1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

程子帅 061025026 物理学1班

1.(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

-8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n+1\ln\frac{n}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$

$=\cancel{e^{(n+1)\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1})}}\,e^{(n+1)\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1-\frac{1}{n+1})}$

$=e^{n+1\cdot\frac{1}{n+1}}=e$

-6

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{\tan x}\,x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}\right]=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

-8

2.(1) 令 $\frac{x}{3}=V$, $u=\tan\frac{x}{3}$, $w=\sqrt{x}$, $z=x^2$

$y'=(\ln u)'+(e^w)'\cdot\sin z+e^w\cdot(\sin z)'$

$=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}\cancel{\sin x^2}\cdot\sin x^2}{2\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}2xe^{\sqrt{x}}\cos x^2$

(2) 对左右两边求导得

$e^y\cdot y'-(y+xy')=0$

$\Rightarrow e^y\cdot y'=y+xy'$

$\Rightarrow y'=\frac{y}{e^y-x}$

$y'=y'(x)$, $\therefore y'(0)=\frac{y}{e^y}$

当 $x=0$ 时, $y(0)=e^y-0=e$

$\Rightarrow y=1$

$\therefore y(0)=\frac{1}{e}$

3. ∵~~连续~~

3. ① 当 $x=0$ 时 $f(0)=a$ 当 $x\neq 0$ 时

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=\cancel{\lim\limits_{x\to 0}x^2}\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\tan\frac{1}{x^2}}=\lim x^2=0$

?

$\lim x^2\cos\frac{1}{x^2}=a\Rightarrow a=0$

② 当 $x=0$ 时,

$\cancel{x^2\cos}\ a'=0$,

$(x^2\cos\frac{1}{x})'=2x\cos\frac{1}{x}+x^2\cdot\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

$=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}(2x\cdot\frac{1}{x})+\lim\limits_{x\to 0}\cancel{x}\sin\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}2x+\lim\limits_{x\to 0}\cancel{x}x=0$

∴ 在 $x=0$ 处 $f(x)$ 可导

-10

4. ~~$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+x_0)-f(x)}{x_0} = 3$~~

~~当$x_0=5$时, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3$~~

~~$\therefore \lim_{x\to+\infty} f(x+5)-f(x)=15$~~

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right] = \lim_{x\to+\infty} \lim_{\Delta x\to 5} f'(x)$

$= \lim_{x\to+\infty} 15 = 15$ −16

$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left[f(x+5)-f(x)\right] = 75$

5、$t\in[0,3]$

由拉格朗日中值定理得

$s(3)-s(0)=s'(\xi)\cdot 3 \quad \xi\in t$

$s(3)=54-81+36=9$

$s(0)=0$

$\therefore s'(\xi)=\frac{9}{3}=3$

$s'(t)=6t^2-18t+12$

当 $s'(t)=0$时

$6t^2-18t+12=0$

$\Rightarrow t=1$或2

当$t=0$时, −8

$s'(t)=12$

$\therefore$当$t=3$时,

$s'(t)=s'(3)=12$

由此得有 2次加速, 2次减速