1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

赵紫涵

081525242

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$ —8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$ —7

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)x}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=0$ —6

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\infty$ —8

2. (1) 解. $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$=\ln\frac{\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$=\ln\sin\frac{x}{3}-\ln\cos\frac{x}{3}+e^{x^{\frac{1}{2}}}\sin x^2$

$y'=\frac{1}{\sin\frac{x}{3}}\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{\cos\frac{x}{3}}\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+\sin x^2\cdot e^{x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+e^{x^{\frac{1}{2}}}\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{\cos\frac{x}{3}}{3\sin\frac{x}{3}}+\frac{\sin\frac{x}{3}}{3\cos\frac{x}{3}}+\frac{\sin x^2\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{1}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{\tan\frac{x}{3}}{3}+\frac{\sin x^2\cdot e^{x}}{2\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot 2x$

(2) 解. $e^y-xy=e$

对两边同时求导

$\cancel{\frac{dy}{dx}}$ $e^y y'-(y+xy')=0$

$e^y y'-y-xy'=0$

$y'(e^y-x)=y$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

当 $x=0$ 时.

$e^y=e$.

$\therefore y=1$

~~$y'(0)=$~~

将 $x=0$, $y=1$ 代入得. $y'(0)=\frac{1}{e}$

~~$y'(0)$~~

3. 解: $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cos\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$.

? $\therefore a=0$.

—8

不可导 当从左逼近与从右逼近的导数不同.

$\therefore$该点不可导.

4. 解: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+\Delta h)-f(x)}{\Delta h}=3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[f(x+5)-f(x)]}{5}=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+5)-f(x)]=15$.

−16

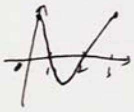
5. $s(t)=2t^3-9t^2+12t$

$s'(t)=6t^2-18t+12$

令 $s'(t)=0$.

$t_1=1$

$t_2=2$



$0<t\le 1$ $s'(t)>0$. $s(t)$ 单调递增 加速

$1<t\le 2$ $s'(t)<0$ $s(t)$ 单调递减 减速

$2<t\le 3$ $s'(t)>0$ $s(t)$ 单调递增 加速

综上所述2次加速，1次减速

$0<t\le 1$ 和 $2<t\le 3$ 时 加速 $1<t\le 2$ 时减速

$t=1$ 和 $t=2$ 时. $a=0$.