8.4 典型非线性的描述函数

1. 饱和特性

假定输入是 $e(t) = A\sin\omega t$

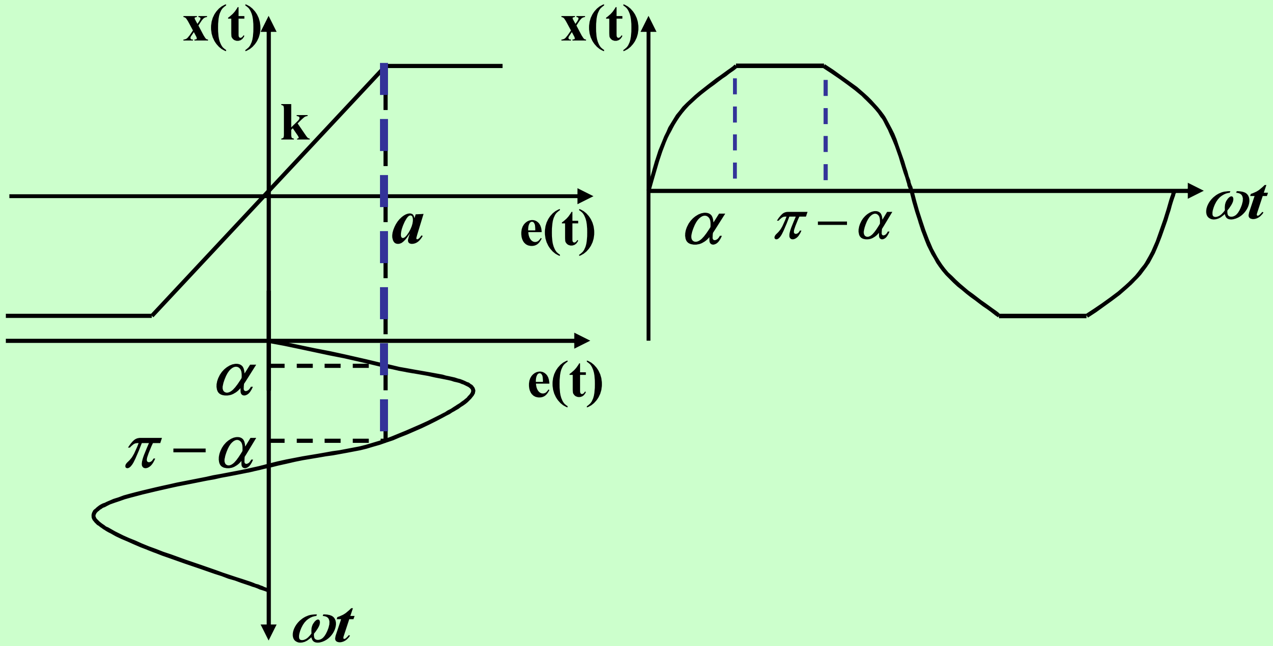


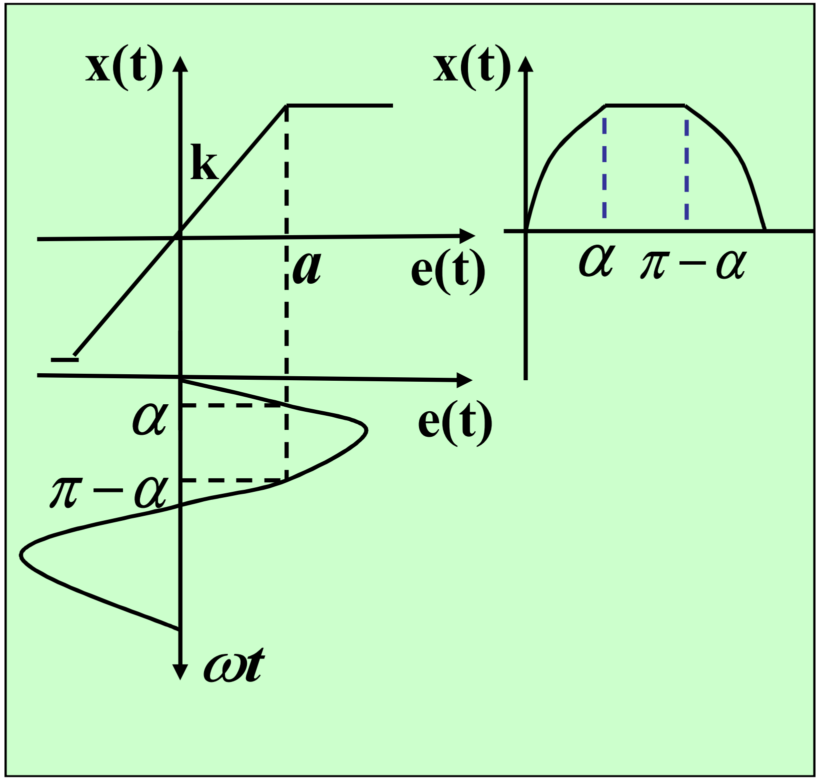
图 8-4-1　饱和特性及输入输出波形

当 $A > a$ 输出为

$$x(t)=\begin{cases} KA\sin\omega t, & 0\le\omega t\le\alpha \\ Ka, & \alpha<\omega t\le\pi-\alpha \\ KA\sin\omega t, & \pi-\alpha<\omega t\le\pi \end{cases}$$

式子中，

$$A\sin\alpha=a, \therefore \alpha=\sin^{-1}\frac{a}{A}$$



因为输出波形是奇函数

$$A_1 = 0$$

$$\phi_1 = tg^{-1}\frac{A_1}{B_1} = 0$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\sin\omega t \ d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\alpha} KA\sin^2\omega t d(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} Ka\sin\omega t d(\omega t) + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} KA\sin^2\omega t d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}KA\left[\sin^{-1}\frac{a}{A} + \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]$$

所以饱和特性的描述函数求得：

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2}{\pi}K\left[\sin^{-1}\frac{a}{A} + \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]$$

$N(A)$ 是输入振幅A的函数.。

可以将描述函数看做一可变放大系数的放大器。

2. 死区特性

假定输入为 $e(t) = A\sin\omega t$

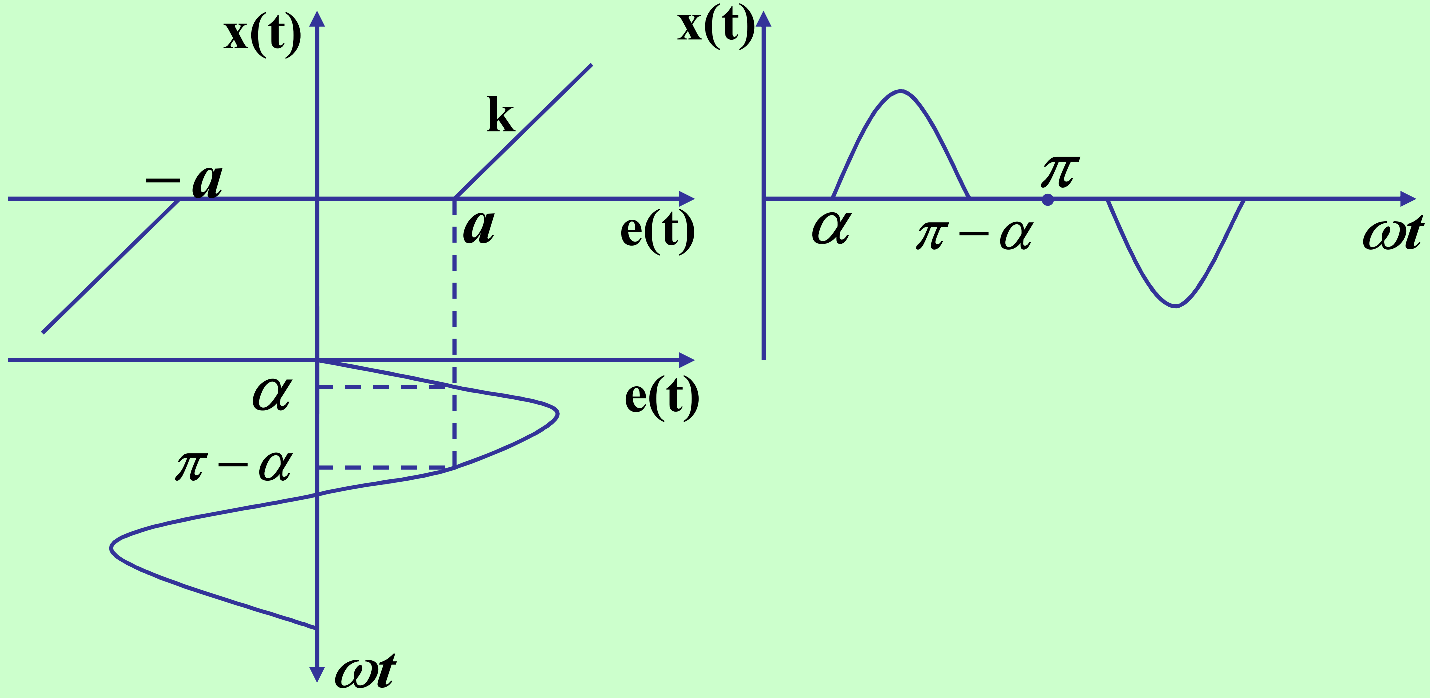


图 8-4-2死区特性输入输出波形

当 $A > a$，死区输出为

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\le \omega t\le \alpha\\ K(A\sin\omega t-a), & \alpha<\omega t\le \pi-\alpha\\ 0, & \pi-\alpha<\omega t\le \pi\end{cases}$$

