7.4 z变换

7.4.1 Z变换的定义

拉普拉斯变换（又称L变换）和傅里叶变换（又称F变换）等积分变换，在微分方程求解中获得了广泛的应用。线性常系数微分方程通过L变换变成代数方程，从而使求解微分方程得到简化。因此，拉普拉斯变换与傅里叶变换是分析线性连续系统的主要工具。

事实上，Z变换的历史比较古老，其基本思想是18世纪英国数学家德．莫费（De　Moivre）在概率论的研究中首次提出的。从19世纪的拉普拉斯至20世纪的沙尔（H．L．Seal），其间许多人在这方面都作出了贡献。然而，在那样一个较为局限的数学领域中，Z变换理论没有得到充分的运用和发展，直到本世纪50年代以后，计算机控制系统的迅速发展，为Z变换的研究与应用开辟了广阔的天地

连续信号 $f(t)$经采样后得到的脉冲序列为

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT)$$

对上式进行Laplace变换，得

$$F^*(s)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

由于采样信号的拉氏变换是**s**的超越函数，出现指数项 e^{-kTs} ，无法得到象线性连续系统中那样的特征方程为线性代数方程。

z变换将复平面问题转化为Z平面上的问题：

采样信号的拉氏变换为

s平面：
$$X^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-kTs}$$

引入变量 $z=e^{Ts}$， $s=\frac{1}{T}\ln z$ ，则得z变换的定义式：

z平面 ：
$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$$
$$X(z)=x(0)z^{0}+x(T)z^{-1}+x(2T)z^{-2}+\dots$$

由此可看出 $X(z)$ 是关于复变量 z^{-1} 的幂级数 。

x*(t)的z 变换记为Z[x*(t)]，

$$Z[x^*(t)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

几点说明

1) 在控制工程中，离散信号x*(t)通常由对连续信号x(t)采样得到，所以习惯上称X(z) 是x(t) 的Z变换，但实际上是指x(t) 经采样后得到的离散信号x*(s)的Z变换。同样，习惯上也称X(z)是X(s) 的Z变换，本书中也这样称呼，不再作说明；

2) X(s) 是 x(t) 的L变换的记号， X(z) 是{x(kT)}的Z变换的记号，切不要以为X(z) 是中的s用 z 代替后的式子，即 $X(z) \neq X(s)|_{s=z}$ ；

3) 连续函数x(t) 的L变换定义式

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

7.4.2 z变换表达式的求法

求采样信号的 Z 变换方法很多，常用的方法有：
按定义求，部分分式法，留数计算法。

1、级数求和法

知道连续函数x(t)在各采样时刻的离散值x*(t)，按定义求。

例7-4 求 $x_1(t)=1(t)$ 和 $x_2(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$ 的Z变换表达式。

【解】 $$X_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_1(kT)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

$$X_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_2(kT)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots=\frac{z}{z-1}$$

由该例可知，在z变换中只考虑采样时刻的信号值，因此连续信号与采样后的断续信号的z变换结果相同。

例7-5 求$x(t)=t$ 的Z变换表达式。

$$X(z)=Z\big(x(t)\big)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}kTz^{-k}=Tz^{-1}+2Tz^{-2}+3Tz^{-3}+\cdots$$

$$=Tz^{-1}(1+2z^{-1}+3z^{-2}+\cdots)=Tz^{-1}(\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}+\cdots)$$

$$=Tz^{-1}\frac{\frac{1}{1-z^{-1}}}{1-z^{-1}}=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}=\frac{Tz}{(z-1)^{2}}$$

练习：求指数函数 $f(t)=e^{-at}$ 的z变换。

解：设 $f(t)=e^{-at}$，则

$$F(z)=1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-a2T}z^{-2}+\cdots+e^{-akT}z^{-k}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}},\quad (|z|>e^{-aT})$$

2 部分分式法

① 先求出已知连续时间函数$e(t)$的拉氏变换$E(s)$；

② 将$E(s)$展开成部分分式之和的形式；

③ 求拉氏反变换，再求Z变换$E(z)$。

练习 已知 $G(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$求Z变换表达式。

$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{\left(1-e^{-aT}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$$

例7-6 设 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，求 $f^*(t)$ 的 z变换。

解：
$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

上式两边求Laplace反变换，得

$$f(t)=1-e^{-t},\quad (t>0)$$

再由例7-4和练习有

$$F(z)=z[1(t)-e^{-t}]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$=\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

