1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

谌益阳 081865039

1.(1) 解：∵ $n\to\infty$ $\sqrt{n^2}\sim n$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \le$ 原式 $\le \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

-2

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$= \cancel{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}} = \cancel{\frac{1}{2}}\ 1$

(3) 解：$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1}$

$=\frac{1}{2}$

2.(1) $(\ln\tan\frac{x}{3})' = \frac{\frac{1}{3}\sec^2\frac{x}{3}}{\tan\frac{x}{3}}$

$\cancel{(e^{\sqrt{x}}\sin x^2)' = e^{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}}$

$(e^{\sqrt{x}}\sin x^2)' = e^{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}\sin x^2 + e^{\sqrt{x}}\cdot\sin 2x$

$\therefore y' = \frac{\frac{1}{3}\sec^2\frac{x}{3}}{\tan\frac{x}{3}} + \cancel{e^{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}\sin x^2}\ \frac{e^{\sqrt{x}}\sin x^2}{2\sqrt{x}} + \cancel{e^{\sqrt{x}}\sin 2x}\ 2xe^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2$

(2) $x = \frac{e^{y-1}}{y}$

$x' = \frac{e^{y-1}(y-1)}{y^2}$

$y(x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$

$y'(x) = \frac{x^2}{e^{x-1}(x-1)}$

$\therefore y'(0) = \frac{1}{e}$

(2) 解：$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$\because \frac{1}{n+1}, n\to\infty$

$\cancel{\therefore \frac{1}{n+1}}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$= \cancel{1}\ e^{-1}$

(4) 解：$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$

$= \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$f(x) = x-\ln(1+x)$

$g(x) = x\ln(1+x)$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}}$

$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}$

∴ 当 $x=0$ 时 $\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}$

3. 解：$\cancel{\lim_{x\to(0^-)}}$

∴ ~~当 x=0~~

~~lim~~ ∴ 当 $x\ne 0$ 时

$f(x) = x^2\cos\frac{1}{x^2}$

$\therefore \lim_{x\to(0^+)} f(x) = \lim_{x\to(0^-)} f(x)$. 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

∴ 当 $x\ne 0$ 时

$f(x) = x^2\cos\frac{1}{x^2}$

-6

$\therefore \cancel{\lim x^2\cos\frac{1}{x^2} = \lim x^2\cos\frac{1}{x^2}}$

∴ 当 $x_1\to 0^-$ 和 $x_2\to 0^+$

$x_1^2\cos\frac{1}{x_1^2} = x_2^2\cos\frac{1}{x_2^2} = a$

∴ 根据夹逼定则

$f(0) = \lim_{x\to(0^-)} x^2\cos\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to(0^+)} x^2\cos\frac{1}{x^2} = a = 0$

∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore a = \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$

$\therefore a=0$.

4. 解: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+5)-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$x\to\infty$ $f(x-5)-f(x)=3(x+5)-3(x)=15$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+5-f(x))]=15$

—16

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim f(x+5)-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$=3(x+5)-3x$

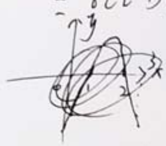
$=15.$

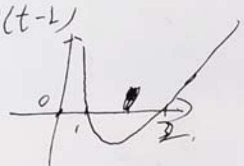
5. 解: $S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$S'=6t^2-18t+12$

$=6(t^2-3t+2)$

$\therefore$ $=6(t-1)(t-2)$





$\therefore$ 当 $t=1$ 或 $t=2$ 时, $S'(t)=0$

综上: 该同学有2次加速过程

1次减速过程

当 $t\in[0,1]\cup[2,3]$ 时, 该同学在加速.

当 $t\in[1,2]$ 时, 该同学在减速

加速度为零的时刻为 1s 和2s.