式中，$A\sin\alpha = a, \therefore \alpha = \sin^{-1}\dfrac{a}{A}$

输出是奇函数→$A_1 = 0$，　　$\phi_1 = 0$

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\sin\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} K\left(A\sin\omega t - a\right)\sin\omega t d(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi} KA \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{a}{A} - \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$$

死区特性的描述函数：

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2}{\pi} K \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{a}{A} - \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$$

注意：

(1) 当 a/A 非常小时,也就是不敏感区很小, $N(A)$ 会趋近于K;

(2) a/A变大，$N(A)$变小

(3) $a/A=1 \quad \Rightarrow \quad N(A)=0$

3. 间隙特性

假设输入为 $e(t) = A\sin\omega t$

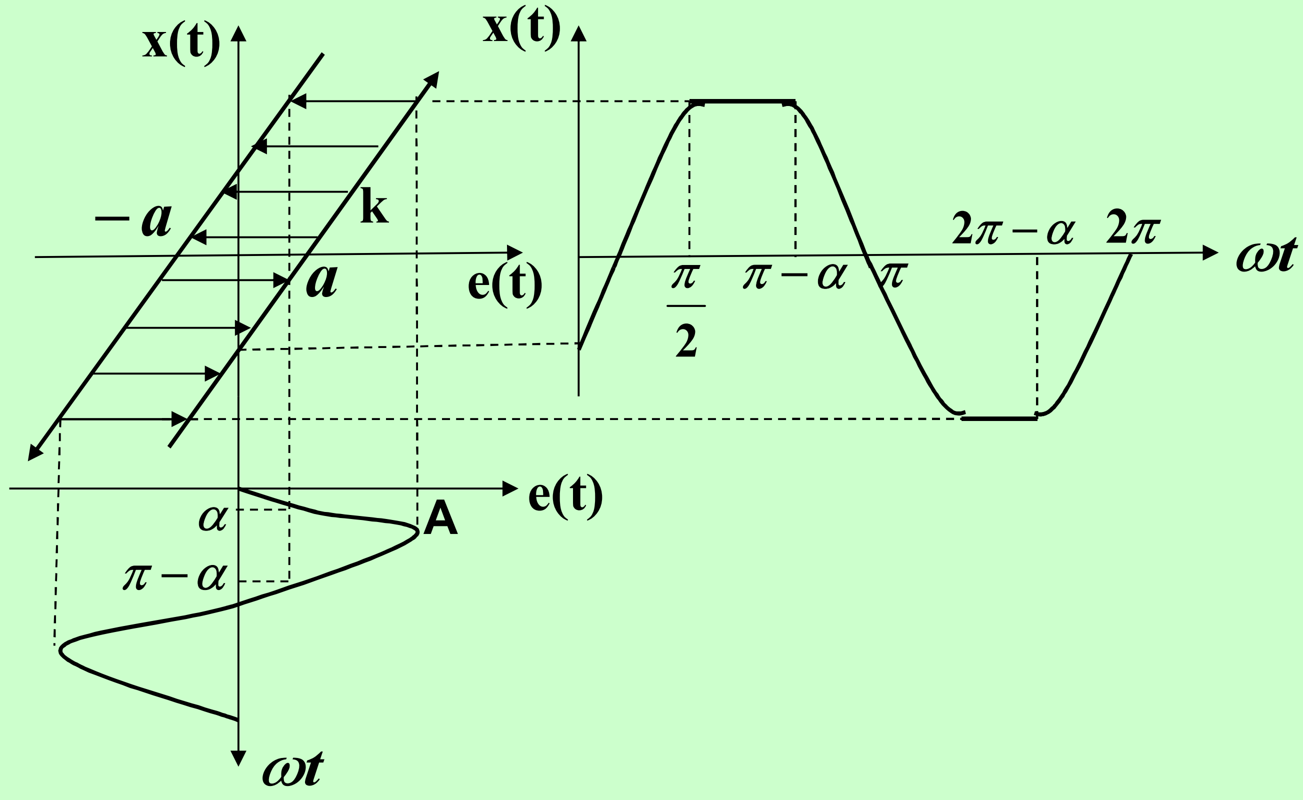


图 8-4-3　间隙特性及其输入输出波形

结合间隙特性的数学描述, $x(t)$被写为

$$
x(t)=\begin{cases} K(A\sin\omega t-a), & 0\le\omega t<\dfrac{\pi}{2} \\ K(A-a), & \dfrac{\pi}{2}\le\omega t<\pi-\alpha \\ K(A\sin\omega t+a), & \pi-\alpha\le\omega t\le\pi \end{cases}
$$

式中， $A\sin(\pi-\alpha)=A-2a,\ \therefore \alpha=\sin^{-1}\dfrac{A-2a}{A}$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\cos\omega t \; d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(A\sin\omega t - a)\cos\omega t d(\omega t)$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\alpha} K(A-a)\cos\omega