7.2 采样过程及采样定理

7.2.1. 采样过程

如图所示计算机控制系统，被控对象是在连续信号作用下工作的，其控制信号、输出信号c(t)及其反馈信号、参考输入信号r(t)等均为连续信号，而计算机的输入、输出信号是离散的数字信号。

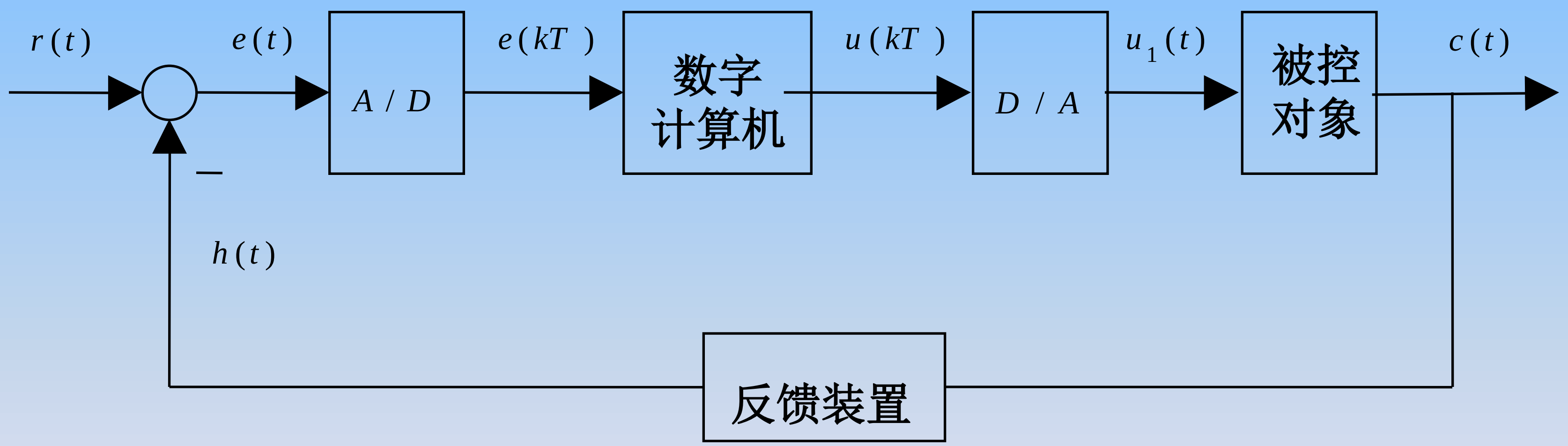


图7.2 计算机控制系统框图

由于计算机处理的是二进制的数据，其输入信号不能是连续信号，所以误差信号要经过模/数转换器（A/D）变成计算机能接受的数字信号。这种将连续信号变为离散信号的过程称为采样。

实际采样装置是多种多样的，但无论其具体实现如何，其基本功能可以用一个开关来表示，通常称为采样开关。连续信号加在采样开关一端，采样开关以一定规律开闭，另一端便得到离散信号。采样开关每次闭合时间极短，可以认为是瞬间完成。这样开关闭合一次，就认为得到连续信号的某一时刻的值。这样的采样开关称为理想采样开关，以后所说的采样开关都是指理想采样开关，简称为采样开关。

