9.4.4 线性离散系统状态空间表达式的建立及其解

离散时间线性系统的状态空间描述

离散时间线性时变系统

$$X(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$
$$Y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

离散时间线性时不变系统

$$X(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$Y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$n\times n$阵A：系统矩阵　$n\times p$阵B：输入矩阵

$q\times n$阵C：输出矩阵　$q\times p$阵D：传输矩阵

人口分布问题状态空间描述的示例

假设某个国家，城市人口为10^7，乡村人口为$9x10^7$，每年4%的城市人口迁移去乡村，2%的乡村人口迁移去城市，整个国家的人口的自然增长率为1%

设k为离散时间变量，$x_1(k)$、$x_2(k)$为第k年的城市人口和乡村人口，u(k)为第k年所采取的激励性政策控制手段，设一个单位正控制措施可激励$5x10^4$城市人口迁移乡村，而一个单位负控制措施会导致$5x10^4$乡村人口去城市，y(k)为第k年全国人口数

$$x_1(k+1) = 1.01\times(1-0.04)x_1(k) + 1.01\times0.02x_2(k) + 1.01\times5\times10^4u(k)$$
$$x_2(k+1) = 1.01\times(1-0.02)x_2(k) + 1.01\times0.04x_1(k) - 1.01\times5\times10^4u(k)$$

人口分布问题状态空间描述的列写示例

$$x_1(k+1) = 1.01\times(1-0.04)x_1(k) + 1.01\times 0.02x_2(k) + 1.01\times 5\times 10^4 u(k)$$
$$x_2(k+1) = 1.01\times(1-0.02)x_2(k) + 1.01\times 0.04x_1(k) - 1.01\times 5\times 10^4 u(k)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9696 & 0.0202 \\ 0.0404 & 0.9898 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.05\times 10^4 \\ -5.05\times 10^4 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

亦可表为 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

- 由差分方程建立状态空间表达式

经典控制理论中通常用差分方程或脉冲传递函数描述离散系统，单输入—单输出线性系统定常差分方程的一般形式为

$$
\begin{aligned}
& y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\cdots+a_{n-1}y(k+1)+a_n y(k) \\
& =b_0 u(k+n)+b_1 u(k+n-1)+\cdots+b_{n-1}u(k+1)+b_n u(k)
\end{aligned}
$$

式中，**k**表示**kT**时刻，**T** 为采样周期；**y(k)，u(k)** 分别为**kT**时刻的输出、输入量； a_i, b_i 是表征系统特性的常数。考虑零初始条件的z变换关系，有

$$Z[y(k)]=y(z),\ \ Z[(y(k+i)]=z^i y(z)$$

$$G(z)=\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{b_0 z^n+b_1 z^{n-1}+\cdots+b_{n-1}z+b_n}{z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

$$=b_0+\frac{\beta_1 z^{n-1}+\beta_2 z^{n-2}+\cdots+\beta_{n-1}z+\beta_n}{z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}=b_0+\frac{N(z)}{D(z)}$$

式中，**G(z)**称为脉冲传递函数，与连续系统的形式相同，

$$\boldsymbol{Y(s)=(b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+\cdots b_{n-1}s+b_n)E(s)}$$

$$\boldsymbol{U(s)=(s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)E(s)}$$

连续系统状态空间表达式的建立方法同样适用于离散系统。

如采用中间变量方法建立离散状态空间表达式

在**N(z)/D(z)**串联分解中，引入中间变量**Q(z)**，则有

$$u(z)=z^n Q(z)+a_1 z^{n-1}Q(z)+\cdots+a_{n-1}zQ(z)+a_nQ(z)$$

$$y(z)=\beta_1 z^{n-1}Q(z)+\cdots+\beta_{n-1}zQ(z)+\beta_nQ(z)$$

定义下列一组状态变量

$$
\begin{aligned}
x_1(z) &= Q(z) \\
x_2(z) &= zQ(z) \\
&\vdots \\
x_n(z) &= z^{n-1}Q(z) = zx_{n-1}(z)
\end{aligned}
$$

$$z^nQ(z) = -a_nx_1(z) - a_{n-1}x_2(z)\cdots - a_1x_n(z) + u(z)$$

$$y(z) = \beta_nx_1(z) + \beta_{n-1}x_2(z) + \cdots + \beta_1x_n(z)$$

利用z反变换关系 $Z^{-1}[x_i(z)] = x_i(k), \qquad Z^{-1}[zx_i(z)] = x_i(k+1)$

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_2(k) \\
x_2(k+1) &= x_3(k) \\
&\vdots \\
x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \\
x_n(k) &= -a_nx_1(k) - a_{n-1}x_2(k)\cdots - a_1x_n(k) + u(k) \\
y(k) &= \beta_nx_1(k) + \beta_{n-1}x_2(k) + \cdots + \beta_1x_n(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)
$$