t d(\omega t)$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi} K(A\sin\omega t + a)\cos\omega t d(\omega t) = \frac{4KA}{\pi}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 - \frac{a}{A}\right]$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\sin\omega t \; d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(A\sin\omega t - a)\sin\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{KA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{A-2a}{A}\right) + \frac{A-2a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{A-2a}{A}\right)^2}\right]$$

因此，我们可以得到间隙特性的描述函数**N(A)**如下：

$$N(A)=\frac{B_1}{A}+j\frac{A_1}{A}$$

$$=\frac{K}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\frac{A-2a}{A}\right)+\frac{A-2a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{A-2a}{A}\right)^2}\right]+j\frac{4K}{\pi}\left[\frac{a(a-A)}{A^2}\right]$$

$$=\left|N(A)\right|e^{j\phi_1}$$

$$\left|N(A)\right|=\sqrt{\left[\frac{4K}{\pi}\left(\frac{a(a-A)}{A^2}\right)\right]^2+\left[\frac{K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\frac{A-2a}{A}+\frac{A-2a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{A-2a}{A}\right)^2}\right)\right]^2}$$

$$\phi_1=tg^{-1}\frac{4\dfrac{a(a-A)}{A^2}}{\left[\dfrac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\dfrac{A-2a}{A}\right)+\dfrac{A-2a}{A}\sqrt{1-\left(\dfrac{A-2a}{A}\right)^2}\right]}$$

