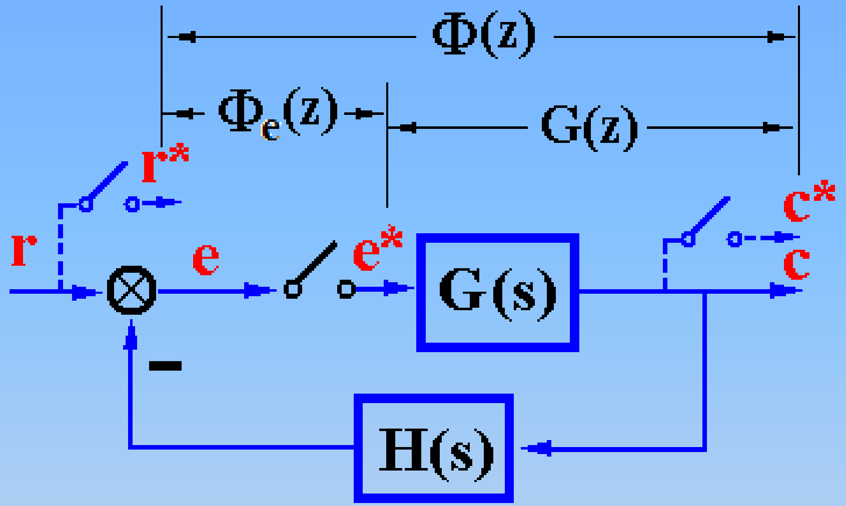
7.7 采样系统的瞬态响应

1.计算线性离散系统时间响应的一般步骤为

(1)求取离散系统的闭环脉冲传递函数



Let $\begin{cases} GH(z) = Z[G(s)H(s)] \\ \Phi(z) = \dfrac{G(z)}{1+GH(z)} = \dfrac{M(z)}{D(z)} \end{cases}$

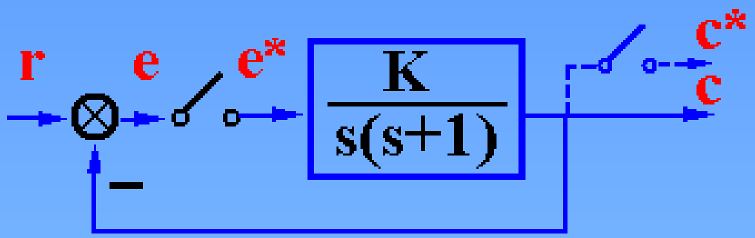
(2)求系统输出量的Z变换函数 $C(z) = \dfrac{z}{z-1}\Phi(z)$

(3) 用长除法，将C(z)展成无穷幂级数 $C(z) = c(0) + c(T)z^{-1} + c(2T)z^{-2} + \cdots$

(4) 反Z变换 $c^*(t) = c(0)\delta(t) + c(T)\delta(t-T) + c(2T)\delta(t-2T) + \cdots$

(5)计算超调量、峰值时间、调整时间等性能指标. $\sigma\%$，t_s

例 1 考虑如图系统, T=K=1. 求动态性能指标. (σ %, t_s).



解.

$$G(z) = Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] = \frac{K(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$\overset{K=T=1}{=} \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.632z}{z^2-0.736z+0.368}$$

$$c(\infty T) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\Phi(z)\cdot\frac{z}{z-1} = 1$$

$$C(z) = \Phi(z)\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{0.632z^2}{z^3-1.736z^2+1.104z-0.368}$$

使用长除法，求得c(k) 序列

h(0)= 0
h(1)= 0.632
h(2)= 1.097
h(3)= 1.207
h(4)= 1.117
h(5)= 1.014
h(6)= 0.964
h(7)= 0.970
h(8)= 0.991
h(9)= 1.004
h(10)=1.007
h(11)=1.003
h(12)=1.000
⋮

