1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

陈[illegible]乐、081825027 机器人2班

1.
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ —8

(2) $\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot(-1)} = e^{-1}=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{-2\cos x\cdot\cos^3 x-(-2\sin x)\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^3 x}+\cos x}{6}\right)$ —4

$=-\frac{1}{6}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\cdot x}\right)\overset{\lim\limits_{x\to 0}}{=}\left(\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{(x+1)\ln(x+1)+x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)+1+1}\right)=\frac{1}{2}$

2. (1) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2\cdot 2\cos x^2$

$=\frac{1}{3\tan\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2\left(\frac{1}{2}+2\cos x^2\right)$ —4

(2) ~~$e^y-xy=e$~~

~~$e^{y'}-y-xy'=0$~~

~~$e^{y'}-y=xy'$~~

~~$e^{y'}-y$~~

~~$x=\frac{e^{y-1}}{y}$ … $y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x'}$ … $x\to\infty$~~

$\therefore y'(x)=\frac{x^2}{\ldots}$ $\therefore y'(0)=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}\right)=0$ ∵在 $x=0$处连续，∴ $a=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}\right)=0$

$f'(x)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$

$=2x\cdot\cos\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$

当 $x\to 0$时 $f'(0)\neq 0$

∵ $(0^+)^2=(0^-)^2$

∴ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)$

∴若可导，即 $f'(0)=0$

∵ $f'(0)\to\infty$

∴不可导.

—7

~~∵ $(0^+)^2=(0^-)^2$~~

~~∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)$~~

~~∴ $f(0)$处可导~~

4. 当 $x\to\infty$ 时，$f'(x)=3$

即 $f(x)=3x$

当 $x\to\infty$ 时，即：$f(x+5)-f(x)=3(x+5)-3(x)=15$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+5)-\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$=3(x+5)-3x$

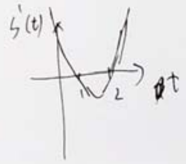
$=15$

−16

5. $s(t)=2t^3-9t^2+12t$ 由题意可知，$s'(t)$ 为加速度，当 $s'(t)$ 大于0时加速，小于0时减速

$s'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t^2-3t+2)=6(t-1)(t-2)$



当 $t\in(0,1)$ 时，加速

当 $t=1$ 时，加速度为0

当 $t\in[1,2]$ 时，减速

~~当 $t\in[2,+\infty)$ 时，加速~~

当 $t=2$ 时，加速度为0

当 $t\in(2,+\infty)$ 时，加速

一共 2次加速

1次减速

2次加速度为0

2.(2) $\dfrac{e^{y}-1}{y}=x$ $x'=\dfrac{e^{y-1}(y-1)}{y^2}$ 当 $y=0$ 时，$x'\to\infty$

$\therefore y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{x'}$

$\therefore y(0)=\dfrac{1}{x'(0)}=\dfrac{1}{\infty}=0$

−5