1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

吴子涵 物理学 061025120

1.

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=1.$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}.$

$n\to\infty.\ \frac{1}{n}\to0\quad\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\to1$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1$

-8

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(\tan x-\sin x)''}{(x^3)''}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{3(x^2+1)^2}+\frac{\sin x}{6x}.$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{3(x^2+1)^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}.=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{3(x^2+1)^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{6}$

-5

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$

(4). $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)=0$

-8

2.

(1). $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\frac{3}{(x^2+9)\cdot\tan\frac{x}{3}}+\left(e^{\sqrt{x}}\right)'\times(\sin x^2)'$

$=\frac{3}{\tan\frac{x}{3}\cdot(x^2+9)}+\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2$

-9

(2). $e^y-xy=e.$

$\cancel{e^{y'\cdot x}-xy\cdot y'=e}.$

$\cancel{y'(0)=}$

-16

3. $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$

~~$a=x^2\cos\frac{1}{x^2}$, $x=0$~~

$\lim_{x\to 0}(x^2\cos\frac{1}{x^2})=0$

$\therefore a=0$, $f(x)$ 在 $x=0$

处可导. $\lim_{x\to 0} a=0$ —8

$\therefore f'(0)=0$

4.

~~$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$~~ $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$.

~~$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x-x}=3$~~ $\frac{f(x+5)-f(x)}{5-x}=3$. $f(x+5)-f(x)=15-3x$.

~~当 $\Delta x=5$ 时~~

~~$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5-x}$~~ $=3$. $\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15-3x$ —16

5.

$S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$S'(t)=6t^2-18t+12$ ~~$=0$~~

$S'(t)=0$ 时. $t_1=2$. $t_2=1$.

$t\in[0,1]$ 时. $S(t)$ 单调增

$t\in(1,2]$ 时, $S(t)$ 单调减

$t\in[2,3]$ 时. $S(t)$ 单调增).

$\therefore$ 有 2 次加速, 1 次减速.

在 $[0,1]$, $[2,3]$ 时加速.

在 $[1,2]$ 时减速.

在 $t=1, 2$. 时 加速度 加 0