1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 $y'$.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 $a$ 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

杨磊
030325073
自动化

1、解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2}}\right)=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+n^2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+n^2}}+\cdots+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{2n^2}}\right)=1$

$\because \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+n^2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+n^2}}+\cdots\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)<\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)$

$\therefore$ 为1

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{-1}=e^{-1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}\right]$

$=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$

−8

2、解：(1) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\right)\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot2x$

$=-\frac{1}{3\tan^2\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{4\sqrt{x}}+\cos^2x\cdot2x\right)$ −3

(2) $e^y-xy=e$

$\therefore e^y\cdot y'-y-y'\cdot x=0$

$\therefore y'=\frac{-y}{e^y-x}$

$\therefore y'(0)=\frac{y}{e^y}$ −3

3、由题知

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

$\because$ 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore a=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ −8

$f'(x)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\left(-2\cdot\frac{1}{x^3}\right)$

$=2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$

且 $\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=2$

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=2$

$\because \lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$

$\therefore$ 可导，$f'(0)=2$

4、

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+5)-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

−16

5、解：$S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$S'(t)=6t^2-18t+12$，$t\in[0,3]$

$S'(t)=0$ 时

$t=1,2$

$\therefore$ 有两次加速一次减速

加速区间为 $[0,1)$，$(2,3]$

减速区间为 $(1,2)$

加速度为零的时刻为 1s 与 2s