如果采样开关是等时间间隔采样，则称为普通采样、均匀采样、周期采样等。采样间隔时间称为采样周期，常用T表示。

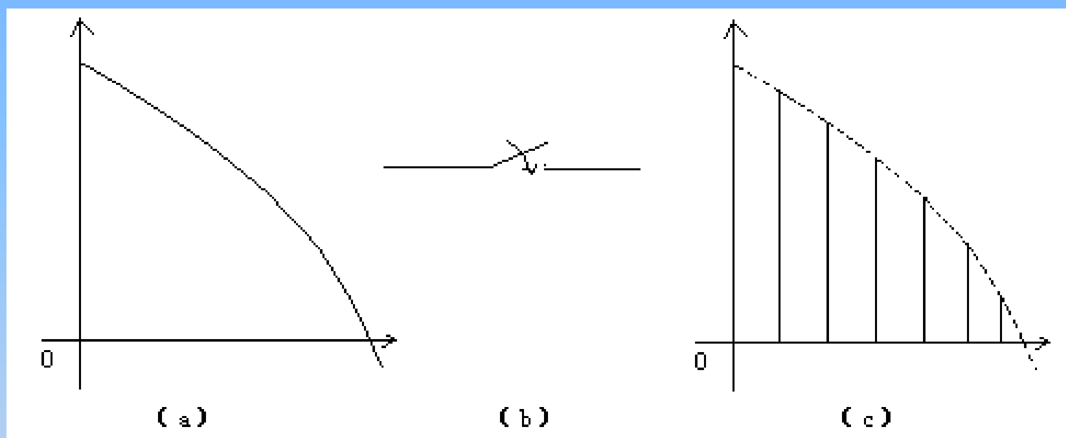
如果采样的时间间隔是时变的，则称为非周期采样、非均匀采样等。

如果采样开关采样的时间间隔是随机的，则称为随机采样。

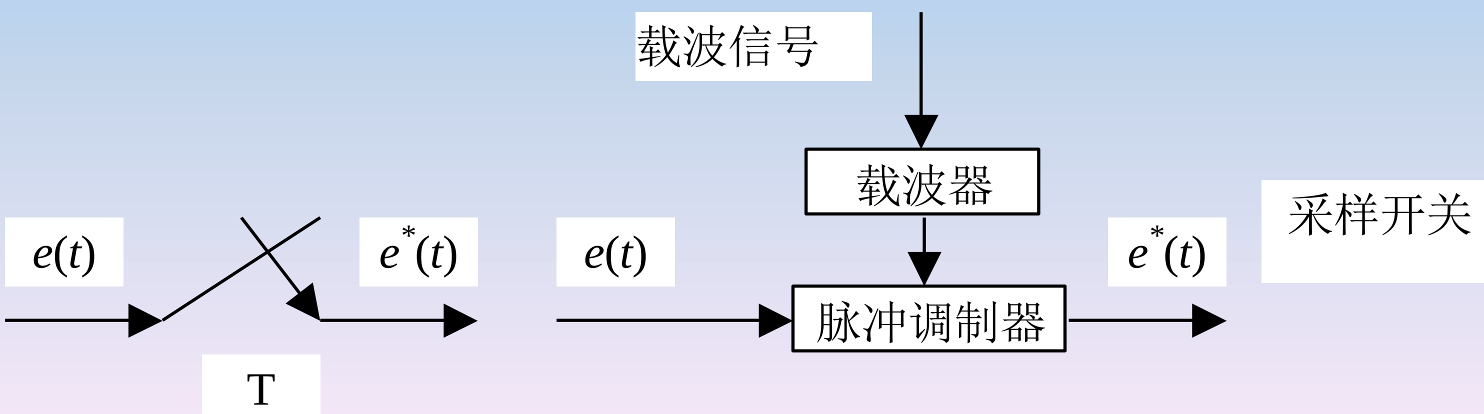
一个离散系统中往往存在多个采样开关。如果系统中所有采样开关同时采样，则称为同步采样，否则称为非同步采样。如果所有采样开关都是均匀采样，但采样周期不等，则称为多速采样。

- 信号的采样过程：通过采样开关将连续信号离散化，转变为脉冲序列信号；
- 信号的保持过程：通过信号保持器将离散信号连续化；
- 两者互为逆过程；

采样和采样器　　将连续信号变为离散信号（脉冲序列）的过程称为采样；实现采样的装置称为采样器。采样器是离散系统的基本元件，每隔一段时间，开关闭合一次，使输入信号通过。



采样过程



7.2.2 采样信号的数学描述

1、几点假定（理想化）

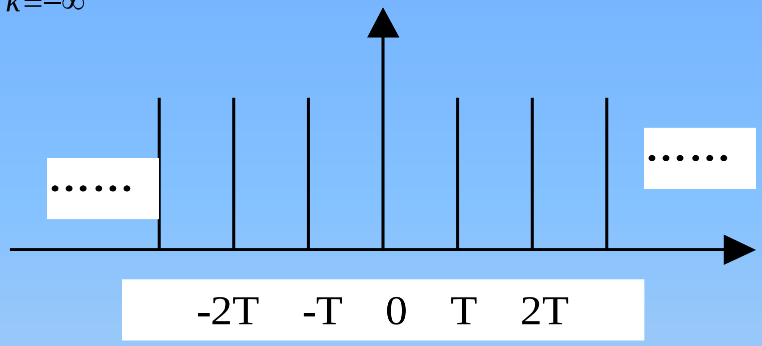
- 采样开关应能立即开或闭；
- 通过采样开关的输出不发生畸变；
- 采样时间(即采样装置闭合的时间）τ 远小于采样周期T，分析时可以近似认为趋近于零；
- 开关闭合时，其输出为常数；
- 等采样周期，即采样周期T 为常数。