注意：

- 不能直接将 $s=\frac{1}{T}\ln z$ 代入 $F(s)$ 来求 $F(z)$，因为是针对采样信号 $f^*(t)$ 进行z变换。

3. 留数计算法

已知连续时间函数 $x(t)$的拉氏变换 $X(s)$ 及其全部极点 $s_i(i=1, 2, 3,\cdots)$ ，则$x(t)$ 的z 变换可通过下列留数计算式求得，即

$$X(z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[X(s_i)\frac{z}{z-e^{st}}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{(r_i-1)!}\cdot\frac{d^{r_i-1}}{ds^{r_i-1}}\left[(s-s_i)^{r_i}X(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]\right\}\Bigg|_{s=s_i}$$

式中：r_i 重极点 s_i 个数；n 彼此不等的极点个数。

例（教材P222, 例7-9）

4. 查表法

把常用的函数及其Z变换列成对照表，求取Z变换时，直接查表。这种方法在实际工作中非常简单有用。书中给出了一张比较详细的Z变换表。当然，不可能所有函数的Z变换式都能在表中直接查到。在查表时，首先对所求函数作一些变化，以适合Z变换表。例如，进行部分分式展开，或应用Z变换基本定理等。

常用普通时间函数的 Z 变换见表7-1

表7-1 Z 变换表

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$f(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{z}{z-1}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{zT}{(z-1)^2}$
$t^2/2$	$\dfrac{1}{s^3}$	$\dfrac{z(z+1)T^2}{2(z-1)^3}$

e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{zTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$\frac{z}{z-a}$ $(a>0)$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-z\cos\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-at}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-at}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

7.4.3 z变换的性质

1、线性定理

$$Z[a_1x_1(t)+......+a_nx_n(t)]=a_1X_1(z)+.......a_nX_n(z)$$

其中a_1, a_2……a_n为常数。

证明：

$$Z[a_1 f_1^*(t)+a_2 f_2^*(t)]$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}[a_1 f_1(kT)+a_2 f_2(kT)]z^{-k}$$

$$=a_1\sum_{k=0}^{+\infty} f_1(kT)z^{-k}+a_2\sum_{k=0}^{+\infty} f_2(kT)z^{-k}$$

$$=a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$$

2、时域位移定理

$$Z[x(t+mT)] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(kT) z^{-k} \right]$$ 向前差分定理

$$Z[x(t-mT)] = z^{-m} X(z)$$ 向后差分定理

注 向后差分定理仅在$k<0$时，$X(kT)=0$的情况下才成立。

证明：由Z变换定义式有：

$$Z\left[x(t+mT)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+mT)z^{-k}z^{-m}z^{m}$$

$$=z^{m}[\sum_{k=m}^{\infty}x(kT)z^{-k}+\sum_{k=0}^{m-1}x(kT)z^{-k}-\sum_{k=0}^{m-1}x(kT)z^{-k}]$$

$$=z^{m}[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(kT)z^{-k}]$$

$$Z\left[x(t-mT)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT-mT)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k-m)z^{-k}z^{m}z^{-m}$$

$$=z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}x(k-m)z^{-(k-m)}$$

由于$k<0$时，$X(kT)=0$

$$=z^{-m}\sum_{k'=-m}^{\infty}x(k')z^{-k'}=z^{-m}X(z)$$

3、复域位移定理

若 $Z\left(x(t)\right)=X(z)$，则 $Z\left[e^{\pm at}x(t)\right]=X(e^{\mp aT}z)$

证明 $Z[e^{\pm at}x(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{\pm akT}x(kT)e^{-kTs}=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-kTs\pm akT}$

$=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-kT(s\mp a)}$

由于	$z=e^{Ts}$
现令	$z_2=e^{Ts\mp aT}=e^{\mp aT}z$

$=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z_2^{-k}=X\left(z_2\right)=X(e^{\mp aT}z)$

4、微分定理

若 $Z(x(t)) = X(z)$，则 $Z[tx(t)] = -Tz\frac{d}{dz}X(z)$

证明 $$-Tz\frac{d}{dz}X(z) = -Tz\lim_{N\to\infty}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{N}x(kT)z^{-k}$$

$$= -Tz\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}x(kT)(-k)z^{-k-1}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}kTx(kT)z^{-k} = Z[tx(t)]$$

