1、求极限．（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数．（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'．

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$．

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由．（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$．（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$．试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻．（16 分）

[illegible] 081325023

1. (1) 解:

-8

(2) 解: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}-1\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(3) 解: $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3x^2}$

$= \frac{1}{3}$ -5

(4) 解: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}}$

$= \frac{1}{2}$

2. (1) $y' = \frac{1}{\tan\frac{1}{3}x} \cdot \frac{1}{\cos(\frac{1}{3}x)^2} \cdot \frac{1}{3} + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \sin x^2 + \sin 2x\, e^{\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{3\cdot \sin\frac{1}{3}x \cdot \cos\frac{1}{3}x} + e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} \sin x^2 + \sin 2x\right)$

-3

(2) 解:

$y'e^{y} - y - y'x = 0$

$y'(e^{y} - x) = y$

$y' = \frac{y}{e^{y} - x}$ −3

$y'(0) = \frac{y}{e^{y}}$

3.解: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2} = 0$ 可导.

故 $a = 0$. ?

当 $h(x) = x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2}$

$h'(x) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^2} \cdot 2 \cdot x^{-3}$ −9

$\lim\limits_{x\to 0} h'(x) = 0$. $f'(0) = 0$.

4.解: 已知 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3$

当 $\Delta x = 5$ 时.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+5) - f(x)}{5} = 3$ −16

$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x+5) - f(x)] = 15$.

5.解: $S'(t) = 6t^2 - 18t + 12 \quad (t\in[0,3])$

当 $S'(t) = 0$ 时 $\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$

当 $0 < t < 1$ 时. $S'(t) > 0$, 单调递增.

当 $1 < t < 2$ 时, $S'(t) < 0$ 单调递减.

当 $2 < t \le 3$ 时. $S'(t) > 0$ 单调递增

故有2次加速过程 在 $0 < t < 1$, $2 < t < 3$ 时.

有1次减速过程 在 $1 < t < 2$ 时

加速度为零的时刻为 15, 25 时.