1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

张恒
081825016

1\. (1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)\leq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)\leq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)$.

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\Rightarrow e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$.

$\Rightarrow e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

-4

$\Rightarrow e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\cdot\frac{1}{n}}\Rightarrow e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}\Rightarrow e$

~~(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{\cos x}{-\sin x}-\cos x}{2x^2}\right)$~~

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right)$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}{2x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2+2x}=\frac{1}{2}$

2\. (1). ~~$y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$~~

~~求~~

$e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

-10

(2). $e^y\cdot\frac{dy}{dx}-y+x\cdot\frac{dy}{dx}=e$.

当$x=0$时

$e^y=e$.

当$x=1$时

$e^y-y=e$.

$y=0$

~~当$x=0$时~~

~~$e^y\cdot y'$~~

-7

$y'(e^y+x)=e+y$

$y'=\frac{e+y}{e^y+x}$

当$x=0$时 $y'=\frac{e+y}{e^y}=\frac{e+y}{e}$

$=1$

3. ∵函数连续

∴$a=0$

$f'(x)=(x^2)'\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot(\cos\frac{1}{x^2})'$ -14

$=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}\cdot 2\cdot x^{-3}$

$=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$

4.

-16

5. $S'=6t^2-18t+12$ · $t\in[0,3]$

$S'>0$. $S'<0$

$6t^2-18t+12>0$ · $1<t<2$

$t^2-3t+2>0$

$(t-2)(t-1)>0$

$t<1$或$t>2$.

∴在$[0,1]$内加速，$[2,3]$内加速.

在$[1,2]$内减速.

∴共有2次加速过程

一次减速过程

在$t=1$、2时加速度为0.