【例】已知 $x(t) = t^3$, 求Z变换表达式。

【解】由于 $$Z(t^2) = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$Z(t^3) = -Tz\frac{d}{dz}\left[\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}\right] = \frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

5、初值定理 $x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)$

证明 $X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$ $\lim_{z\to\infty} X(z)=\lim_{z\to\infty} x(0)+x(T)z^{-1}+\cdots=x(0)$

用于分析过渡过程，即原函数的0值等于z变换函数 $z\to\infty$ 时的极限。

6、终值定理 $x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$

证明

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$$Z[x(t+T)]=\sum_{k=0}^{\infty} X[(k+1)T]z^{-k}=z\left(X(z)-x(0)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[x(k+1)T-x(kT)]z^{-k}=(z-1)X(z)-zx(0)$$

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)-zx(0)]=x(\infty)-x(0)$$

7. 卷积定理

设$x(nT)$和$y(nT)$为两个采样函数，其离散卷积定义为

$x(nT)*y(nT)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y[(n-k)T]$，则卷积定理为：

$$Z[x(nT)*y(nT)]=X(z)Y(z)$$

8. 乘以指数序列性质

若 $Z[x(nT)]=X(z)$ **a**为整数，则

$$Z[a^n x(nT)]=X(a^{-1}z)$$

9. 比例尺变换性质

若 $Z[x(nT)]=X(z)$

则

$$Z[x(anT)]=X(z^{1/a})$$

7.4.4 z反变换

- z反变换是z变换的***逆运算***。其目的是由象函数 $X(z)$ 求出所对应的采样脉冲序列（或 $x^*(t)$），记作 $x(nT)$

$$Z^{-1}\left[X(z)\right]=x(nT)$$

注意

z反变换只能给出采样信号 $x^*(t)$，而不能给出连续信号 x(t)。

Z变换将分析差分方程的问题转换为分析代数方程问题，然后通过求x(z)的原函数，可求出离散系统的时域响应。这就是z反变换。

(2) Z 反变换的求法

求 Z 反变换的方法很多，常用的方法有：长除法，部分分式法，留数计算法。作反变换时，仍假定信号序列是单边的，即 $x(n)=0$ ，$n<0$ 。

1、幂级数法：（长除法）

Z 变换函数 $X(z)$，通常可表示为两个多项式之比，

即 $X(z)=\dfrac{M(z)}{N(z)}$ 。用综合除法将其展成 z^{-1} 的收敛的幂级数形式，即

$$X(z)=\frac{M(z)}{N(z)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^{-n}=C_0+C_1z^{-1}+C_2z^{-2}+\cdots+C_nz^{-n}+\cdots$$

式中：C_n（$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$）就是 $x(nT)$ 在各采样时刻 $t=nT$ 的值 $C(nT)$。

Z变换函数，通常可表示为两个Z的多项式之比，一般可写成：

$$X(z)=\frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad (m \le n)$$

在实际情况下，$n \ge m$ 。用分母除分子，并将商按 z^{-1} 的升幂排列得：

$$X(z)=c_0+c_1 z^{-1}+\cdots+c_k z^{-k}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

则

$$x^*(t)=c_0\delta(t)+c_1\delta(t-T)+\cdots+c_k\delta(t-kT)+\cdots$$

比较系数法

设
$$X(z)=\frac{M(z)}{N(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

据Z变换定义，有

$$X(z)=x(0)+x(T)z^{-1}+x(2T)z^{-2}+\cdots+x(nT)z^{-n}+\cdots$$

即

$$\begin{aligned}
&b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m=\\
&x(0)\left(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\right)+\\
&x(T)z^{-1}\left(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\right)+\\
&x(2T)z^{-2}\left(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\right)+\\
&+\cdots+\\
&x(nT)z^{-n}\left(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\right)
\end{aligned}$$

对上述恒等式，同次幂系数相等，注意到上式左端最高次项是 z^m,据此可以很方便地求出前 $m+1$项系数值。

例7-7 已知z变换函数为

$$F(z)=\frac{z}{(z-2)(z-3)}$$

求其z反变换。

解：

由 $$F(z)=\frac{z}{z^2-5z+6}=\frac{z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}$$

