来判断系统的稳定性。
- 对于*采样系统*，也可用Routh判据分析其稳定性，但由于在z域中稳定区域是单位圆内，而不是左半平面，因此不能直接应用Routh判据。

代数稳定性判据

劳斯代数判据无法直接应用在z平面上，因此引入**双线性映射**，将z平面的点映射到w平面上研究。

假定z平面上一点 $z = x + jy$ 对应w平面上一点 $w = u + jv$

令 $z = \dfrac{\omega + 1}{\omega - 1}$

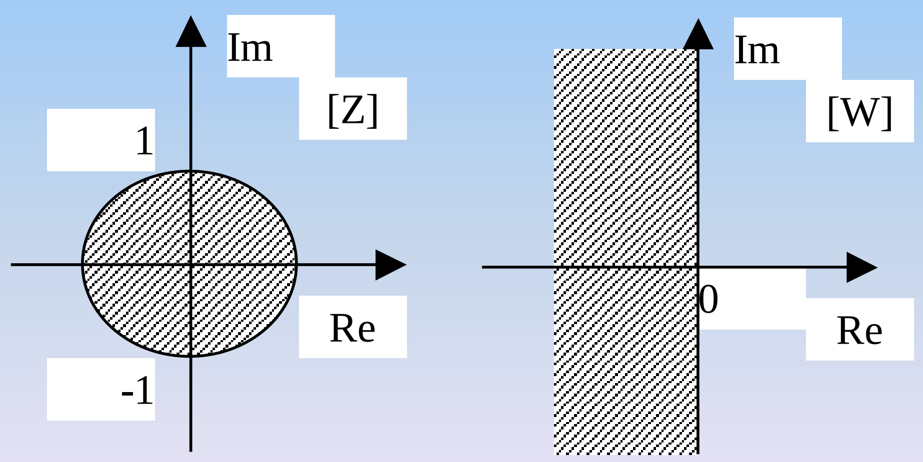
$$w = \frac{z+1}{z-1} = \frac{(x+1) + jy}{(x-1) + jy}$$

$$u + jv = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x-1)^2 + y^2} + j\frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

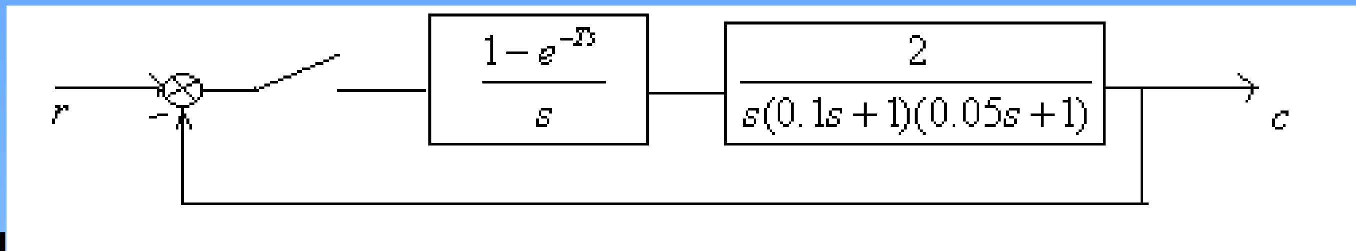
$$\therefore u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$$

- 对Z平面上的一点，设在单位圆上， $x^2+y^2=1$ 则u=0，对应W平面上的虚轴。
- 对Z平面上单位圆内点，对应 $x^2+y^2<1$ 则u<0，对应W平面上的左半平面，为系统的稳定域。
- 对Z平面上单位圆外点，对应 $x^2+y^2>1$ 则对应W平面上的右半平面，为系统的不稳定域。

因此可在W平面上利用劳斯代数判据分析采样系统的稳定性。



例7-18 已知离散系统结构如下图示，当T=0.1时，分析稳定性。



【解】

$$G(z)=\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{2}{s^2(0.1s+1)(0.05s+1)}\right]$$

$$=\frac{z-1}{z}\left[-\frac{0.3z}{z-1}+\frac{0.4z}{(z-1)^2}+\frac{0.4z}{z-e^{-10T}}-\frac{0.1z}{z-e^{-20T}}\right]$$

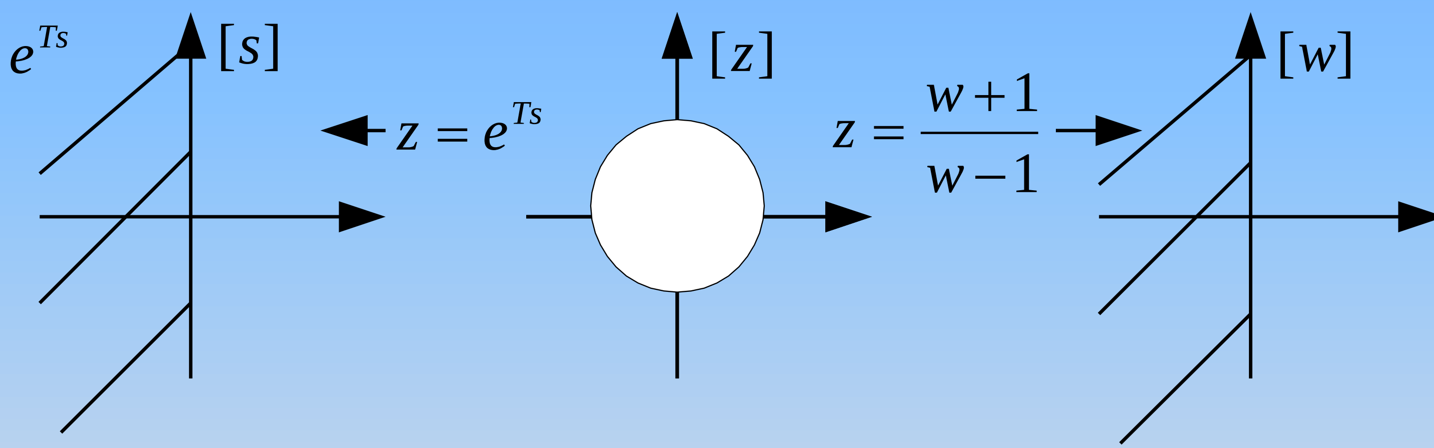
$\boxed{1+G(z)=0}$ $\quad z^3-1.001z^2+0.3356z+0.0535=0$

