一种基于改进模拟退火算法的TSP问题的应用研究

齐安智

（辽宁建筑职业学院，辽宁 辽阳 111000）

摘　要：旅行商问题（TSP）是一种经典路径优化选择问题，可以通过暴力枚举、分支定界、动态规划、爬山算法等方法解决该问题，这些方法各有利弊。基于此，笔者对模拟退火算法进行改进处理，一是对扰动过程设置随机接受概率从而跳出局部最优解陷阱，二是设置循环阈值以较少的时空消耗获得一个最优解或者极其接近最优解的满意解。笔者使用Matlab软件进行仿真，结果表明该算法较好地解决了TSP问题。

关键词：TSP问题；模拟退火；阈值；满意解

中图分类号：TP18　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1003-9767（2020）03-032-03

An Applied Research on TSP Problem Based on Improved Simulated Annealing Algorithm

Qi Anzhi

(Liaoning Jianzhu Vocational College, Liaoyang Liaoning 111000, China)

Abstract: Traveling salesman problem (TSP) is a classical path optimization problem, which can be solved by violent enumeration, branch and bound, dynamic planning, mountain climbing algorithm and other methods, each of which has its own advantages and disadvantages. Based on this, the author improves the simulated annealing algorithm. One is to set the random acceptance probability for the disturbance process to jump out of the local optimal solution trap. The other is to set the cycle threshold to obtain an optimal solution or a satisfactory solution close to the optimal solution with less time and space consumption. The author uses MATLAB software to simulate, and the result shows that the algorithm solves the TSP problem well.

Key words: TSP problem; simulated annealing; the threshold value; satisfactory solution

1　TSP（Travelling Salesman Problem）问题

TSP问题[1]是数学领域中的一个著名的组合优化问题。该问题描述为：假设某人要遍历访问n个城市，要求其从某一个初始城市出发，每一个城市只能访问一次，最后仍然要返回到初始的出发城市，同时要求该人所经过的路程总和要最小。

TSP问题数学模型描述形式如下：

$$z=\min\sum_{i\neq j}x_{ij}d_{ij} \tag{1}$$

其中，x_{ij}=0或者1，表示第i个城市到第j个城市的路径；d_{ij}表示表示第i个城市到第j个城市的距离。

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\end{cases} \tag{2}$$

约束：要求每个城市只能访问一次，且要回到初始出发城市。

针对n个城市遍历访问的TSP问题，若通过暴力枚举法实现求解，则其过程为：假设以第一个城市为初始出发点，则计算任意一条路径[1,i2,i3……in,1]长度的时间复杂度为O(n)，计算路径个数的时间复杂度为O（（n-1）！），求和运算的时间复杂度为O（n！），进一步比较所有路径得到最短路径的时间复杂度为O（n-1），因此，枚举法的时间复杂度为O（n！），当n是一个较大数值时，计算机所花费的时间开销则非常大，难以快速实现其求解；而分支定界法和动态规划法，则需要在计算过程中开辟大量的计算机空间，因此，当n较大时，实现其求解亦比较困难。此外，由于爬山算法的策略选择是无后效性，即只与当前状态有关，并未从整体最优性上加以考虑，导致难以跳出局部最优解陷阱，所以，限制了该算法在TSP问题求解中的应用。

2　模拟退火（SA）算法

模拟退火算法是一种基于蒙特卡洛[2]思想设计的用于近似求解最优化问题的著名方法。该算法的基本思想主要是通

作者简介：齐安智（1977—），男，山东昌邑人，硕士研究生，副教授。研究方向：系统优化。

过模拟物理退火 [3] 过程实现搜索最优解。

2.1　模拟退火算法的原理

从热力学角度来说，退火是一种物体实现逐渐降温过程的物理现象。当物体温度变低时，物体的能量状态亦会变低，若温度达到够低时，物体会逐渐冷凝与结晶。由热力学知识可知：当物体处于结晶状态时，物体能量状态处于一个平衡的最低能量状态。当物体缓慢降温时，物体可以达到最低能量状态，即结晶状态，但降温过程过快时，则会导致物体处于能量非最低的非结晶状态。

物理退火的实现过程为：对于一个处于非晶体状态的物体，先将该物体加温至一个充分高的温度，此时物体粒子会随着温度升高变为无序，同时内能增大，然后对该物体缓慢降温，即对其退火，则物体粒子逐渐变为有序，使其在每个温度都达到平衡，则最终在阈值温度时，物体达到粒子排列有序的内能最低的结晶状态。物体物理退火过程如图 1 所示。

