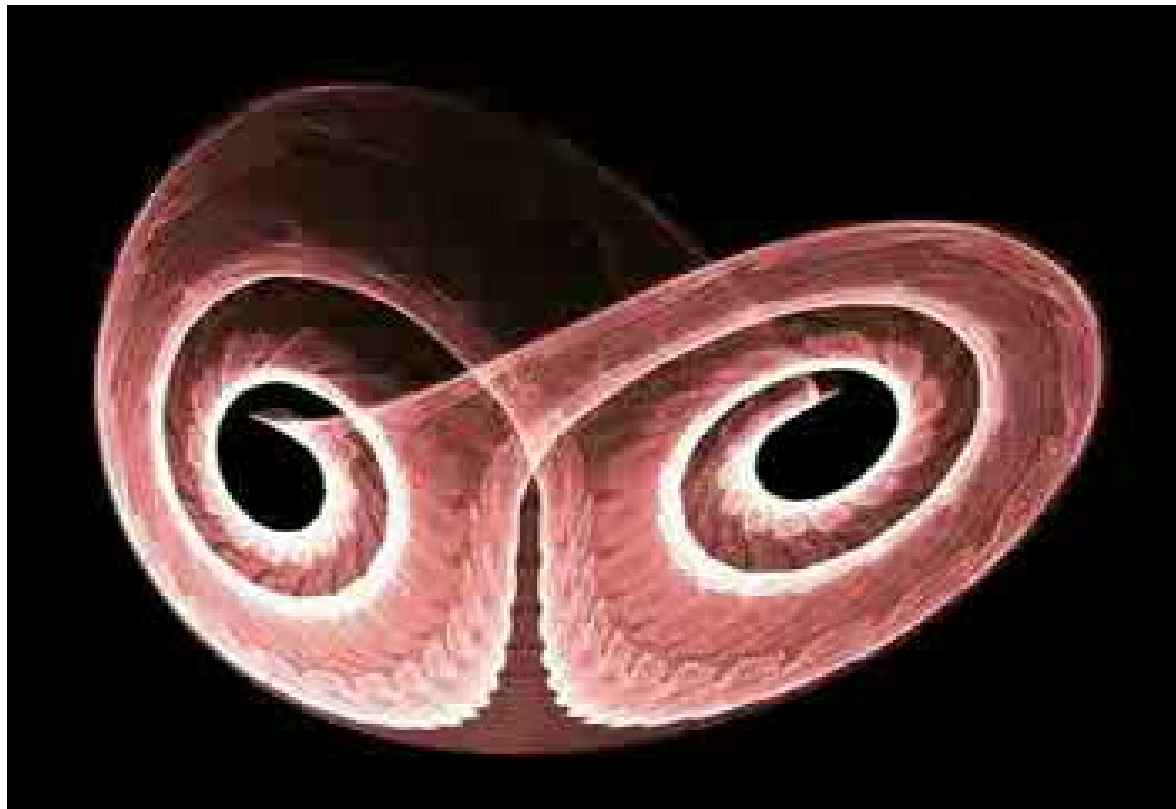




第8章 非线性系统理论

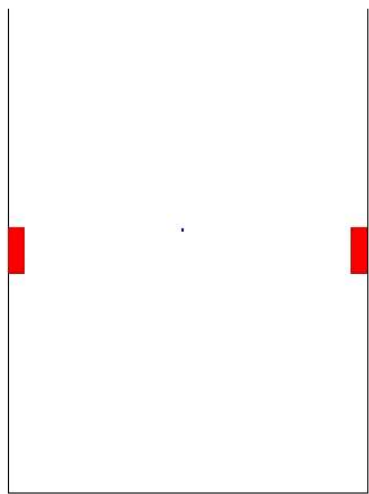
- 8.1 非线性系统的特征与研究方法
- 8.2 典型非线性特性数学描述对系统运动的影响
- 8.3 描述函数的概念
- 8.4 典型非线性描述函数的求取
- 8.5 用描述函数法分析非线性系统
- 8.6 相轨迹及其绘制方法
- 8.7 奇点与极限环
- 8.8 用相平面法分析非线性系统

有关非线性的例子



洛伦兹混沌吸引子

有关非线性的例子



体操机器人



仿生机器人

§ 8.1 非线性系统理论引言

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y + \varepsilon \cdot f(y, y', \cdots y^{(n)}) = x$$

如果 $\varepsilon \rightarrow 0$, 线性系统

如果 ε 不能被省略, 非线性系统

例如: $\ddot{y} + \dot{y}y + y = \sin \omega t$

$$(\ddot{y})^2 + 3\dot{y} + y = e^t$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y^2 = x$$



思考: 如何区分非线性?



