8.8 用相平面法分析非线性系统

用相平面法分析非线性系统的步骤如下：

(1)根据非线性特性将相平面划分为若干区域，建立每个区域的线性微分方程来描述系统的运动特性；

(2)根据分析问题的需要，适当选择相平面坐标轴；

(3)根据非线性特性建立相平面上切换线方程，必须注意的是，切换线方程的变量应与坐标轴所选的坐标变量一致；

(4)求解每个区域的微分方程，绘制相轨迹；

(5)平滑地将各个区域的相轨迹连起来，得到整个系统的相轨迹，据此可用来分析非线性系统的运动特性。

例1：如下图8.8.1所示非线性控制系统在t=0时加上一个幅度为6的阶跃输入，系统的初始状态为：$e(0)=6,\ \dot{e}(0)=0$ 问经过多少秒,系统状态可达到原点。

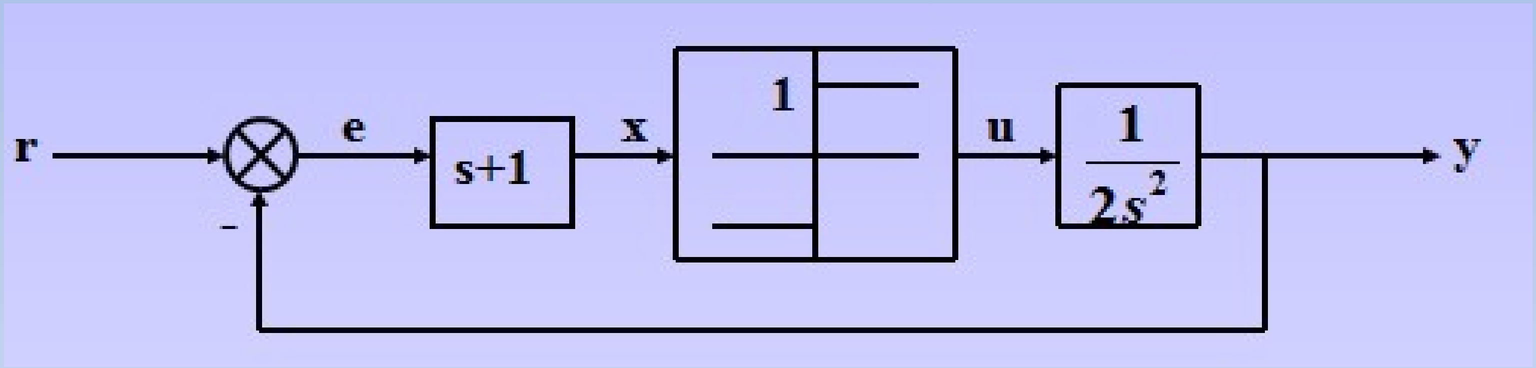


图8.8.1 继电控制系统

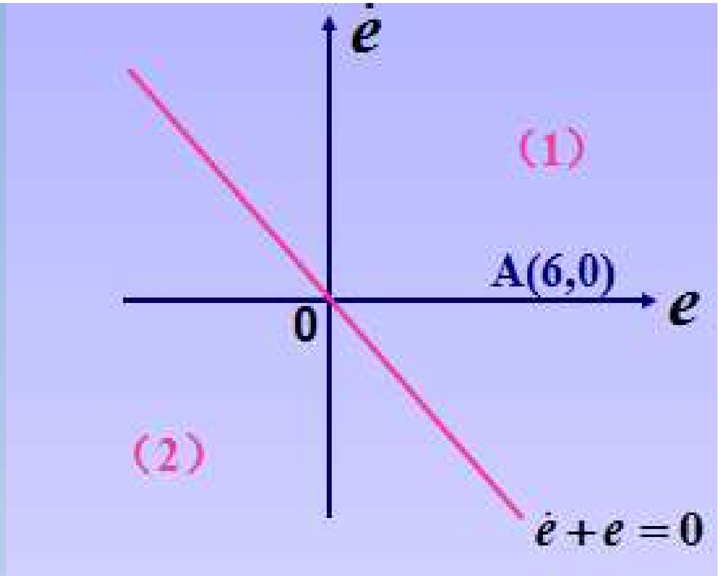
解：列写运动方程：$2\ddot{y}=u$ $\quad u=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

而 $e=r-y$，

$$\therefore\ \ddot{e}=-\ddot{y}=\begin{cases}-0.5 & \dot{e}+e>0 & \text{区域（1）}\\ 0.5 & \dot{e}+e<0 & \text{区域（2）}\end{cases}$$

