7.5 脉冲传递函数

1、脉冲传递函数的定义及意义

脉冲传递函数是在 零初始条件下，输出采样信号的Z变换与输入采样信号的Z变换之比，即：

$G(z)=C(z)/R(z)$。

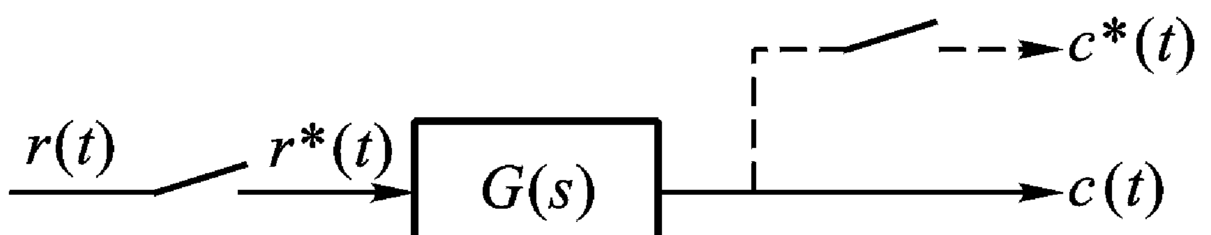


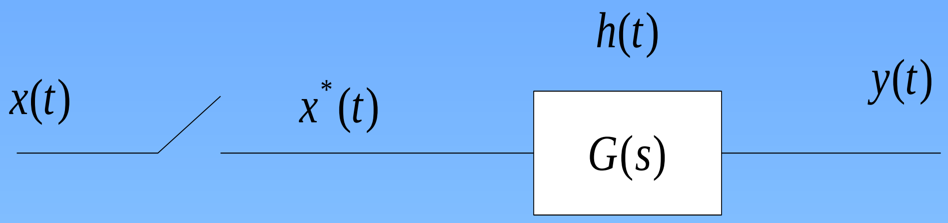
图7—1

要注意的是：

输出端是连续信号，此时要在其输出端虚设一个理想同步采样开。

所谓零初始条件，是指$t < 0$时，输入输出的采样值均为零。

在实际中，只讨论在采样时刻输出与输入采样信号间的关系。



$$x^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

$$\because x^*(t)=x(0)\delta(t)+x(T)\delta(t-T)+\cdots x(nT)\delta(t-nT)+\cdots$$

$$\therefore \boldsymbol{y(t)=x(0)h(t)+x(T)h[t-T]+\cdots+x(nT)h[t-nT]+\cdots}$$

$$y(kT)=x(0)h(kT)+x(T)h[(k-1)T]+\cdots+x(nT)h[(k-n)T]+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)h[(k-n)T]$$

$$y(kT)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)h[(k-n)T]$$

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)h[(k-n)T]z^{-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}h[(k-n)T]z^{-(k-n)}$$

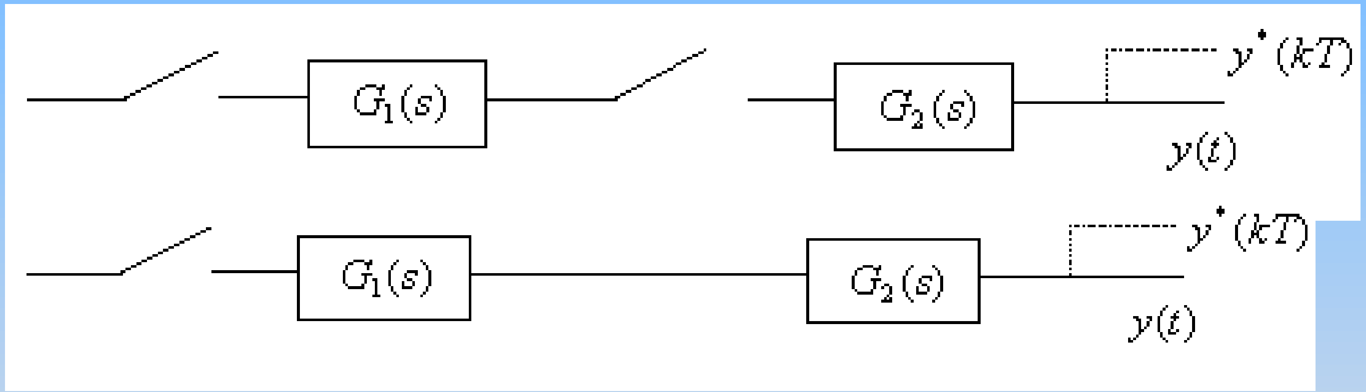
$$\therefore G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}h[(k-n)T]z^{-(k-n)}=\sum_{j=0}^{\infty}h(jT)z^{-j}$$

