1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$ （4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

李志豪 080325071

1.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+n}}\right)$

解 利用夹逼准则

$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

当 $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)=0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+n}}\right)=0$

-8

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

令 $n+1=t$, $n=t-1$

$t\to\infty$

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{t}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}\right]^{-1}$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解 ∵ ~~tanx~~ $x\to 0$ 时

$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

∴ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

解 当 $x\to 0$ 时

$\ln(1+x)\sim x$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}0$

$=0$

-7

(2). 求导数

(1) 设 $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$ 求 y'

$y'=\frac{\sec^2\frac{x}{3}}{3\tan\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{x}\sin x^2+2x\cos x^2 e^{\sqrt{x}}$

(2). 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 确定, 求 $y'(0)$

解 $y'e^y-y-xy'=0$

$y'=\frac{y}{e^y-x}$

当 $x=0$ 时 $e^y=e$ $y=1$

$y'(0)=\frac{1}{e-0}=\frac{1}{e}$

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a. 并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导, 若可导, 求出 $f'(0)$, 不可导, 说明理由

解 ∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=a=0$

-6

若在 $x=0$ 处可导 则 $f'(0^+)=f'(0^-)$

$x>0$ $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$

$x<0$ $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x^2}+x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x^2}$

$f'(0^+)\neq f'(0^-)$ 故不可导

4. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$

解 ~~由~~导数定义得

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+5)-f(x)]$

$=5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[f(x+5)-f(x)]}{5}$

$=5f(x)$

$=15$

-15

5 解 $s(t)=2t^3-9t^2+12t$, $t\in[0,3]$

$s'(t)=6t^2-18t+12$ $t\in[0,3]$

$s''(t)=12t-18$ $t\in[0,3]$

当 $s''(t)=12t-18=0$ 时

$t=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$

此时 加速度为0

减速过程

$s''(t)<0$

$12t-18<0$

$0<t<\frac{3}{2}$ 只有1次减速过程

-12

加速过程

$12t-18>0$

$t>\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}<t<3$ 只有一次加速过程