1、求极限. （32 分）

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

张玉洁　　机器人工程　　081825014

1.(1).　　−8　　−7

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\cdot x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}$

(3) 当 $x\to 0$，$\sin x\to 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$\because n\to\infty$，$\frac{1}{n+1}\to 0$，则 $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\to 1$　　−8

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

当 $x\to 0$，$\ln(1+x)\to 0$，则 $\frac{1}{\ln(1+x)}\to\infty$

$\frac{1}{x}\to\infty$　　−8

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=0$

2.(1) $\left(\ln\tan\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}$

$\left(e^{\sqrt{x}}\sin x^2\right)'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+e^{\sqrt{x}}\cos x^2\cdot 2x$

$\therefore y'=\left(\ln\tan\frac{x}{3}\right)'+\left(e^{\sqrt{x}}\sin x^2\right)'=\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^2+2x\cos x^2\right)$

(2) $\because e^y-xy=e$　$\therefore y-\ln y=\ln x+1$

−10

3. $\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

~~f(0)~~ $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=a$

当 $x\to 0$，则 $x^2\to 0$，

$\frac{1}{x^2}\to\infty$，$\cos\frac{1}{x^2}$ 值为 $[-1,1]$ 振荡

则 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\therefore a=0$　　−10

$\because$ 知 $\cos\frac{1}{x^2}$ 值为 $[-1,1]$ 振荡，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可

4. $\because\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$.　$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3$.　　−16

得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15$.

5. $S'(t)=6t^2-18t+12=(2t-4)(3t-3)$，$t\in[0,3]$

$\therefore$ 加速为零的时刻 $t_1=2$，$t_2=1$.

$\because t\in[0,3]$

$\therefore$ 某同学在 $[0,1]$ 时间 ~~减速~~ 加速，在 $(2,3)$ 时间加速，在 $(1,2)$ 时间减速.

故有2次加速过程和1次减速过程.