1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

邹健乐 061025078

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leqslant$ 原式 $\leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$

当$n\to\infty$时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\to 1$

当$n\to\infty$时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\to 1$

5

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n+1)\cdot\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}}$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

当$x\to 0$时 $\tan x-\sin x\to 0$ $x^3\to 0$

由洛必达法则

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan x+\sin x}{6x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x+\sin x}{6x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{6}+\frac{\sin x}{6x}\right)$

$=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ 当$x\to 0$时分子分母均趋于零

由洛必达

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}+1}$

对 $\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}$ 求极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(1+x)+1}{1}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ 即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$

2. 设$y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\tan\frac{x}{3}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+2x\cdot\cos x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{3}\tan\frac{x}{3}\cdot\sec^2\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2\right)$

$=\frac{2}{3\sin\frac{2x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2\right)$

(2) $e^y-xy=e$ $y=y(x)$

代入$x=0$ $e^y=e \Rightarrow y=1$.

$e^y\cdot y'-(y+xy')=0$

代入$x=0$ $y=1$ $e\cdot y'-1=0$

$y'(0)=\frac{1}{e}$

3、$\because f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore f'(x)=\begin{cases} 2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+\dfrac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

连续性

$\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$ 解得 $a=0$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x^2}=0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 且 $f'(0)=0$

4、由拉格朗日中值定理 存在 $\xi\in(x,x+5)$?

使得 $f(x+5)-f(x)=5f'(\xi)$ -2

当 $x\to+\infty$ 时 $\xi\to+\infty$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=5\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=15$

5、$S'(t)=6t^2-18t+12$

~~$=6(t^2-3t-4)+36$~~

~~$=6(t-4)(t+1)+36$~~

$=6(t^2-3t+2)$

$=6(t-1)(t-2)$

令 $S'(t)=0$ $t_1=1$ $t_2=2$

当 $t\in[0,1)$ $S'(t)>0$ $S(t)$ 单调递增为加速过程

当 $t\in(1,2)$ $S'(t)<0$ $S(t)$ 单调递减为减速过程

当 $t\in(2,3]$ $S'(t)>0$ $S(t)$ 单调递增为加速过程

共有2次加速 一次减速过程 在 $[0,1)$ 与 $(2,3]$ 过程为加速过程

在 $(1,2)$ 过程为减速过程. 加速度为零有两个时刻. 既 $t=1$ 与 $t=2$ 时