9.1 引言

经典控制理论

研究对象：单输入、单输出、线性定常系统

描述方法：微分方程、传递函数、频率特性（外部描述方法）

分析方法：时域分析法、根轨迹法、频率特性法

以上方法用来分析和设计线性、定常单变量系统是很有效的。

局限性　不能适用非线性系统、时变系统、多变量系统的分析与设计

随着生产过程自动化水平的提高，控制系统的任务越来越复杂，控制精度要求越来越高，以线性代数理论和状态空间分析法为基础的现代控制理论迅速发展起来。

1950年代，是个控制理论的“混乱时期”。

- Bellman 动态规划法
- Pontryagin 极大值原理
- Kalman 可控、可观性理论
- 极点配置
- 观测器
- 内模原理

1960年代，产生了“现代控制理论”（状态空间法）。

至1970年代前半期，为状态空间法的全盛时期。

在数学工具、理论基础和研究方法上不仅能提供系统的外部信息（输出量和输入量），而且还能提供系统内部状态变量的信息。

它无论对线性系统或非线性系统，定常系统或时变系统，单变量系统或多变量系统，都是一种有效的分析方法。

基本方法：状态方程　（时域）

1980年代，在计算机技术的支持下，多变量系统的频域设计法出现了。

H.H. Rosenbrock ; A.G.J. Macfarlane 英国学派

既约分解表示法

最优控制

自适应控制

鲁棒控制

H∞控制

模糊控制

现代控制理论

经典控制向现代控制理论的过渡　卡尔曼将状态空间引入控制理论

现代控制理论　最优控制、最优估计与滤波、系统辨识、随机控制、自适应控制等

现代控制理论基础　线性系统理论（非线性系统理论、大系统理论也受到线性系统理论的影响），既能反应系统的外部特性，还可揭示系统内部的结构特性

线性系统理论的分支　状态空间法、线性系统的几何理论、代数理论、多变量频域法

研究对象　不仅适用于单输入、单输出、线性定常系统，还适用于多输入多输出非线性时变系统

9.2 状态空间和状态方程

9.2.1　基本概念

状态、状态变量、状态向量、状态空间、状态轨迹
状态方程、输出方程、状态空间表达式

- 状态　在时间域中，描述系统行为、运动信息的变量集合。

- 状态变量　能确定系统运动状态的最小一组变量（已知 $t \geq t_0$ 时刻系统的输入以及各变量在 $t = t_0$ 的值，系统在 $t \geq t_0$ 的状态是确定的）。n阶微分方程描述的系统有n个相互独立的状态变量。

注意　状态变量对于确定系统的行为是充分、必要的；
状态变量不是唯一的。

- 状态向量　以n个状态变量$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$ 作为向量$x(t)$的分量，则$x(t)$称为状态向量，即

$$X(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^T$$

- 状态空间　以状态变量$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$作基底的n维空间。

- 状态轨迹　系统在任意时刻的状态在状态空间中是一个点。系统随时间变化，$x(t)$在状态空间中描绘出一条轨迹，称状态轨迹。

- 状态方程 描述系统状态变量与输入变量间关系的一阶微分（差分）方程组

$$\dot{x}(t)=f[x(t),u(t)]$$

$$x(t_{k+1})=f[x(t_k),u(t_k)]$$

- 输出方程 描述系统输出变量与状态变量、输入变量间关系的代数方程

$$y(t) = g[x(t).u(t)]$$

$$y(t_k) = g[x(t_k), u(t_k)]$$

- 状态空间表达式 由状态方程和输出方程组成状态空间表达式

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)]$$
$$y(t) = g[x(t).u(t)]$$

$$x(t_{k+1}) = f[x(t_k), u(t_k)]$$
$$y(t_k) = g[x(t_k), u(t_k)]$$

- 状态空间表达式 由状态方程和输出方程组成状态空间表达式

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)]$$
$$y(t) = g[x(t), u(t)]$$

线性系统的状态空间表达式中，函数**f** 和**g**均为线性函数。状态方程是一阶向量线性微分方程，输出方程为向量代数方程。状态空间表达式为

$$\dot{X}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$Y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

