

9.12系统的设计与应用

内模控制器

内模控制器的设计

设单输入-单输出系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t)$$

其中， $\mathbf{x} \in R^n$ 为状态向量， u 为标量输入， y 为标量输出， \mathbf{A} 、 \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 维数适当。

生成参考输入信号 $r(t)$ 的线性系统为

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t)$$

$$r(t) = d_r x_r(t)$$

其中，初始条件未知。

此外，参考输入 $r(t)$ 的生成系统也可以等效为

$$r^{(n)}(t) = a_{n-1}r^{(n-1)}(t) + a_{n-2}r^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0r(t)$$

首先考虑参考输入 $r(t)$ 为单位阶跃信号时的内模控制器设计。此时， $r(t)$ 可由下列方程生成：

$$\dot{x}_r(t) = 0, \quad r(t) = x_r(t)$$

或等价于 $\dot{r}(t) = 0$

定义跟踪误差

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

于是有

$$\dot{e}(t) = -\dot{y}(t) = -c\dot{x}(t)$$

现在，引入两个中间变量 $z(t)$ 和 $w(t)$ ，其定义为：

$$z(t) = \dot{x}(t), w(t) = \dot{u}(t)$$

故有

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + b\dot{u}(t) \\ &= Az(t) + bw(t)\end{aligned}$$

$$\dot{e}(t) = -\dot{y}(t) = -c\dot{x}(t)$$

$$\dot{z}(t) = Az(t) + bw(t)$$

于是构成如下增广系统方程

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} w$$

当增广系统可控时，即

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -cb & -cAb & \cdots & -cA^{n-2}b \\ b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \\ = n+1 \end{aligned}$$

