1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

牛好

电子信息类

081525213

1.(1)解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}\right)=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}<\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

∴ 由夹逼准则得.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) 解:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1}$

$=e^{-1}$

(3) 解:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}$

(4) 解: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)^2}$

$=\frac{1}{2}$

2.(1)解: $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}+2\sin x\cos x\,e^{\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin^2 x$

−2

(2) $e^y-xy=e$

$e^y\cdot y'-xy'-y=0$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

当 $x=0$ 时.

$e^y=e$ ∴ $y=1$

∴ $y'(0)=\frac{1}{e^1-0}=\frac{1}{e}$

3.解: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$

当 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

∴ $f(0)=0$ 即 $a=0$

?

~~f(x)在x=0处不可导~~

理由: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$f'(0)=0$

−8

4.解: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\Delta y = 3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\Delta x$ -14

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\Delta y = 3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}5 = 15$

5.解: $S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$S'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

$t\in[0,3]$ 当 $t=1$或2时 加速度为0

当$x\in[0,1)\cup(2,3]$ $S'(t)>0$ 为加速过程

当$x\in(1,2)$时 $S'(t)<0$ 为减速过程.

∴有2次加速过程 $t\in[0,1)$ 和 $t\in(2,3]$

有1次减速过程 $t\in(1,2)$

$t=1$或2时 加速度为0.