9.4 线性定常系统状态方程的解

状态方程描述(模型) 系统的运动分析(求解状态方程)

保证状态方程解的存在性和唯一性： A和B中各元必须有界

9.4.1 线性定常连续系统状态方程的解

1 齐次状态方程的解

$\dot{x} = Ax$ 为齐次状态方程，常有两种解法：

- 幂级数法

设 $\dot{x} = Ax$ 的解为t的向量幂级数

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t + \boldsymbol{b}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{b}_k t^k + \cdots$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots \boldsymbol{b}_k \cdots$ 为n维向量

对上式求导, 得到

$$\dot{x} = b_1 + 2b_2 t + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots$$
$$= A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots)$$

令同次幂系数相等

$$b_1 = A b_0$$
$$b_2 = \frac{1}{2} A b_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0$$
$$b_3 = \frac{1}{3} A b_2 = \frac{1}{3 \times 2} A^3 b_0$$
$$\vdots$$
$$b_k = \frac{1}{k} A b_{k-1} = \frac{1}{k!} A^k b_0$$
$$\vdots$$

$$\because \quad x(0) = b_0$$
$$\therefore \quad x(t) = (I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots) x(0)$$

定义

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

e^{At} ——— 矩阵指数函数, 又称为状态转移矩阵，记为 $\Phi(t)$

- 拉普拉斯变换法

$$\dot{x} = Ax$$

对方程取拉氏变换

$$sx(s) = Ax(s) + x(0)$$

$$(Is - A)x(s) = x(0)$$

$$x(s) = (Is - A)^{-1}x(0)$$

取拉氏反变换

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$$

与幂级数法相比，得

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$\Uparrow$$

状态转移矩阵的闭合形式，说明了级数的收敛性

求解齐次状态方程 $\longrightarrow$ 计算状态转移矩阵

9.4.2 非齐次状态方程的解

线性定常系统的非齐次状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \qquad \boldsymbol{x}(t) \in R^n, \boldsymbol{u}(t) \in R^r, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}$$

(1) 直接法（积分法）

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

两边左乘 e^{-At}, $\quad e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At}Bu(t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)]}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

$$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_o^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \qquad \boldsymbol{x}(t)\big|_{t=0} = \boldsymbol{x}(0)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_o^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_o^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

零初始状态的响应

输入作用的响应

(2) 拉氏变换法

$$sX(s)-x(0)=AX(s)+Bu(s)$$

$$(sI-A)X(s)=x(0)+Bu(s)$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}Bu(s)$$

则 $x(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}x(0)]+L^{-1}[(sI-A)^{-1}Bu(s)]$

(由$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$可得)

$$\boldsymbol{x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}$$

9.4.3 状态转移矩阵的性质

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

- （初始状态） $\Phi(0)=I$
- $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A$
- （线性关系） $\Phi(t_1\pm t_2)=\Phi(t_1)\Phi(\pm t_2)=\Phi(\pm t_2)\Phi(t_1)$
- （可逆性） $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t),\ \ \Phi^{-1}(-t)=\Phi(t)$
- $x(t_2)=\Phi(t_2-t_1)x(t_1)$
- （可分阶段性） $\Phi(t_2-t_0)=\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)$
- $[\Phi(t)]^k=\Phi(kt)$
- 若 $AB=BA$，则 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}=e^{Bt}e^{At}$；

  若 $AB\neq BA$，则 $e^{(A+B)t}\neq e^{At}e^{Bt}\neq e^{Bt}e^{At}$

- 若$\Phi(t)$为 $\dot{x}(t)=Ax(t)$ 的状态转移矩阵，则引 入非奇异变换 $x=P\bar{x}$ 后的状态转移矩阵为

$$\overline{\Phi}(t)=P^{-1}e^{At}P$$

若A为n阶对角矩阵,

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix},\qquad \Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

若A阵为m阶的约当阵，

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}_{m\times m},\quad \Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda t}\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

矩阵转移函数 的计算 e^{At}

方法一 直接计算法(矩阵指数函数)

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

可以证明，对所有常数矩阵**A**和有限的**t**值来说，这个无穷级数都是收敛的。

方法二 线性变换法（对角线标准形与**Jordan**标准形法）

若可将矩阵**A**变换为对角线标准形，那么 e^{At} 可由下式给出

$$e^{At}=Pe^{\Lambda t}P^{-1}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

式中，**P**是将**A**对角线化的非奇异线性变换矩阵。

类似地，若矩阵**A**可变换为**Jordan**标准形，则 e^{At} 可由下式确定出

$$e^{At}=Se^{Jt}S^{-1}$$

方法三　拉氏变换法

$$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

为了求出 e^{At} ，关键是必须首先求出（**sI-A**）的逆。一般来说，当系统矩阵**A**的阶次较高时，可采用递推算法。

例9-13 考虑如下矩阵,试用线性变换法和拉氏变换两种方法计算 e^{At} 。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

【解】线性变换法 由于**A**的特征值为**0**和**-2**（ $\lambda_1=0,\lambda_2=-2$ ），故可求得所需的变换矩阵**P**为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

因此，由

$$e^{At}=Pe^{\Lambda t}P^{-1}=P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

可得：

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{o} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

<u>拉氏变换法</u> 由于

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}$$

可得

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

因此

$$\mathrm{e}^{\mathrm{At}}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

例9-14 试求如下线性定常系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的状态转移矩阵**Φ(t)**和状态转移矩阵的逆。

解

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

求状态转移矩阵的逆 $\Phi^{-1}(t)$

由于 $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$, 故可求得状态转移矩阵的逆为

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & e^{t} - e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -e^{t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

例9-15 求下列系统的时间响应：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

式中，$u(t)$为$t=0$时作用于系统的单位阶跃函数，即$u(t)=1(t)$。

解

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$ （上例已求出）

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_o^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}1(t)d\tau$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

如果初始状态为零，即**x(0)=0,**可将**x(t)**简化为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

例9-16 设系统运动方程为 $\ddot{y}+(a+b)\dot{y}+aby=\dot{u}+cu$

式中a、b、c均为实数，试求：

(1) 求系统状态空间表达式。

(2) 求系统状态转移矩阵。

解：(1) $$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+c}{s^2+(a+b)s+ab}$$

$$=\frac{s+c}{(s+a)(s+b)}$$

$$=\frac{c-a}{b-a}\cdot\frac{1}{s+a}+\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{1}{s+b}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}\dfrac{c-a}{b-a} & \dfrac{c-b}{a-b}\end{bmatrix}x\end{cases}$$

(2) $$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}[\begin{pmatrix}s+a & 0\\ 0 & s+b\end{pmatrix}^{-1}]$$

$$=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+a} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s+b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-at} & 0\\ 0 & e^{-bt}\end{bmatrix}$$