# 01-E1

# 绪论

## 迭代与递归：减而治之

虽我之死，有子存焉；子又生孙，孙又生子；子又有子，子又有孙；子子孙孙无穷匮也，而山不加增，何苦而不平？

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

# Sum

❖ 问题：计算任意n个整数之和

❖ 实现：逐一取出每个元素，累加之

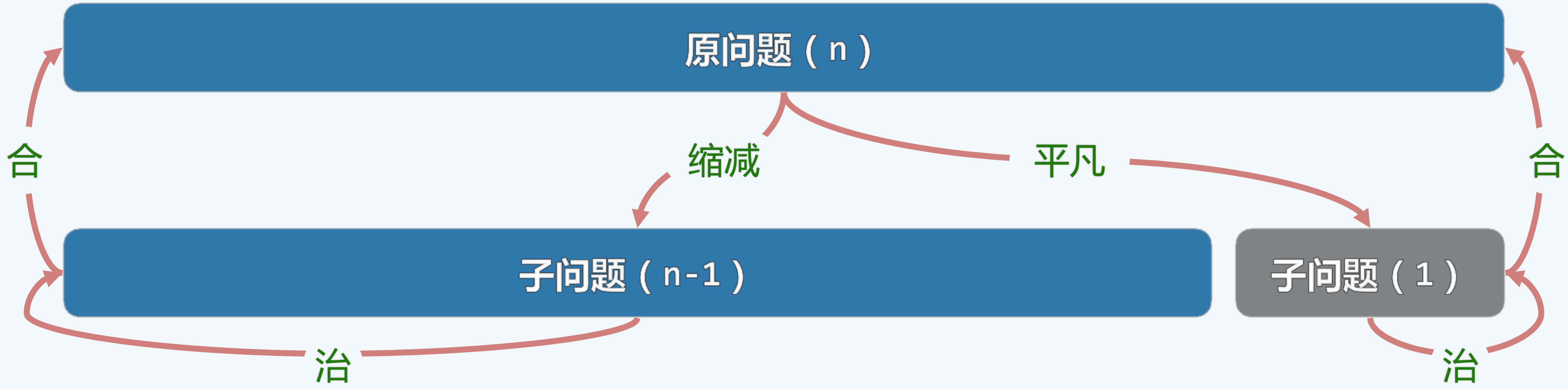
```
int SumI( int A[], int n ) {
   int sum = 0; //O(1)
   for ( int i = 0; i < n; i++ )//O(n)
      sum += A[i]; //O(1)
   return sum; //O(1)
}
```

❖ 无论A[ ]内容如何，都有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T(n)} &= 1 + \mathrm{n} \cdot 1 + 1 \\
&= n + 2 \\
&= \mathcal{O}(n) \\
&= \Omega(n) \\
&= \Theta(n)
\end{aligned}
$$

❖ 空间呢？

# Decrease-and-conquer




❖ **为求解一个大规模的问题，可以**

- **将其划分为两个子问题：其一平凡，另一规模缩减** **//单调性**
- **分别求解子问题**
- **由子问题的解，得到原问题的解**

# Linear Recursion: Trace

❖ sum( int A[], int n )

```
{  return  n < 1  ?  0 : sum(A, n - 1) + A[n - 1];  }
```

