1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

朱勋振

08082505?

1.(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}+\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}+\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(n-1)\cdot 1=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1.$ −6

(2) 令 $t=n+1$ 则 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^t=\lim_{t\to\infty}(1-\frac{1}{t})^t$ 令 $\varphi=-\frac{1}{t}$，当 $t\to\infty$ 时，$\varphi\to 0$.

$\therefore \lim_{t\to\infty}(1-\frac{1}{t})^t=\lim_{\varphi\to 0}(1+\varphi)^{-\frac{1}{\varphi}}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{1}{(1+\varphi)^{\frac{1}{\varphi}}}=\frac{1}{e}$

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\sec x-\sin x}{x^3}\right)$ 且 $\lim_{x\to 0}$，当 $x\to 0$ 时 $\sin x\to x$，$\sec x-1\to x$

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\sec x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sec x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ −8

(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x+1}{x}\ln(x+1)+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})\ln(x+1)+1}$ −4

$=1$

2.(1) $y'=\frac{\frac{1}{3}\sec^2 x}{\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot 2x\cdot\cos x^2=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}\sin x^2}{2x}+2x\cos x^2\right)$

(2) 左、右分别求导

$y'e^y-y-xy'=0$，$(x-e^y)y'=-y$，$y'=\frac{y}{e^y-x}$，又当 $x=0$ $e^y-0=e$，$e^y=e$.

$\therefore y'(0)=\frac{y}{e}$ −2

3. $\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore$ ~~$x^2\cos\frac{1}{x^2}=a$~~ $f(0)=f(0)$ $\therefore a=0$? −9

可导，$f'(0)=0$?

4. $\because f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 当 $\Delta x=5$.

$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\cdot 5=15$ −16

5. $S'(t)=6t^2-18t+12=6(t-2)(t+1)$，根据图象 有 次加速，1次减速

加速度为0是 $t=2$ 时刻 −9