DOI: 10.14135/j.cnki.1006-3080.2004.03.023 华 东 理 工 大 学 学 报 Vol. 30 No. 3
336 Journal of East China University of Science and Technology 2004-06

文章编号: 1006-3080(2004)03-0336-03

TSP邻近算法在 Euclid平面上的性能比分析

刘剑平
(华东理工大学数学系,上海 200237)

摘要: 旅行推销员问题(TSP)邻近算法的性能比已经被证明有一个关于点数的对数函数上界,本文就该方法在欧几里得平面上给出了性能比的一个对数下界。

关键词: 旅行推销员问题; 启发式算法; 邻近算法; 性能比
中图分类号: TP301 文献标识码: A

Performance Ratio Analysis of the Nearest Neighbor Algorithm of TSP in Euclidean Plane

LIU Jian-ping
(*Department of Mathematics ECUST*, *Shanghai* 200237, *China*)

Abstract The performance ratio of the nearest neighbor algorithm of traveling salesman problem has been shown to have an upper bound above by a logarithmic function of the number of nodes. In this paper, we provide a logarithmic lower bound on the worst case in Euclidean plane.

Key words traveling salesman problem; heuristics algorithm; nearest neighbor algorithm; performance ratio

旅行推销员问题(TSP)是一个推销员从家住城市出发,巡访其他城市各一次后返回家住城市,在形成的访问路线中寻找一条代价最小的路线,这里的代价可以是距离,或者是运价,或者是其他量,所得到的访问路线被称为最优回路。

求解 TSP的精确解可用分支定界法[1],而此问题的计算复杂性已经被证明为 NP困难的[2]。由此产生了许多求 TSP近似解的启发式算法,如邻近算法。邻近算法已经被证明其性能比(即形成回路长度与最优回路长度之比)不超过$\frac{1}{2}[\log_2 n]+\frac{1}{2}$[3]。本文在 Euclid平面上构造了邻近算法的性能比超过$\frac{2}{9}[\log_2\frac{n+3}{3}]$的例子,从而说明了该方法的性能比为$O(\log_2 n)$的量级。

基金项目: 华东理工大学科研基金资助项目
E-mail: Liujianpiao60@163.com
收稿日期: 2003-06-06
作者简介: 刘剑平(1960-),男,浙江宁波人,副教授,硕士,从事组合最优化研究。

1 TSP邻近算法在 Euclid平面上的例子构造

邻近算法是 Rosenkratz等提出的,方法如下[3]:设有 n个城市编号为 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,出发点为城市 j_1,下一个城市的选取以离 j_1最近的原则选取,假定已有 k个城市形成的行走路线 $j_1\to j_2\to j_3\to\cdots\to j_k$, $k<n$,则 j_{k+1}取尚未通过的 $n-k$个城市中离 j_k最近的一个城市,直到最后头尾相连形成一条 Hamilton回路。

例子构造: $n=3$,构成边长为 1的正三角形的三个顶点,称为 F_1,见图 1(a)。$n=9$时,两个边长为 1的正三角形之间放一个边长为 1的正三角形所形成的 9个点,称为 F_2,见图 1(b)。假如 F_{i-1}已经构成,则 F_i是由两个 F_{i-1}的拷贝,中间放一个边长为 1的正三角形的三个顶点,称为 F_i,见图 1(c)。

