

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

3、已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值, 并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

朱贤清 081825010

1. (1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有 $\sqrt{x^2 + c} \approx x$
故从 $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ 到 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$ 共有 n 项

$$\text{故而 } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n-1}$$

→ 8

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n-1}$$

$$= (1+\frac{1}{n})^{n+2(n+1)}$$

$$\text{由重要极限 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ 得}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})^{n+2(n+1)} = e^{3(n+1)}$$

$$\text{原式 } \lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x)}{x^3}$$

$$= \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos x \approx \frac{1}{2}x^2$$

$$\tan x \approx x$$

$$\text{原式 } \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{故而 } x = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \approx \ln(1+x)$$

$$\text{原式 } \lim_{x \rightarrow 0} = \frac{x - \ln(1+x)}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{故而 } x = 0$$

$$2. (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \tan \frac{x}{3} \text{ 且 } f(x) = e^{\sqrt{x}} \sin x^{\frac{1}{2}} = g(x)$$

$$\text{则 } y = f(x) + g(x) \text{ 由待定得 } y' = f'(x) + g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\tan \frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{x}{3}} = \frac{1}{\tan \frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3 + \tan^2 \frac{x}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}} \cdot \sin x^{\frac{1}{2}} + e^{\sqrt{x}} \cos x^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= e^{\sqrt{x}} (\frac{1}{2}\sin x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x \cos x^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{则 } y' = \frac{1}{3 \tan \frac{x}{3}} + e^{\sqrt{x}} (\frac{1}{2}\sin x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x \cos x^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{由题意得 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \cos x^{\frac{1}{2}} \text{ 时 } x^{\frac{1}{2}} \text{ 为无穷小, } \cos x^{\frac{1}{2}} \in [1, 1]$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \cos x^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \cos x^{\frac{1}{2}} = f(0) = 0$$

$$\text{故 } a=0$$

$$(2) e^y - xy - e = 0$$

$$\text{高阶两边同时求导}$$

$$e^y y' - 1 = 0$$

$$y' = \frac{1}{e^y}$$

$$y'(0) = \frac{1}{e^0} = 1$$

$$\text{(2) 通过 } f(x) \text{ 求解:}$$

$$\text{当 } f(x) \text{ 在 } f(0^+) \text{ 与 } f(0^-) \text{ 有相同极限 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处可导}$$

$$\text{若函数 } f(x) = x^2 \cos x^{\frac{1}{2}} \text{ 中 } x^2 \text{ 与 } \cos x^{\frac{1}{2}} \text{ 均单侧可导}$$

$$\text{则函数 } f(x) \text{ 为初等函数, 则 } f(0^+) = f(0^-)$$

$$\text{故 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处可导}$$

$$\text{且 } x \neq 0 \text{ 时 } f(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + x^2 (-\sin \frac{1}{x^2}) \cdot (-2) \cdot x^{-3}$$

$$x > 0 \text{ 时 } f'(x) = 0 \quad \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x} \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{且 } f'(0) = 0$$

$$5. S(t) = t^2 - 18t + 12$$

$$\frac{S(t)}{2} = \frac{8-18+12}{2} = 2 > 0$$

$$5. S'(t) = 2t^2 - 18t + 12 = 0$$

$$\therefore S'(t) = 0 \quad b(t-1)(t-2) = 0$$

$$\text{解得 } t=1 \text{ 或 } 2$$

$$\text{且 } S(t) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单减, } (2, 3) \text{ 上单增, 在 } (1, 2) \text{ 上单减}$$

$$\text{故函数 } S(t) \text{ 在 } t=1 \text{ 和 } t=2 \text{ 处加速度为 } 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+5) - f(x)]$$

$$\text{由待定得 } f'(x) = f'(x+5) - f'(x)$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x+5) = \frac{f(x+\Delta x+5) - f(x+\Delta x)}{5}$$

$$f(x+\Delta x) = 3\Delta x - f(x)$$

- 16