

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

$$3、\text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a \text{ 的值, 并讨论此时 } f(x) \text{ 在}$$

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

式梦婷 081525188

1. 求极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n+1}} \right)$

解: 原式 = 1

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$

解: $\because n \rightarrow \infty, \frac{n}{n+1} \rightarrow 1, \therefore \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \rightarrow 1$

\therefore 原式 = 1

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$

解: $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^3}$ 又: $x \rightarrow 0, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
 $= \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

解: $\because x \rightarrow 0, \ln(1+x) \sim x$

\therefore 原式 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = 0$

2. 求导数

(1) 设 $y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2$, 求 y'

$y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{3}} \times \sec^2 \frac{x}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x}} \sin x^2 + e^{\sqrt{x}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x$
 $= \frac{\sec^2 \frac{x}{3}}{3 \tan \frac{x}{3}} + e^{\sqrt{x}} \left(\frac{\sin x^2}{2\sqrt{x}} + \cos x^2 \cdot 2x \right)$

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y - xy = e$ 所确定, 求 $y'(0)$.

解: $y^2 \cdot e^y - (y + xy^2) = 1$

3. 解: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 0, \therefore a = 0$

可导,
 $f'(x) = 2x \cdot \cos \frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \left(-\sin \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right)$
 $= 2x \cdot \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \cdot \sin \frac{1}{x^2}$
 $f'(0) = 0$

4. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]$

解: $\begin{matrix} f(x) & f(x+5) \\ \nearrow & \nearrow \end{matrix}$ 令 $x+5 = a, x = b$
 即求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(a) - f(b)]$
 又: $b+a=5, b+5=a, a-b=5$

$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$

又: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \therefore f(a) - f(b) = 3 \times 5 = 15$

又: $f(a) - f(b) = f(x+5) - f(x)$

$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)] = 15$

5. $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$.

$s'(t) = 6t^2 - 18t + 12$

$= 6(t-2)(t-1)$.



$[0, 1)$ 单调递增.

$(1, 2)$ 单调递减.

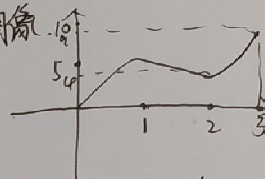
$(2, 3]$ 单调递增.

$s(0) = 0$, $s(t)$ 大致图像.

$s(1) = 5$,

$s(2) = 4$.

$s(3) = 9$.



∴ 有两次加速和一次减速过程.

$0 \sim 1$ s 加速.

$1 \sim 2$ s 减速.

$2 \sim 3$ s 加速.

令 $s'(t) = 0$, 即 $6(t-2)(t-1) = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

∴ 1s, 2s 时, 加速度为 0.