

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

3、已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值, 并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

王童 电子信息类3班 061523088

1. (1) 解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+2n+1}} \right) = 0$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = 1$ - 8

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) = 0$ - 8 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = 0$ - 8

2. (1) $y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{3}} \sin x^2$
解: $y' = \frac{1}{\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}} + e^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \sin x^2 + 2x \cos x^2 \right)$ - 5

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y - 3y = e^x$ 确定, 求 $y'(0)$

解: $y'(0) = ?$ - 10

3. 解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$f'(0) = ?$ - 16

4. 解: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+5) - f(x)] = 15$

$f(x+5) - f(x) = 5f'(x)$ - 14
 $\therefore x \rightarrow \infty \therefore x \rightarrow \infty$

$\therefore 5 \times 3 = 15.$

5. 答: 该同学在这段时间内有2次加速过程, 1次减速过程.

在 $t \in (0, 1)$ 上加速

? 在 $t \in (1, 2)$ 上减速

? 在 $t \in (2, 3)$ 上加速

- 13