$$G(z)=Z[G(s)]$$

可见,采样系统的脉冲传递函数是连续系统脉冲响应h(t)的采样序列的Z变换,也可以说G(Z)是h(t)或G(S)的Z变换，即　　G(Z)=Z[h(T)]=Z[G(S)]

2、 串联环节的脉冲传递函数

两个环节串联，有两种方式，一种是串联环节之间没有采样开关，一种是串联环节之间有采样开关，其总的脉冲传递函数有所不同。



（1）、串联环节之间没有采样开关

此时，

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

$$G(z) = Z\left[G_1(s)G_2(s)\right] = G_1G_2(z)$$

（2）、串联环节之间有采样开关

此时，假设采样开关是同步采样。

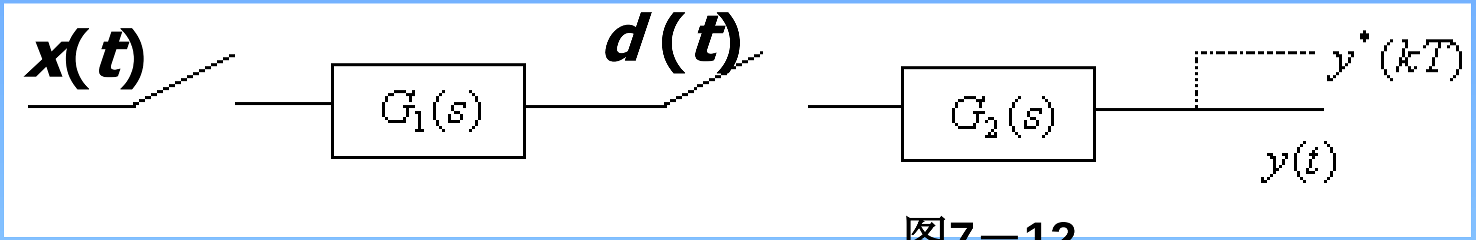


图7—12

$$D(z)=G_1(z)X(z)$$

$$Y(z)=G_2(z)D(z)=G_1(z)G_2(z)R(z)$$

$$\therefore G(z)=G_1(z)G_2(z)$$

注 $$G_1(z)G_2(z)\neq G_1G_2(z)$$

（3）有零阶保持器时的脉冲传递函数

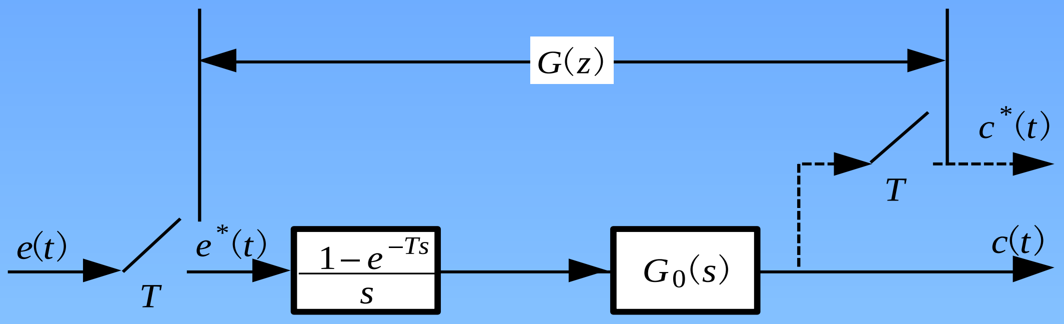


图7-13 带零阶保持器的开环采样系统

开环脉冲传递函数为

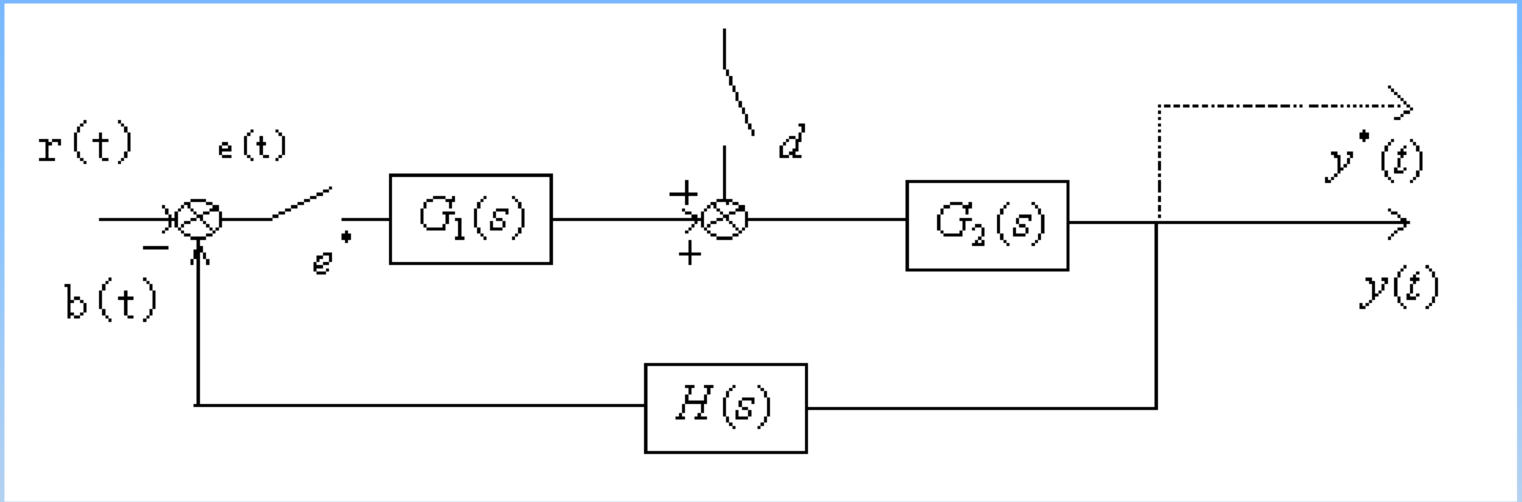
