

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

$$3、\text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值, 并讨论此时 } f(x) \text{ 在}$$

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

李俊杰 机械2班 080825060

解: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}})$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} \approx 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \approx 1$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}) = 1$

解: (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+1})^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^{n+1}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+1})^{n+1} = 1$

解: (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\frac{1}{\cos x} - 1)}{x^3}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cdot \cos x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x} = \frac{1}{6}$

解: (4) $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{n(1+x)} - \frac{1}{x}]$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - n(1+x)}{n(1+x) \cdot x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - n(1+x)}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} [1 - \frac{n(1+x)}{x}]$

$= -\infty$

2. 解: (1) $y = \ln \tan \frac{x}{2} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2$

$y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \cos x^2 + \sin x^2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

解: (2) $e^x - xy = e \quad \frac{e^x - e}{x} = x$

3. 解: \because 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 0 \quad \therefore a = 0$

是可导 $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3}$

$= 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} (2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x} \sin \frac{1}{x^2})$

$= \lim_{x \rightarrow 0} 2(x \cos \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^2})$

$\therefore f'(0) = 0$

是不可导的, 因为在 $x=0$ 处连续, 但它不是平滑的曲线, 由图可知, 所以是不可导的。

4. 解: 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]$

$$\Delta (y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+5) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\Delta y' = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+5) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+5) - 3$$

-16

5. 解: $\because s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$

$$s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

$\because 6t^2 - 18t + 12 = 0$ 时 $t_1 = 1s$ \therefore 在 $1s$ 时加速度为 0 .

$t_2 = 2s$ 在 $2s$ 时加速度为 0 .

\therefore 该质点有 2 次加速过程和 1 次减速过程.

\because 当 $t = 0$ 时 $s(t) = 0$

$t = 1$ 时 $s(t) = 5$

$t = 2$ 时 $s(t) = 4$

$t = 3$ 时 $s(t) = 9$

\therefore 在 $0 \sim 1$ 时与 $2 \sim 3$ 时为加速过程

在 $1 \sim 2$ 时为减速过程.