1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

鲍瑞锋 08082S039

1. (1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$=0+0+\cdots+0$

$=0$

-8

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{-1}$

$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{-1}$

$=\frac{1}{e}$

(3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解 $=\lim_{x\to0}\left(\frac{x-x}{x^3}\right)$

$=0$

-8

(4) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解 $=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$

$=0$

-8

2. (1) 解 $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\tan\frac{x}{3}\cdot\sec\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{\sin x}\ \sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cdot\cos x^2\cdot 2x$

$=\frac{1}{3\tan\frac{x}{3}}\cdot\tan\frac{x}{3}\cdot\sec\frac{x}{3}+xe^{\sqrt{x}}\left(\frac{5}{4}\cancel{x}\sin x^2+2\cos x^2\right)$

-4

(2) $\because e^y-xy=e$

$\therefore$ 求导得 $e^y\cdot y'-y-x\cdot y'=0$

整理得 $y'=\frac{y}{e^y-x}$

$\because$ 当 $x=0$ 时 $y(0)=1$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{e^1-0}=\frac{1}{e}$

3. $\because f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ a, & x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore$ 当 $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 时

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=a=1$

即 $a=1$

-14

~~$\because f(x)_{x\to0^-}=f(x)_{x\to0^+}=f(0)$~~ $f(0)$

当 $f'(x)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^4}$,

~~$=x\cos\ 2x\cos\frac{1}{x^2}+x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}$~~ $\cdot x$

$\because\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=0$

且 ~~当 $x=$~~ f

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$\therefore f'(0)=0$

4. $\because\lim_{x\to+\infty}f'(x)=3$

$\therefore f(x+5)-f(x)=$ ~~lim~~ $3\cdot(x+5-x)=15$

$\therefore\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=\lim_{x\to+\infty}15$

$=15$

-16

5. ∵ $S(t)=2t^3-9t^2+12t$

∴ $S(t)=6t^2-18t+12$

令 $S(t)=0$ 得 $6t^2-18t+12=0$

解得 $t=1$ 或 $t=2$

∴ $S(t)$ 在$(0,1)$ $(2,3)$上单调递增 在$(1,2)$上单调递减

即该同学在这段时间内有2次加速过程 1次减速过程

加速时间段为 0~1S 和 2~3S

减速时间段为 1~2S

加速度为0的时刻为1S 和 2S