1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

杨树园 (080825062) 机械2班

1. (1) 由 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \le \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}}$ −2

~~由夹逼~~

由夹逼准则得 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

取对数. 令 $y=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ $\quad \ln y=(n+1)\ln\frac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\ln y=\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\frac{n}{n+1}$ $\quad n\to\infty$时, $\frac{n}{n+1}\to1$

∴ $\lim_{n\to\infty}\ln y=0$ $\quad$ ∴ $y\to1$ −6

∴ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1$

(3) ~~为~~ 当 $x\to0$时, 为$\frac{0}{0}$, 由洛必达法则得.

$\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-\cos x}{3x^2}$

由 $\sec^2x=1+\tan^2x$, 等价无穷小代换得 $\tan x\sim x$, $\cos x\sim x$. $x=0$时, $\cos x=1$ −4

∴ $\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

(4) 由等价无穷小得 $\ln(1+x)\sim x$ −6

∴ $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$

2. (1) $y'=\frac{\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot2x$

$=\frac{1}{3}\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}+2\cos x^2\cdot x\right)$ −1

(2) 由隐函数求导得. $e^y\cdot y'-y-x\cdot y'=e$

$y'=\frac{e+y}{e^y-x}$ −5

当$x=0$时. $y'(0)=\frac{e+y}{e^y}$

3. $\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=0$.

∵ $f(x)$在 $x=0$处连续

∴ $a=0$ −7

不可导. ~~$f'(0)=0$~~

理由: 连续不一定可导, 连续是可导的必要条件

4. $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[f(x+5)-f(x)]}{5} = 3$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} [f(x+5)-f(x)] = 15$

-14

5. $s(t) = 6t^2 - 18t + 12$

令 $s'(t)=0$, $t_1=1$, $t_2=2$ $\quad s'(0)=12$

则在 $[0,1)$, $(2,3]$ 上单调递增,

在 $(1,2)$ 上单调递减

$\therefore$ 有2次加速过程, 1次减速过程

$\cancel{\frac{s(t)}{t}=}$

$a = (\frac{s(t)}{t})' = 4t-9$

-3

当 $t=\frac{3}{2}$ 时, 加速度为 0