

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

3、已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值, 并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

李俊杰 机械2班 080825060

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \approx \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \right) \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$ -4

解: (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{\sin x - \cos x}{x}}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cdot \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x} = \frac{1}{6}$ -4

解: (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^{n+1}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = 1.$ -6

解: (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x - \ln(1+x)}{x} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]$
 $= -\infty.$ -8

2. 解: (1) $y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2$
 $y' = \frac{1}{3} \frac{1}{\tan \frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}} + 2x e^{\sqrt{x}} \cos x^2 + \sin x^2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

解: (2) $e^y - xy = e \quad \frac{e^y - e}{y} = x$ -9

3. 解: 因为 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 0 \quad \therefore a=0.$

是可导 $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3}$
 $= 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x^3} \sin \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} \right)$ -7

$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(x \cos \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x^2} \right).$

$\therefore f'(0) = 0.$

是不可导的, 因为在 $x=0$ 处连续
但它不是平滑的函数由图可知.
所以是不可导的

(4) 解: 设 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = 3$ 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x+s) - f(x)]$

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \lim_{x \rightarrow a} f(x+s) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &\stackrel{s \rightarrow 0}{=} \lim_{x \rightarrow a} f(x+s) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f'(x+s) - 3. \end{aligned}$$

— 16

5. 解: $\because s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$
 $s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$
 $\because 6t^2 - 18t + 12 = 0$ 时 $t_1 = 1$ 在 1s 时加速度为 0.
 $t_2 = 2$ 在 2s 时加速度为 0.

\therefore 该同学有 2 次加速过程和 1 次减速过程.

$$\begin{aligned} &\because \text{当 } t=0 \text{ 时 } s(t)=0 && \therefore \text{在 } 0 \sim 1 \text{ 时与 } 2 \sim 3 \text{ 时为加速过程.} \\ &t=1 \text{ 时 } s(t)=5 && \text{在 } 1 \sim 2 \text{ 时为减速过程.} \\ &t=\frac{3}{2} \text{ 时 } s(t)=4 && \\ &t=3 \text{ 时 } s(t)=9 && \end{aligned}$$