1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

杨磊涛 [illegible] 机械设计制造及其自动化

1.(1) $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

−7

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\cancel{\lim_{n\to\infty}n^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot n^{n+1}}{n+1}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$

−4

(3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{1}{2}$

−7

(4) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$

−7

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=3\cdot\cos\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot2x\cdot\cos x^2$

$=3\cdot\cos^2\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+2x\cdot\cos x^2\right)$

−5

(2) $y=y(x)$ $e^y-xy=e$

$y'(x)$对 $y'\cdot e^y-y-xy'=0$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

$\therefore y'(0)=\frac{y}{e^y}$

−3

3、$\because$ 在$x=0$处连续

$\therefore a=0$

左极限 又$\because x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}$是偶函数

$\therefore f(x)=x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}(x\neq0)$时左极限右极限相等.

即极限为a

$\therefore f(x)$在$x=0$处可导 且$f'(0)=0$.

−14

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{x+\Delta x-x}$

当 $\Delta x=5$ 时

故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[f(x+5)-f(x)]}{5}=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$.

-16

5. $S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$S'(t)=6t^2-18t+12$.

令 $S'(t)=0$ 即 $6t^2-18t+12=0 \Rightarrow t^2-3t+2=0$

$\therefore (t-1)(t-2)=0$

$\therefore$ 当 $t=1$ ~~和~~或 $t=2$ 时 $S'(t)=0$ 即加速度为零.

加~~速时即S'(t)≥~~0

$t\in[0,1)\cup(2,3]$ 时 $S'(t)>0$, 即加速过程

$t\in[1,2]$ 时 $S'(t)<0$, 即减速过程

综上所述.

有两次加速过程分别在 $[0,1)$ 和 $(2,3]$ 这段时间

有一次减速过程在 $[1,2]$ 这段时间.

当 $t=1$ 或 $t=2$ 时刻加速度为零.