❖ 递归跟踪 分析复杂度方法一

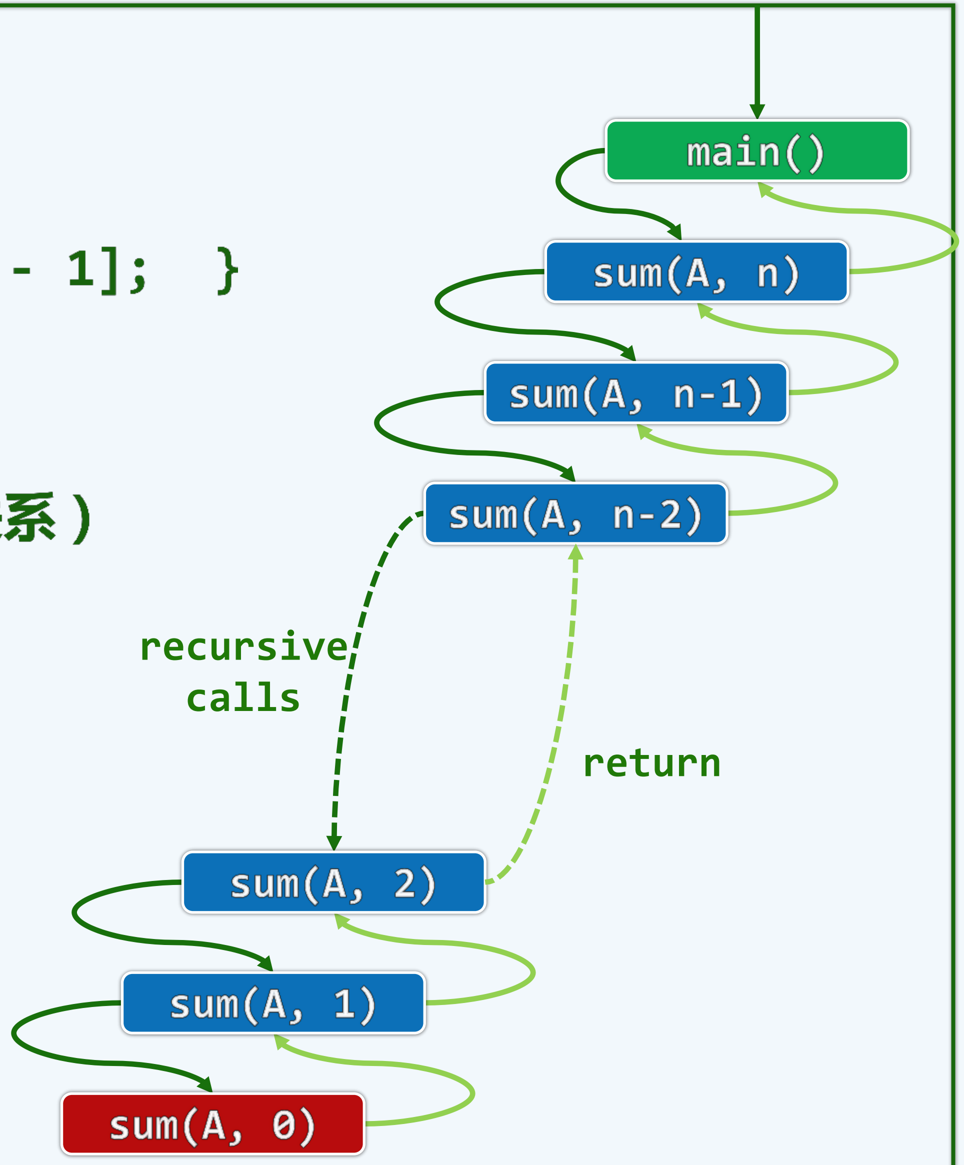
- 绘出计算过程中出现过的所有递归实例（及其调用关系）
- 它们各自所需时间之总和，即为整体运行时间

  （调用操作的成本，可计到被创建子实例的账上）

❖ 本例中，共计n+1个递归实例，各自只需$\mathcal{O}(1)$时间

故总体运行时间为：$T(n) = \mathcal{O}(1) \times (n+1) = \mathcal{O}(n)$

❖ 空间复杂度呢？



# Linear Recursion: Recurrence

- 对于大规模的问题、复杂的递归算法，递归跟踪不再适用

  此时可采用另一抽象的方法... 递推方程，分析复杂度方法二

- 从递推的角度看，为求解规模为n的问题sum(A, n)，需 //T(n)
  - 递归求解规模为n-1的问题sum(A, n - 1)，再 //T(n-1)
  - 累加上A[n - 1] //$\mathcal{O}$(1)

- 递推方程：$T(n) = T(n-1) + \mathcal{O}(1)$ //recurrence

  $T(0) = \mathcal{O}(1)$ //base: sum(A, 0)

- 求解：$T(n) = T(n-2) + \mathcal{O}(2) = T(n-3) + \mathcal{O}(3) = \ldots = T(0) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n)$

# Reverse

❖ `void reverse( int * A, int lo, int hi );`

  //将任一数组子区间A[lo,hi]前后颠倒

❖ 减而治之：

$$reverse(lo, hi) \;=\; [hi] \;+\; reverse(lo+1, hi-1) \;+\; [lo]$$

❖
```
if (lo < hi) { //递归版
    swap( A[lo], A[hi] );
    reverse( A, lo + 1, hi - 1 );
} //线性递归（尾递归），O(n)
```

❖
```
while (lo < hi) //迭代版
    swap( A[lo++], A[hi--] ); //亦是O(n)
```