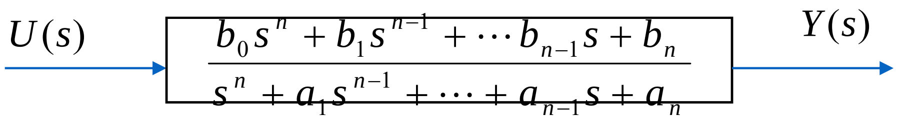
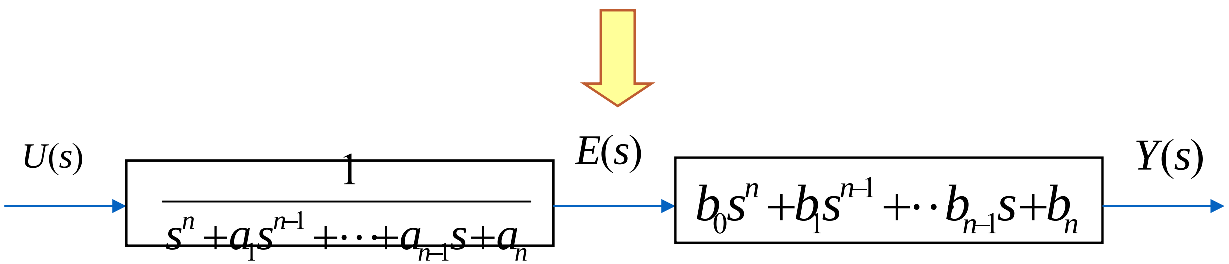
9.3.3 系统传递函数与状态空间描述

- 将传递函数转换成状态空间描述
- 将状态空间描述转换成传递函数

（1）传递函数转换成状态空间描述

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$





$$U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}} \xrightarrow{E(s)} \boxed{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots b_{n-1}s + b_n} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots b_{n-1}s + b_n)E(s)$$

$$U(s) = (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)E(s)$$

选取状态变量

$$\begin{cases} x_1 = e(t) \\ x_2 = \dot{e}(t) \\ \vdots \\ x_n = e^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

$$y = b_0 \dot{x}_n + b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \cdots + b_{n-1} x_2 + b_n x_1$$

$$u = \dot{x}_n + a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_2 + a_n x_1$$

$$y = b_0\dot{x}_n + b_1x_n + b_2x_{n-1} + \cdots + b_{n-1}x_2 + b_nx_1$$

$$u = \dot{x}_n + a_1x_n + a_2x_{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_2 + a_nx_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = b_0(-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0u + (b_n \quad b_{n-1} \cdots b_1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

若有 $b_0 = 0$，则输出方程的前两项为零。

此法也可用来求取微分方程中含有输入信号的导数时系统的状态空间描述，注意与前面介绍的方法不同的是B和C不同。

例9-7 设控制系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+4s+1}{s^3+9s^2+8s}$$

试求该统的状态空间描述。

解 $a_1=9,\ a_2=8,\ a_3=0,\ b_0=0,\ b_1=1,\ b_2=4,\ b_3=1$

状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -8 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

输出方程为

$$y=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{Num(s)}{Den(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\qquad m\le n$$

➢ 传递函数的串联实现

传递函数为两多项式相除形式，分子多项式（**Numerator**）为

$$Num=b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0$$

分母多项式（**Denominator**）

$$Den=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$$

如果 $z_1,z_2,\cdots,z_m$ 为**G(s)**的**m**个零点，

$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ 为**G**（**s**）的**n**个极点，那么**G(s)**可以表示为：

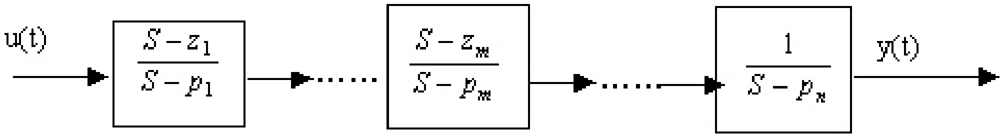
$$G(s)=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{s-z_1}{s-p_1}\bullet\frac{s-z_2}{s-p_2}\bullet\cdots\bullet\frac{s-z_m}{s-p_m}\bullet\frac{b_m}{s-p_{m+1}}\bullet\cdots\bullet\frac{1}{s-p_n}$$

