1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

徐若伽 061025022

1.(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\dots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$=0$ -8

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ 令 $t=n+1$，则 $n=t-1$. ∴ 原式 $=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t$

∴ $\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$. ∴ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}$.

(3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\frac{x^3}{\sin x}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x}}{x^2}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\cancel{\lim_{x\to0}}\ \lim_{x\to0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$\cancel{=\lim_{x\to0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}}$

$\cancel{=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)+2}=\frac{1}{2}$.

2.(1) $y'=\frac{1+\tan^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot2$.

$=\frac{1+\tan^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2\cos x^2\right)$. -2

(2) 两边求导得: $e^y\cdot y'-(y+x\cdot y')=0$.

∴ $y'=\frac{y}{e^y-x}$ ∵ 当 $x=0$ 时. 当 $e^y-xy=e$ 得 $y=1$.

∴ $y'(0)=\frac{1}{e-0}=\frac{1}{e}$.

∴ $y'(0)$ 的值为 $\frac{1}{e}$.

3、解：∵ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 令 $t=\frac{1}{x^2}$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\cos t = 0$.

∴ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

又 ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. ∴ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$.

∴ $a=0$.

−6

∵ $\frac{d(x^2\cos\frac{1}{x^2})}{dx} = 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处无意义

即使 ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 仍不可导

4、∵ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$. ∴ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ 且可知在 $x\to+\infty$ 的过程中. $f(x)$ 增调递增

−15

∵ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$.

∴ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+5)-f(x)] = 5\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right] = 5\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 15$.

5、解：$s'(t) = 6t^2-18t+12$.

由 $s'(t)=0$ 得 $t=1$ 或 $t=2$.

由 $s'(t)>0$ 得 $t\in[0,1]$. $[2,3]$.

由 $s'(t)<0$ 得 $t\in[1,2]$.

∴ 共有 2 次加速过程，时间段为 $[0,1]$ 和 $[2,3]$

有 1 次减速过程，时间段为 $[1,2]$

加速度为零的时刻为 1 和 2.