1、求极限. （32 分）

（1） $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2） $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3） $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4） $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$，求 $\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

夏云勇 08082076

1. 解：(1) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1.$ −7

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\cancel{\ln n^{n+1}}\ \ln n^{n+1}-\ln(n+1)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)[\ln n-\ln(n+1)]$

−8 $=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\times\left(\frac{\tan x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\times(1-1)\right]=1$ −8

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}=\frac{0-0}{0\times 0}=1.$ −8

2. (1) 解：$y'=(\ln\tan\frac{x}{3})'+e^{\frac{1}{2}x}\sin x^{2\,\prime}$

$=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\times\tan'\frac{x}{3}+\frac{1}{2}e^{x\prime}\sin x^2+\frac{1}{2}\cdot e^{x}\cdot\sin x^{2\,\prime}$

$=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}\cdot e^{x}(\sin^2 x+\cos^2 x\cdot 2x).$ −8

(2) 解：对 $e^y-xy=e$ 两边同时求导.

$e^y\cdot y'-(x'y+x\cdot y')=e'$

$e^y\cdot y'-(y+xy')=e'$

$e^y\cdot y'-y-x\cdot y'=0.$

$(e^y-x)y'=y.$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

$\therefore y'(0)=\frac{y}{e^y-0}=\frac{y}{e^y}.$ −2

3. 解：∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

∴ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

∵ $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2} = 0$.

∴ $a=0$.

又当 $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 时，$f'(x) = x^{2\prime} \cos\frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos x^2}\right)'$ -6

$= 2x \cdot \cos\frac{1}{x^2} + x^2 \cdot (-\sin\frac{1}{x^2}) \times (-\frac{2}{x^3})$

$= 2x\cos\frac{1}{x^2} + \sin\frac{1}{x^2} \times \frac{2}{x}$

~~当 $f(0)$ =~~ 当 $x=0$ 时，$f(0)=0$.

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

4. 解：由题意得 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3$.

当 $\Delta x = 5$ 时，$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+5) - f(x)}{5} = 3$.

∴ $\cancel{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$ $\lim_{x \to +\infty} [f(x+5) - f(x)] = 15$. -16

5. 解：由题意得 $s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$.

$= (t-2)(6t-6)$

令 $s'(t)=0$，则 $t=2$ 或 $t=1$.

$s''(t) = 12t-18$

令 $s''(t)=0$，则 $t=1.5$.

当 $0<t<1$ 时，$s'(t)>0$，该同学在加速

当 $1\le t\le 2$ 时，$s'(t)<0$，该同学在减速.

当 $2<t\le 3$ 时，$s'(t)>0$，该同学在加速. -3

综上所述，该同学加速2次，减速1次，在 $t=1.5$ s 时 加速度为0.