1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

谭慧慧

1\. (1) 解：原式 $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$= 0$　　−8

(2) 解：令 $y=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$　　令 $n+1=t$

$\ln y = n+1 \ln\frac{n}{n+1}$　　则 $\ln y = t\ln(1-\frac{1}{t})$

$\cancel{\lim_{n\to\infty} y = e^{\lim \ln y}}$ $= \lim_{t\to\infty} y = e^{\lim_{t\to\infty} t\ln(1-\frac{1}{t})}$　　−4

$=1$

(3) 解：$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}$

$= \infty$　　−8

(4) 解：原 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln e^x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)^x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{(1+x)^{(1+x)}}\right)$

$= 1$　　−6

二. (1) 解：$y = \ln\tan\frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y' = \frac{1}{3}\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cancel{e^{x}}e^{\sqrt{x}}\cdot 2x\cos x^2$

$= \frac{1}{3}\frac{1}{\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\sqrt{x}}2x\cos x^2$　　~~−6~~ −5

(2) 解：由题意得 $e^y - xy = e$

$y(0)=1$

$y'(0)$ ~~[illegible]~~ $(e^y-y)|_{y(0)=1} = e-1$　　−8

3\. 由已知得　不可导，理由如下.　　−15

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$a=0$

该 $x=0$ 处的点为 ~~[illegible]~~ 振荡间断点，为 ~~第一类间断函数~~

~~$f(x)$~~ 左极限 $\lim_{x\to 0^+} x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 与右极限 $\lim_{x\to 0^-} x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 不存在

∴ 不可导

4\. ∵ $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

∴ $h=\frac{1}{x}$ 时则

$f'(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{x})-f(x)}{\frac{1}{x}}$　　−16

又 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 3$

∴ $\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)] = 15$

5\. 解：$S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$

$t_1 = 1$　$t_2 = 2$ 时 加速度为零

又 $t\in[0,3]$

∴ ~~$t\in[0,1]$ 时~~ $t\in[0,1)$ 时 $S'(t) > 0$ 加速

$t\in(1,2)$ 时 $S'(t) < 0$ 减速

$t\in(2,3]$ 时 $S'(t) > 0$ 加速

故有两次加速过程与一次减速过程，$t\in[0,1)\cup(2,3]$ 加速

$t\in(1,2)$ 减速

加速度为0时 $t=1$ 或 2.