1、求极限．（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数．（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' ．

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由．（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

08082505 7. 张宇洋

1. (1). $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) \Rightarrow 0.$

−8

−8

(2). $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(n)^n}{(n+1)^n} \Rightarrow 0.$

(3). $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2} \Rightarrow 0.$ −6

(4). $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1+x}{x}\cdot\ln(1+x)+1} \Rightarrow 1.$ −5

2. (1). ∵ $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2$. ∴ $y' \Rightarrow \frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$ −2

$\Rightarrow y'=\frac{1}{\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}}\sin x^2+2xe^{\sqrt{x}}\cos^2 x$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+2x\cos^2 x\right).$

(2). ∵ $e^y-xy=e. \Rightarrow y=y(x).$ ∴有 $e^y - y'=0$.

∴ $y'=e^y$. ∴ $y'(0)=1.$ −10

3. ∵ $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续. ~~当 $x\to 0^-$ 时. $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}\to$~~

由题易知. $f(x)$关于 y 轴对称. 当 $x\to 0$ 时. $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}\Rightarrow 0$. 当 $x\neq 0$ 时.

∴ 当 $x=0$ 时 $f(x)=0=a$. 即 $a=0$. $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$.

∴ ∵ $f(0)=0$ 且关于 y 轴对称. 故可导且 $f'(0)=0$.

−7

4. $\because \lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$.

$\because f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

又当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)=3$.

即 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3$.

$\therefore$ 当 $\Delta x\to 5$ $\therefore \frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3$. $\therefore f(x+5)-f(x)=15$.

$\therefore \lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$.

-15

5. $\because S(t)=2t^3-9t^2+12t$. $\because t\in[0,3]$.

$\therefore S'(t)=6t^2-18t+12$. 令 $S'(t)=0$ 时. $\therefore 6t^2-18t+12=0$.

$\therefore t=1$ 或 2. $\therefore$ 当 $t\in[0,1]$ 和 $[2,3]$ 时，$S(t)>0$. $S(t)$ 单调递增，

当 $t\in[1,2]$ 时，$S(t)<0$. $S(t)$ 单调递减。

$\therefore$ 速度先增后减最后又增大。在 $t\in[0,1]$ 和 $[2,3]$ 时加速.

在 $t\in[1,2]$ 时减速。当 $t=1$ 和 2 时，加速度为 0.