所以系统的实现可以由

$$\frac{s-z_1}{s-p_1},\ \frac{s-z_2}{s-p_2},\ \cdots,\ \frac{1}{s-p_n}$$

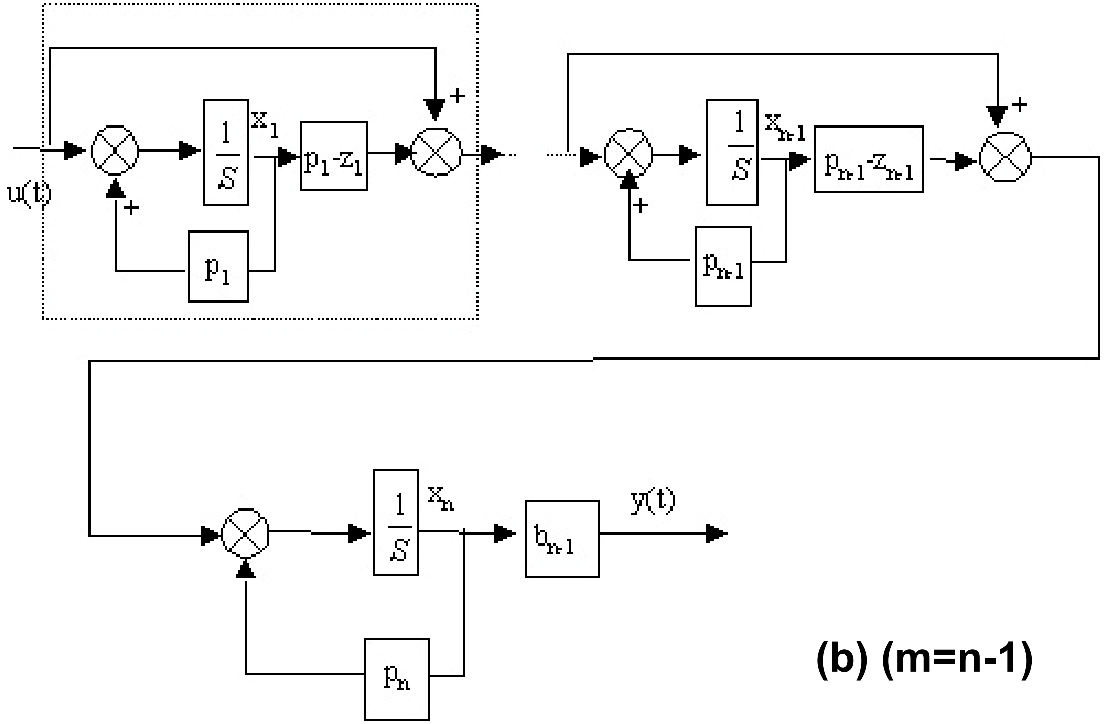
共**n**个环节串联而成，如图（**a**）所示。对第一个环节，由于：



(a)

$$\frac{s-z_1}{s-p_1}=1+\frac{p_1-z_1}{s-p_1}=1+(p_1-z_1)\bullet\frac{\frac{1}{s}}{1-p_1\frac{1}{s}}$$

其结构图可以是如图（**b**）中虚框表示。我们令各个积分器的输出为系统状态变量，则得系统状态方程为：



(b) (m=n-1)

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = p_1 x_1 + u \\
\dot{x}_2 = (p_1 - z_1)x_1 + u + p_2 x_2 = (p_1 - z_1)x_1 + p_2 x_2 + u \\
\vdots \\
\dot{x}_n = (p_1 - z_1)x_1 + (p_2 - z_2)x_2 + \cdots + (p_{n-1} - z_{n-1})x_{n-1} + p_n x_n + u
\end{cases}
$$

$$y = b_m x_n = b_{n-1} x_n, (m = n-1)$$

$$
\begin{cases}
\dot{X} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 - z_1 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 - z_1 & p_2 - z_2 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_1 - z_1 & p_2 - z_2 & p_3 - z_3 & \cdots & p_n \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \end{bmatrix} X
\end{cases}
$$

