1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

杨佳怡 机器人工程 08182502З

1.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}<\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$ −2

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(n+1)\left(\frac{-1}{n+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-1}=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}0=0$ −8

(4) $\cancel{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]}$ $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}0=0.$ −8

2.

(1) $y'=\frac{1}{\ln\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}2x\cos x$ −8

(2) $e^y-xy=e$ 同时求导

$e^y-x'y-xy'=0$ 且 $y=y(x)$

$\Rightarrow y'(x)=\frac{e^{y(x)}-x'y(x)}{x}$

$\therefore y'=\frac{e^y-x'y}{x}$ −8

$\therefore y'(0)=0.$

3.

$\because f(0)=a$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=a$

~~即 $a=x^2$~~

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\therefore a=0$

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}x\cos\frac{1}{x^2}=0.$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3\cdot f'(x)\lim\limits_{x\to+\infty}5$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15\times5=75$ −16

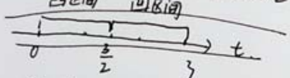
5. 令 $S=S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$S'=6t^2-18t+12 \quad t\in[0,3].$

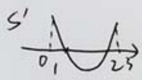
~~$S''=12t-18$~~

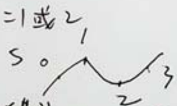
~~$S''>0 \Rightarrow t\in$~~ ~~$t\in(\frac{3}{2},3]$~~

~~$S''<0 \Rightarrow t\in[0,\frac{3}{2})$~~



令 $S'=0 \Rightarrow t=1$ 或 2





$t\in[0,1],[2,3]$ $t\in[1,2)$

两次加速，一次减速. −3

$S''=12t-18 \quad t\in[0,3]$ 令 $S''=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$

$\therefore a=0$ 时 t 为 $\frac{3}{2}$ 秒.