

蜂考速成课

《复变函数与积分变换》

版权声明：

内容来自蜂考原创，讲义笔记和相关图文均有著作权，视频课程已申请版权，登记号：苏作登字-2020-I-00142521，根据《中华人民共和国著作权法》、《中华人民共和国著作权法实施条例》、《信息网络传播权保护条例》等有关规定，如有侵权，将根据法律法规提及诉讼。

课时一 复数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 复数的表示、几何意义	★★★★★	6~12	选择、填空
2. 复数的运算		3~4	选择、填空
3. 复数的方根		3~8	计算题、选择、填空

1. 复数的表示、几何意义

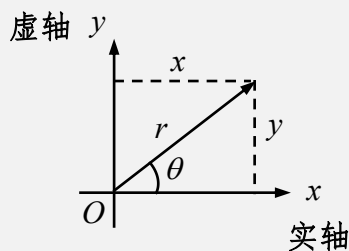
(1) $z = x + iy$

x : 实部, $Re(z)$

y : 虚部, $Im(z)$

r : z 的模长, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

θ : z 的辐角 $\begin{cases} \text{Arg } z = \theta + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \arg z = \theta, -\pi < \theta \leq \pi, \text{ 辐角主值, 也叫主辐角} \end{cases}$



(2) $z = re^{i\theta}$ 指数表示

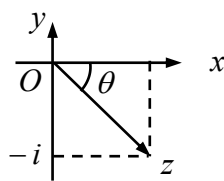
(3) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 三角表示

题 1. 设 $z = 1 - i$, 则 $\arg z =$ ()。

A. -1 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $-\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$

解: $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ $\arg z = -\frac{\pi}{4}$

答案: C



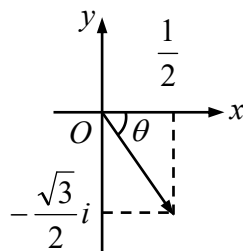
题 2. 数 $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的指数形式为 _____, 三角形式为 _____。

解: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$\arctan \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

$z = re^{i\theta} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$= r(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$



题 3. $\sin \alpha + i \cos \alpha$ 的三角表示式_____, 指数表示式_____。

解: $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin \alpha + i \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

题 4. 把方程 $|z - 2i| = |z + 2i|$ 表示成直角坐标方程。

解: 令 $z = x + iy$, 代入得 $|x + iy - 2i| = |x + iy + 2i|$

整理得 $|x + i(y - 2)| = |x + i(y + 2)|$

$$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2}$$

两边平方得: $x^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y + 2)^2$

化简得 $y = 0$

题 5. 方程 $|z + 2 - 3i| = \sqrt{2}$ 所代表的曲线是 ()。

- A. 中心为 $2 - 3i$, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周 B. 中心为 $-2 + 3i$, 半径为 2 的圆周
- C. 中心为 $-2 + 3i$, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周 D. 中心为 $2 - 3i$, 半径为 2 的圆周

解: $|z - (-2 + 3i)| = \sqrt{2}$, z 点到 $(-2 + 3i)$ 点的距离等于 $\sqrt{2}$

答案: C

2、复数的运算

题 1. 设 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + 4i$, 则 $z_1 + z_2 =$ _____, $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$ _____。

解: $z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\ &= \frac{1 \times 3 - 1 \times 4i + 2i \times 3 + 2i \times (-4i)}{3^2 - (4i)^2} = \frac{3 + (-4 + 6)i - (-8)}{3^2 + 4^2} \\ &= \frac{11 + 2i}{25} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{11}{25} \end{aligned}$$

1. $i^2 = -1$

2. $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$

3. $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$
 $= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

4. $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$
 $= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$

5. $\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$



题 2. 当 $z = \frac{1+i}{1-i}$ 时, $z^{100} + z^{75} + z^{50}$ 的值等于 ()。

A. i B. $-i$ C. 1 D. -1

解: $z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2} = i$

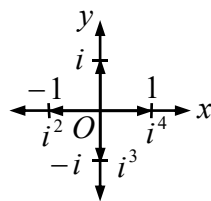
$$i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad \dots$$

$$z^{100} + z^{75} + z^{50} = i^{4 \times 25} + i^{4 \times 18 + 3} + i^{4 \times 12 + 2} = i^0 + i^3 + i^2 = 1 - i - 1 = -i$$

答案: B

题 3. 复数 $\frac{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^2}{(\cos 3\theta - i \sin 3\theta)^3}$ 的指数形式为_____。

解: 原式 = $\frac{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^2}{[\cos(-3\theta) + i \sin(-3\theta)]^3} = \frac{(e^{i4\theta})^2}{(e^{-i3\theta})^3} = \frac{e^{2 \times 4i\theta}}{e^{3 \times (-3i\theta)}} = e^{2 \times 4i\theta - 3 \times (-3i\theta)} = e^{17i\theta}$



$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$1. \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$2. \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

3. 复数的方根

题 1. 设 $z = 1 + \sqrt{3}i$, 求 $z^{\frac{1}{6}}$

解: 把 z 化成三角表示式 $z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

设 $\omega = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^{\frac{1}{6}}$

代入 $\rho = 2^{\frac{1}{6}} \quad \varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{6}, k = 0, 1, \dots, 5$

$$\omega = \sqrt[n]{x + iy} = (x + iy)^{\frac{1}{n}}$$

$$(1) \quad x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$(2) \quad \text{设 } \omega = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ = [r (\cos \theta + i \sin \theta)]^{\frac{1}{n}}$$

$$(3) \quad \text{代入 } \rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \\ k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{18} \quad \omega_1 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right) \quad \varphi_2 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \right) = \frac{7}{18}\pi \quad \omega_2 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{7}{18}\pi + i \sin \frac{7}{18}\pi \right)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi \right) = \frac{13}{18}\pi \quad \omega_3 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{13}{18}\pi + i \sin \frac{13}{18}\pi \right)$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{\pi}{3} + 2 \times 3\pi \right) = \frac{19}{18}\pi \quad \omega_4 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{19}{18}\pi + i \sin \frac{19}{18}\pi \right)$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{\pi}{3} + 2 \times 4\pi \right) = \frac{25}{18}\pi \quad \omega_5 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{25}{18}\pi + i \sin \frac{25}{18}\pi \right)$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{\pi}{3} + 2 \times 5\pi \right) = \frac{31}{18}\pi \quad \omega_6 = 2^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{31}{18}\pi + i \sin \frac{31}{18}\pi \right)$$



题 2. 求方程 $z^3 + 8 = 0$ 的所有根。

解: $z^3 = -8 \Rightarrow (z^3)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow z = (-8)^{\frac{1}{3}}$

$$-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$$

设 $\omega = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = [8(\cos \pi + i \sin \pi)]^{\frac{1}{3}}$ 为 $z^3 + 8 = 0$ 的根

$$\rho = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

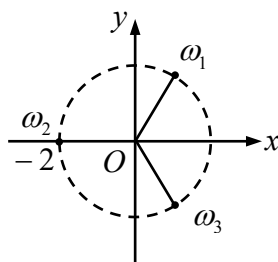
$$\omega_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3}(\pi + 2\pi) = \pi$$

$$\omega_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{3}(\pi + 4\pi) = \frac{5}{3}\pi$$

$$\omega_3 = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) = 1 - \sqrt{3}i$$



课时一 练习题

1. 复数 $z = -\frac{16}{25} - \frac{16}{25}i$ 的主辐角为 ()。

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $-\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $-\frac{3\pi}{4}$

2. 复数 i 的模为_____, 主辐角为_____, 指数表示为_____。

3. 已知 $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{3\pi}{4}$, 则指数表示 $z =$ _____。

4. 求复数 $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ 的实部、虚部、模以及辐角的值。

5. 方程 $|z+2| = |z-2|$ 在 z 平面上表示 ()。

- A. 直线 $x=2$ B. 直线 $y=2$ C. 实轴 D. 虚轴

6. 方程 $|z+2i|=2$ 所代表的曲线是 ()。

- A. 直线 B. 圆 C. 椭圆 D. 双曲线

7. 方程 $|z-2|=7-|z+1|$ 表示一个_____。



8. 复数 $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ 的模为_____辐角为_____指数形式为_____。

