1、求极限. （32 分）

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

电抚息 梁心怡 081525206

1. (1)

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} < \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) < \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = 1$$

根据夹逼定理可得 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = 1$ —6

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot x}{x^3} = \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}} = \frac{1}{2}$

2. (1) $y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}}{\tan\frac{x}{3}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\sin x^2 + \frac{e^{\sqrt{x}}\,2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$

$$= \frac{1}{(3+\frac{x^2}{3})\tan\frac{x}{3}} + \frac{e^{\sqrt{x}}\sin x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{2xe^{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x^4}}$$ —8

(2) $e^y\cdot y' - y - xy' = 0$

$$y' = \frac{y}{e^y - x}$$

$x=0$ 时 $y=1$ $\therefore y'(0) = \frac{1}{e}$

3. ~~$\lim_{x\to 0} f(x) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2x^2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$~~ $= 0 + \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x^3\cdot\frac{1}{x^2}} = \infty$

~~$f(0) = a$ $\therefore a = \infty$~~

~~$f'(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} =$~~

~~令 $t = \frac{1}{x^2}$ $\lim_{x\to 0}$~~

~~令 $t = \frac{1}{x^2}$ $\because x\to 0$ $\therefore t\to\infty$ $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cos t$~~ $= \lim_{t\to\infty}\frac{\cos t}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{-\sin t}{1} =$

$x^2 = \frac{1}{t}$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$ $\because f(0) = a$ $\therefore a = 0$ $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$ —6

$f'_+(0) = 0 + \infty = \infty$ $f'_-(0) = -\infty$ $f'_+(0) \neq f'_-(0) \neq f(0)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+5)-f(x)}{5} = \cancel{f'(x_0)}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)] = 15$

-16

5. $v(t) = S'(t) = 6t^2 - 18t + 12 \quad t\in[0,3]$

令 $S'(t)=0$ 时　$t=1$ 或 $t=2$

$x\in[0,1)\cup(2,3]$ 时，$S'(t)>0$

$x\in(1,2)$，　$S'(t)<0$

$s'(t)$ 在 $[0,1)$，$(2,3]$ 为增函数

$s(t)$ 在 $(1,2)$ 为减函数

~~该过程~~ 该段时间内有 2 次加速过程和一次减速过程

该段时间在 $t\in[0,1)\cup(2,3]$ 内加速，在 $t\in(1,2)$ 内减速

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 18$

令 $s''(t)=0$ 时　$t=1.5s$

-3

该段时间加速度为零时 t 为 $1.5s$