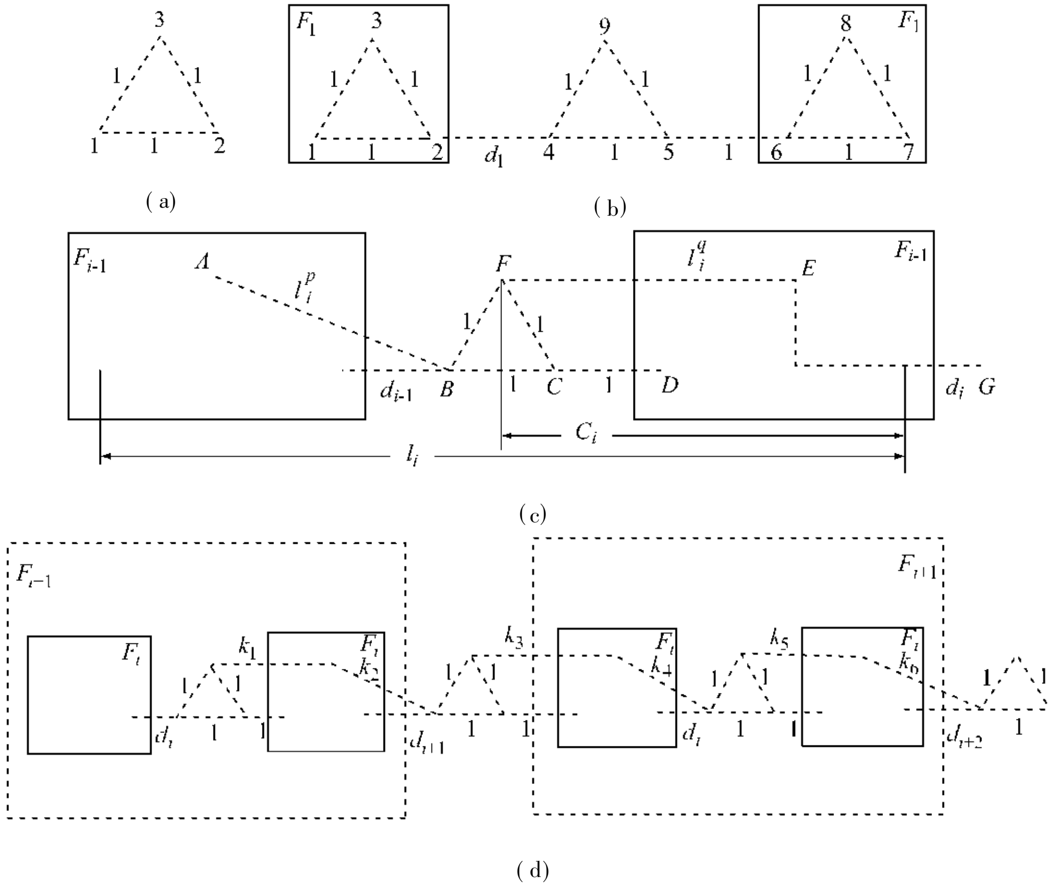

图 1　邻近算法的例子

Fig. 1　Example of the nearest neighbor algorithm

设 F_i 的总顶点数为 v_i,则 $v_1 = 3, v_2 = 9, v_3 = 2v_2 + 3 = 21, \cdots, v_i = 2v_{i-1} + 3$, 即 $v_i + 3 = 2(v_{i-1} + 3) = 2^2(v_{i-2} + 3) = \cdots = 2^{i-1}(v_1 + 3) = 3\times 2^i$,则 $v_i = 3\times 2^i - 3$。容易知道上层有 $2^i - 1$个顶点,下层有 $2\times 2^i - 2$个顶点。其最优回路是:先依次取下排顶点,再依次取上排顶点,最后返回起点,即 $3\times 2^i - 3$个点的凸包形成回路,见图 2。

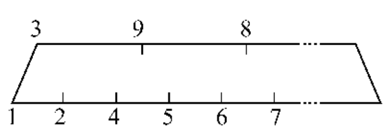

图 2　最优回路

Fig. 2　Optimal tour

由图 1知,令 p_i 为 F_i 的邻近算法行走方向路径,则 p_1 为 $1\to 2\to 3$, p_2 为 $1\to 2\to 3\to 4\to 5\to 6\to 7\to 8\to 9,\cdots$, p_i 为先按 p_{i-1} 路径走到 $A\to B\to C\to D$,再按 p_{i-1} 路经走到 $E\to F$,即 $1\to 2\to 3\to\cdots\to 3\times 2^i - 3$ 的路径。设 $d_{AB} = l_i^p$, $d_{EF} = l_i^q$, F_i 按 p_i 方向行走的总长度为 S_i,其余 c_i, l_i 的长度见图 1(c),取 $d_{EF} = d_{EG}$,故

$$d_i = \left((l_i^q)^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} - c_{i-1} \tag{1}$$

