1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 $y'$ .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$ .

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 $a$ 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$ . （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$ .试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

姚勇桢 08082503O 机械设计制造及其自动化

1. (1)

−8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^{n+1})^{(n+1)}}{[(n+1)^{n+1}]^{(n+1)}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n}{(n+1)!\,n+1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

$= 1$

−7

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right) = -\frac{1}{6}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^3} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{3x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+1}{3x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x^2}{3x^2} \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}$

−8

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{[x-\ln(1+x)]'}{[x\ln(1+x)]'}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\frac{x}{1+x}+\ln(1+x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{[1-\frac{1}{1+x}]'}{[\frac{x}{1+x}+\ln(1+x)]'}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1+x)^{-2}}{-(1+x)^{-2}+(1+x)^{-1}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{-1+1+x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}$

−5

2. 解：(1) $y' = (\ln\tan\frac{x}{3})' + (e^{\sqrt{x}}\sin x^2)'$

$= \frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot(\tan\frac{x}{3})' + (e^{\sqrt{x}})'\cdot\sin x^2 + e^{\sqrt{x}}(\sin x^2)'$

$= \frac{1}{3\tan\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2 + e^{\sqrt{x}}\cdot 2x\cdot\cos x^2$

(2) $\because e^y - xy = e$

$\therefore e^y - xy - e = 0$

两边同时求导 $e^y\cdot y' - x'\cdot y - y'\cdot x = 0$

$e^y\cdot y' - y - y'\cdot x = 0$

$y'(e^y - x) = y$

$y' = \frac{y}{e^y - x}$

令 $x=0$，$e^y = e$

$y = 1$

$\therefore y(0) = 1$

$\therefore y'(0) = \frac{1}{e-0} = \frac{1}{e}$

3. $\because f(x)$在$x=0$处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

又$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2\cos\frac{1}{x^2}$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$，$\cos\frac{1}{x^2}$为有界函数

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a$，$f(0) = a$

$\therefore a = 0$

$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} + (-\sin\frac{1}{x^2}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x^2} \neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(0) = 0$，$f'(0) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$

$\therefore f(x)$在$x=0$处不可导

−6

4.

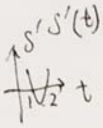
−16

姚勇搷　080825030

5. $S'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t-2)(t-1)$

$S'(t)=0 \Rightarrow t=1$或$2$




又$\because t\in[0,3]$

可知 $S'(t)>0$在$[0,1)$、$(2,3]$成立

$S'(t)<0$在$(1,2)$成立

$S(t)$在$[0,1)$，$(2,3]$单调递增

在$(1,2)$单调递减

$\therefore$该同学在这段时间有2次加速过程与1次减速过程，在 $t\in[0,1)$和$t\in(2,3]$加速，在$t\in(2,3)$减速，加速度为0的时刻为$t=1$与$t=2$。