1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

全宇 08032086 自动化

解: 1.(1)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

当 $n\to\infty$ 时, $\sqrt{n^2+2}\to\infty$, $\sqrt{n^2+3}\to\infty$, $\cdots$ $\sqrt{n^2+n+1}\to\infty$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}=0$, $\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}=0$

根据有限个无穷小的和还是无穷小 —8

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$

$\therefore$ 该式极限为0。

1.(2)

解: 令 $t=\frac{1}{n+1}$, 当 $n\to\infty$ 时, $n+1\to\infty$, $\frac{1}{n+1}\to 0$,

$\therefore t\to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{-\frac{1}{t}\cdot(-1)}$

当 $t\to 0$ 时, $-t\to 0$

$\therefore \lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{-\frac{1}{t}\cdot(-1)}=\lim\limits_{-t\to 0}(1-t)^{-\frac{1}{t}\cdot(-1)}$

根据重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\therefore$ 该函数极限为 $e^{-1}=\frac{1}{e}$

1.(3) 解: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}\right)$

根据重要极限: 当 $x\to 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ~~$\sin x\sim x$~~

$\therefore$ ~~原式~~ 该极限可化为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot x^2}$

又根据重要极限: 当 $x\to 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1$

$\therefore$ 该极限可化为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^2}=\frac{1}{2\cos x}$

又$\because$ 当 $x=0$ 时, $\cos x=1$

$\therefore$ 该函数极限为 $\frac{1}{2}$。

1.(4) 解: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\cdot x}\right)$

根据重要极限: 当 $x\to 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$\therefore$ 该式可化为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)$

洛 $=\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$

洛 $=\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2}$ —1

当 $x=0$ 时, $\frac{1}{(1+x)^2}=1$

$\therefore$ 该函数极限为 $\frac{1}{2}$。

2.(1)

解: $y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x^2$

$+e^{\sqrt{x}}\cdot 2\sin x\cdot\cos x$

$=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x\left(\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+2\cos x\right)$

—2

(2) 解: 两边同时求导:

$e^y\cdot y'-(xy'+y)=0$

$\therefore y'=\frac{y}{e^y-x}$

当 $x=0$ 时, $y=1$

$\therefore$ 代入得 $y'(0)=\frac{1}{e^1-0}=\frac{1}{e}$

3. 解: 若在 $x=0$ 处连续, 则有 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

$\because f(0)=a$

$\because$ 当 $x\to 0$ 时, $x^2\to 0$, $|\cos\frac{1}{x^2}|\leq 1$

根据有界函数乘以无穷小的极限仍是无穷小

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$

$\therefore a=0$

若f(x)在 $x=0$ 处可导, 则有该点的左导数等于该点的右导数

$\because$ f(x)符合这一条件 —6

$\therefore$ f(x)在 $x=0$ 处可导

$\therefore$ 当 $x=0$ 时, $f'(0)=0$

$f'(0)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot(-\sin\frac{1}{x^2})\cdot(-\frac{2x}{x^4})$

$=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\ ]}$

4、解：

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$

$\therefore f(x)=3x$

$\therefore f(x+5)=3(x+5)=3x+15$

$\therefore f(x+5)-f(x)=15$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}15=15$

−16

5.解：$s'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t-2)(t-1)$

$s''(t)=12t-18$

令 $s''(t)=0$，即 $t=\frac{3}{2}s$

$s(t)$ 一 速度函数

$s'(t)$ 的物理意义表示瞬时速度

$s''(t)$ 的物理意义表示加速度

$\therefore$ 当 $s''(t)>0$，即 $\frac{3}{2}<t<3$ 时，该同学加速

当 $s''(t)<0$，即 $0\le t<\frac{3}{2}$ 时，该同学减速

当 $t=\frac{3}{2}$ 时，$a=0$

−8

$\therefore$ 有一次加速过程和一次减速过程

加速过程为 $t\in[\frac{3}{2},3)$，减速过程为 $t\in[0,\frac{3}{2})$