1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

王石灵 物理三班. D61025063

1. (1). 由夹逼定理

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) = 1$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)(-1)} = e^{-1}$

(3). $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin x}{\cos^3 x} + \sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{\cos^3 x} + x}{6x} = 0 - \frac{1}{6}$

−4

(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}$

$= \frac{1}{2}$

2. (1). $y' = \frac{1}{3\cos^2\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\sin x^2 + 2x\cos x^2 \cdot e^{\sqrt{x}}$

(2). $y' \cdot e^y - (y + xy') = 0$. $\because e^y = e + xy$. $y = \ln(e+xy)$.

$\because y' \cdot (e+xy) - (\ln(e+xy) + xy') = 0$

$x=0$ 时.

$y' \cdot e - 1 = 0$

$y' = \frac{1}{e}$

3. $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2} = 0$. 不可导. $\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a-a}{\Delta x} = 0$

? $\because a = 0$

$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(x+\Delta x)^2 \cdot \cos\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2}}{\Delta x} = 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$

−9

在 $x=0$ 左右导数不相等.

4. $\lim_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{5[f(x+5)-f(x)]}{5}\right] = \lim_{x\to+\infty} 5f'(x) = 5\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 15$

−16

5. $s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$ ∵ 当 $t\in(0,1)$ 和 $t\in(2,3]$ 时. 在加速.

$= 6(t^2-3t+2)$ 在 $t\in(1,3)$ 时在减速.

$= 6(t-1)(t-2)$ 在. 1s和2s时. 加速度为零.

有二段加速, 一段减速.