1、求极限. （32 分）

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$　　（4） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

2、求导数. （20 分）

（1）设 $y=\ln\tan\dfrac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$，求 y' .

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $y'(0)$.

3、已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值，并讨论此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，则求出 $f'(0)$；若不可导，说明理由. （16 分）

4、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=3$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]$. （16 分）

5、设某同学在操场跑步时速度函数为 $S(t)=2t^3-9t^2+12t$，时间 $t\in[0,3]$.试判断该同学在这段时间内有几次加速过程和几次减速过程？并给出具体时间段以及加速度为零的时刻.（16 分）

韩玉洁 电信3班 08152124

1.(1)

−8

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$n \sim n+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1^{n+1}$

$=1$

−8

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$

$\cancel{\therefore = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot -\frac{1}{x^2}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4} = -\infty}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{\cos x}}{x^3} = -\frac{1}{2}$ −2

(4) 当 $x\to 0$ 时 $\ln(1+x)\sim x$

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=0.$

−8

2.(1) $y=\ln\tan\frac{x}{3}+e^{\sqrt{x}}\sin x^2$

$\therefore y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{3}}\cdot\sec^2\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}+\cos x^2\cdot 2x\cdot e^{\sqrt{x}}+\sin x^2 e^{\sqrt{x}}$

−3

(2) 对等式两边x求导

$\therefore \frac{dy}{dx}\cdot e^y-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{e^y-x}$ −5

$e^y-xy=e$ 两边同时取对数

$\therefore y-\ln xy=1 \to y-(\ln x+\ln y)=1.$

对x求导：$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}-\cancel{\ln y}\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$

3. $\because$ 为$f(x)$在$x=0$处连续

$\therefore \lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=a$

−13

此时$f(x)$在$x=0$处可导

可导则函数的左右极限相等 已知其连续则一定可导.

4. $\because \lim_{x\to+\infty}f'(x)=3.$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}f(x+5)-\lim_{x\to+\infty}f(x).$

$f'(x)=\frac{f(x+5)-f(x)}{5}=3$

$5f'(x)=f(x+5)-f(x)=15.$

$\therefore 5\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}[f(x+5)-f(x)]=15.$

−16

5. $\because S(t)=2t^3-9t^2+12t$ $\therefore S'(t)=6t^2-18t+12.$

$S'(t)=6t^2-18t+12=0$ 时，$t=1,2.$

$\therefore$ 有2次加速在$[0,1),(2,3]$，1次减速，在$(1,2)$时间段内

在$t=1,2$时加速度为0