8.5　用描述函数法分析非线性系统

显而易见，描述函数不能像线性系统的频率特性那样全面反映线性环节的动力学特性，但是在实际非线性系统的分析中,最关心的是系统能否产生自激振荡。如果系统一旦产生自激振荡，由于线性部分的低通滤波特性，非线性环节的输入可近似看成正弦输入,于是可用描述函数法来描述非线性环节的动态特性。如果系统一旦产生自激振荡，如何求出自激振荡参数(即自激振荡振幅和振荡频率),进而寻求克服自激振荡的方法。

一非线性系统结构如图8.5.1所示，假定输入为0,先分析一下系统产生自激振荡的条件,进而将奈奎斯特判据推广于非线性系统，判断系统稳定性。

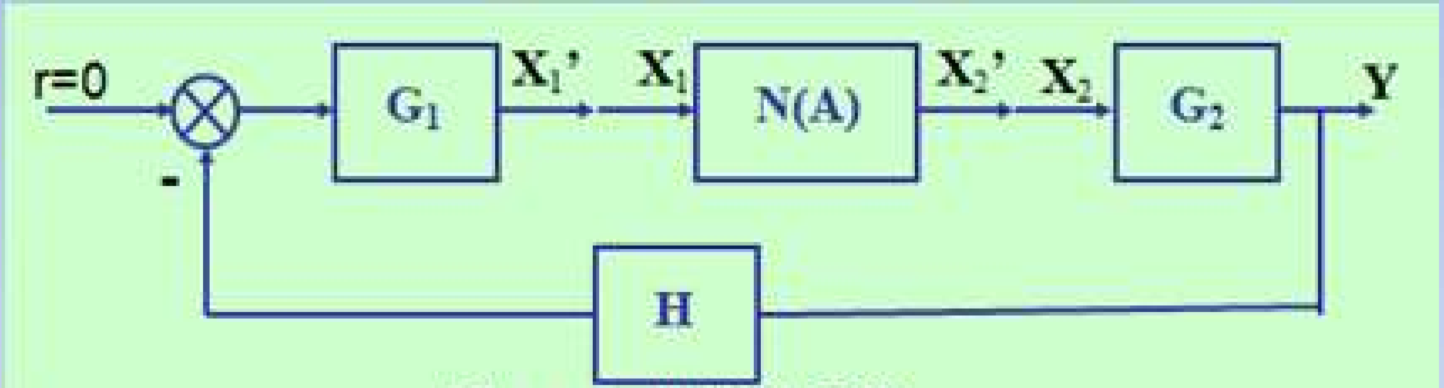


图 8.5.1 非线性系统

图中G_1,H,G_2为线性部分的传递函数，N(A)为非线性环节的描述函数,假定$X_2=A_2\sin\omega t$，有：

$$X_1'=-\left|G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)\right|A_2\sin(\omega t+\theta)$$

其中：$\theta=\angle G_1(j\omega)+\angle G_2(j\omega)+\angle H(j\omega)$

假定 $N(A)=\left|N(A)\right|e^{j\phi}$

则非线性环节的输出为：

$$x_2'(t)=-\left|N(A)\right|\left|G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)\right|A_2\sin(\omega t+\theta+\phi)$$

如果$x_2'(t)=x_2(t)$，则意味着产生了自激振荡,从而推出系统产生自激振荡的条件为：

$$\left|N(A)\right|\left|G_1(j\omega)G_2(j\omega)H(j\omega)\right|=1 \text{ 和 } \theta+\phi=(2n+1)\pi$$

令线性部分的传递函数为：$G(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)$

容易得出,系统产生自激振荡的条件是：$G(j\omega)=-\dfrac{1}{N(A)}$

系统一旦产生自激振荡，意味着在同一比例尺下的复平面上 G(jw) 曲线与负倒描述函数曲线有交点。由幅值条件和相角条件，得到两个方程式，可联立求解得到自激振荡的振幅和振荡频率。

根据自激振荡条件 $G(j\omega)=-\dfrac{1}{N(A)}$ 可将奈奎斯特判据用于非线性系统，从而判断系统稳定性。设系统的线性部分是最小相位的，则：

(1) 若 $G(jw)$ 轨迹没有被 $-\dfrac{1}{N(A)}$ 轨迹包围, 即当ω由0→∞时轨迹始终位于轨迹之左侧, 如图8. 5. 2所示, 则非线性系统是稳定的。而且两者相距越远, 系统相对稳定性越好。

