

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

$$3、\text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值, 并讨论此时 } f(x) \text{ 在}$$

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

机器人工程 081825015 张鸣威

解: 1. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$

当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \rightarrow 0, \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \rightarrow 0, \dots, \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \rightarrow 0$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) = 0$

(2) 解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n+1 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 得

~~$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$~~

$= e^{-1} = \frac{1}{e}$

(3) 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} \right)$
 $\because x \rightarrow 0, \therefore \cos x \rightarrow 1$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3} \right)$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 得

$= 0$

(4) 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(1+x) - \frac{1}{x} \right)$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = x$ 得

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(1+x) - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0$

2. 解: $y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2$

左右两边求导: $y' = \frac{1}{3 \tan \frac{x}{3}} + \frac{e^{\sqrt{x}} \sin x^2}{2} + 2e^{\sqrt{x}} \cos x^2$

(1) 解: $e^x - xy = e$
 左右两边求导:

$e^{x(0)} - 0 \times y(0) = e$

$y(0) = 1$

$e^x y' - y - xy' = 0$

$y' = \frac{y}{e^x - x}$

$y'(0) = \frac{y(0)}{e^{x(0)} - 0} = \frac{1}{e}$

3. 解: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$

$a = 0$

不可导理由如下: $\because f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) ~~关于 x 轴对称~~
 $f(x)$ 关于 y 轴对称

~~$f'(x) \neq f'(x)$~~

$f(0)$ 左右两边的导数并不相等

\therefore 不可导

4. ~~解: $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$~~

由 $dy = 2x y'$ 得

$f(x+5) = (x+5) f'(x+5)$

$f(x) = x f'(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x+5) - f(x)] = (x+5)f'(x+5) - x f'(x)$

$= 3x + 15 - 3x$
 $= 15$

5. 解: $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$

$S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$

令 $S'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 0$

解得 $t = 1$ 或 $t = 2$

该同学在这段时间内有 2 次加速

1 次减速

导数

由几何意义得 $S'(t) < 0$ 为减速 $S'(t) > 0$ 为加速

$t \in [0, 1]$ 内加速
 $t \in [1, 2]$ 内减速
 $t \in [2, 3]$ 内加速

令 $S'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 0$

解得 $t = 1$ 或 2

$\therefore t = 1$ 或 2 时加速度为零