1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

单宇阳

1. ① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

∵ ~~此极限是数列极限~~

$n\in Z^* \to [1,+\infty)$ $\cancel{n=n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{n^2+2}}\cdot 2n+\frac{1}{2\sqrt{n^2+3}}\cdot 2n+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{n^2+n+1}}\cdot 2n\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

∵ $\sqrt{n^2+2}<\sqrt{n^2+3}<\sqrt{n^2+n+1}$ 但 $\sqrt{n^2}=n$

-8

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解：设 ~~$n+1=t$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^t$~~

~~$n=t-1$~~

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ 符合 x^a ~~设n+1=t~~

$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^{n\ln n}}{(n+1)^{(n-1)\ln(n-1)}}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{e^{n\ln n}(1+\ln n)(n+1)^{n-1}-\frac{\ln(n+1)(n-1)}{n+1}\cdot n^n\cdot e^{(n-1)\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln(n+1)(n-1)}{n+1}}{(n+1)^{2n-2}}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{e^{n\ln n}(1+\ln n)(n+1)^{n-1}-\frac{\ln(n+1)(n-1)}{n+1}\cdot e^{n\ln n}\cdot e^{(n-1)\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln(n+1)(n-1)}{n+1}}{(n+1)^{2n-2}}\right]$

-7

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{e^{n\ln n}\cdot e^{(n-1)\ln(n+1)}\left(1+\ln n-\frac{\ln(n+1)(n-1)}{n+1}\right)}{(n+1)^{2n-2}}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{e^{n\ln n+(n-1)\ln(n+1)}\left(1+\ln n-\frac{\ln(n+1)(n-1)}{n+1}\right)}{(n+1)^{2n-2}}\right]=0$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}\right)$

∵ $\sin x\sim x$ $(x\to 0)$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ $(x\to 0)$

$=\frac{\frac{x^2}{2}\cdot x}{x^3}$

$=\frac{1}{2}$

~~④ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$~~

~~解：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{-1}-\frac{1}{x}\right]$~~

~~$=\lim\limits_{x\to 0}\left[-\ln(1+x)-\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{-1}{1+x}+\frac{1}{x^2}\right]$~~

④ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{-x-1}{\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}\right]$

$=0$

-8

2. ① $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

设 $u=\tan\frac{x}{3}$ ~~$\tan\frac{x}{3}$~~

解：$y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y=q+p$ $q=\ln\tan\frac{x}{3}$ $p=e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$p'=\frac{1}{\sqrt{x}\ln e}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+\frac{\cancel{\sin x}}{2x\sin x^2}\cdot e^{\sqrt{x}}$

$=\frac{\sin x^2}{2x}+2xe^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$q'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\left(\tan\frac{x}{3}\right)'$

$=\frac{\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\right)$

$=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}$

$y'=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+\sin x^2\left(\frac{1}{2x}+2xe^{\sqrt{x}}\right)$

-5

② $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定

∴ $e^y-xy=e$ 解：$e^y-e^{\ln xy}=e$

~~设 $y-\ln xy=1$ $y-\ln x-\ln y-1=0$~~

~~$y'-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-1=0$~~ $y'(0)=-e$

$d(x)=e^y-e^{\ln xy}=e$

$e^y-y'-e=0$

$dy=e^{y'}-y'=e$

$e^{y'}-e^{\ln y'}-e=0$ $y'=\ln y'$

-10

3、∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $x\neq0$ $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0} x^2\cos\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0} 2x\cos\frac{1}{x^2}+\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x^2=\lim\limits_{x\to0} 2x\cos\frac{1}{x^2}+\sin\frac{1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$ ∴ $a=0$ 时

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 证明: $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0 \\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

且 $\lim\limits_{0^-} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0=\lim\limits_{0^+} a=0$ ∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处左右两边导数值相等

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $f'(0)=0$

−8

4、$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=3$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$ 看作 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)$

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ~~[f(x+5) − f'(x)]~~ ~~设 f(x)~~

$\lim\limits_{x\to\infty}[f'(x+5)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=3$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{\Delta x}$ 这里 $\Delta x=5$

−16

5、$S(t)=2t^3-9t^2+12t$ $t\in[0,3]$

解: $S(t)=2t^3-9t^2+12t$ ~~$t^2-3t+4=0$~~ $t=1$, $t=2$

$S'(t)=6t^2-18t+12=0$ $6t^2-18t+12=0$ ∴ $S(t)$ 函数在 $[0,1]$ 内单调递增

~~$S(t)=3(t^2-3t+4)=0$~~ $t^2-3t+2=0$ 在 $[1,2]$ 上单调递减, 在 $[2,3]$ 上单调递增

∴ $S(t)$ 在 $x=1$ 处取极大值, $x=2$ 处取极小值

在 $[0,1]$ 上加速, $[1,2]$ 上减速 $[2,3]$ 上加速, 有两次加速, 一次减速过程

$S(1)=5$ $S(2)=4$ ∴ $a=0$ 时 $t=0$ $a=0$ 时 $t=0$

−3