2、单位脉冲函数 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数，脉冲的宽度为无限小、幅度为无限大，而面积为1。

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

3、单位脉冲序列函数　下式为单位脉冲序列函数，它是单位脉冲函数的序列。

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\delta(t)+\delta(t-T)+\cdots+\delta(t-kT)+\cdots$$



单位脉冲序列函数

4、断续信号（采样信号）　将连续的信号经采样后得到断续信号，利用单位脉冲序列函数可以描述断续信号为：

$$e^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e(t)\delta(t-kT)$$

该过程可以看成是一个信号的调制过程，如图7-3 所示，其中载波信号 $p(t)$是一个周期为T，宽度为$\tau(\tau < T)$，幅值为 $\frac{1}{\tau}$ 的脉冲序列，如图7-3（b）所示。

调制后得到的采样信号是一个周期为T，宽度为τ幅值正比于采样瞬时值的脉冲序列，如图7-3（c）所示。

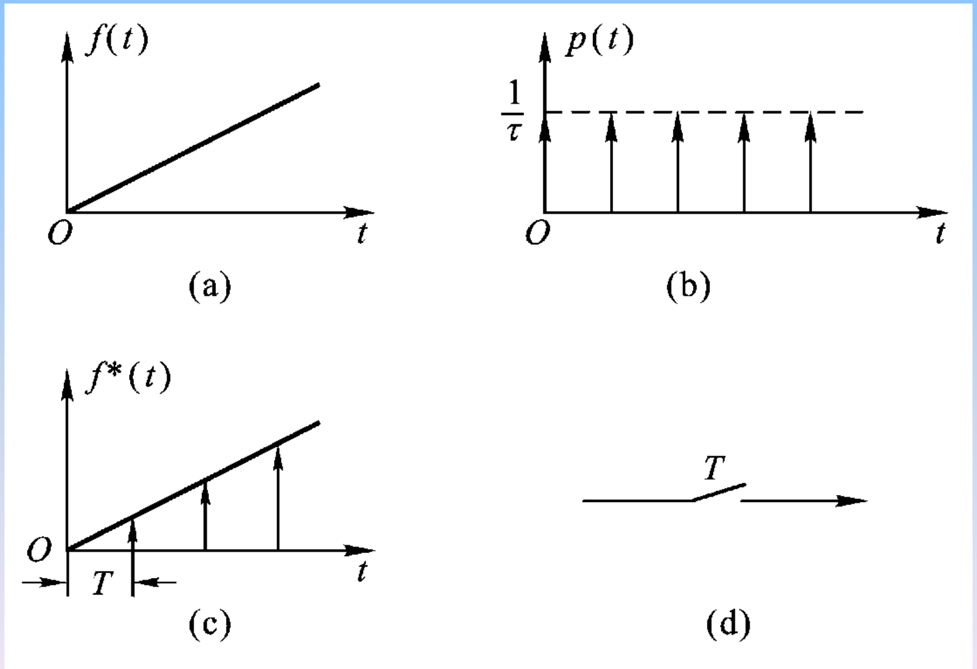


图7—3 信号的采样过程

$$f_\tau^*(t) = p(t) \cdot f(t)$$

实现上述采样过程的装置称为采样开关，可用图7-3（d）所示的符号表示。

拉氏变换的基本性质

（6）位移定理：

a. 实域中的位移定理，若原函数在时间上延迟 τ ，则其象函数应乘以$e^{-\tau \cdot s}$

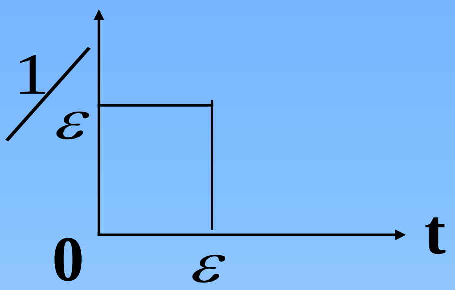
$$L[f(t-\tau)] = e^{-\tau \cdot s} F(s)$$

b. 复域中的位移定理，象函数的自变量延迟a，原函数应乘以 e^{at} ，即

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

- 单位脉冲函数 $\delta(t)$

$$\delta(t)=\begin{cases} 1/\varepsilon & 0\le t\le\varepsilon \\ 0 & t<0\text{或}t>\varepsilon \end{cases}$$