4. 继电特性

假设输入为 $e(t) = A\sin\omega t$

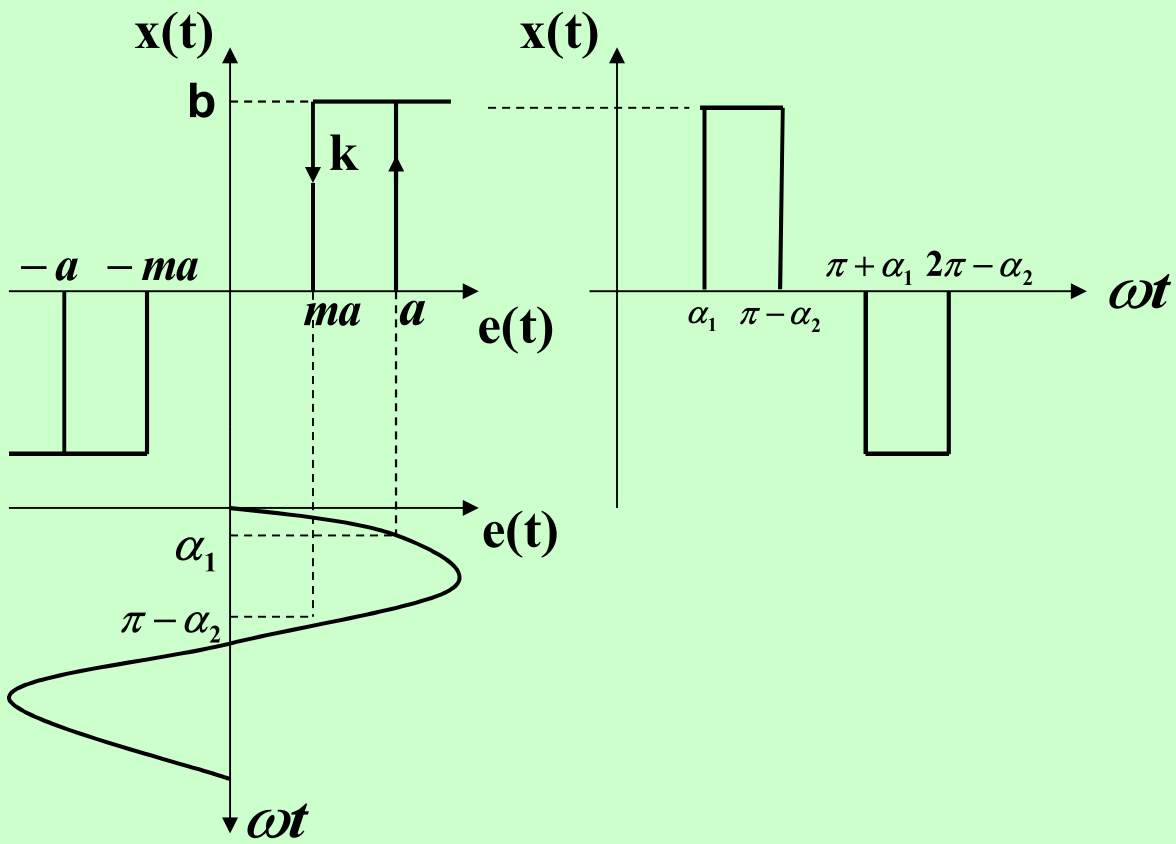


图 **8-4-4** 具死区和磁滞回环的继电特性及输入输出波形

继电特性输出为:

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\le \omega t<\alpha_1\\ b, & \alpha_1\le \omega t<\pi-\alpha_2\\ 0, & \pi-\alpha_2\le \omega t\le \pi\end{cases}$$

式中,

$$A\sin\alpha_1=a,\ \therefore \alpha_1=\sin^{-1}\frac{a}{A}$$

$$A\sin(\pi-\alpha_2)=ma,\ \therefore \alpha_2=\sin^{-1}\frac{ma}{A}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} b\cos\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2b}{\pi}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = \frac{2ab(m-1)}{\pi A}$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} b\sin\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2b}{\pi}(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1) = \frac{2b}{\pi}\left[\sqrt{1-\left(\frac{ma}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]$$

具死区和磁滞回环的继电特性描述函数**N(A)**为

$$N(A) = \left|N(A)\right| e^{j\phi_1} = \sqrt{\left(\frac{A_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{B_1}{A}\right)^2} e^{jtg^{-1}\frac{A_1}{B_1}}$$

$$\left|N(A)\right| = \frac{2b}{\pi A}\sqrt{2\left[1 - m\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \sqrt{1 + m^2\left(\frac{a}{A}\right)^4 - (m^2+1)\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]}$$

$$\phi_1 = tg^{-1}\frac{(m-1)\left(\frac{a}{A}\right)}{\sqrt{1 - m^2\left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

