1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) \geq 1$ −7

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{\cos x}-x}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2}-1}{x^2}\right)$ −6

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2-x^2}\right) = \frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln e^x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln\frac{e^x}{x+1}}{x\ln(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)\Big/\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)\right) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}} = 0$ −7

2. (1) $y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\times\frac{1}{\sec^2\frac{x}{3}}\times\frac{1}{3} + e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin^2 x + e^{\sqrt{x}}\cdot 2\sin x^2\cdot\cos x = \frac{\cos^3\frac{x}{3}}{3\sin\frac{x}{3}} + e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin^2 x}{2\sqrt{x}}+\sin 2x\right)$ −3

(2) 对方程两边的x求导得 左边 $\frac{dy}{dx}\cdot e^y - y$，右边 0 −10

左右两导数相等即 $\frac{dy}{dx}\cdot e^y - y = 0$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{y}$

$\therefore y'(0) = 1$

3. ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 ∴ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ 对于 $f(0)$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{f(1)-f(0)}{1}\right) = \cos 1$

又∵ $\lim\limits_{x\to 0} f(0) = 1$ ∴ $a=1$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{f(1)-f(0)}{1}\right) = -\cos 1$ −16

∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \neq \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\right)$ ∴ $f(x)$ 在 $f(0)$ 处不可导

4. ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 3$ ∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[f(x+5)-f(x)]}{5} = 3$ −16

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)] = 15$

王翊琦

0808T047

5、$S(t)' = 6t^2-18t+12$

令 $S(t)'=0$

则 $t=1$、2

$0\le t<1$ 时 $S(t)'>0$ 为加速过程

$t=1$ 时加速度为0

$1<t<2$ 时 $S(t)'<0$ 为减速过程

$t=2$ 时加速度为0

$2<t\le 3$ 时 $S(t)'>0$ 为加速过程

−2