总可以找到反馈信号

$$w(t) = -k_1 e(t) - k_2 z(t)$$

使该系统渐近稳定。这表明跟踪误差 $e(t)$ 是渐近稳定的，因此系统输出能以零稳态误差跟踪参考输入信号。

$$w(t) = -k_1 e(t) - k_2 z(t)$$

对上式求积分，可得系统内部的反馈控制信号为

$$u(t) = -k_1 \int_0^t e(\tau) d\tau - k_2 x(t)$$

与此对应的框图模型如图1所示。

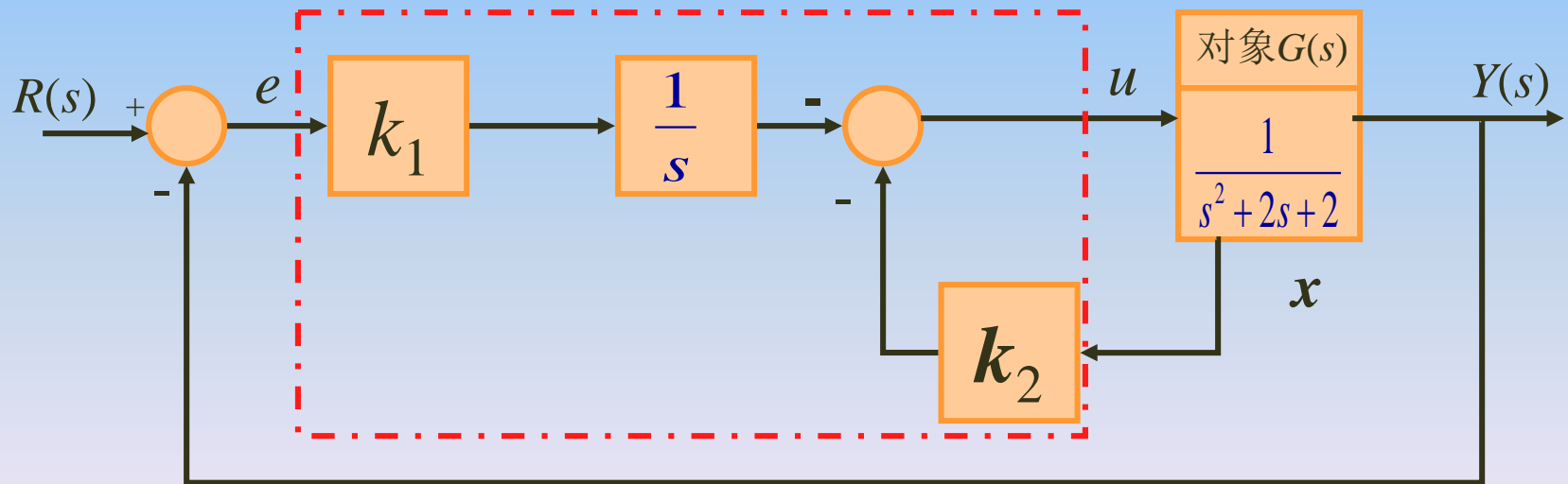
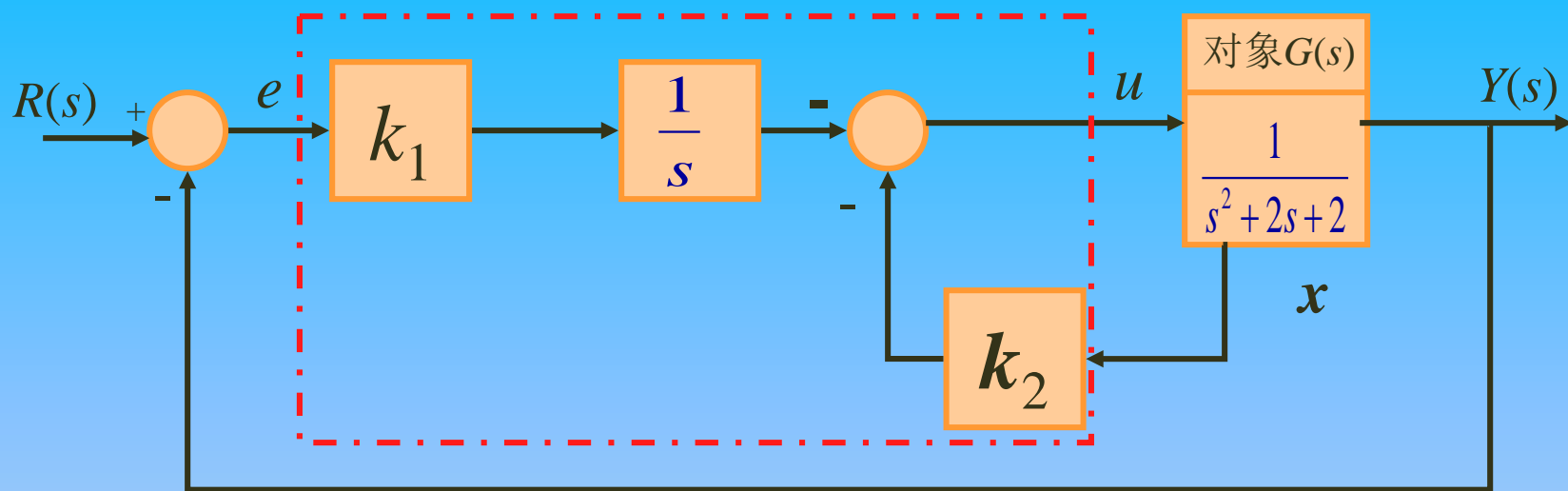


图1 阶跃输入的内模设计



由图可见，在校正控制器中，除包含有状态变量反馈外，还包含了参考阶跃输入的内模（图中积分器环节），故称为内模控制器。

下例为一个具体系统的单位阶跃输入内模控制器的设计过程。

设有

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] x(t) \end{aligned}$$

要求系统输出能以零稳态误差跟踪单位阶跃参考输入信号。

由

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} w$$

知增广系统方程为 $\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} w$

由于可控性矩阵

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -cb & -cAb \\ b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix} = 3$$

满秩，增广系统可控，

故通过状态反馈

$$w = -k \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} = -k_1 e - k_2 z_1 - k_3 z_2$$