$\left\{\begin{array}{l} t_P=3T \\ \sigma\%=20.7\% \end{array}\right.$

$t_s=5T$

下面分析闭环极点对瞬态响应的影响。

1、p_k 为**正实根**，则对应的瞬态分量

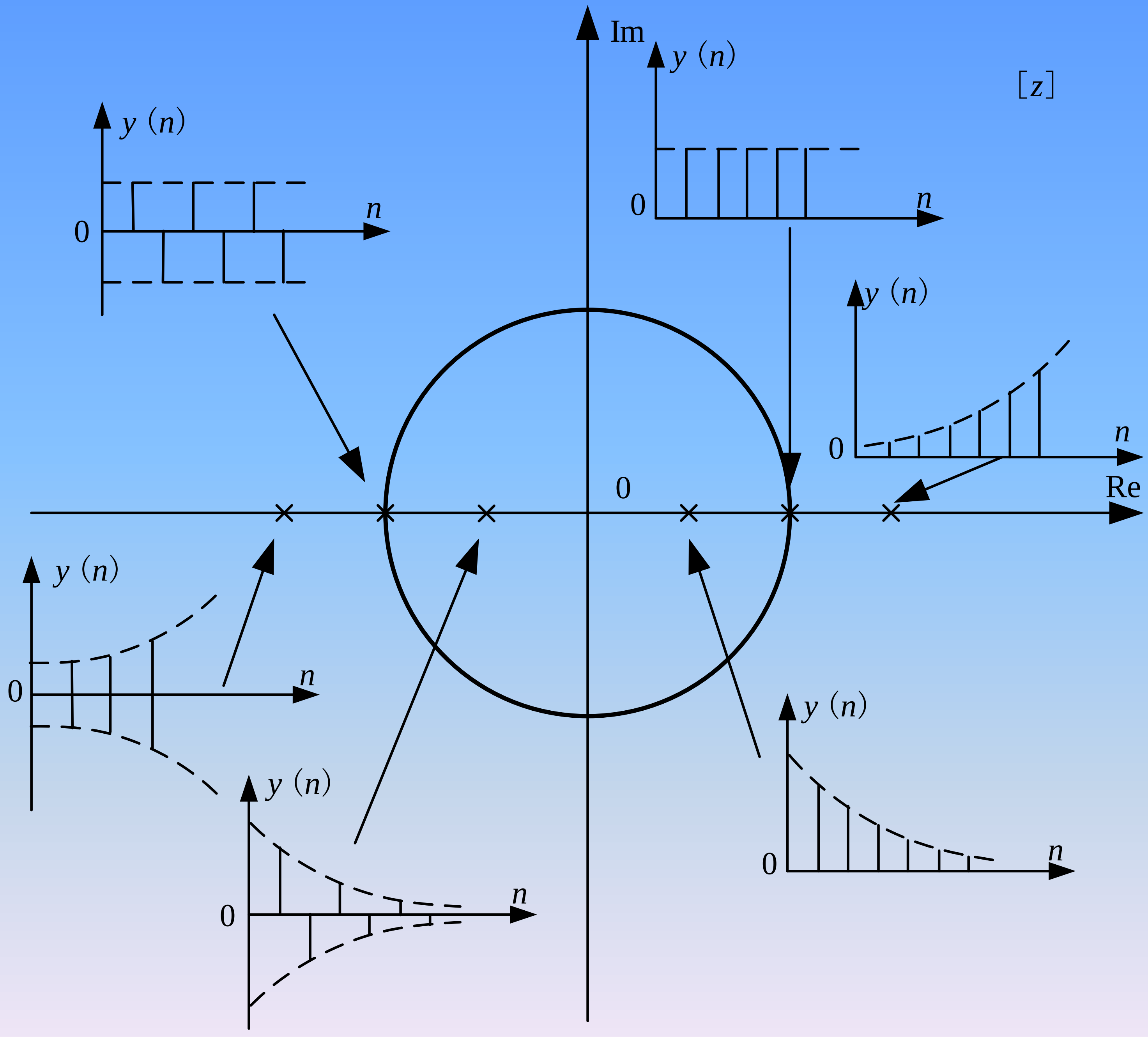
$$y_k(nt)=Z^{-1}\left[\frac{c_k z}{z-p_k}\right]=c_k(p_k)^n$$

