

绪论

渐进复杂度：指数

01-C3

慌得那拿盘的小怪，战兢兢跑去报道：“难，难，难！难，难，难！”
老妖道：“怎么有许多难？”

“你是什么东西？”太太说。四虎子也楞住了，他自己不知道他是什么东西——这本是世上最难答的一个问题。

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

$\mathcal{O}(2^n)$: exponential

❖ 指数 : $T(n) = \mathcal{O}(a^n)$, $a > 1$

❖ $\forall c > 1, n^c = \mathcal{O}(2^n)$ $\because e^n = 1 + n + n^2/2! + n^3/3! + n^4/4! + \dots$

$$n^{1000\dots 01} = \mathcal{O}(1.000\dots 01^n) = \mathcal{O}(2^n)$$

$$1.000\dots 01^n = \Omega(n^{1000\dots 01})$$

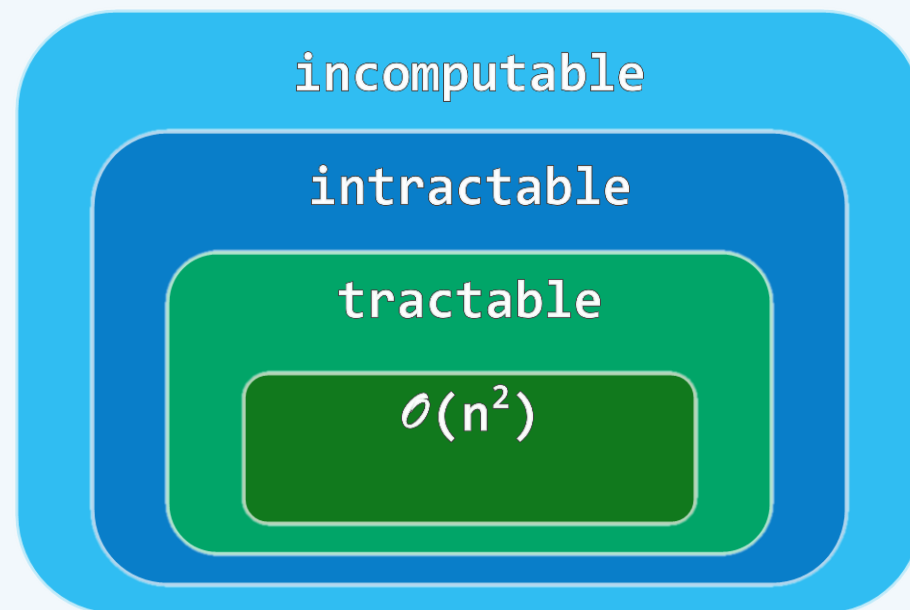
❖ 这类算法的计算成本增长极快，通常被认为不可忍受

❖ 从 $\mathcal{O}(n^c)$ 到 $\mathcal{O}(2^n)$ ，是从**有效算法**到**无效算法**的分水岭

❖ 很多问题的 $\mathcal{O}(2^n)$ 算法往往显而易见

然而，设计出 $\mathcal{O}(n^c)$ 算法却极其不易；甚至，有时注定地只能是徒劳无功

❖ 更糟糕的是，这类问题要远比我们想象的多得多...



2-Subset

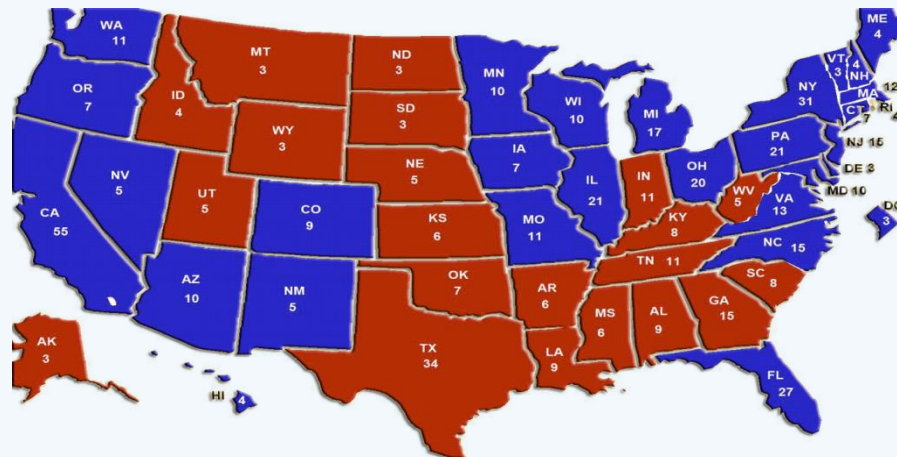
$\forall S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$ and $\sum_{k=1}^n a_k = 2m$, $\exists T \subset S$ s.t. $\sum_{a \in T} a = m$?

❖ 选举人团投票制：50个州加1个特区，共**538**票；获**270**张选举人票，即可当选

❖ 若共有两位候选人，会否恰好各得**269**票？

❖ 直觉上，并**不难**：逐一**枚举** S 的每一子集，并统计其中元素的总和

55	California	11	Indiana	7	Connecticut	4	Idaho
34	Texas	11	Missouri	7	Iowa	4	Maine
31	New York	11	Tennessee	7	Oklahoma	4	New Hampshire
27	Florida	11	Washington	7	Oregon	4	Rhode Island
21	Illinois	10	Arizona	6	Arkansas	3	Alaska
21	Pennsylvania	10	Maryland	6	Kansas	3	Delaware
20	Ohio	10	Minnesota	6	Mississippi	3	D. C.
17	Michigan	10	Wisconsin	5	Nebraska	3	Montana
15	Georgia	9	Alabama	5	Nevada	3	North Dakota
15	New Jersey	9	Colorado	5	New Mexico	3	South Dakota
15	North Carolina	9	Louisiana	5	Utah	3	Vermont
13	Virginia	8	Kentucky	5	West Virginia	3	Wyoming
12	Massachusetts	8	South Carolina	4	Hawaii		538 = Σ



2-Subset

❖ 定理： $|2^S| = 2^{|S|} = 2^n$

❖ 亦即：直觉算法需要迭代 2^n 轮，并（在最坏情况下）至少需要花费这么多的时间

故严格地讲，这仍只是**程序**，而不是**算法**

❖ 还是直觉：应该有更好的办法吧？

❖ 定理：2-Subset is NP-complete

— 什么意思？

❖ 意即：就目前的计算模型而言，**不存在**可在多项式时间内回答此问题的算法

— 就此意义而言，上述的直觉算法已属最优