1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

朱静茜 06102504l 物理2班

1. (1)

-8

(2). $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

由 $\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$ ∵ $n\to\infty$, ∴ $n+1\to\infty$

∴ $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$

-6

(3). $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

= 由洛必达法则: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x}$

= $\lim_{x\to 0}$

-8

(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

$= -\infty$

-8

2. (1). $y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3} + e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2 + e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

$= \frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}} + e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2 + 2x\cdot\cos x^2\right)$

(2) 对方程两边求导可知.

$e^y\cdot y' - (y+xy') = 0$.

$y' = \frac{y}{e^y - x}$.

当 $x=0$ 时, $y=1$.

∴ $y'(0) = \frac{1}{e}$

3. $\lim_{x\to 0} x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ ∵ $x\to 0$, ∴ $\frac{1}{x^2}\to\infty$. 令 $t=\frac{1}{x^2}$ 即 $t\to\infty$.

∴ $\lim_{t\to\infty}\frac{\cos t}{t} = 0 = a$ ∴ $a=0$.

∵ $(0)'=0$. $\left(x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}\right)' = 2x\cdot\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$

当 $x\to 0$ 时, $\left(x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}\right)' = 0$.

∴ $f'(0) = 0$.

10

4、 $\because \lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$. ... $\therefore f(x)\to 3x$.

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{x+5-x}\right]=3$ $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to+\infty} f(x+5)-f(x)=15$.

-16

5、$S(t)=2t^3-9t^2+12t$, $t\in[0,3]$.

$a=S'(t)=6t^2-18t+12$.

令 $a=0$. $6t^2-18t+12=0$

$t_1=1$ $t_2=2$. a. ∩ ∪

$\therefore$ 在 $t\in[0,1]$, $[2,3]$ 时处于加速.

$t\in(1,2)$ 减速.

即有2次加速过程，1次减速过程.

当 $t=1$, $t=2$ 时，加速度为 0.