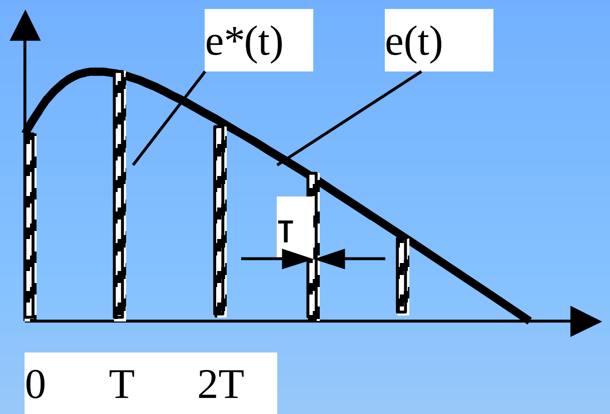


- 单位脉冲函数的拉氏变换为

$$F(s)=\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1$$

对于实际的采样控制系统，总有一个工作起始时间，因此假定当t<0时e(t)=0。则断续信号描述为（时域描述）

$$e^{*}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(t)\delta(t-kT)$$



连续信号与采样信号

注：
$$e^{*}(t)=e(0)\delta(t)+e(T)\delta(t-T)+\cdots$$
$$\neq e(0)+e(T)+\cdots$$

对e*(t)取拉氏变换，得

$$E^{*}(s)=L\left[e^{*}(t)\right]=L\left[\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\delta(t-kT)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)e^{-kTs}$$

上式可以将E*(s)与离散时域信号e(kT)联系起来，可以直接看出e*(t)的时间响应。但是e*(t)仅描述了e(t)在采样时刻的值，所以E*(s)不可能给出e(t)在两个采样时刻之间的任何信息。

采样周期为T，则采样频率为 $f_s=\dfrac{1}{T}$ ，采样角频率为$\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$ ，但一般简称后者为采样频率。

例7-1 设e(t)=1(t)，试求e*(t)的拉氏变换。

【解】

$$E^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)e^{-kTs}=1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-Ts}},\quad \left|e^{-Ts}\right|<1$$

例7-2 设$e(t)=e^{-at}$，$t\geqslant 0$，a为常数，试求e*(t)的拉氏变换。

【解】

$$E^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)e^{-kTs}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-akT}e^{-kTs}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kT(s+a)}=\frac{1}{1-e^{-T(s+a)}}=\frac{e^{Ts}}{e^{Ts}-e^{-aT}},\qquad \left|e^{-T(s+a)}\right|<1$$

上例表明，用拉氏变换法来对离散信号进行变换时，得到的式子是有关s的超越函数，不利于分析。因此要引入z变换。

7.2.3 采样信号的频谱分析

由于单位脉冲序列函数 $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ 为周期函数，因此可以将其展开成傅里叶级数

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_s T}$$

其中 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$ 称为系统的采样频率。

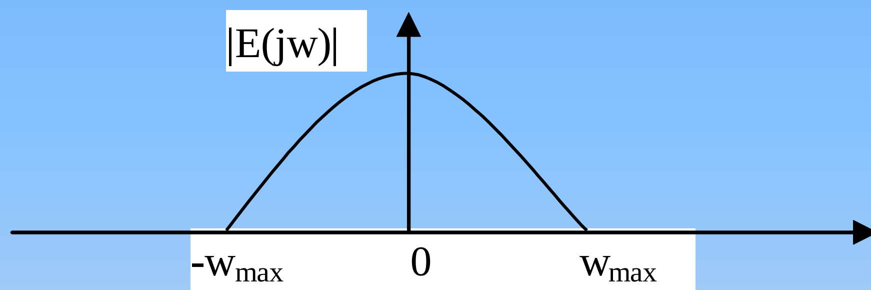
$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)e^{-jkw_s t}dt \overset{令t=0}{=} \frac{1}{T}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=\frac{1}{T}$$