其中$\dot{e}+e=0$为切换线方程。

对于区域(1),有：

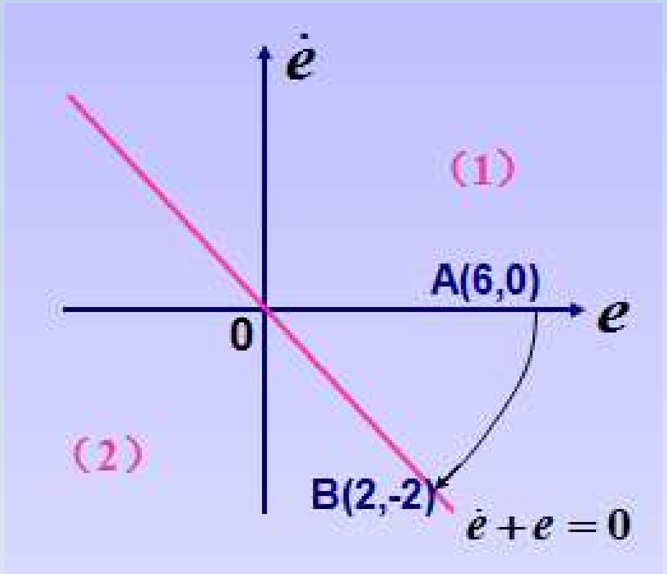


$$\begin{cases} \ddot{e}=-0.5 \\ \dot{e}=-0.5t+c_1 \\ e=-0.25t^2+c_1t+c_2 \end{cases}$$

带入初始条件 $e(0)=6,\ \dot{e}(0)=0$ 得：$c_1=0, c_2=6$

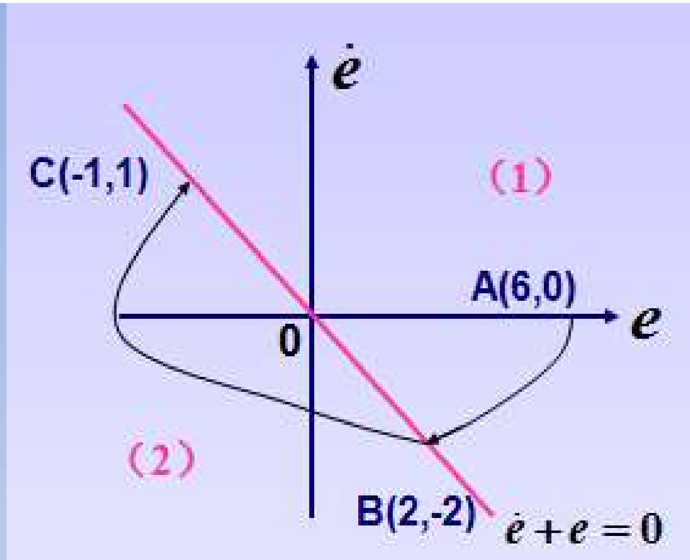
因此：
$$\begin{cases} e=-0.25t^2+6 \\ \dot{e}=-0.5t \\ e=-\dot{e}^2+6 \end{cases}$$

即相轨迹为一抛物线，系统从A出发与切换线交于B点，进入区域(2),容易确定B的坐标为（2，-2）



对于区域(2),有：

$$\begin{cases} \ddot{e} = 0.5 \\ \dot{e} = 0.5t + c_3 \\ e = 0.25t^2 + c_3 t + c_4 \end{cases}$$



此时初始条件为：$e_B = 2, \dot{e}_B = -2$

求解得：$c_3 = -2, c_4 = 2$

$$\therefore \begin{cases} \dot{e} = 0.5t - 2 \\ e = 0.25t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

