

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

3、已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值, 并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

机器工程 081825015 张鸣威

解: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$

$\because n \rightarrow \infty \text{ 时 } \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \rightarrow 0, \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \rightarrow 0, \dots, \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \rightarrow 0$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) = 0$

(2) 解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$ 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e^{1/2}$

~~$\lim_{n \rightarrow \infty}$~~

~~$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$~~

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(3) 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} \right)$ 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1/2$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3} \right)$

$\therefore x \rightarrow 0, \cos x \rightarrow 1$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - \sin x}{x^3} \right)$

-7

(4) 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = 0$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} = x^{1/2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0$

2、解: $y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\frac{x}{3}} \sin x^2$

左右两边求导 $y' = \frac{1}{3 \tan \frac{x}{3}} + \frac{e^{\frac{x}{3}} \sin x^2}{2} + 2e^{\frac{x}{3}} \cos x^2$

(2) 解: $e^y - xy = c$ $e^{y(0)} - 0 \times y(0) = e$
左右两边求导 $y'(0) = y(0) = 1$

$e^y y' - y - xy' = 0$

$y' = \frac{y}{e^y - x}$

$y'(0) = \frac{y(0)}{e^{y(0)} - 0} = \frac{1}{e}$

3. 解: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$a = 0$$

不可导理由如下: $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) ~~关于x轴对称~~

~~且~~ $f'(x \rightarrow 0^-) \neq f'(x \rightarrow 0^+)$

~~f(0)~~ 左右两边的导数并不相等

、不可导

4. 解:

由 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ 得

$$f(t+5) = (t+5) f'(t+5)$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)] = (x+5)f'(x+5) - xf'(x)$$

$$-16$$

$$= 3x + 15 - 3x$$

$$= 15$$

5. 解: $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$

$$s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

$$令 s'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 0$$

解得 $t_1 = 1$, ~~或~~ $t_2 = 3$ 由图可知, $s'(t) < 0$ 为减速, $s'(t) > 0$ 为加速.

① 该同学在这段时间内有2次加速。
1次减速。在 $t \in [0, 1]$ 内加速。

在 $t \in [1, 2]$ 内减速。

$$令 s'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 0$$

解得 $t = 1$ 或 2

∴ $t = 1$ 或 2 时加速度为零