研究非线性系统理论的意义

1) 现实系统中各物理量之间的许多因果关系并不完全是线性的。

2) 对有些本质非线性，例如继电器、死区、滞环、摩擦等非线性系统，在工作点附近将非线性环节近似为线性系统的方法显然是不适用的。

3) 非线性对控制系统的影响并不总是负面的，有时为了改善系统的性能或是简化系统的结构，还常常在控制系统中引入非线性部件或是更复杂的非线性控制器。

2. 非线性系统的特点

与线性系统相比，非线性系统具有一些新特点：

1. 线性系统满足叠加原理，而非线性系统不满足叠加原理。

■ **(1) 叠加性：** $y = f(x)$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(x) = ax$$



思考： $f(x) = ax + b$

叠加原理

■ (2) 齐次性：

$$f(ax) = af(x)$$

非线性系统可能是可叠加的，但一定不是齐次的。

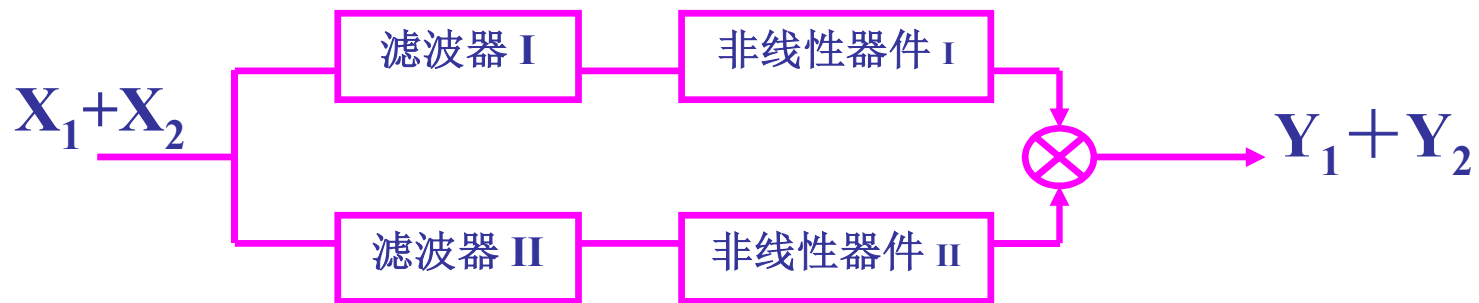


图 8-1-1 带滤波器的非线性系统

$$X_1 \rightarrow Y_1, X_2 \rightarrow Y_2$$

叠加性: $X_1 + X_2 \rightarrow Y_1 + Y_2$ 齐次性: $nX_1 \nrightarrow nY_1$ 7

2. 非线性的稳定状态非常复杂，不仅合并固有参数和内部结构有关，

还与系统输入大小，扰动大小以及系统的初始状态有关。

例子：非线性微分方程

$$\dot{x} = -x(1-x)$$

有两个平衡点, $x_1=0$ 和 $x_2=1$. 上式可以化为

$$\frac{dx}{x(1-x)} = -dt$$

两边同时积分:

$$\ln \frac{cx}{1-x} = -t \quad \therefore \frac{cx}{1-x} = e^{-t}$$

设系统的初始状态为 x_0 ,

如果 $t=0$, 那么:

