1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

董欣怡

1. (1) 原式 $\Rightarrow$ $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$

即 $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1$. 根据夹逼准则. 原式 $=1$.

(2) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \left[1+\left(\frac{n}{n+1}-1\right)\right]^{-(n+1)\cdot(-1)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[1+\left(\frac{-1}{n+1}\right)\right]^{-(n+1)\cdot(-1)}$

$= e^{-1}$.

(3) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

$= \frac{1}{2}$

(4) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$

$= 0$. -8

2. (1). $y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{(\cos\frac{1}{3}x)^2} \cdot \frac{1}{3} + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2x^2} \cdot \sin x^2 + e^{\sqrt{x}} \cdot 2\sin x\cos x$

$= \frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}} + e^{\sqrt{x}}\sin x\left(\frac{\sin x}{2x^2} + 2\cos x\right)$. -1

(2). $y' \Rightarrow e^y \cdot y' - y - xy' = 0$. 当 $x=0$ 时, $y=1$.

$\therefore y' = \frac{+y}{e^y - x}$

$\therefore y'(0) = +\frac{1}{e}$

3. 解：∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

∴ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$.

∴ $a=0$

-6

此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

∴ $f'(0)=0$.

4. 解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[5\times\frac{f(x+5)-f(x)}{5}\right] = 5\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5} = 5\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 5\times 3 = 15$

-14

5. 解：∵ $S(t) = 2t^3-9t^2+12t$, $t\in[0,3]$.

∴ $S'(t) = 6t^2-18t+12$.

当 $S'(t)=0$ 时，a(加速度) $=0$. 则

$6t^2-18t+12=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$.

$t=1$ 或 $t=2$.

加速过程中 $S'(t)>0$，则

$(t-1)(t-2)>0$.

时间段为 $[0,1]$, $[2,3]$ 有2次

减速过程中 $S'(t)<0$，则

$(t-1)(t-2)<0$.

时间段为 $[1,2]$. 有1次.