$$C(z)=Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_0(s)]R(z)=Z[\frac{1}{s}G_0(s)-\frac{e^{-Ts}}{s}G_0(s)]R(z)$$

$$Z\left[\frac{e^{-Ts}}{s}G_0(s)\right]=z^{-1}Z\left[\frac{G_0(s)}{s}\right]$$

$$C(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{G_0(s)}{s}]R(z)$$

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})Z[\frac{G_0(s)}{s}]$$

4、 闭环脉冲传函



（1）、输出对输入的脉冲传函　　令 $d=0$

$$\begin{cases} Y(z)=G_1G_2(z)E(z) \\ \left.\begin{aligned} E(z)&=R(z)-B(z) \\ B(z)&=G_1G_2H(z)E(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(z)=\dfrac{R(z)}{1+G_1G_2H(z)} \end{cases}$$

其中，误差脉冲传递函数为

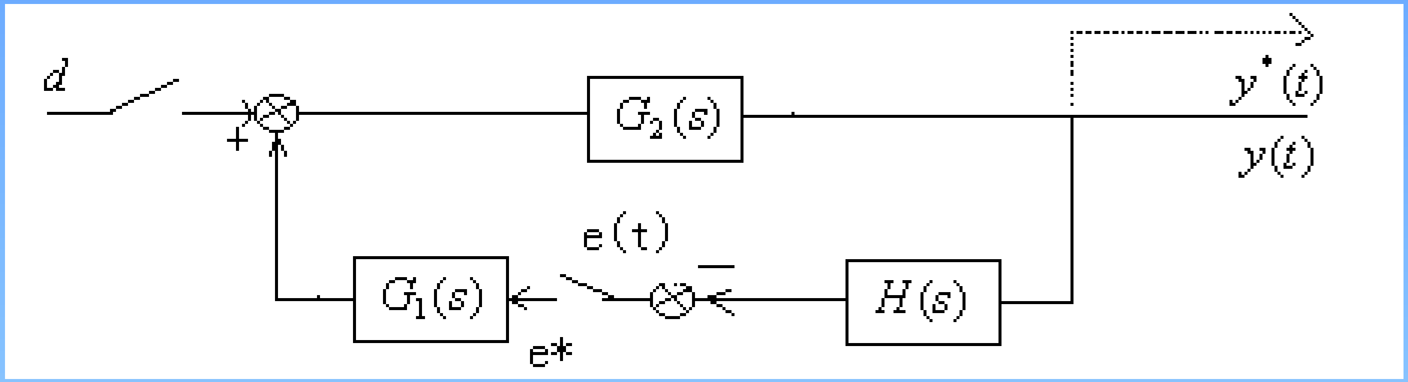
$$G_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G_1G_2H(z)}$$

