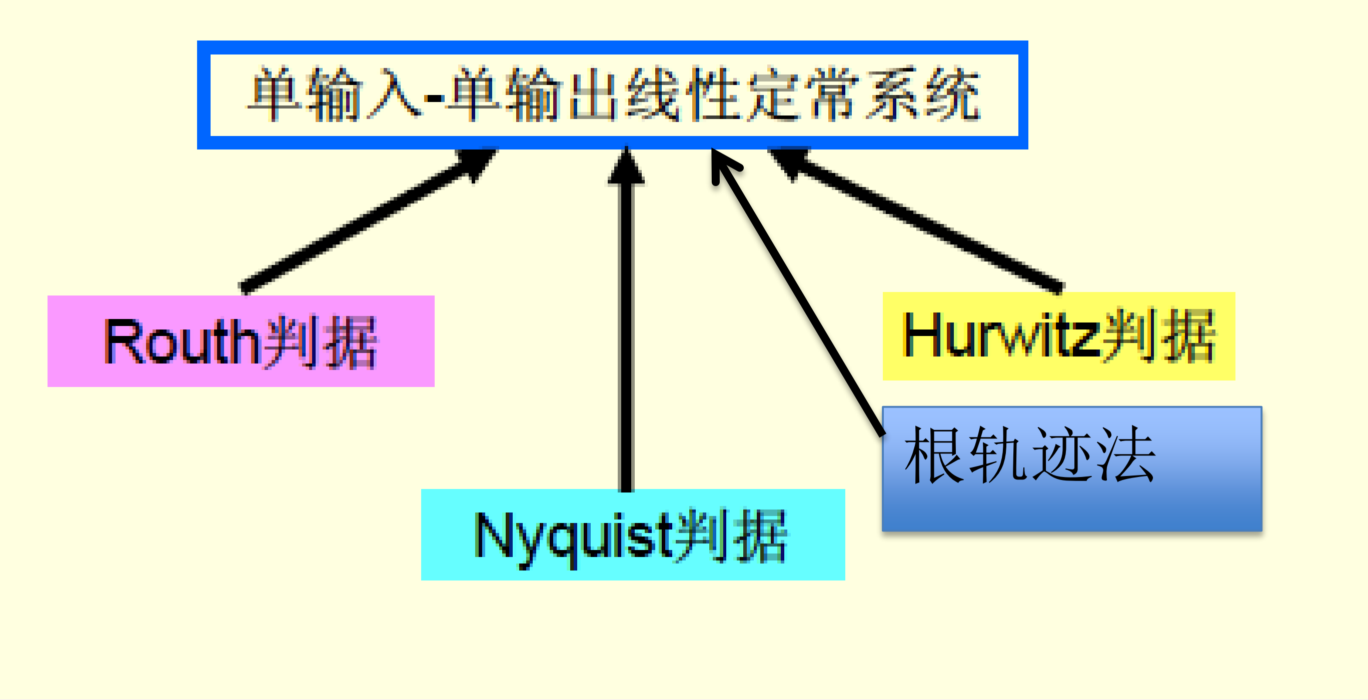
9.07 Lyapunov稳定性理论

1 稳定性定义

2 李雅普诺夫第一法（间接法）

3 李雅普诺夫第二法（直接法）

- 经典控制理论稳定性判别方法：Routh判据，Nyquist判据，Hurwitz判据，根轨迹判据
- 非线性系统：相平面法(适用于一，二阶非线性系统)