令 $p_k=e^{at}, a=\frac{1}{T}\ln p_k$ ，则 $y_k(nt)=c_k e^{anT}$

若 $p_k=1$ ，即闭环极点位于右半z平面的圆周上，则闭环系统瞬态响应为等幅脉冲。

若 $p_k<1$ ，即闭环极点位于单位圆内，则输出响应呈指数衰减。

若 $p_k>1$ ，即闭环极点位于单位圆外，则输出响应呈指数增长，发散。



Im
[z]
Re
0
y (n)
n

2、p_k为负实根，则对应的瞬态分量

$$y_k(nt) = Z^{-1}\left[\frac{c_k z}{z - p_k}\right] = c_k (p_k)^n$$

若 $p_k = -1$ 即闭环极点位于左半z平面的圆周上，则闭环系统瞬态响应为等幅跳跃输出。

若 $|p_k| < 1$，即闭环极点位于左半z平面的单位圆内，则输出响应呈指数交叉跳跃衰减。

若 $|p_k| > 1$，即闭环极点位于左半z平面的单位圆外，则输出响应呈指数交叉跳跃增长，发散。

3、p_k 和 p_{k+1} 为一对共轭复根，即

$$p_k = |p_k| e^{j\theta_k} \qquad p_{k+1} = |p_k| e^{-j\theta_k}$$

c_k 和 c_{k+1} 也为一对共轭复数，

$$c_k = |c_k| e^{j\Phi_k} \qquad c_{k+1} = |c_k| e^{-j\Phi_k}$$

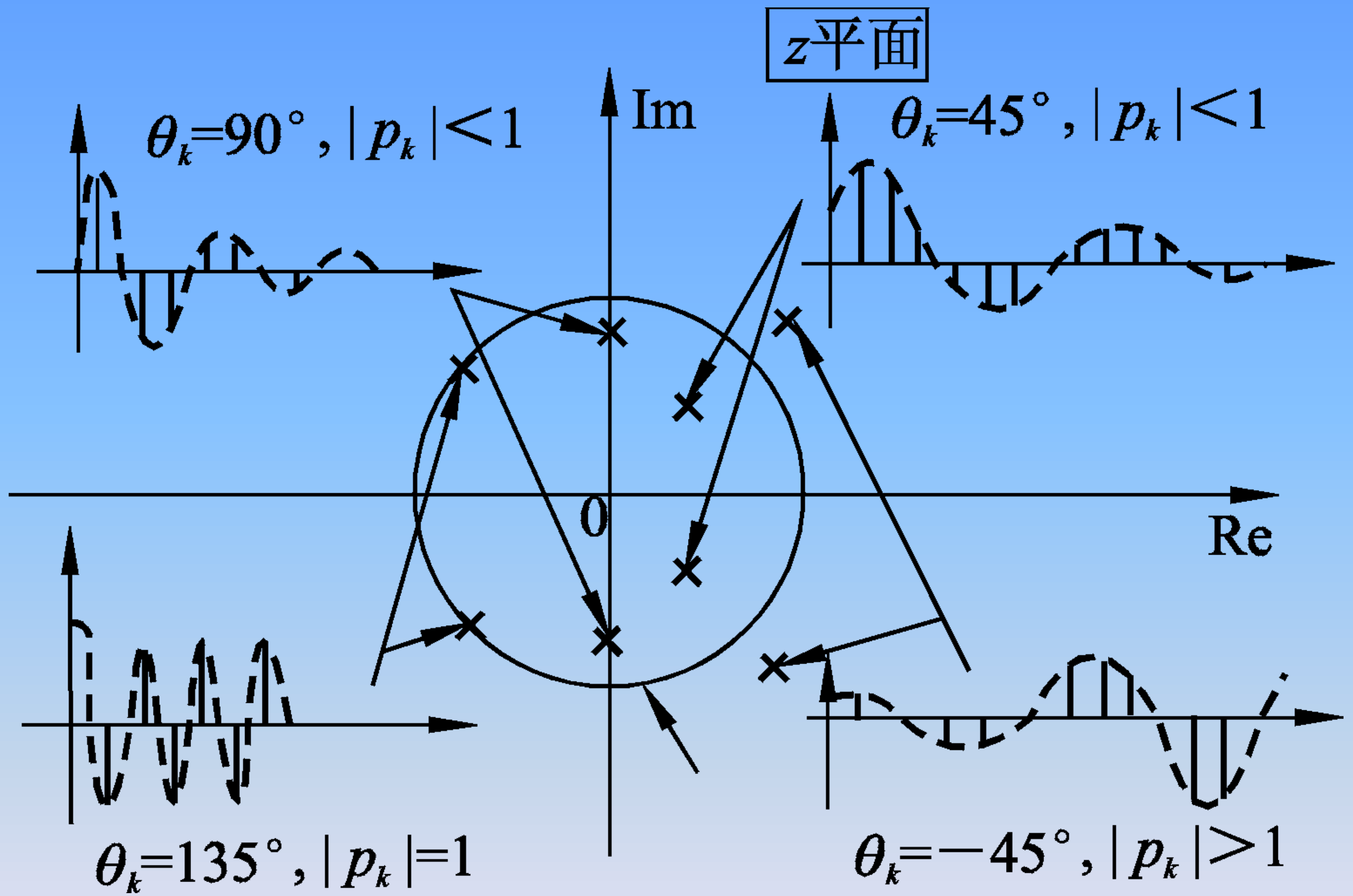
$$y_{k,k+1} = c_k |p_k|^n e^{jn\theta_k} + c_{k+1} |p_k|^n e^{-jn\theta_k}$$

$$y_{k,k+1} = |c_k||p_k|^n e^{j(n\theta_k + \Phi_k)} + |c_k||p_k|^n e^{-j(n\theta_k + \Phi_k)}$$