推论：

当 a＝0, 我们可以的到理想继电特性的描述函数：

$$N(A)=\frac{4b}{\pi A}$$

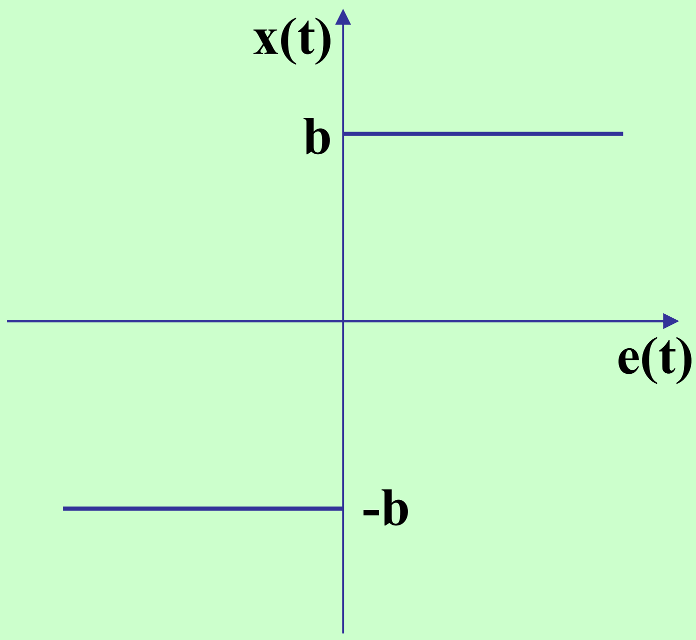


图 8-4-5 理想继电特性

当m＝1 和 a≠0, 我们可以得到具有死区的继电特性描述函数为：

$$N(A)=\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$$

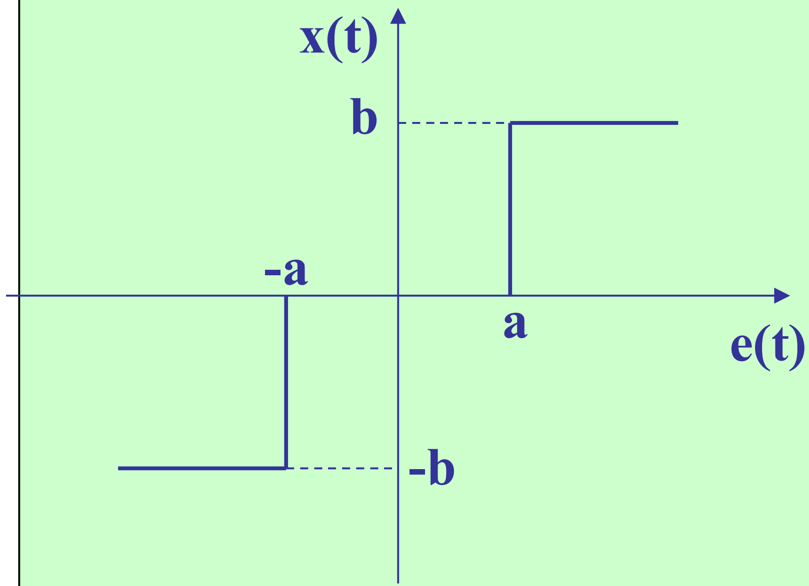


图 8-4-6 具死区的继电特性

当 m＝－1, 我们可以得到具磁

滞回环继电特性描述函数：

$$N(A)=\frac{4b}{\pi A}e^{jtg^{-1}\frac{-\left(\frac{a}{A}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}}$$

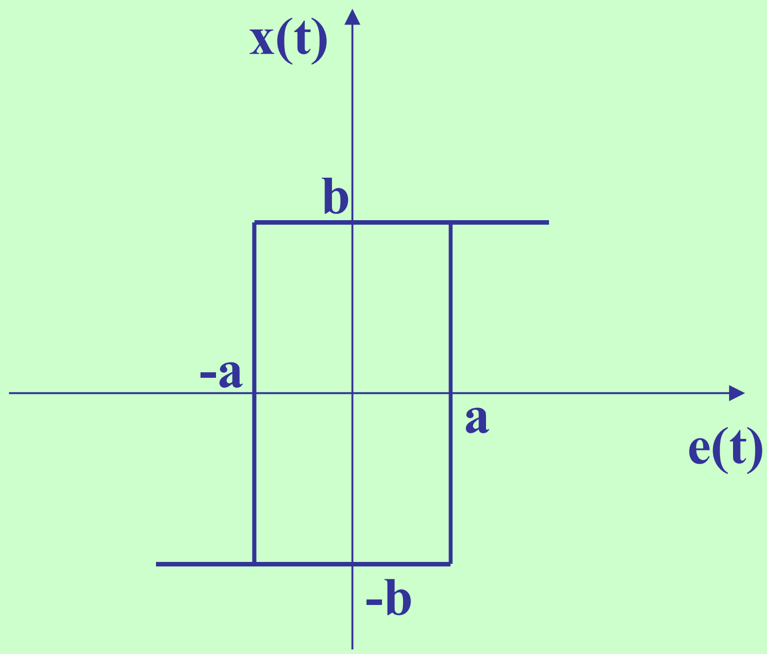


图 8-4-7具磁滞回环继电特性

多重非线性的描述函数

1. 串联非线性系统

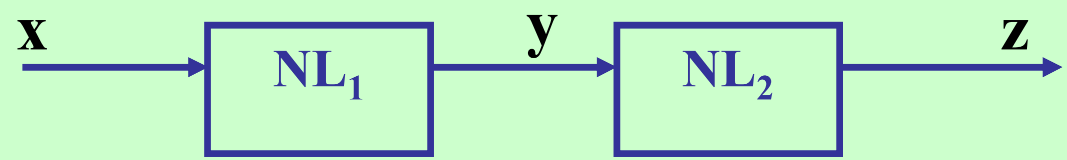


图 8-4-8 串联非线性

串联的非线性特性并不是两个非线性描述函数的乘积.

$$N(A) \neq N_1(A) \cdot N_2(A)$$

图**8-4-9**（**a**）显示，第一个是死区非线性，第二个为饱和非线性，两个串联以后得到**8-4-9**（**b**）.

