1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

胡恒远 061025110

1.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解：当 $n\to\infty$ 时，$n^2 \gg n$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ −8

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n}{n}\right)=1$

综上所述 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

$=e^{\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{\text{极限不存在}}}$

当 $n\to\infty$ 时 $\frac{n}{n+1}\to 1$ −6

此时 $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=0$

则 $e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}=e^0=1$

综上所述 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解：$x\to 0$ 时 $\tan x\to 0$ $\sin x\to 0$ $x^3\to 0$.

由洛必达法则 得.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{6x}\right)=$ −7

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解：当 $x\to 0$ 时.

$\ln(1+x)\to 0$ $x\to 0$

则 $\frac{1}{\ln(1+x)}\to\infty$ $\frac{1}{x}\to\infty$. −8

~~则~~ $\cancel{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)}{\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}\right)}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=0.$

综上所述 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=0.$

2. 求导数

(1) 设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'

解：$y'=\left(\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2\right)'=\left(\ln\tan\frac{x}{3}\right)'+\left(e^{\sqrt{x}}\sin x^2\right)'$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\left(\tan\frac{x}{3}\right)'+e^{\sqrt{x}}\sin x^2\cdot(\sqrt{x})'+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot(x^2)'$

$=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\sin x^2\cdot x^{-\frac{1}{2}}+2e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot x$

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$

解：求 y'

$e^y\cdot y'-y-xy'=0$ $\Rightarrow y(0)=?$

$\Rightarrow (e^y-x)y'=y$ $\Rightarrow y'=\frac{y}{e^y-x}$

$y'(0)\Rightarrow y'(0)=\frac{y(0)}{e^{y(0)}}$ −3

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导. 若可导，求 $f'(0)$；若不可导，说明理由.

解：由题意知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

1) 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}$ $x\to 0$ 时 $x^2\to 0$ $\frac{1}{x^2}\to\infty$

$\cos x$ 有界且振荡

则 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0.$

$\therefore a=0$

2) 讨论是否可导：$\cancel{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x}}$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x^2}-0}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x^2}=0.$ 则 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

求 $f'(x)=\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)'=2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^4}\right)$

$=2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$

则 $f'(0)=0.$

4. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.

解：

$f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ∴

当 $x\to+\infty$ 时，$\Delta x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x+5)-f(x)}{5}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\cdot 5$

-16

$=15$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$

5. 设某同学在操场跑步时速度函数表为 $s(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$，该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻。

解：$s(t)=2t^3-9t^2+12t \quad t\in[0,3]$

$a(t)=s'(t)=6t^2-18t+12 \quad t\in[0,3]$

~~$a(t)=v'(t)=s''(t)=12t-18 \quad t\in[0,3]$~~

$a(t)=s'(t)=6t^2-18t+12$

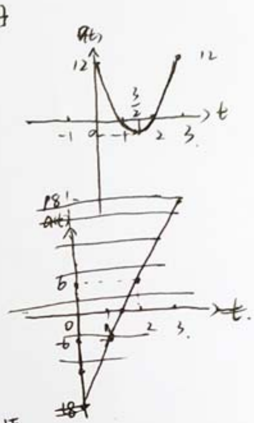
$=6(t^2-3t+2)$

$=6(t-2)(t-1)$

$a(0)=12=a(3) \quad a(\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}$

~~$a'(t)=s''(t)=12t-18$~~

~~令 $a'(t)=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$~~



综上所述则：该同学在 t 内有过 2 次加速与 1 次减速过程

加速① 在 $t\in[0,1]$ 与 $t\in[2,3]$ 时，该同学加速.

减速② 在 $t\in[1,2]$ 时，该同学减速.

③ 当 $t=1$ 和 2 时，该同学加速度为零.