- **1892年，俄国学者李雅普诺夫提出的稳定性定理采用了状态向量来描述，适用于单变量，线性，非线性，定常，时变，多变量等系统。**

第一种方法：通过求微分方程的解来分析运动稳定性，对于非线性系统，在工作点附近的一定范围内，可以用线性化微分方程来近似描述（局部运动）

第二方法：通过对系统构造一个“类似能量”的纯量函数，然后考察该函数对时间的变化来判断稳定性。又称直接方法，现今学术界广为应用且影响巨大的方法。

应用：自适应控制，最优控制，非线性控制等。

李雅普诺夫稳定性定义

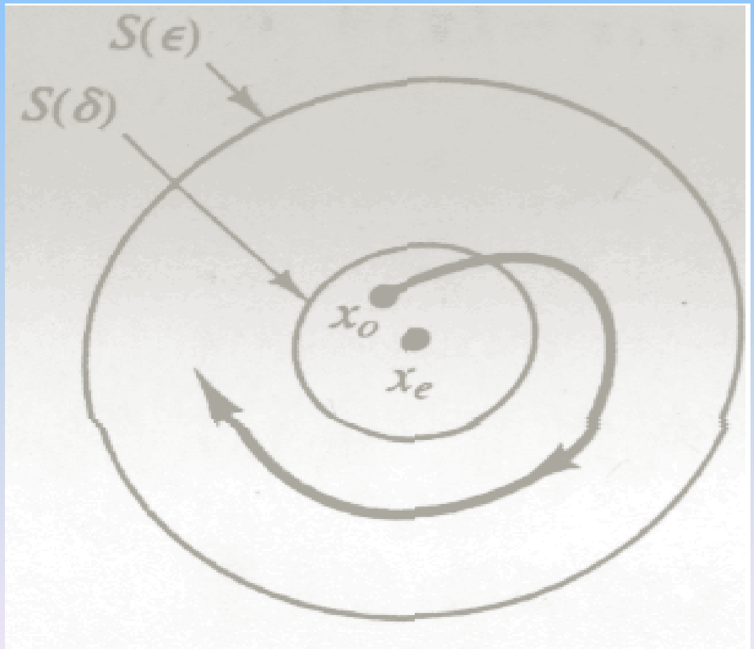
（1） 李雅普诺夫意义下稳定

设系统初始状态位于以平衡状态x_e为球心，δ为半径的闭球域S(δ)内，即：

$$\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$

从任意初态x_0出发的解都位于以x_e 为球心，任意规定的半径为ε 的闭球域S(ε)内，即：

$$\|\phi(t;t_0,x_0) - x_e\| \le \varepsilon, \qquad t_0 \le t < \infty$$



则称平衡状态x_e为李雅普诺夫意义下稳定。

其中实数δ与ε有关，一般情况下也与t_0有关。

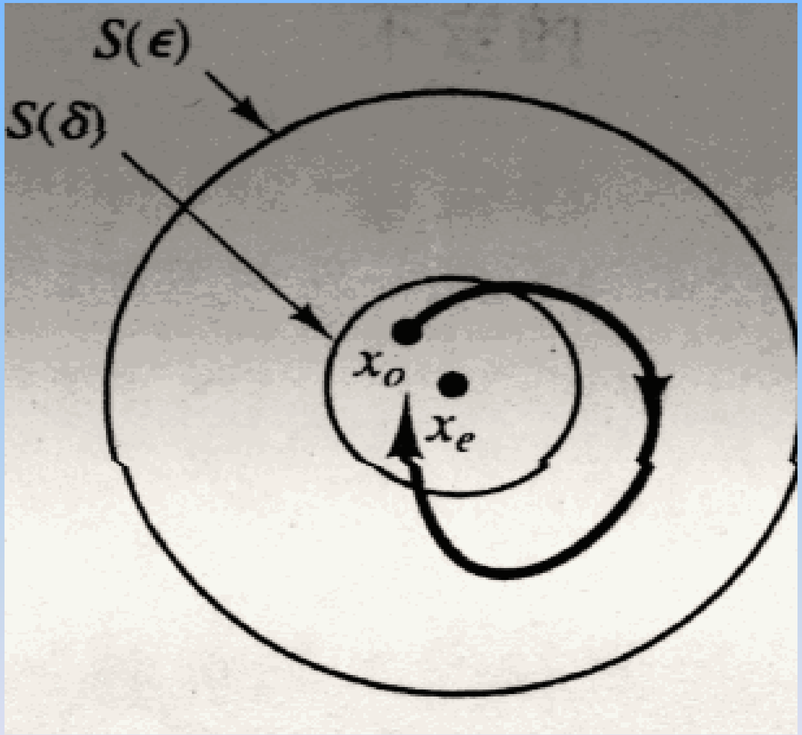
（2） 渐进稳定

如果系统平衡状态x_e不仅具有李雅普诺夫意义下的稳定，且有：

$$\lim_{t\to\infty} \| \phi(t\,;t_0\,,x_0\,,0) - x_e \| = 0$$

则称此平衡状态是渐进稳定的

当t无限增长时，轨线不仅不超出s（ε），而且最终收敛于x_e，则称这种平衡状态x_e渐近稳定。



(3) 大范围(全局)渐近稳定

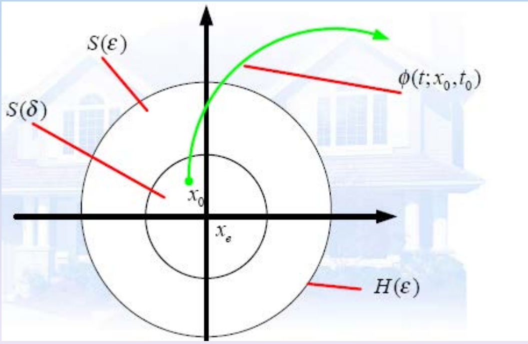
如果从任一初态x_0的受扰运动均为渐近稳定的，则称平衡状态是大范围渐近稳定的，即：

$$\forall x_0 \in s(\delta), \delta \to \infty, S(\delta) \to \infty$$

(4)不稳定

$$\dot{x} = f(x,t) \quad x(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0, \infty)$$

如果对于某个实数ε>0和任一个实数δ>0，不管这两个实数有多么小，在S(δ)内总存在一个状态x_0，使得由这一状态出发的轨迹超出S(ε)，则平衡状态x_e称为是不稳定的。



李雅普诺夫第一法（间接法）

基本思路是通过系统状态方程的解来判定系统的稳定性。对于线性定常系统，只需解出特征方程的根即可作出稳定性判断。对于非线性不很严重的系统，则可通过线性化处理，取其一次近似得到线性化方程，然后再根据其特征根来判断系统的稳定性。

利用状态方程解的特性来判断系统稳定性。

$$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0$$

1）李雅普诺夫意义下的稳定的充要条件：

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \qquad i = 1,2,\cdots n$$

2）渐近稳定的充要条件：

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \qquad i = 1,2,\cdots n$$

3）不稳定的充要条件：

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$$

李雅普诺夫第二法(直接法)

基本思路：从能量观点进行稳定性分析.

