1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

李乐丹、080325069

1.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+(n+1)}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)$ -8

$=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解: $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} e^{-1}$

$=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}1-\lim\limits_{x\to 0}1\right)$

$=0$

-8

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$

$=0$ -8

2.

(1) 解: $\because y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{x^{\frac{1}{2}}}\sin x^2$

$\therefore y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{x^{\frac{1}{2}}}\sin x^2\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)+e^{x^{\frac{1}{2}}}\cos x^2\cdot 2x$

$y'=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{1}{2}}}\sin x^2+2xe^{x^{\frac{1}{2}}}\cos x^2$

(2) 解: $\because e^y-xy=e$

$\ln e^y-\ln xy=\ln e$

即 $y-[\ln x+\ln y]=1$

$y-\ln y=\ln x+1$

$y=\ln y+\ln x+1$

$\therefore e^y-xy=e$

$e^{\ln y+\ln x+1}-xy=e$

$exy-xy=e$

$y(ex-x)=e$

$y=\frac{e}{x(e-1)}$

-10

$\because y=\frac{e}{x(e-1)}$ $\therefore y'=-\frac{e-1}{[x(e-1)]^2}$

当 $x=0$ 时 $y'(0)=0$

3.

解: $\because f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 又 $\because$ 由题可得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

则 $a=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$ $\therefore f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$\because f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $\therefore$ 在 $x=0$ 处 $f(x)$ 不可导 -7

$\because f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 时 $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2\sin\frac{1}{x^2}\frac{2}{x^3}$

4.解：$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x+5)-f'(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x+5)-\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$

又∵由题可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$　∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x+5)=5+3=8$

∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x+5)-\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$　-16

$=8-3$

$=5$

5解：∵ $s(t)=2t^3-9t^2+12t$

∴ $s'(t)=6t^2-18t+12$

$s'(t)=6(t^2-3t+2)$

$s'(t)=6(t-2)(t-1)$

令 $s'(t)=0$

则 $6(t-2)(t-1)=0$

得 $t=2$、$t=1$

令 $s'(t)>0$

$6(t-2)(t-1)=0$

$t<1$ 或 $t>2$ 又∵ $t\in[0,3]$ ∴ $0\le t<1$ 或 $2<t\le3$

令 $s'(t)<0$

$6(t-2)(t-1)=0$

$1\le t\le2$

∴ $s(t)$ 在 $[0,1)\cup(2,3]$ 区间内单调递增 在 $[1,2]$ 区间内单调递减

总结：该同学在 $[0,3]$ 内有2次加速过程、1次减速过程

并且在 $t=1$ 或2时其加速度为零