1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

姓名：张恺
专业：物理学4班
学号：061025103

1.(1)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$$
当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt{n^2+2}\to\infty$，$\sqrt{n^2+3}\to\infty$，……，$\sqrt{n^2+n+1}\to\infty$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\to 0$，$\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\to 0$，……，$\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\to 0$ -8

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$

1.(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ -8

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot n\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot(n)^{n+1}=1\cdot\lim_{n\to\infty}(n)^{n+1}=\infty$

1.(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\tan x\cdot\frac{1-\cos x}{x^3}\right)$ -2

又 $\tan x\sim x$ $\therefore$ 原式 $=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=f(x)$

$f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)$，$\cos x\sim x$ $\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{1}{2}$

1.(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

有 $\ln(1+x)\sim x+1$ $\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(1+x)x}=-\infty$ -8

2.(1) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{1}{\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$ -6

2.(2) $e^y-xy=e$

$\Rightarrow$ 求导数为 $y'\cdot e^y-y-xy'=0$

$\Rightarrow y'(e^y-x)-y=0$ -7

当 $x=y=0$ 时

$y'(1-0)-0=0$

$\Rightarrow y'(0)=0$

$\longrightarrow$

3. ∵ $f(x)$在$x=0$处连续 ∴当$x=0$时，~~0 cos~~ 有$a=0$

∴ $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

−8

$x\neq 0$时，$f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}$ ∴ $f'(x)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}-x^2(\sin\frac{1}{x^2})\cdot\frac{1}{x^3}=2x\cos\frac{1}{x^2}-\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x}$

$x=0$时，$f(x)=0$，$f'(x)=0$ ∴在$x=0$处可导，$f'(0)=0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[f(x+5)-f(x)]}{5}\times 5 = 5\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[f(x+5)-f(x)]}{5}$ ~~$=5\times f'(x)$~~

$=5\times\lim\limits_{x\to+\infty}f'(5)=5\times 3=15$

−16

5. $s(t)=2t^3-9t^2+12t$，$t\in[0,3]$

$s'(t)=$ ~~是~~ $6t^2-18t+12$，$t\in[0,3]$

$s''(t)=12t-18$ 当$s''(t)>0$时，~~令~~ $12t-18>0\Rightarrow\frac{3}{2}<t<3$

当$s''(t)<0$时，$12t-18<0\Rightarrow 0<t<\frac{3}{2}$

∴ $s'(t)$在$[0,\frac{3}{2})$单减 在$(\frac{3}{2},3]$上单增

又当$s'(t)=0$时，$6t^2-18+12=0\Rightarrow t=1$或$t=2$

∴ $s(t)$在$(0,1)$，$(2,3)$上单增 在$(1,2)$上单减

综上，该同学在$[0,1)$、$(2,3]$时段加速

在$(1,2)$时段减速

加速度为零时刻为1和2