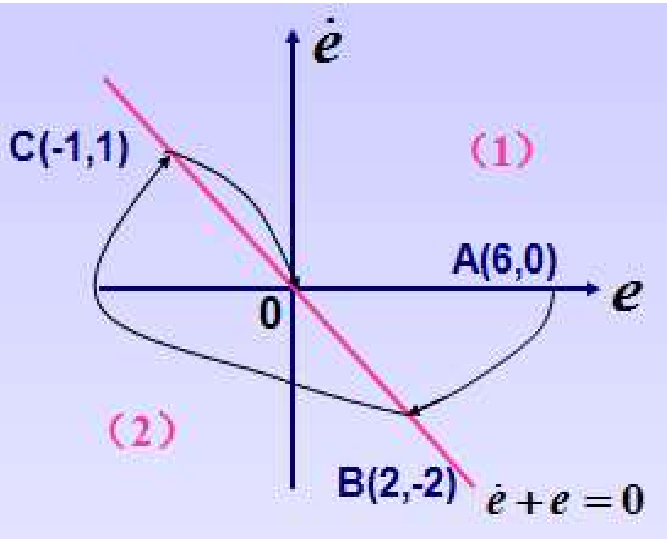
消去中间变量t得：$e = \dot{e}^2 - 2$

即系统沿抛物线从B运动到C点，C为相轨迹与切换线的交点,进入区域(1),即：

$$\begin{cases} e_C = \dot{e}_C^2 - 2 \\ \dot{e}_C + e_C = 0 \end{cases}$$

解得：$e_C = -1, \dot{e}_C = 1$

区域(1): $\begin{cases} \ddot{e} = -0.5 \\ \dot{e} = -0.5t + c_5 \\ e = -0.25t^2 + c_5 t + c_6 \end{cases}$



由初始条件$e_C = -1, \dot{e}_C = 1$得：

$c_5 = 1, c_6 = -1$ 即：$\begin{cases} \dot{e} = -0.5t + 1 \\ e = -0.25t^2 + t - 1 \end{cases}$

消去中间变量t得： $e = -\dot{e}^2$

显然系统沿抛物线由C点运动到原点。所需时间为：

$$t_{AO} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CO}$$

其中：t_{AB}： $\dot{e} = -0.5t$ $\quad -2 = -0.5t_{AB}$ $\quad \therefore \ t_{AB} = 4$

t_{BC}： $\dot{e} = 0.5t - 2$ $\quad 3 = 0.5t_{BC}$ $\quad \therefore \ t_{BC} = 6$

t_{CO}： $\dot{e} = -0.5t + 1$ $\quad -1 = -0.5t_{CO}$ $\quad \therefore \ t_{CO} = 2$

$$\therefore \ t_{AO} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CO} = 12\text{s}$$

例2：非线性系统结构如图8.8.2所示,其中：a=1, $tg\alpha_1=1$ $tg\alpha_2=1/2$. (1)作出系统从初始状态 $y(0)=-1, \dot{y}(0)=-1$ 出发的相轨迹;(2)概略地画出对应的$y(t)$曲线,并求出$y(t)$=0的各个t值;(3)当$y(t)$为周期运动时，求出运动周期的值。

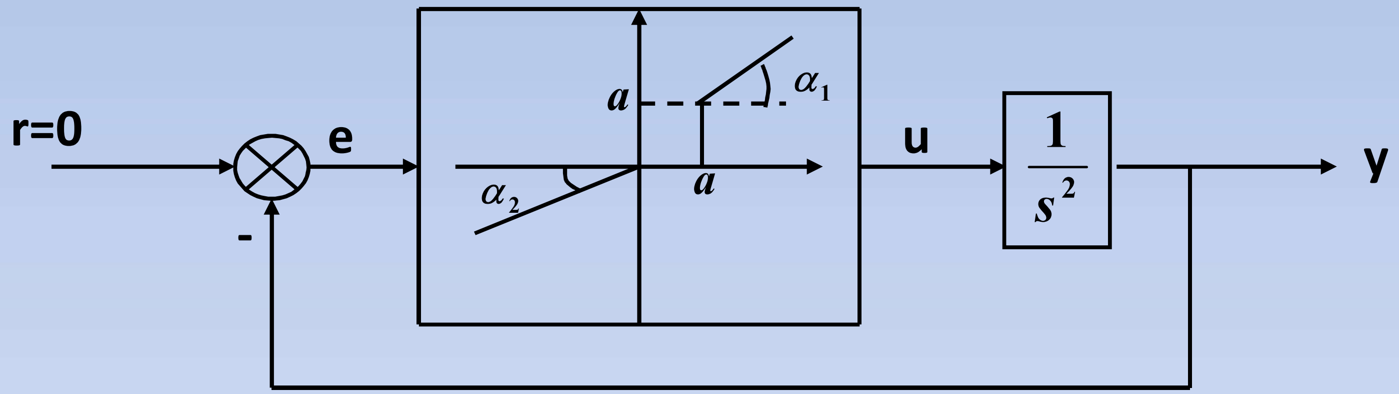


图8.8.2 非线性系统控制

解：列写运动方程：$\ddot{y}=u$

$$u=\begin{cases} a+(e-a)tg\alpha_1 & e>a \\ 0 & 0\le e\le a \\ etg\alpha_2 & e<0 \end{cases}$$

