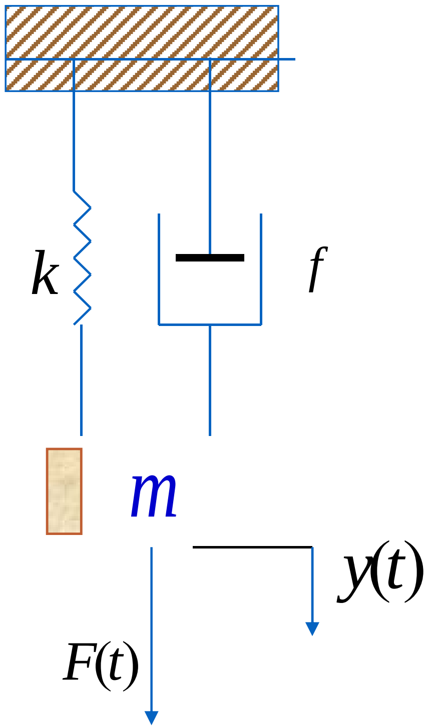
9.3 线性系统状态空间表达式的建立

建立状态空间表达式的一般方法有

- 由系统机理建立状态空间描述
- 微分方程转换成状态空间描述
- 传递函数转换成状态空间描述
- 由状态变量图求状态空间描述

9.3.1 由系统机理建立状态空间表达式

例9-2 力、弹簧、阻尼器组成的机械系统



由牛顿定律

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+ky=F(t)$$

其中，输入为**F(t)**, 输出为位移 **y(t).**

若已知初始位移和初始速度，则可唯一确定系统在输入作用下的解。

可选择位移和速度作为状态变量

$$x_1 = y,\quad x_2 = \dot{y}$$

输入 $u(t) = F(t)$

状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

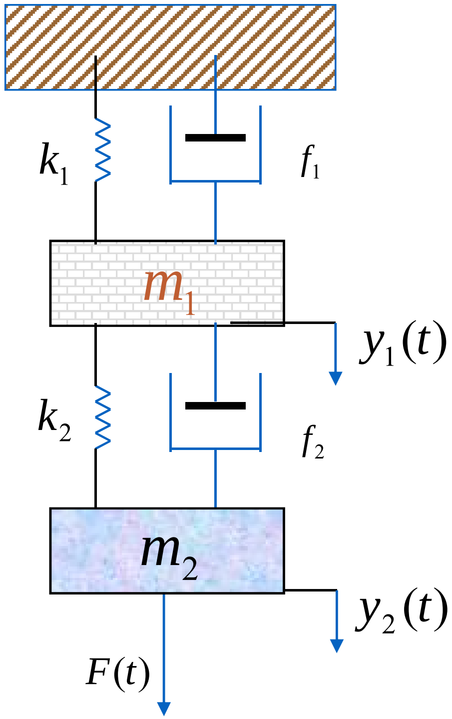
系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

例9-3 机械系统如图所示，若不考虑重力的作用，试写出以拉力F为输入，质量m_1和m_2的位移y_1和y_2为输出的状态空间表达式。

解　根据牛顿定律，分别列写关于m_1和m_2的方程



$$m_2\ddot{y}_2 = F(t) - k_2(y_2 - y_1) - f_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

$$m_1\ddot{y}_1 = k_2(y_2 - y_1) + f_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_1 y_1 - f_1\dot{y}_1$$

选择4个互相独立的状态变量。

$$x_1 = y_1,\quad x_2 = y_2,\quad x_3 = \dot{y}_1,\quad x_4 = \dot{y}_2$$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1) + \frac{f_2}{m_1}(x_4 - x_3) - \frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{f_1}{m_1}x_3$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}F(t) - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) - \frac{f_2}{m_2}(x_4 - x_3)$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & -\dfrac{f_1 + f_2}{m_1} & \dfrac{f_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{f_2}{m_2} & -\dfrac{f_2}{m_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_2} \end{bmatrix}}_{B} F
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
$$

9.3.3 由微分方程建立状态空间描述

➢步骤：

- 直接根据系统的物理机理建立相应的微分(连续系统）或差分（离散系统）方程组。
- 针对微分方程，定义一组状态变量，建立状态方程，并根据系统输出和状态之间的关系，建立系统的输出方程 。