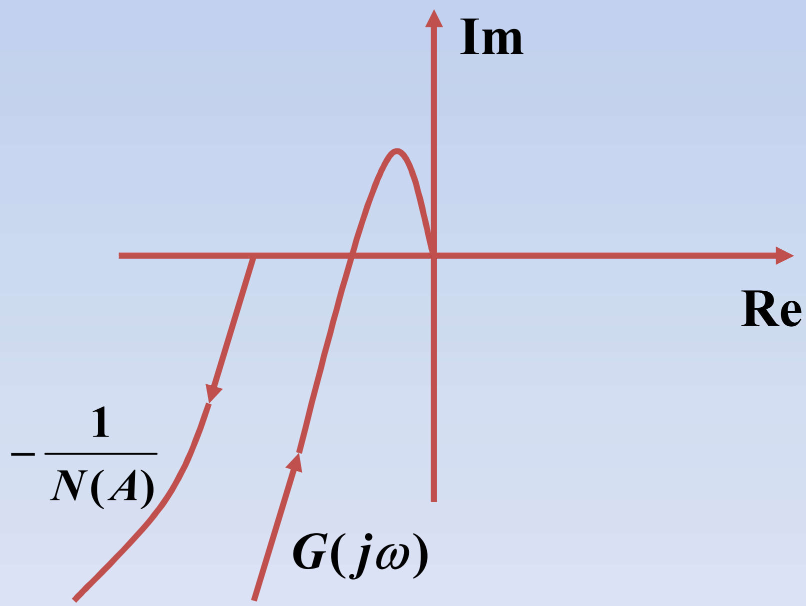


图 8.5.2 稳定系统

(2)若$G(jw)$轨迹被$-\frac{1}{N(A)}$轨迹包围,如图8.5.3所示,那么非线性系统是不稳定的。

(3) 若$G(jw)$轨迹与$-\frac{1}{N(A)}$轨迹相交,如图8.5.4所示,那么非线性系统会产生自激振荡。交点处$G(jw)$ 的频率为自激振荡的角频率,交点处$-\frac{1}{N(A)}$对应的幅值A为自激振荡的振幅值。

