1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

霍浩然
电信5班
081525209

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解：~~令 n+1 = t~~

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}+\frac{1}{\sqrt{t+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{t+n}}\right)$

$\cancel{\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\right)}$

-8

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解：$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$\because$ 当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n+1}\to 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1$

-8

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\cdot x^3}$

$=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}$

$=\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$=\frac{(1-\cos x)}{x^2}$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}$ 属于 $\frac{0}{0}$ 型不定式

$\therefore$ 运用洛必达法则

$\therefore \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\frac{\sin x}{2x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ 属于 $\frac{0}{0}$ 型不定式

运用洛必达法则

$\frac{(x-\ln(1+x))'}{(x\ln(1+x))'}=\frac{1-(1+x)^{-1}}{\ln(1+x)+x\cdot(1+x)^{-1}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1+x)^{-1}}{\ln(1+x)+x\cdot(1+x)^{-1}}$ 属于 $\frac{0}{0}$ 型不定式

$\therefore \frac{(1-(1+x)^{-1})'}{(\ln(1+x)+x(1+x)^{-1})'}=\frac{(1+x)^{-2}}{(1+x)^{-1}+(1+x)^{-1}-x(1+x)^{-2}}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-2}}{(1+x)^{-1}+(1+x)^{-1}-x(1+x)^{-2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$

2. (1)

$y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$　$\because y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$　$\therefore y'=(\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2)'$

解：$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

$$y'=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+\frac{\sin x^2\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot 2x$$

$e^y-xy=e$

(2) 解：

解：$e^y\cdot y'-y-y'\cdot x=0$　　$e^y=e+xy$

$(e^y-x)y'=y$　　$y=\ln(e+xy)$

$y'=\frac{1}{e+xy}\cdot(y+y'\cdot x)=\frac{y+y'\cdot x}{e+xy}=\frac{\ln(e+xy)+y'x}{e+xy}$

~~$y'=e^y\cdot y\cdot y'-y+y$~~ ~~$y'=\frac{y}{e^y-x}$~~　$\therefore y'(0)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$　$\therefore y'(0)=\frac{1}{e}$

3. 解：$\because f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}$　~~$\frac{1}{x^2}=t$~~　~~$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{t}\cos t=\lim$~~

$x^2\cos\frac{1}{x^2}=\frac{\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ 属于 $\frac{0}{0}$ 型极限

即 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0=a$　$\because\left(\frac{\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)'=\frac{+\sin\frac{1}{x^2}\cdot 2x^{-3}}{-2x^{-3}}=-\sin\frac{1}{x^2}$

$\therefore a=0$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore f(x)$ 可导，

$\because f(0)=0$

$\therefore f'(0)=0$

4. 解：$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+5)-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

-16

5. 解：$s(t)=2t^3-9t^2+12t$

$s'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t-2)(t-1)$

$\because t\in[0,3]$

$\therefore$ 当 $t\in[1,2]$ 时该同学减速

$t\in[0,1]\cup[2,3]$ 时该同学加速

当 $t=1$ 或 $t=2$ 时该同学加速度为 0