➢ 传递函数的并联实现系统传递函数

$$G(s)=\frac{Num(s)}{Den(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad m\le n$$

其中

$$Den(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$$

为系统的特征方程。当**Den(s)=0**有**n**个不等的特征根（$p_i, i=1,2,\cdots,n$）**G(s)**可以分解为**n**个分式之和，即：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_1}{s-p_1}+\frac{c_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-p_n}$$

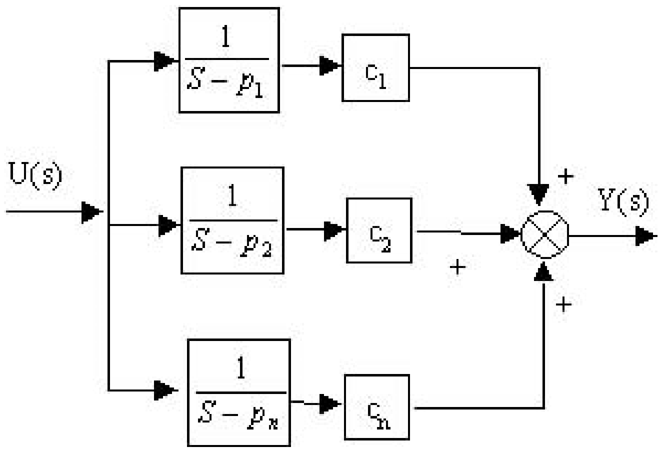
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-p_i}$$

其中，$c_i=\lim\limits_{s\to p_i}(s-p_i)G(s)$，称作系统对应极点$p_i$的留数。

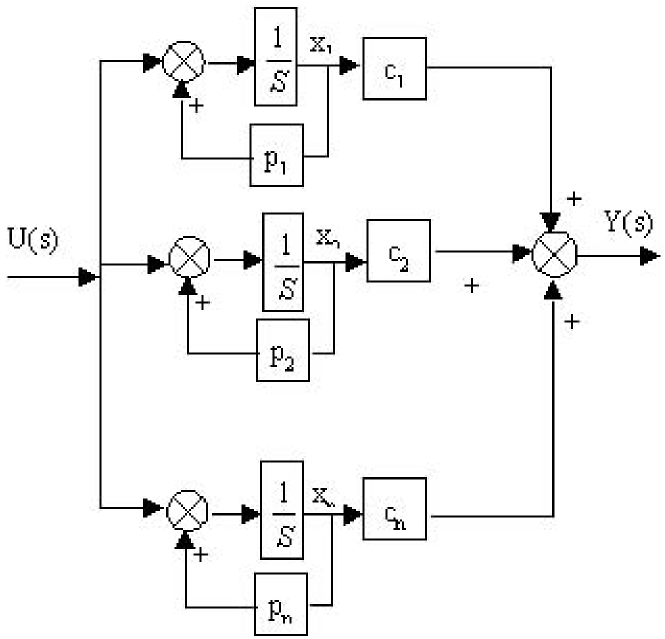
$$Y(s) = \frac{c_1}{s - p_1}U(s) + \frac{c_i}{s - p_i}U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}U(s)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s - p_i}U(s)$$

上式可以用如图所示的并联方式实现。



(a)



(b) 并联实现**(**无重根**)**

从图（**b**）我们可得系统的状态方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = p_2 x_2 + u \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = p_n x_n + u \end{cases}$$

输出方程为：

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

写成矢量形式为：

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} X \end{cases}$$

请注意，这里的系统矩阵**A**为一标准的对角型。

当上述G(s)的分母Den(s)=0有重根时，不失一般性，假设：

$$Den(s) = (s-p_1)^q (s-p_{q+1}) \cdots (s-p_n)$$

即 $s = p_1$ 为q重根，其它为单根。这时G(S)可以分解为：

$$G(s) = \frac{Num(s)}{Den(s)}$$

$$= \frac{c_{11}}{s-p_1} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1q}}{(s-p_1)^q} + \frac{c_{q+1}}{s-p_{q+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

