1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

谢涵 06102511

1\. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$ -8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{e(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{e}$ -1

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$

2\. (1) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot2x$

$=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\sin x^2+2e^{\sqrt{x}}x\cos x^2$ -1

$=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x^2+2x\cos x^2\right)$

(2) 当 $x=0$ 时，$y=1$ 即 $y(0)=1$.

对方程 $e^y-xy=e$ 两边同时求导得 $e^{y(x)}\cdot y'(x)-[y(x)+xy'(x)]=0$.

故当 $x=0$ 时，有 $e^{y(0)}\cdot y'(0)-y(0)=0$. 即 $e\,y'(0)-1=0$.

解得 $y'(0)=\frac{1}{e}$

3\. 由题意 $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=f(0)=a$. 解得 $a=0$

可导， $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot(-\sin\frac{1}{x^2})\cdot2x=2x\cos\frac{1}{x^2}-x^2\sin\frac{1}{x^2}$

$\therefore f'(0)=0$

-7

4\. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$ ，不妨设 $f'(x)=3+\frac{1}{x}$. 则 $f(x)=3x+\ln x$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}[3(x+5)+\ln(x+5)-3x-\ln x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(15+\ln\frac{x+5}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(15+\ln\frac{1+\frac{5}{x}}{1}\right)=16.$$

-16

5\. ~~加速度 $a=\frac{S(t)}{t}=2t^2-9t+12 \quad t\in[0,3]$~~

$S'(t)=6t^2-18t+12=6(t-2)(t-1)$

故 $t=1$ ，$t=2$ 时. 为加速度为零时刻.

当 $0\le t<1$ 时， $S'(t)>0$,

当 $1<t<2$ 时， $S'(t)<0$

当 $2<t\le3$ 时 $S'(t)>0$.

故该同学有2次加速，1次减速，

在 $t\in[0,1]$ ，$t\in(2,3]$ 时加速，在 $t\in(1,2)$ 时减速.