1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

盛文涛 081525244

1.(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n+2}}\right)=0$

$\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n+2}}\right)<\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0.$

−1

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-1}$

−1

(4) ? −8

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}\right)$

$=\frac{1}{2}$

二 3、$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，求 a.

并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，求 $f'(0)$

解 由题 $f(0+)=f(0-)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore f(0)=f(0+)=f(0-)=0$，$\therefore a=0$

$f'(x)=\begin{cases}2x\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{x^3}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$\therefore f'(x)=\sin\frac{1}{x^2}\ \frac{4}{x^2}$ 在 $x=0$ 时

是振荡间断点，$\therefore$ 不可导

−6

2、

(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

$y'=\ln\tan\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

−5

(2) $y=y(x)$ 由 $e^y-xy=e$ 确定，求 $y'(0)$.

两边同时求导

$e^y y'-y'=e$

$y'=\frac{e}{e^y-1}$

$e^y-0=e$

$y=1$

−5

$\therefore y'=\frac{e}{e-1}$

4. $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=3$ ，求 $\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

由题 $\lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}]=3$

$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3$ -14

$\therefore \lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$

5、

$S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $S'(t)=0$ 时

$t_1=1$ $t_2=2$.

$\therefore S'(t)$ 在 $(0,1),(2,3)$ 区间 >0

$(1,2)$ 区间内 <0

$\therefore$ 该同学共有2次加速，一次减速.

$(0,1)(2,3)$ 加速　　$(1,2)$ 减速

加速度为0时刻是 $t=1$ 和 $t=2$.