式中 $\mathbf{k}=[k_1 \ k_2 \ k_3]$ ，可任意配置闭环增广系统的极点。

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2 \ k_3] \right\} \begin{bmatrix} e \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

如果要求闭环极点为 $S_{1,2} = -1 \pm j, S_3 = -10$
则希望特征方程为

$$(s+1+j)(s+1-j)(s+10) \\ = s^3 + 12s^2 + 22s + 20 = 0$$

而实际特征方程为

$$\det \begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ k_1 & s+k_2 & k_3-1 \\ 2k_1 & 2(1+k_2) & s+2+2k_3 \end{bmatrix} \\ = s^3 + (k_2 + 2k_3 + 2)s^2 + (2 - k_1 + 4k_2 - 2k_3)s - 4k_1 \\ = 0$$

令上述两个特征方程式的对应项系数相等，
解得

$$k_1 = -5, k_2 = 5, k_3 = 2.5$$

得到内模控制律为

$$u(t) = 5 \int_0^t e(\tau) d\tau - 5x_1(t) - 2.5x_2(t)$$

相应的单位阶跃输入内模控制系统的结构图如图2所示。

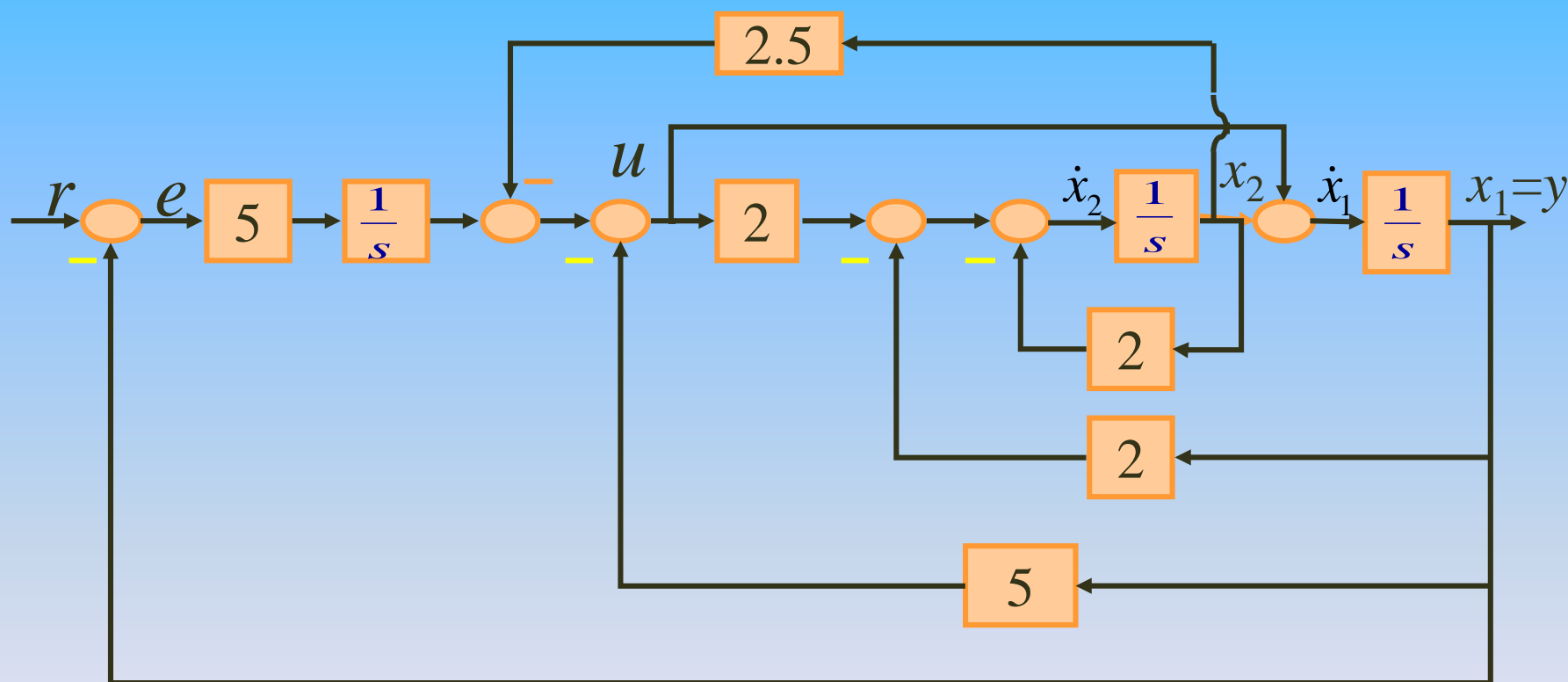
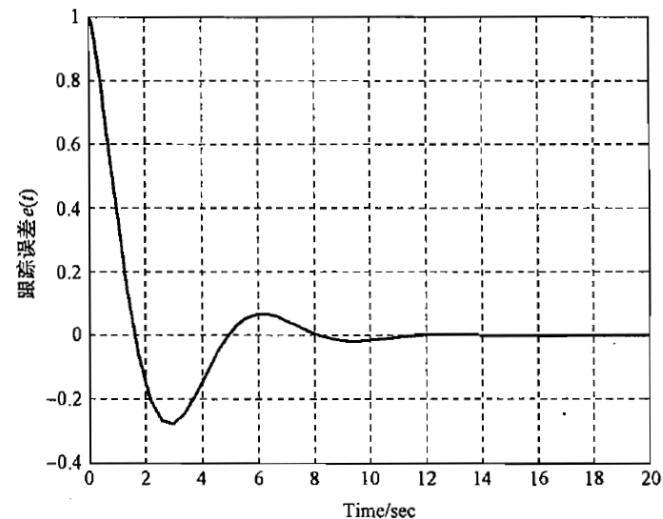


