1、求极限. （32分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16分）

夏天香　物理学4班　061025111

1. (1) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

设 $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$g(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}\cdot n$ ⏞n

$h(n)=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}=\dfrac{n}{\sqrt{(n+1)^2}}=\dfrac{n}{n+1}$

$\because h(n)\le f(n)\le g(n)$ 又 $\lim_{n\to\infty}g(n)=1$, $\lim_{n\to\infty}h(n)=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}f(n)=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\dfrac{1}{e}$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac12 x^2}{x^3}=\dfrac12$

(4) $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=0$　-3

2. (1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$, 求 y'

$y'=\dfrac{1}{\tan\frac x3}\sec^2\frac x3\cdot\dfrac13+e^{\sqrt x}\sin x^2+e^{\sqrt x}\cdot2\sin x\cos x=\dfrac{1}{3\sin\frac x3\cos\frac x3}+e^{\sqrt x}(\sin x^2+\overset{\sin 2x}{2\sin x\cos x})$　-4

(2) $e^y-xy=e$, $y=y(x)$, $y'(0)\Rightarrow e^y=e+xy$ $\therefore \dfrac{1+x}{xy}=1$ $\quad y'=\dfrac{-1}{(x)^2}$

两边同时取对数: $y=\ln e\cdot\ln^{xy}=\ln^{xy}$　$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{xy}\cdot\left(\dfrac{dy}{dx}+x\dfrac{dy}{dx}\right)$ $\therefore y=\dfrac{1+x}{x}$ $\quad y'(0)=-\infty$　-6

3. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2}&x\neq0\\a&x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求a

$\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$ $\therefore a=0$

$f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot(-\sin\frac{1}{x^2})\cdot(-\frac{2}{x^3})$

$\qquad =2x\cos\frac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to0^+}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0=\lim_{x\to0^-}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$ $\therefore$ 可导, $f'(0)=0$　-4

4. $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=3$, 求 $\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

假设 $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$　$\therefore f(x+5)-f(x)=\dfrac{3(x+5)}{x+6}-\dfrac{3x}{x+1}=\dfrac{3(x+5)(x+1)-3x(x+6)}{(x+6)(x+1)}=\dfrac{15}{x^2+7x+6}$

$\therefore f(x+5)=\dfrac{3(x+5)}{x+6}$　$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{15}{x^2+7x+6}=0$

-16

$f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$　$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=3$ $\quad f'(x)=3$ $\quad\lim_{x\to+\infty}f(x+5)-\lim_{x\to+\infty}f(x)=3-3=0$

5. $S(t)=2t^3-9t^2+12t$, $t\in[0,3]$　$\therefore t=2$ 或 1

$\therefore S'(t)=6t^2-18t+12$　　当 $t=1$ 或 2 时, 加速度为零

令 $S'(t)=0$ $\therefore 6t^2-18t+12=0$ $\therefore t^2-3t+2=0$

$\qquad\qquad (t-2)(t-1)=0$

当 $t\in[0,1)$ 和 $(2,3]$ 时, $S'(t)>0$ 即为加速时间段, 有2次加速

当 $t\in(1,2)$ 时, $S'(t)<0$, 即为减速时间段, 有1次减速