8.6　相轨迹及其绘制方法

- 前面讨论的描述函数法是一种近似分析方法。它对非线性特性以及系统特性都提出了一些严格要求，对一般非线性问题并不适应，因此只能寻求新的解决方法。
- 相平面法是一种用图解法来求解二阶非线性微分方程的分析方法，它适用于任意非线性特性。值得注意的是，相平面法只能用来分析一阶和二阶非线性系统，有一定的局限性。

对于一个任意的二阶非线性微分方程

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

或 $$\ddot{x} + a_1(x, \dot{x})\dot{x} + a_0(x, \dot{x})x = 0$$

令 $$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$$

则有：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -a_1(x_1, x_2)x_2 - a_0(x_1, x_2)x_1 \end{cases}$$

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_1(x_1, x_2)x_2 - a_0(x_1, x_2)x_1}{x_2}$$

写成一般形式有：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2)\end{cases}$$

于是有：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{Q(x_1, x_2)}{P(x_1, x_2)}$$

如果 $P(x_1, x_2)$ 和 $Q(x_1, x_2)$ 是解析的，可以在给定平衡点附近展开成泰勒级数，微分方程式在给定初始条件下的解是唯一的，于是以 x_1 为横坐标轴，x_2 为纵坐标轴的平面上绘制一条关于 x_2 和 x_1 的关系曲线，把这样的一条轨线称为相轨迹，由一族相轨迹组成的图像称为相平面图。显然 $\frac{dx_2}{dx_1}$ 表示曲线的斜率。

相轨迹反映了非线性微分方程解的关系，具有一些基本特点。首先，由微分方程解得存在性和唯一性定理可知，相轨迹上除了平衡点之外的任意一点只有一根相轨迹经过。

可令：

$$\begin{cases} P(x_1, x_2) = 0 \\ Q(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

联立求解出的点(x_{10}, x_{20}) 称为系统的平衡点。

联立以上两个式子可得：$\dfrac{dx_2}{dx_1}=\dfrac{0}{0}$

由此可知，相轨迹在平衡点附近切线斜率不定，意味着有无穷多根相轨迹到达或离开平衡点。

由于$P(x_1,x_2)$ 和 $Q(x_1,x_2)$是非线性的关系，因此无法用解析方法绘制相轨迹。只能采用近似作图的方法绘制相轨迹。这里仅介绍等倾斜线法来绘制轨迹。

这里定义相轨迹方程为：$\dfrac{dx_2}{dx_1}=\dfrac{Q(x_1,x_2)}{P(x_1,x_2)}$

该方程反映了x_2和x_1之间的关系。而$\dfrac{dx_2}{dx_1}$绘出了点(x_1,x_2)处的切线的斜率。

如果令$\dfrac{dx_2}{dx_1}=\alpha,\alpha$ 为一常数, 有：$\dfrac{Q(x_1,x_2)}{P(x_1,x_2)}=\alpha$

该式子为x_1和x_2之间的代数方程，根据上式可以在相平面上绘制一条线，在这条线上的每个点都有一个共同的性质，相轨迹通过这些点时，其斜率都相同，称这条线为等倾线。

如下图（图8.6.1）所示：

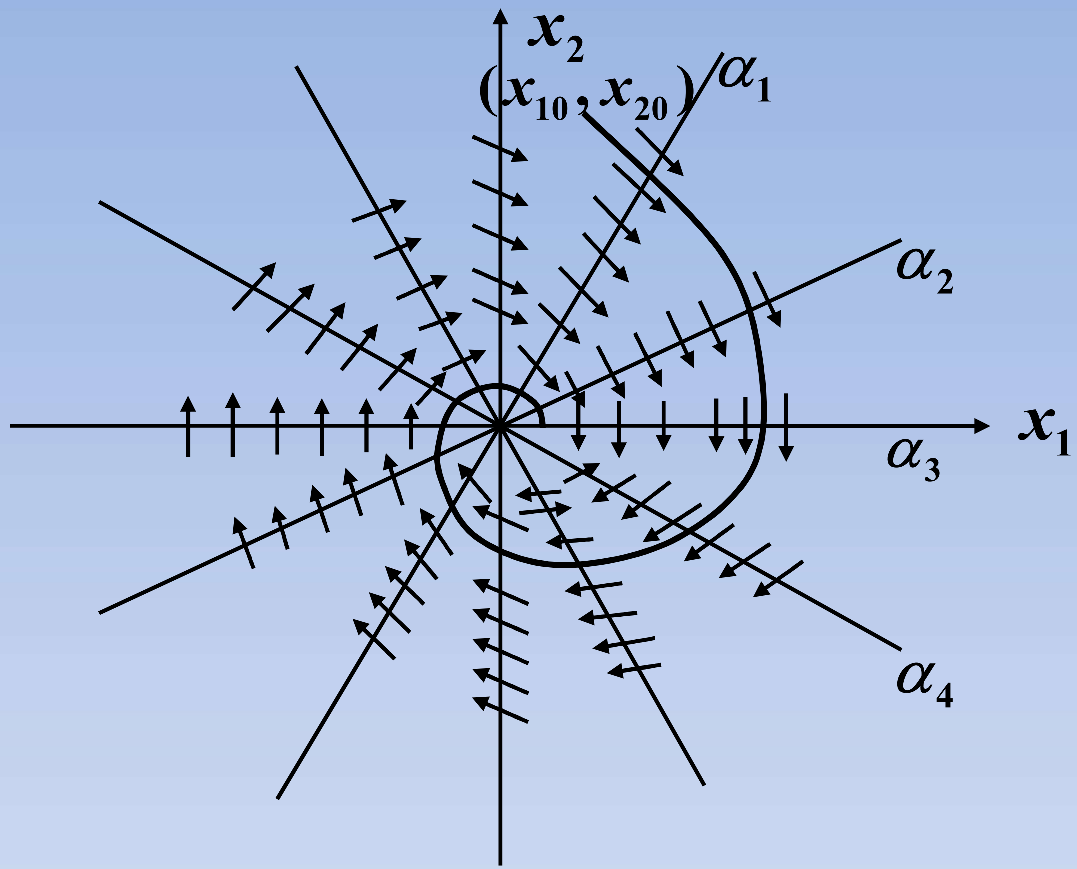

图8.6.1　　用等倾线法绘制轨迹

如果取不同的值，则可以在相平面上绘制一系列的等倾线。在每一根等倾线上画出相应的α曲线，以表示相轨迹通过这些等倾线的斜率。

如果任意给定初始条件， (x_{10}, x_{20}) 就相当于在相平面上给定了一条相轨迹的起点，从该点出发，平滑地将相邻等倾线上的短线连起来，就可以得到所要求的系统的相轨迹。

如图8.6.1，要得到较为精确的相轨迹，只要尽可能多地给出 α 值，在相平面上绘制更密的等倾斜线才能做到这一点。