线性定常系统

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$Y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- 状态方程：系统输入量与状态变量的关系
  - 单输入线性定常连续系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\
\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\
\vdots \\
\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t)
\end{cases}
$$

式中常系数 $a_{11},\cdots,a_{nn};b_1,\cdots,b_n;$ 与系统特性有关。

上式可以写成向量矩阵形式：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$
x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

- 多输入线性定常连续系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1p}u_p \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2p}u_p \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{np}u_p \end{cases}$$

向量矩阵形式为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

- 输出方程：系统输出量与状态变量、输入量的关系。

输出量由系统任务确定或给定

- 单输出线性定常连续系统输出方程的一般形式为

$$y(t)=c_1x_1(t)+c_1x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+du(t)$$

式中常系数 $c_1,c_2\cdots,c_n$； d 与系统特性有关。

其向量矩阵形式为： $y(t)=cx(t)+du(t)$

- 多输入一多输出系统的输出方程的一般形式为

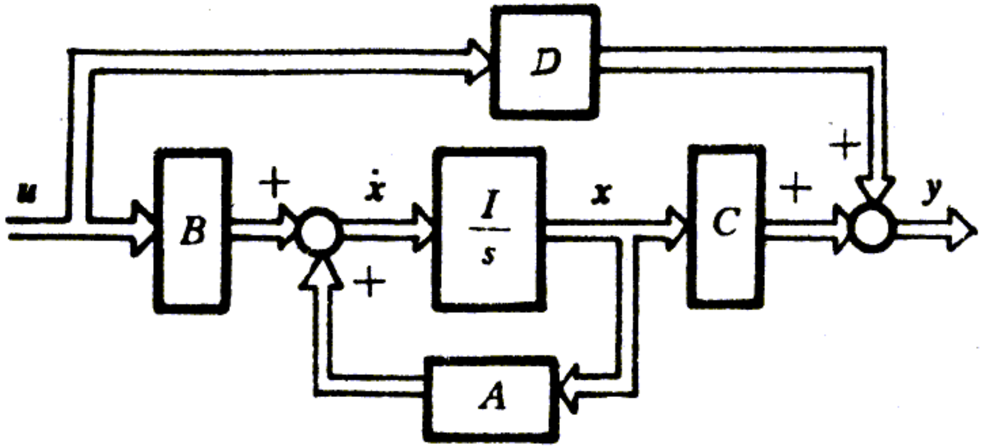
$$\begin{cases} y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n+d_{11}u_1+d_{12}u_2+\cdots d_{1p}u_p \\ y_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n+d_{21}u_1+d_{22}u_2+\cdots d_{2p}u_p \\ \vdots \\ y_q=c_{q1}x_1+c_{q2}x_2+\cdots+c_{qn}x_n+d_{q1}u_1+d_{q2}u_2+\cdots d_{qp}u_p \end{cases}$$

