1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

陈彦睿　车辆一班　08132019

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1.$

$\therefore$ 原式 $=1$.　-2

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=1.$　-8

$\therefore$ 原式 $=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3}$

当 $x\to 0$, $x^3\to 0$. $\sin x(\cos-1)\to 0$.

~~$\therefore \lim\limits_{x\to 0}(\tan$~~　$\therefore$ 原式 $=1$.　-8

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$.

当 $x\to 0$. $(1+x)\to 1$. $\ln(1+x)\to 0$

$\therefore \frac{1}{\ln(1+x)}\to 1$.　-8

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x}=-1$

2. (1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$.

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\cot\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{1}{3}\frac{\cot\frac{x}{3}}{\tan\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+2x\cdot e^{\sqrt{x}}\cos x^2$

$=\frac{\cot\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2\right)$

$y'(0)=\lim\limits_{x\to 0}$ ~~$(\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2)$~~ $\frac{\cot\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cot\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\lim\limits_{x\to 0}e^{x}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2\right)$

$=1+1=2$.

~~(2) $e^y-xy=e$~~　~~$\frac{1}{\frac{dx}{dy}}-\frac{dx}{dy}=0$　$e^y-x\frac{dx}{dy}=e$~~

~~$y=\frac{e^y-e}{x}$　$y=\frac{dy}{dx}$~~

~~$y'=\frac{\frac{1}{y}\cdot x-e^y+e}{x^2}$~~

两边对x求导.

(2) $e^y-xy=e$

$\frac{1}{y}-y-xy'=0$.　$y'=\frac{1-y^2}{e^y-e}$

$y'=\frac{1-y^2}{xy}$　$y'(0)=\frac{1}{1-e}$

$xy=e^y-e$.　-10

3. ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. ~~[illegible]~~ ∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$. ∴ $a=0$

$f(x) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$

$= 0+0=0$.

−8

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} f(x+5) - \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

−16

5. $s(t) = 2t^3-9t^2+12t$

~~$s(t) = 6t^2-18t+12$~~ $a(t) = 2t^2-9t+12$.

~~$=6(t^2-3t+4)$~~

~~$=6t$~~

当 $t\in[0,3]$. 有 2次加速. 1次减速.

在 $[0,1]$ 上加速, ~~[illegible]~~ $(1,2)$ 上减速. $[2,3]$ 上加速.

~~当 $t=1$. $s(1)=5$~~

∵ $a(t)=2t^2-9t+12$ Δ ~~[illegible]~~ <0

∴ 没有加速度为零的时刻.

−3