1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

杨塑妍　　自动化

080325074

1. (1) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} <$ 原式 $< \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} = 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

~~n~~ 令 $n+1 = t$

$\because n\to\infty \quad \therefore n+1\to\infty$

$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t} = e$

−2

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$\because 0 < \frac{\sin x-\sin x}{x^3} <$ 原式 $< \frac{\tan x-\tan x}{x^3} = 0$

~~$= \frac{\cos^2 x - \cos x}{3x^2}$~~

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right) = 0$

~~$= \frac{3\sin x}{6x\cdot 2} = \frac{\cos x}{-4} = \frac{1}{-4}$~~

−8

(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)$

$= 0$

−7

2. (1) $y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{3}} \cdot \sec^2\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\sin x^2 + 2\sin x e^{\sqrt{x}}$

$= \frac{\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}} + \frac{1}{2e^{\sqrt{x}}}\cdot\sin x^2 + 2\sin x\cdot e^{\sqrt{x}}$

−6

$= \frac{2}{\sin\frac{2x}{3}} + \sin x\left(\frac{\sin x}{2e^{\sqrt{x}}} + 2e^{\sqrt{x}}\right)$

(2) ~~$e^y\cdot x^2 - y +$~~　~~$e^y - e = xy$~~　~~$e^y - e$~~　~~$y = x$~~

~~$e^y - y\cdot x - x = 0$~~

~~$y'(0) =$~~ ~~$e^y - y$~~ $= 0$

~~$y\ln e = \ln y$~~

$e^y\cdot x' - y - x'\cdot x = 0$

$y = x'(x+e^y)$

$y = (x+e^y)$

$y' = 1 + e^y\cdot x'$

$y'(0) = 1$

−8

3. $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}$

令 $t = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cos t = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot\lim_{t\to\infty}\cos t = 0$

? 故 a 的值为 0

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

$\because$ 当 $x\to 0$ 时 $\cos\frac{1}{x^2}$ 的数不一定

−9

4. $\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x+5)-3f(x)}{f'(x)}$

$\because f'(x)=3$

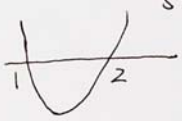
$\therefore f(x)=3x$

$f(x+5)-f(x) = 3x+15-3x = 15$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)] = 15$

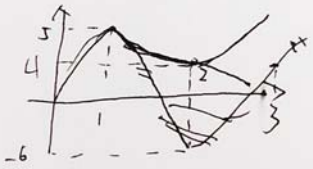
5. $s'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t^2-3t+2) = 6(t-2)(t-1)$

$s'(t)$



$s(1) = 2-9+12 = 5$

$s(2) = 16-36+24 = 4$



2次加速，1次减速

加速：0-1，2-3

减速：1-2

当 $t=1$ 和 $t=2$ 时加速度为零