9. $i^4 - 4i^{-17} + i =$ _____。

10. $\frac{(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)^3}{(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi)^4} =$ _____。

11. 设 $\frac{3+i}{(1+i)^2} = re^{i\theta}$, 则 $r =$ _____。

12. 求 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值。

13. 若 $z^3 + 8 = 0$, 且 $\text{Im}(z) > 0$, 则_____。

A. $z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

B. $z = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

C. $z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

D. $z = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

14. 方程 $z^4 + 1 = 0$ 的所有根为_____。



课时二 复变函数

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 导数	★★★	3 ~ 4	选择、填空
2. 解析函数	★★★★	6 ~ 10	大题
3. 调和函数	必考	6 ~ 10	大题

1. 导数

题 1. 已知 $f(0)=1, f'(0)=1+i$, 则 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-1}{z} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\text{解: } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(0+z)-f(0)}{z} = f'(0) = 1+i$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

题 2. 已知 $f(z) = \sin z - 2ie^{-z} + z^2 + 3 - i$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\text{解: } f'(z) = \cos z + 2ie^{-z} + 2z$$

$$f'(0) = f'(z)|_{z=0} = 1 + 2i$$

题 3. 函数 $f(z) = xy + iy$ 仅在点 $z = \underline{\hspace{2cm}}$ 处可导, 且在该点的导数值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\text{解: } u(x, y) = xy, v(x, y) = y$$

$$\text{代入 } C-R \text{ 方程 } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow 在点 $z = i$ 可导

$$f'(z)|_{z=i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{z=i} = (y + i0) \Big|_{z=i} = 1$$

$f(z) = u + iv$ 在点 z 处可导

$$\Leftrightarrow u, v \text{ 在该点可导且满足 } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

2. 解析函数

$f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析

$\Leftrightarrow u, v$ 在区域 D 内可导且满足 C-R 方程

$\Leftrightarrow f(z)$ 在区域 D 内处处可导



题 1. 函数 $f(z) = x^2 + iy^2$, 判断 $f(z)$ 在何处可导, 何处解析。

解: $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = y^2$

$$\text{代入 } C-R \text{ 方程} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2x = 2y \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

$\therefore f(z)$ 在 $x = y$ 上可导, 在复平面处处不解析

① 写出 $u(x, y)$, $v(x, y)$

② 代入 $C-R$ 方程 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

③ 求出可导/解析区域

题 2. 设函数 $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + kxy^2)$ 在 z 平面上解析, 求 m, n, k 的值

解: $u(x, y) = my^3 + nx^2y$, $v(x, y) = x^3 + kxy^2$

$$\text{代入 } C-R \text{ 方程} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2nxy = 2kxy \\ 3my^2 + nx^2 = -3x^2 - ky^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -3 \\ k = -3 \end{cases}$$

题 3. 下列说法正确的是 ()

- A. 如果 $f(z) = u + iv$ 在 z_0 连续, 则 $f(z)$ 在 z_0 可导
- B. 如果 $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 解析
- C. 如果 $f(z) = u + iv$ 在 z_0 不解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 不可导
- D. 如果 $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续

答案: D

连续 \nRightarrow 可导 \nRightarrow 解析

不连续 \nRightarrow 不可导 \nRightarrow 不解析

题 4. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 可导是 $f(z)$ 在点 z_0 解析的 ()

- A. 必要但不充分条件
- B. 充分但不必要条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

答案: A

3. 调和函数

1. 调和函数 $\varphi(x, y)$: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

2. 解析函数 $f(z) = u + iv$ 满足 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$

3. 解析函数的虚部 v 称为实部 u 的共轭调和函数



题 1. 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析, 则下列命题中错误的是 ()

- A. 函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导
- B. 函数 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 是区域 D 的调和函数
- C. 函数 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 在区域 D 内满足柯西黎曼方程
- D. 函数 $u(x, y)$ 是 $v(x, y)$ 在区域 D 内的共轭调和函数

答案: D

题 2. 验证 $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ 是调和函数, 并求相应的解析函数, $f(z) = u + iv$, 使其满足 $f(0) = 0$ 。

解: 验证: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + x \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(x, y) \text{ 是调和函数}$$

由 $C-R$ 方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 得 $v = \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int (2x + y) dy = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + C(x)$

由 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 得 $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x) = -(-2y + x) = 2y - x \Rightarrow C'(x) = -x$

$$\Rightarrow C(x) = \int -x dx = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\therefore v = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\therefore f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + xy + i \left(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C_1 \right)$$

$$z = x + iy$$

由 $f(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$

$$\therefore f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + xy + i \left(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) = z^2 - \frac{1}{2}iz^2$$



课时二 练习题

1. 设 $f(z) = z^5 + z^3 + 2$, 则 $f'(1+i) =$ _____。

A. $-20+6i$

B. $20+6i$

C. $-20-6i$

D. $20-6i$

2. $f(z) = (z^2 + \sin z)^2$, 求 $f'(z)$

3. (判断) 如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可导, 那么 $f = u + iv$ 也可导 ()。

4. 柯西黎曼方程是指 ()。

A. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$

B. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$

C. $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

D. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

5. 设 $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$, 则 $f'(-1+i) =$ _____。

6. 设 $f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2)$, 则 $f'(1+i) =$ _____。

7. (判断) 若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 点必不可导。

8. 若 $f(z) = xy^2 + ix^2y$, 则 $f(z)$ 满足 ()。

A. 仅在直线 $y = x$ 上可导

B. 仅在直线 $y = -x$ 上可导

C. 仅在 $z = 0$ 点解析

D. 仅在 $z = 0$ 点可导

9. 函数 $f(z) = 2x^2 + 3y^2i$ 在何处可导, 在何处解析。

10. 设函数 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$, 则 a, b, c, d 取何值时, $f(z)$ 在平面处处解析。

11. 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是解析函数, 则 u 与 v 的关系是_____。

12. 证明 $u = 3x^2 - 3y^2 - 2y$ 是调和函数, 并求满足 $f(0) = i$ 的解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

13. 设 $v = 2x^2 - 2y^2 + x$, 求解析函数 $f(z) = u + iv$, 且满足 $f(1) = 3i$



课时三 初等函数

考点	重要程度	分值	常见题型
1. exp 指数函数	★★★★	3 ~ 8	选择、填空、计算题
2. Ln 对数函数			
3. a^b 幂函数			
4. 三角函数			

1. exp 指数函数

题 1. $f(z) = e^z$ 是周期函数。()

答案: \checkmark

题 2. 计算 $e^{\frac{1-\pi}{3}i}$

解: 原式 $= e \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] = e \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

$$1. \exp z = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

2. $\exp z$ 以 $2k\pi i$ 为周期

2. Ln 对数函数

题 1. $\ln(1+i) = \underline{\hspace{2cm}}$

解: 原式 $= \ln|1+i| + i \arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$

$$e^\omega = z, \text{ 则 } \omega = \text{Ln} z$$

$$\text{Ln} z = \ln|z| + i \text{Arg} z$$

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad \text{主值}$$

题 2. $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$, 则 $\text{Re}(z) = (\quad)$

A. $2\ln 2$

B. $\ln 2$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

解: $e^z = 1 + \sqrt{3}i$

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln|1 + \sqrt{3}i| + i \text{Arg}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{实部 } \text{Re}(z) = \ln 2$$

答案: B

题 3. 下列等式中成立的是 ()

A. $\ln z^2 = 2 \ln z$

B. $\text{Ln} z^2 = 2 \text{Ln} z$

C. $\text{Arg}(2i) = 2 \text{Arg}(i)$

D. $e^{i\pi} - 1 = 0$



解: 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$

$$A: \ln z^2 = \ln |z^2| + i \arg(z^2) = \ln r^2 + i2\theta$$

$$= 2 \ln r + 2i\theta = 2(\ln r + i\theta) = 2 \ln z$$

$$B: \operatorname{Ln} z^2 = \ln |z^2| + i \operatorname{Arg}(z^2) = 2 \ln r + i(2\theta + 2k\pi),$$

$$2 \operatorname{Ln} z = 2[\ln r + i(\theta + 2k\pi)] = 2 \ln r + i(2\theta + 4k\pi)$$

$$C: \operatorname{Arg}(2i) = \operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$D: e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad \therefore e^{i\pi} - 1 \neq 0$$

