1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

高庆鹏
0815 25243

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$.

∵ $n\to\infty$ ∴ $\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\to 0$. ∴ $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\to 0$ −8

∴ 无数个0相加仍为0 ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1$

−8

(3). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{(1-\cos x)}{x^2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$

(4). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$ −6 ∴ $x\sim\ln(1+x)$

∴ 原式 $=0$.

~~∵ $x>\ln(1+x)$ ∴ $\frac{1}{\ln(1+x)}>\frac{1}{x}$~~

~~∵ $x\to 0$ 时 $\frac{1}{x}\to\infty$ 同理 $\frac{1}{\ln(1+x)}\to\infty$~~

~~∴ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\infty$~~

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

∴ $y'=\frac{\tan\frac{x}{3}'}{\tan\frac{x}{3}}+\sqrt{x}'e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+\sin x^{2\prime}\cdot e^{\sqrt{x}}$

$=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{3}-\sin^2\frac{x}{3}}{\cos^2\frac{x}{3}}\right)}{\tan\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\sqrt{x}}\sin x^2+2x\cos x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$

$=\frac{1-\tan^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+2x\cos x^2\right)$ −2

(2) $e^y-xy=e$. 两边同时求导 ∴ $ye^y-y-y\cdot xy'=0$.

∴ $y'=\frac{e^y-1}{x}$ $y'(0)=\frac{e^0-1}{x}=0$. −5

3. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0. \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} - 2x^{-1}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $\therefore a=0$

$\because f(x)$在 $x=0$ 处连续 $x\to 0$ 时 $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0.$

$f(x)=a$. $x\to 0$ $f(x)=a\to 0$. $\cancel{a=0}$. $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 可导

$\therefore f'(0)=0.$

-6

4. $x\in(-\infty,+\infty)$ 且 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上可导.

$\therefore \exists\ f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$

任取. $x+5$, $x\in(-\infty,+\infty)$

$\therefore f'(x)\cdot(x+5-x)=f(x+5)-f(x)$

$\therefore 5f'(x)=f(x+5)-f(x)$

$\therefore 5\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=5\times 3=15$

5. $s'(t)=6t^2-18t+12$ 令 $s'(t)=0$

$\therefore 6t^2-18t+12=0$

$\therefore 6(t-2)(t-1)=0$

当 $t\in[0,1)\cup(2,3]$ 时 $s'(t)>0$.

$t\in(1,2)$ 时 $s'(t)<0$.

$\therefore$ 在 $t\in[0,3]$ 时 有2次加速1次减

$\therefore$ 在 $t\in[0,1)\cup(2,3]$ 时 加速

$t\in(1,2)$ 时 $\therefore$减速

加速度为0时 $t=1$ 或2.