$$c = \frac{1-x_0}{x_0}$$

$$\therefore x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

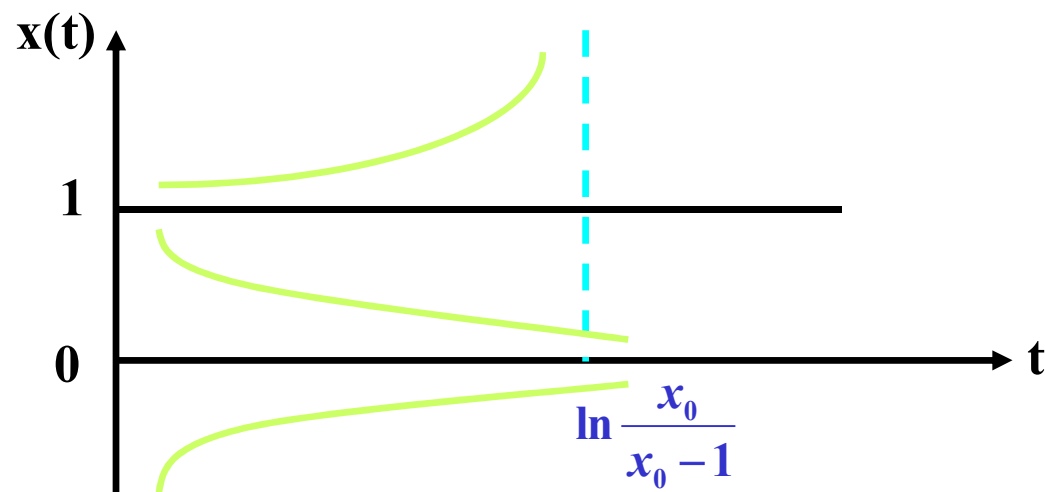


图 8-1-2 一阶非线性系统

如果 $x_0 < 1$, $t \rightarrow \infty$, 那么 $x \rightarrow 0$

初始条件影响系统的稳定性!

如果 $x_0 > 1$, 当 $t = \ln \frac{x_0}{x_0 - 1}$, 我们可以得到 $x \rightarrow \infty$

3. 在实际物理系统中周期振荡不在线性系统中，但是可能发生在非线性系统中。

4. 线性系统而言，在没有外加周期信号作用时，系统输出的稳定分量的同频率的正弦信号，只不过输出振幅和相位发生变化，这是频率分析法分析非线性的基础。但是非线性系统在正弦信号作用下，其输出存在及其复杂的情况。