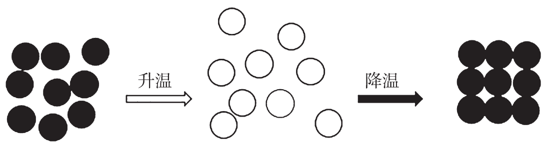

图 1　物理退火

2.2　改进模拟退火算法

假设存在一个数学函数 Y=E(X)，如图 2 所示。该函数存在初始解点为 G，要求从 G 点出发搜索该函数的最优解点，函数目标值要求最小。若对模拟退火算法不进行改进，按照移动接受概率 Paccept（Enew ＜ Eold）=1 处理，即由 G 点出发后，如果函数值能够减小，则继续进行搜索，若不能则停止搜索，那么经过不断搜索，G 点会移动到 A 点，此时从 A 点出发，无论向哪个方向移动，函数值都不会减小，搜索过程终止。由图 2 明显可知：该算法由于移动规则受到概率限制，仅仅取得了一个局部最优解，并未取得整体最优解。

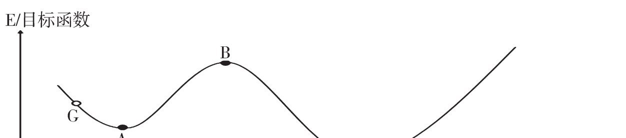

图 2　模拟退火算法数学函数描述

改进的模拟退火算法引入一个随机接受概率，用于接受一个比当前解差的解，这样就有一定的概率跳出局部最优解陷阱，从而达到全局最优解。如图 2 所示，当改进模拟退火算法在搜索到局部最优解 A 点时，则会以一定概率向右继续移动，经过若干次移动则有可能到达峰值 B 点，于是跳出了局部最优解 A 点。

根据 Metropolis 准则 [4]，物体粒子在温度 T 时趋于平衡的概率为 exp(-ΔE/(KT))，其中 E 为温度 T 时的内能，exp 是自然对数，ΔE 为物体内能改变值，K 为玻尔兹曼常数。

因此，改进模拟退火算法移动接受概率的数学模型描述为：

$$P_{accept}=\begin{cases}1 & (Enew\le Eold)\\ \exp^{-(Enew-Eold)/KT} & (Enew> Eold)\end{cases} \quad (3)$$

由该模型可知：温度越高时，出现一次能量差为 ΔE 的降温概率就越大；温度越低时，降温概率就越小。又由于 $Enew > Eold$ 时，改进模拟退火算法才按照接受概率 exp(-ΔE/(KT)) 进行移动，所以 P_{accept} 的取值范围是 (0,1)，符合概率密度函数要求。同时，随着温度 T 的降低，移动接收概率 exp(-ΔE/(KT)) 也会逐渐降低，此时通过设置温度阈值，可以更加方便地实现搜索终止。

3　改进 SA 算法实现 TSP 问题

改进的模拟退火算法通过 Metropolis 准则，在当前解较差时，按照一定概率接受当前解，从而有效避免了局部最优解陷阱。同时，利用设置终止温度阈值，有效地实现了算法搜索的收敛性。

3.1　TSP 问题的改进 SA 算法设计

3.1.1　初始解构造

通常以一个随机解作为初始解，但需要注意的问题是应在理论上使得该初始解属于解空间的任意一个解；也可以根据经验选择一个较好的初始解，此时可以适当设置一个较低的初始温度，以便于提高算法效率。在此，针对 TSP 问题，以任一条路径 [1,i2,i3……in,1] 构造初始解，其中该一维矩阵中的每个元素代表每个需要遍历访问的城市。

3.1.2　邻解生成

对于 TSP 问题，其邻解生成，可以按照任意两个城市进行两点对调或者两点及其之间元素进行逆序重排。邻解构造需要注意的问题是：一是新解要能保证遍布解空间；二是新旧解的变化不会导致目标函数变化过大。

3.1.3　初始温度设置

初始温度 T_0 从理论角度来说，应该尽量设置较高，这样初始移动接受概率 exp(-ΔE/(KT$_0$)) 就可以足够大，但初始温度 T_0 过高，则会增加计算时间消耗。因此，一种设置初始温度较为有效的方法是随机抽取若干解，以此若干解的目标函数值的方差作为初始温度。当然也可以通过经验设置，但这种方法很困难。

3.1.4　降温方式选择

通常在降温方式选择应用较多的一种方法是：Tnew=a. Told，其中 a 为（0.80,0.99）。

3.1.5　等温步数设置

等温步数也称 Metropolis 抽样稳定准则，用于确定在各个温度下产生邻解的数目。等温过程的目的是在该温度下让系统达到平衡状态，因此可以通过检验目标函数的均值是否

