9.08 线性定常系统的可控性与可观测性分析

- 线性连续系统的可控性与可观性的概念
- 线性连续系统的可控可观判据
- 对偶原理

可控性与可观性概念的提出

卡尔曼20世纪60年代初提出的，用状态空间描述系统引申出来的新概念.

现代控制论中，用状态方程和输出方程描述系统，存在着系统内部所有状态的运动是否都可受输入影响以及都可由输出反映的问题，即可控可观的问题.

可控性　系统的控制作用能否对所有状态产生影响，实现控制.

可观性　能否通过观测输出量，得到所有的系统状态.

可控性与可观性的概念不仅用于线性系统控制的研究，还用于最优控制，最优估计，自适应控制等.

线性定常连续系统的可控性

➢ 可控性定义

线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad t \in T_t$$

$x(t) \in R^n$， $u(t) \in R^r$， $A(t) \in R^{n\times n}$， $B(t) \in R^{n\times r}$， T_t 时间定义区间

状态可控

若对于初始时刻 $t_0 \in T$ 的一个非零初始状态 $x(t_0) = x_0$，
存在一个时刻 $t_1 \in T_t$， $t_1 > t_0$ 和一个无约束的控制 $u(t)$， $t \in [t_0, t_1]$，使状态
由 $x(t_0) = x_0$ 转移到 $x(t_1) = 0$ 称 x_0 是在 t_0 时刻可控的。

系统可控

若在 $t_0 \in T$ 时刻，状态空间中的所有非零初始状态都是可控的，称系统在 t_0 时刻是完全可控的，简称系统在 t_0 时刻可控。

系统不完全可控

状态空间中，有一个或一些非零状态变量不可控，则系统是不完全可控的。

线性定常系统的可控性与初始时刻 t_0 的选取无关。

➢ 凯莱—哈密顿定理

考虑n×n维矩阵A的特征多项式为

$$f(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\lambda^{n}+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{1}\lambda+a_{0}$$

则矩阵A满足其自身的特征方程，即

$$A^{n}+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_{1}A+a_{0}I=0$$

推论 矩阵指数 e^{At} 可表示为A的（n－1）阶多项式。

$$e^{At}=\sum_{m=0}^{n-1}a_{m}(t)A^{m}$$

➢ 定常系统状态可控性的代数判据

设终止状态为状态空间原点，并设初始时刻为零，$t_0 = 0$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_o^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

由状态可控性的定义，可得

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_o^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

或 $$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

将 $e^{-A\tau}$ **写为A的有限项的形式，即**

$$\int_0^{t_1} a_k(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_k$$

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k$$

记作

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B\int_0^{t_1} a_k(\tau)u(\tau)d\tau = -[B\ AB \cdots A^{n-1}B]\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

如果系统是状态可控的，那么给定任一初始状态x(0)，都应满足上式，即下列方程有唯一解 $\beta_k(k=0,1,2,\ldots\ldots,n-1)$

$$x(0)=-[B\ AB\cdots A^{n-1}B]\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\beta_k(k=0,1,2,\ldots\ldots,n-1)}$ **为标量。**

即要求n×n维矩阵

$Q=[B\ AB\cdots A^{n-1}B]$ **的秩为n。**

若有Q矩阵的秩为n，则由解得的 β_k **，**

$$\int_0^{t_1}a_k(\tau)u(\tau)d\tau=\beta_k$$

求出相应的控制作用u(t)，使线性定常连续系统在有限时间间隔(0 ~ t_1)内，从任意初始状态x(0)转移到原点。

综上，可得线性定常连续系统可控的充要条件：

状态可控性的代数判据：当且仅当 n×n 维矩阵Q满秩，即

$$rankQ = rank[B \quad AB \cdots A^{n-1}B] = n$$

系统是状态可控的。

可推广到控制向量u为r维的情况，如果系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^r, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}$$

状态可控性的条件为n×nr维矩阵

可控性矩阵

$$Q = [B \ AB \cdots A^{n-1}B]$$

的秩为n，或者说其中的n个列向量是线性无关的。

➢ 输出可控性

考虑下列状态空间表达式所描述的线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}$$

$$x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}, C \in R^{m\times n}, D \in R^{m\times r}$$

如果能找到一个无约束的控制向量 $u(t)$,在有限的时间间隔 $t_0 \le t \le t_1$ 内，使任一给定的初始输出 $y(t_0)$ 转移到任一最终输出 $y(t_1)$, 称系统为输出可控的。