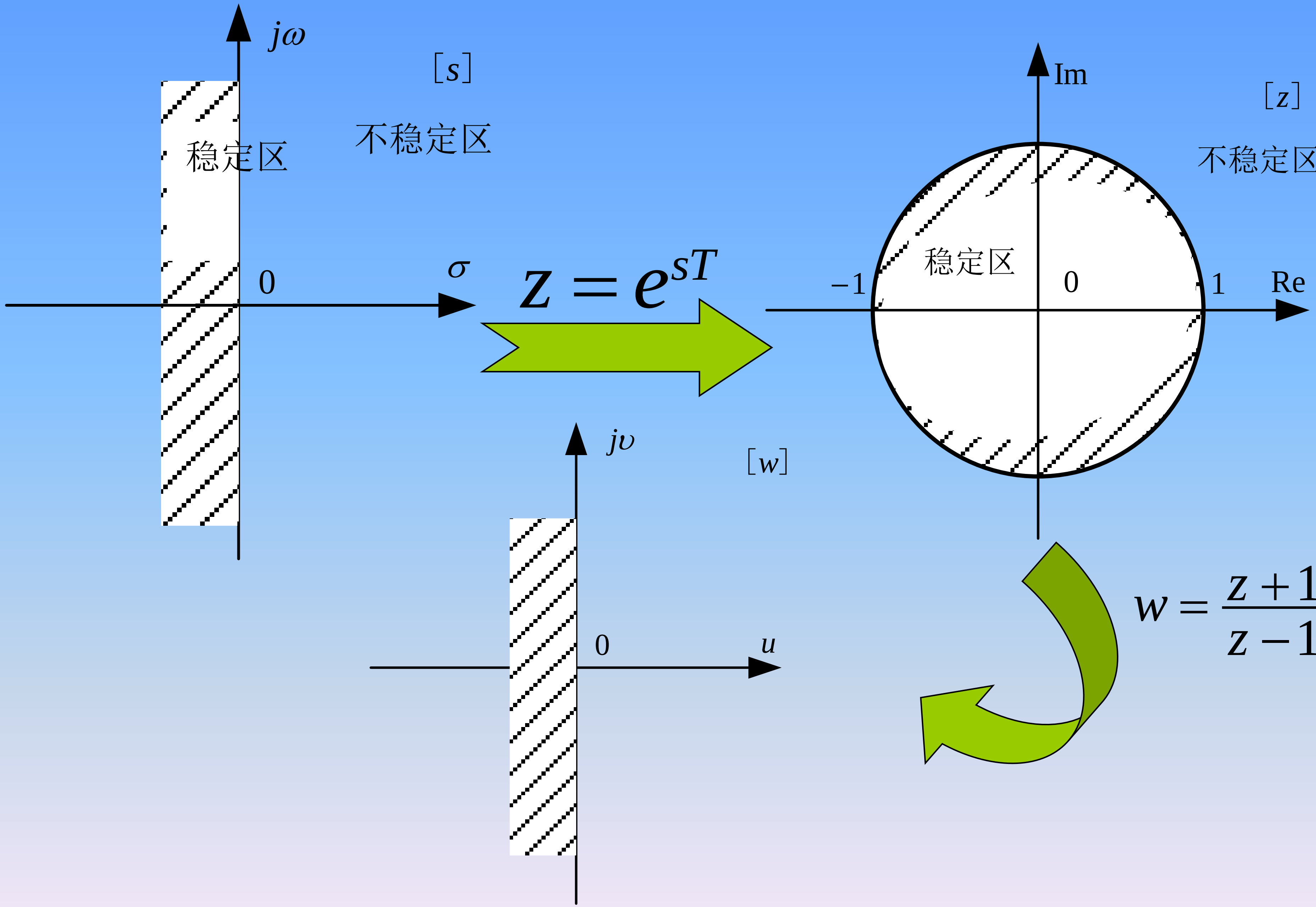
$\boxed{z=\frac{w+1}{w-1}}$ $\quad 2.33w^3+3.68w^2+1.65w+0.34=0$

w^3	2.33	1.65
w^2	3.68	0.34
w	1.43	0
w^0	0.34	

劳斯表中第一列为正，系统稳定。

稳定性判据





$j\omega$
$[s]$
稳定区
不稳定区
0
σ
$z = e^{sT}$
Im
$[z]$
不稳定区
稳定区
-1
0
1
Re
$j\upsilon$
$[w]$
0
u
$w = \frac{z+1}{z-1}$

（3）判稳方法

①该系统稳定的充分必要条件为：**系统闭环特征方程的根**z_i（$i=1, 2, 3, \cdots$）**均分布在**z**平面上以原点为中心的单位圆内，即**$|z_i|<1$（$i=1, 2, 3, \cdots$）。

②推广的劳斯稳定判据：在线性采样系统中，对z的有理多项式，经 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ 的双线性变换，得到w的代数方程就可以应用劳斯判据判稳了。为了区别s平面下的劳斯判据，称w平面下的劳斯判据为推广的劳斯稳定判据。