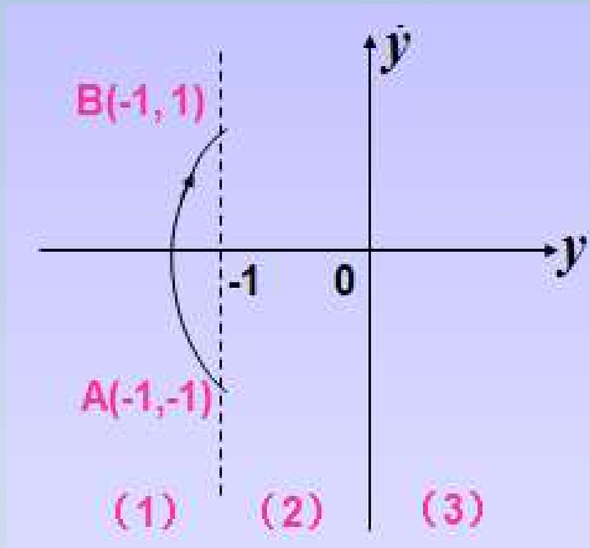
当r=0时，$e=-y$

代入式子中得：

$$\ddot{y}=u=\begin{cases}-y & y<-1 & \text{区域（1）}\\ 0 & -1\le y\le 0 & \text{区域（2）}\\ -0.5y & y>0 & \text{区域（3）}\end{cases}$$

系统有两条切换线y=-1和y=0,这两条切线分成3个区域。

区域(1),y<-1,有：$\ddot{y}=-y$



$$\ddot{y}+y=0 \;\rightarrow \lambda^2+1=0,\;\; \lambda=\pm j$$

$$\therefore\;\; y=c_1\cos t+c_2\sin t$$

$$\dot{y}=-c_1\sin t+c_2\cos t$$

代入初始条件A(-1,-1);求得

$$\therefore y=-\cos t-\sin t=-\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4}) \qquad \dot{y}=\sin t-\cos t=-\sqrt{2}\cos(t+\frac{\pi}{4})$$

显然有：$\dot{y}^2+y^2=2$　　　系统的相轨迹为一圆弧。

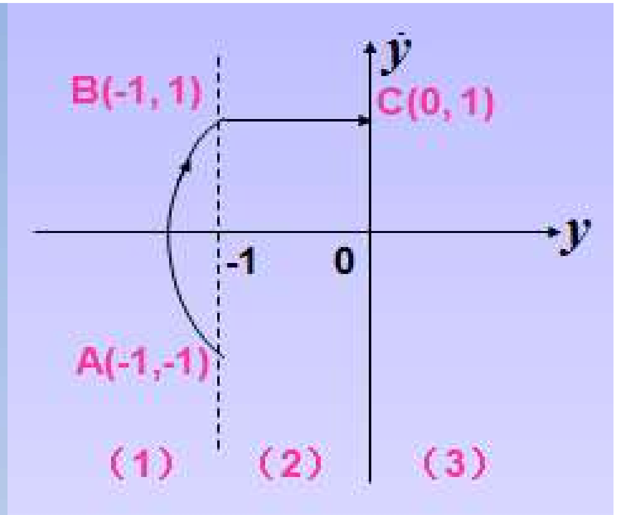
系统由A运动到B(-1,1)进入区域(2)。

区域(2): $\ddot{y}=0$

即：$\dot{y}=c_3$，$y=c_3t+c_4$

代入初始条件B(-1,1)可得：

$$c_3=1, c_4=-1 \quad \therefore \quad y=t-1,\ \ \dot{y}=1$$



系统相轨迹为一平行横坐标的直线,系统由B运动到C(0,1)，进入区域(3)。

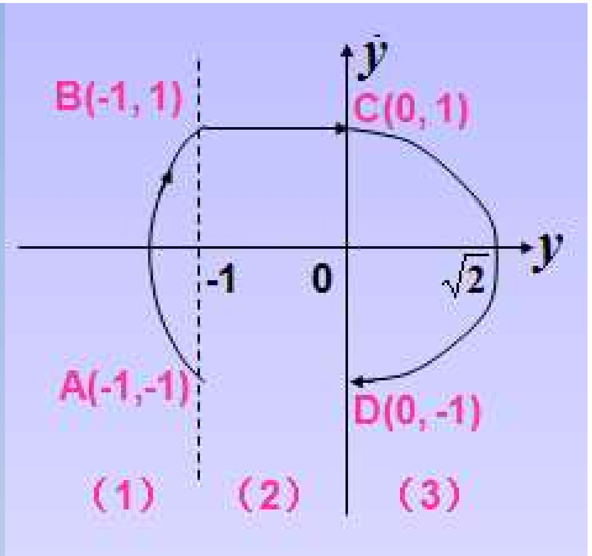
区域(3): $\ddot{y}=-0.5y$ $\quad \ddot{y}+\frac{1}{2}y=0 \rightarrow \lambda^2+\frac{1}{2}=0,\ \lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}j$

$$\therefore \quad y=c_5\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_6\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t \qquad \dot{y}=-\frac{\sqrt{2}}{2}c_5\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}c_6\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