答案: A

3. a^b 幂函数 $a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}$

题 1. 计算 $(-1)^i$ 的值

解: 原式 $= e^{i \times \operatorname{Ln}(-1)} = e^{i[\ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1)]} = e^{-(\pi + 2k\pi)}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

题 2. 计算 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1+i}$ 的主值

解: 主值 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1+i} = e^{(1+i)\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = e^{(1+i)\left(\ln\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| + i \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)} = e^{(1+i) \cdot i \frac{\pi}{3}} = e^{-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}i}$

4. 三角函数

题 1. $2 \sin i$ 的值等于

$$A. (e - e^{-1})i$$

$$B. (e + e^{-1})^i$$

$$C. e - e^{-1}$$

$$D. e + e^{-1}$$

解: 原式 $= 2 \frac{e^{ixi} - e^{-ixi}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{i} = (e - e^{-1})i$

答案: A

题 2. 若 z 为任意复数, 则 $|\sin z| \leq 1$ ()

答案: ×

$$1. \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$2. \sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \operatorname{sh} y \quad \text{双曲正弦函数}$$

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{ch} y \quad \text{双曲余弦函数}$$

3. $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ 不成立



题 3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ()

A. 仅在实轴上成立

B. 在第一象限成立

C. 在上半复平面成立

D. 在复平面上成立

解: 由定义: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2e^{iz} \cdot e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4}$$

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2iz} + 2e^{iz} \cdot e^{-iz} + e^{-2iz}}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz} \cdot e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz} \cdot e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} \\ &= \frac{4e^{iz} \cdot e^{-iz}}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

答案: D

课时三 练习题

1. 设 $z = e^{-1+i}$, 则辐角主值_____。

A. $-\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{3\pi}{4}$

C. 1

D. $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ (k 为整数)

2. (判断题) e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的函数。()3. (判断题) 复数 $\exp\left(\frac{1+i\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{\frac{1}{4}} (1+i)$ 。()4. 计算 $\exp\left[\frac{i(\pi+i)}{3}\right]$ 5. $\ln(3-4i)$ 的虚部为_____。6. 求 $\text{Ln}(\sqrt{3}+i)$ 的值及主值。7. 解方程 $ie^z + 1 + i = 0$ 

8. (判断题) $\operatorname{Ln} z^2 = 2\operatorname{Ln} z$ 。()

9. 计算 $(1 + \sqrt{3}i)^i$ 的值。

10. 计算 3^i 的值

11. $(1-i)^{2i}$ 的主值为_____ (写成三角形式)

12. $\sin i =$ _____

13. $\operatorname{Im}(\cos i) =$ _____

14. 利用三角函数的定义证明: $\sin(2z) = 2\sin z \cdot \cos z$ 。

15. 证明: 在复数域中, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

16. 下列复数中, 为实数的是 ()

$A. (1-i)^3$

$B. \cos i$

$C. \ln i$

$D. e^{1+\frac{\pi}{2}i}$



课时四 级数

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 复数列的极限	★★	3 ~ 4	选择、填空
2. 收敛、收敛半径	★★★★	3 ~ 4	选择、填空
3. 和函数、幂级数	★★★★	6 ~ 10	大题
4. 洛朗级数	必考	6 ~ 12	大题

1. 复数列的极限

1. 复数列 $\{\alpha_n = a_n + ib_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = a + ib$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

收敛 \Leftrightarrow 实部收敛, 虚部收敛

题 1. 设 $a_n = \frac{n}{n+1} + i \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-2} = e^{-2}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + ie^{-2}$

题 2. 复数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是 $\operatorname{Re}\{a_n\}, \operatorname{Im}\{a_n\}$ 收敛 ()

答案: \checkmark

2. 收敛、收敛半径

题 1. 数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!}$ 的敛散性是_____。

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{(2i)^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{(2i)^n}{n!}\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{(2i)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2i)^n}\right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{2i}{n+1}\right| = 0 < 1$
 $\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(2i)^n}{n!}\right|$ 收敛, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!}$ 绝对收敛

1. 绝对收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

2. 条件收敛: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 不收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 发散, 则 $|z| > |z_0|$ 处发散

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 收敛, 则 $|z| < |z_0|$ 处绝对收敛



题 2. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = 2i$ 点收敛, 则级数在 ()

A. $z = 1 + i$ 点绝对收敛

B. $z = -2$ 点条件收敛

C. $z = -2i$ 点绝对收敛

D. $z = 1 + 2i$ 点一定发散

答案: A

题 3. 求收敛半径。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (3-4i)^n z^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$$

解: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3-4i)^{n+1}}{(3-4i)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |3-4i| = 5 \Rightarrow$ 收敛半径 $R = \frac{1}{5}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| e^{i\frac{\pi}{n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow$ 收敛半径 $R = 1$

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \quad R = \frac{1}{\rho}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \quad R = \frac{1}{\rho}$$

3. 和函数、幂级数

幂级数展开 (泰勒级数展开)

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad |z| < 1$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad 0 < |z| < +\infty$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad 0 < |z| < +\infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} \quad 0 < |z| < +\infty$$



题 1. 将函数 $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 在 $z=2$ 处展开为幂级数, 并指出收敛半径。

解: $f(z) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{4+(z-2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{z-2}{4} + \left(\frac{z-2}{4} \right)^2 + \cdots \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{4} \right)^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4} \right)^n (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-2n-1} (z-2)^n, \quad \left| \frac{z-2}{4} \right| < 1 \quad \text{即} |z-2| < 4$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{z-2}{3} + \left(\frac{z-2}{3} \right)^2 + \cdots \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{3} \right)^n$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3} \right)^n (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{-n-1} (z-2)^n, \quad \left| \frac{z-2}{3} \right| < 1 \quad \text{即} |z-2| < 3$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2^{-2n-1} - 3^{-n-1}) (z-2)^n, \quad \text{收敛半径} |z-2| < 3$$

题 2. 将 $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ 展开成 z 的幂级数, 并求收敛半径。

解: $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad |z| < 1$

两边求导: $\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots \quad |z| < 1$

$$\therefore f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = z \cdot (1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots)$$

$$= z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n \quad |z| < 1$$

题 3. 求函数 $f(z) = \ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式, 并求出收敛域。

解: $\because [\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z}$

而 $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots \quad |z| < 1$

$$\text{两边积分: } \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$



4. 洛朗级数

题 1. 将函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在指定的圆环域内展开成洛朗级数。

(1) $0 < |z-1| < 1$

(2) $1 < |z-2| < +\infty$

(3) $2 < |z| < +\infty$

解: (1) 在 $0 < |z-1| < 1$ 上

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{-1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{-1}{z-1} \left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots + (z-1)^n + \cdots \right] \\ &= \frac{-1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{n-1} \end{aligned}$$

(2) 在 $1 < |z-2| < +\infty$ 上, $0 < \left| \frac{1}{z-2} \right| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} \\ &= \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \left[1 - (z-2)^{-1} + (z-2)^{-2} - \cdots + (-1)^n (z-2)^{-n} + \cdots \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^{-n-2} \end{aligned}$$

(3) 在 $2 < |z| < +\infty$ 上, $0 < \left| \frac{1}{z} \right| < 1$, $0 < \left| \frac{2}{z} \right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n-1}$$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1}$$



课时四 练习题

1. 复数列的通项 $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1} + \frac{(-1)^n}{n}i$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛 ()。

3. 下列级数中, 条件收敛的是 ()。

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}i)^n}{n!}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{3}\right)^n$

4. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+5i)^n}{n!}$ 的敛散性情况为 ()。

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 敛散性不能确定

5. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z=5-3i$ 绝对收敛, 则该级数在 $z=2+5i$ 处的敛散性为 ()。

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 不能确定

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$ 的收敛半径 $R =$ _____。

7. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^n z^n$ 的收敛半径为_____。

8. 函数 $f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-3)}$ 在 $z=1$ 内的泰勒展开式的收敛圆为 ()。

A. $|z|=2$

B. $|z-1|=2$

C. $|z|=3$

D. $|z-1|=3$

9. 幂级数 $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$, 则当 $|z| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S =$ _____。