则 $e^*(t)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e(kT)e^{jkw_s t}$ $\quad E^*(s)=\dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}E(s-jk\omega_s)$

上式描述了采样过程的复频域特征。

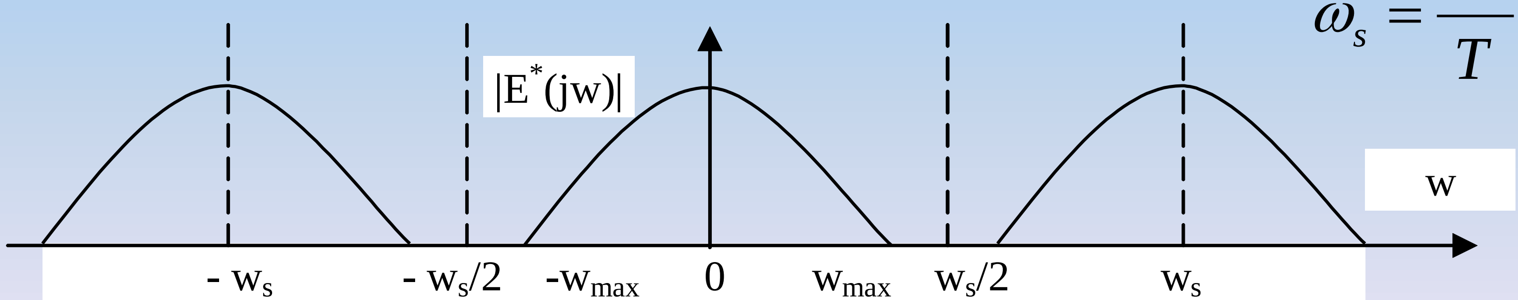
$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}E(s-jk\omega_s)$$

如果连续信号e(t)的频谱*E(jw)*是单一的连续频谱，则离散信号$e^*(t)$的频谱除包含原连续信号主频谱外（幅值为1/T），还包含无穷多个高频频谱。



连续信号e(t)的频谱

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

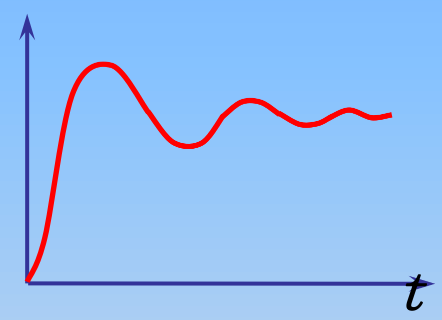


离散信号的频谱（$\omega_s>=2\omega_{max}$）

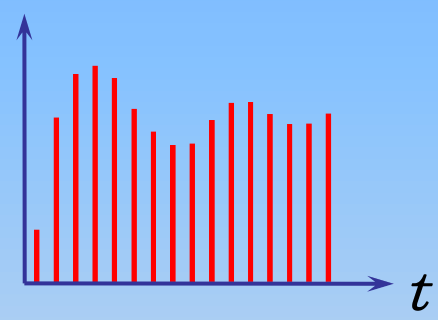
7.2.4 采样定理

1. 问题的提出

连续信号$e(t)$经过采样后，只能给出采样点上的数值，不能知道各采样时刻之间的数值。从时域上看，采样过程损失了$e(t)$所含的信息。怎样才能使采样信号$e^*(t)$大体上反映$e(t)$的变化规律呢？



(*a*) 连续信号



(*b*) 离散信号

2. 定性分析

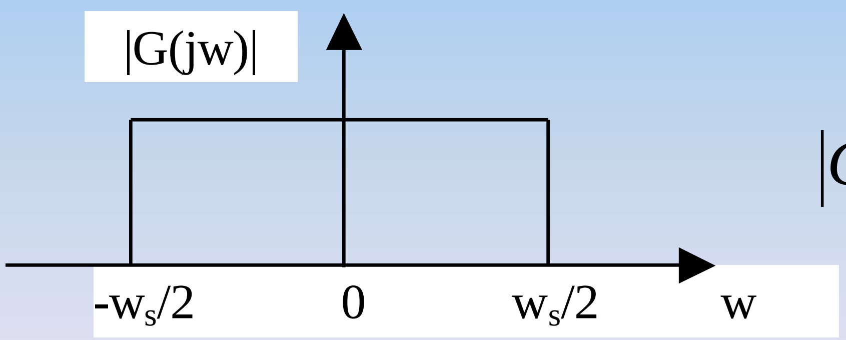
如果连续信号$e(t)$变化缓慢（最大角频率ω_{max}较低），而采样角频率ω_s比较高（即采样周期$T=2\pi/\omega_s$较小），则$e^*(t)$基本上能反映$e(t)$的变化规律。