(1) 跳跃谐振和多值响应

当维持外加输入信号幅值不变，而角频率 ω 逐渐增加时，输出幅值：

$\omega \uparrow: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$

$\omega \downarrow: 5 \rightarrow 4 \rightarrow 4' \rightarrow 2' \rightarrow 1$

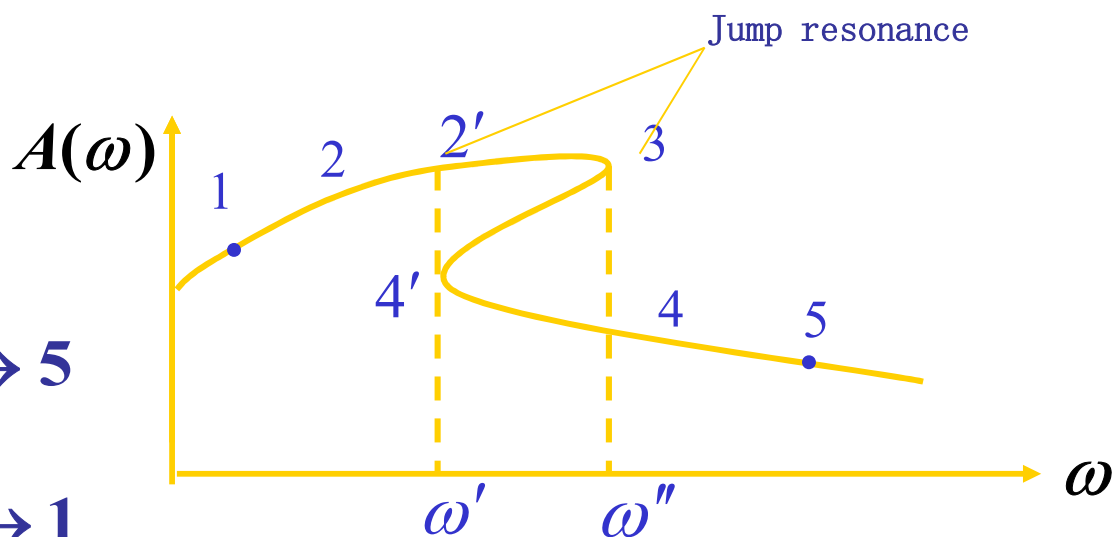


图 8-1-3 跳跃谐振和多值响应

(2)分频振荡和倍频振荡

非线性系统在正弦信号作用下，其稳定分量除产生同频率振荡信号外，还可能产生倍频振荡分量和分频振荡分量。

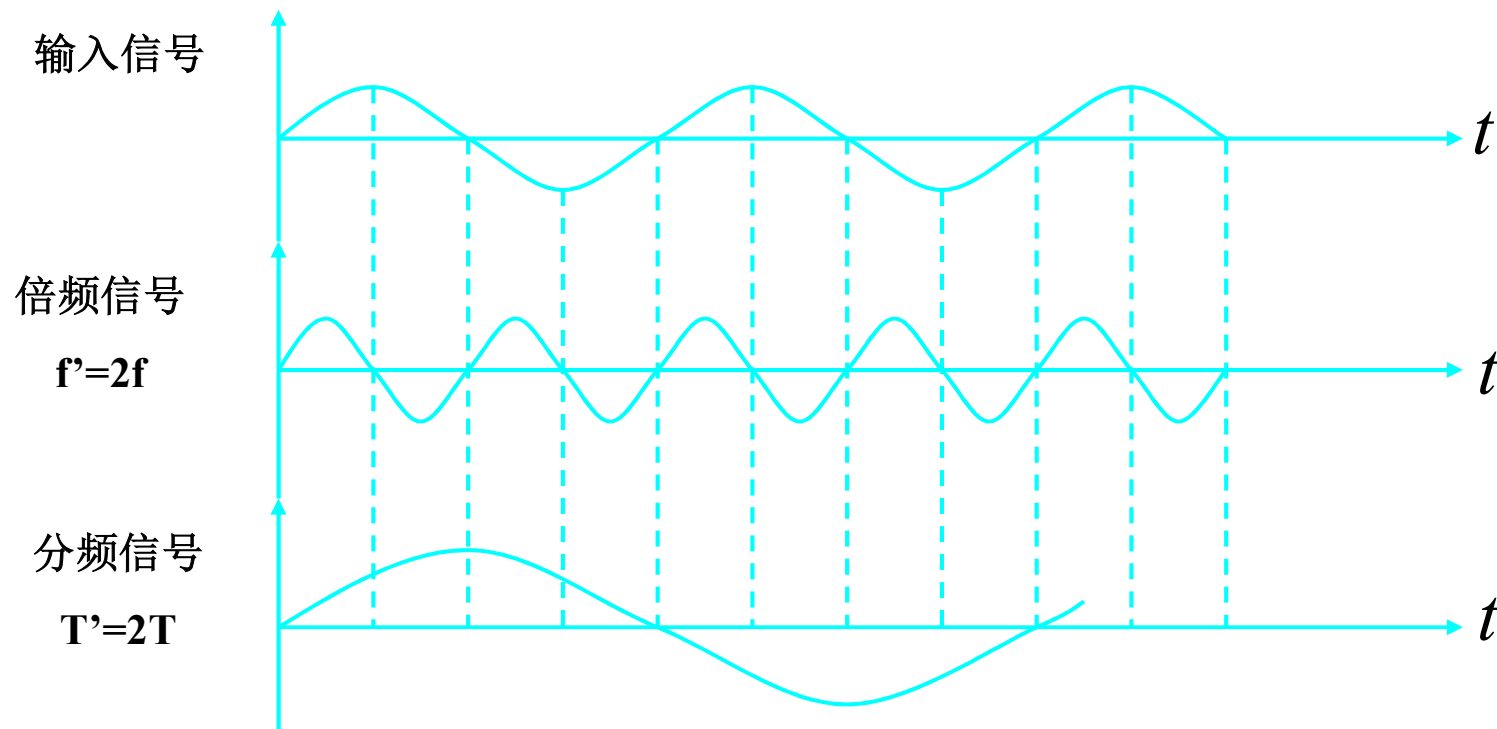


图 8-1-4 分频振荡和倍频振荡



研究非线性的方法

1) 相平面法：该法是**1885**年由庞加莱（**Poincare**）提出的基于图解的时域分析法，适用于一阶和二阶线性和非线性系统。它的基本原理是在以系统中某个状态为横坐标、以该状态的变化率为纵坐标的相平面上通过绘制系统的相轨迹，分析系统在各种初始条件下的稳态和暂态性能。

2) 描述函数法：该方法是**1940**年由达尼尔（**Daniel**）提出，它是一种“等效”的线性方法，将非线性特性按傅里叶级数展开，忽略高次谐波项（也称为谐波分析法），近似为线性系统，然后利用线性频域法分析非线性控制系统的性能。它是非线性特性谐波线性化的一种工程实用近似分析图解法，可用于高阶非线性系统。

3) 计算机求解法是利用计算机的运算能力和高速度对非线性微分方程一种数值解法。