1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

李欣怡 自动化

080325019

1. 求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

设 $S_n=\sum\limits_{K=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$\because n^2+2\le n^2+K\le n^2+n+1$ 对 $K=2,3,\cdots,n+1$ 可得

$\therefore \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+K}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$

$\therefore \sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le \cancel{S_n}\ S_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

即 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\le S_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

根据夹逼准则可得

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1.$

(3). $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^5)$

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^5)$

$\therefore \tan x-\sin x=\frac{x^3}{2}+o(x^5)$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2}+o(x^2)\right)=\frac{1}{2}$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$

当 $n\to\infty$ 时 $(1+\frac{1}{n})^n\to e$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{e}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

用泰勒展开可得

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$

$\therefore x-\ln(1+x)=\frac{x^2}{2}-o(x^3)$. 且 $x\ln(1+x)=x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$

$=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$

2. (1) 求导数

$y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$ 求 y'

设 $u=\tan\frac{x}{3}$

$\therefore y'=(\ln u)'+(e^{\sqrt{x}}\sin x^2)'$

$\ln(u)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3\sin\frac{2x}{3}}$

$(e^{\sqrt{x}}\sin x^2)'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot2x$

$=e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2\right)$

$\therefore y'=\frac{2}{3\sin\frac{2x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2\right)$

(2) 由方程 $e^y - xy = e$ 对x求导

$\Leftrightarrow$ $e^y - y - xy = 0$

当$x=0$时 $y=1$ 代入可得

$y'(0) = \frac{1}{e}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ ~~[illegible]~~

∴ 使$f(x)$在$x=0$处连续

∴ $a = \lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$

导数 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x} = 0$

∴ $a=0$，$f(x)$在$x=0$处可导 且 $f'(0)=0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 3$ 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+5) - f(x)]$

~~$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$~~ 在区间$[x, x+5]$存在 $\xi \in (x, x+5)$ 使得

$f(x+5) - f(x) = f'(\xi)\cdot 5$

当$x\to+\infty$时 $\xi \to +\infty$

故：

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+5) - f(x)] = 15$

拉格朗日条件要表述！

−3

5. ∵ $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$.

∴ $S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$

令 $S'(t) = 0$ 可得 $t = 1$ 或 2

∴ 在$[0,1]$内速度~~减小~~增加

在$[1,2]$内速度减小

在$[2,3]$内速度增加

∴ 加速2次，减速1次，加速度为0的时刻为1和2.