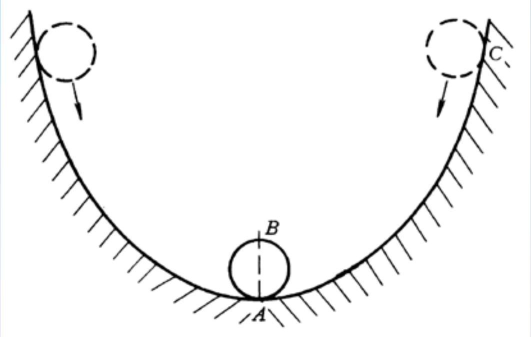
1) 如果一个系统被激励后，其储存的能量随时间的推移逐渐衰减，到达平衡状态时，能量将达最小值，则这个平衡状态是渐近稳定的；

2) 反之，如果系统不断地从外界吸收能量，储能越来越大，则这个平衡状态是不稳定的；

3) 如果系统的储能既不增加，也不消耗，则这个平衡状态就是*Lyapunov*意义下的稳定。

由于实际系统的复杂性和多样性，往往不能直观地找到一个能量函数来描述系统的能量关系;

于是*Lyapunov*定义了一个**正定的标量函数**，作为虚构的广义能量函数，用其一阶微分的符号特征来判断系统的稳定性。



几个典型的稳定性判据

定理1：设系统的状态方程为$\dot{x} = f(x), t \geq 0$

如果平衡状态f(0)=0，且存在标量函数V(x)，V(0)=0，对

于一切非零点满足：

1）V(x)对所有x具有一阶连续偏导数；

2）V(x)是正定的；

3）若V(x)的导数是负定的；

则原点平衡状态为大范围渐进稳定的。

定理2：设系统的状态方程为 $\dot{x} = f(x), t \geq 0$

如果平衡状态f(0)=0，且存在具有一阶连续偏导数标量函数V(x)，V(0)=0，对于一切非零点满足：

1）V(x)是正定的；

2）若V(x)的导数是负半定的；

3）对于任意 $x \in X$, $\dot{V}(\phi(t;x_0,0))$ 不恒等于0；

4）当 $\|x\| \to \infty$ 时 $V(x) \to \infty$ ；

则原点平衡状态为大范围渐进稳定的。

例　已知系统的状态方程，试分析平衡状态的稳定性。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

解：其为线性系统，故 $x_e = 0$ 是其唯一平衡点。将矩阵形式的状态方程展开得到：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

取标量函数(李雅普诺夫函数)：

$$V(x) = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2]$$

$$\dot{V}(x) = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -(x_1^2 + x_2^2)$$

当 $\|x\| \to \infty$ 时 $V(x) \to \infty$，所以系统在其原点处大范围渐近稳定。

线性定常系统的李雅普诺夫稳定性分析

1.线性定常连续系统渐进稳定性的判别

设线性定常系统状态方程为：

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$$

如果A为非奇异矩阵，那么原点是唯一平衡状态。取正定二次型函数

$$V(x) = x^T P x$$

作为可能的李雅普诺夫函数，则有

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x$$

令 $A^T P + PA = -Q$

可得 $\dot{V}(x) = -x^T Q x$

☞由此，给出检验任意函数是否为李雅普诺夫函数的方法：

1）选一实数正定对称矩阵$Q>0$.

2）由$A^TP+PA=-Q$，算出P.

3）若P为正定实对称矩阵，则$V(x)=x^TPx$是一个李雅普诺夫函数，系统是渐进稳定系统；

若P不满足正定实对称，则需另选一$Q>0$，再作检验。

2.线性定常离散系统渐进稳定性的判别

设线性定常离散系统状态方程为:

$$x(k+1) = \Phi x(k), x(0) = x_0; k = 0,1,2,\cdots$$

原点是平衡状态，取正定二次型函数

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k)$$

以 $\Delta V(x(k))$代替 $\dot{V}(x)$有

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)$$

$$= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k)$$

$$= [\Phi x(k)]^T P[\Phi x(k)] - x^T(k)Px(k)$$

$$= x^T(k)[\Phi^T P\Phi - P]x(k)$$

令 $\Phi^T P\Phi - P = -Q$

$$\Delta V(x(k))$$

同理，我们寻找正定对称矩阵Q，使得矩阵P满足正定对称，那么 $V(x(k)) = x^T(k)Px(k)$为离散的李雅普诺夫代数方程。