9.3.4 状态空间的线性变换

回顾系统动态方程建立的过程，无论是从实际物理系统出发，还是从系统方块图出发，还是从系统微分方程或传递函数出发，在状态变量的选取方面都带有很大的人为的随意性，因而求得的系统的状态方程也有很大的人为因素，很大的随意性，因此会得出不同的系统状态方程。所以说系统动态方程是非唯一的。

虽然同一实际物理系统，或同一传递函数所产生的动态方程各种各样，但其独立的状态变量的个数是相同的，而且各种不同动态方程间也是有一定联系的，这种联系就是变量间的线性变换关系。

- 状态变量组的非唯一性

前已指出，给定系统的状态变量组不是唯一的。

设系统的状态方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$

若对状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 进行线性变换得到另一组变量 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$

即有

$$
\begin{aligned}
x_1 &= p_{11}\bar{x}_1 + p_{12}\bar{x}_2 + \cdots + p_{1n} \\
x_2 &= p_{21}\bar{x}_1 + p_{22}\bar{x}_2 + \cdots + p_{2n} \\
&\cdots\cdots \\
x_n &= p_{n1}\bar{x}_1 + p_{n2}\bar{x}_2 + \cdots + p_{nn}
\end{aligned}
$$

或

$$x = P\bar{x}$$

$$
P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{nn} \end{bmatrix}
$$

P阵各元均为常数, 且非奇异, 即 $|\mathrm{P}| \neq 0$

则向量 $\bar{x}$ 也是系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 的状态向量.

证明 $\dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu$

记 $A_1 = P^{-1}AP$, $B_1 = P^{-1}B$

则 $\dot{\bar{x}} = A_1\bar{x} + B_1u$

A_1与A为相似矩阵 ,故其特征多项式相等

$$|sI - A_1| = |sI - A|$$

说明由向量 x和$\bar{x}$ 描述的状态方程有相同的特征值.

对于任何控制系统, 状态变量的选择都不是唯一的, 只要符合转换矩阵非奇异的条件, 通过线性变换得到的新向量都是描述系统运动状态的向量.

□ 可控标准型

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} b'_0 & b'_1 & \cdots & b'_{n-1} \end{bmatrix}$$

□ 可观测标准型

这种形式的状态空间表达式被称为可观测标准型

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_{n-1} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

□ 对角阵标准型(I)

写成矩阵形式有对角阵标准型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

□ 对角阵标准型(II)

如果状态变量选择为 $$X_i(s)=\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

那么系统输出则为 $$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}X_i(s)$$

同样，经过反拉氏变换并展成矩阵形式有 对角阵标准型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

□ 约当标准型

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_4 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_4 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

称重极点对应的 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ 为约当块.

虽然通过非奇异的线性变换，可以求出无数种系统的动态方程，但是有几种标准型对我们特别有用，如可控标准型、可观标准型、对角标准型和约当标准型。

① 思路：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx + du\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{等价变换}]{x = p\bar{x}} \left.\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ \bar{y} &= \bar{c}\bar{x} + \bar{d}u = y\end{aligned}\right\}$$

（不规范）　　　　（规范型）

② 变换前后系数矩阵关系：

$$\because \quad x = P\bar{x}, \quad \dot{x} = P\dot{\bar{x}},$$ P为nxn的常数非奇异矩阵。

代入原状态方程，有

$$\left.\begin{array}{l} P\dot{\bar{x}} = AP\bar{x} + Bu \\ y = CP\bar{x} + Du \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\bar{x} + Du \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}B, \bar{C} = CP, \bar{D} = D$$

称满足条件的系统$\{A,B,C,D\}$和$\{\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D}\}$互为相似系统，
相应的动态方程称为等价动态方程，
实现他们之间转换的线性变换为等价变换。

非奇异变换的目的使得 $\bar{A}$ 规范化，便于分析和计算

几种常用的线性变换关系

（1）化A阵为对角型

1)设 A为任意形式的方阵，有n个互不相同的实数特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是以下特征方程的解

$$\det(\lambda I - A) = \left|\lambda I - A\right| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

非奇异变换阵有实数特征向量组成 $P=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_2]$

特征向量满足以下方程式：

$$A\mathbf{p}_i=\lambda_i\mathbf{p}_i \quad , \quad 或 \quad (\lambda_i-A)\mathbf{p}_i=0$$

2）若 A为友矩阵，具有n个互不相同的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

则范德蒙特矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

3）设 A 阵具有 m 重实数特征值 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m$，其余为（n-m）个互不相同的实数特征值，在求解

$$A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i \quad (i = 1 \sim m)$$

时仍然有m个独立的实特征向量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m$

$$\Rightarrow \quad \overline{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_m & & & \\ & & & \lambda_{m+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = [\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m \vdots \mathbf{p}_{m+1}, \cdots, \mathbf{p}_n]$$