- 其向量矩阵形式为：

$$y=Cx+D\boldsymbol{u}$$

线性定常系统的状态空间表达式可写为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



状态空间表达式结构示意图

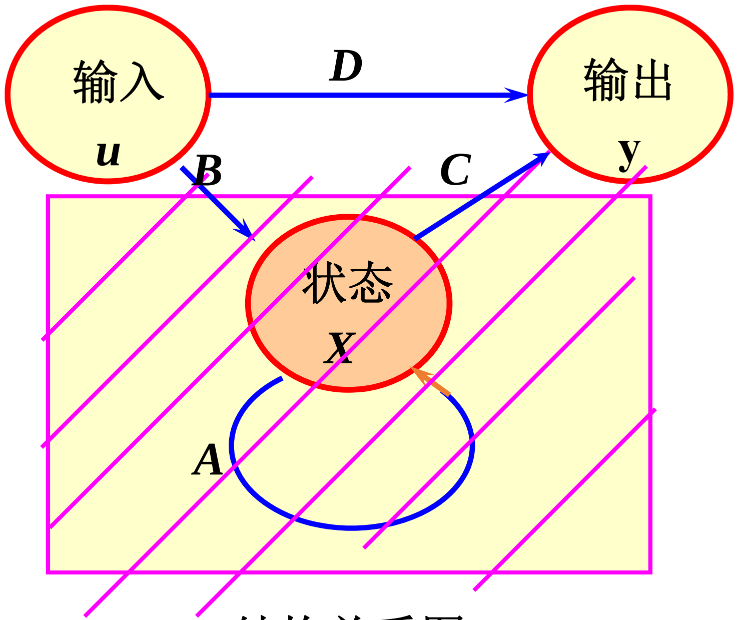
A－状态矩阵（系统矩阵、系数矩阵） **B**－输入矩阵（控制矩阵）

C－观测矩阵（输出矩阵） **D**－前馈矩阵（直接传递矩阵）

简记为系统 {A，B，C，D}

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$



结构关系图

状态空间分析法的优点

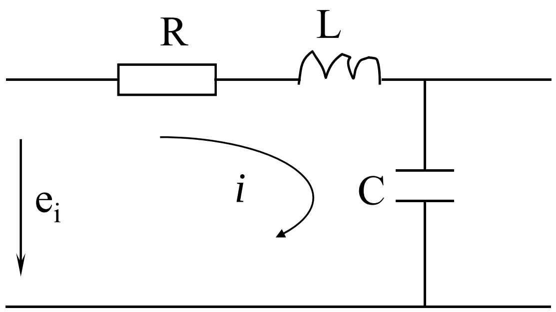
用状态空间法分析系统时，系统是用“状态”变量描述的一阶微分（差分）方程组表征的，可使问题得到简化，有以下优点：

- 利用计算机求解一阶微分方程组或差分方程组，比求解高阶方程容易；
- 利用向量矩阵，大大简化了一阶微分方程组的数学表示方法；
- 可解决在经典控制论中，对初始条件感到困难的问题；
- 适用于非线性系统、时变系统、随机过程和采样系统的求解。

9.2.2　举例

例9-1 建立如图所示的**RLC** 电路的状态空间模型。

电路的微分方程为:



$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}\int idt=e_i$$

设$e_i(t)$为输入量**u(t)**，***i*(t)**为输出量**y(t)**，并选择***i*(t)**和$\int i(t)dt$为***RLC***电路状态变量，即

$$x_1(t)=i(t)$$
$$x_2(t)=\int i(t)dt$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=-\frac{R}{L}x_1(t)-\frac{1}{LC}x_2(t)+\frac{1}{L}u(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}=x_1(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{LC}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t)$$

写成状态方程，有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

***y*(*t*)=*i*(*t*)=$\boldsymbol{x_1(t)}$, 输出方程为**

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$$

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}\int idt=e_i$$

若选取状态变量

$$x_1=\frac{1}{C}\int idt+Ri,\quad x_2=\frac{1}{C}\int idt$$

则 $$x_1=x_2+Ri,\qquad L\frac{di}{dt}=-x_1+e_i$$

有 $$\dot{x}_1=\dot{x}_2+R\frac{di}{dt}=\frac{1}{RC}(x_1-x_2)+\frac{R}{L}(-x_1+e_i)$$

$$\dot{x}_2=\frac{1}{C}i=\frac{1}{RC}(x_1-x_2)$$

$$y=\frac{1}{R}x_1-\frac{1}{R}x_2$$

状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{RL}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{R}{L}\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{R} & -\frac{1}{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

比较两个状态方程

$$A=\begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{RL}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{RC} \\ \dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \dfrac{R}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R} & -\dfrac{1}{R} \end{bmatrix}$$

系统的状态变量是不唯一的，状态方程也是不唯一的

第一种选取 $x_1(t)=i(t)$

$$x_2(t)=\int i(t)dt$$

第二种选取 $\bar{x}_1=\frac{1}{c}\int idt+Ri$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{c}\int idt$$

有

$$x_1=\frac{1}{R}\bar{x}_1-\frac{1}{R}\bar{x}_2$$

$$x_2=c\bar{x}_2$$

则可写成

$$x=P\bar{x}$$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{R} & -\frac{1}{R}\\ 0 & c\end{bmatrix}$$

- 取任意非奇异阵**P**，可变换得到无穷多组状态变量，进一步说明了状态变量的非唯一性