

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

$$3、\text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值, 并讨论此时 } f(x) \text{ 在}$$

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

邵英强 080325042 自动化

1. (1) $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = 0$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + 1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n+1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + 1 \right)^{n+1} = e$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+1} \right)^{n+1} = 0$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = e$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)$

$= 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^3 \cos x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}$

2. (1) $y' = \left(\ln \tan \frac{x}{3} \right)' + (e^{\sqrt{x}})' \sin x^2 + e^{\sqrt{x}} (\sin x^2)'$

$= \frac{1}{3 \tan \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3}} + e^{\sqrt{x}} \left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}} + 2x \cdot \frac{\cos x^2}{\cos x^2} \right)$

2. (2) $e^y \cdot y' - (x'y + xy') = 0$

$y' = \frac{x'y}{e^y + x}$ 当 $x=0$ 时, $y=1$

$y' = \frac{y}{e^y + x} \therefore y'(0) = \frac{1}{e}$

3. $f(x) = 2x \cdot \cos \frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \left(-\sin \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right)$

$= 2x \cdot \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2} = 0$

~~f(0)~~

-16

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+5) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

当 $f(x) = 3x$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$ — 16

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+5) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+15) - \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 15 = 15$$

$$5. s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

$$\text{当 } t=1 \text{ 或 } t=2 \text{ 时 } s'(t) = 0$$

~~在 $[0, 1]$ 时 $s'(t) > 0$~~

在 $[0, 1)$ 时 $s'(t) > 0$ 在 $(1, 2)$ 时 $s'(t) < 0$

在 $(2, 3]$ 时 $s'(t) > 0$

\therefore 在 $t \in [0, 3]$ 时, 该同学有 2 次加速, 1 次减速.

在 $[0, 1)$ 和 $(2, 3]$ 时间段内加速.

在 $(1, 2)$ 时间段内减速.

加速度为 0 的时刻为 $t=1$ 和 $t=2$ 时.