1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

王梦云　081525174　电信5班

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$=1$　−5

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n+1)\ln(1+n)}$　−6

$=e$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cdot2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{\cos x\cdot x^2}$

$=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right]$

$=\frac{\lim\limits_{x\to0}[x-\ln(1+x)]}{\lim\limits_{x\to0}x\ln(1+x)}$　−5

$=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}[\ln(1+x)+x+1]}$

$=0$

2. (1) 解: $y'=\frac{1}{3}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot2x\cos x^2$

$=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}\cdot2x\cos x^2$

$=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}}+2x\cos x^2\right)$

(2) $e^y-xy=e$

$\therefore y'e^y-y=0.$

$\therefore y'=\frac{y}{e^y}$

$\therefore y'(0)=0$?　−2

3. 解: $\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x=0}f(x)$

$\therefore a=0$　−6

$\because x\neq0$ 时,

$f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 为偶函数

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $f'(0)=0.$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+5)-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

−16

5. 解: $S(t)=2t^3-9t^2+12t$

$\therefore S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $S'(t)=0.$

$\therefore t=2$ 或 1

$t\in[0,1]$ 时 $S'(t)>0.$

$t\in(1,2]$ 时 $S'(t)<0.$

$t\in(2,3]$ 时 $S'(t)>0.$

$\therefore$ 该同学在这段时间有2次加速过程和一次减速过程, 加速时段为 $[0,1]$, $(2,3]$ s时 减速时段为 $(1,2]$ s时.

$S''(t)=12t-18.$

令 $S''(t)=0.$

$t=\frac{3}{2}s$　−2

当 $t=\frac{3}{2}s$ 时, 加速度为0.