➢ 状态变量的选取

1. 状态变量的选取是非唯一的。
2. 选取方法

☞（1）可选取初始条件对应的变量或与其相关的变量作为系统的状态变量。

☞（2）可选取独立储能（或储信息）元件的特征变量或与其相关的变量作为控制系统的状态变量。（如电感电流i、电容电压u_c 、质量m 的速度v 等）

(1) 线性微分方程中不含有输入函数导数项的系统的状态空间表达式

设单输入/单输出的控制系统的动态过程由下列n阶微分方程来描述

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = bu$$

$y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, \dot{y}, y$ —— 输出信号及其各阶导数

u —— 系统的输入信号

若已知初始条件 $y(0), \dot{y}(0), ..., y^{(n-1)}(0)$ 及 $t \geq 0$ 时刻的输入信号u(t)，则系统在任何时刻的行为便可完全确定。

状态变量可取为

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_{n-1} = y^{(n-2)} \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots a_1 x_n + bu \end{cases}$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = bu$$

状态空间表达式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu$$

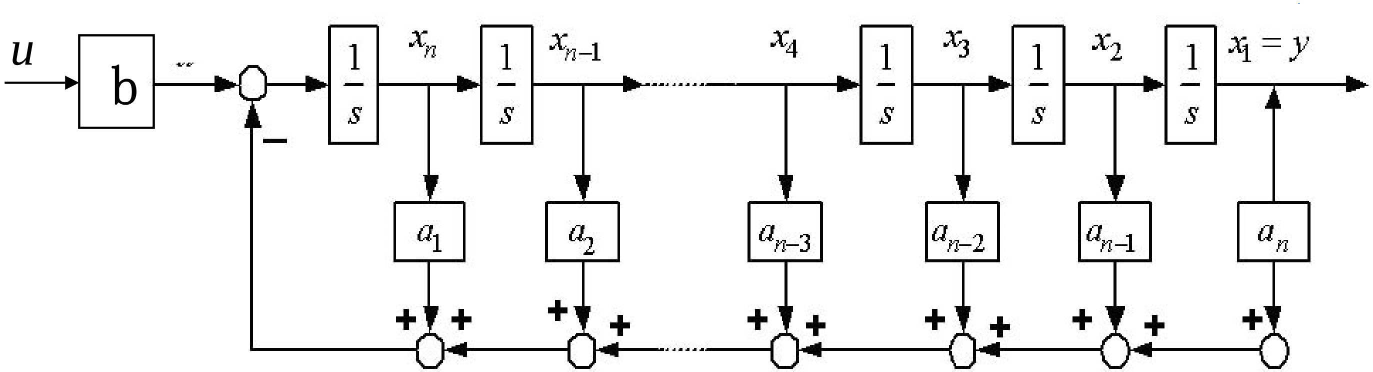
$$y = C\boldsymbol{x}$$

其中，各矩阵为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}$$

$$C=[1\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0]$$

- 根据上式绘制的状态变量之间关系的方块图, 也称状态变量图, 如图所示，每个积分器的输出都是对应的一个状态变量，状态方程由积分器的输入输出关系确定，输出方程在输出端给出　：



$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = bu$$

由微分方程求状态空间表达式的例题见书例**9－3**

例9-4 设一控制系统的动态过程用微分方程表示为

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

u，y分别为系统的输入和输出信号，试求系统的状态空间描述。

解：选取状态变量为 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y},$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u \end{cases}$$

写成标准形式

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$

$$y = C\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

A

B

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

C

(2) 输入信号包含导数项的n阶微分方程系统的状态空间描述

控制系统由下列n阶微分方程来描述

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_n y=b_o u^{(n)}+b_1 u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_n u$$

若采用上述方法选取状态变量，则可化成一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_n x_1-a_{n-1}x_2-\cdots a_1 x_n+b_o u^{(n)}+b_1 u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_n u\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=y\\ x_2=\dot{y}\\ \vdots\\ x_{n-1}=y^{(n-2)}\\ x_n=y^{(n-1)}\end{cases}$$

方程组中，出现了$u(t)$的导数项，不能采用以上方法。

若输入信号 u在 $t=t_0$ 时刻出现有限跳跃，如阶跃函数，则 $\dot{u}$ 在t_0时刻出现脉冲函数 δ， $u^{(i)}(i=1,2,\cdots)$ 在t_0时刻将是更高阶的脉冲函数，状态轨迹则在t_0时刻产生无穷大跳跃。故此时不能按照前面的方法将系统的输出量 y 及其各阶导数直接选作系统的状态变量，因为这组状态变量已经不具备在已知系统输入和初始状态条件下完全确定系统未来运动状态的特性。

