1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

1. (1) 原式 $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+2}}{n^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{n^2+3}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n^2+n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{n^2+2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{n^2+3}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n^2+n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{n+\frac{2}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}{n+\frac{3}{n}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n+1+\frac{1}{n}}$

$= \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n+1}$

$= 1$

-8

(2) 原式 $= e^{\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{-1}{n+1}\right)}$

$= \frac{1}{e}$

-4

(3) 原式 $= \frac{\lim_{x\to0}\tan x-\lim_{x\to0}\sin x}{\lim_{x\to0}x^3} = \lim \frac{\frac{x}{1+x^2}-x}{x^3}$

$= \lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^3-x^5}$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{2x^3-x^5}{x^2} = 2x-x^3 = 0$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^3-x^5} = \infty$

(3) 原式 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}$

$= \frac{1}{2}$

-2

(4). $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$

$= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$

$= 0.$

-8

2. (1) $y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+2x\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2$

-4

(2). $\because y=y(x)$ $\therefore y'=y'(x)$

将方程两边关于 x 求导得 $e^y\cdot y'-y-xy\cdot y'=0$ 即 $y'=\frac{y}{e^y-xy}$

$\therefore y'(x)=\frac{y}{e^y-xy}$ $\therefore y'(0)=\frac{y}{e^y}$.

-4

3. 解: $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=0.$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=0.$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $\therefore f(0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)$ 即 $a=0.$

不可导, 理由如下:

当 $x\neq0$ 时 $f'(x)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}2x\cdot\left(1-\frac{1}{x^4}\right)+\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}2x-\frac{2}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}$

$=-\infty+\infty$

$\therefore$ 该式子不成立

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

-7

韦嘉乐

08082504 4

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\times 5\right]$

$=\cancel{\lim\limits_{x\to+\infty}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}5.$

$=f'(x)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}5\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}5$ -16

$=3\times5\times5=75$

---

5. $S'(t)=6t^2-18t+12$

令 $S'(t)=0$.

解得 $t_1=1$ $t_2=2$.

在区间区 $[0,1]$ 上 $S'(t)$ ~~<0~~ >0, $S(t)$ 单调递增.

在区间 $[1,2]$ 上 $S'(t)<0$, $S(t)$ 单调递减.

在区间 $[2,3]$ 上 $S'(t)>0$, $S(t)$ 单调递增.

$\therefore$ 该同学在这段时间内有2次加速过程，1次减速过程

当 $t\in[0,1]\cup[2,3]$ 时该同学加速

当 $t\in[1,2]$ 时该同学减速

加速度为零的时刻有 $t=1$, $t=2$。