Shannon采样定理：为使离散信号不失真的还原成原来的连续信号，采样频率必须大于等于原连续信号所含最高频率的两倍。即

$$\frac{\omega_s}{2} \geq \omega_{\max}$$

由于 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$，则 $\omega_{\max} = \dfrac{2\pi}{T_{\min}}$，所以 $T \leq \frac{1}{2} T_{\min}$ 。

如果采样频率满足上面条件，则两相邻信号间无交叉部分。因此可设计如下理想滤波特性的滤波器，即可不失真地恢复原连续信号。



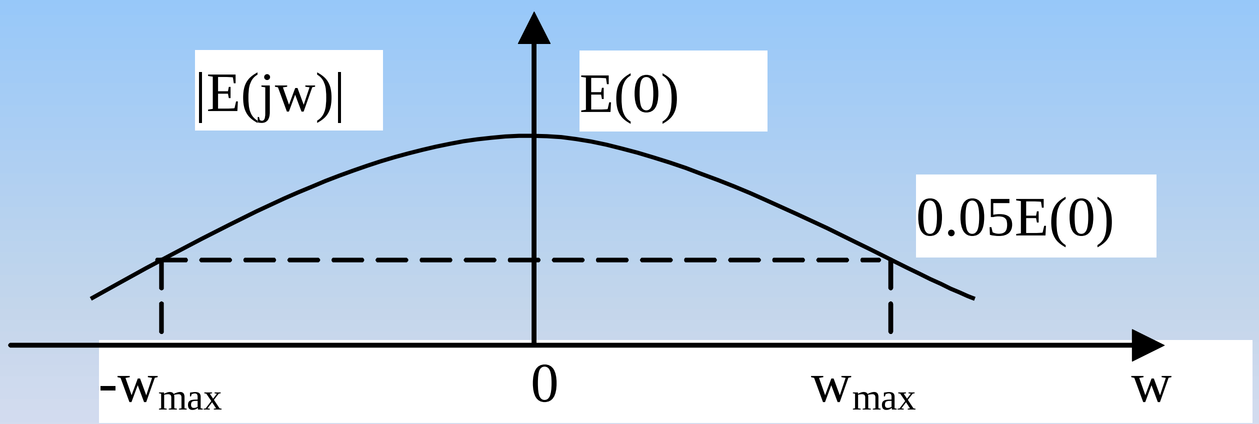
$$\left|G(j\omega)\right| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_s / 2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s / 2 \end{cases}$$

理想滤波器的频率特性

由于实际的非周期连续信号的频率特性中最高频率是无穷大的，因此离散信号频谱必然相互交叉，采样频率的选取发生困难，此时必须作近似处理：

连续信号频谱特性的频带宽度（即当频率特性的幅值为零频幅值e(0)的5%时所对应的频率）为连续信号所含的最高频率。

近似处理得到 ω_{max} 后，即可利用采样定理得到采样频率。



非周期连续信号的频谱

例7-3 设$e(t)=e^{-t}$，试按采样定理选择采样频率。

【解】首先求连续信号的拉氏变换 $E(s)=\dfrac{1}{s+1}$

其频率特性为 $E(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}$

幅频特性为

$$|E(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

若在 $|E(j\omega)|=0.05|E(0)|$ 处截断，可求频带宽度为

$$\frac{1}{\sqrt{\omega_b^2+1}}=0.05,\quad \omega_b=20rad/s=\omega_{\max}$$

则由采样定理可求得采样频率

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}=40rad/s$$

注 意 ：

上述香农采样定理要求满足以下两个条件：

（１）的频谱的上限频率是有限的；

（２）存在一个理想的低通滤波器。但可以证明理想的低通滤波器在物理上是不可实现的，在实际应用中只能用非理想的低通滤波器来代替理想的低通滤波器。

采样周期的选择

采样定理给出了采样周期选择的基本原则(只是下限），但是由于采样周期T影响着采样系统的稳定性、稳态误差，以及动态响应，因此在选择采样周期时，必须综合各种因素，根据特定的控制目标来确定。

