1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

韦书成　　机械设计制造及其自动化　　08 08 25002.

解:

1、 夹逼准则

1) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \leq \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$.　故极限为1 .

和式共n项

~~放缩~~ 左极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1$　　右极限: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = 1$

2) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{e}$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}$

由重要极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = e$　且 $\lim_{n\to\infty} -\frac{n}{n+1} = -1$

故 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$

结上 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$

原式 $= \frac{1}{e} \times 1 = 1$

3) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3}\right)$

$\tan x - \sin x = \tan x \,(1-\cos x)$

∵等价无穷小. 故 $\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$　则原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$

∴ 极限为 $\frac{1}{2}$.

4) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$　　通分后 等价无穷小替换，极限为 $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$\frac{1}{\ln(1+x)} \sim x - \frac{1}{2}x^2$　　$\Rightarrow$ 原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

$x\ln(x+1) \sim x \cdot x = x^2$

$x - \ln(1+x) \sim x - (x - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2$

2. 1)

$y = \ln\tan\frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y' = \frac{1}{3\tan\frac{x}{3}}\sec^2\frac{x}{3} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\sin x^2 + 2x e^{\sqrt{x}}\cos x^2$.

(2) 对方程两边求导 $\rightarrow e^y - xy = e \begin{cases} \overset{\text{左边求导}}{(e^y)' - (xy)'} = e^y \cdot y' - (y+xy') \\ \overset{\text{右边求导}}{e'} = 0 \end{cases}$

~~x=0时　y=1~~

得 ~~$y'(0)=$~~ $\frac{1}{e}$

故 $e^y \cdot y' - y - xy' = 0$

$y' = \frac{y}{e^y - x}$

$x=0$时　$y=1$

得 $y'(0) = \frac{1}{e}$

解: 3、 由连续可知 $a=0$.

$f(x)$在 $x=0$时 可导 ← -1

且 $f'(0)=0$.

4、由拉格朗日中值定理 可得

$\cancel{\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15}$.

$f(x+5)-f(x)=f'(\xi)\cdot 5$.

存在 $\xi_x\in(x,x+5)$、使得 $f(x+5)-f(x)=f'(\xi)\cdot 5$

当 $x\to+\infty$时 $\xi_x\to+\infty$

$\because$ $(x<\xi_x<x+5)$

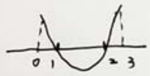
已知 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=3$

故 $\lim_{x\to+\infty}f'(\xi_x)=3$

故 $\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi_x)=5\times3=15$. -1

5、 加速度.

$a(t)=s'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$ 如图



已知 $a>0$时 加速

$a<0$时 减速

由图知: 加速度过程. $[0,1]$ 和$[2,3]$

减速过程. $[1,2]$

加速度为 0 的时刻 $t=1$, $t=2$.

综上: 有2次加速过程 $[0,1]$ 和$[2,3]$

1次 减速过程 $[1,2]$

加速度为零时 $t=1$ 和 $t=2$.