10. 函数 $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ 在 $z=1$ 时展开成泰勒级数为 ()。

A. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n+1}, |z-1| < 1$

B. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^{n+1}, |z-1| < 2$

C. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^{n+1} - z^n), |z-1| < 1$



11. 求 $f(z) = \frac{1}{4z-3}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式。

12. 求 $\ln(z+1)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式。

13. 将函数 $f(z) = \frac{1}{z-5}$ 在圆环域 (1) $0 < |z-2| < 3$ (2) $3 < |z-2| < +\infty$ 内展开成洛朗级数。

14. 将 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$ 在去心解析邻域 (1) $0 < |z-i| < 1$ (2) $1 < |z-i| < +\infty$ 内分别展开成

洛朗级数。



课时五 求积分

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 简单方法	★★★	3~8	选择、填空、计算题
2. 柯西-古萨定理	★★★★	3~8	选择、填空、计算题
3. 柯西积分公式	必考	6~20	计算题
4. n 阶导数	★★★★	6~10	计算题

1. 简单方法

题 1. 计算积分 $\int_0^1 z \sin z dz$

参数方程法

解: 原式 $= \int_0^1 -z d \cos z = -z \cos z \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos z dz = -z \cos z \Big|_0^1 + \sin z \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$

题 2. 分别沿 $y=x, y=x^2$, 计算积分 $\int_0^{1+i} (x^2 + iy) dz$

解: (1) 沿 $y=x$, 令 $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$, 则 $dz = d(x+iy) = (1+i)dt$

$$\text{原式} = \int_0^1 (t^2 + it)(1+i)dt = \int_0^1 (t^2 + it^2 + it - t)dt = \int_0^1 (1+i)t^2 + (-1+i)t dt$$

$$= \left[(1+i) \frac{1}{3} t^3 + (-1+i) \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3}(1+i) + \frac{1}{2}(-1+i) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

(2) 沿 $y=x^2$, 令 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$, 则 $dz = d(x+iy) = (1+2it)dt$

$$\text{原式} = \int_0^1 (t^2 + it^2)(1+2it)dt = \int_0^1 [(2i-2)t^3 + (1+i)t^2] dt$$

$$= \left[\frac{-1+i}{2} t^4 + \frac{1+i}{3} t^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

2. 柯西-古萨基本定理 $\oint_c f(z) dz = 0$

题 1. 设 $c: |z-1| = \frac{1}{2}$, 则 $\oint_c \frac{\cos z}{z^3} dz = (\quad)$

A. $2\pi i$ B. πi C. 0 D. 1

解: $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ 只在 $z=0$ 处不解析, 在 $|z-1| = \frac{1}{2}$ 内处处解析

答案 C

题 2. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{\cos z} dz = \underline{\hspace{2cm}}$

解: $\cos z = 0$ 的点为 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

若 $f(z)$ 在曲线 c 围成的区域内解析,

$$\oint_c f(z) dz = 0$$



$$f(z) = \frac{1}{\cos z} \text{ 在 } |z|=1 \text{ 内处处解析}$$

答案: 0

3. 柯西积分公式

题 1. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = (\quad)$

A. $2\pi i$ B. $-2\pi i$ C. 2π D. -2π

解: 原式 $= \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0} dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=0} = 2\pi i$

答案 A

 $f(z)$ 在曲线 c 的内部解析, z_0 在 c 内

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

题 2. 若 $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, 则 $\oint_{|z|=5} f(z) dz = (\quad)$

A. 0 B. $-i$ C. i D. $\frac{1}{4}$

解 1: 原式 $= \oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)(z-3)} dz = \oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{(z-2)} dz$

$$= \oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-3)} dz - \oint_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)} dz = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

解 2: 原式 $= \oint_{c_1} \frac{z-3}{z-2} dz + \oint_{c_2} \frac{z-2}{z-3} dz$

令 c_1, c_2 分别是以 $z=2, z=3$ 为圆心的小圆域

$$\text{原式} = 2\pi i \frac{1}{z-3} \Big|_{z=2} + 2\pi i \frac{1}{z-2} \Big|_{z=3} = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

答案: A

题 3. 求 $\oint_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z-i)} dz$

解: 令 c_1, c_2 分别是以 $z=0$ 和 $z=i$ 为圆心的小圆域

$$\text{原式} = \oint_{c_1} \frac{z+1}{z} dz + \oint_{c_2} \frac{z+1}{z-i} dz = 2\pi i \frac{z+1}{z-i} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{z+1}{z} \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot i + 2\pi i \cdot (1-i) = 2\pi i$$

4. n 阶导数

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

题 1. 设 c 表示正向圆周 $|\zeta|=2$, $f(z) = \oint_c \frac{\sin 2\zeta}{(\zeta-z)^3} d\zeta$, 求 $f'(i)$ 的值。



解: 设 $\sin 2\zeta = f_1(\zeta)$

$$f(z) = \oint_c \frac{\sin 2\zeta}{(\zeta - z)^3} d\zeta = \frac{2\pi i}{2!} f_1''(z) = -4\pi i \sin 2z$$

$$f'(z) = -8\pi i \cos 2z$$

$$f'(i) = -8\pi i \cos 2i = -8\pi i \operatorname{ch} 2$$

课时五 练习题

1. 计算积分 $\int_1^{1+i} ze^z dz$ (提示: 利用分部积分)

2. 计算 $\int_0^1 z \cos z dz$

3. 求积分 $\int_c \bar{z} dz$, c 为从 0 到 $1+3i$ 的直线段

4. 设曲线 c 是从原点到 $2+3i$ 的直线段, 计算积分 $\int_c (x^2 + iy^2) dz$

5. $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4} = \underline{\hspace{2cm}}$

6. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z-2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$

7. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2z + 4} dz = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 计算 $\oint_c \frac{z}{z^2 + 3z - 4} dz$, $c: |z| = 5$

9. 计算 $\oint_{|z|=2} \frac{2z+1}{z^2+2} dz$

10. 计算 $\oint_{|z|=3} \frac{z}{(z+1)(z-2)} dz$

11. $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} dz = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 计算 $\oint_c \left(\frac{2}{z-2} + \frac{3}{z+2i} \right) dz$, $c: |z| = 3$



13. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 在 D 内的曲线 C 上连续, 则对任意 $z \in D$ ()

A. $\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) d\zeta}{(\zeta - z)^n} = f^{(n)}(z)$

B. $\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} = f^{(n)}(z)$

C. $\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^n} = f^{(n)}(z)$

D. $\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} = f^{(n)}(z)$

14. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条简单正向闭曲线, z_0 在 C 的内部, 则

积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{2009}} dz = \underline{\hspace{2cm}}$



课时六 留数

考点	重要程度	占分	题型
1. 奇点和零点	★★★	3~8	选择、填空、大题
2. 留数的含义	★★★	6~10	计算题
3. 求留数规则 I、II	必考		
4. 求留数规则 III、IV	★★★★		

1. 奇点和零点

题 1. 设 $z = -1$ 是函数 $f(z) = 5z^2 + 10z + 5$ 的 m 级零点, 则 $m =$ _____。

解: $f(z)|_{z=-1} = (5z^2 + 10z + 5)|_{z=-1} = 0$

$$f'(z)|_{z=-1} = (10z + 10)|_{z=-1} = 0$$

$$f''(z)|_{z=-1} = 10 \neq 0$$

$$\therefore m = 2$$

$$1. m \text{ 级零点: } \begin{cases} f^{(m)}(z_0) \neq 0 \\ f^{(n)}(z_0) = 0, \quad n < m \end{cases}$$

2. z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点

$$\Rightarrow z_0 \text{ 是 } \frac{1}{f(z)} \text{ 的 } m \text{ 级极点}$$

3. z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点, $g(z)$ 的 n 级零点

$$\Rightarrow z_0 \text{ 是 } \frac{g(z)}{f(z)} \text{ 的 } m-n \text{ 级极点}$$

题 2. $z = 0$ 是 $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ 的三级极点 ()

解: $z = 0$ 是 z^4 的 4 级零点

$$(\sin z)' \Big|_{z=0} = \cos z = 1 \neq 0$$

$z = 0$ 是 $\sin z$ 的 1 级零点

$$\therefore z = 0 \text{ 是 } \frac{\sin z}{z^4} \text{ 的 3 级极点}$$

答案: \checkmark

题 3. 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z = a$ 为 m 级与 n 级极点, 那么下列三个函数: 1) $f(z)g(z)$;

2) $\frac{f(z)}{g(z)}$; 3) $f(z) + g(z)$ 在 $z = a$ 处有什么性质?

