1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

罗日新

一、

(1) 解：原式 $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$= 1$

−15

(2) 解：原式 $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$

$= 0$

−8

(3) 解：原式 $= \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$= \cancel{\lim}\lim_{x\to0}\frac{\cot x-\cos x}{3x^2}$

$= \infty$

−8

(4) 原式 $= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)$

$= 0$

−8

二、(1) 解 $y = \ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y' = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2x^2}+2x\cos x^2\right)$

−8

(2) 解 ~~求切~~ 当 $x=0$ 时 $y=1$

求 y' ~~e^y~~ 对 x 求导.

$e^y - xy = e$.

$\Leftrightarrow e^y = e+xy$

$\Leftrightarrow y = \ln(xy+e)$

$y' = \frac{y}{e+xy} = \frac{1}{e+xy}$

$y'(0) = \frac{1}{e}$

−7

三解：∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

∴ ~~$f(0)=f(0)$~~

$f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义

∴ $f(0)=a=0$

要证 $f(x)$ 在 $x=0$ 时是否可导

即证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

-15

~~$\Delta y=(x+\Delta x)^2\cos\frac{1}{(x+\Delta x)^2}$~~

~~$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)^2\cos\frac{1}{(x+\Delta x)^2}$~~

$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$

$=a-a$

$=0$.

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$f'(x)=0$ $f'(0)=0$.

五解

$a=\frac{s(t)}{t}=6t^2-8t+12$

令 $a=0$ $t=2$ 或 $t=1$

当 $t\in(0,1)$ 时 $a>0$.

当 $t\in(2,3)$ 时 $a>0$

当 $t\in(1,2)$ 时 $a<0$

∴ 一共有2段加速过程，分别为 $(0,1)$ 和 $(2,3)$

1段减速过程，且为 $(1,2)$

且当 $t=1$ 和 $t=2$ 时，

加速度为零

四解

~~$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$.~~

$f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

~~$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=$~~

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=5\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right]$

$=15$