运用长除法得

$$F(z)=z^{-1}+5z^{-2}+19z^{-3}+65z^{-4}+\cdots$$

由此得

$$f(0)=0,\quad f(T)=1,\quad f(2T)=5,\quad f(3T)=19,\quad f(4T)=65,\cdots$$

于是脉冲序列可以写成

$$f^*(t)=\delta(t-T)+5\delta(t-2T)+19\delta(t-3T)+65\delta(t-4T)+\cdots$$

2、部分分式法

这种方法的依据是**Z** 变换的线性性质，**Z** 变换式 $X(z)$ 通常是**z** 的有理分式。只要将 $X(z)$ 的有理分式展开为部分分式，逐项查**Z** 变换表，就可以得到反变换式。

这里与拉氏变换不同的是，不是直接将 $X(z)$ 展开，而是将展开 $X(z)/z$ ，道理是，在**Z**变换表上，基本变换式中普遍含有因子**z**，因此，若展开 $X(z)/z$ ，即把 $X(z)$ 中的因式**z**提出来，可保证分解后的各个分式都含有**z**因子。

部分分式法又称为查表法，其基本思想是将X(z)/z展开成部分分式，

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-z_i}$$

然后查**z**变换表，即可求得原函数 $x(kT)$。

设

$$X(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

先求出 $X(z)$ 的特征根，即将其分母分解因式，形如：

$$X(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}{a_0\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)}$$

在工程上，多有极点都是一阶极点的情况，即分母多项式中无重根时，上式则可化为：

$$X(z)=z\left(\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_n}{z-z_n}\right)$$

其中系数A_i，可由式决定：

$$A_i=\left[(z-z_i)\frac{X(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=z_i}$$

例7-8 已知z变换函数

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

求其z反变换。

解： 首先将 $\frac{F(z)}{z}$ 展成部分分式

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{z-e^{-T}}$$

$$K_1=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)F(z)=\frac{1}{1-e^{-T}}$$

$$K_2=\lim_{z\to e^{-T}}\left(\frac{z-e^{-T}}{z}\right)F(z)=-\frac{1}{1-e^{-T}}$$

$$F(z)=\frac{1}{1-e^{-T}}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad f(nT)=\frac{1}{1-e^{-T}}\left(1-e^{-nT}\right)$$

$$f^*(t)=\frac{1}{1-e^{-T}}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-e^{-kT})\delta(t-kT)$$

3、留数法：又称反演积分法。

– 由z变换的定义可知

Γ 包围了 $F(z)z^{k-1}$ 的所有极点

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)z^{-k}$$

$$F(z)z^{m-1}=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)z^{m-k-1}$$

$$\oint_{\Gamma} F(z)z^{m-1}dz=\oint_{\Gamma}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)z^{m-k-1}\right]dz$$

$$\oint_{\Gamma} F(z)z^{m-1}dz=\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)\oint_{\Gamma} z^{m-k-1}dz$$

设$F(z)z^{k-1}$的极点为 $z_i, i=1,2,\cdots,n$ ，则

$$f(kT)=\sum_{i=1}^{n} res[F(z)z^{k-1}, z_i]$$

$$Res\left[z^{(k-1)}x(z)\right]=\lim_{z\to z_i}\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[(z-z_i)^r z^{k-1}x(z)\right]$$

其中*Res*[]表示函数的留数。

例7-9 已知z变换函数为

$$F(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

试用留数法求z反变换。

解：

$$F(z)z^{k-1} = \frac{10z^k}{(z-1)(z-2)}$$

- 上式有两个极点$z_1 = 1$和$z_2 = 2$，且

$$res[F(z)z^{k-1},1] = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)z^{k-1} = -10$$

$$res[F(z)z^{k-1},2] = \lim_{z\to 2}(z-2)F(z)z^{k-1} = 10\cdot 2^k$$

所以

$$f(kT) = 10(2^k - 1) \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

3）三种z反变换法的比较

部分分式法通过Z变换表7−1可方便地求得 $x(t)$,留数计算法可以直接求出 $x(nT)$ 序列，因而容易求得$x^*(t)$。

但这两种方法有一个共同的特点，都需要知道 $X(z)$的全部极点,这意味着要求解高阶代数方程，这是一件困难的事，因此在应用上有一定的局限性，一般不宜用于高阶采样系统。

而长除法却没有这种限制，通用性好。它的缺点是计算起来麻烦，而且往往得不到闭合的表示形式。