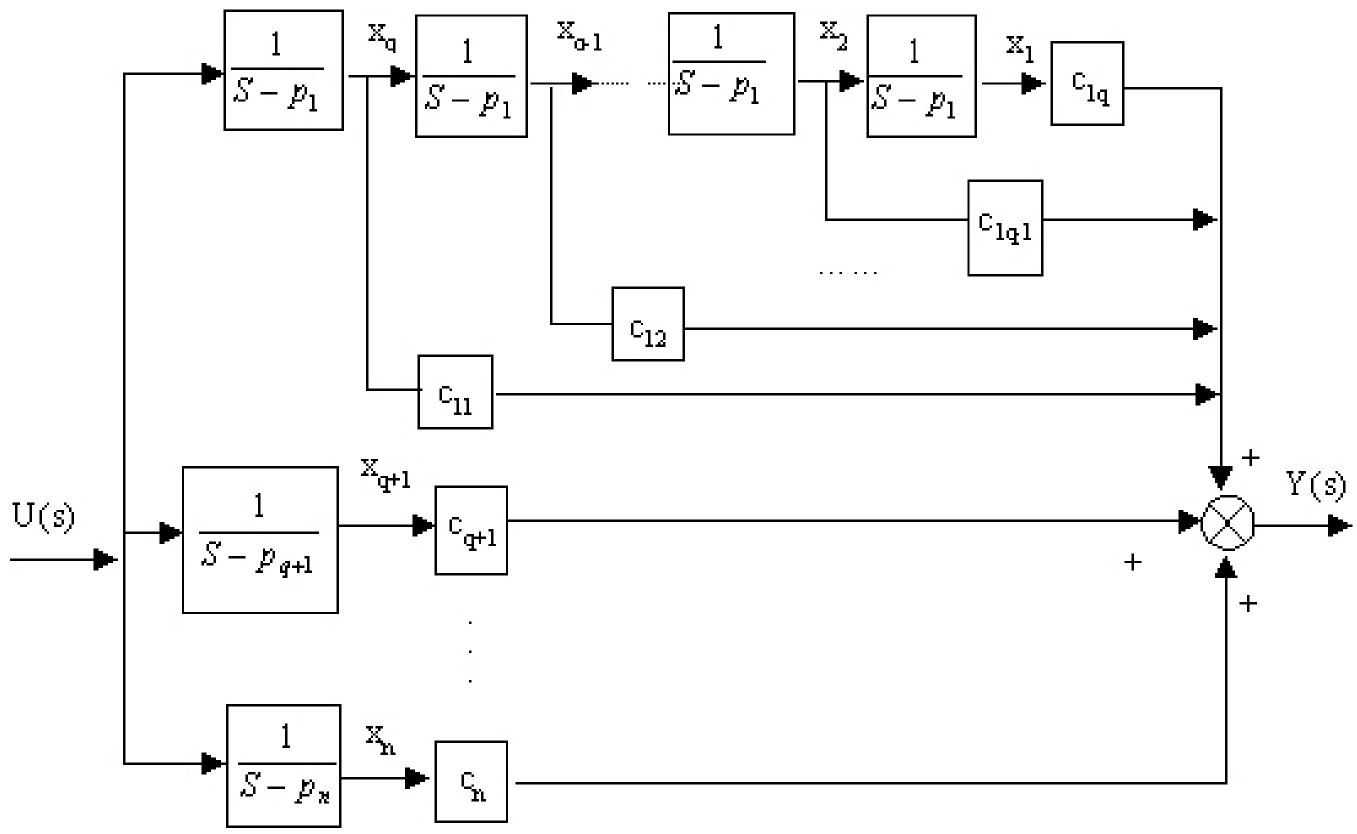
其中：

$$c_{1i} = \frac{1}{(q-i)!} \bullet \lim_{s \to p_1} \frac{d^{q-i}}{ds^{q-i}} [(s-p_1)^q G(s)]$$ **i =1,2,…,q**

$$c_j = \lim_{s \to p_j} [(s-p_j) G(s)]$$ **j=q+1,q+2,…,n**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_{11}}{s-p_1} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1q}}{(s-p_1)^q} + \frac{c_{q+1}}{s-p_{q+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

$$Y(s)=\frac{c_{11}}{s-p_1}U(s)+\frac{c_{12}}{(s-p_1)^2}U(s)+\cdots+\frac{c_{1q}}{(s-p_1)^q}U(s)+\frac{c_{q+1}}{s-p_{q+1}}U(s)+\cdots+\frac{c_n}{s-p_n}U(s)$$



