1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

机械设计制造及其自动化 0803250412 [illegible]海涛

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

-8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1}$

$=\frac{1}{e}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^3}=\frac{1}{2}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{2}=\frac{1}{2}.$

2. (1) 解: $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\sin x^2+2x\cos x^2\cdot e^{\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{6\sin\frac{2x}{3}}+\frac{e^{\sqrt{x}}(4\sqrt{x^3}\cos x^2-\sin x^2)}{2\sqrt{x}}$

-1

(2) 解: $e^y-xy=e$ 两边同时关于x求导.

$e^y\frac{dy}{dx}-y-x\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{e^y-x}=y'$　　$y'(0)=\frac{y}{e^y}$

当x=0时. $e^y=e$　$y'(0)=\frac{1}{e}$

$y=1.$

3. 解: $f(0)=a$

∵ f(x)在 x=0处连续

∴ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}=f(0)=a$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$ ($x^2\to 0$, $\cos\frac{1}{x^2}\in[-1,1]$)

∴ $a=0$

∵ $x\neq 0$时, $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\cdot -2\cdot\frac{1}{x^3}$

$=\frac{2x^2\cos\frac{1}{x^2}+2\sin\frac{1}{x^2}}{x}$

-6

$f'_+(0)$, $f'_-(0)$ 无意义.

~~f(0)~~ ∴ $f'(x)$在 x=0 处不可导.

4. 解: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right]=3$

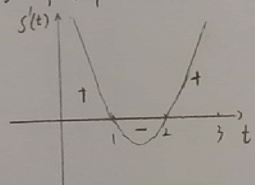
$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]}{\lim\limits_{x\to+\infty}5}=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$

-16

5. 解: $s'(t)=6t^2-18t+12$ ($t\in[0,3]$)

令 $s'(t)=0$, $t=1$ 或 $t=2$.



由图可知, 该同学在 $t\in[0,1)$ 加速, $t\in[1,2)$ 减速, $t\in[2,3]$ 加速

综上. 该同学经过 2次加速, 1次减速

在 t=1s 和 t=2s 时, 加速度为0