那么,按邻近算法构造的行走路线有一条按 p_i 方向的行走路线。

2　TSP邻近算法在 Euclid平面上的性能比的下界证明

引理 1　由以上 F_i 的构造方法及 d_i 满足式(1)的要求,则 d_i 是严格单调递增序列。

证　不妨设 $k_1\sim k_6$ 的长度如图 1(d),由图 1(c)、1(d)即得:

$$l_i = 2c_i + d_{i-1} - 1 \tag{2}$$

$$l_i^q = c_i - c_{i-1} \tag{3}$$

$$c_i = 0.5 + 1 + 2c_{i-1} + d_{i-2} - 1 \tag{4}$$

由归纳法:设 $d_1 = 1$,易求得

$$d_2 = \left((l_2^q)^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} - c_1 = \frac{\sqrt{13} - 1}{2},$$

$$d_3 = \left((l_3^q)^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} - c_2 = \frac{\sqrt{61} - 5}{2},$$

知 $d_1 < d_2 < d_3$,设 $d_{i-2} < d_{i-1}$,则由式(1)、(3)可知

$$d_i = \left((l_i^q)^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} - c_{i-1} =$$

$$\left((c_i - c_{i-1})^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} - c_{i-1}$$

又由图 1(d)知

$$k_4 = \left[(c_i + d_i)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right]^{1/2} =$$

$$\left[\left(c_i - c_{i-1} + \left((c_i - c_{i-1})^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} \right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{1/2} =$$

$$\left[2(c_i - c_{i-1})^2 + 2(c_i - c_{i-1})\left((c_i - c_{i-1})^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} \right]^{1/2} <$$

$$[2(c_i - c_{i-1})^2 + 2(c_i - c_{i-1})^2]^{1/2} = 2(c_i - c_{i-1})$$

再由式(4)及图 1(c)可知

$$k_4 < 2(c_{i-1} + d_{i-2} + 0.5) = 2c_{i-1} + 2d_{i-2} + 1,$$

$$k_3 = l_i - c_i + 1.5$$

由式(2)知 $k_3 = c_i + d_{i-1} + 0.5$,结合式(4)知 $k_3 = 2c_{i-1} + d_{i-1} + d_{i-2} + 1$,所以当 $d_{i-2} < d_{i-1}$时,$k_4 < k_3$。而由式(1)可知 $k_1 = k_2 = k_3$,则 $k_4 < k_2$。所以 $d_i < d_{i+1}$对任意的 i 成立。证毕

注: d_i 是严格单调上升序列,但每次不能取得太大,要保证 $k_{2i} \leqslant k_{2i-1}$。

定理 1 对上述构造的 F_i,点数 $n = 3 \times 2^i - 3$有

$$\frac{NN(F_i)}{OPT(F_i)} \geqslant \frac{2}{9}\log_2\frac{n+3}{3}$$

其中 $NN(F_i)$为邻近算法产生的回路长度,$OPT(F_i)$为最优回路。

证 从图 1(c)中可以看出:

$$l_i^p > c_{i-1} + d_{i-1} \tag{5}$$

$$l_i = 2l_{i-1} + d_{i-1} + 2 \tag{6}$$

$$s_i = 2s_{i-1} + l_i^q + l_i^p + 2 \tag{7}$$

$$OPT(F_i) = 2l_i + 1 \tag{8}$$

$$NN(F_i) > s_i \tag{9}$$

$$c_i = l_{i-1} + 1.5 \tag{10}$$

再由式(1),(3)可知

$$d_i = \left((l_i^q)^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} - c_{i-1} =$$

$$\left((c_i - c_{i-1})^2 - \frac{3}{4}\right)^{1/2} - c_{i-1} < c_i - 2c_{i-1}$$

