

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

3、已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值, 并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

胡耀东 电子科技大学 081525240

1. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right)$

$\underset{n \rightarrow \infty}{\approx} 1$

-7

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+n} \right)^{n+1}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^{n+1} = e$

-2

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$ 为 $\frac{0}{0}$ 型

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2}$

$\underset{x \rightarrow 0}{\approx} 3x^2$

-4

$\approx \frac{1}{6}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(\ln x)} - \frac{1}{x} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(\ln x)}{\ln(\ln x)x} \right) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{0}{0}$

-8

2. (1) $y = \frac{\sec x}{3\tan x} + \frac{e^{ix}}{2ix} \sin x + 2e^{ix} \cos x$

$\Rightarrow -$

$\frac{e^{ix}-xy}{e}$

-10

3. 当 $x=0$ 时

$x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore a=0$

当 $x \rightarrow 0$ 时

$\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$

$\cos \frac{1}{x^2}$ 在 $-1, 1$ 跳动

不可导

4.

-16

5. $s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$

当 $s'(t) = 0$ 时

解得 $t=1$ 或 2

$\therefore t \in [0, 3]$

当 $t \in [0, 1]$ 时

$s'(t) > 0$

该同学正在加速

当 $t \in [1, 2]$ 时

$s'(t) < 0$

该同学正在减速

当 $t \in [2, 3]$ 时

$s'(t) > 0$

该同学正在加速

综上所述，该同学在 $t \in [0, 3]$ 时刻有两次加速一次减速

加速为： $[0, 1] \cup [2, 3]$

减速为： $[1, 2]$

加速度为零的时刻为 $t=1$ 和 $t=2$