1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

刘琦　机械设计制造及其自动化　08082505 1

1. (1) 原式 $= \lim_{n\to\infty}[(n^2+2)^{-\frac{1}{2}} + (n^2+3)^{-\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{(n^2+n+1)^{-\frac{1}{2}}}]$

$= 1$　? -7

(2) 原式 $= \lim_{n\to\infty}(n\cdot\frac{1}{n+1})^{n+1} = \lim_{n\to\infty} n^{n+1}\cdot(\frac{1}{n+1})^{n+1}$

$= 0$　-8

(3) 原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \tan x\cos x}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

当 $x\to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$\therefore = \lim_{x\to 0}\frac{x\times\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$

(4) 原式 $= \lim_{x\to 0}(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)})$

洛 $= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

当 $x\to 0$ 时 $1-\frac{1}{1+x}\to 0$，$\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\to 0$

洛 $= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}} = \frac{1}{2}$

2. (1)

$y'y = \frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\sec^2\frac{x}{3}\times\frac{1}{3} + e^{x^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x^2 + e^{x^{\frac{1}{2}}}\times 2\sin x\cdot\cos x$

$\therefore y' = \frac{\frac{\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{3}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\times\frac{1}{3} + \frac{e^{x^{\frac{1}{2}}}\sin x^2}{2\sqrt{x}} + 2\sin x\cos x\, e^{x^{\frac{1}{2}}}}{\ln\tan\frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}}\sin x^2}$　-5　$= \frac{\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}} + \frac{e^{\sqrt{x}}\sin x^2}{2\sqrt{x}} + 2\sin x\cos x\, e^{\sqrt{x}}}{\ln\tan\frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}}\sin x^2}$

(2) $e^y\cdot y' - (y + xy') = e$

得 $y' = \frac{e+y}{e^y - x}$　$\therefore y'(0) = \frac{e+y}{e^y}$　-8

3. 由题意,得

$x\neq 0$, $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + x^2(-\sin\frac{1}{x^2})\times(-2x^{-3})$

$= 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x}$

当 $x\to 0$ 时，$x^2\to 0$，$\cos\frac{1}{x^2}$ 为有界函数

$\therefore x\to 0$ 时，$x^2\cos\frac{1}{x^2}\to 0$

又 $\because x=0$ 处连续　$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$f(x)=0$

即 $a=0$.

$x\neq 0$ $\therefore f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = 2x\cos\frac{1}{x^2} + 2\times\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2}$　-6

当 $x\to 0^+$ 时，$x\to 0^+$，$\cos\frac{1}{x^2}$ 为有界函数，$\frac{1}{x}\to\infty$

$\therefore f'(x)|_{x\to 0^+} = +\infty$

当 $x\to 0^-$ 时，$x\to 0^-$，$\cos\frac{1}{x^2}$ 为有界函数，$\frac{1}{x}\to -\infty$

$f'(x)|_{x\to 0^-} = -\infty$

$f'(x)|_{x\to 0^+} \neq f'(x)|_{x\to 0^-}$　即 $f(x)$ 不可导.

4.

$\because \lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$= f(x)\,dx$ -15

$= 15.$

5、由题意得

$S'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t-1)(t-2)$

令 $S'(t)=0$ 得 $t_1=1$，$t_2=2$

当 $t\in[0,1]$ 和 $t\in[2,3]$ 时，

$S'(t)>0$，为加速过程

当 $t\in[1,2]$ 时，$S'(t)<0$，为减速过程

$\therefore [0,1]$ 和 $[2,3]$ 为加速过程

$[1,2]$ 为减速过程

加速度加零是 $t=1$ 和 $t=2$ 时.