1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 $y'$ .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$ .

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 $a$ 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$ . （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$ .试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

胡雨欣

080325089

1.⟨1⟩ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$=0.$ −8

⟨2⟩ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

由夹逼准则可得

$\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$

$\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$ −6

$\because 0<\frac{n}{n+1}<1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1$

⟨3⟩ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^2\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{2x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{2\sin x}=\frac{1}{2\cos^2 x}$

$=\frac{1}{2}$

⟨4⟩ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+1+\frac{1}{x^2}\right)$ −6

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+x^2+1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x+2}{2}=1$

2.⑴ 设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 $y'$

$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{1}{3}\frac{1}{\sin\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^2+\cos x^2\cdot 2x\right)$

$=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^2+\cos x^2\cdot 2x\right)$

~~⟨2⟩ $e^y-xy=e$~~

⟨2⟩ $e^y-xy=e$

$\cancel{e^y-e^{\ln xy}=e}$

$\cancel{e^y-e^{\ln x+\ln y}=e}$

由已知得：两边同时求导

$e^y y'-y-x\cdot y'=1$

$y'(e^y-x)=1+y$

$y'=\frac{1+y}{e^y-x}$ −1

$y'(0)=\frac{1+y}{e^y}=1$

3. $\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \cancel{\lim\limits_{x\to 0}x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x^2}\cdot x^2\right)=a$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x\sin\frac{1}{x^2}}{2}\right)$

$=0$

$\therefore a=0$

$f'(x)=\begin{cases}2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. −6

$f(0)=2$

4. $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$

$f(x+5)-f(x)=f'(\xi)(x+5-x)$

$=5f'(\xi)$

条件？ −2

$x\to+\infty$. $f'(x)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$

5. $s(t)=2t^3-9t^2+12t$ $t\in[0.3]$.

由已知得. $s(t)$为速度函数.

~~$s'(t)=6t^2-18t+12$~~

$\therefore s'(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$ 为加速度函数.

$\therefore s'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t-2)(t-1)$

该同学有2次加速.一次减速

$t\in[0.1]\cup[2.3]$时. $s'(t)>0$. 为加速时段

$t\in[1.2]$. $s'(t)<0$. 为减速时段

当$t=1$和$t=2$时 $s'(t)=0$. 加速度为零的时刻