并联实现（有重根）

$$Y(s)=\frac{c_{11}}{s-p_1}U(s)+\frac{c_{12}}{(s-p_1)^2}U(s)+\cdots+\frac{c_{1q}}{(s-p_1)^q}U(s)+\frac{c_{q+1}}{s-p_{q+1}}U(s)+\cdots+\frac{c_n}{s-p_n}U(s)$$

取图中每个积分器输出为状态变量，则有：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=p_1x_1+x_2\\ \dot{x}_2=p_1x_2+x_3\\ \vdots\\ \dot{x}_{q-1}=p_1x_{q-1}+x_q\\ \dot{x}_q=p_1x_q+u\\ \vdots\\ \dot{x}_n=p_nx_n+u\end{cases}$$

$$y=c_{1q}x_1+c_{1q-1}x_2+\cdots+c_{11}x_q+c_{q+1}x_{q+1}+\cdots+c_nx_n$$

$$
\begin{cases}
\dot{X} = \begin{bmatrix}
p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & p_1 & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & p_{q+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_n
\end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} U \\
Y = \begin{bmatrix} c_{1q} & c_{1q-1} & \cdots & c_{11} & c_{q+1} & \cdots & c_n \end{bmatrix} X
\end{cases}
$$

注意这里的**A**为一约当标准型。

例 求下列传递函数的并联实现

$$G(s)=\frac{4s^2+10s+5}{s^3+5s^2+8s+4}$$

解：分母各项多项式分解可得 $(s+2)^2(s+1)$

$$G(s)=\frac{4s^2+10s+5}{(s+2)^2(s+1)}=\frac{c_{11}}{s+2}+\frac{c_{12}}{(s+2)^2}+\frac{c_3}{s+1}$$

$$c_{12}=\lim_{s\to -2}(s+2)^2G(s)=-1$$

$$c_{11}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -2}\frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}}[(s+2)^2G(s)]=\lim_{s\to -2}\frac{d}{dS}[\frac{4s^2+10s+5}{(s+1)}]=5$$

$$c_3=\lim_{s\to -1}(s+1)G(s)=\lim_{s\to -1}\frac{4s^2+10s+5}{(s+2)^2}=-1$$

系统并联实现的动态方程为：

$$\begin{cases}\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}-1 & 5 & -1\end{bmatrix}X\end{cases}$$

(2) 将状态空间描述转换成传递函数

系统动态方程和系统传递函数（阵）都是控制系统两种经常使用的数学模型。

- 动态方程不但体现了系统输入输出的关系，而且还清楚地表达了系统内部状态变量的关系。传递函数只体现了系统输入与输出的关系。
- 从传递函数到动态方程是个系统实现的问题，这是一个比较复杂的并且是非唯一的过程。但从动态方程到传递函数（阵）却是一个唯一的、比较简单的过程。

❖ 单输入/单输出系统的状态空间描述转换成传递函数

设一单输入/单输出系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + Du \end{cases}$$

$x, \dot{x} \in R^{n\times 1}$ $A \in R^{n\times n}$ $B \in R^{n\times 1}$ $C \in R^{1\times n}$ ***D***为标量

设初始条件为零，对上式进行拉氏变换可得

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + Du(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