解: 设 $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$, $g(z) = \frac{g_1(z)}{(z-a)^n}$, $f_1(z) \neq 0$, $g_1(z) \neq 0$

$$1) f(z)g(z) = \frac{f_1(z)g_1(z)}{(z-a)^{m+n}}, \quad m+n \text{ 级极点}$$



$$2) \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)/g_1(z)}{(z-a)^{m-n}}$$

当 $m > n$ 时, $m-n$ 级极点;

当 $m = n$ 时, 可去奇点 (或解析点);

当 $m < n$ 时, $n-m$ 级零点。

3) 当 $m > n$ 时, m 级极点;

当 $m = n$ 时, m 级极点或低于 m 级极点;

当 $m < n$ 时, n 级极点。

2. 留数的定义

题 1. $\text{Res}\left[\frac{\sin z}{z^2}, 0\right] = \underline{\hspace{2cm}}$

解: $\frac{\sin z}{z^2}$ 在 $z=0$ 处展开

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(\cdots + z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots$$

$$c_{-1} = 1 \quad \therefore \text{Res}\left[\frac{\sin z}{z^2}, 0\right] = 1$$

答案: 1

题 2. $\text{Res}\left[\frac{e^z - 1}{z^5}, 0\right] = \underline{\hspace{2cm}}$

解: $\frac{e^z - 1}{z^5}$ 在 $z=0$ 处展开

$$\frac{e^z - 1}{z^5} = \frac{1}{z^5} \left(\cdots + (-1) + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \cdots \right) = \cdots + z^{-4} + \frac{z^{-3}}{2!} + \frac{z^{-2}}{3!} + \frac{z^{-1}}{4!} + \cdots$$

$$c_{-1} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \quad \therefore \text{Res}\left[\frac{e^z - 1}{z^5}, 0\right] = \frac{1}{24}$$

答案: $\frac{1}{24}$

$$\text{若 } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

$$\text{则 } \text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$$

3. 求留数规则 I、II



题 1. 函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}$ 在 $z = \frac{\pi}{2}$ 处的留数 $\text{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{2}\right] = \underline{\hspace{2cm}}$

解: $z = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(z)$ 的一级极点

$$\text{原式} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{z} = \frac{2}{\pi}$$

答案: $\frac{2}{\pi}$

题 2. 用留数计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz$

解: $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)^2}$, 在 $|z|=2$ 内有 $z=0$ 和 $z=1$ 两个极点

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5z-2}{(z-1)^2} = -2$$

$$\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)^2 f(z) \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{5z-2}{z} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2}{z^2} = 2$$

$$\text{原式} = 2\pi i \{ \text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), 1] \} = 0$$

4. 求留数规则 III、IV

1. 规则 III:

$$\text{若 } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的一级极点, } \text{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

$$\text{2. 规则 IV: } \text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

$$\text{3. } \sum_{i=1}^n \text{Res}[f(z), z_i] = 0$$

题 1. 函数 $f(z) = \frac{1}{z^n - 1}$ 在 $z_0 = 1$ 的留数为 ()

A. n B. $\frac{1}{n+1}$ C. $\frac{1}{n}$

$$\text{解: } \text{Res}[f(z), 1] = \left. \frac{1}{(z^n - 1)'} \right|_{z=1} = \left. \frac{1}{nz^{n-1}} \right|_{z=1} = \frac{1}{n}$$

1. 规则 I:

z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 则

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

2. 规则 II:

z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 则

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), z_0] &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{ (z - z_0)^m f(z) \} \end{aligned}$$

$$\text{3. } \oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$$



答案: C

题 2. $\text{Res}\left[\frac{2z}{3+z^2}, \infty\right] = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\text{解: 原式} = -\text{Res}\left[\frac{2\frac{1}{z}}{3+\left(\frac{1}{z}\right)^2} \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right] = -\text{Res}\left[\frac{2}{3z^3+z}, 0\right] = -2$$

答案: -2

题 3. 函数 $f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在复平面内的所有有限孤立奇点处的留数和是 $\underline{\hspace{2cm}}$

$$\begin{aligned} \text{解: } \sum_{i=1} \text{Res}[f(z), z_i] &= -\text{Res}[f(z), \infty] = \text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right] \\ &= \text{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}, 0\right] = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3} = 1 \end{aligned}$$

课时六 练习题

1. 点 $z=0$ 是 $f(z)=1-\cos z$ 的 () 级零点。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

2. 已知 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ 在圆环域 $|z-1|>1$ 上的洛朗级数为

$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^5} - \dots$, 则 $z=1$ 是 $f(z)$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. $z=0$ 为函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z(z+1)^2}$ ()

A. 可去奇点

B. 本性奇点

C. 极点

D. 解析点

4. $z=0$ 为函数 $f(z) = \frac{(e^z-1)\sin z}{z^5}$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ (奇点类型)



5. 设函数 $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$, 则 $\text{Res}[f(z), 0] = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 设函数 $f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z}$, 则 $\text{Res}[f(z), 0] = \underline{\hspace{2cm}}$

7. $\oint_{|z|=5} \frac{e^z}{z^3 - 2z^2 - 3z} dz$

8. 函数 $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, 则 $\text{Res}[f(z), 1] = \underline{\hspace{2cm}}$

9. 用留数定理计算 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$ 的值, 其中 C 为 $|z|=5$ 的正向圆周

10. 设函数 $f(z) = \frac{1}{(z^4 - 1)(z - 3)}$, 判断 $f(z)$ 的所有有限奇点的类型, 并利用留数定理计算

$\oint_C f(z) dz$, 其中 C 为正向圆周: $|z| = 2.5$



课时七 利用留数求积分

考点	重要程度	占分	题型
1. 利用留数求积分	★★★	6~12	计算题
2. 求积分方法总结	★★★★★		

1. 利用留数求积分

题 1. 计算积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} d\theta, (0 < p < 1)$

解: $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2}) \cdot \frac{1}{1 - 2p \cdot \frac{z+z^{-1}}{2} + p^2} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)} dz$$

$$\text{令 } f(z) = \frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}$$

在 $|z|=1$ 内有 $z=0, z=p$ 两个极点

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \cdot \frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)} \right] = -\frac{1+p}{2ip^2}$$

$$\text{Res}[f(z), p] = \lim_{z \rightarrow p} \left[(z-p) \cdot \frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)} \right] = \frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}$$

$$I = 2\pi i \left[-\frac{1+p}{2ip^2} + \frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)} \right] = \frac{2\pi p^2}{1-p^2}$$

题 2. 利用留数理论计算实反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx$

解: 令 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2} = \frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$

在上半平面内有 $z=2i$ 一个 2 级极点

$$\text{Res}[f(z), 2i] = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left[(z-2i)^2 \frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2} \right] = -\frac{i}{8}$$

$$\therefore \text{原式} = 2\pi i \times \left(-\frac{i}{8} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$1. \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\text{令} \begin{cases} \sin \theta = \frac{z-z^{-1}}{2i} \\ \cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \end{cases} \Rightarrow \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z), z_k]$$

z_k 为 $R(z)$ 在上半平面内的奇点

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{aix} dx$$

$$= 2\pi i \sum \text{Res}[R(z) e^{ aiz }, z_k]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx$$



题 3. 用留数计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$

解: 令 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$, 则 $f(z)$ 在上半平面内有 $z=i$ 一个极点

$$\text{Res}[f(z), i] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{-i}{2e}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = 2\pi i \text{Res}[f(z), i] = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2e} = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}$$

