1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$ ，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

[illegible]
081325009

1.(1) 解: ~~$\lim_{x\to 0}$~~

当 $n\to\infty$ 时, $n^2+n+1\to\infty$ $\therefore \sqrt{n^2+n+1}\to\infty$ $\therefore \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\to 0$

故 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=0$

−8

(2) 解: 令 $t=n+1$, 则 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{t-1}{t}\right)^t=\left(1-\frac{1}{t}\right)^t$

$\because n\to\infty$ $\therefore t\to\infty$

则 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t=1$ 故 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1$

−6

(3) 解: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\tan x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right]$

~~$=\lim_{x\to 0}$~~

$=\lim_{x\to 0}\left[(1-1)\cdot\frac{1}{x^2}\right]$

$=0$

−8

(4) 令 $t=1+x$ 则 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t-1}=\frac{t-1-\ln t}{\ln t\,(t-1)}$

$\because x\to 0$ $\therefore t\to 1$ $\therefore t-1-\ln t\to 0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{1}{x}\right)=0$

−8

2 (1). $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}(\cos)x^2\cdot 2x$

$=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}(\cos)x^2\cdot 2x$

(2) $e^y-xy=e$

$e^y=e+xy$

$\ln e^y=\ln(e+xy)$

$y=\ln(e+xy)$

$y'(0)=\ln e=1$

$\therefore y'(0)$ 为 1

−8

3. $\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

~~$\therefore f(0)=0^2\cos\frac{1}{0}=0$~~

$\therefore x^2=0$ 则 $f(0)=0^2\cos\frac{1}{0}=0$

$\therefore a=0$

当 $x=0$ 时, $f(x)=0$ $f'(x)=0$ 且 $f'(x)=0$

$\therefore$ 可导, $f'(0)=0$

−14

4. 由题可知,

$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3$

$\therefore f'(x)=\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\Rightarrow f(x+5)-f(x)=5f'(x)$

$\therefore \lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}5f'(x)=15.$

−15

5. $S'(t)=6t^2-18t+12$. $t\in[0,3]$

令 $S'(t)=0$ 则 $t=1$, $t=2$.

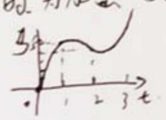
∴ 当 $0\le t<1$ 时 $S'(t)>0$ $S(t)$ 在 $[0,1)$ 单调递增

当 $1<t<2$ 时. $S'(t)<0$ $S(t)$ 在 $(1,2)$ 单调递减

当 $2<t\le 3$ 时. $S'(t)>0$ $S(t)$ 在 $(2,3]$ 单调递增

∴ 由加速度定理可知:

当 $S'(t)>0$ 时 为加速, $S'(t)<0$ 时 为减速

则可做此图 

∴ 小明同学在这段时间内有两次加速过程.

一次减速过程

在 $[0,1)$ 和 $(2,3]$ 内加速

在 $(1,2)$ 内减速.

且在1秒和2秒时加速度为0.