

1、求极限. (32 分)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

2、求导数. (20 分)

$$(1) \text{ 设 } y = \ln \tan \frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \sin x^2, \text{ 求 } y'.$$

$$(2) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } e^y - xy = e \text{ 所确定, 求 } y'(0).$$

3、已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 的值, 并讨论此时 $f(x)$ 在

$x=0$ 处是否可导, 若可导, 则求出 $f'(0)$; 若不可导, 说明理由. (16 分)

$$4、\text{ 设 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 3, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+5) - f(x)]. \quad (16 \text{ 分})$$

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$, 时间 $t \in [0, 3]$. 试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程? 并给出具体时间段以及加速度为零的时刻. (16 分)

韦玉 车辆工程 081325002

$$1. (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n^2+3)\cdots\sqrt{n^2+2} + \cdots + (n^2+2)\cdots\sqrt{n^2+n+1}}{(n^2+2)(n^2+3)\cdots(n^2+n+1)} \right]$$

$$= 1 \quad -8$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right)$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2} \right)$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \sin x}{\cos x} \right)$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{2\cos x + 2x \sin x}{\cos^2 x} + \cos x}{6} \right)$$

$$\text{代入 } x=0 \text{ 时 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x - \ln(x+1)}{x \cdot \ln(x+1)} \right]$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}} \right]$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x+2} \right) \quad \text{代入 } x=0$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{2} \quad -2$$

$$2. (1) y' = \frac{\frac{1}{3} \sec^2 \frac{x}{3}}{\tan \frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{3}} \cdot \cos^2 \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x}{3}} \cdot \sin x^2$$

$$(2) y'e^y - y' = 0 \\ y'(e^y - 1) = 0 \quad -10$$

$$3. x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = 2x \cdot \cos \frac{1}{x^2} - x^2 \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \sin \frac{1}{x^2}$$

$$= 2x \cdot \cos \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+5) - f(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [f'(x+5) - f'(x)]$$

-16

-16

$$5. S'(t) = 6t^2 - 18t + 12, t \in [0, 3]$$

$$\therefore S'(t) = 0, t=2 \text{ 或 } 1$$

$\therefore S(t)$ 在 $[1, 2]$ 内单减在 $[0, 1]$ 和 $[2, 3]$ 上单增

即有 2 次加速, 时间段为 $[0, 1]$ 和 $[2, 3]$; 1 次减速, 时间段为 $[1, 2]$

加速度为 0 的时刻为 1 或 2