1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

叶晗烨 080825048

1.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

当$n\to\infty$时,原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n=1$

−8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}=1$

−8

$\cancel{(3)\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right)}$

$\cancel{=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}\cdot\sin x}{x^3}\right)}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sec^2x-\cos x}{3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x\left(1+\frac{1}{\cos^3x}\right)}{6x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\frac{1}{\cos^3x}}{6}\right)=\frac{1}{3}$

−4

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{1+\ln(x+1)(1+\frac{1}{x})}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\ln(x+1)+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}(\ln(x+1))+\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+1}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x+1}=2$

−4

2.(1).

$y'=(\ln\tan\frac{x}{3})'+(\frac{1}{2}e^x\sin x^2)'$

$=(\ln\tan\frac{x}{3})'+\frac{1}{2}[e^x\cdot\sin x^2+e^x(\sin x^2)']$

$=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}e^x\sin x^2+2xe^x\cos x^2$

−5

(2).

−10

3. $x\neq0$时, $f'(x)=(x^2)'\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot(\cos\frac{1}{x^2})'$

$=2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x}$

∵ $f(x)$在$x=0$处连续

∴ $f(0)=\lim\limits_{x\to0}(x^2\cos\frac{1}{x^2})=0$

−8

~~x≠0时~~ ∵ $f(x)$在$x=0$处连续

∴对$f'(x)$当$x=0$时$f'(x)$无意义,故不可导

4.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+5))-\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+5))-\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$

$=3-3$

$=0$

−16

5. 由题意得: $s(t)=2t^3-9t^2+12t$.

令$s(t)=0$, $t=0$

$s(t)'=6t^2-18t+12$.

令$s(t)'=0$, $t=1$和2.

令$s(t)'<0$, $t\in(1,2)$, $s(t)$单调递减;

令$s(t)>0$, $t\in[0,1]$和$[2,3]$, $s(t)$单调递增

∴该同学在这段时间内有2次加速过程,1次减速过程

在$t\in[0,1]$和$[2,3]$时间段内加速,在$[1,2]$时间段内减速.

加速度为0的时刻在$t=1$和$t=2$时.