1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

梁博 0815251161

1. (1)

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{n^2+2}\right)^{\frac{1}{3}}+\cdots+\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}\right)^{\frac{1}{3}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

∵ 当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n^2}\to 0$

∴ $\frac{1}{n^2+1}\to 0$，$\frac{1}{n^2+2}\to 0$ …… $\frac{1}{n^2+n+1}\to 0$.

∴ $\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\times 0=0$.　答：原式极限值为0

(2)

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)}$.

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}$.

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$　$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$=e^{-1}\cdot 1$　$=\lim_{n\to\infty}1=1$

$=\frac{1}{e}$

答：原式极限值为 $\frac{1}{e}$

(3) 解：原式 $=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\sin x}{x^3\cdot\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3\cdot\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}$

$=\frac{1}{2}$.　答：原式极限值为 $\frac{1}{2}$

(4) 解：原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

~~$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=0$~~

~~$\lim_{x\to 0}x\ln(1+x)=0$~~

~~∴ 由洛必达法则可得~~

~~$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$~~

∵ $\lim_{x\to 0}x-\ln(1+x)=0$

$\lim_{x\to 0}x\cdot\ln(1+x)=0$

∴ 由洛必达法则可得

$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$.

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}$

$=1$.

答：原式极限值为1.

2. (1)

解：原式

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{\sqrt{x}}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{\sec^2\frac{\sqrt{x}}{3}}{3\tan\frac{\sqrt{x}}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+2x\cdot\cos x^2$

$=\frac{1}{3\sin\frac{\sqrt{x}}{3}\cos\frac{\sqrt{x}}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+2x\cdot\cos x^2$

(2) 解：设 $y=y(x)$

由 $e^y-xy=e$

得 $e^y=e+xy$

$e^y\cdot y'=y+x\cdot y'$

当 $x=0$ 时

$y(0)=y$　~~$y'(x)=y'(x)$~~

$e^y-0\cdot y=e$　$y'(0)=y'$

$e^y=e$

$\therefore y=1$

~~$\therefore 0\cdot y'=1+0\cdot y'(0)$~~　$\therefore e^1\cdot y'=1+0\cdot y'(0)$

~~$y'(0)=\frac{1}{e}$~~　$y'(0)=\frac{1}{e}$

答：$y'(0)=\frac{1}{e}$

3. 解：设 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

∴ 有 $0^2\cdot\cos\frac{1}{0^2}=a$　对其求导有 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2}{x^3}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

∴ 可得 $a=0$.

由题设可知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数为

$f'(0^-)=4\times 0\cdot\sin\frac{1}{0^2}\cdot\frac{1}{0^3}$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数为

$f'(0^+)=4\times 0\cdot\sin\frac{1}{0^2}\cdot\frac{1}{0^3}$

∴ $f'(0^-)=f'(0^+)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

且 $f'(0)=0$.

4. 解：

$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\times 5\right]$

$=\lim_{x\to+\infty}[f'(x)\times 5]$

$=\lim_{x\to+\infty}f'(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}5$

$=3\times 5$

$=15$.

5. 解：

答：在 $t=[0,1)\cup(2,3]$ 时减速

$t=(1,2)$ 时加速

在 $t=1$，$t=2$ 时加速度为零.

解答如下：

$s(t)=6t^2-18t+12$

令 $s'(t)=0$

$\therefore 6t^2-18t+12=0$

$t^2-3t+2=0$

$(t-2)(t-1)=0$

$t_1=$~~2~~1　$t_2=$~~1~~2.

列表：

x	$[0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,3]$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