1、求极限. （32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

彦银霖

081525200

电信5班

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$

解由夹逼准则

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}=1.$$

$\therefore$ 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

令 $n+1=t$.

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}$

$\therefore$ $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-t)}\right)^{-t\cdot(-1)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}$

$x\to0$ 等价无穷小: $\sin x\sim x$ $\quad 1-\cos x=\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right).$

解: $=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\cdot x}\right)$

对分子分母分别求导.

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{x+\ln(1+x)}{x+1}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{x+\ln(1+x)}\right)$$

再次运用洛必达

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{x+\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}\right)=\frac{1}{2}$$

2. (1) 设 $y = \ln \tan\frac{x}{3} + e^{\sqrt{x}} \cdot \sin x^2$.

$$y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} \sec^2\frac{x}{3} + e^{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin x^2 + e^{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos x \cdot 2x$$

$$\cancel{y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} \sec^2\frac{x}{3} + e^{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin x^2 + \cos x^2 \cdot 2x\right)}$$

(2) $y = y(x)$ 由方程 $e^y - xy = e$ 所确定. 求 $y'(0)$

对 x 进行求导.

$$e^y \cdot y' - (y + xy') = 0.$$

$$e^y \cdot y' - y - xy' = 0.$$

$$(e^y - x) \cdot y' - y = 0. \quad y' = \frac{y}{e^y - x}$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = \frac{1}{e}$$

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续

~~则求 $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x^2}$ $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2}$~~

~~令 $x^2 = t$~~

~~则 $\lim\limits_{t \to 0} t \cdot \cos\frac{1}{t}$~~

则求 $\cancel{x^2 \cos\frac{1}{x^2}}$ $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2}$

令 $x^2 = t$

$\lim\limits_{t \to 0} t \cdot \cos\frac{1}{t} =$

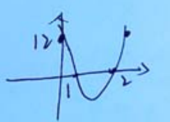
-16

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 3$ 求 $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x+5) - f(x)]$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{[f(x+5) - f(x)]}{5} = \lim_{x \to \infty} f'(x) = 3.$$

$$\therefore \Rightarrow \lim_{x \to \infty} [f(x+5) - f(x)] = 15.$$

-16



速度函数.

5. $S(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t \quad t \in [0, 3]$

$S'(t) = 6t^2 - 18t + 12$. $\quad S'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \quad t_2 = 2$. 故 有两次减速加速. $(2, 3)$

$S''(t) = 12t - 18$. 加速度为0 则 $S''(t) = 0$. $t = \frac{3}{2}s$.

加速在 $t \in (1, 1.5)$ ([illegible])

减速在 $t \in (0, 1) \ (1.5, 2)$

$S^{(3)}(t) = 12$

-6