例9-8 设系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

求系统的传递函数。

解 状态空间描述的**[A ,B ,C]**分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

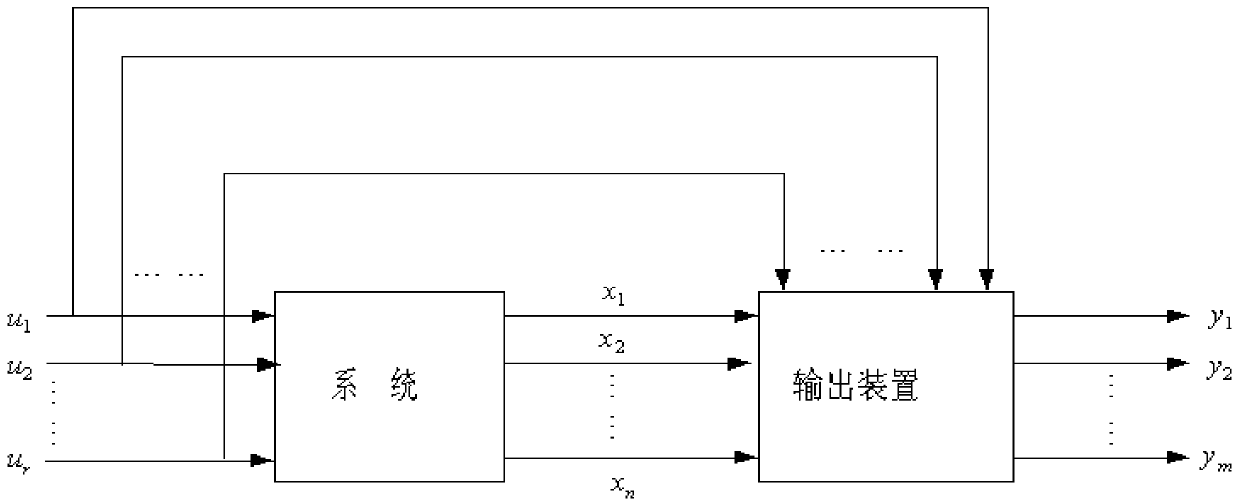
系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s(s+3)+1} & \frac{1}{s(s+3)+1} \\ \frac{-1}{s(s+3)+1} & \frac{s}{s(s+3)+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s(s+3)+1}=\frac{1}{s^2+3s+1}$$

❖ 多输入/多输出系统的状态空间描述转换成传递函数矩阵



$u_1, u_2, \cdots, u_r$ —— 系统的输入信号

$y_1, y_2, \cdots, y_m$ —— 系统的输出信号

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ —— 系统的状态变量

动态方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u} \end{cases}$$

与单输入/单输出系统的状态方程形式相同，仅是矩阵B, C,D的维数不同。

$$\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{R}^{n\times 1},\ \boldsymbol{U} \in \boldsymbol{R}^{r\times 1},\ \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{R}^{m\times 1},$$

$$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n},\ \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}^{n\times r},\ \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{D} \in \boldsymbol{R}^{m\times r}$$

将状态方程进行拉氏变换，得

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$G \in R^{m\times r}$ ———传递函数矩阵

例9-9 已知系统的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试求系统的传递矩阵。

解：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI + A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

➢ 系统矩阵A的特征方程和特征值

由系统矩阵A构成的方程 $|\lambda I - A| = 0$ 称系统的特征方程, 特征方程的根也称为特征值.

展开 $|\lambda I - A| = 0$

有 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots a_n = 0$

即可得到n个特征值.

如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ 则 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix}$

$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

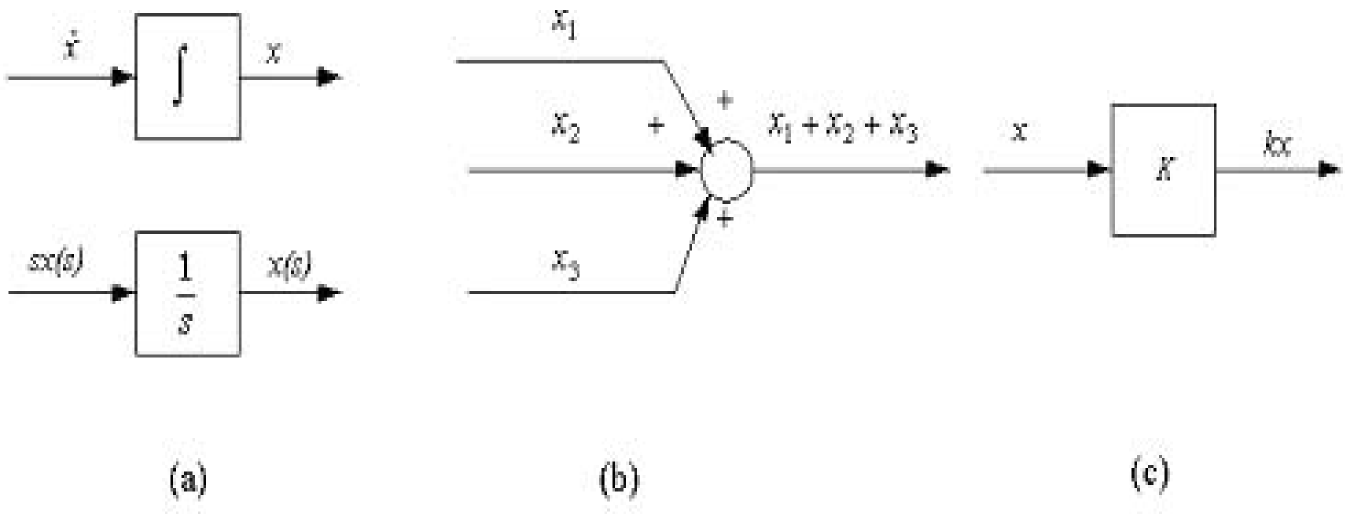
$$= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

