1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

王昊宇
080825046

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

-8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

-8

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$= \cancel{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}}$

当$x\to 0$时 $\tan x\sim\sin x\sim x$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-x}{x^3}\right)=0.$

-6

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

当$x\to 0$时

$\ln(1+x)\sim x$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$

$=0.$

-6

2.(1) ~~设~~

$y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+2x\cos x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{3\tan\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\sin x^2+2x\cos x^2\right)$

-2

(2)

-10

3. 解 ∵在$x=0$处连续

即 $a=x^2\cos\frac{1}{x^2}\Big|_{x\to 0}$

当x趋向于0^+时

x^2属于无穷小量, $\cos\frac{1}{x^2}$属于有界量

$\therefore x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}$ 为无穷小量

即 $x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=0$

同理 x趋向于x^-时

$x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\therefore a=0$

-6

设∵ $f(x)$在$x=0$处连续且 $\mathring{U}(x)$有定义

$\therefore f(x)$在$x=0$时可导

$f'(x)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot -\sin x^{-2}\cdot -2x^{-3}$

$=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$

∵ $x\neq 0$, 而设 $x=0$ 时可导

∴ 假设不成立

∴ $f(x)$在$x=0$时不可导.

4. 解: 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续

在$(-\infty,+\infty)$可导

则根据拉格朗日中值定理 得

-2

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

$b,a\in(-\infty,+\infty)$

$\therefore f(x+5)-f(x)=f'(x)(x+5-x)$

$=15$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15.$

5、解: 设 $S(t)=y=2t^3-9t^2+12t$, $t\in[0,3]$

则 $y'=6t^2-18t+12$

$=6(t^2-3t+2)$

$=6(t-1)(t-2)$

开口向上 与x轴交点为$x=1$或$x=2$

∴ 在$[0,1]$上加速 在$[1,2]$上减速, 在$[2,3]$上加速

两次加速 一次减速.

加速度为零即 $y'=0$

∴ 当 $t=1$, $t=2$时

加速度为0.