1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

杨汉宇 机械设计制造及其自动化 08082061

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解: $\because \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}<\frac{1}{n}$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

根据夹逼定理知,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$ −4

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解: $\because n\to\infty$ $\therefore (n+1)\to\infty$

令 $t=\frac{1}{n+1}$. $t\to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{[(1+(-t)]^{\frac{1}{-t}}}=\frac{1}{e}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x^2}$ −6

$=0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=0$.

(4). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解: 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}$

$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$f''(x)=\frac{1+\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}=\frac{(x+1)^2+1}{x+2}$ −4

用洛必达法则.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^2+1}{x+2}=\frac{2}{2}=1$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=1$.

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

解: $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+2xe^{\sqrt{x}}\cos x^2$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2+2x\cos x^2\right)$

(2) 解: 对 $e^y-xy=e$ 两边求导.

$e^y\cdot y'-y-xy'=0$ $\therefore y'=\frac{y}{(e^y-x)}$

$x=0$ 时, $e^y-0\times y=e$

$\therefore y=1$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{(e-0)}=\frac{1}{e}$

3、求 a 值:

$f(0)=a$.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 连续. $\therefore a=0$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 理由如下:

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则 $f(x)$ 左存在右极限和左极限, 且 ~~[illegible]~~ 相等.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}$ −6

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x^2}$ 的值在 $[-1,1]$ 内上下振荡

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 的导数不存在.

4. 解:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{(x+5)-x}\right]=\frac{1}{5}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=5\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=5\times 3=15$.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$. −14

5.(第5题在后面)

5、解:

设加速度为: $a=S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $a=0$, 则 $6t^2-18t+12=0$.

得 $t=1$ 或 $t=2$

由 $=a$ 的图象可知.

$t\in[0,1]$ 时. $S'(t)\geq 0$.

即该同学处加速中.

$t\in(1,2]$ 时. $S'(t)<0$.

即该同学处减速中.

$t\in(2,3]$ 时. $S'(t)>0$.

即该同学处加速中.

由上可知.

该同学有2次加速过程, $t\in[0,1]\cup(2,3]$

1次减速过程 $t\in(1,2]$

~~$t\in[0,1]\cup(2,3]$~~

在 $t=1$ 和 $t=2$ 时, 加速度为0.