1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

唐亚 080825033 机械(1)班

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^4}}\right)$

解：$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot n^{-1})=n$

$=\infty$

−8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)-1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1}$

$=e^{-1}$

$=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

洛₁ $\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}$

洛₂ $\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{2\sec^2 x\tan x-\sin x}{6x}$

洛₃ $\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x-\cos x}{6}$

$=\frac{2-1}{6}=\frac{1}{6}$

−4

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$

$=0$

−8

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}2\sin x\cos x$

−2

(2) $e^y-xy=e$ 两边求导

$e^y y'-(y+xy')=0$ $e^y\cdot y'=(y+xy')$

$e^y\cdot y'-y-xy'=0$ $(e^y-x)y'-y=0$ $(e^y-x)y'=y$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$ 把 $x=0$ 代入 $e^y-xy=e$ 中

$e^y=e$ $y=1$

$y'=\frac{1}{e-0}=\frac{1}{e}$

解：

3. ∵ 连续

∴ 左右极限是相同的

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x^2}}$

~~设 $t=x^{\frac{1}{2}}$~~

~~$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\cos t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t^2}{t}$~~

~~$\cos x=1-\frac{1}{3}x^2$~~

~~$\cos t=1-\frac{1}{3}t^2$~~

根据泰勒公式

$\cos x=1-\frac{1}{3}x^2+o(x)$

$\cos x^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{3}\cdot x^{-4}$

$=1-\frac{1}{3x^4}$

$x^2\cdot\cos x^{-\frac{1}{2}}=x^2-\frac{1}{3x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}x^2-\frac{1}{3x^2}$

$=0-\infty$

$=0$

$a=0$ $f'(0^+)=2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot(-\sin x^{-\frac{1}{2}})(-2x^{-3})$

$=2x\cos x^{\frac{1}{2}}+2x^{-1}\sin x^{\frac{1}{2}}$

$=0$

$f'(0^-)=0$

$a'=0$

连续可导

−12

4. $f'(x) = \dfrac{f(x+5) - f(5)}{5}$

$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x+5) - f(5)}{5} = 3.$

$= \dfrac{\lim_{x \to \infty} [f(x+5) - f(5)]}{\lim_{x \to \infty} 5} = 3.$

-15

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} [f(x+5) - f(5)] = 15$

即 $\lim_{x \to +\infty} [f(x+5) - f(x)] = 15$

5. $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t \quad t \in [0, 3]$

$a = S''(t) = 6t^2 - 18t + 12 \quad t \in [0, 3]$

$a = 0 \Rightarrow 6t^2 - 18t + 12 = 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$t = 1$

$t = 2$

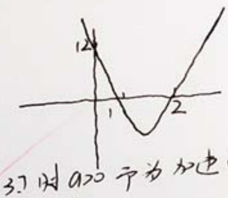
即 当 $t = 1$ 和 2 时 $a = 0$

当 $a > 0$ 时 即为加速过程

$a < 0$ 时 即为减速过程

$a = 6t^2 - 18t + 12$

$t_1 = 1 \quad t_2 = 2$



综上：$[0, 1]$ 和 $[2, 3]$ 时 $a > 0$ 即为加速时间段

$[1, 2]$ $a < 0$ 即为减速时间段.