图2 单位阶跃输入内模控制系统

显然，本例设计的内模控制系统是渐近稳定的。对任意初始跟踪误差 $e(0)$ ，反馈控制信号都可以保证在 $t \rightarrow \infty$ 时， $e(t) \rightarrow 0$ 。图3直观地表明了系统在单位阶跃参考输入时，跟踪误差的渐近收敛性。

图3 跟踪误差的内模设计响应，输入为单位阶跃响应，初始跟踪误差非零



其次，考虑参考输入为斜坡信号的内模设计问题。单位斜坡参考输入信号为 $r(t)=t$ ，由下列系统生成：

$$\dot{x}_r = A_r x_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_r$$

$$r = d_r x_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_r$$

设单输入-单输出系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t)$$

$$r^{(n)}(t) = a_{n-1}r^{(n-1)}(t) + a_{n-2}r^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0r(t)$$

单位斜坡参考输入信号为 $r(t) = t$

且有 $\ddot{r}(t) = 0$ ，则对于上述单输入单输出系统，定义跟踪误差 $e = r - y$ ，有

$$\ddot{e}(t) = -\ddot{y}(t) = -c\ddot{x}(t)$$

令中间变量

$$z = \ddot{x}, w = \ddot{u}$$

有

$$z = \ddot{x} = A\dot{x} + b\dot{u}$$

$$\dot{z} = A\ddot{x} + b\ddot{u} = Az + bw$$

$$\ddot{e} = -\ddot{y} = -c\ddot{x} = -cz$$

构造增广系统

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} w$$

若该增广系统可控，即

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -cb & -cAb \\ 0 & -cb & -cAb & -cA^2b \\ b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} = n + 2$$

则存在状态反馈

$$w = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ z \end{bmatrix} = -k_1 e - k_2 \dot{e} - k_3 z$$

可使增广闭环系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ -k_1 b & -k_2 b & A - b k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

渐近稳定。

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ -k_1b & -k_2b & A-bk_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ z \end{bmatrix}$$