1、从频域性能指标来说，控制系统的闭环频率响应通常具有低通滤波特性，因此可以认为系统的最高频率为其闭环幅频特性的谐振频率ω_r。而在随动系统中，一般认为开环系统的截止频率ω_c与闭环系统的谐振频率ω_r近似，在工程中，随动系统的采样角频率可近似取为$\omega_s=10\omega_c$ ，由于$T=2\pi/\omega_s$，所以采样周期为$T=\pi/5\omega_c$。

2、从时域性能指标来说，采样周期T可通过单位阶跃响应的上升时间t_c或调整时间t_s按$T=t_c/10$或$T=t_s/40$选取。

7.3 信号的恢复

讨论信号的恢复，首先从研究采样信号的频谱特性入手。为此，需要找出 $E^*(s)$ 与 $E(t)$ 之间的相互联系。经过简单的数学分析，找出了它们之间的关系式为

$$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}E(s+jk\omega_s)$$

或

$$E^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}E(j\omega+jk\omega_s)$$

采样控制系统中的被控制对象，执行通常都是一些模拟部件，如执行电机，液压舵机等。它们都是靠模拟信号工作的。这样就需要将采样信号变成连续信号。

一般说来，信号$e(t)$经采样得到采样信号$e^*(t)$，在信息上是有丢失的，造成了信号的失真。在什么条件下不能保证信息不失去，又能将采样信号恢复成连续信号？香农采样定理告诉我们，要从采样信号中完全复现出采样前的连续信号$e(t)$，必须满足采样频率大于或等于两信号的采样器输入连续信号$e(t)$频谱中的最高频率$\omega_{\max}$，即

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}$$

在满足**Shannon**定理的条件下，要想不失真地重复采样器的输入信号，还需要一种理想的低通滤波器。

连续信号经过采样后生成的断续信号频谱中除了主频谱分量外，还产生了无穷多附加频谱分量，这些分量在系统中相当于高频干扰信号。

为除去高频分量对系统输出的影响，恢复和重现原来的连续输入信号，需要应用低通滤波器。

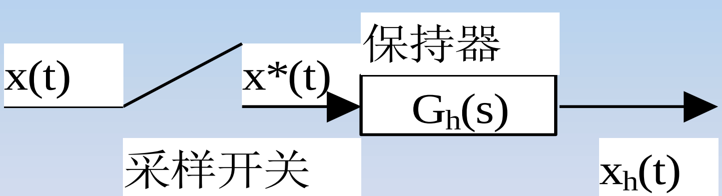
通常用来起低通滤波器作用的为各阶保持电路或保持器，例如零阶保持器和一阶保持器。

保持器的作用是将采样信号转换为连续信号，这个连续信号近似的重现作用在采样器上的信号。

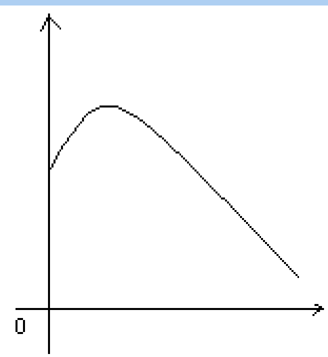
7.3.1 零阶保持器

零阶保持器能将采样信号转变成在两个连续采样时刻之间保持常量的信号，即在 $t \in [nT,(n+1)T]$ 区间内，零阶保持器的输出值一直保持为**x(nT)**。如下图所示。零阶保持器的输出$x_b(t)$为阶梯信号。

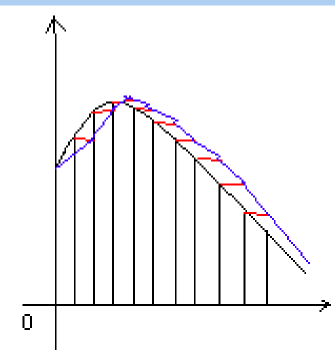
因为在每个采样区间的值均为常数，其导数为零，故称为零阶保持器。



零阶保持器



原连续信号



零阶保持器的恢复信号

零阶保持器的传递函数

考察保持器的输出$x_h(t)$与连续输入信号$x(t)$之间的关系。

$$x_h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)(1(t-kT)-1(t-kT-T))$$

将上面结果求拉氏变换，得

$$x_h(s)=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-kTs}}_{x^*(s)}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-Ts}\right]$$

