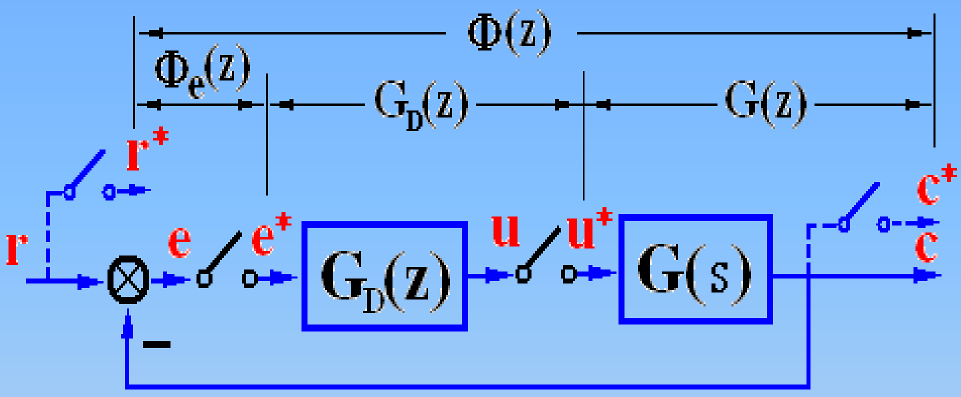
7.8 数字控制器的设计

一般说来，线性采样系统的综合与校正，可以分别在s域，z域或w域中进行，其综合与校正的方法主要有**模拟化设计法**和**离散化(直接数字)设计法**。前者与连续系统综合与校正法类似(系统模拟化→数字部分等效连续环节→校正→数字化)，这里仅简单介绍离散化设计法。

1. 数字控制器的脉冲传递函数

$$\Phi(z)=\frac{G_D(z)\cdot G(z)}{1+G_D(z)\cdot G(z)}$$

$$\Phi_e(z)=\frac{1}{1+G_D(z)\cdot G(z)}=1-\Phi(z)$$



$$G_D(z)\cdot G(z)=\frac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)}=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)}$$

$$\boxed{G_D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)\cdot G(z)}}$$

$$\Phi_e(z)=1-\Phi(z),\ \mathrm{E}(z)=\Phi_e(z)R(z)$$

2、最少拍系统的脉冲传递函数

（1）最少拍系统的定义

它的定义是指：系统在典型的输入信号作用下，经过最少采样周期，使得输出稳态误差为零，达到完全跟踪。

（2）最少拍系统的脉冲传递函数

典型输入信号的一般形式为

$$r(t)=t^{p}, \qquad R(z)=\frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^{v}}, \quad v=p+1$$

由最少拍系统定义，得

$$E(z)=\varphi_{e}(z)R(z) \qquad \varphi_{e}(z)=(1-z^{-1})^{v}F(z^{-1})$$

为使求出的D(z)简单,阶数最低,可以取 F(z)=1.

$$\varphi(z)=1-\varphi_{e}(z)=1-(1-z^{-1})^{v}$$

3. 典型信号作用下的 $\varphi(z)$

（1） 当 $r(t)=1(t)$ 时

- **最少拍无差系统的闭环传递函数为**

$$\varphi(z)=z^{-1}$$

- **此时误差信号的Z变换为**

$$E(z)=1$$

系统经过1拍便可以完全跟踪上输入信号。

（2）当 $r(t)=t\cdot 1(t)$ 时

- **最少拍无差系统的闭环传递函数为**

$$\varphi(z)=2z^{-1}-z^{-2}$$

- **此时误差信号的Z变换为**

$$E(z)=Tz^{-1}$$

系统经过2拍便可以完全跟踪上输入信号。

（3）当 $r(t)=\frac{1}{2}t^{2}\cdot 1(t)$ 时

- **最少拍无差系统的闭环传递函数为**

$$\varphi(z)=3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$$

- **此时误差信号的Z变换为**

$$E(z)=\frac{1}{2}T^{2}z^{-1}+\frac{1}{2}T^{2}z^{-2}$$

系统经过3拍便可以完全跟踪上输入信号。

对不同类型的典型输入型号，最少拍系统的闭环脉冲传递函数如表7-3所示。

表7-3 典型信号作用下最少拍系统的 $\varphi(z)$

典型输入		闭环脉冲传递函数		调整时间
$r(t)$	$R(z)$	$\varphi_e(z)$	$\varphi(z)$	t_s
$1(t)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$1-z^{-1}$	z^{-1}	T
t	$\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-2z^{-2}$	$2T$
$t^2/2$	$\dfrac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$3T$

$$D(z)=\frac{\varphi(z)}{G(z)\,[1-\varphi(z)\,]}\qquad D(z)=\frac{1-\varphi_e(z)}{G(z)\varphi_e(z)}$$

4. 零极点分布与最少拍系统的脉冲传递函数

设广义被控对象的脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{z^{-v}\prod_{i=1}^{L}\left(1-z_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-p_i z^{-1}\right)}$$

