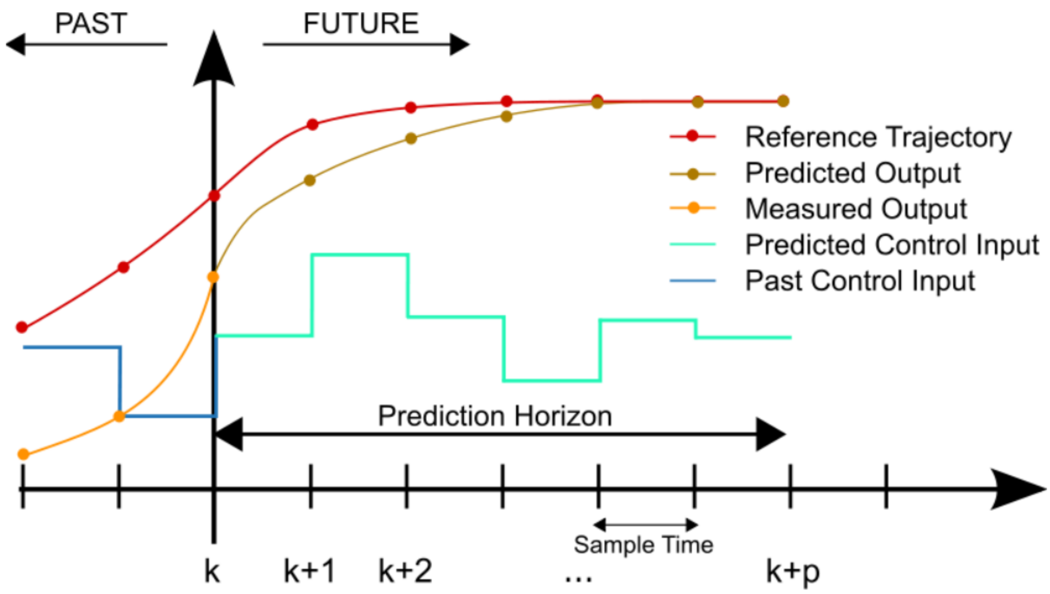
模型预测控制器

## 一、基本概念

模型预测控制（MPC）的核心思想就是以优化方法求解最优控制器，其中优化方法大多时候采用二次规划（Quadratic Programming）。MPC 控制器优化得到的控制输出也是系统在未来有限时间步的控制序列。由于理论构建的模型与系统真实模型都有误差，实际上更远未来的控制输出对系统控制的价值很低，故 MPC 仅执行输出序列中的第一个控制输出。

### 1、基本原理




在 k 时刻：

Step1：估计/测量当前系统状态。

Step2：根据 u(k),u(k+1),u(k+2)……u(k+j)和系统模型，来预测未来 p 个时间步内的系统状态 x(k+1),x(k+2)……x(k+p)。

Step3：基于 u(k),u(k+1),u(k+2)……u(k+j)来进行优化：

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (x_N - x_r)^T Q_N (x_N - x_r) + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - x_r)^T Q (x_k - x_r) + u_k^T R u_k \\
\text{subject to} & x_{k+1} = A x_k + B u_k \\
 & x_{\min} \le x_k \le x_{\max} \\
 & u_{\min} \le u_k \le u_{\max} \\
 & x_0 = \bar{x}
\end{array}
$$

Step4：只取 u(k)作为真实系统在 k 时刻的控制量。

Step5：进入 k+1 时刻，重复上述步骤，进行滚动优化。

**2、预测区间与控制区间**

对于一般的离散化系统，在 k 时刻，我们可以测量出系统的当前状态 x(k)，再通过计算得到的 u(k),u(k+1),u(k+2)……u(k+j)，通过状态方程得到系统未来状态的估计值 x(k+1),x(k+2)……x(k+j)。

将预测状态估计的部分称为预测区间（Predictive Horizon）,指的是一次优化后预测未来输出的时间步的个数。

将控制估计的部分称为控制区间（Control Horizon），在得到最优输入之后，只施加当前时刻的输入 u(k)，即控制区间的第一位控制输入。

## 二、设计实现

### 1、构建 MPC 问题

考虑将线性时不变动力系统控制到参考状态$x_r \in R^{n_x}$的问题，使用约束线性二次 MPC 形式，它在每个时间步解决以下有限范围最优控制问题，使得系统最终达到状态$x_r \in R^{n_x}$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (x_N - x_r)^T Q_N (x_N - x_r) + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - x_r)^T Q (x_k - x_r) + u_k^T R u_k \\
\text{subject to} & x_{k+1} = A x_k + B u_k \\
 & x_{\min} \le x_k \le x_{\max} \\
 & u_{\min} \le u_k \le u_{\max} \\
 & x_0 = \bar{x}
\end{array}
$$