3个特征值为－1、－2和－3

9.3.4 由状态变量图求状态空间描述

状态变量图 描述系统状态变量之间关系的图，由积分环节、比例环节和相加符号组成。

状态变量图的特点：每一个积分环节的输出都代表系统的一个状态变量



例9-10 系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s(s^2+7s+12)}$$

试绘制系统的状态变量图，并由图列写系统的状态空间描述。

解 将系统的闭环传递函数改写成

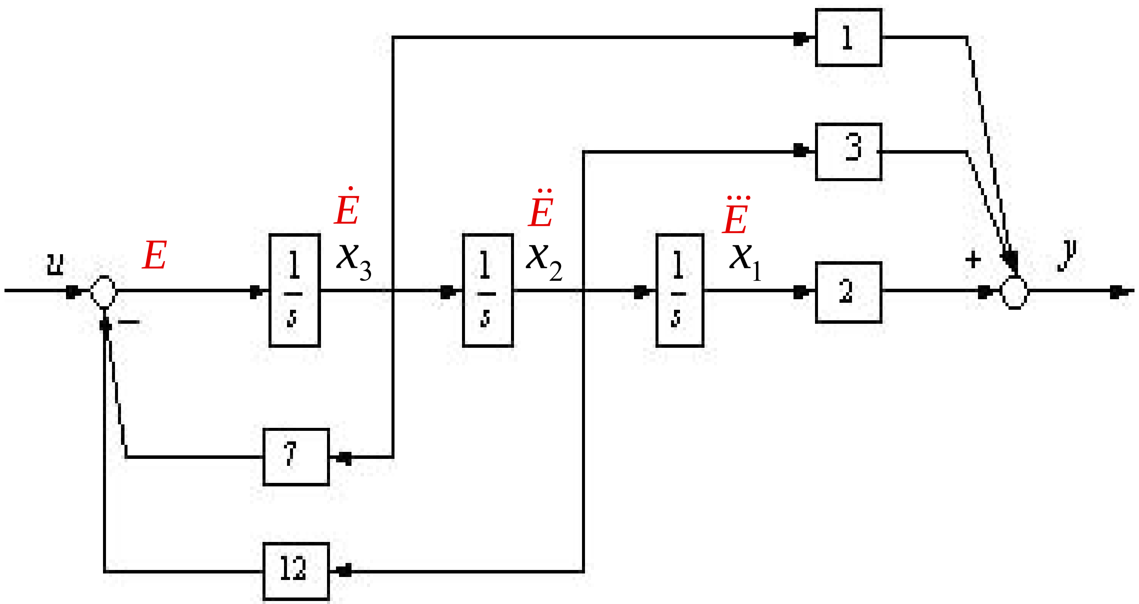
$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^{-1}+3s^{-2}+2s^{-3}}{1+7s^{-1}+12s^{-2}}$$

令

$$Y(s)=(s^{-1}+3s^{-2}+2s^{-3})E(s)$$

$$U(s)=(1+7s^{-1}+12s^{-2})E(s)$$

$$E(s)=U(s)-7s^{-1}E(s)-12s^{-2}E(s)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \quad 3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$