1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

蔡学运
080825040

1. (1) 由题目可知

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} e^{(n+1)\ln\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} e^{(n+1)\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right)}$

$=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

$=\frac{1}{2}$

(4). $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$=\frac{1}{2}$

2. (1).

$$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}+e^{x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin^2x+e^{x^{\frac{1}{2}}}\cdot2\cos x$$

$$=\frac{1}{3\tan\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}}+e^{x^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin^2x+2\cos x\right)$$

−2

(2).
由 $e^y-xy=e$ 可得

$e^y\cdot y'-y-xy'=0$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

令 $x=0$

$y'(0)=\frac{y(0)}{e^{y(0)}}$

−2

3. $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}$

当 $x\to0$ 时，$\cos\frac{1}{x^2}$ 为有界函数

x^2 趋 $\to 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0.$

$\therefore a=0$

此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

$f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^-}2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\infty$

$\therefore x=0$ 是此函数的可去间断点

$f'(0)=\infty$

−6

~~4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$~~

~~$\therefore f'(x)=\lim\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3$~~

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right]=3$

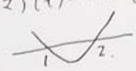
$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15.$

−16

5.

$S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $S'(t)=0\Rightarrow t_1=1,\ t_2=2$



由图象可知

在 $t\in[0,3]$ 时

当 $t\in(0,1)$ 和 $(2,3)$ 时，
$S(t)$ 单调递增

当 $t\in(1,2)$ 时，
$S(t)$ 单调递减

当 $t=1$ 或 2 时，
$S(t)=0$

综上所述

$t\in(0,1)$ 和 $(2,3)$ 时，是加速过程

$t\in(1,2)$ 时，是减速过程

当 $t=1$ 和 2 时，加速度为零.