$$= 2|c_k||p_k|^n \cos(n\theta_k + \Phi_k)$$

若 $|p_k| < 1$，则对应的瞬态响应为振幅衰减的余弦震荡。

若 $|p_k| > 1$，则对应的瞬态响应为发散的余弦震荡。

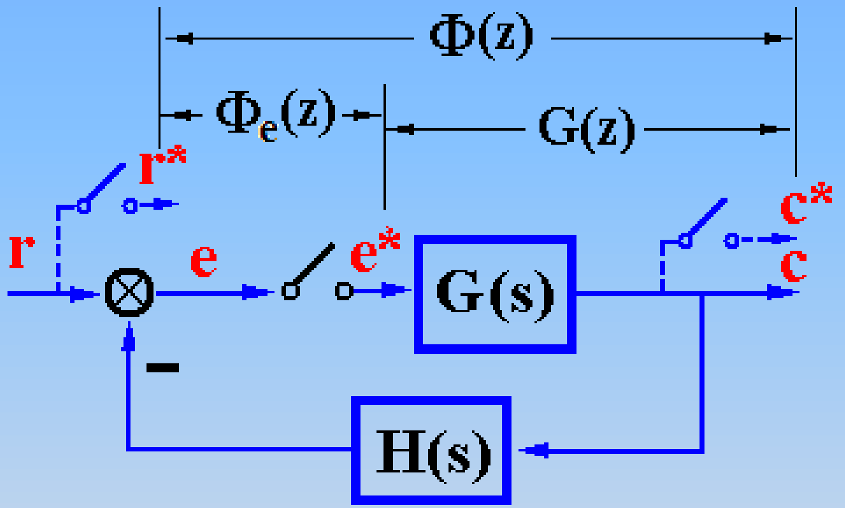


闭环复极点分布与相应的动态响应形式

2. 使用终值定理计算稳态误差

令 $\begin{cases} GH(z)=Z[G(s)H(s)]=\dfrac{1}{(z-1)^{v}}GH_{0}(z) \\ \lim\limits_{z\to 1}GH_{0}(z)=K \end{cases}$

v: 系统型别



算法:

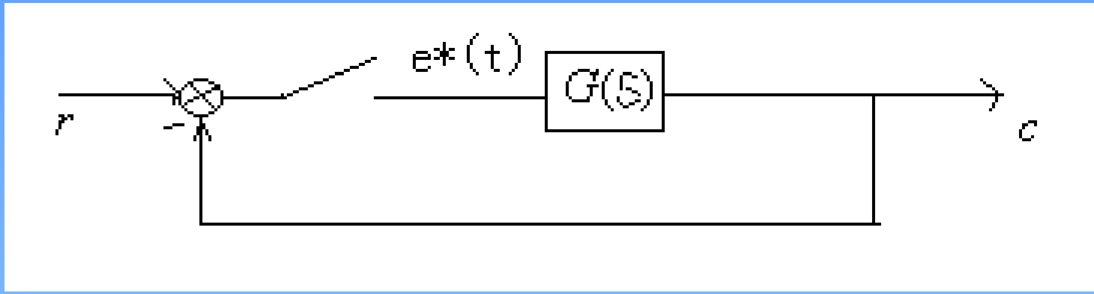
(1)判断系统稳定性

(2)求系统的误差的脉冲传递函数

$$\Phi_{e}(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+GH(z)}$$

(3)根据终值定理，求取系统的稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\,\Phi_{e}(z)\,R(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot R(z)\cdot\frac{1}{1+GH(z)}$$



如图所示的单位反馈的闭环离散系统的误差脉冲传递函数为

$$G_e(z)=\frac{1}{1+G(z)} \qquad G_B(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

$$\therefore G_e(z)=1-G_B(z)$$

系统误差 $$E(z)=G_e(z)R(z)=\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$

终值定理 $$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{R(z)}{1+G(z)}$$

$$\begin{cases} GH(z) = \dfrac{1}{(z-1)^v} GH_0(z) \\ \lim\limits_{z\to 1} GH_0(z) = K \end{cases}$$

型别	稳态误差常数			稳态误差		
v	$K_p = 1 + \lim\limits_{z\to 1} GH(z)$	$K_v = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)GH(z)$	$K_a = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2 GH(z)$	r=A·1(t) $e(\infty)=\dfrac{A}{K_p}$	r=A·t $e(\infty)=\dfrac{AT}{K_v}$	r=A·t²/2 $e(\infty)=\dfrac{AT^2}{K_a}$
0	K_p	0	0	$\dfrac{A}{K_p}$	∞	∞
I	∞	K_v	0	0	$\dfrac{AT}{K_v}$	∞
II	∞	∞	K_a	0	0	$\dfrac{AT^2}{K_a}$