从而可以得到保持器的输出$x_h(t)$与断续输入信号$x^*(t)$之比，即零阶保持器的传递函数为

$$\frac{x_h(s)}{x^*(s)}=\frac{1-e^{-Ts}}{s}=G_h(s)$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

零阶保持器的频率特征

用 $j\omega$ 代替$G_h(S)$中的s，得零阶保持器的频率特性

$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{e^{-\frac{1}{2}j\omega T}(e^{j\frac{1}{2}\omega T} - e^{-j\frac{1}{2}\omega T})}{j\omega} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}j\omega T}\sin(\frac{1}{2}\omega T)}{\omega}$$

$$G_h(j\omega) = T\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}e^{-\frac{1}{2}j\omega T}$$

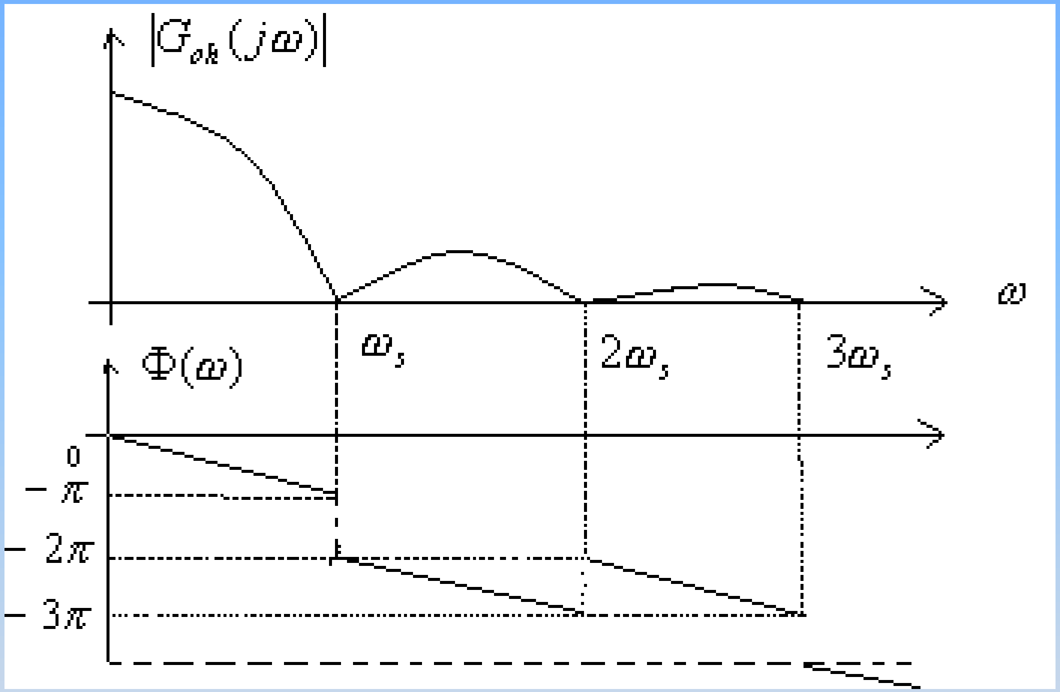
当ω很小近似为0时，$\sin\frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$ ，$|G_h(j\omega)| = T$

当$\omega = \omega_s$时，$\sin\frac{\omega T}{2} = \sin\frac{\omega_s \frac{2\pi}{\omega_s}}{2} = 0$。

只要ω 是ω_s 的整数倍，则$|G_{oh}(j\omega)| = 0$，相频特性为:

$$\begin{cases} \Phi = -n\pi \\ \omega = n\omega_s \end{cases}$$

零阶保持器的幅频特征和相频特性如下图所示。



由于幅频特性的幅值随频率的增加而衰减，零阶保持器是一个低通滤波器，但不是一个理想滤波器。它除了允许的主要频谱分量通过以外，还通过一部分高频分量，从而造成数字控制系统的输出中存在纹波。

另外，从相频特性还可以看到，零阶保持器还会产生负相移（滞后相移），因此，零阶保持器的引入，会导致稳定性变差。

除了零阶保持器外（步进电机，DA转换器等），还有一阶、二阶等高阶保持器。由于他们实现起来比较复杂，而且相角滞后比零阶保持器更大。