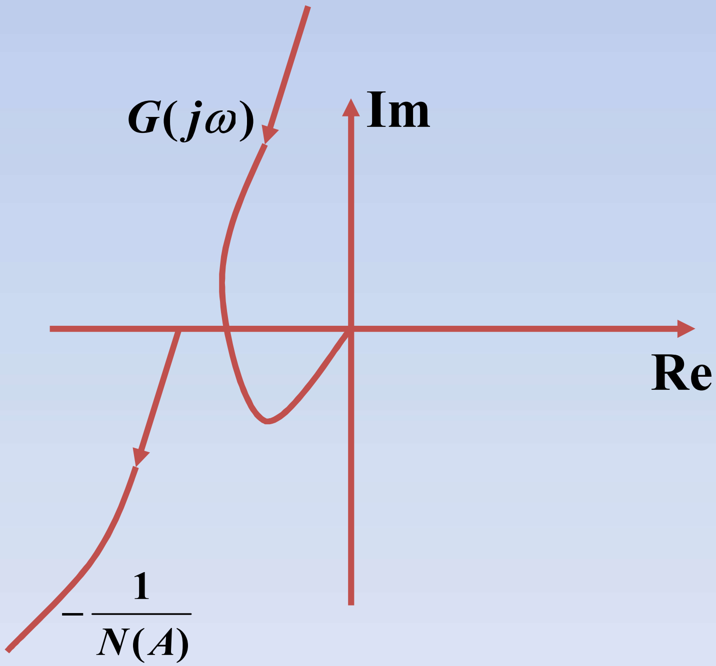


图 **8.5.3** 不稳定系统

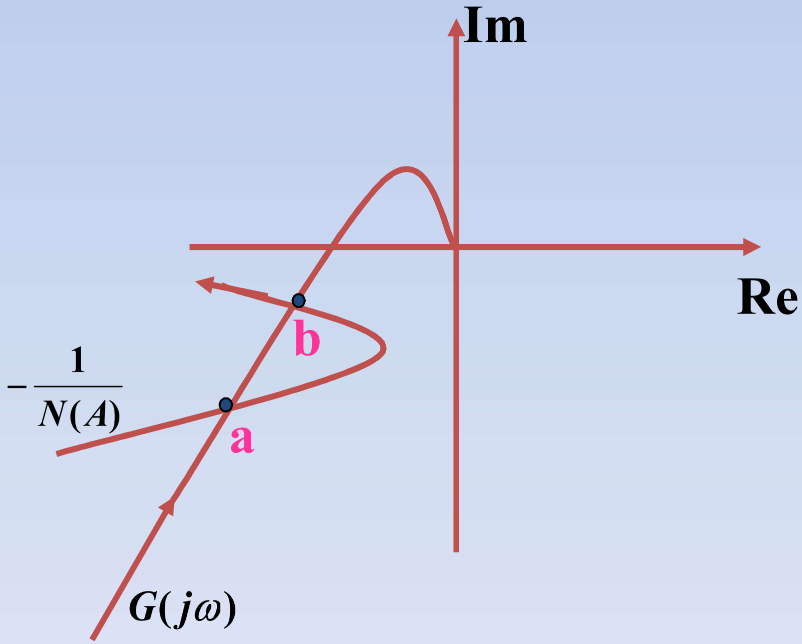
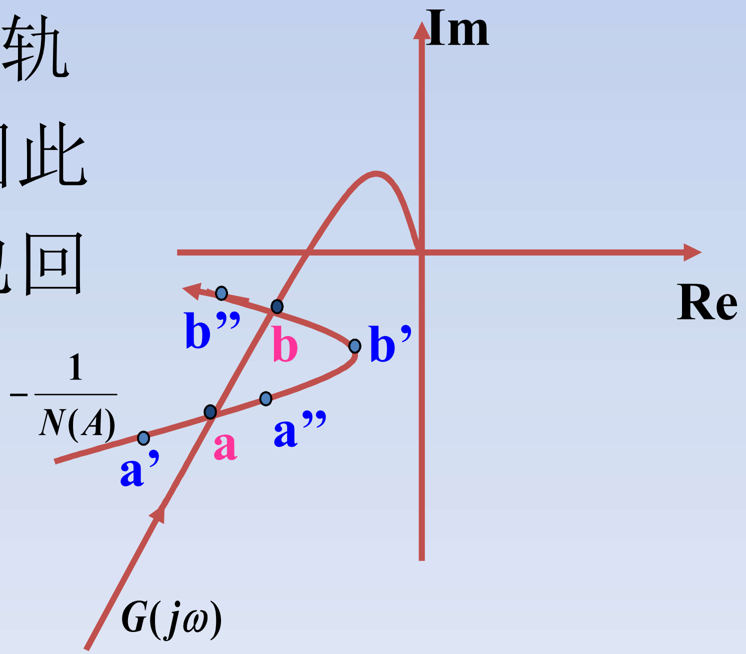


图 **8.5.4** 自激振荡系统

下面分析一下a点和b点对应的自激振荡：

先讨论图中交点a处自激振荡的稳定性。设系统工作在点a, 系统处于自激振荡状态。若扰动使系统输出的幅值增加, 即扰动使系统的工作改变到a″点, 这时由于$G(jw)$轨迹包围a″点, 系统处于不稳定状态, 因此系统输出发散，幅值增大, 系统状态更偏离a点。反之若扰动使系统输出的幅值减小并改变到a′点, 这时由于$G(jw)$轨迹不包围a′点, 系统处于稳定状态,因此系统输出收敛,幅值减小,系统状态也回不到a点。所以存在任何小的干扰，系统总是不能工作在a点。因此，a点是一个不稳定的自激振荡。



用类似的方法,可以知道b点所对应的自激振荡状态是稳定的自激振荡状态。

自振荡稳定性可以从振荡幅值增加时，负倒特性轨迹的移动方向判别。即：

当负倒特性轨迹从不稳定区进入稳定区时，交点处的自振荡是稳定的自激振荡。反之，当负倒特性轨迹从稳定区进入不稳定区时，交点处的自振荡是不稳定的自振荡。

自激振荡的振幅和振荡频率由下面二式求得：

$$\left|G(j\omega)N(A)\right| = 1 \text{和} \theta + \varphi = -\pi$$

例一:一继电控制系统结构如图8.5.5所示,继电器参数a=1, b=3,试分析系统是否产生自激振荡,若产生自激振荡，求出振幅和振荡频率。若要使系统不产生自激振荡，应该如何调整继电器参数。

