1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

俞光燕 080325036

1. (1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

...

−8

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

由夹逼准则知

$\frac{n}{n+2}<\frac{n}{n+1}<1$

则 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n+1}=1$

$\lim_{n\to\infty}1^{n+1}=1$

则 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1$

−8

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\tan x\cos x}{x^3}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}\right)$

$=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

由洛必达法则知

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{2+x}{(1+x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}$

$=\frac{1}{2}$

2. (1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin^2 x$

$\Rightarrow y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin^2 x+e^{\sqrt{x}}\cdot 2\cos x$

$=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\sin^2 x+e^{\sqrt{x}}2\cos x$

$=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin^2 x}{2\sqrt{x}}+2\cos x\right)$

−2

(2) ∵ $y=y(x)$

∴ $e^y-xy=e$

$\Rightarrow e^{y(x)}-x\cdot y(x)=e$

$\Rightarrow y(x)'\cdot e^{y(x)}-y(x)-x\cdot y(x)'=0$

$\Rightarrow y(x)'(e^{y(x)}-x)=y(x)$

$\Rightarrow y(x)'=\frac{y(x)}{e^{y(x)}-x}$

将 $x=0$ 代入则

$y(0)'=\frac{y(0)}{e^{y(0)}}$

−3

3. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0.\end{cases}$

由题知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

则 $\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=a=1$

则 $a=1$

∵ $f(x)'=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

−14

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导则 $f(0)'=1$

代入知 $f(0)'=0$, 则 $f(0)'\neq 0$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 因 $f(x)$ 在两区间内在 $x=0$ 处的导数不相同.

4.

−16

5题？

−16