2. 求积分方法总结

方法	特点
柯西古萨基本定理: $\oint_C f(z) dz = 0$	$f(z)$ 在 C 内解析
柯西积分公式: $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$	z_0 是 $\frac{f(z)}{z-z_0}$ 的一级极点, z_0 在 C 内
求留数的规则 I: $\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_0]$ $= 2\pi i \left[\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) \right]$	z_0 是 $f(z)$ 的一级极点, z_0 在 C 内
n 阶导数公式: $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$	z_0 是 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 的 $n+1$ 级极点, z_0 在 C 内
求留数规则 II: $\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), z_0]$ $= \frac{2\pi i}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ (z-z_0)^{n+1} f(z) \right\}$	z_0 是 $f(z)$ 的 $n+1$ 级极点, z_0 在 C 内
$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}[f(z), z_k]$	z_k 是 $f(z)$ 在 C 内的奇点
$\oint_C f(z) dz = -2\pi i \sum \text{Res}[f(z), z_i]$	z_i 是 $f(z)$ 在 C 外的奇点 (包括 ∞)



$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot C_{-1}$	C_{-1} 是 $f(z)$ 在 z_0 点洛朗展开的系数 z_0 是 $f(z)$ 在 C 内的奇点
利用留数求积分: ① $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ ③ $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{aix} dx$	只能用留数的规则求

课时七 练习题

1. 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta$, $a > 1$

2. 利用留数求积分的值 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$

3. 利用留数定理, 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 16)}$

4. 利用留数计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2} dx$

5. $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^4 - 1} dz$

6. 计算积分 $\oint_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(1 + z^2)^2 (1 + z^4)^3} dz$ (曲线为正向)



课时八 Fourier 傅里叶变换

考点	重要程度	占分	题型
1. $\delta(t)$ 函数	★	3 ~ 6	选择、填空
2. Fourier 傅里叶变换	★★★★	3 ~ 10	选择、填空、大题

1. $\delta(t)$ 函数

题 1. $\delta(t) \cdot \cos t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: 原式 = $\cos 0 \cdot \delta(t) = \delta(t)$

题 2. $\delta(t)$ 是单位脉冲函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t \, dt = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: 原式 = $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\delta(t)$ 单位脉冲函数

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \, dt = 1$$

$$2. f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) \, dt = f(t_0)$$

2. Fourier 傅里叶变换

$$1. F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt = \mathcal{F}[f(t)]$$

$$2. f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

题 1. 求函数 $f(t) = \begin{cases} 2e^{-3t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 的 Fourier 变换, 并证明下式:

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{9 + \omega^2} \, d\omega = \pi e^{-3t}, (t > 0)$$

解: $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-3t} e^{-j\omega t} \, dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-(3+j\omega)t} \, dt$

$$= \frac{2}{3 + j\omega} = \frac{2(3 - j\omega)}{9 + \omega^2}$$

对 $F(\omega)$ 求逆变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(3 - j\omega)}{9 + \omega^2} e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{9 + \omega^2} \, d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{3 \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{9 + \omega^2} \, d\omega = 2e^{-3t} (t > 0)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{3 \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{9 + \omega^2} \, d\omega = \pi e^{-3t} (t > 0)$$



题 2. 求函数 $f(t) = \begin{cases} E, & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 的傅里叶变换。

$$\begin{aligned} \text{解: } F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} Ee^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} E(\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\ &= 2E \int_0^{\tau} \cos \omega t dt = \frac{2E}{\omega} \sin \tau \omega \end{aligned}$$

题 3. 函数 $f(t) = \sin t$ 的傅里叶变换_____。

$$\begin{aligned} \text{解: } F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jt} e^{-j\omega t} - e^{-jt} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2j} [2\pi\delta(\omega-1) - 2\pi\delta(\omega+1)] = j\pi [\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)] \end{aligned}$$

$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$$e^{-jat} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega+a)$$

$$\delta(t+a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ja\omega}$$

常见 Fourier 傅里叶变换对

$$e^{-\beta t} (t \geq 0, \beta > 0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\beta + j\omega}$$

$$E(|t| \leq \tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2E}{\omega} \sin \tau \omega$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$\sin \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\cos \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

常用 Fourier 傅里叶变换的性质

$$1. \mathcal{F}[f(t+t_0)] = e^{j\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)];$$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)$$

$$2. \mathcal{F}[f'(t)] = j\omega \mathcal{F}[f(t)];$$

$$\mathcal{F}[tf(t)] = j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t)] = jF'(\omega)$$

$$3. \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(t) dt\right] = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[f(t)]$$

$$4. \mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$5. \mathcal{F}[f(t)*g(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)] \quad * \text{ 表示卷积}$$



题 4. 已知 $\mathcal{F}[\sin kt] = j\pi[\delta(\omega+k) - \delta(\omega-k)]$, 利用傅里叶变换计算 $\mathcal{F}[\sin(t+2)]$ 。

解: 利用性质 1:

$$\mathcal{F}[\sin(t+2)] = e^{j2\omega} \mathcal{F}(\sin t) = e^{j2\omega} \cdot j\pi[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)]$$

题 5. 设 $f(t) = \cos^2 t$, 则 $\mathcal{F}[f(t)] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $f(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$

$$\mathcal{F}(\cos 2t) = \pi[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)]$$

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2}[\mathcal{F}(\cos 2t) - \mathcal{F}(1)] = \frac{\pi}{2}\delta(\omega+2) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-2) - \pi\delta(\omega)$$

题 6. 设函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$, 利用 Fourier 变换的性质, 求下列函数的

Fourier 变换: (1) $2f'(t) - e^{3jt}f(t)$; (2) $[f(t-2)*f(t)]$

解: (1) 利用性质 2: $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega\mathcal{F}[f(t)] = j\omega \frac{1}{1+\omega^2}$

$$\text{利用性质 1: } \mathcal{F}[e^{3jt}f(t)] = F(\omega-3) = \frac{1}{1+(\omega-3)^2}$$

$$\therefore \mathcal{F}[2f'(t) - e^{3jt}f(t)] = 2j\omega \frac{1}{1+\omega^2} - \frac{1}{1+(\omega-3)^2}$$

$$(2) \text{ 利用性质 1: } \mathcal{F}[f(t-2)] = e^{-2j\omega}\mathcal{F}[f(t)] = e^{-2j\omega} \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\text{利用性质 5: } \mathcal{F}[f(t-2)*f(t)] = \mathcal{F}[f(t-2)] \cdot \mathcal{F}[f(t)]$$

$$= e^{-2j\omega} \frac{1}{1+\omega^2} \cdot \frac{1}{1+\omega^2} = \frac{e^{-2j\omega}}{(1+\omega^2)^2}$$

题 7. 设函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$, 求函数 $g(t) = t^2 f'(t)$ 的傅里叶变换。

解: 利用性质 2:

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega\mathcal{F}[f(t)] = j\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[tf'(t)] = j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f'(t)] = j \frac{d}{d\omega} [j\omega F(\omega)] = -F(\omega) - \omega F'(\omega)$$

$$\mathcal{F}[t^2 f'(t)] = j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[tf'(t)] = j \frac{d}{d\omega} [-F(\omega) - \omega F'(\omega)] = -2jF'(\omega) - j\omega F''(\omega)$$



课时八 练习题

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3)e^{-t} dt = \underline{\hspace{2cm}}。$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} 3\delta(t) dt = \underline{\hspace{2cm}}。$

3. 求指数衰减函数 $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\beta t} & t \geq 0 \end{cases} (\beta > 0)$ 的傅氏变换。

4. 函数 $f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ 的傅氏变换 $F(\omega) = \underline{\hspace{2cm}}。$

5. 求矩形函数 $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \tau \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 的傅里叶变换。

6. $f(t) = \sin t \cos t$ 的 Fourier 变换是 ()

A. $\frac{\pi}{4} j [\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$

B. $\frac{\pi}{2} j [\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$

C. $\pi j [\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$

D. $2\pi j [\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$

7. 求函数 $f(t) = \delta'(t-2)$ 的频谱。(Fourier 变换)

8. 已知函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega)$, 求函数 $g(t) = f(2t-5)$ 的 Fourier 变换。

9. 已知函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 则 $\mathcal{F}[tf(t)] = \underline{\hspace{2cm}}。$

10. 已知 $f(t) = e^{-t^2}$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$, 求函数 $g(t) = te^{-t^2}$ 和 $h(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ 的傅里叶变换。



