# 2016年西北工业大学ACM基地冬季选拔赛题解

By 陆苏

A.　村落中的长者

题意回顾：

对于集合$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$的所有非空子集$S_i$，求$\sum_{i=1}^{2^n-1} maxnum(S_i)$。

思路分析：

遍历子集会超时。考虑每一个元素可能在多少个集合中充当最大元素。对$\{a_i\}$从小到大排序，易得$\mathrm{ans} = \sum_{i=1}^{n} a_i \times 2^{i-1}$。使用上式计算时间复杂度为O(Tnlogn)。

B.　とある不科学の方程式

题意回顾：

对于下面的方程：$x_1\ xor\ x_2\ xor \dots xor\ x_n = k$，其中$xor$表示异或运算，且其中所有的变量均满足$0 \le x_i \le m_i$，$1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}$。现在给出$m_i$，$n$，$k$，试问该方程共有多少组不同的解？

思路分析：

1. 首先考虑这样一个事实：当某一个变量$x_i$可以取得足够大的时候，其他所有的变量就可以任意取值，因为$x_i$可以由$k\ xor\ x_1\ xor \dots xor\ x_{i-1}\ xor\ x_{i+1}\ xor \dots xor\ x_n$唯一确定，从而此时的答案为$\mathrm{ans} = \sum_{j \ne i}(m_j + 1)$。何谓$x_i$可以取得足够大？就是指构造$x_i$时，前面的某一位已经脱离了$m_i$的限制。联想到数位 DP。
2. 考虑数位 DP。假设当前已经枚举到第 len 位，令$dp_{i,j}$表示考虑第

i 个变量，且 len 位为 j 的方案数。对于所有已经考虑过的变量，我们认为它们取最大值，那么前 i-1 个变量的方案数就已经确定了，从 i+1 位到 n 位 DP 即可。设该位取 0 的方案数为$cnt_0$，取 1 的方案数为$cnt_1$，那么：$dp_{i,0} = dp_{i-1,0} \times cnt_0 + dp_{i-1,1} \times cnt_1$，$dp_{i,1} = dp_{i-1,0} \times cnt_1 + dp_{i-1,1} \times cnt_0$。

C.　　五点共圆

题意回顾：

给出平面上的 5 个整点，判断这五个点是否共圆。

思路分析：

1. 浮点数模拟。任取这五个点中的三个点，若这三点共线，则五点不共圆，否则这三点可以唯一确定一个圆。易求该圆的圆心和半径，再判断剩余两点是否在该圆上即可。浮点模拟（eps）可以通过本题
2. 完美算法。五点共圆等价于从这五点中任意取四个点共圆（因为从五点中任取四点，必有三个公共点，而三点确定一个圆）。问题转化为判断四点共圆。依据托勒密（Ptolemy）定理，圆的任意一个内接四边形 ABCD 满足$\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BD}$。通过平方法可以去掉开根运算。由于给出的点是整点，故该算法没有任何误差。

D.　　哆啦 A 梦的口袋

题意回顾：

有 n 个点，m 条无向边。每个点有$a_i$个玩具，有$b_i$个人，每条边最多可以运输$c_i$个人，且在运输了两个人之后，从第三个人开始就会有$p_i$的概率出现故障。现在要求每人都能拿到一个玩具，且故障概率乘积最小。

思路分析：

1. 考虑最小费用最大流。
2. 建立超级源 S，向每个基地建边，流量为初始时基地的人数$b_i$，费用为 0。
3. 有传送门连接的每个基地之间首先连接两条流量为 1 的免费的边（前提条件是$c_i \geq 2$）。之后再建立流量为$c_i - 2$的边。需要注意的问题是本题中的费用是累乘的，而非累加，可以通过取对数的方法将乘法转化为加法。但是取对数又会有一个问题，$p_i$可能接近 0 甚至等于 0，在取对数时很可能发生精度问题。由于我们需要的是最小费用，故而可以先取$1/_{1-p_i}$，再取对数。
4. 建立超级汇 T，每个基地向 T 连边，流量为该基地的玩具数量$a_i$，费用为 0。
5. 跑一遍最小费用最大流即可。有多种网络流算法可供选择，SPFA，Dinic 等。

E.　灵魂链接

题意回顾：

给出数列$\{a_i\}$，实现七种操作：将$a_i$和$a_j$连为一组、单点增加、组内增加、全体增加、单点查询、组内最小查询、全体最小查询。数列长度和操作数$3 \times 10^5$。

思路分析：

1. 考虑可并堆。建立两种可并堆，其中一个堆用于维护全体最小值，另一个用于维护组内最小值。对于全体增加操作只需要添加一个变量就行了，对于其他的操作就是基础的堆合并以及打标记。
2. 考虑线段树离线维护。因为对于结果产生影响的其实只有链接操作，所以我们可以离线把链接操作最终结果的森林进行编号，然后其它操作就是普通的线段树区间查询和修改操作了。

