

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

$$3、\text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值, 并讨论此时 } f(x) \text{ 在}$$

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

明华东
081825030
11

-8

(2) 设 $x = n+1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \frac{1}{n}]^n$
 $= e$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\frac{1}{\cos x} - 1)}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3}$
 $= \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(Hx)}{x \ln(Hx)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{Hx}}{(Hx) + \frac{1}{Hx}}$

设 $Hx = t$
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1}{t \ln t + t - 1}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln t + 1 + 1}$
 $= \frac{1}{2}$

2. (1) $y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{e^x}{2x} \sin x^2 + e^x \cdot 2x \cos x^2$
 $= \frac{1}{3 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}} + \frac{e^x}{2x} \sin x^2 + e^x \cdot 2x \cos x^2$

1. $s'(t)$ 为速度
 $s''(t)$ 为加速度
 $s'(t) = 12t + 8$
 $s''(t) = 12$

(1) 解: $y = y(x)$
 $y'(0)$ 即当 $x=0$ 时 y 的导数
 $y = e$
 $y = 1$
 $y'(0) = 0$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时
 $f(x) \cos \frac{1}{x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cos \frac{1}{x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 $f(x) = \cos \frac{1}{x}$

设 $x = t$
 $f(x) = \frac{\cos t}{t}$
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{t} = \infty$

解: $f(x) = 3x$
 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x+5) - f(x)]$
 $= 15$
 $s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$
 $s'(t) = 0$
 $t = 1$ 或 2

$t \in [0, 3]$ 有 2 次加速 1 次减速
 $x \in (0, 1) \cup (2, 3)$ 为加速
 $x \in [1, 2]$ 为减速

-3