1、求极限．（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数．（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' ．

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由．（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

梁宇琨

081525207

1.(1) $\because n\to\infty \quad \therefore \frac{1}{n}\to 0$. −8

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=0$

(2) $\because \frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ −8

$\because 0<1-\frac{1}{n+1}<1 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=0$.

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$

$=\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2\cdot\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2-2x^2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}$

$=\frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2-2x^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2-x^2} \quad \because x\to 0$ −2

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{1}{2}$.

(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

$=\frac{\ln e^x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{\ln\frac{e^x}{1+x}}{x\ln(1+x)}$ −6

$\because x\to 0 \quad \therefore e^x\to 1 \quad 1+x\to 1 \quad \therefore \ln\frac{e^x}{1+x}\to 1$

$\ln(1+x)\to 0 \quad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{e^x}{1+x}}{x\ln(1+x)}=+\infty$

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=+\infty$

2.(1) $\because y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2$.

$\therefore$ 设 $u=\tan\frac{x}{3}$, $t=\frac{x}{3}$

$\therefore \left(\ln\tan\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}}$ −6

设 $u=x^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \left(e^{\sqrt{x}}\right)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

$\therefore \left(e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2\right)'=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot 2x\cos x^2$

$\therefore y'=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2e^{\sqrt{x}}\cdot x\cdot\cos x^2$

(2) 对方程 $e^y-xy=e$ 两边对 x 进行求导

$\therefore e^y\cdot y'-y-x\cdot y'=0$

$\therefore y'(e^y-x)=y$

$\therefore y'=\frac{y}{e^y-x}$ −2

$\because x=0 \quad \therefore y'(0)=\frac{y}{e^y}$

3. $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 外连续

且 $\lim_{x\to 0}x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\therefore a=0$

且当 $x=0$ 时 $f(x)=0$, 函数为常函数

$\therefore x=0$ 处可导 且 $f'(0)=0$.

4. $\because \lim_{x\to+\infty}f'(x)=3$

且 $f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$\therefore$ 当 $\Delta x=5$ 时

$f'(x)=\frac{f(x+5)-f(x)}{5}$ −15

$\therefore f(x+5)-f(x)=5f'(x)=15$.

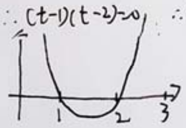
$\therefore \lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$

5. $\because S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$\therefore S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $S'(t)=0 \quad \therefore t^2-3t+2=0$

$\therefore (t-1)(t-2)=0, \quad \therefore t_1=1, t_2=2$



$\therefore$ 加速过程有两次在 0~1 秒和 2~3 秒

减速过程有一次在 1~2 秒.

且在 1.5s 时加速度为 0. −2