1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

项可益 081825035

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$\because \sqrt{n^2+2}, \sqrt{n^2+3}, \cdots \sqrt{n^2+n+1}$ 当 $n\to\infty$ 时

趋向于 $+\infty$ −8

则原式形成 $\frac{1}{\infty}\to 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)\longrightarrow 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

当 $n\to\infty$ 时 $\frac{n}{n+1}$ $n+1, n\to\infty$

$\frac{n}{n+1}<1$

$n+1\to\infty$ −8

$\therefore$ 当 $n\to\infty$ 时

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\longrightarrow 0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

当 $x\to 0$ $\tan x\to 0$ $\sin x\to 0$ $x=0$ 时 $\tan x=0$ $\sin x=0$

$\tan x-\sin x \cancel{\Rightarrow}\to 0$

$x^3\to 0$ −8

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan-\sin x}{x^3}\to\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$x\to 0$ 时 $x, \ln(1+x)\to 0$ −6

$x\ln(1+x)\to 0$ $x-\ln(1+x)\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\overset{\cancel{x}=x}{1}}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=0$

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}(\tan\frac{x}{3})'(\frac{x}{3})'+e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2$

$+(\sin x^2)'2x\,e^{\sqrt{x}}$

$=-\frac{1}{\tan^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{3-0}{9}+e^{\sqrt{x}}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}\sin x^2+\cos x^2\cdot 2x)$

$=-\frac{1}{3\tan^2\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}\sin x^2+\cos x^2\cdot 2x)$

−2

(2) $e^x-xy=e$

$e^x-e=xy$

$y=\frac{e^x-e}{x}$

即 $y(x)=\frac{e^x-e}{x}$

$\cancel{y(x)}$ $y'(x)=\frac{xe^x-\cancel{x}(e^x-e)}{x^2}$ −8

$=\frac{e^x(x-1)+e}{x^2}$

当 $x\to 0$ 时

$x^2\to 0$ $e^x\to 1$ $x-1\to -1$

则 $y'(0)\to\infty$

3. $f(x)\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$x\neq 0$ 时 $f(x)=\cancel{x^2\cos\frac{1}{x^2}}\ x^2\cos\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}\overset{a}{=}$

$x\to 0$ 时 $x^2\to 0$ −16

$\cos\frac{1}{x^2}\in[-1,1]$

4. $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$

$[f(x+5)-f(x)]'$

$=f'(x+5)-f'(x)$

$=f'(x+5)-3>0$

-16

由令 $x\to\infty$ 时

~~x+5~~ $f'(x)=3$ 不变

~~$f(x+5)=f(x)+3$~~ 米 $(x\to\infty)$

(m=5)

=

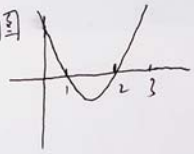
$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$

5. $S(t)=2t^3-9t^2+12t \quad t\in[0,3]$

$s'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t^2-3t+2)$

$s'(t)$ 图



$t\in[0,3]$

∴ 该同学有2次加速一次减速

$t\in[0,1]$ 和 $t\in[2,3]$ 时加速

$t\in[1,2]$ 时减速

$t=1$ 和 $t=2$ 时

加速度为0