

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

$$3、\text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值, 并讨论此时 } f(x) \text{ 在}$$

$x=0$  处是否可导, 若可导, 则求出  $f'(0)$ ; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为  $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ , 时间  $t \in [0, 3]$ . 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

胡明 电子信通 081525240

1. (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+n+1} \right)$   
 $= 1$  -7

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$  为  $\frac{0}{0}$  型  
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - \cos x}{3x^2}$   
 $= \frac{1}{6}$  -4

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} = e$  -2

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)x} \right)$  为  $\frac{0}{0}$  型  $= 0$  -8

2. (1)  $y' = \frac{\sec^2 x}{3 \tan x} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \sin x + 2e^{\sqrt{x}} \cos x$  -2

(2)  $xy = e$   
 $\Rightarrow e^x - e^y = xy$   
 $\frac{e^x - e^y}{e} = xy$  -10

3. 当  $x=0$  时

$x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 0$

$\therefore f(x)$  在  $x=0$  处连续

$\therefore a=0$

当  $x \rightarrow 0$  时

$\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$

$\cos$  在  $-1, 1$  震荡

$\therefore$  不可导

4.

-16

5.  $s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$

当  $s'(t) = 0$  时

解得  $t = 1$  或  $2$

$\therefore t \in [0, 3]$

当  $t \in [0, 1]$  时

$s'(t) > 0$

该同学正在加速

当  $t \in [1, 2]$  时

$s'(t) < 0$

该同学正在减速

当  $t \in [2, 3]$  时

$s'(t) > 0$

该同学正在加速

综上所述, 该同学在  $t \in [0, 3]$  时刻有两次加速一次减速

加速为:  $[0, 1] \cup [2, 3]$

减速为:  $[1, 2]$

加速度为零的时刻为  $t=1$  和  $t=2$