1、求极限．（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数．（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' ．

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$ ．

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由．（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$ ．（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$．试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻．（16 分）

孙耀坤
车辆工程
081325007.

1.(1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}$ -8

(2). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1$ -8

(3). $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$

(4). $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x\cdot x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}\right)$

$=\frac{1}{2}$

2.(1). $\because y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$ 令 $\ln\tan\frac{x}{3}=u_1 \Rightarrow u_1'=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}$

令 $u_2=e^{\sqrt{x}}\sin x^2$ 则 $u_2'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+2xe^{\sqrt{x}}\cos x^2$

故 $y'=u_1'+u_2'=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2xe^{\sqrt{x}}\cos x^2$

(2). $\because e^y-xy=e$,对其两边求导有, $e^y\cdot y'-y-xy'=0 \Rightarrow y'=\frac{y}{e^y-x}$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{e}$

3.

-16

4. $\cancel{\lim_{x\to\infty}}\ f'(x)=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

-14

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[f(x+5)-f(x)]}{5}=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ ∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$

5. ∵ $s'(t)=6t^2-18t+12$, ∴ 当 $t=1$ 或 2 时, $s'(t)=0$.

~~且~~ 即当 $t\in[0,1]$ 和 $[2,3]$ 时, $s'(t)>0$. 当 $t\in[1,2]$ 时, $s'(t)<0$.

则有两次加速过程, 一次减速过程. 在 $t\in[0,1]$ 和 $[2,3]$ 时加速,

在 $t\in[1,2]$ 时减速. 且当 t 1 或 2 时, 加速度为零.