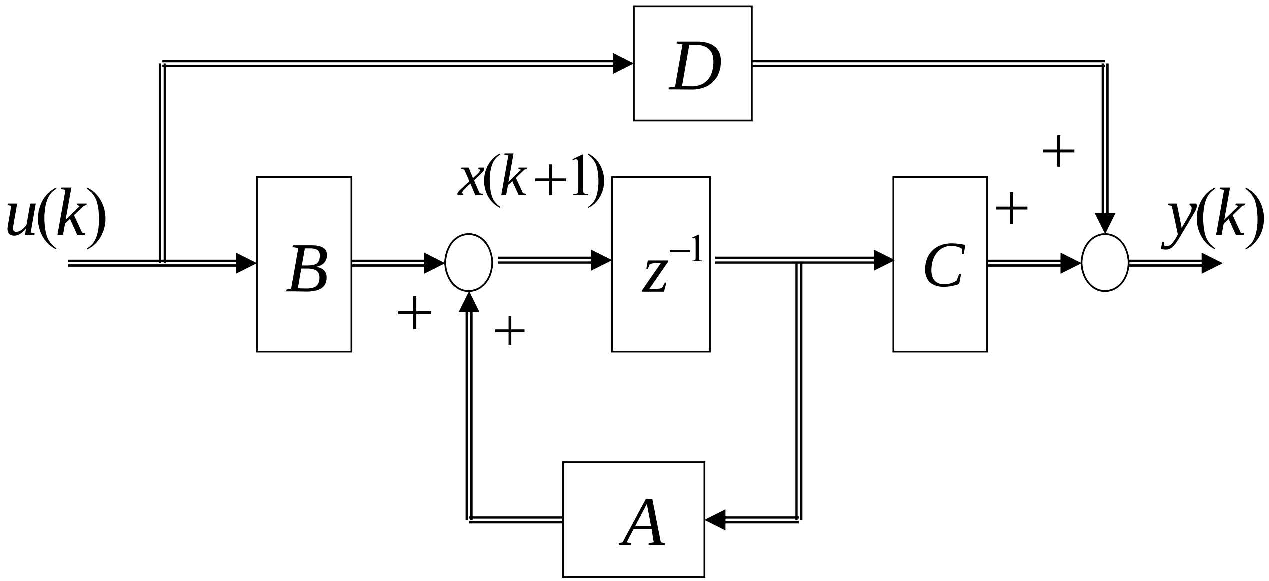
$$
y(k) = [\beta_n \quad \beta_{n-1} \quad \cdots \quad \beta_1]\, x(k) + Du(k)
$$

离散系统状态方程描述了(k+1)T时刻的状态与kT时刻的状态及输入量之间的关系；

输出方程描述了kT时刻的输出量与kT时刻的状态及输入量之间的关系。

线性定常多输入—多输出离散系统状态空间表达式为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k)=C\boldsymbol{x}(k)+D\boldsymbol{u}(k)$$



- 连续系统状态空间表达式的离散化

已知定常连续系统状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ 在及u(t)作用下的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{e}^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau = \Phi(t)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$$

令 $t_0 = kT,\ \ x(t_0) = x(kT) = x(k)$

$$t = (k+1)T,\ \ x[(k+1)]T = x(k+1)$$

在 $t \in [k, k+1]$， u(k)=u(k-1) 为常数，

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \Phi[(k+1)T - kT]\boldsymbol{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau]Bd\tau\boldsymbol{u}(k)$$

记

$$G(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau)]Bd\tau$$

引入变量代换 $(k+1)T - \tau = \tau'$

则

$$G(T) = \int_0^T \Phi(\tau)Bd\tau$$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\mathit{\Phi}[(k+1)T-kT]\boldsymbol{x}(k)+\int_{kT}^{(k+1)T}\mathit{\Phi}[(k+1)T-\tau]Bd\tau\boldsymbol{u}(k)$$

$$G(T)=\int_{kT}^{(k+1)T}\mathit{\Phi}[((k+1)T-\tau)]Bd\tau \quad G(T)=\int_{0}^{T}\Phi(\tau)Bd\tau$$

离散系统状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\mathit{\Phi}(T)\boldsymbol{x}(k)+G(T)\boldsymbol{u}(k)$$