课时九 Laplace 拉普拉斯变换

考点	重要程度	占分	题型
1. 定义和性质	★★★	3 ~ 8	选择、填空
2. 应用	★★★★★	6 ~ 10	大题

1. 定义和性质

题 1. 求 $f = e^{kt}$ 的 Laplace 变换 (k 为实数)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$\text{解: } F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t} dt = -\frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-k}$$

题 2. 求 $f(t) = \sin kt$ 的 Laplace 变换 (k 为实数)

$$\text{解: } F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} \sin kte^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s^2 + k^2} (-s \sin kt - k \cos kt) \Big|_0^{+\infty} = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

常见 Laplace 拉普拉斯变换对

$$1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$$

$$\sin at \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$e^{at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}$$

$$t^n, (n > -1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\cos at \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + a^2}$$

常用 Laplace 拉普拉斯变换的性质 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$1. \mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} F(s); \quad \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

$$2. \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0); \quad \mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$3. \mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$$

$$4. \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s); \quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^{+\infty} F(s) ds$$

$$5. \mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$



题 3. 求 $t^3 + te^{-t} + e^{2t} \cos 5t$ 的拉普拉斯变换。

解: $\mathcal{L}(t^3) = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^{1+1}} = \frac{1}{s^2} \quad \mathcal{L}(te^{-t}) = \frac{1}{[s - (-1)]^2} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos 5t) = \frac{s}{s^2 + 5^2} \quad \mathcal{L}(e^{2t} \cos 5t) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 5^2}$$

$$F(s) = \mathcal{L}(t^3 + te^{-t} + e^{2t} \cos 5t) = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{s-2}{(s-2)^2 + 5^2}$$

题 4. 利用拉普拉斯变换求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{t} e^{-2t} dt$

解: 求 $\frac{1 - \cos 2t}{t}$ 的 Laplace 变换 $F(s)$

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

利用性质 4 $\mathcal{L}\left(\frac{1 - \cos 2t}{t}\right) = \int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right) ds = \left[\ln s - \frac{1}{2} \ln(s^2 + 4) \right] \Big|_s^{+\infty}$

$$= \ln \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}} \Big|_s^{+\infty} = -\ln \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}}$$

$$\text{原式} = F(2) = -\ln \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4}} = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

题 5. 已知 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s) = \frac{1}{(s-1)^4}$, 则 $f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: $\because \mathcal{L}(t^3) = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4} \quad \therefore \frac{1}{6} \mathcal{L}(t^3) = \frac{1}{s^4} \quad \mathcal{L}\left(\frac{t^3}{6}\right) = \frac{1}{s^4}$

利用性质 1: $\mathcal{L}\left(e^t \frac{t^3}{6}\right) = \frac{1}{(s-1)^4}$

$$\therefore f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^4}\right] = \frac{t^3}{6} e^t$$



题 6. 求下列函数的拉普拉斯逆变换

$$(1) \frac{1}{s(s-1)} \quad (2) \frac{2s+5}{s^2+4s+13}$$

解: (1) $\frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$

$$\therefore \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1} \quad \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\therefore f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) = e^t - 1$$

$$(2) \frac{2s+5}{s^2+4s+13} = \frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+9} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+9} + \frac{1}{(s+2)^2+9}$$

利用性质 1

$$\therefore \mathcal{L}(\cos 3t) = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}(\sin 3t) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\therefore \mathcal{L}(e^{-2t} \cos 3t) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$\mathcal{L}(e^{-2t} \sin 3t) = \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$\therefore \mathcal{L}(2e^{-2t} \cos 3t) = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+9}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t\right) = \frac{1}{(s+2)^2+9}$$

$$\therefore f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+5}{s^2+4s+13}\right) = 2e^{-2t} \cos 3t + \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t$$



2. 应用

题 1. 用拉普拉斯变换求初值问题 $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

解: 对两边取 Laplace 变换, 利用性质 2

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{1}{s}$$

代入 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 得 $s^2 Y(s) - 1 - 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s}$

整理得 $(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s} + 1$ $Y(s) = \frac{1+s}{(s-1)^2 s}$

设 $Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s}$

$$A = \text{Res}[Y(s), 1] = \lim_{s \rightarrow 1} \left[(s-1)^2 \frac{1+s}{(s-1)^2 s} \right]' = \lim_{s \rightarrow 1} -\frac{1}{s^2} = -1$$

$$B = \text{Res}[Y(s) \cdot (s-1), 1] = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1+s}{(s-1)^2 s} (s-1)^2 = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1+s}{s} = 2$$

$$C = \text{Res}[Y(s), 0] = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1+s}{(s-1)^2 s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1+s}{(s-1)^2} = 1$$

$$\therefore Y(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s} \quad \text{求 Laplace 逆变换 } y(t) = -e^t + 2te^t + 1$$

题 2. 用拉氏变换解方程 $y(t) = e^t - \int_0^t y(t) dt$

解: 两边取 Laplace 变换, 利用性质 4 $Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} Y(s)$

整理得 $Y(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$ 设 $Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$

$$A = \text{Res}[Y(s), 1] = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2}$$

$$B = \text{Res}[Y(s), -1] = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} \quad \text{求 Laplace 逆变换 } y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$



题 3. 利用 Laplace 变换求解方程 $y(t) = \sin t - 2 \int_0^t y(\tau) \cos(t-\tau) d\tau$

解: 方程化简为 $y(t) = \sin t - 2y(t) * \cos t$

两边取 Laplace 变换得: $Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - 2Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}$

整理得 $Y(s) = \frac{1}{s^2+1+2s} = \frac{1}{(s+1)^2}$

求 Laplace 逆变换得 $y(t) = te^{-t}$

卷积:

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

课时九 练习题

1. 利用拉普拉斯变换的定义求函数 $f(t) = \cos(3t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 。

2. 已知 $f(t) = t^2$, 则 $f(t)$ 的 Laplace 变换为 ()。

A. $\frac{3}{s^3}$ B. $\frac{2}{s^3}$ C. $\frac{6}{s^3}$ D. $\frac{6}{s^4}$

3. 求函数 $f(t) = e^{-3t} \cos 4t$ 的拉普拉斯变换。

4. 求函数 $f(t) = t \sin 3t$ 的 Laplace 变换, 并由此计算积分 $\int_0^{+\infty} te^{-3t} \sin 3t dt$ 。

5. 积分 $\int_0^{+\infty} te^{-2t} dt$ 的值为_____。

6. 求 $F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$ 的拉氏逆变换。

8. 用 Laplace 变换求解微分方程初值问题 $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = e^{-t} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ 。

9. 用拉普拉斯变换解常微分初值问题: $y'' - 4y' + 3y = e^{-t}$, $y(0) = y'(0) = 1$ 。

10. 用 Laplace 变换求方程 $y'' - y = \cos t + \sin t$ 满足初始条件 $y|_{t=0} = 0$, $y'|_{t=0} = 0$ 的特解。

11. 用拉普拉斯变换求解微分方程 $f(t) = at + \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau$ 。

12. 求积分方程的解: $y(t) + \int_0^t y(t-\tau) e^{\tau} d\tau = 2t - 3$ 。



课时十 映射

考点	重要程度	占分	题型
1. 映射	★	3~5	选择、填空
2. 分式线性映射	★★★	3~10	选择、填空、大题

1. 映射

题 1. 曲线 $x^2 + y^2 = 4$ 在映射 $\omega = \frac{1}{z}$ 下所形成的图形为 ()

A. 圆 B. 直线 C. 射线 D. 圆弧

解: 令 $z = x + iy$, $\omega = u + iv$, 则 $\omega = \frac{1}{z}$ 相当于

$$u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{4} \\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4u \\ y = -4v \end{cases}$$

$$\text{当 } x^2 + y^2 = 4 \text{ 时, } (4u)^2 + (-4v)^2 = 4 \quad \text{即 } u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