为最小化目标函数，MPC 在 k 时刻的迭代会计算 N 步求解 k 时刻的控制量$u_k$，再根据状态方程得到 k+1 时刻的系统状态，继续迭代计算，直到系统状态达到$u_r$。

**（1） 状态变量与控制变量**

定义四旋翼飞行器的状态变量为$x = \left[ p_x^w, p_y^w, p_z^w, \phi, \theta, \varphi \right]$，其中，$p_x^w, p_y^w, p_z^w$表示飞行器质心在世界坐标系下的位置，$\phi, \theta, \varphi$分别表示绕 x 轴旋转的滚转角，绕 y 轴旋转的俯仰角以及绕 z 轴旋转的偏航角，即欧拉角。

定义四旋翼无人机的控制变量为$u = \left[ v_x^b, v_y^b, v_z^b, r \right]$，其中，$v_x^b, v_y^b, v_z^b$分别表示无人机相对于机体坐标系下 x 轴，y 轴和 z 轴的运动速度，$r$表示无人机偏航角的角速度。

**（2） 系统模型建立**

控制器需要跟踪的参考轨迹点${}^W P_{ref}$定义在世界坐标系下，而上文提到 MPC

的控制输出 $v_x^b, v_y^b, v_z^b$ 都是相对于机体坐标系的输出。因此，为了简化系统模型的表达，考虑将轨迹点的由世界坐标系转化为参考坐标系，即计算轨迹点 ${}^W P_{ref}$ 相对于无人机当前位姿的相对位置：${}^B P_{ref} = {}_W^B T\, {}^W P_{ref}$,其中，${}_W^B T$ 为世界系到机体系的齐次变换矩阵。

在机体坐标系下，系统的模型可简化为：$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$。

其中，$A, B$ 矩阵分别为：

$$A = I_6$$

$$B = \begin{pmatrix} dt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dt \end{pmatrix}$$

**（3） 参数设置**

为了保证模型预测控制器的控制精度，设置 MPC 预测区间为 10。

对状态误差和控制输入的系数矩阵分别为

$$Q = [11.0, 11.0, 15.0, 0.01, 0.01, 20.0]$$

$$Q_N = [20.0, 20.0, 28.0, 0.01, 0.01, 32.0]$$

$$R = [8.0, 8.0, 5.0, 9.0]$$

设置输出的最小值矩阵和最大值矩阵分别为

$$u_{\min} = [-8.0, -8.0, -8.0, -2.0]$$

$$u_{\max} = [8.0, 8.0, 8.0, 2.0]$$

**2、将 MPC 问题转化为 QP 问题**

QP 问题的标准形式为

$$\begin{aligned} &minimize \quad \frac{1}{2} y^T P y + q^T y \\ &\text{subject to} \quad l \le A_c y \le u \end{aligned}$$

通过将 MPC 中的状态变量 x 和控制输入 u 放到一个状态变量 y 中，可将

MPC 问题转化为 QP 标准形式。

由状态转移方程$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$得

$$
\begin{aligned}
&x_1 = Ax_0 + Bu_0\\
&x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A(Ax_0+Bu_0) + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1\\
&\ldots\\
&x_N = Ax_{N-1} + Bu_{N-1} = A^N x_0 + A^{N-1}Bu_0 + A^{N-2}Bu_1 + \ldots + Bu_{N-1}
\end{aligned}
$$

由上式可以看出，系统未来 N 时刻内状态可由当前状态和当前时刻输入预测的出，整理成等式矩阵形式：

$$
\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{X_0} \\ \mathrm{x_1} \\ \mathrm{x_2} \\ \cdots \\ \mathrm{X_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{A}^2 \\ \cdots \\ \mathrm{A^N} \end{bmatrix} \mathrm{x_0} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{B} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{AB} & \mathrm{B} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \mathrm{A^{N-1}\ B} & \mathrm{A^{N-1}} & \cdots & \mathrm{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{u_0} \\ \mathrm{u_1} \\ \cdots \\ \mathrm{u_{N-1}} \end{bmatrix}
$$

