

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

3、已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值, 并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

姚长益 081825052 机器人工程

$$T1 \quad (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n+1}} \right)$$

=

-8

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right)}$$

=

$\frac{1}{e}$

-7

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} \right]$$

$\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}}{(1-\cos x)x^2} \right]$

$\xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x \cdot \frac{1}{\cos x}}{2x^2} \right] = \infty$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x^2} \right)$$

$\xrightarrow{\text{洛必达}} \infty$

-8

$$T2 \quad (1) y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\cos \frac{x}{3})^2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{x}{3}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \sin x^2 + 2x \cos x^2 \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$\xrightarrow{\text{洛必达}} \frac{1}{3 \tan \frac{x}{3} (\cos \frac{x}{3})^2} + e^{\sqrt{x}} \left(\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}} + 2x \cos x^2 \right)$

$\xrightarrow{\text{洛必达}} \frac{1}{3 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}} + e^{\sqrt{x}} \left(\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}} + 2x \cos x^2 \right)$

-2

$$(2) y = y(x)$$
$$e^{y(x)} - xy(x) = e$$

$$y'(x)e^{y(x)} - (y(x) + y'(x)x) = 0$$

$$y'(x)(e^{y(x)} - x) = y(x)$$

$$y'(x) = \frac{y(x)}{e^{y(x)} - x}$$

$$\underline{y'(0) = \frac{y(0)}{e^{y(0)} - x}}$$

$$y'(0) = \frac{y(0)}{e^{y(0)}}$$

$x=0$ 时

$$e^{y(0)} = e$$

$y(0) = 1$

$$y'(0) = \frac{1}{e}$$

T3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\cos \frac{1}{x^2} \in [-1, 1]$$

当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$ 趋向于 0

已知函数在 $x=0$ 处连续

$$\therefore a=0$$

$f'(0)$?

-7

$$\begin{aligned}
 T4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 \cdot \frac{f(x+5) - f(x)}{5} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x+5) - f(x)}{5} \right] \\
 &= 15 \quad \rightarrow 16
 \end{aligned}$$

$$T5. \quad S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t \quad t \in [0, 3]$$

$$S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$$

$$\begin{cases} S'(t) > 0 \\ t > 2 \text{ 或 } t < 1 \end{cases}$$

则 $S'(t)$ 在 $[0, 1], [2, 3]$ 单增, $(1, 2)$ 单减

\therefore 有2段加速, 1段减速

$$\exists S'(t) = 0$$

$$t = 1, 2$$

~~则在第1秒和第2秒的加速度为零~~

则在第1秒和第2秒的加速度为零