1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

1、

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$ −7

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}}$

$=\frac{1}{e}$

(3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x}$

$=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\ln(1+x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2\ln(1+x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2}$

$=\frac{1}{2}$

2、

(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot2x$ −4

(2) $y=y(x)$

$\therefore y'=y'(x)$

由隐函数求导可得

$e^y\cdot y'-y-xy'=0$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

$y'(x)=\frac{y}{e^y-x}$

$y'(0)=\frac{y}{e^y}$ −2

3、若使 $f(x)$ 连续

则当 $x=0$ 时

$a=x^2\cos\frac{1}{x^2}$

$a=0$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\lim_{x\to0}0=0$

左极限 = 右极限

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处上可导 −8

(4) $\because \lim_{x\to+\infty}f'(x)=3$

可得 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3$

$\frac{1}{5}\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=3$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$

−16

(5) $S(t)=2t^3-9t^2+12t \quad t\in[0,3]$

$S'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t-1)(t-2)$

令 $S'(t)=0$ 得 $t_1=1 \quad t_2=2$

函数在区间 $[0,1]$ 和区间 $[2,3]$ 内单调递增

在区间 $(1,2)$ 内单调递减

$\therefore$ 有2次加速过程，1次减速过程

在 $[0,1]$ 和 $[2,3]$ 内加速，$(1,2)$ 内减速

在1秒和2秒时加速度为0