系统输出可控的充要条件为：当且仅当**m×(n+1)r**维输出可控性矩阵

$$Q' = [\ CB \vdots\ CAB \vdots\ CA^2B\ \vdots \cdots\ CA^{n-1}B\ \vdots\ D\ ]$$

的秩为**m**时，所描述的系统为输出可控的。

线性连续系统的可观测性

控制工程中，常会出现系统的状态变量不能或不全能直接测量的情况，一种可能的方法是根据输出的量测值将不能直接测量到的变量确定出来，便是系统的能观测性问题。

➢ 可观性定义

系统完全可观测

若对于初始时刻 $t_0 \in T_t$，存在一个有限时刻 $t_1 \in T_t$，$t_1 > t_0$ 对于所有 $t \in [t_0, t_1]$，系统的输出 $y(t)$ 能唯一地确定状态向量的初值 $x(t_0)$，称系统在 $[t_0, t_1]$ 内是完全可观测的，简称可观。如果对于一切 $[t_0, \infty)$，系统都是可观的，称系统在 $t > t_0$ 可观。

如果每一个状态 $x(t_0)$ 都可通过在有限时间间隔 $t_0 \le t \le t_1$ 内，由观测值 $y(t)$ 确定，则称系统为(完全)可观测的。

系统不可观测

若对于初始时刻 $t_0 \in T_t$，存在一个有限时刻 $t_1 \in T_t$，$t_1 > t_0$ 对于所有 $t \in [t_0, t_1]$，系统的输出 $y(t)$ 不能唯一确定所有状态的初值 $x_i(t_0)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，即至少有一个状态的初值不能被 $y(t)$ 确定，称系统在 $[t_0, t_1]$ 内是不完全可观测的，简称不可观测。

系统可观测的充分必要条件

对于线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}$$

当且仅当 $nm \times n$ 可观测性矩阵R的秩为n，系统是可观测的。即

$$R = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad rankR = n$$

或 $$R^T = [\, C^T \;\; A^T C^T \; \cdots (A^T)^{n-1} C^T \,]$$

$$rankR^T = n$$

对偶原理（R.E.Kalman）

讨论可控性和可观测性之间的关系。

考虑由下述状态空间表达式描述的系统S_1 和S_2：

S_1

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx \qquad x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}, C \in R^{m\times n}$$

S_2

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$

$$n = B^T z$$

$$z \in R^n, v \in R^m, n \in R^r, A^T \in R^{n\times n}, C^T \in R^{n\times m}, B^T \in R^{r\times n}$$

系统S_1和S_2称为对偶系统。

对偶原理：当且仅当系统S_1状态可观测（状态可控）时，系统S_2才是状态可控（状态可观测）的。

验证对偶原理

对于系统S_1：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

1. 状态可控的充要条件是n×nr维可控性矩阵

$$rank[\,B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B\,] = n$$

2. 状态可观测的充要条件是n×nm维可观测性矩阵

$$rank[\,C^T \quad A^TC^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1}C^T\,] = n$$

对于系统S_2：

$$\dot{z} = A^Tz + C^Tv$$
$$n = B^Tz$$

1. 状态可控的充要条件是n×nm维可控性矩阵

$$rank[\,C^T \quad A^TC^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1}C^T\,] = n$$

2. 状态可观测的充要条件是n×nr维可观测性矩阵

$$rank[\,B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B\,] = n$$

利用对偶原理，一个给定系统的可观测性可用其对偶系统的状态可控性来检检和判断。

简单地说，对偶性有如下关系：

$$A \Rightarrow A^T, \quad B \Rightarrow C^T, \quad C \Rightarrow B^T$$

线性连续系统可控性判据与可观测性判据

➢ 可控性判据

☞可控规范型：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

如果系统的状态方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$

$$x(t)\in R^n, u(t)\in R^r, A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times r}$$

判据一： **线性定常连续系统状态完全可控的充要条件是可控性判别阵：**

$$Q_C = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$$

必须满秩。即 $rank Q_c = n$ **（*n*为系统维数）**

判据二: 设线性定常系统具有互异的特征值，则系统可控的充要条件是，系统经非奇异变换后的对角线规范型方程：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