F.　上课小动作

题意回顾：

n 种颜色的笔，每支笔可以画的长度为$\{a_i\}$。若当前格子使用颜色为 x 的笔，则下一个格子必须使用颜色为$\mathrm{y} = \begin{cases} x+1, x \neq n \\ 1, x = n \end{cases}$的笔。试求可以涂色的最大长度。

思路分析：

设$\{a_i\}$中的最小值为$a_{min}$，显然至少可以涂$\mathrm{n} \times a_{min}$个格子。当$a_{min}$被消耗完后，还可以涂的个数应为$\mathrm{n} - \mathrm{s}$，其中 s 为两个相邻的最小值之间距离最大的距离（循环意义下）。最终$\mathrm{ans} = \mathrm{n} \times a_{min} + n - s$。

G.　艾神的难题

题意回顾：

对于某个 1~n 的排列，定义如下的操作：选出任意三个数字，将三个数字随意排列后再放回到序列中原来的位置。将该序列变为递增序列的操作期望次数为$\overline{exp}$，求所有 1~n 排列的平均期望次数$\overline{exp}$。

思路分析：

1. 以 n=11 为例简述本题的思路。11 个数的全排列共计 11！种。对于每一种状态 s，用 X(s)表示从这种状态出发，到达目标状态的期望操作次数。在序列中选择三个数共有$C_{11}^3$种方法，选出来之后有 3！=6 种排列，故而 s 的后继状态共有$6C_{11}^3$种。从而有：$X(s) = \sum_{i=1}^{6C_{11}^3} X(s_i) \Big/ (6C_{11}^3) + 1$。对于每一个状态 s，都可以得到这样一个方程组。
2. 然而，容易发现，这些状态中有大量的重复状态，考虑置换循环节。假定给出的序列是{3 2 1 4 8 7 5 9 6 10 11}，写成循环节的形式为(3 1)(2)(4)(8 7 5 9 6)(10)(11)。可以通过简单的模拟来寻找循环节。从任意元素$a_i$出发，走到$a_{a_i}$，再走到$a_{a_{a_i}}$……直到回到出发点，就找到了一个循环节。
3. 每个序列都有其循环节，将循环节的大小用数字表示出来，例如 2 中所举的序列，其循环节大小依次为 1，1，1，1，2，5。将这样的表示方式称为序列的“循环节模式”。如果两个不同的排列的循环节模式相同，那么它们的答案一定相同。至此，11！种状

态便简化成为“循环节模式”不同的状态，大约 60 个。

4. 对于所有的本质不同的状态，使用高斯消元解方程组即可。

## H. 看似复杂的方程

题意回顾：

给定正整数 y，判断是否存在正整数 x 使得$x! + y! = x^y$。

思路分析：

1. 通过小数据找规律，结合题目中的暗示，容易猜得只有 y=2 或 3 时方程才有解。
2. 从严格意义上求该方程的所有解。首先，显然 x>1 且 y>1。其次，当 x=2 时，容易验证 y=2,3 是原方程的解，而 y>3 时，注意到左边$= 2 + 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times y > 2 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times y > 2^y =$右边，故而原方程无解。再次，当 x>2 时，$\gcd(x-1, x) = 1$，从而$\gcd(x-1, x^y) = 1$，也就是说方程的右边不能被 x-1 整除，所以方程的左边也不能被 x-1 整除，而 x-1 可以整除 x!，所以 x-1 一定不能整除 y!，从而 y<x-1。设素数$p \le y$，则 p 整除 x!，从而 p 整除方程的左边，所以 p 必须整除方程的右边，即 p 整除 x。接下来，考虑素数 p 在方程左右两边出现的次数。$cnt_{left} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{y}{p^i} \right\rfloor < y < cnt_{right}$，故而方程无解。所以，原方程的解只有两组：(x,y)=(2,2),(2,3)。

## I. 柱状图排序

题意回顾：

输入一些字符串表征一个柱状图，按项目值的大小排序。

思路分析：

签到题，字符串模拟，直接做就好了。可以用 while 来读字符串，直到读到“ABC…”为止。

J. 疯狂的游戏

题意回顾：

给定正整数 n，试求最小的正整数 t，使得对于任意正整数 m，从集合 S=$\{m, m+1, \dots, m+n-1\}$中任意取一个 t 元子集，都存在三个数两两互素。

思路分析：

1. 首先，t 是一个关于 n 的函数 f(n)。
2. 显然有$\mathrm{f(n)} \le \mathrm{n}$，因为当$\mathrm{n} \ge 4$时，将整个集合全部取出，必定会存在三个数两两互素（取以奇数开始的三个连续的数即可）。
3. 考虑这样一种特殊情况：m=2，此时$\mathrm{S} = \{2,3, \dots, n+1\}$。构造其子集$\mathrm{P} = \left\{x | x \equiv 0 (mod\ 2)\text{或}x \equiv 0 (mod\ 3), x \le n+1\right\}$。容易发现子集 P 中不存在三个元素两两互素，这是因为子集 P 仍然不够大。由此可以得到$\mathrm{t} > |P|$。由容斥原理，$|P| = \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n+1}{6}\right\rfloor$，从而$\mathrm{f(n)} \ge \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n+1}{6}\right\rfloor + 1$。
4. 依据 2 和 3 中的结论，有：$\mathrm{f}(4) = 4, \mathrm{f}(5) = 5, 5 \le \mathrm{f}(6) \le 6, 6 \le \mathrm{f}(7) \le 7, 7 \le \mathrm{f}(8) \le 8, 8 \le \mathrm{f}(9) \le 9$。