将目标函数变换成二次型一般形式：

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize J} = (x_N - x_r)^T Q_N (x_N - x_r) + \textstyle\sum_{k=0}^{N-1} (x_k - x_r)^T Q (x_k - x_r) + u_k^T R u_k \\
&= x_N^T Q_N x_N - 2x_r^T Q_N x_N + x_r^T Q_N x_r + \textstyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T Q x_k - 2x_r^T Q x_k + x_r^T Q x_r\right) + u_k^T R u_k
\end{aligned}
$$

其中$x_r^T Q_N x_r$和$x_r^T Q x_r$都是已知状态量部分，与目标函数优化无关，因此目标函数可写为：

$$
\text{minimize J} = x_N^T Q_N x_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T Q x_k\right) + u_k^T R u_k - 2x_r^T Q_N x_N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(2x_r^T Q x_k\right)
$$

合并状态量与输入量，令 $y = [x_0, x_1, x_2 \ldots x_N, u_0, u_1 \ldots u_{N-1}]^T$，则目标函数可写成矩阵形式：

$$
J = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix}
Q & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \ddots & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & Q & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & Q_N & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & R & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \ddots & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & R
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}
-2
\begin{bmatrix} x_r \\ x_r \\ \vdots \\ x_r \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix}
Q & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \ddots & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & Q & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & Q_N & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & 0 & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \ddots & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix}
Q & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \ddots & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & Q & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & Q_N & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & R & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \ddots & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & R
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}
-2 [Qx_r \quad \ldots \quad Qx_r \quad \mathrm{Q_N} x_r \quad 0 \quad \ldots \quad 0]
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix}
Q & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \ddots & \square & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & Q & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & Q_N & R & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & R & \square & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \ddots & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & R
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}
+ 2
\begin{bmatrix} -Qx_r \\ \vdots \\ -Qx_r \\ -\mathrm{Q_N} x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}
$$

令

$$P=\begin{bmatrix} Q & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \ddots & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & Q & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & Q_N & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & R & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \ddots & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & R \end{bmatrix},\quad q=\begin{bmatrix} \text{-}Qx_r \\ \vdots \\ \text{-}Qx_r \\ \text{-}\mathrm{Q_N}x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

因此目标函数可转换为 QP 标准型：$J=y^TPy+2q^Ty$

之后，再构建等式约束关系，由状态转移方程$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$得：

$-x_0=0-x_0+0=-x_0$

$0=Ax_0-x_1+Bu_0=0$

$0=Ax_1-x_2+Bu_1=0$

……

$0=Ax_{N-1}-x_N+Bu_{N-1}=0$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} -x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -I & \square & \square & \square & 0 & \cdots & 0 \\ A_d & -I & \square & \square & B_d & \square & \square \\ \square & \ddots & \ddots & \square & \square & \ddots & \square \\ \square & \square & A_d & -I & \square & \square & B_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

最后构建不等式约束，由 $x_{\min}\le x_k\le x_{\max}$ ,$u_{min}\le u_k\le u_{max}$ 可得：

$$\begin{bmatrix} x_{min} \\ x_{min} \\ \vdots \\ x_{min} \\ u_{min} \\ \vdots \\ u_{min} \end{bmatrix}\le\begin{bmatrix} I & \square & \square & \square \\ \square & I & \square & \square \\ \square & \square & \ddots & \square \\ \square & \square & \square & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}\le\begin{bmatrix} x_{max} \\ x_{max} \\ \vdots \\ x_{max} \\ u_{max} \\ \vdots \\ u_{max} \end{bmatrix}$$

综上所述，QP 标准型中 Hessian 矩阵 P 为

$$P=diag\left(Q,Q,\ldots,Q_N,R,\ldots,R\right)$$

梯度向量 q 为

$$q=\begin{bmatrix}-Qx_r\\-Qx_r\\\vdots\\-Q_N x_r\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

线性约束矩阵为

$$A_c=\begin{bmatrix}-I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\A & -I & 0 & \cdots & 0 & B & 0 & \cdots & 0\\0 & A & -I & \cdots & 0 & 0 & B & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & -I & 0 & 0 & \cdots & B\\I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & I\end{bmatrix}$$

不等式约束为

$$l=\begin{bmatrix}-x_0\\0\\\vdots\\0\\x_{\min}\\\vdots\\x_{\min}\\u_{\min}\\\vdots\\u_{\min}\end{bmatrix}\quad u=\begin{bmatrix}-x_0\\0\\\vdots\\0\\x_{\max}\\\vdots\\x_{\max}\\u_{\max}\\\vdots\\u_{\max}\end{bmatrix}$$