例9-11：将下列状态方程化为对角线型

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

解：特征方程

$$\det(\lambda I - A) = \left|\lambda I - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 & -5 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{p}_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = 0 \qquad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)\mathbf{p}_2 = 0 \quad \begin{bmatrix} -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} = 0 \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)\mathbf{p}_3 = 0 \quad \begin{bmatrix} -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix} = 0 \qquad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad P = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{b}} = P^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

（2）化 A 阵为 Jordan 型

1) 设A矩阵具有 m 重实数特征值 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m$ **，其余为（n-m）个互不相同的实数特征值，在求解**

$A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i \quad (i = 1 \sim m)$ 时，只有一个独立的实特征向量 $\mathbf{p}_1$

只能化 A 为Jordan 型矩阵

$$J = \overline{A} = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{cccc:ccc} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ \hdashline & & & & \lambda_{m+1} & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{array}\right]$$

Jordan块

$$P = [\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m \vdots \mathbf{p}_{m+1}, \cdots, \mathbf{p}_n]$$

这时 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m$ 是广义实特征向量，满足

$$[\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} = A[\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m]$$

$\mathbf{p}_{m+1}, \cdots, \mathbf{p}_n$ 是互不相同特征值对应的特征向量

2)若A为友矩阵（可控标准型的A矩阵） $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m$

$$A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i \quad (i = 1 \sim m)$$

只有一个独立的实特征向量 $\mathbf{p}_1$

$$\mathbf{p}_1 = [1 \ \lambda_1 \ \lambda_1^2 \ \cdots \ \lambda_1^{n-1}]^T$$

$$P = [\mathbf{p}_1 \ \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \lambda_1} \ \frac{\partial^2 \mathbf{p}_1}{\partial \lambda_1^2} \cdots \ \frac{\partial^{m-1} \mathbf{p}_1}{\partial \lambda_1^{m-1}} \vdots \mathbf{p}_{m+1} \cdots \mathbf{p}_n]$$

3)设A阵有五重特征值 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_5$

$$A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i \quad (i = 1 \sim m)$$

有两个独立的实特征向量 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$，

其余(n-5)个特征值为互异，

可能化 A 为如下Jordan 型矩阵

$$J = \overline{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & & \lambda_{m+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

J其中虚线示出存在两上约当块，广义实特征向量$p_1, p_2, \cdots, p_5$满足

$$[p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_5]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{bmatrix} = A[p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_5]$$

（3）化可控系统为可控标准型

在前面研究状态空间表达式的建立问题时，曾得出单输入线性定常系统状态方程的可控标准型：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

与该状态方程对应的可控性矩阵S是一个右下三角阵，其主对角线元素均为1，故$\det S \neq 0$，系统一定可控，这就是形如上式中A,b的称为可控标准型名称的由来。其可控性矩阵S形如

$$S=\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \times & \times \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & \times & \times \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \times & \times \end{bmatrix}$$

一个可控系统，当 A, b 不具有可控标准型，一定可以选择适当的变换化为可控标准型。设系统状态方程为

$$\dot{x} = Ax + bu$$

进行 P^{-1}变换，即令

$$x = P^{-1}z$$

变换为

$$\dot{z} = PAP^{-1} + Pbu$$

要求

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

下面具体推导变换矩阵 P：

设变换矩阵 P为

$$P = \begin{bmatrix} p_1^T & p_2^T & \cdots & p_n^T \end{bmatrix}^T$$

根据 A阵变换要求， P应满足变换要求，有

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}$$

$$p_1 A = p_2$$

$$p_2 A = p_3$$

$$\vdots$$

$$p_{n-1} A = p_n$$

$$p_n A = -a_0 p_1 - a_1 p_2 - \cdots - a_{n-1} p_n$$

经整理有

$$p_1 A = p_2$$

$$p_2 A = p_1 A^2 = p_3$$

$$\vdots$$

$$p_{n-1} A = p_1 A^{n-1} = p_n$$

由此可得变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \\ \vdots \\ p_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$$

又根据 b 阵变换要求， P 应有

$$Pb = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \\ \vdots \\ p_1 A^{n-1} \end{bmatrix} b = p_1 \begin{bmatrix} b \\ Ab \\ \vdots \\ A^{n-1} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$p_1 \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故 $$p_1=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & Ab & \cdots & A^{n-1}b\end{bmatrix}^{-1}$$

