1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

丁宇轩
电信6班
081525210

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解 原式 $=1$

-6

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})}$

$=1$

-4

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\tan x\cos x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

-4

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(1+x)}\overset{洛必达}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}}\overset{洛必达}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{(x+1)^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$

$=\infty$

2. (1) $\because y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$\therefore y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^2$

$+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot2x$

$=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}\sin x^2}{2\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot2x$

(2) $e^y-xy=e\Rightarrow e^y-xy-e=0$

$e^y\cdot y'-y-xy'=0$

$e^y y'-xy'-y=0$

$(e^y-x)y'=y$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

$\therefore y'(0)=\frac{y}{e^y}$

又 $\because$ 当 $x=0$ 时

$e^y=e$

$y=1$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{e}$

3. ∵ $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0\end{cases}$ 在x=0处连续

∴ ~~当x=0时~~ $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$

∴ $a=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} x^2\cos\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$ −8

∴可导

$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2(-\sin\frac{1}{x^2})\cdot(-2x^{-3}) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

∴ $f'(0)=0$

4. ∵ 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=3$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[5\cdot\frac{f(x+5)-f(x)}{x+5-x}]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[5\,\frac{f(x+5)-f(x)}{(x+5)-x}]$ −15

$=\lim\limits_{x\to\infty} \cancel{5\times3}\ 5\times3$

$=15$

5、$S(t)=2t^3-9t^2+12t$ $t\in[0,3]$

∴ $S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $6t^2-18t+12=0$ ~~S(0)=0 S(3)~~

$(t-1)(t-2)=0$

∴ $t=1$ 或 $t=2$

∴

t	[0,1)	1	(1,2)	2	(2,3]
S'(t)	+	0	−	0	+
S(t)	↗		↘		↗

~~解~~ ∴综上所述有2次加速 一次减速

加速分别在[0,1)和(2,3]

减速在(1,2)

加速度为0的时刻为1和2.