1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

毛正朝 车辆2班

081325001

1.(1) 解：$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \le$ 原式 $\le \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = 1$

由夹逼定理知，原式

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) = 1$

(2) 解：$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}$

$= \frac{1}{e}$

(3) $x\to 0$ 时

$\tan x \sim x$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}x^3$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3}\right) = \frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$

原式 $= \frac{x}{x\ln(1+x)} - \frac{x\cdot\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$x\to 0$，$\ln(1+x) \sim x$

−8

2.(1) 解：第一项：$\frac{1}{\tan\frac{x}{3}} \cdot \sec^2\frac{x}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3\sin\frac{2x}{3}}$

第二项：$(e^{x^2}\sin x^2)' = 2xe^{x^2}\cos x^2$

$y' = \frac{2}{3\sin\frac{2x}{3}} + 2xe^{x^2}\cos x^2$ −5

(2) 当 $x=0$，$e^y = e$

$y = 1$

$e^y \cdot y' - (y + xy') = 0$

将 $x=0$，$y=1$ 代入得

$e \cdot y' - 1 = 0$

$y'(0) = \frac{1}{e}$

3、$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x \ne 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

解：

对 $x^2\cos\frac{1}{x^2}$：当 $x\to 0$ 时，$x^2\to 0$，$\boxed{\cos\frac{1}{x^2}\to 0}$?

则 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$

−4

已知函数连续

则 $a = 0$

可导性：$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x^2}$

又 $x\to 0$，$\cos\frac{1}{x^2}\to 0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0) = 0$

4. $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$

解：$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

由拉格朗日中值定理。

-15

5. $s(t)=2t^3-9t^2+12t$

解：$s'(t)=6t^2-18t+12$

即加速度 a 表达式为 $a=6t^2-18t+12$

$t\in[0,3]$

令 $a=0$

$6t^2-18t+12=0$

$t=1, t=2$

故加速度在 $t=1$ 时和 $t=2$ 时为0。

当 $x\in(0,1), (2,3)$ 时，$a>0$，加速

$x\in(1,2)$ 时，$a<0$，减速

综上所述，该同学在这段时间有2次加速：$[0,1), (2,3]$

1次减速：$(1,2)$

并且在 $t=1$ 和 $t=2$ 时加速度为0。