答案: A

题 2. 映射 $\omega = z^2 + z$ 在 $z_0 = -\frac{1}{2} + i$ 处的伸缩率为_____, 转动角为_____。

解: $\omega'(z_0) = (2z + 1)\big|_{z_0 = -\frac{1}{2} + i} = 2i$

$$\text{伸缩率: } |\omega'(z_0)| = |2i| = 2$$

$$\text{转动角: } \arg \omega'(z_0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{伸缩率: } |\omega'(z_0)|$$

$$\text{转动角: } \arg \omega'(z_0)$$

2. 分式线性映射

1. 分式线性映射 $\omega = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$

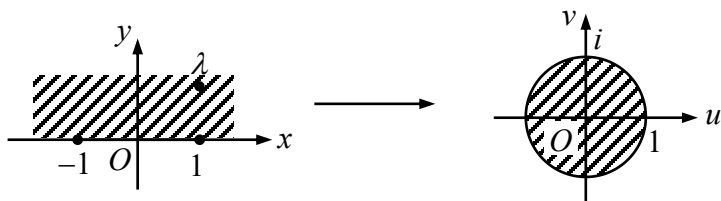
2. 唯一分式线性映射 ω

给定 ω 平面 3 个点 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, z 平面 3 个点 z_1, z_2, z_3 , 则 $\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} \cdot \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$

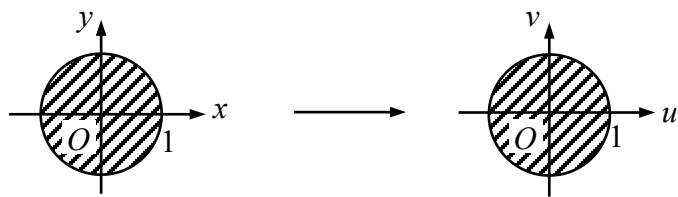


3. 四个常见的映射

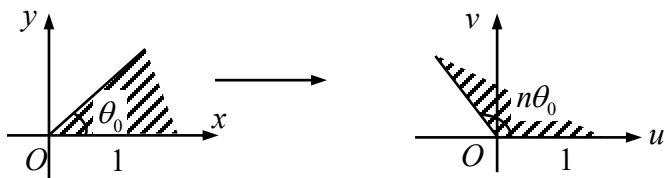
上半平面映射到单位圆 $\omega = e^{i\theta} \left(\frac{z-\lambda}{z\bar{\lambda}} \right) \quad (\text{Im}(\lambda) > 0)$



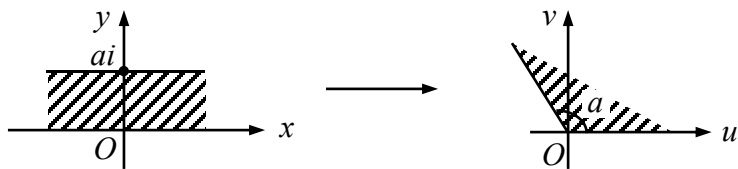
单位圆映射到单位圆 $\omega = e^{i\theta} \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \quad (|a| < 1)$



角形域映射到角形域 $\omega = z^n$



带形域映射到角形域 $\omega = e^z$



题 1. 求将上半平面变换到单位圆的分式线性映射 $\omega = f(z)$, 且满足 $f(i) = 0, \arg f'(i) = \frac{\pi}{2}$ 。

解: 设 $\omega = f(z) = e^{i\theta} \frac{z-i}{z+i}$

$$\text{则 } f'(i) = e^{i\theta} \frac{(z+i) - (z-i)}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} = -\frac{1}{2} i e^{i\theta} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{i\theta} = \frac{1}{2} e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

$$\arg f'(i) = \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi \quad \omega = f(z) = -\frac{z-i}{z+i}$$



题 2. 求把单位圆映射成单位圆的分式线性映射, 并满足条件: $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ 。

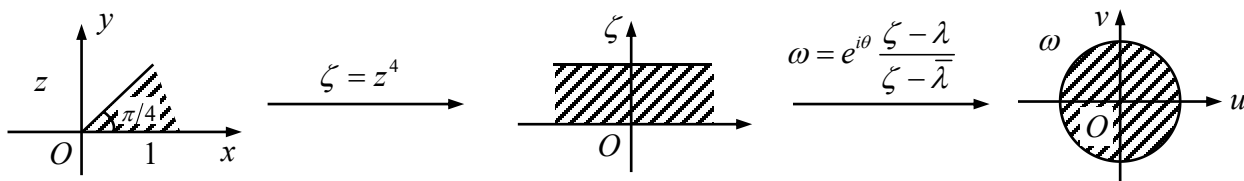
解: 设 $\omega = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z}$,

$$\text{则 } f'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\theta} \left[\left(1 - \frac{1}{2}z\right) + \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\right) \right] / \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2 = \frac{4}{3}e^{i\theta}$$

$$\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } \omega = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} = i \frac{2z - 1}{2 - z}$$

题 3. 求把平面的角形域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ 映射成单位圆域 $|\omega| < 1$ 的一个映射 $\omega = f(z)$, 如下图

所示, 并满足 $f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)=0, f(0)=i$ 。



解: 首先将 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ 的角形域映射为上半平面, 设 $\zeta = z^4$

然后将上半平面映射为单位圆内, 设 $\omega = e^{i\theta} \frac{\zeta - \lambda}{\zeta - \bar{\lambda}}$

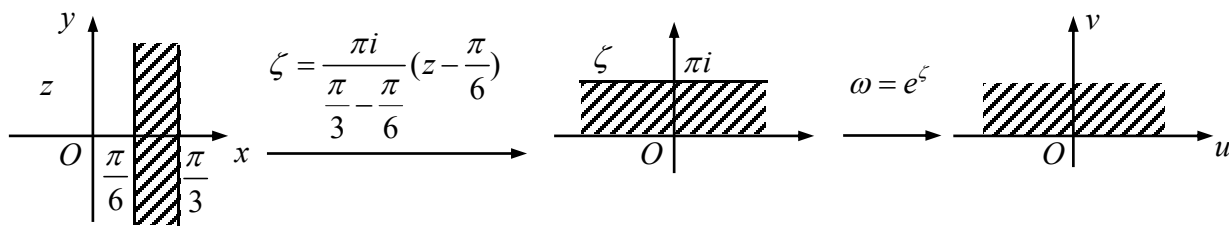
$$\text{则 } \omega = e^{i\theta} \frac{z^4 - \lambda}{z^4 - \bar{\lambda}}$$

$$\text{当 } z = e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ 时, } f(z) = f\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right) = e^{i\theta} \frac{i - \lambda}{i - \bar{\lambda}} = 0, \text{ 可得 } \lambda = i, \omega = e^{i\theta} \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$$

$$\text{当 } z = 0 \text{ 时 } f(z) = f(0) = e^{i\theta} \frac{0 - i}{0 + i} = -e^{i\theta} = i, \text{ 可得 } e^{i\theta} = -i, \omega = -i \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$$



题4. 求一个将带形域 $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{3}$ 映射成上半平面 $\operatorname{Im}(\omega) > 0$ 的共形映射。



解: 首先将带形域 $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{3}$ 映射为带形域 $0 < \operatorname{Im}(\zeta) < \pi$ 设 $\zeta = \frac{\pi i}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}(z - \frac{\pi}{6})$,

然后将带形域映射成上半平面, 设 $\omega = e^\zeta$

$$\text{则 } \omega = e^{\frac{\pi i}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}(z - \frac{\pi}{6})} = e^{i(6z - \pi)}$$

课时十 练习题

1. $\omega = \frac{i}{z}$ 将 z 平面上的直线 $x=2$ 映射成 ω 平面上的曲线为 ()

- A. $2(u^2 + v^2) = v$ B. $v^2 = 2(1-u)$ C. $u^2 = 2(1-v)$ D. $u^2 + v^2 = \frac{1}{3}u$

2. 映射 $\omega = 3z^2$ 在 $z_0 = i$ 处的伸缩率为_____。

3. 在映射 $\omega = 2z^2 + 4z$ 下, 曲线 C 在点 $z_0 = i$ 处的伸缩率是_____, 旋转角是_____。

4. 称_____构成的映射为分式线性映射。

5. 求把上半平面 $\operatorname{Im}(z) > 0$ 映射成单位圆 $|\omega| < 1$, 且满足 $\omega(2i) = 0$, $\arg \omega'(2i) = -\frac{\pi}{2}$ 的分式线性映射。

6. 求将单位圆映射成单位圆且满足条件 $\omega\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\omega'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ 的分式线性映射。

7. 求在带型域 $1 < \operatorname{Re}(z) < 2$ 的一个映射, 映射为单位圆 $|\omega| < 1$ 。