其中， k_1 、 k_2 和 k_3 可由要求的闭环增广系统的极点位置来确定。这样，当 $t \rightarrow \infty$ 时，必有 $e(t) \rightarrow 0$ 。

$$w = -k_1 e - k_2 \dot{e} - k_3 z$$

对上式作二次积分，可得含有输入内模信息的反馈控制信号

$$u(t) = -k_1 \int_0^t \int_0^t e(\tau) d\tau d\tau - k_2 \int_0^t e(\tau) d\tau - k_3 x(t)$$

斜坡输入的内模设计系统框图如图4所示。

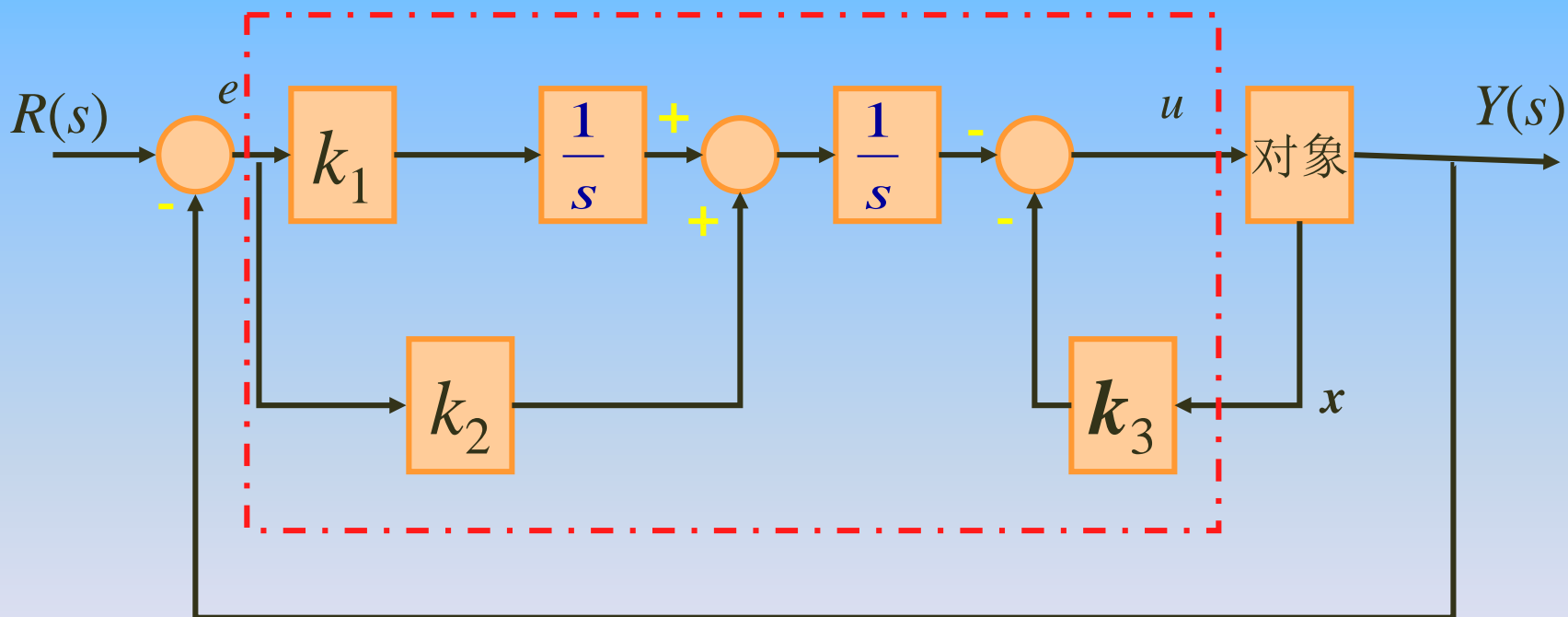


图4 斜坡输入的内模设计

由图4可见，虚框表示的控制器中含有两个积分器，这正是斜坡输入的内模形式。类似地，可以将内模方法推广到处理其他参考输入形式。此外，如果将扰动信号的生成模型也纳入校正控制器中，还可以通过扰动内模设计来克服持续扰动对系统性能的影响。