式中**Φ(T)**与连续系统状态转移矩阵Φ(t)的关系为

$$\Phi(T)=\Phi(t)\Big|_{t=T}$$

离散化系统的输出方程仍然为

$$y(k)=C\boldsymbol{x}(k)+D\mathrm{u}(k)$$

例9-17　求下列连续状态方程的离散化状态方程，设**T=1s**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

解　由【例9-15】可得其状态转移矩阵**Φ(t)**为

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(T)=\Phi(t)\big|_{t=T=1}=\begin{bmatrix}0.6004 & 0.2325\\ -0.4651 & -.0972\end{bmatrix}$$

$$G(T)\ =\int_0^T\Phi(\tau)Bd\tau$$

$$=\int_0^T\begin{pmatrix}e^{-\tau}-e^{-2\tau}\\ -e^{-\tau}+2e^{-2\tau}\end{pmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}1/2-e^{-T}+1/2e^{-2T}\\ e^{-T}-e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$G(T)\big|_{T=1}=\begin{bmatrix}0.1998\\ 0.2325\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(k+1)=\Phi(T)\mathbf{x}(k)+G(T)\mathbf{u}(k)$$

➢ 定常离散系统动态方程的解

求解离散动态方程有递推法和z变换法，以下介绍递推法求解。

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\Phi(T)\boldsymbol{x}(k)+G(T)\boldsymbol{u}(k)$$

令上式中，$k=0,1,\cdots,k-1$，

可得到T，$2T,\cdots,kT$ 时刻的状态。

$k=0$ $\quad \boldsymbol{x}(1)=\Phi(T)\boldsymbol{x}(0)+G(T)\boldsymbol{u}(0)$

$k=1$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(2)&=\Phi(T)\boldsymbol{x}(1)+G(T)\boldsymbol{u}(1)\\&=\Phi^2(T)\boldsymbol{x}(0)+\Phi(T)G(T)u(0)+G(T)\boldsymbol{u}(1)\end{aligned}$$

$k=2$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(3)&=\Phi(T)\boldsymbol{x}(2)+G(T)\boldsymbol{u}(2)\\&=\Phi^3(T)\boldsymbol{x}(0)+\Phi^2(T)G(T)\boldsymbol{x}(1)+\Phi(T)G(T)u(1)+G(T)\boldsymbol{u}(2)\end{aligned}$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$$k = k-1$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k) &= \Phi(T)\boldsymbol{x}(k-1) + G(T)\boldsymbol{u}(k-1) \\ &= \Phi^{k}(T)\boldsymbol{x}(0) + \Phi^{k-1}(T)G(T)u(0) + \Phi^{k-2}(T)G(T)u(1) + \cdots \\ &\quad + \Phi(T)G(T)\boldsymbol{u}(k-2) + G(T)\boldsymbol{u}(k-1) \\ &= \Phi^{k}(T)\boldsymbol{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1}\Phi^{k-i-1}(T)G(T)\boldsymbol{u}(i)\end{aligned}$$

上式为离散状态方程的解，又称离散状态转移方程。

当 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{i})=\mathbf{0}, \quad (\boldsymbol{i}=\mathbf{0},\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{k}-\mathbf{1})$

$$\boldsymbol{x}(k)=\Phi^{k}\boldsymbol{x}(0)=\Phi(kT)\boldsymbol{x}(0)=\Phi(k)\boldsymbol{x}(0)$$

$\Phi(k) \Longrightarrow$ 离散化系统状态转移矩阵

输出方程为

$$\boldsymbol{y}(k)=C\boldsymbol{x}(k)+D\mathrm{u}(k)$$

$$=C\Phi^{k}(T)\boldsymbol{x}(0)+C\sum_{i=0}^{k-1}\Phi^{k-i-1}(T)G(T)\boldsymbol{u}(i)+D\boldsymbol{u}(k)$$

对于离散状态方程式

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=C\boldsymbol{x}(k)+D\boldsymbol{u}(k)$$

其解为

$$\boldsymbol{x}(k)=A^{k}\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}B\boldsymbol{u}(i)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=CA^{k}\boldsymbol{x}(0)+C\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}B\boldsymbol{u}(i)+D\boldsymbol{u}(k)$$

例9-18 设线性离散系统的状态方程为

$$A=\begin{bmatrix}-0.16 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$

用递推法求取当

$$x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

及

$$u(k)=1\qquad (k\ge 0)$$

时状态方程的解。

解 由递推法，在状态方程中，令 $k=0$

$$x(1)=Ax(0)+Bu(0)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\times 1=\begin{bmatrix}0\\ 1.84\end{bmatrix}$$