$$\Rightarrow Y(z)=G_1G_2(z)\frac{R(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$

$$\Rightarrow G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_1G_2(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$

在上述推导中应特别注意的是,作为输入信号的R(s)不能用采样信号代替。因为，对一个系统连续输入信号的响应和离散输入信号的响应是截然不同的，而作为输出信号的c(t)或C(s),可以只研究其采样时刻的值,所以能对它进行采样。这一点必须认识清楚,否则会得到错误结果 。

（2）、输出对扰动的脉冲传函　　令 $r(t)=0$



$$Y(z)=G_2(z)D(z)+G_1G_2(z)E(z)$$

$$E(z)=-[G_2H(z)D(z)+G_1G_2H(z)E(z)]$$

$$\Rightarrow E(z)=-\frac{G_2H(z)}{1+G_1G_2H(z)}D(z)$$

$$\therefore Y(z)=G_2(z)D(z)-\frac{G_1G_2(z)G_2H(z)}{1+G_1G_2H(z)}D(z)$$

$$\Rightarrow G_D(z)=\frac{Y(z)}{D(z)}=G_2(z)-\frac{G_1G_2(z)G_2H(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$

E(z)由两部分组成，D(z)通过$G_2(z)$产生一部分， E(z)回路本身的产生一部分。

注意：在求解复杂离散系统的脉冲传递函数时，由于采样开关处在不同的位置，即使各动态环节的传递函数相同，脉冲传递函数也可能不同。有时采样开关的位置可能导致无法求出脉冲传函，而只能求出输出z变换表达式。

如果从输入到输出的直接通道均无采样开关，则不可能写出闭环脉冲传函。

误差点没有采样开关的闭环采样系统

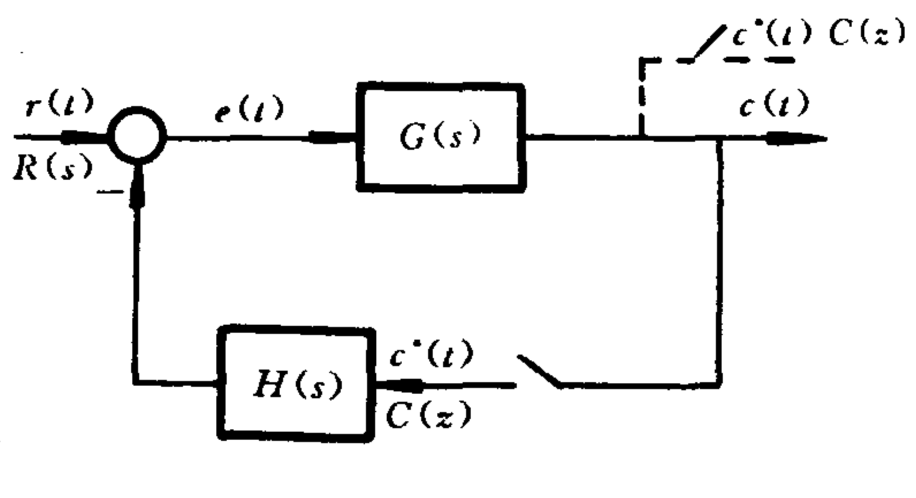


图 7-35 闭环离散系统

$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s)$$

$$C(z) = GR(z) - GH(z)C(z)$$

$$C(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}$$

此系统不存在闭环脉冲传递函数。