1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to +\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

鲁志远

0808250075

1. (1)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = (1)^{n+1} = 1$ —8

—8

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}\right)$ $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1-2\sin^2\frac{x}{2})x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3}\right)$ $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot(\frac{x}{2})^2}{[1-2\cdot(\frac{x}{2})^2]\cdot x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{x}{\cos x} - x}{x^3}\right)$ $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^2}$ $= \dfrac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{x}}{\ln(1+x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{e^x}}{\ln(1+x+e^x)}\log_{e^{1+x}}\dfrac{e^x}{1+x}$ —8

$= \lim\limits_{x\to 0}\log_2 1$

2. (1) $y = \ln\tan\dfrac{x}{3} + e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y' = (\ln\tan\frac{x}{3})' + (e^{\sqrt{x}}\sin x^2)'$

$= \dfrac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{3} + e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2 + \cos x^2\cdot 2x\cdot e^{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}} + e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sin x^2}{2\sqrt{x}} + 2x\cos x^2\right)$

(2) $e^y - xy = e.$ $y' = \dfrac{y}{e^y - x}$ 当 $x=0$时, $e^y - 0\cdot y = e$ ⟹ ∴ $y'(0) = \dfrac{1}{e - 0} = \dfrac{1}{e}$

$e^y\cdot y' - (y + x y)' = 0.$ $y = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2\cos\frac{1}{x^2}) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\cos\frac{1}{x^2}) = 0$, 左极限和右极限相等。

又∵ $f(x)$在 $x=0$处连续   ∴ $f(0) = a = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2\cos\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\cos\frac{1}{x^2}) = 0.$

不可导.   —6

4. ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[f(x+5) - f(x)]}{5} = \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x) = 3.$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5) - f(x)] = 15.$ —16

(5)

$s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ $s(0) = 0$

$s'(t) = 6t^2 - 18t + 12.$ $s(3) = 9$

令 $s'(t) = 0$, 即 $6t^2 - 18t + 12 = 0.$

$t = 1$ 或 $t = 2.$

答案同学在这段时间内有2次加速, 几次减速.
在 $0\sim 1s$内加速, 在$1s\sim 2s$内减速, 在$2s\sim 3s$内加速.
在 $t=1s$时加速度为0, 在 $t=2s$时加速度为0