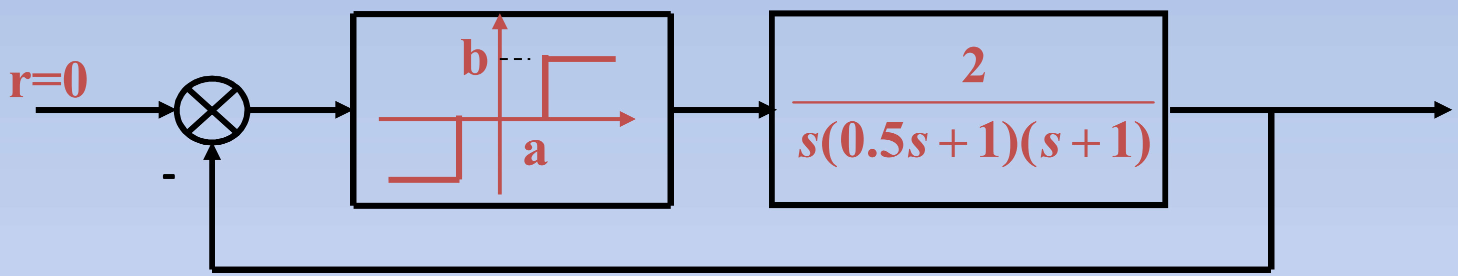


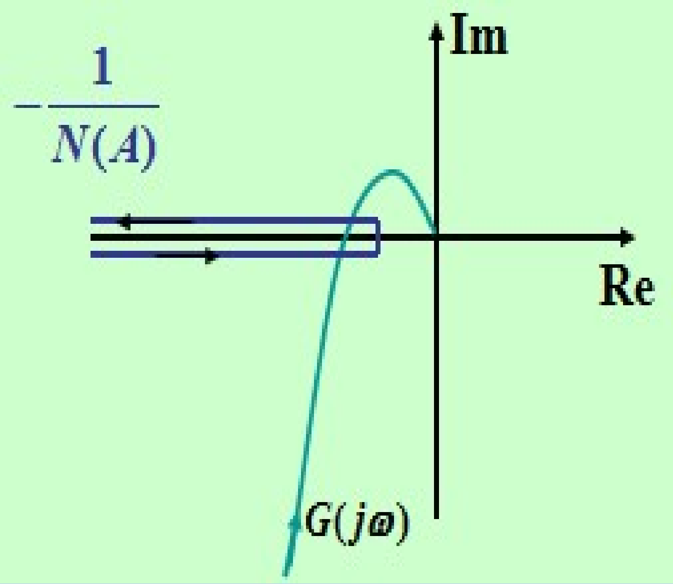
图8.5.5　继电控制系统

解：带死区的继电特性描述函数为：$N(A)=\dfrac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{A}\right)^2}$

$$\therefore\quad -\frac{1}{N(A)}=-\frac{\pi A}{4b\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{A}\right)^2}}$$

其中$A=a,-\dfrac{1}{N(A)}\to-\infty$； $A\to\infty,-\dfrac{1}{N(A)}\to-\infty$

可见$-\frac{1}{N(A)}$曲线在负实轴上有极值点。



$$令\ \frac{d}{dA}\left(-\frac{1}{N(A)}\right)=0 \quad 得:1-2(\frac{a}{A})^2=0$$

$$\therefore A=\sqrt{2}a$$

将a和b带入得：$A=\sqrt{2}$

$$-\frac{1}{N(A)}\bigg|_{A=\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{6}\approx -0.52$$

$$而：\ G(s)=\frac{2}{s(0.5s+1)(s+1)}$$

$$有：\ G(j\omega)=-\frac{3\omega}{\omega(0.25\omega^4+1.25\omega^2+1)}-j\frac{2(1-0.5\omega^2)}{\omega(0.25\omega^4+1.25\omega^2+1)}$$

令虚部为0，解得：$\omega=\sqrt{2}$

带入实部可得：$\mathrm{Re}\,G(j\omega)\big|_{\omega=\sqrt{2}}=-\frac{1}{1.5}\approx -0.66$

如上图所示，两个交点中必有一个自激振荡点。

$$令:-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi A}{12\sqrt{1-\left(\frac{1}{A}\right)^2}}=-\frac{1}{1.5}$$