稳定来确定等温步数。由于等温步数受温度的影响，高温时等温步数应设置为较小的一个值，低温时等温步数应设置为较大的一个值。有时为了计算方便，也可以直接设置一个具体的等温步数。

3.1.6　花费函数设置

花费函数通常由目标函数进行构造，目标函数可以直接作为花费函数，也可以用目标函数的倒数、相反数等作为花费函数进行构造，但要注意一点：选择的花费函数要能够被快速计算出来。

3.1.7　终止温度阈值

算法搜索终止的条件是：若干邻解的目标函数值不再变化或者已经达到终止温度阈值。其中，终止温度阈值没有设置为0，因为在实际温度较低时，尝试移动的接受概率非常低。

3.2　TSP问题的改进SA算法实验仿真

假设TSP问题为：随机设置若干个不同的城市，一位旅行商从第一个城市，逐次不重复全部访问其他城市后，再回到第一个城市，要求其遍历总路程之和最短。本文根据改进的SA算法设计思想，应用Matlab软件对其进行实验仿真，结果如图3和图4所示。

通过分别选择30个城市和35个城市进行实验仿真，结果表明应用改进的SA算法求解TSP问题，一方面能够较快地求出最优解，另一方面即使城市数量增多，其运行时间花费也没有增加很多。

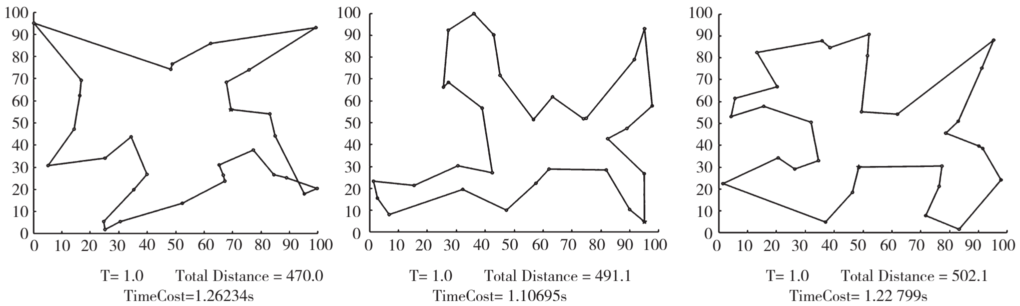

图3　随机选择30个城市的三次运行结果

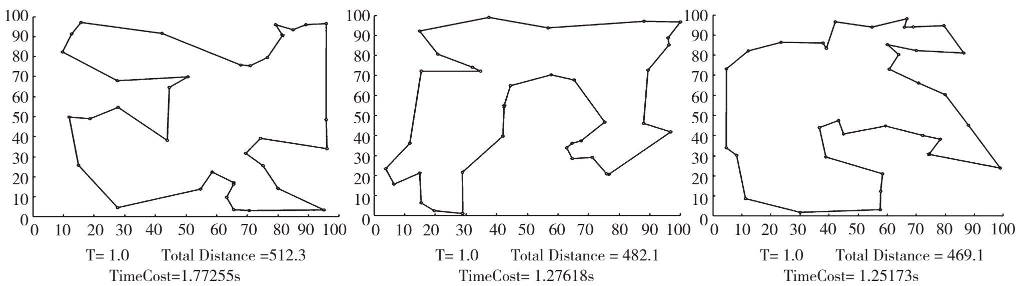

图4　随机选择35个城市的三次运行结果

4　结　语

模拟退火算法的应用很广泛，通过对其进行改进处理，可以高效地求解TSP问题、最大截问题、整数规划问题、图形着色问题等。改进的模拟退火算法虽然具有空间开销相对较小、时间消耗不大等优点，但也存在一定的缺陷，比如其初始温度、降温速度等参数难以控制，不能保证一次就收敛到最优值，通常需要多次尝试才可求得最优解。相信随着计算机技术的不断发展和新数学模型的不断出现，改进的模拟退火算法也会逐渐改善其参数控制，从而进一步拓宽其应用领域。

参考文献

[1] 陈拥华 . 解决TSP问题的改进蚂蚁算法 [J]. 电脑编程技巧与维护 ,2019(7):56.

[2] 徐天东 , 孙立军 , 耿媛婧 , 等 . 蒙特卡罗法在局域网交通信息估计中的应用 [J]. 计算机工程与应用 ,2008(15):206-208,234.

[3] 魏平 . 基于模拟退火算法优化分析与研究 [J]. 装备制造技术 ,2008(7):1-3.

[4] 宋锦河 . 基于模拟退火算法的生产调度问题 [J]. 长春工程学院学报 : 自然科学版 ,2004(1):63-65.