1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

谢超

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解：原式 $=\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(e^{x}$

−8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

−8

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ $\cancel{\lim\limits_{x\to 0}\tan x\ \sin x}$ 当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}=1$

−8

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

−7

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\frac{1+x-1}{(1+x)\ln(1+x)+x}$

2. (1) $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot 2x\cdot\cos x^2$

$=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\frac{e^{\sqrt{x}}\sin x^2}{2\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}\cdot 2x\cos x^2$

(2) $e^{y}-xy=e$

两边求导 $y'\cdot e^{x}-y'\cdot y=0$

$y=e^{x}$

−10

$y'=e^{x}$

$y'(0)=1$

3. 解: $\because \lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\therefore$? $a=0$ —10

$\because f(x)$在R上连续，但$f(x)$分为两段

$\therefore f(x)$在$x=0$处不可导

4. 解: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$

$f'(x)=$ —16

5. 设 $v(t)=s'(t)=6t^2-18t+12$

$a(t)=v'(t)=12t-18$

S(t) 速度函数

当 $a(t)=0$时，$t=\frac{3}{2}$

当 $t\in[0,\frac{3}{2})$时，$a(t)<0$

$t\in[\frac{3}{2},3]$时，$a(t)>0$

共有一次加速与一次减速。

当时间$t\in[0,\frac{3}{2})$时，同学在减速。 —10

时间$t\in[\frac{3}{2},3]$时，同学在加速