

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

$$3、\text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值, 并讨论此时 } f(x) \text{ 在}$$

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

朱贤清 081825010

1. (1) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+c} \approx x$

或从 $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ 到 $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 共有 n 级

故原式 $\approx \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1 \times n = 1$

-8

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1-2(n+1)}$$

$$\text{由重要极限 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \text{ 得}$$

$$\text{原式 } \lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$= \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{原式} = \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x)}{\ln(x) \cdot x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x)}{\ln(x) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x)}{\ln(x) \cdot x}$$

$$\text{原式} = \frac{x - \ln(x)}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

2. (1) 令 $\ln \tan \frac{x}{2} = f(x)$ $e^{\sqrt{x}} \sin x = g(x)$

则 $y = f(x) + g(x)$ 由柯西法则 $y' = f'(x) + g'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}} \sin x + e^{\sqrt{x}} \cos x \cdot 2x$$

$$= e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \sin x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x \cos x \right)$$

$$\text{则 } y' = \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} + e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \sin x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x \cos x \right)$$

3. 由柯西法则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

在 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$ 时 x^2 趋近于 0, $\cos \frac{1}{x} \in [-1, 1]$ 有界

则 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = f(0) = 0$

故 $a = 0$

$$(2) e^y - xy - e = 0$$

两边同时求导

$$e^y y' - 1 = 0$$

$$y' = \frac{1}{e^y}$$

$$y(0) = \frac{1}{e^0} = 1$$

-10

12. 讨论 $f(x)$ 的可导性:

当 $f(x)$ 在 $f(0^+)$ 与 $f(0^-)$ 存在并相等时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

已知函数 $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ 中 x^2 与 $\cos \frac{1}{x}$ 均有极限

则函数 $f(x)$ 亦有极限故 $f(0^+) = f(0^-)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$$x \neq 0 \text{ 时 } f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(-\sin \frac{1}{x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot x^{-3}$$

$$x=0 \text{ 时 } f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } f'(0) = 0$$

$$5. \text{ (a) } S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

$$S'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 2(3t^2 - 9t + 6)$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 9t + 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\text{解得 } t = 1 \text{ 或 } 2$$

则函数 $S'(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调增, 在 $(1, 2)$ 上单调减, 在 $(2, 3)$ 上单调增

故在区间 $[0, 3]$ 上, $S'(t)$ 在 $t=1$ 处取得极大值, 在 $t=2$ 处取得极小值

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+5) - f(x)]$$

由柯西法则知原式 $= f'(x+5) - f'(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x+5) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x+5)}{\Delta x} = 5$$

$$f(x+\Delta x) = 3\Delta x - f(x)$$

-16