1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

刘子龙
080825050

1. (1) 解: 当~~$n\to\infty$时, 1项~~

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$

$=1$

故①式$=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1+\cdots 1)$

$=n=\infty$

−8

(2) 令~~$f(n)$~~$=\frac{n}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{(n+1)^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n+1)^2}=\infty$

−8

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ $(\sin x\sim x)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}$ $(1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x\, x^2}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解: 当$x\to 0$时, $\ln(1+x)\sim x$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

$=0$

−7

2. (1)

$y'=\left(\ln\tan\frac{x}{3}\right)'+\left(e^{\sqrt{x}}\sin x^2\right)'$

$\left(\ln\tan\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\times\frac{1}{3}$

$\left(e^{\sqrt{x}}\sin x^2\right)'=2\cos x^2\cdot e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\cdot\sin x^2$

$y'=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+2\cos x^2 e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2e^{\sqrt{x}}}\cdot\sin x^2$

−4

(2) 对x求导,

~~$e^y-xy=e$~~

~~两边求导对~~ y

~~$e^y y-y-xy'=0$~~

$e^y y'-y-xy'=0\Rightarrow y'=\frac{y}{e^y-x}$

当$x=0$时, 代$e^y-xy=e\Rightarrow y=1$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{e}$

3. ① 求 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$, 因当$x\to 0$时, $x^2\to 0$, $\cos\frac{1}{x^2}$为一个有界量

$\therefore$ 在$x=0$处$f(x)$连续, 故 $a=0$

② $\lim\limits_{x\to 0^+}a=0$ $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$, 在$x=0$处相等, 故可导

$\therefore f'(0)=0$

−6

4. 解: $\because\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=3$ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)]$

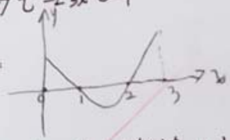
$=5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=5\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=15$

−15

5. 解: $s(t)'=6t^2-18t+12$

当$s(t)'=0\Rightarrow t=2$或$t=1$

画出$s(t)$的草图:



故有2次加速分别在$(0,1)$, $(2,3)$

1次减速在$(1,2)$

在1,2时加速度为0