1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

张自红　081525211

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

根据夹逼准则，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=0$

同理，得，其它极限也为0　　-8

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)(-1)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\ x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\ x^3}$

等价代替

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\frac{x^2}{2}}{\cos x\ x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}$

$\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

$=0$　　-8

2. (1) $y=\frac{1}{3\tan\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2 e^{\sqrt{x}}$

(2) 由题意，得

对 $e^y-xy=e$ 左，右都导

$e^y y'-y-xy'=0$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

$y(0)=1$

$y'(0)=\frac{1}{e}$

3. 由题意，得 当 $x=0$ 处连续

∴ 当 $x=0$ 时，$x^2\cos\frac{1}{x^2}=a=0$

∵ $f(0)=0$，图象是平的

∴ 可导

$f'(0)=0$

-12

4、由题意，得

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[f(x+5)-f(x)]5}{5}$

$5\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+5)-f(x)}{5}$

$=15$

—16

5、由题意，得

$s(t)=2t^3-9t^2+12t \quad t\in[0,3]$

$s'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t-1)(t-2)$

作图

由图可推断s路径

$t\in[0,1)$ 前进

$t\in[1,2]$ 后退

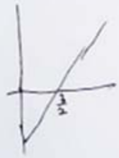
$t\in[2,3]$ 前进

根据导数性质可知

$s'(t)$ 为速度

对 $s''(t)=12t-18$

作图



根据导数性质可知

$s''(t)$ 为加速度

∴有1段加速

1段减速

加速度为0时刻为 $t=\frac{3}{2}$ 时

—8

s(t)为速度函数