中，$\bar{B}$ 阵不包含元素全为零的行。

判据三： 约旦规范型

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \bar{x} + \bar{B}u$$

与每个约当小块 $J_i (i = 1,2,\cdots,k)$ 的最后一行相对应 的$\bar{B}$ 阵中的所有那些行，其元素不全为零。（若两个约当块有相同特征值，此结论不成立。）

➢ 可观测性判据

☞可观测规范型：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

判据一：线性定常连续系统状态完全能观测的充分必要条件为可观测性矩阵:

$$Q_0=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}\quad (=Q_c^T\big|_{B\to C})$$

必须满秩，即 $rankQ_o=n$（n为系统维数）

判据二： 设线性定常连续系统具有不相等的特征值，则其状态可观测的充要条件是系统经非奇异变换后的对角线规范型：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} \\ y = \overline{c}\bar{x} \end{cases}$$

的矩阵 $\overline{C}$ 中不包含元素全为零的列。

判据三:

约旦规范型

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix}$$

中,与每个约当块 $J_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 首行相对应的矩阵$\bar{C}$中的那些列,其元素不全为零。(如果两个约当块有相同的特征值, 此结论不成立)。

线性定常离散系统的可控性和可观性判据

➢ 可控性判据

设系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}(k) + \mathrm{B}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k)$$

$x \in R^{n\times 1}$， $\mathrm{A} \in R^{n\times n}$ **非奇异矩阵，**$\mathrm{B} \in R^{n\times r}$ $C \in R^{m\times n}$

$D \in R^{m\times r}$， $y \in R^{m\times 1}$， $u \in R^{r\times 1}$

若能求出无约束控制向量序列 $u(0), u(1), \cdots u(n-1)$ **，使系统能从任意初态** $x(0)$ **转移到** $x(n)=0$ **，系统为状态可控的。**

状态方程的解为 $x(k) = \mathrm{A}^{k} x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{A}^{k-1-i}\mathrm{B}u(i)$

令 $k = n,\quad x(n) = 0$ **，两端左乘** A^{-k}

有 $$x(0)=-\sum_{i=0}^{n-1}A^{-1-i}Bu(i)=-[A^{-1}Bu(0)+A^{-2}Bu(1)+\cdots+A^{-n}Bu(n-1)]$$

$$=-[A^{-1}B\quad A^{-2}B\quad\cdots\quad A^{-n}B]\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\\\vdots\\u(n-1)\end{bmatrix}$$

由解的存在定理知：多输入多输出线性离散系统状态可控的充分必要条件为 $rank[A^{-1}B\quad A^{-2}B\quad\cdots\quad A^{-n}B]=n$

或 $$rank[A^{n-1}B\cdots\quad AB\quad B]=n$$

记 $$rank\ Q_d=rank\,[B\quad AB\quad\cdots\quad A^{n-1}B\,]$$

则有 $$rank\ Q_d=n$$

输出完全可控性判据为

$$rank\ Q_d^o=rank\,[CB\quad CAB\quad\cdots\quad CA^{n-1}B\,\vdots\,D]=n$$

➢ 可观测性判据

研究由以下方程描述的系统

$$x(k+1) = \mathrm{A}x(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

如果给出有限采样周期内的输出 $y(k)$ ，就可确定初始状态向量 $x(0)$ ，则系统是完全可观测的。

若系统可观测，则给定 $x(k) = \mathrm{A}^k x(0)$

$$y(k) = C\mathrm{A}^k x(0)$$

因为

$$y(0) = Cx(0)$$

$$y(1) = C\mathrm{A}x(0)$$

$$\vdots$$

$$y(n-1) = C\mathrm{A}^{n-1}x(0)$$

注意到y为m维向量，上述n个矩阵方程可产生nm个代数方程，这些方程中都包含有$x_1(0),\ x_2(0),\cdots x_n(0)$ 。

为了由nm个方程中求得唯一一组解 $x_1(0),\ x_2(0),\cdots x_n(0)$ ，应从中写出n个线性无关的方程，即要求$nm\times n$矩阵的秩为n。

$$rank\begin{bmatrix} C \\ C\mathrm{A} \\ \vdots \\ C\mathrm{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

矩阵与其自身转置矩阵的秩相同，故系统可观测的充要条件还可写为

$$rank\ R_d^T = rank[\ C^T\ \ \mathrm{A}^T C^T\ \ \cdots\ (\mathrm{A}^T)^{n-1} C^T\ ] = n$$