1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

08032506b

张大丹

1、求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$\because \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} > \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+2}}=1$

由夹逼定理可知

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)-1}{n+1}\right]^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

令 $t=n+1$

$=\lim\limits_{t\to 0}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}=e$

-2

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}(1-\cos x)}{x^3}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 1\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot x}{x^3}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\cdot x}\right)$

该极限为"$\frac{0}{0}$"型

$\therefore=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}}\right)$

还为"$\frac{0}{0}$"型

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

2、求导数

(1) 设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\left(\tan\frac{x}{3}\right)'+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+2\cancel{\sin x}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2$

$=\frac{2}{\sin\frac{2x}{3}}+\cancel{e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\sin x^2+2\sin\right.}\ \cancel{e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x}$

$e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\sin^2 x+2\cos x^2\right)$

-4

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$

$e^y-xy=e$

$\cancel{y=}$ 当 $x=0$ 时 $e^y=e$

解得 $y=1$

两边同时求导

$e^y\cdot y'-y-x\cdot y'=0$

$y'(e^y-x)=y$

$y'(0)=\frac{y}{e^y}$

代入 $y=1$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{e}$

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0 \quad \lim\limits_{x\to 0^-} x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=0$

若使函数 $f(x)$ 连续，故 $a=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2\cdot\frac{1}{\cos x^2}=0$

当 $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}$，$x\neq 0$ 时　　−6

$x\to 0$ 时，$\cos\frac{1}{x^2}$ 在 $[-1,1]$ 来回振荡

∴ ~~$x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处为振荡间断点~~，无法确定函数 $f(x)$ 在 ~~$f(0)$~~ $x=0$ 附近的斜率

~~故不可导~~ ~~故不可导.~~　　$x=0$ 为 $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 的振荡间断点.

故不可导

4. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=f'(x)$

∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=5f'(x)$　　∴ $\lim[f(x+5)-f(x)]=15$

∵ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$　　−8

∴ $f'(x)$ 为常数3

5. 设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$，试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.

$S'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t^2-3t+2)$

$=6(t-2)(t-1)$

t	$[0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,3]$
$S'(t)$	+	0	−	0	+
$S(t)$	↗		↘		↗

当 $t\in[0,1)$ 时　$S'(t)>0$　$S(t)$ 单调递增

$t\in(1,2)$ 时　$S'(t)<0$　$S(t)$ 单调递减

$t\in(2,3]$ 时　$S'(t)>0$　$S(t)$ 单调递增

$S'(1)=0$　　$S'(2)=0$

该同学有两次加速过程，一次减速过程

加速过程 $t\in[0,1)$ 与 $t\in(2,3]$

减速过程 $t\in(1,2)$

加速度为零是 $t=1$ 和 $t=2$ 时.