带入初始条件C(0,1)可得：

$$c_5=0, c_6=\sqrt{2} \qquad \therefore \begin{cases} y=\sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ \dot{y}=\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$

消去中间变量t,可得：$\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\dot{y}^2=1$



由此可见，系统相轨迹为一椭圆，系统由C点运动到D(0,-1),又一次进入区域(2)。

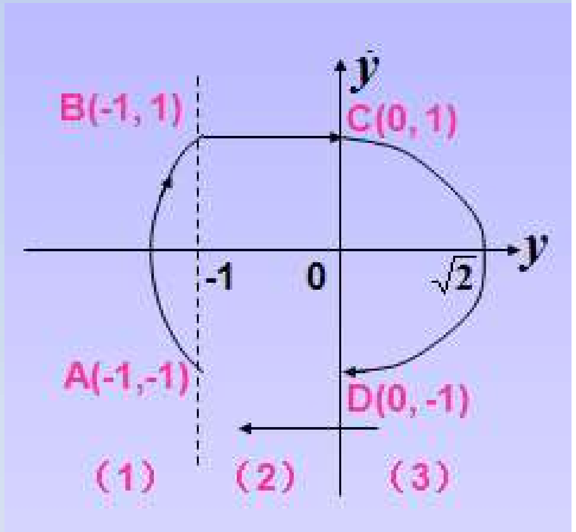
区域(2): $\ddot{y}=0$

$$\dot{y}=c_7,\quad y=c_7t+c_8$$

代入初始条件D(0,-1)可得：

$$c_7=-1,c_8=0$$

即：$\begin{cases} y=-t \\ \dot{y}=-1 \end{cases}$



显然系统轨迹为一直线，由D点运动到A点,形成封闭的相轨迹,系统会产生周期运动。

因此，t_{AB}： $y=-\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$ $\sin(t_1+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore t_1=\frac{\pi}{2}$

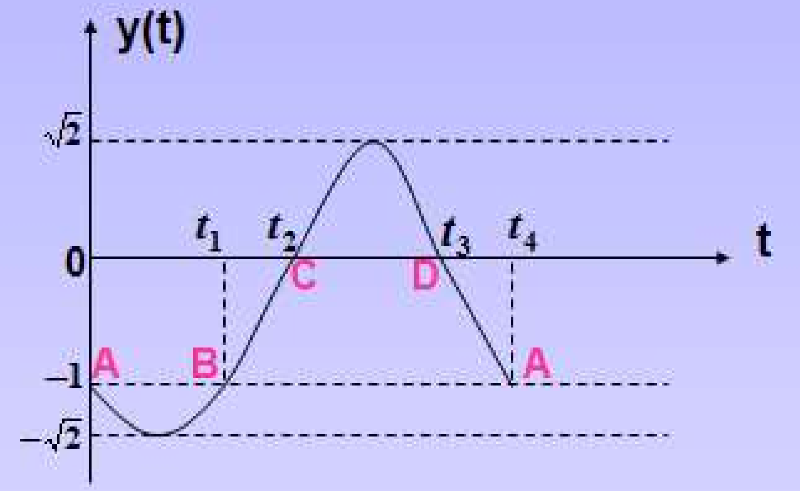
t_{BC}： $y=t-1$ $1=t_2-t_1$ $\therefore t_2=1+\frac{\pi}{2}$

t_{CD}： $y=\sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t$ $\frac{\sqrt{2}}{2}(t_3-t_2)=\pi$ $\therefore t_3=\sqrt{2}\pi+1+\frac{\pi}{2}$

t_{DA}： $y=-t$ $-1=-t_4+t_3$ $\therefore t_4=1+t_3$

所以周期为： $$T=t_4=2+\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\pi$$

粗略地画出$y(t)$曲线如右图所示：



$y(t)$曲线过零点的时间为$t_2=1+\frac{\pi}{2}$ $t_3=\sqrt{2}\pi+1+\frac{\pi}{2}$