令 $k=1$

$$x(2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1.84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\times 1=\begin{bmatrix}2.84\\ -0.84\end{bmatrix}$$

令 $k=2$

$$x(3)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.84\\ -0.84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\times 1=\begin{bmatrix}0.16\\ 1.39\end{bmatrix}$$

令 $k=3$

$$x(4)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.16\\ 1.39\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\times 1=\begin{bmatrix}2.39\\ -0.41\end{bmatrix}$$

如此迭代下去，可得到任意采样时刻状态方程的解 $\boldsymbol{x(k)}$。

由递推法求得的线性离散系统状态方程的一般解不能写出闭式，若要写出闭式，可通过状态转移矩阵来求取。

- Z 变换的方法:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + Gu(k)$$

$$\Downarrow$$

$$zX(z) - zx(0) = \Phi X(z) + GU(z)$$

$$\Downarrow$$

$$(zI - \Phi)X(z) = zx(0) + GU(z)$$

$$\Downarrow$$

$$X(z) = (zI - \Phi)^{-1}[zx(0) + GU(z)]$$

$$\Downarrow$$

$$x(k) = Z^{-1}[X(z)] = Z^{-1}\{(zI - \Phi)^{-1}[zx(0) + GU(z)]\}$$

$$= Z^{-1}[(zI - \Phi)^{-1}zx(0)] + Z^{-1}[(zI - \Phi)^{-1}GU(z)]$$

分析:

- $Z^{-1}[(zI-\Phi)^{-1}zx(0)]$

  以标量a的Z反变换为参照: $Z^{-1}\left[\dfrac{1}{1-az^{-1}}\right]=a^k$

  类似的对于矩阵Φ:

$$Z^{-1}\left[(zI-\Phi)^{-1}z\right]=Z^{-1}\left[(1-\Phi z^{-1})^{-1}\right]=\Phi^k$$

- $Z^{-1}[(zI-\Phi)^{-1}GU(z)]$

• 对于标量函数w(k), 以及W(z)有:

•
$$Z^{-1}\{W_1(z)W_2(z)\}=\sum_{i=0}^{k}w_1(k-i)w_2(i)$$

因此: $Z^{-1}[(zI-\Phi)^{-1}GU(z)]=Z^{-1}[(zI-\Phi)^{-1}z\bullet z^{-1}GU(z)]$

$$=\cdots=\sum_{j=0}^{k-1}\Phi^{k-j-1}Gu(j)$$

• 得到结论: $x(t)=\Phi^k x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi^{k-j-1}Gu(j)$

Ex.9-18 对前面的例子采用Z变换的办法:

首先求$(zI\text{-}A)^{-1}$:

$$\left|zI-A\right| = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{vmatrix} = (z+0.2)(z+0.8)$$

$$\left(zI-A\right)^{-1} = \frac{adj(zI-A)}{\left|zI-A\right|} = \frac{\begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}}{(z+0.2)(z+0.8)}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \dfrac{4}{z+0.2} - \dfrac{1}{z+0.8} & \dfrac{5}{z+0.2} - \dfrac{5}{z+0.8} \\ \dfrac{-0.8}{z+0.2} - \dfrac{0.8}{z+0.8} & \dfrac{-1}{z+0.2} + \dfrac{4}{z+0.8} \end{bmatrix}$$

$\Phi(k) = A^k = Z^{-1}\left[\left(zI-A\right)^{-1} z\right]$ 为离散状态转移矩阵

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4(-0.2)^k - (-0.8)^k & 5(-0.2)^k - 5(-0.8)^k \\ -0.8(-0.2)^k + 0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k + 4(-0.8)^k \end{bmatrix}$$

$u(k)=1$　Z-变换得　$U(z)=\dfrac{z}{z-1}$

$$X(z)=(zI-A)^{-1}\left[zx(0)+BU(z)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)}\\ \dfrac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)}\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}\dfrac{-51z}{z+0.2}+\dfrac{44z}{z+0.8}+\dfrac{25z}{z-1}\\ \dfrac{10.2z}{z+0.2}+\dfrac{-35.2z}{z+0.8}+\dfrac{7z}{z-1}\end{bmatrix}$$

$$x(k)=Z^{-1}\left\{X(z)\right\}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-51(-0.2)^k+44(-0.8)^k+25\\ 10.2(-0.2)^k-35.2(-0.8)^k+7\end{bmatrix}$$ 为闭合形式。

验证k=0,1,2,3,4的情况，与前面用递推法求解相比完全一致:

$$x(k)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1.84\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2.84\\-0.84\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.16\\1.384\end{bmatrix}$$