求得交点处的幅值为：$A_1=1.11$，$A_2=2.3$

经过分析,系统会产生一个稳定的自激振荡，自激振荡的振幅为2.3，频率为$\sqrt{2}$ （A_1对应的为不稳定的自激振荡点）

为了使系统不产生自激振荡，可令：

$$-\frac{1}{N(A)}=-\left.\frac{\pi A}{4b\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}\right|_{A=\sqrt{2}a}\leq-\frac{1}{1.5}$$

$$解得:\frac{b}{a}\leq\frac{1.5\pi}{2}\approx 2.36$$

按上式调整a和b的比例，取b=2a，即可保证系统不产生自激振荡。

例二：已知一多环控制系统如图8.5.6所示，当$G_1(s)=1$时，该系统工作在饱和特性线性段的无阻尼自然振荡频率$\omega_n=2$，当$G_1(s)=1+\frac{1}{8s}$时，求使系统稳定的最小比值$\frac{T_1}{T_2}$。

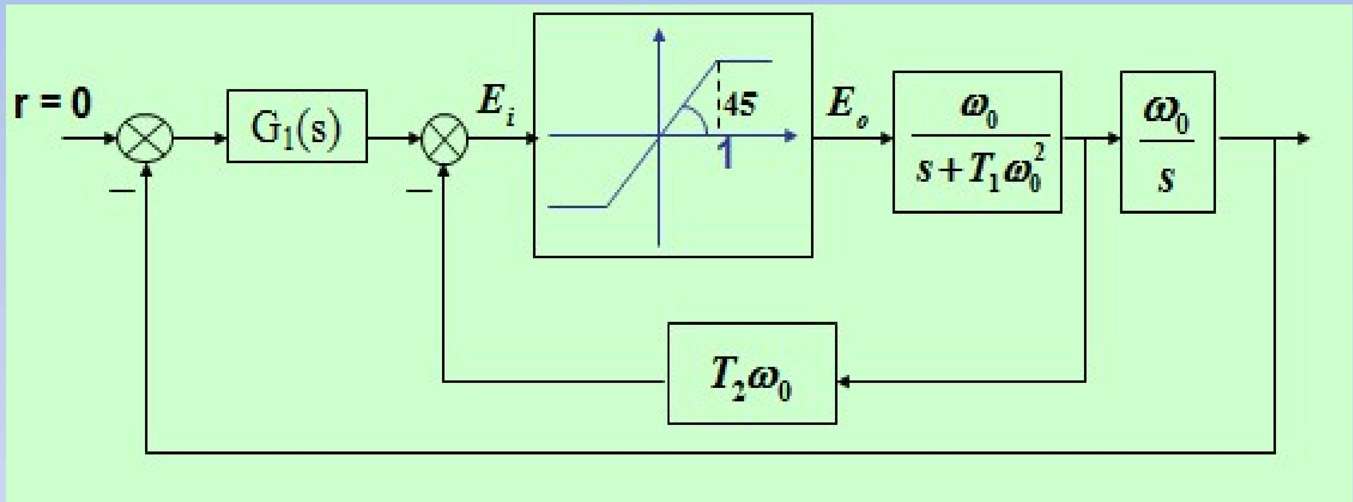


图8.5.6 多环控制系统

解：当$G_1(s)=1$时，多环系统的内环传递函数为：

$$G_{内}(s)=\frac{\dfrac{\omega_0}{s+T_1\omega_0^2}}{1+\dfrac{T_2\omega_0^2}{s+T_1\omega_0^2}}=\frac{\omega_0}{s+(T_1+T_2)\omega_0^2}$$

整个系统闭环传递函数为：

$$G_B(s)=\frac{\dfrac{\omega_0^2}{s[s+(T_1+T_2)\omega_0^2]}}{1+\dfrac{\omega_0^2}{s[s+(T_1+T_2)\omega_0^2]}}=\frac{\omega_0^2}{s^2+(T_1+T_2)\omega_0^2 s+\omega_0^2}$$

$$\therefore\begin{cases}\omega_0=\omega_n=2\\ T_1+T_2=\varsigma=1\end{cases}$$

当$G_1(s)=1+\dfrac{1}{8s}$时，

$$G_{内}(s)=\frac{\dfrac{\omega_0}{s+T_1\omega_0^2}N(A)}{1+\dfrac{T_2\omega_0^2}{s+T_1\omega_0^2}N(A)}=\frac{\omega_0 N(A)}{s+T_1\omega_0^2+T_2\omega_0^2 N(A)}$$