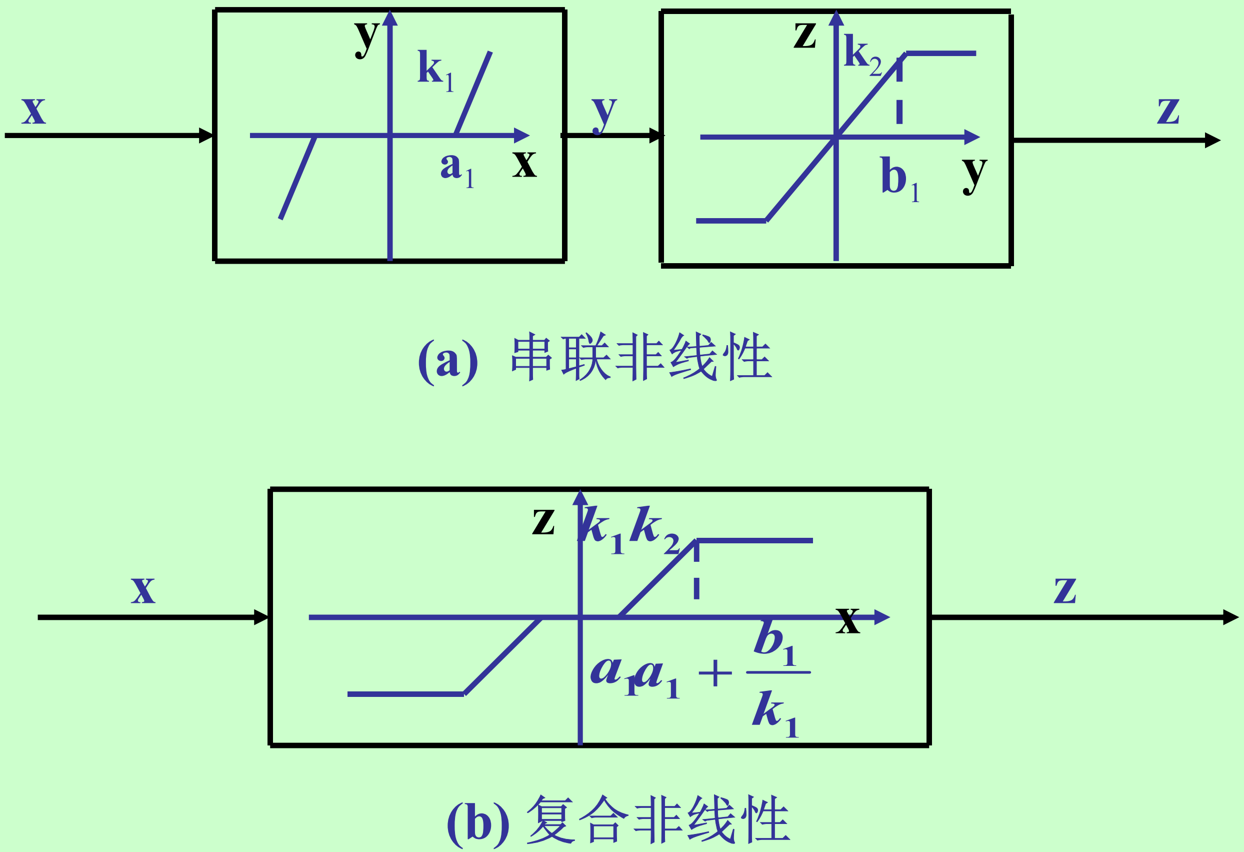


图 8-4-9 串联非线性与其复合非线性

2 .并联非线性

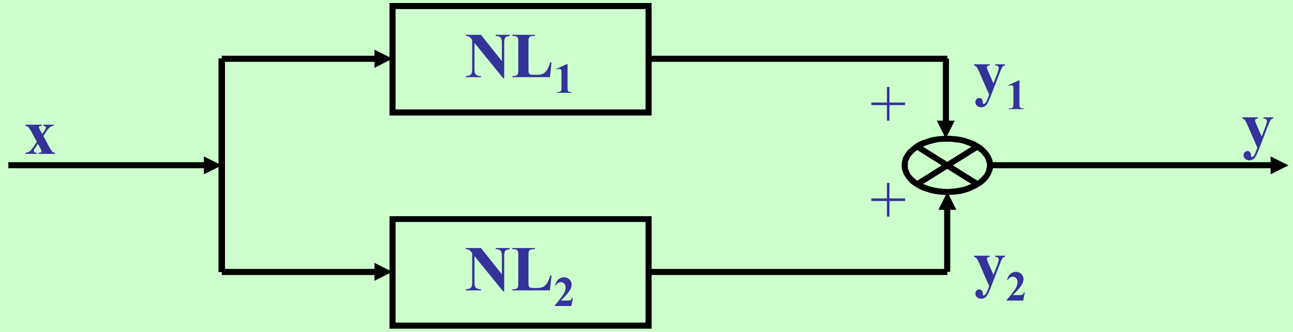


图 8-4-10 并联非线性

通过描述函数的定义可知，对于输出为y与输入x的描述函数等于两个描述函数的和：

$$\mathbf{N(A) = N_1(A) + N_2(A)}$$

[例 1] 求下图所示的非线性特性的描述函数

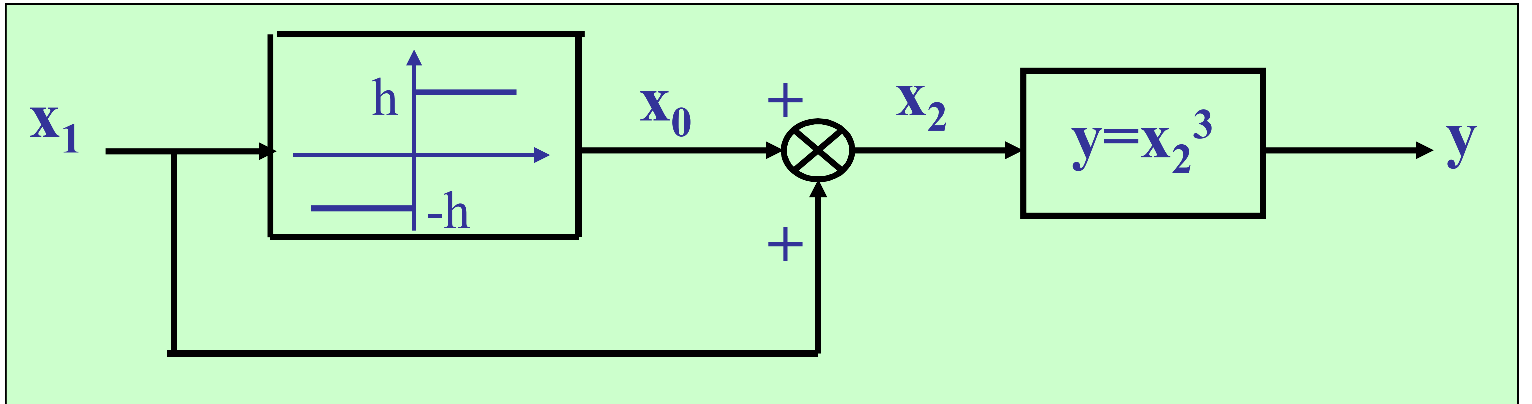


图 8-4-11 多重非线性

解：$$y = x_2^3 = (x_0 + x_1)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 x_1 + 3x_0 x_1^2 + x_1^3$$

那么 $$N(A) = N_1(A) + N_2(A) + N_3(A) + N_4(A)$$

假定 $x_1 = A\sin\omega t$

NL_1是理想继电特性，当a=0, $\therefore \quad A_1 = 0$

得到 $\mathbf{N_1(A)}$:

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h^3 \sin\omega t d(\omega t) = \frac{4h^3}{\pi}$$

$$\therefore \quad N_1(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{4h^3}{\pi A}$$

得$\mathbf{N_2(A)}$:

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3h^2 A \sin\omega t \cdot \sin\omega t d(\omega t) = 3h^2 A$$

$$\therefore \quad N_2(A) = 3h^2$$

得 $\mathbf{N_3(A)}$：

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3hA^2 \sin^2 \omega t \cdot \sin \omega t d(\omega t) = \frac{8hA^2}{\pi}$$

$$\therefore \quad N_3(A) = \frac{8hA}{\pi}$$

得 $\mathbf{N_4(A)}$：

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A^3 \sin^3 \omega t \cdot \sin \omega t d(\omega t) \qquad \text{假设 } \theta = \omega t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} - A^3 \sin^3 \theta \cdot d(\cos\theta)$$

$$= \frac{2A^3}{\pi}\left[\left(-\sin^3 \theta \cos\theta\right)_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta\right] = \frac{3}{4}A^3$$

$$\therefore \quad N_4(A) = \frac{3}{4}A^2$$

那么，多重非线性的描述函数为：

$$N(A) = \frac{4h^3}{\pi A} + 3h^2 + \frac{8hA}{\pi} + \frac{3}{4}A^2$$