再由式(4)知 $d_i < d_{i-2} + 0.5$,当 i为奇数时

$$d_i < d_{i-2} + 0.5 < d_{i-4} + 2 \times 0.5 < \cdots <$$

$$d_1 + 0.5 \times \frac{i-1}{2} = 1 + \frac{i-1}{4} = \frac{i+3}{4}$$

当 i为偶数时

$$d_i < d_2 + 0.5 \times \frac{i-2}{2} = \frac{\sqrt{13}-1}{2} + \frac{i-2}{4}$$

总之,对一切 i有 $d_i < i/4 + 1$ (11)

将式(11)代入式(6),得到

$$l_i < 2l_{i-1} + \frac{i-1}{4} + 3 = 2l_{i-1} + \frac{i}{4} + \frac{11}{4}$$

由递推法可知

$$l_i + \frac{i}{4} + \frac{13}{4} < 2\left(l_{i-1} + \frac{i-1}{4} + \frac{13}{4}\right) <$$

$$2^2\left(l_{i-2} + \frac{i-2}{4} + \frac{13}{4}\right) < \cdots <$$

$$2^{i-1}\left(l_1 + \frac{1}{4} + \frac{13}{4}\right)$$

则 $$l_i < \frac{9}{2} \times 2^{i-1} - \frac{i}{4} - \frac{13}{4}$$

$$OPT(F_i) = 2l_i + 1 <$$

$$9 \times 2^{i-1} - \frac{i}{2} - \frac{13}{2} + 1 < 9 \times 2^{i-1} \tag{12}$$

由式(3),(5),(7),(10)可知

$$s_i = 2s_{i-1} + l_i^p + l_i^q + 2 > 2s_{i-1} + c_{i-1} +$$

$$d_{i-1} + c_i - c_{i-1} + 2 = 2s_{i-1} + d_{i-1} + l_{i-1} +$$

$$1.5 + 2 = 2s_{i-1} + d_{i-1} + l_{i-1} + 3.5$$

而由 $d_i \geqslant 1$及式(6)可知

$$l_i = 2l_{i-1} + d_{i-1} + 2 \leqslant 2(l_{i-1} + d_{i-1} + 0.5)$$

故 $$s_i \geqslant 2s_{i-1} + \frac{l_i}{2} + 3 \tag{13}$$

由 d_i 单调上升及式(6)知 $l_i \geqslant 2l_{i-1} + 3$,即

$$l_i + 3 \geqslant 2(l_{i-1} + 3) \geqslant 2^2(l_{i-2} + 3) \geqslant \cdots \geqslant$$

$$2^{i-1}(l_1 + 3) = 2^{i+1}$$

即 $l_i \geqslant 2^{i+1} - 3$,结合式(13),有

$$s_i \geqslant 2s_{i-1} + 2^i - \frac{3}{2} + 3 =$$

$$2s_{i-1} + 2^i + \frac{3}{2} > 2s_{i-1} + 2^i$$

$$s_i > 2s_{i-1} + 2^i > 2(2s_{i-2} + 2^{i-1}) + 2^i =$$

$$2^2 s_{i-2} + 2 \times 2^i > \cdots > 2^{i-1}s_1 + (i-1)2^i =$$

$$2^{i-1} \times 2 + i \times 2^i - 2^i = i \times 2^i \tag{14}$$

由式(12),(14)知

$$\frac{NN(F_i)}{OPT(F_i)} > \frac{s_i}{OPT(F_i)} > \frac{i \times 2^i}{9 \times 2^{i-1}} = \frac{2i}{9}$$

当 $n = 3 \times 2^i - 3$时,即 $i = \log_2\frac{n+3}{3}$,故

$$\frac{NN(F_i)}{OPT(F_i)} > \frac{2}{9}\log_2\frac{n+3}{3}$$ 证毕。

参考文献:

[1] Gillett B E. Introduction to Operations Research: A Computer-oriented Algorithmic Approach[M]. USA: McGraw-Hill Ins, 1976.

[2] Lawler E L, Lenstra J K, Rinnooy Kan A H G, et al. The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization[M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.

[3] Rosenkrantz D J, Stearns R E, Lewis P M. An analysis of several heuristics for the traveling salesmen problem[J]. SIAM J Comput, 1977, **6**(3): 563-581.