1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

胡文远

080325088

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}\right)=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}\right)$

夹逼定理：

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}$

$= e^{-1}$

? −2

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}\right)$

$= \frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-x+\frac{x^2}{2}}{x\ln(1+x)}\right)$?

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2\ln(1+x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{2}$

$= \frac{1}{2}$

−1

2.

(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\frac{1}{3\tan\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\sin x^2+2xe^{\sqrt{x}}\cos x^2$

(2) $y=y(x)$ 由 $e^y-xy=e$ 所确定 求 $y'(0)$

$y'e^y-y'=0$

$\cancel{y'+\ldots}=0$

$y'(e^y-1)=0$

−9

3. ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$

? $\therefore a=0$

$\cancel{\lim\limits_{x\to 0^-}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0}$

~~二者相等~~

~~可得~~

$f'(0)=0$

−7

$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x^2}+2x^2\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^3} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$

二者相等 可得

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$ 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

4.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right]=\lim f'(x)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$ -15

5. 解 $S(t)=2t^3-9t^2+12t \quad t\in[0,3]$

$S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $S'(t)=0$

$6t^2-18t+12=0$

$t=1$ 或 $t=2$

$0\le t<1$ 时 $S'(t)>0$, $S(t)\uparrow$

$1<t<2$ 时 $S'(t)<0$ $S(t)\downarrow$

$2<t\le3$ 时 $S'(t)>0$ $S(t)\uparrow$

$\therefore$ 有2次加速 1次减速

$(2,3]$ $[0,1)$ 内加速

$(1,2]$ 减速

~~1s 和 2s 时~~

$t=1$ 和 $t=2$ 时加速度为 0