该式表明 p_1是可控性矩阵的逆阵的最后一行。于是可得出变换矩阵 P^{-1} 的求法如下：

1）计算可控性矩阵 $S=\begin{bmatrix}b & Ab & \cdots & A^{n-1}b\end{bmatrix}$

2）计算可控性矩阵的逆阵 S^{-1}，设一般形式为

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n}\\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn}\end{bmatrix}$$

3）取出S^{-1}的最后一行（即第 n 行）构成 p_1行向量

$$p_1=\begin{bmatrix}S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn}\end{bmatrix}$$

4）构造阵P

$$p=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_1A \\ \vdots \\ p_1A^{n-1} \end{bmatrix}$$

5）P^{-1}便是将非标准型可控系统化为可控标准型的变换矩阵。

单输入/单输出系统状态空间描述的标准形

设系统的动态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

令 $$x = P\bar{x}$$

则通过非奇异线性变换矩阵P的选择，可将系统的动态方程化为几种常用的标准型（关于非奇异变换阵**P**的选择，略），以下讨论由传递函数转换为标准型。

设单输入/单输出系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

下面给出对应的系统状态空间表达式的可控标准形、可观测标准形和对角线形（或Jordan形）标准形。

1 可控标准形

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_o & b_{n-1} - a_{n-1} b_o & \cdots & b_1 - a_1 b_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

可控标准型在对系统进行极点配置时很重要。

2 可观测标准形

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_o \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_o \\ \cdots \\ b_1 - a_1 b_o \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_o u$$

3 对角线标准形

当分母多项式中只含有相异根时，传递函数可写成以下形式

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_o s^n+b_1 s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$=b_o+\frac{c_1}{s+p_1}+\frac{c_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{c_n}{s+p_n}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p_1 & & & 0\\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[c_1\ \ c_2\ \ \cdots\ \ c_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+b_o u$$

4 Jordan标准形

若分母多项式中含有重根时，修改对角线标准形为Jordan标准型，设有3个重根 $-p_1=-p_2=-p_3$ ，其余根各不相同，有

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{(s+p_1)^3(s+p_4)(s+p_5)\cdots(s+p_n)}$$

$$=b_0+\frac{c_1}{(s+p_1)^3}+\frac{c_2}{(s+p_1)^2}+\frac{c_3}{(s+p_1)}+\frac{c_4}{s+p_4}+\cdots+\frac{c_n}{s+p_n}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0\\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[c_1\ \ c_2\ \ \cdots\ \ c_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+b_ou$$

例9-12 考虑由下式确定的系统：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

试求其状态空间表达式的可控标准形、可观测标准形和对角线标准形。

解：可控标准形为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

可观测标准形为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

对角线标准形为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [2 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

线性变换的不变性

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \qquad \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

令 $\mathbf{x} = P\bar{\mathbf{x}}$ $\qquad \dot{\bar{\mathbf{x}}} = P^{-1}AP\bar{\mathbf{x}} + P^{-1}B\mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = CP\bar{\mathbf{x}} + D\mathbf{u}$

- 线性定常系统的特征方程，特征根与特征向量

1. 线性系统 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$的特征方程

$$\boldsymbol{f}(\lambda) = det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0}$$

2. 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值 :特征方程的根，也称为 特征根。

3. 特征向量：若矩阵的特征值 λ, 存在向量 ρ, 如果

$$\lambda\rho = A\rho$$

则称 ρ为矩阵的关于特征值 λ的特征向量。

➢ 线性变换的不变性

（1） 特征方程和特征值的不变性

变换后系统的特征值为

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda I - P^{-1}AP\right| &= \left|\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP\right| = \left|P^{-1}\lambda P - P^{-1}AP\right| \\
&= \left|P^{-1}(\lambda I - A)P\right| = \left|P^{-1}\right|\left|\lambda I - A\right|\left|P\right| = \left|P^{-1}\right|\left|P\right|\left|\lambda I - A\right| \\
&= \left|P^{-1}P\right|\left|\lambda I - A\right| = \left|I\right|\left|\lambda I - A\right| = \left|\lambda I - A\right|
\end{aligned}
$$

可见，系统变换后与变换前的特征值完全相同，这说明对于非奇异线性变换，系统特征值具有不变性。

（2）变换后系统传递矩阵不变

变换后系统的传递矩阵为

$$G'(s) = CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D$$

$$= CP(P^{-1}sIP - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D$$

$$= CP\left[P^{-1}(sI - A)P\right]^{-1}P^{-1}B + D$$

$$= CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1}B + D$$

$$= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)$$

这表明变换前与变换后系统的传递矩阵完全相同，系统的传递矩阵对于非奇异线性变换具有不变性。