选择状态变量的原则：在包含状态变量的**n**个一阶微分方程构成的系统状态方程中，任何一个微分方程都不能含有作用函数 **/** 输入量的导数项。

选取状态变量

由此可得输出方程

n−1个状态方程

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{cases}$$

可写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \end{cases}$$

$$x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u \quad = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u$$

对x_n求导 $\dot{x}_n = y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-2}\ddot{u} - \beta_{n-1}\dot{u}$

将$\mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$代入 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_o u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1}\dot{u} \\ &= (-a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} - \cdots - a_{n-1}\dot{y} - a_n y \\ &\quad + b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u) \\ &\quad - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1}\dot{u}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u \end{cases}$$

将上式中所有的输出项以及输出的导数项都用状态和输入的各阶导数项表示有

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_n = & -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n \\
& + (b_0 - \beta_0) u^{(n)} + (b_1 - \beta_1 - a_1 \beta_0) u^{(n-1)} \\
& + (b_2 - \beta_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0) u^{(n-2)} + \cdots \\
& + (b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \cdots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0) u
\end{aligned}
$$

可写成

$$
\begin{cases}
\beta_0 = b_0 \\
\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\
\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\
\vdots \\
\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\
\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots a_1 x_n + \beta_n u
\end{cases}
$$

可以保证系统有唯一解。

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\
\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots a_1 x_n + \beta_n u
\end{cases}
$$

将微分方程组改写成矩阵向量形式

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu
$$

$$
y = C\boldsymbol{x} + Du
$$

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}
$$

C=[1 0 0 … 0]， $D = \beta_0 = b_0$

例9-5 设一控制系统的动态方程用微分方程表示为

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+2y=11\dot{u}+6u$$

试求该控制系统的状态空间描述。

解：与下式比较

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_n y=b_o u^{(n)}+b_1 u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_n u$$

可得 $a_1=6,\quad a_2=11,\quad a_3=2,$

$b_0=0,\quad b_1=0,\quad b_2=11,\quad b_3=6$

选取状态变量 $x_1=y$

$x_2=\dot{x}_1$

$x_3=\dot{x}_2-11u$

$$x_1=y-\beta_0 u$$
$$x_2=\dot{x}_1-\beta_1 u$$
$$x_3=\dot{x}_2-\beta_2 u$$

$$\boldsymbol{\beta_1=b_1-a_1\beta_0=0,\quad \beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=11,}$$

$$\boldsymbol{\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=-60}$$

状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\ddot{x}_2 = x_3 + 11u$$
$$\dot{x}_3 = -2x_1 - 11x_2 - 6x_3 - 60u$$

系统状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -60 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

一般形式：

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_ny(t)$$
$$=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}u'+b_nu(t)$$

当式中b_0=0 时，还可以按如下规则选择另一组状态变量。设

$$x_n=y$$
$$x_i=\dot{x}_{i+1}+a_{n-i}y-b_{n-i}u,\qquad i=1,2,3,\cdots,n-1$$

$$x_n = y$$

$$x_i = \dot{x}_{i+1} + a_{n-i}y - b_{n-i}u, \qquad i = 1,2,3,\cdots,n-1$$

则得到

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= \dot{x}_n + a_1 y - b_1 u \\ x_{n-2} &= \dot{x}_{n-1} + a_2 y - b_2 u \\ &\vdots \\ x_2 &= \dot{x}_3 + a_{n-2} y - b_{n-2} u \\ x_1 &= \dot{x}_2 + a_{n-1} y - b_{n-1} u \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1}x_n + b_{n-1}u \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_{n-2}x_n + b_{n-2}u \\ \vdots \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_{n-2}y + b_{n-2}u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_n + b_1 u \end{cases}$$

