1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

李俊 080325094

1.(1) $\because n\to\infty \therefore \cancel{n^2}\ n^2 \gg n+1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$ −8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]^{-1}$

$= e^{-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$

$\cancel{=1\times 2=2} = 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ −8

2.(1) $y' = \frac{1}{3}\times\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{3})}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\ \cancel{\pm}\ -\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+2x\cdot\cos x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}} - e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}\sin x^2-2x\cdot\cos x^2)$ −2

~~(2) 两边同时求导~~

$\cancel{y'e^y - xy - xy'} = 0$

$\cancel{y'} =$

$y'\cancel{e^y - xy'} = 0$

(2) 两边同时取对数

$\ln(e^y - xy) = \cancel{e}\ \ln e = 1$

$\frac{\ln e^y}{\ln xy} = 1$ −10

$y = \ln x + \ln y$

$y' = \frac{1}{x} + y'\cdot\frac{1}{y}$

$y' = \frac{xy}{y-1}$

$\therefore y'(0) = 0$

3. ~~[illegible]~~ ~~设 $y=\frac{1}{x^2}$~~

~~设 $\frac{1}{x^2}$~~

$\therefore \cancel{\lim\limits_{x\to 0} y \frac{\cos y}{y}} =$

设 $y=\frac{1}{x^2}$

$\because x\to 0 \quad \therefore y\to\infty$

$\therefore \lim\limits_{y\to\infty}\frac{\cos y}{y}=0$

$\because$ 在 $x=0$ 时处连续

$\therefore f(0^{+}) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2} = 0$

$\therefore a=0$

$\cancel{\because f'(0+) = f'(x) = f'(x) =}$

~~$\therefore$ 可导~~ $\because f'(0+) \neq f'(0_-) =$

$\therefore$ 不可导 −8

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}f(x+5) - \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right] = 3$

$\therefore \frac{1}{5}\lim[f(x+5)-f(x)] = 3$ —16

$\therefore \lim[f(x+5)-f(x)] = 15$

5. ~~$s''(t)=12t-18$~~

~~当$s''(t)>0$时为加速 即$12t-18>0$.~~

~~$t>\frac{3}{2}$~~

$s'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

当$s'(t)>0$时为加速

即 $6(t-1)(t-2)>0$

$t<1$ 或 $t>2$

当$s'(t)<0$时为减速

即 $6(t-1)(t-2)<0$

$1<t<2$

$\therefore$可得当$t\in(0,1)$或$t\in(2,3)$时为加速过程 有2次加速过程

当$t\in(1,2)$时为减速过程、有1次减速过程

当$t=1$或$t=2$时加速度为0