1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

何俊杰/何俊杰 080825015

(1) 解:原式= .

−8

(2) 解:原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})^{n}}\right)$

$=\frac{1}{e}$

(3) 解原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^3}{x^3}\right)$

$=1$.   −8

(4) 解原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{\ln(x+1)\cdot x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\cdot\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$=\frac{1}{2}$

二 2 (1) 解:两边同时对x求导

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot(\tan\frac{x}{3})'+(e^{\sqrt{x}})'\cdot\sin x^2+(\sin x^2)'\cdot e^{\sqrt{x}}$

$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\csc\frac{2x}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2+\cos x^2\cdot 2x\cdot e^{\sqrt{x}}$

−2

(2) ~~两边同时取对数 则原式为: y=1 y=~~

当x=0时则 $e^y=e\Rightarrow y=1$

两边同时对x求导 则 $e^y\cdot y'-(y+y'x)=0$ 又 $e^y=xy+e$.

$\therefore y'=\frac{y}{x+e^y}=\frac{y}{xy+x+e}$

当 $y'(0)=\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$

3. 解：由题可知 $f(x)=x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}\ (x\neq 0)$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 则当 $x\to 0$ 时 $x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=a$.

~~当 $x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=\frac{\cos\frac{1}{x^2}}{}$ 记 $t=\frac{1}{x^2}$~~

~~则当 $x\to 0$ 时 $\frac{1}{x^2}\to 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t}{t}\right)=1-\frac{1}{2}$~~

$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}\right)=0$

$\therefore a=0$

−9

$f'(x)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^3}\cdot 2$

$=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+2\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}$

$=2x\left(1-\sin\frac{1}{x^2}\right)+2\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}$

$=2x+\left(2x-\frac{2}{x}\right)\sin\frac{1}{x^2}$

4. 解：由拉格朗日中值定理可知 条件？

$\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=f'(\xi)$ 其中 $x<\xi<x+5$

又 $x\to+\infty$ 时 则 $f'(\xi)\to f'(x)$

$\therefore \lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=5\cdot f'(\xi)=15$.

−4

5. 解：$\because s(t)=2t^3-9t^2+12t$.

$s'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t^2-3t+2)$

$=6(t-1)(t-2)$

当 ~~$0<t<1$~~ 时

① 当 $t\in[0,1)\cup(2,3)$ $s'(t)>0$ 为加速过程

② 当 $t\in(1,2)$ $s'(t)<0$ 为减速过程

③ 当 $t=1$ 和 $t=2$ 时 $s'(t)$ 为零 即加速度为零.

综上所述

$\therefore$ 有2次加速，1次减速. 在 $t=1$ 与 $t=2$ 时加速度为零.

且在 $[0,1)$ 与 $(2,3)$ 时加速 在 $t\in(1,2)$ 时减速