1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

段海冰 080825032

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=n\cdot\frac{1}{n}=1$ −8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\infty$ −8

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln(1+x)x}-\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x)x}\right)=\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=0$ −8

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\infty$

2.(1) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}+e^{x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}+e^{x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot 2x$ −3

(2) 当 $x=0$ 时
$e^y=e \Rightarrow y=1$
$\therefore \cancel{e^y\cdot y'-y=0}$

由隐函数得
$e^y\cdot y'-y=0$
$y'=\frac{y}{e^y}=\frac{1}{e}$ −5

3. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

① 当 $x\to 0$ 时
$\frac{1}{x^2}\to\infty$ 又 $\because \cos\frac{1}{x^2}$ 有界，
$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$
$\therefore$ ② 又 $\because$ 连续 $\therefore a=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cos\frac{1}{x^2}=$
$\lim\limits_{x\to 0^-}x^2\cos\frac{1}{x^2}=$

不可导 −6

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 3 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+5) - f(x)]$

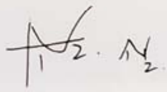
$f'(x) = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3. \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} [f(x+5) - f(x)] = \frac{3}{5}$

$\dfrac{f(x+5) - f(x)}{f(x)} = 3.$

-16

5. $\because s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$

加速度 $a = s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$
$= 6(t-2)(t-1)$



~~由此可知 在 $t \in [0,1]$~~

由此可知 在 $t \in [0,1]$ 时和 $[2,3]$ 时加速

在 $[1,2]$ 时减速

有两次加速一次减速，在 $t=1$，$t=2$ 时加速度为 0