1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

韩[illegible]嫣 08135030

1.(1) 解: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$ −8

$=0$

(2) 解: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)^{n+1}=1$ −6

(3) 解: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\cdot\sin x+\sin x}{6x}$

$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+\cos x}{6}=\frac{1}{2}$

(4) 解: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2$

解: $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot 2x\cdot\cos x^2$ −2

(2) 解. $e^y-xy=e$ ∴ $e^y-xy-e=0$

令 $dy=e^y-xy-e$

$\frac{dy}{dx}=y'e^y-\frac{dy}{dx}x$ 即 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'e^y}{1+x}=y'(x)$

$y'(0)=y'e^y$ −8

3. 解: ∵ 在 $x=0$ 连续

∴ 在该点有 $x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=a$ ∴ $a=0$

$f'(x)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\cdot(-2)\frac{1}{x^3}$ −15

$=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$

∵ $x=0$ $f'(x)$ 不成立

∴ 不可导

在 $x=0$ 处

4. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)] = 5\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right] = 5\lim\limits_{x\to\infty}f'(x) = 5\times3=15$

-15

5. 解：$s(t)=2t^3-9t^2+12t$

$s'(t)=6t^2-18t+12$ 为加速度

令 $s'(t)=0$ 则 $t_1=1$，$t_2=2$

$\because t\in[0,3]$，$t\in[0,1]$ 时 $s'(t)>0$

$\therefore t\in[0,1]$ 时为加速

$t\in[1,2]$ 时 $s'(t)<0$

$\therefore$ 为减速

$t\in[2,3]$ 时 $s'(t)>0$

$\therefore$ 为加速

综上该内容在这段时间内有2次加速，1次减数

且在 $t=1$ 和 $t=2$ 时加速度为0.