式中：z_i 是$G(z)$的零点；

p_i 是$G(z)$的极点。

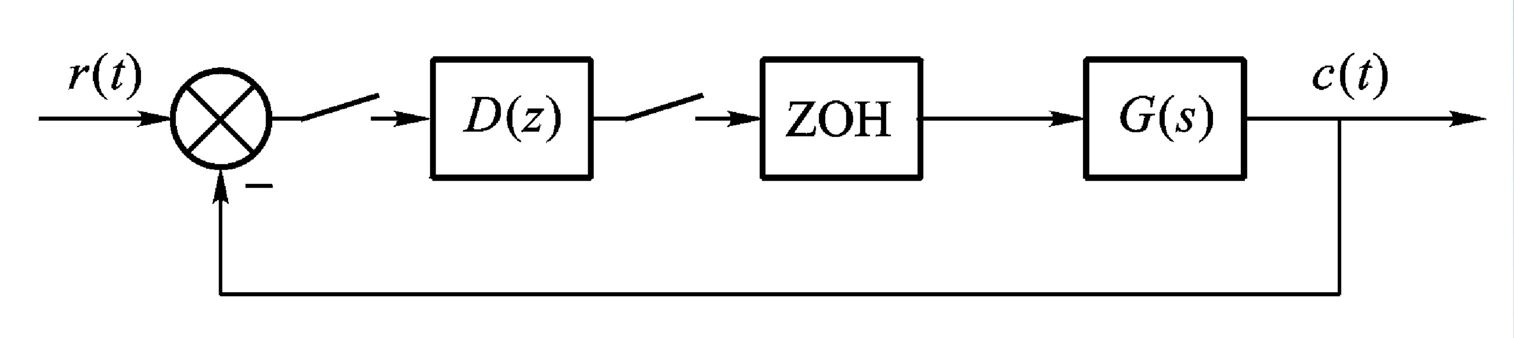
$$G_D(z) = \frac{\varphi(z)}{G(z)\left[1-\varphi(z)\right]} = \frac{\varphi(z)}{G(z)\varphi_e(z)} = \frac{z^{v}\prod_{i=1}^{n}(1-p_i z^{-1})\varphi(z)}{\prod_{i=1}^{L}(1-z_i z^{-1})\varphi_e(z)}$$

$$\varphi(z) = G_D(z)G(z)\varphi_e(z)$$

例7-25 设单位反馈线性采样系统的连续部分及零阶保持器的传递函数分别为

$$G_0(s)=\frac{10}{s(0.1s+1)(0.05s+1)},\quad G_h(s)=\frac{1-e^{-T_0 s}}{s}$$

已知采样周期 $T_0=0.2\mathrm{s}$，试基于最少拍系统概念设计能使给定系统响应 $r(t)=1(t)$ 的响应过程具有尽可能短的调整时间 t_s 的数字控制器的脉冲传递函数$D(z)$.



解：由已知的 $G_0(s)$ 及 $G_h(s)$ 求得给定系统的开环脉冲传递函数为：

$$G(z)=Z\left[G_h(z)G_0(z)\right]=\frac{0.76z^{-1}(1+0.05z^{-1})(1+1.065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.135z^{-1})(1-0.0185z^{-1})}$$

基于最少拍系统概念 $r(t)=1(t)$ ，可求得

$$\varphi_e(z)=1-z^{-1} \quad (1)$$

$$\varphi(z)=z^{-1} \quad (2)$$

因G（ z ）含有单位圆外零点$z=-1.065$，所以φ(z)应含有这样一个零点，同时为对消G（z）中的传递迟后 z^{-1} ，它还应含 z^{-1} 因子，所以

$$\varphi(z)=z^{-1}(1+1.065z^{-1}) \quad (3)$$

因$H(s)=1$,则有：

$$\varphi(z)=1-\varphi_e(z) \qquad (4)$$

从式（3）看到，$\varphi(z)$是以z^{-1}为变量的二次多项式。为满足式（4），$\varphi_e(z)$也必须是的z^{-1}二次多项式，因此在式（1）的基础上重新设：

$$\varphi_e(z)=(1-z^{-1})(1+a_1z^{-1}) \qquad (5)$$

其中为a_1待定系数。为使其具有式（3）及式（5）的形式，且满足式（4），需在式（3）等量右边再乘以一个待定系数b_1，即：

$$\varphi(z)=b_1z^{-1}(1+1.065z^{-1}) \qquad (6)$$

联解式（5）式（6），得：

$$a_1 = 0.516 \qquad b_1 = 0.484$$

最后求得满足由已知G（z）对 $\varphi(z)$**与** $\varphi_e(z)$**提出的限制性条件的给定系统，闭环脉冲传递函数为**

$$\varphi_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + 0.516z^{-1}) \qquad \textbf{（7）}$$

$$\varphi(z) = 0.484z^{-1}(1 + 1.065z^{-1}) \qquad \textbf{（8）}$$

可求得数字控制器的脉冲传递函数为

$$D(z) = \frac{1 - \varphi_e(z)}{G(z)\varphi_e(z)}$$

$$= \frac{1 - (1 - z^{-1})(1 + 0.516z^{-1})}{\dfrac{0.76z^{-1}(1 + 0.05z^{-1})(1 + 0.065z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.135z^{-1})(1 - 0.0185z^{-1})}(1 - z^{-1})(1 + 0.516z^{-1})}$$

$$D(z)=\frac{0.637(1-0.0185z^{-1})(1-0.135z^{-1})}{(1+0.05z^{-1})(1+0.516z^{-1})}$$

不难求出经式（4）所示D（z）校正的给定系统输出$c^*(t)$ 的Z变换为

$$C(z)=\varphi(z)R(z)=0.484z^{-1}(1+1.085z^{-1})\frac{1}{1-z^{-1}}$$
$$=0.484z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots+z^{-4}+\cdots$$

系统输出在第二拍达到稳态,延长了一拍.