

§ 8.3 描述函数法

概念：描述函数法是一种近似分析非线性系统的方法。它是频域法于一定条件下在非线性系统中的应用，主要用于分析非线性系统的稳定性，自激振荡及其在正弦信号作用下之输出。描述函数法实质上是一种谐波线性化方法。

- 优点:

- : 对系统阶次没有限制，仅对非线性的特性和系统结构有一定的要求

- 缺点:

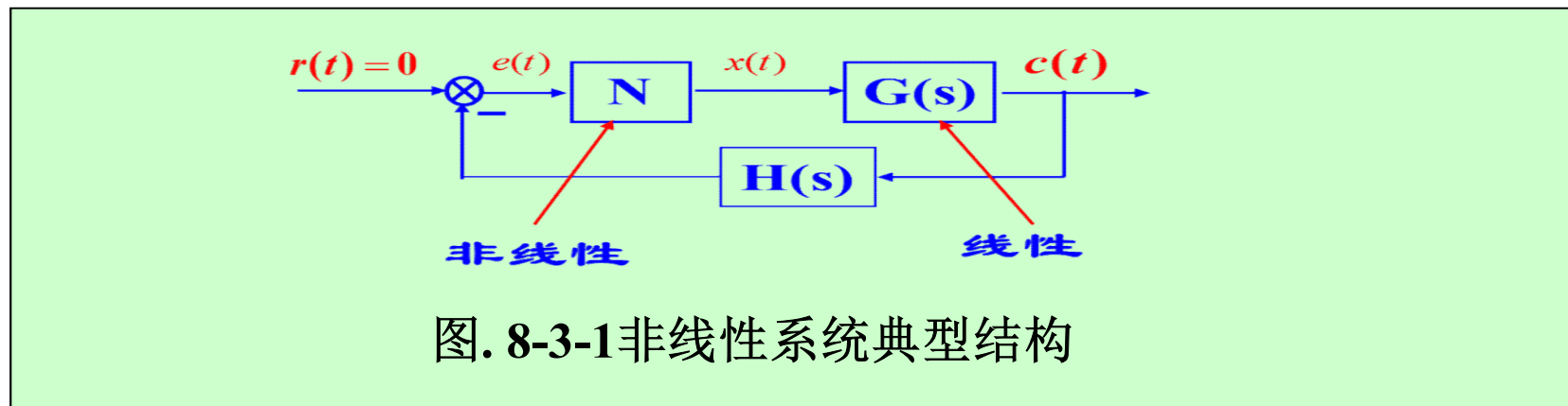
- 这种方法只是一种近似的分析方法；
 - 只能用来分析系统的频率特性。

- 描述函数法是由**P.J. Daniel**在**1940**年首次提出的

8.3.1 描述函数

描述函数法是一种近似的分析方法，它对系统和非线性特性提出一些限制条件，只有满足三个条件的非线性才能用描述函数进行分析。

1. 系统线性部分和非线性部分可以分开。如图 8-3-1，非线性和线性部分可以串联，图中N是非线性装置，G(S)表示线性装置。

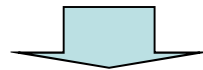


2. 非线性特性具有奇对称特性，且输入输出关系为静特性。正因为如此，非线性环节输入为 是一个正弦函数，那么 $x(t)$ 不一定是正弦函数，但是一定是一个周期函数，可以被展开为傅里叶级数，且直流分量为零。

$$f(x) = -f(-x)$$

3. 线性部分应具备良好的低通滤波特性。

高次谐波完全滤掉



输出仅存在基波分量

如果上述条件都符合，取输出基波分量与输入正弦量的复数比，即可求得该非线性的描述函数。

我们有：

描述函数的定义

非线性描述函数 $N(A)$ 要素有：输出 $y(t)$ 的基波分量与输入正弦量 $e(t)$ 的复数比, 有：

For $e(t) = A \sin \omega t$,

$$\begin{aligned} x(t) &\approx A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ &= x_1 \sin(\omega t + \phi_1) \implies N(A) = \frac{x_1 e^{j\phi_1}}{A} \end{aligned}$$

假定，非线性环节的输入为正弦量： $e(t) = A \sin \omega t$

其输出为周期函数，可展开为傅里叶级数

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

非线性是奇对称特性 $\Rightarrow A_0 = 0$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

取基波分量，有

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos \omega t \, d(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t \, d(\omega t)$$

因此，基波分量为

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = x_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

式中

$$x_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad \phi_1 = \arctg \frac{A_1}{B_1}$$

则描述函数

$$N(A) = \frac{x_1}{A} e^{j\phi_1}$$

很显然，描述函数是振幅A的函数，是一个可变增益放大系数，对于单值非线性特性N(A)是实函数，对于双值非线性特性，N(A)是一个复函数。

$$N(A) = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} e^{j \arctg \frac{A_1}{B_1}} = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A}$$

非线性部分被N(A)取代，我们就可以用线性频率法来分析非线性了。

注意:

一般情况下，描述函数 N 是输入正弦振幅 A 和振荡频率的函数，应表示为 $N(A, \omega)$ 。但是实际大多数非线性环节中不包含储能元件，它们的输出与输入信号频率无关，因此常见的非线性元件的描述函数 N 仅是信号幅值 A 的函数，表示为 $N(A)$ 。

若非线性元件的特性是单值奇对称的，则 $x(t)$ 是奇函数，则 $A_1 \neq 0$ ， $N(A) = B_1/A$ ，即描述函数是输入正弦信号幅值 A 的实函数；

若非线性元件的特性是非单值奇对称的，则 $x(t)$ 是非奇函数也非偶函数，则 $A_1 \neq 0$ ， $B_1 \neq 0$ ， $N(A)$ 描述函数是输入正弦信号幅值的复函数。