7.5 采样系统的数学模型

❖线性差分方程

❖脉冲传递函数：开环脉冲传递函数（含有串联环节），闭环脉冲传递函数

♣ 7.5.1 线性常系数差分方程及其解法

一般n阶线性定常离散系统的输出和输入之间的关系，可用n阶常系数差分方程描述。

$$
\begin{aligned}
& y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n) \\
& =b_0r(k)+b_1r(k-1)+\cdots b_mr(k-m) \qquad \text{后向差分方程}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\cdots+a_ny(k) \\
& =b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\cdots b_mr(k) \quad \text{前向差分方程}
\end{aligned}
$$

式中：k—第k个采样周期； n—系统的阶次。

差分的定义：e(kT) = e(k)

前向差分

$$\begin{cases} \text{一阶} & \Delta e(k)=e(k+1)-e(k) \\ \text{二阶} & \Delta^2 e(k)=\Delta e(k+1)-\Delta e(k) \\ & \quad =e(k+2)-2e(k+1)+e(k) \\ \vdots & \\ \text{n阶} & \Delta^n e(k)=\Delta^{n-1} e(k+1)-\Delta^{n-1} e(k) \end{cases}$$

$$\lim_{T\to 0}\frac{\Delta e(k)}{T}=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{dt}}$$

后向差分

$$\begin{cases} \text{一阶} & \nabla e(k)=e(k)-e(k-1) \\ \text{二阶} & \nabla^2 e(k)=\nabla e(k)-\nabla e(k-1) \\ & \quad =e(k)-2e(k-1)+e(k-2) \\ \vdots & \\ \text{n阶} & \nabla^n e(k)=\nabla^{n-1} e(k)-\nabla^{n-1} e(k-1) \end{cases}$$

$$\lim_{T\to 0}\frac{\nabla e(k)}{T}=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{dt}}$$

例 1 连续系统的微分方程为：
$$\begin{cases} \ddot{e}(t)-4\dot{e}(t)+3e(t)=r(t)=1(t) \\ e(t)=0 \qquad (t\le 0) \end{cases}$$

求相应的前向差分方程及其解。

解：

$$\dot{e}(t)\approx\frac{\Delta e(k)}{T}=\frac{e(k+1)-e(k)}{T}\overset{T=1}{=}e(k+1)-e(k)$$

$$\ddot{e}(t)\approx\frac{\Delta^2 e(k)}{T^2}=\frac{\Delta e(k+1)/T-\Delta e(k)/T}{T}\overset{T=1}{=}e(k+2)-2e(k+1)+e(k)$$

$$\begin{array}{rl} & e(k+2)-2e(k+1)+e(k) \\ -4[& \qquad\qquad e(k+1)-e(k)] \\ +3[& \qquad\qquad\qquad\qquad e(k)] \\ \hline & e(k+2)-6e(k+1)+8e(k)=1(k) \end{array}$$

$$\begin{cases} e(k+2)-6e(k+1)+8e(k)=1(k) \\ e(k)=0 \qquad (k\le 0) \end{cases}$$

解法1：迭代法

$$\begin{cases} e(k+2)-6e(k+1)+8e(k)=1(k) \\ e(k)=0 \qquad (k\le 0) \end{cases}$$

解

$$e(k+2)=6e(k+1)-8e(k)+1(k)$$

$$k=-1:\quad e(1)=6e(0)-8e(-1)+1(-1)=0$$

$$k=0:\quad e(2)=6e(1)-8e(0)+1(0)=0-0+1=1$$

$$k=1:\quad e(3)=6e(2)-8e(1)+1(1)=6-0+1=7$$

$$k=2:\quad e(4)=6e(3)-8e(2)+1(2)=6\times 7-8\times 1+1=35$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$e^*(t)=\delta(t-2)+7\delta(t-3)+35\delta(t-4)+\cdots$$

解法2：Z变换法

$$e(k+2)-6e(k+1)+8e(k)=1(k)$$

$$\begin{cases} e(k+2)-6e(k+1)+8e(k)=1(k) \\ e(k)=0 \qquad (k\le 0) \end{cases}$$

$$Z:\quad z^2\,[E(z)-e(0)z^0-e(1)z^{-1}]$$

$$-6\cdot z\,[E(z)-e(0)z^0]$$

$$+\quad 8\,[E(z)]$$

$$(z^2-6z+8)E(z)=Z[1(k)]=\frac{z}{z-1}$$

$$E(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-4)}$$

$$Z^{-1}:e(n)=\sum \mathrm{Res}\left[E(z)\cdot z^{n-1}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-2)(z-4)}+\lim_{z\to 2}\frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-1)(z-4)}+\lim_{z\to 4}\frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{3}-\frac{2^n}{2}+\frac{4^n}{6}$$

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\cdot\delta(t-nT)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{2^n}{2}+\frac{4^n}{6}\right)\cdot\delta(t-nT)$$