

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

$$3、\text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值, 并讨论此时 } f(x) \text{ 在}$$

$x=0$  处是否可导, 若可导, 则求出  $f'(0)$ ; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为  $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ , 时间  $t \in [0, 3]$ . 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

叶舒婷 电子信通专业 081525091

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}) = 0$  -8

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+1})^{n+1} = 1$  -8

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\tan x - \sin x}{x^2}) = 0$  -8

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0$  -8

2(1) 解:  $y' = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} \sin x^2 + e^{\frac{x}{2}} 2x \cos x^2$

$y' = \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}} \sin x^2 + 2x e^{\frac{x}{2}} \cos x^2$  -2

12) 解:  $e^y y' - y - x y' = 0$

$y' (e^y - y) = 0$

$y' = \frac{y}{e^y}$  -5

3 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 1$

$\therefore n=1$

$\therefore f(0) \neq$  -16

4 解:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)] = 5f'(x)$

$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  -16

$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)] = 15$

5 解:  $S'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow t=1$  或  $2$ .

$\therefore$  当  $t \in [0, 1)$ ,  $S(t)$  递增

当  $t \in [1, 2)$ ,  $S(t)$  递减

当  $t \in [2, 3]$ ,  $S(t)$  递增

故同学在这段时间内有 2 次加速过程, 1 次减速过程.

在  $[0, 1)$  上加速, 在  $[1, 2)$  上减速, 在  $[2, 3]$  上加速.

加速度为零的时刻为  $t=1$  或  $2$ .