此时的开环传递函数为：

$$G(s)=G_1(s)G_{内}(s)\frac{\omega_0}{\mathrm{s}}=\frac{\omega_0^2(1+\dfrac{1}{8s})N(A)}{s[s+T_1\omega_0^2+T_2\omega_0^2 N(A)]}$$

由闭环系统的特征方程$1+G(s)=0$得：

$$s^2+T_1\omega_0^2 s+T_2\omega_0^2 sN(A)+\omega_0^2(1+\frac{1}{8s})N(A)=0$$

将$\omega_0=2$带入上一个等式得：

$$8s^3+32T_1s^2+(32T_2s^2+32s+4)N(A)=0$$

$$\text{因此}-\frac{1}{N(A)}=\frac{8T_2s^2+8s+1}{2s^3+8T_1s^2}=\frac{8T_2s^2+8s+1}{s^2(2s+8T_1)}$$

$$\text{等效的}G(s)=-\frac{1}{N(A)}=\frac{8T_2s^2+8s+1}{s^2(2s+8T_1)}$$

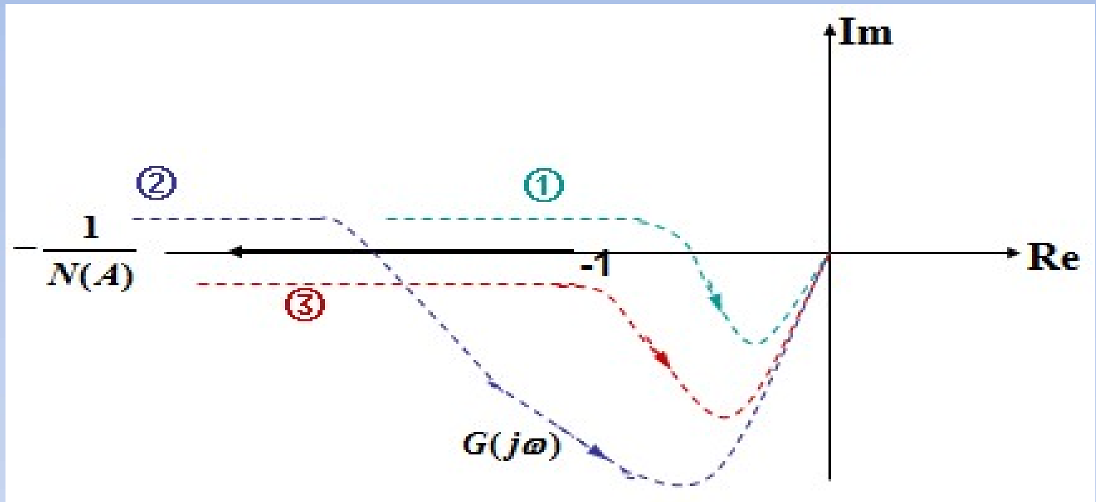
$$\text{有：}\quad G(j\omega)=-\frac{4T_1-32\omega^2T_1T_2+8\omega^2}{2\omega^2(\omega^2+16T_1^2)}+j\frac{32T_1-1+8T_2\omega^2}{2\omega(\omega^2+16T_1^2)}$$

而非线性部分对应的描述函数为：

$$N(A)=\frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}\frac{1}{A}+\frac{1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{1}{A}\right)^2}\right]$$

$$\text{有：}-\frac{1}{N(A)}=-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\left[\sin^{-1}\frac{1}{A}+\frac{1}{A}\sqrt{1-\left(\frac{1}{A}\right)^2}\right]}$$

由于两个参数未知,$G(jw)$曲线有如下三种可能,如下图所示,为保证系统能稳定运行,选择参数满足曲线3的形状。曲线3保证它与负实轴没有交点。为此令虚部为0,



有:$\frac{32T_1 - 1 + 8T_2\omega^2}{2\omega(\omega^2 + 16T_1^2)} = 0$　　求得:$\omega = \sqrt{\frac{1-32T_1}{8T_2}}$

曲线3满足ω无解, 只需满足$1\text{-}32T_1 < 0$,即$T_1 > \frac{1}{32}$　　而$T_1 + T_2 = 1$

有:$T_2 < \frac{31}{32}$　于是求得使系统稳定时比值的最小值为$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{31}$