1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

朱芮

080325 015

1.（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解 $\because \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

而由夹逼准则可得 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}<\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=1 \quad \lim\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解 $\because \tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x$

$=\sin x\frac{1-\cos x}{\cos x}$

又 $\because \sin x\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2\cos x}}{x^3}$

$=\frac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}=\frac{1}{e} \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

由洛必达法则得

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\ln(1+x))}{(x\ln(1+x))}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{2+x}{(1+x)^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$

2.（1）$\because y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$\therefore y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sec^2\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^2+2x\cos x^2\right)$

$=\frac{2}{3\sin\frac{2x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^2+2x\cos x^2\right)$

（2）$\because e^y-xy=e$

$\therefore$两边同时求导

$e^y\cdot y'-(y+xy')=0$

令 $x=0$ 得 $e^y-0=e$

解得 $y=1$

将 $x=0$，$y=1$ 代入求导后式子得

$y'=\frac{1}{e}$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{e}$

3. $\because f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$

在 $x=0$ 处连续

$\therefore f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

又 $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$

而 $f(0)=a$

$\therefore a=0$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2\cos\frac{1}{h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0} h\cos\frac{1}{h^2}=0$

极限存在且等于0

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 且 $f'(0)=0$

4.

-16

(5) $\because S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$\therefore S'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

令 $S'(t)=0$ 得 $t=1,2$

$\therefore$ 对于 $t\in[0,1]$ $S'(t)>0$ 此区间为加速过程

$t\in(1,2]$ $S'(t)<0$ 此区间为减速过程

$t\in(2,3]$ $S'(t)>0$ 此区间为加速过程

综上该同学在这段时间内有两次加速过程

分别为 $t\in[0,1]$，$(2,3]$

有一次减速过程，为 $(1,2]$

加速度为零的时刻为 $t=1$ 或 $t=2$。