至此，MPC 问题已被转化为 QP 标准形式，利用 OSQP 库可对其求解。

## 三、轨迹跟踪验证

### 1、参考轨迹生成

使用 MPC 控制器跟踪规划器产生的轨迹，其轨迹由 K 段多项式构成。首先，对每一段多项式轨迹进行均匀采样，在此段采样出 20 个路径点，同时计算每个

点处多项式轨迹的切向量，取该切向量的偏航角作为无人机到达该点时的参考偏航角。因此，控制器的期望轨迹由 20K 个路径点组成，每个路径点包含了该点的参考位置和参考速度以及参考偏航角。

**2、轨迹参考速度**

规划期生成的多项式轨迹中包含每个路径点 $P_i$ 的参考速度信息 $V_i^{ref}$ ，且参考速度通过对多项式轨迹求导得到。参考速度可通过实时调整状态转移方程 $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ 中的 $dt$ 输入 MPC 控制器：

$$dt = \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}}{V_i^{ref}}$$

**3、轨迹跟踪实验**

使用上文所述控制器对参考轨迹进行跟踪实验，控制器的参考速度 $V_i^{ref}$ 近似为 3.5m/s, 测试时间为 60 秒，跟踪精度如图 1 所示。其中，蓝色、红色、绿色曲线为分别为无人机在世界坐标系下 x 轴、y 轴、z 轴方向上的位置，3 组阶梯行的折线分别代表参考轨迹点在 x、y、z 方向的位置，每组取 10 个参考轨迹点（即每组有十条折线分别代表 10 个参考轨迹点的位置）。

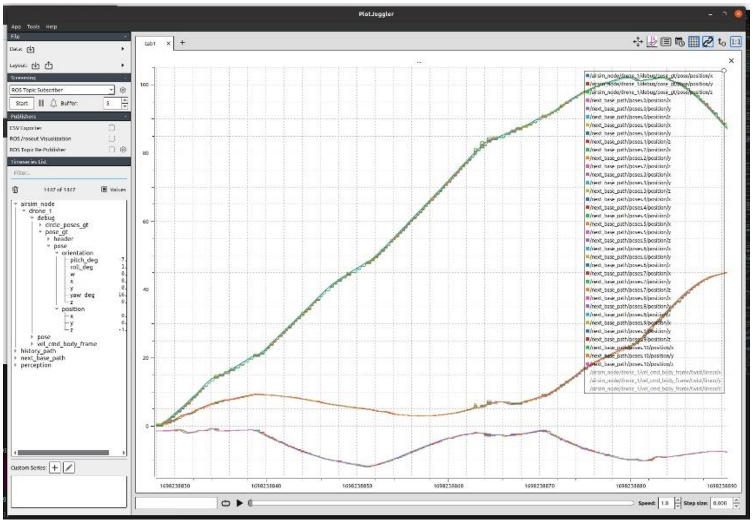
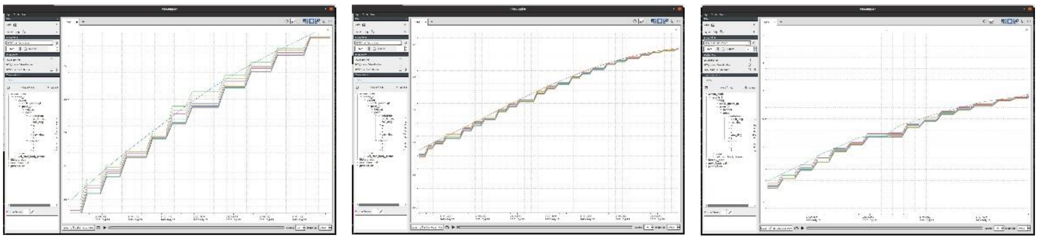


图 1 轨迹跟踪精度图

分别截取图 1 中 x、y、z 轴方向上的位置曲线进行分析，如图 2 所示。



（a）x 轴方向　　（b）y 轴方向　　（c）z 轴方向

图 2 三轴轨迹跟踪精度

由图 2 可知，三轴方向上的跟踪精度基本满足需求，由于权重矩阵 Q 在 z 轴方向上的权重分配大于 x、y 轴方向上的权重，因此 z 轴的跟踪精度更高。