1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

牛婷一

080825049

1. (1). 解：原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} - \frac{1}{n+1}$

$= 0.$

—8

(2). 解. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}$

$= 1$

—8

(3). 解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2\sin x}{6x}\right)$

$= \frac{1}{3}.$

—8

(4). 解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right).$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{2x(1+x)}\right)$

$= \frac{1}{2}$

当 $x=0$ 时 $f(0)=a.$

3. 解：$x\neq 0$, $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}$

$\because \cos\frac{1}{x^2} \le 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore a = \lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$

—6

第5题？

—16

$\tan\frac{x}{3} = u.$ $u' =$ $e^{\sqrt{x}} = v.$ $v' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

2. (1) 解：$\because y = \ln\tan\frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}}\sin x^2.$

$\therefore y' = (\tan\frac{x}{3})' \cdot \frac{1}{\tan\frac{x}{3}}$

$+ (e^{\sqrt{x}})'\cdot\sin x^2 + e^{\sqrt{x}}\cdot 2x\cdot\cos x^2$

$= \frac{1}{3\tan\frac{x}{3}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2$

$+ 2xe^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2.$

—2

(2) 解：当 $x=0$ 时. $e^y = e$ $\therefore y = 1.$

$e^y = e + xy$

$\therefore (e^y)' = e^y \cdot y'$

$-xy = e - e^y$

$(-xy)' = -y - xy'$

$(e^y - xy)' = (e)' \Rightarrow y - xy' = 0$

$\therefore y' = \frac{y}{e^y - x}$

$\therefore$ 当 $x=0$ 时. $y' = \frac{1}{e}.$

4. 解. $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 3$

设存在 $\xi \in (x, x+5)$

—2

$f(x+5) - f(x) = f'(\xi)\cdot[(x+5)-x]$

当 $x\to+\infty$ 时.

$f(x+5) - f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5f'(\xi)$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 3$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi) = 3$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} 5f'(\xi) = 15.$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5) - f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} 5f'(\xi)$

$= 15$