输出方程为 $\quad y = x_n$

继续变换，则得到

$$
\begin{aligned}
x_{n-1} &= \dot{x}_n + a_1 y - b_1 u \\
&= \dot{y} + a_1 y - b_1 u \\
x_{n-2} &= \dot{x}_{n-1} + a_2 y - b_2 u \\
&= \ddot{y} + a_1 \dot{y} - b_1 \dot{u} + a_2 y - b_2 u \\
&\vdots \\
x_2 &= \dot{x}_3 + a_{n-2} y - b_{n-2} u \\
&= y^{(n-2)} + a_1 y^{(n-3)} - b_1 u^{(n-3)} + a_2 y^{(n-4)} - b_2 u^{(n-4)} + \cdots + a_{n-2} y - b_{n-2} u \\
x_1 &= \dot{x}_2 + a_{n-1} y - b_{n-1} u \\
&= y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} - b_1 u^{(n-2)} + a_2 y^{(n-3)} - b_2 u^{(n-3)} + \cdots + a_{n-1} y - b_{n-1} u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \dot{x}_2 + a_{n-1}y - b_{n-1}u \\
&= y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} - b_1 u^{(n-2)} + a_2 y^{(n-3)} \\
&\quad - b_2 u^{(n-3)} + \cdots + a_{n-1}y - b_{n-1}u
\end{aligned}
$$

对$\mathbf{x_1}$求导，并将$\mathbf{y}^{(n)}$用

$$
\begin{aligned}
& y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) \\
&= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}u' + b_n u(t)
\end{aligned}
$$

代入后整理得

$$
\dot{x}_1 = -a_n x_n + b_n u
$$

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\boldsymbol{a}_n \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\boldsymbol{a}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & -\boldsymbol{a}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{b}_{n-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{d} = \mathbf{0}$$

例9-5（续） 设一控制系统的动态方程用微分方程表示为

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+2y=11\dot{u}+6u$$

试求该控制系统的状态空间描述。

解：与下式比较

$$y^{(n)}+a_1\,y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_n y=b_o\,u^{(n)}+b_1\,u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_n u$$

可得 $a_1=6,\quad a_2=11,\quad a_3=2,$

$b_0=0,\quad b_1=0,\quad b_2=11,\quad b_3=6$

选取状态变量

$$\boldsymbol{x_3=y}$$

$$\boldsymbol{x_2=\dot{x}_3+6y}$$

$$\boldsymbol{x_1=\dot{x}_2+11y-11u}$$

$$\boldsymbol{x_3=y}$$

$$\boldsymbol{x_2=\dot{x}_3+a_1y-b_1u}$$

$$\boldsymbol{x_1=\dot{x}_2+a_2y-b_2u}$$

所以状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

对于一个给定的系统而言，状态变量的选取并不是唯一的。

例9-6　设有双输入—双输出的二阶系统，其运动方程为

$$\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_2 y_2 = b_1\dot{u}_1 + b_2 u_1 + b_3 u_2$$

$$\dot{y}_2 + a_3 y_2 + a_4 y_1 = b_4 u_2$$

试写出系统的状态空间表达式

解：按最高阶导数项求解y_1、y_2的方法，

$$\ddot{y}_1 = -a_1\dot{y}_1 + b_1\dot{u}_1 - a_2 y_{21} + b_2 u_1 + b_3 u_2$$

$$\dot{y}_2 = -a_3 y_2 - a_4 y_1 + b_4 u_2$$

对以上两方程积分

$$y_1 = \iint [(-a_1\dot{y}_1 + b_1\dot{u}_1) + (-a_2 y_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2)]dt^2$$

$$= \int (-a_1 y_1 + b_1 u_1)dt + \iint (-a_2 y_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2)dt^2$$

$$\int [(-a_1 y_1 + b_1 u_1) + \int (-a_2 y_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2)dt]dt$$

$$y_2 = \int [(-a_3 y_2 - a_4 y_1 + b_4 u_2)dt$$

选取状态变量 $x_1 = y_1$

$$x_2 = y_2$$

由y_1的表达式可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1 y_1 + b_1 u_1 + \int(-a_2 y_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2)dt \\ &= -a_1 x_1 + b_1 u_1 + \int(-a_2 x_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2)dt\end{aligned}$$

选取状态变量 $x_3 = \int(-a_2 x_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2)dt$

则有 $\dot{x}_3 = -a_2 x_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2$

由y_2的表达式，有 $\dot{x}_2 = -a_3 x_2 - a_4 x_1 + b_4 u_2$

综上

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a x_1 + x_3 + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 &= -a_4 x_1 - a_3 x_2 + b_4 u_2 \\ \dot{x}_3 &= -a_2 x_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2\end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + x_3 + b_1u_1$$
$$\dot{x}_2 = -a_4x_1 - a_3x_2 + b_4u_2$$
$$\dot{x}_3 = -a_2x_2 + b_2u_1 + b_3u_2$$

将上述方程写成矩阵方程形式，有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

系统输出矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$