1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

081525122 舒智文 电信3班

1、(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=$

−8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

当$n\to\infty$时，$\frac{n}{n+1}\to 1$，$n+1\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)'-1\right]\left[n+1\right]}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln 1}=\lim\limits_{n\to\infty}1$

$=1$

−7

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sec x-\cos x}{3x^2}\right)$

$=0$

−8

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(1+x)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{1+x}+\ln(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$

$=-\infty$

−7

2、(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+2x\cos x\cdot e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}$

$=\frac{\sec\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\left(2x\cos x+\frac{\sqrt{x}}{2x}\right)e^{\sqrt{x}}$

−6

(2) $e^y-xy=e$ 对两边关于x求导

$e^y\cdot y'-y-xy'=0$ $\therefore y'=\frac{y}{e^y-x}$

令$x=0$ $\therefore e^y=e\Rightarrow y_{(0)}=1$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{1-0}=1$

−2

3、$\because$在$x=0$处连续、

$\therefore\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)=f_1(0)=0$ $\therefore a=0$

~~$x\to 0$时，$f(x)=0$~~ $f(x)=$ $y=x^2\cos\frac{1}{x^2}$，$x\neq 0$

~~$x\to 0^+$~~ 令$\frac{1}{x}=t$，$x\neq 0$，$t\neq 0$

$\therefore y'=2x\cos\frac{1}{x^2}-x^2\sin\frac{1}{x^2}(-2x^{-3})$

$=2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$

$\therefore\frac{2}{t}\cos t^2+2t\sin t^2$

① $x\to 0^+$，$\frac{2}{t}\cos t^2+2t\sin t^2\to+\infty$

② $x\to 0^-$，$\frac{2}{t}\cos t^2+2t\sin t^2\to-\infty$

$\therefore$在 0处不可导.

−8

4, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cancel{\dfrac{(f(x+5)^2)^2-[f(x)]^2}{f(x+5)+f(x)}}\right]$

~~lim~~

$$=\lim_{x\to+\infty} f(x+5)-\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} f(x+5)-3$$

-16

5, $t=0$, $s(t)=0$

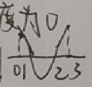
$t=3$, $s(t)=9$

$s'(t)=6t^2-18t+12$

令 $s'(t)=0$ $\therefore 6(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t_1=1$, $t_2=2$,

t_1, t_2 时加速度为0,

亦作 $s'(t)$ 草图 

$\therefore t\in[0,1]$ 和 $[2,3]$ 时,加速,即2次加速

~~$t\in[0,1,2]$~~ $t\in(1,2)$ 时,减速,即1次加速

$t=1$ 和 $t=2$ 时,速度为0