5. 依据样例（或通过简单的计算），可以知道 f(6)=5。对于某一个 n，有$S_1=\{m,m+1,\ldots,m+n-1\}$。对于 n+1，有$S_2=\{m,m+1,\ldots,m+n-1,m+n\}=S_1\cup\{m+n\}$。大不了把 m+n 这个元素也选上，所以容易得到$\mathrm{f(n+1)\le f(n)+1}$。进而知 f(7)=6,f(8)=7,f(9)=8。至此，对于所有的$4\le \mathrm{n}\le 9$，$\mathrm{f(n)}=\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{6}\right\rfloor+1$均成立。
6. 数学归纳法的假设步：假设对于$\mathrm{n}\le \mathrm{k}$，$\mathrm{f(n)}=\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{6}\right\rfloor+1$成立。
7. 数学归纳法的归纳步：当 n=k+1 时，$S_{k+1}=\{m,m+1,\ldots,m+k\}$，$S_{k-5}=\{m,m+1,\ldots,m+k-6\}$，从而$S_{k+1}=S_{k-5}\cup\{m+k-5,m+k-4,\ldots,m+k\}$。在集合$\{m+k-5,m+k-4,\ldots,m+k\}$中，能够被 2 或 3 整除的数有 4 个，即使这 4 个数全部被取出，只要在前面的集合取 f(k-5)个数即可。所以有$\mathrm{f(k+1)\le f(k-5)+4}$，也可以写成$\mathrm{f(k+1)\le f(k-5)+f(6)-1}$。依据归纳假设，有$\mathrm{f(k+1)}\le\left\lfloor\frac{k+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k+2}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{k+2}{6}\right\rfloor+1$。再结合 3 中的结论，有$\mathrm{f(k+1)}=\left\lfloor\frac{k+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k+2}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{k+2}{6}\right\rfloor+1$。
8. 依据 6 和 7，对所有的$\mathrm{n}\ge 4$，$\mathrm{f(n)}=\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+1}{6}\right\rfloor+1$。

## K. 雪风酱是不会沉的！

题意回顾：

对于一个 n 元集合$\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$，将其划分成 m 个非空子集（m<n）。每个子集的难度值定义为该子集内最大值和最小值差的平

方。总难度定义为 m 个子集的难度值之和。试求最小的总难度值。

思路分析：

1. 首先，应当对$\{a_i\}$排序，尽量使值相近的为一组，这个结论的正确性容易证明。
2. 考虑 DP。令$dp_{i,j}$表示考虑以第 i 个点结束，共分成了 j 组的最小总难度值。枚举最后一次决策，考虑第 j 组是从哪一个点开始的，易得转移方程如下：$dp_{i,j}=\min\limits_{j-1\le t\le i}\{dp_{t,j-1}+(a_{t+1}-a_i)^2\}$。
3. 暴力转移 TLE，考虑斜率优化。假设在$t_1$处的决策比$t_2$处的决策好，则有：$dp_{t_1,j-1}+(a_{t_1+1}-a_i)^2<dp_{t_2,j-1}+(a_{t_2+1}-a_i)^2$。

化简得：$\left(dp_{t_1,j-1}+a_{t_1+1}^2\right)-\left(dp_{t_2,j-1}+a_{t_2+1}^2\right)\Big/2a_{t_1+1}-2a_{t_2+1}<a_i$

整体换元$y_{t_1}-y_{t_2}\big/x_{t_1}-x_{t_2}<a_i$。

## L. 魔法！真正的魔法！

题意回顾：

数轴上有 1~m 共计 m 个位置，其中一些位置不可以站人。有 n 个人，每人站一个位置。这 n 个人中有一个首领，除了首领以外的人不可以站在素数位置上。现在求所有其他人到首领的距离的最大值的最小值。无解输出“So Sad”。

思路分析：

注意到题目中“最大值最小”的要求，考虑二分答案。二分距离最大值的最小值为 L，枚举首领站的位置 x，在区间$[\mathrm{x}-\mathrm{L},\mathrm{x}+\mathrm{L}]$内将其余的 n-1 个人放下即可。预先处理可以站其他人的位置的个数的

前缀和，用前缀和作差可以在 O(1)的复杂度内算出$[x-L,x+L]$里有多少个位置可以站其他人，不妨计为 cnt。注意对 x 是否为素数进行分类，如果 x 是素数，则要求$cnt\ge n-1$，否则要求$cnt\ge n$。记得预先打好素数表。