1、求极限. （32 分）

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

张家榕 电子信息类
081525225

1.解：(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$\because n\to\infty \therefore \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\to 0$

同理各项均趋近于0 -8

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$=0$

解：(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$\because \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=0$

-8

解：(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}\right)}{x^3}$

$x\to 0 \quad \cos x\to 1 \quad \sin x\to 0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}=0$

-6

(4) 解：$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$\because x\to 0 \therefore \ln(1+x)\to 0^+$

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ -6

$=0$

2.解：(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot \operatorname{arccos}^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{\operatorname{arccos}^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2$ -3

(2) $e^y-xy=e$

对x两边同时求导得：$e^y\cdot y'-y-xy'=0$

$x=0$ 代入得 $y_0=1$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{e}$

即 $y'(0)=\frac{1}{e}$

3.解：$\because$ 函数在 $x=0$ 处连续，$\therefore f(0^+)=f(0^-)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0^+}x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=a$

$\therefore a=0$ 又 $\because x\neq 0$ 时 $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^3}$

证明：$\because$ 当 $x=0$ 时，$f'(0^+)=f'(0^-)$

$\therefore f(x)$ 可导

即 $a=0$ 且当 $x=0$ 时函数可导.

-5

4.解：$\because \lim_{x\to\infty}f'(x)=3$. $\therefore \lim_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)]=f'(x)\cdot\Delta x\overset{?}{=}f'(x)\cdot[(x+5)-x]=f'(x)\cdot 5$

$=15$

-4

5 解:

$S(t)=2t^3-9t^2+12t \quad t\in[0,3]$

$S'(t)=6t^2-18t+12. \quad t\in[0,3]$

当 $t=1$ 或 $t=2$ 时有 $S'(t)=0$

t	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,3)$
$S'(t)$	>0	0	<0	0	>0
$S(t)$	↑		↓		↑

即知 ~~当 $t\in(0,1)$ 时. $S'(t)>$~~

当 $t\in(0,1),(2,3)$ 时. $S'(t)>0$. $S(t)$ 单调递增. 即加速度大于零 为加速过程

$t\in(1,2)$ 时. $S'(t)<0$. $S(t)$ 单调递减. 即加速度小于零. 为减速过程

且知当 $t=1$ 和 2 时. $S'(t)=0$. 即加速度为零。

综上所述 在 $t\in[0,3]$ 内. 有 2 次加速一次减速. 当 $t=1$ 和 2 时. 加速度为 0.

当 $t\in(0,1),(2,3)$ 时为加速 当 $t\in(1,2)$ 时为减速.