1、求极限.（32 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数.（20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y'.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由.（16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$.（16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

张浩宇 080825059

1.(1) ~~由夹逼定理可得~~

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)<\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\right)$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}}=1$

由夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cancel{=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(n+1)\ln\frac{n}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\cdot\ln(1+\frac{-1}{n+1})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\cdot\frac{-1}{n+1}}=}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{2x}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\cdot x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)=\infty$ −4

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\cdot\sin x^2$

$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+\cos x^2\cdot2x\cdot e^{\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}}+e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^2+2x\cdot\cos x^2\right)$ −2

(2) $e^y-xy=e$ 对两边同时求导可得：$e^y\cdot y'-y-x\cdot y'=0$

$\cancel{e^y-y-x\cdot y'=0\quad x\cdot y'=e^y-y}$ $\therefore y'=\frac{y}{e^y-x}$

由 $e^y-xy=e$ 可知当 $x=0$ 时 $y=1$

$\therefore y'(0)=\frac{1}{e-0}=\frac{1}{e}$

3、由题意可得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}a$

又 $\because \lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}=0$

$\therefore a=0$ −1

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$\because$ 当 $x=0$ 时 $f(x)=a$.

且函数 $f(x)$ 是个偶函数 $x=0$ 是 $f(x)$ 的对称轴

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且是极小值点 $\therefore f'(0)=0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=$ ~~$\lim\limits_{x\to+\infty}[$~~

由拉格朗日中值定理可得：$f(x+5)-f(x)=f'(\xi)\cdot 5$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[5\cdot f'(\xi)]=5\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\xi)=15$.

ξ呢?

-2

5. 设函数 $f(t)=2t^3-9t^2+12t$

$a=f'(t)=6t^2-18t+12$

$=6(t^2-3t+2)$

$=6(t-2)(t-1)$

当 $a>0$ 时代表同学加速 当 $a<0$ 时代表同学减速.

∴当 $t\in[0,1)\cup(2,3]$ 时 $a>0$ 此时该同学加速

当 $t\in(1,2)$ 时 $a<0$ 故此时该同学减速

∴该同学在这段时间内有2次加速过程和1次减速过程

$t\in[0,1)\cup(2,3]$ 时为加速段

$t\in(1,2)$ 时为减速段

~~$a=0$~~ 当 $t=1$ 或 2 时 $a=0$ 即加速度为0.