1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

马鑫宇

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}<\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$ −2

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln(n+1)\cancel{(\frac{1}{n+1})}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{\ln(n+1)}{n+1}}$ −7

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2}{n+1}}$

$=1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{\cos^2x}-\cos x}{3x^2}\right)$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{(2\sin x\cos x)+\sin x}{6x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\cos^2x-\sin^2x)+\cos x}{6}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+x}{x+2}=0$ −5

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin^2x^2$

$y'=\frac{1}{(\tan\frac{x}{3})'}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot2x\cos^2x^2$

$=\cos^2\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x^2+2x\cos x^2\right)$ −5

(2) $e^y-xy=e$ 对x求导得 $y'e^y-y=0$

−10

3. $f(0)=a$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$ $f'(0)=?$

$\therefore$ 在 $x=0$ 处连续 −6

$\therefore a=0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=5\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=15$

$f'(x)=\frac{f(x+5)-f(x)}{5}$ −16

5. ~~t=0时~~

~~$S'(t)=6t^2-18t+12$~~

~~t=0代入得 $S'(0)=12$~~

t=0代入得 $S(0)=0$

t=3代入得 $S(3)=9$

$S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $S'(t)=0$，则 $t=1$ 或 $t=2$

$S(1)=5$

$S(2)=4$

t	(0,1)	1	(1,2)	2	(2,3)
S(t)	单增	极大	单减	极小	单增
S'(t)	+	0	−	0	+

$\therefore$ 有2次加速 在(0,1)秒及(2,3)秒内加速

1次减速 在(1,2)秒内减速

当t=1和t=2时 加速度为0