統計学（第二章　確率論、検定）その２　母平均の差の検定

劉慶豊[1]

小樽商科大学

January 29, 2013

[1] E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/

P値による検定

P値 両側t検定の場合、t値と$-t$値より外側にある両裾の部分が対応する確率がP値という。片側検定の場合、対立仮説の不等号の方向によって異なる、$>$の場合右側、$<$の場合左側の確率になる。

P値による両側t検定 両側検定の場合「t値が有意水準点（臨界値）より外側$\Longleftrightarrow$P値が有意水準αより小さい」という関係を利用して検定する。

片側 片側検定の場合、対立仮説の不等号の方向によって異なる、$>$の場合「t値が有意水準点（臨界値）より右側$\Longleftrightarrow$P値が有意水準αより小さい」、$<$の場合「t値が有意水準点（臨界値）より左側$\Longleftrightarrow$P値が有意水準αより小さい」。

信頼区間

母数 確率分布を決定する定数、たとえば、母集団の期待値や分散など。

信頼区間 母数が一定の確率で入ると期待される区間を信頼区間という。

信頼限界 信頼区間の上限と下限。

信頼区間

標本平均の95%信頼区間の求め方 既に勉強した定理により、一定の条件のもとではt値、$t = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S}$が自由度$n-1$の$t$分布に従うことが分かる。$t$分布表より$P(t \geq c) = 0.025$を満たす定数$c$を求める。$t$値の定義と$t$分布の対称性から

$$P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S} \geq c\right) = 0.025$$

$$P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S} \leq -c\right) = 0.025$$

$$P\left(-c \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S} \leq c\right) = 0.95$$

となることが分かる。μに関して不等式を解くと

$$P\left(\bar{X} - c\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + c\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

よって、信頼区間は$\left[\bar{X} - c\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + c\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$となる。

信頼区間

練習問題 サンプルサイズ$n = 16$のデータの標本平均$\bar{X} = 9$、標本偏差$S = 3$とする。95%の信頼区間を求めなさい。

練習問題 サンプルサイズ$n = 100$のデータの標本平均$\bar{X} = 9$、標本偏差$S = 3$とする。99%の信頼区間を求めなさい。

母平均の差の検定（母分散が等しいかつ未知の場合）

- 二つの母集団があって、同じ母分散 σ^2 を持つとします。二つのグループの期待値 μ_1 と μ_2 が等しいかどうかを検定する。
- 条件：母集団が正規分布に従うか、中心極限定理の条件を満たす。
- データから、二つのグループからサンプルサイズが n_1 と n_2 の無作為標本を抽出し、標本平均がそれぞれ $\bar{X}_1$ と $\bar{X}_2$ となったとする。
- 検定等計量

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) / \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}\left\{\left(n_1-1\right)S_1^2 + \left(n_2-1\right)S_2^2\right\}}}$$

が自由度 (n_1+n_2-2) の t 分布に従う。ただし、S_1^2 と S_2^2 が二つのグループのそれぞれの標本分散である。

- 検定の手順は平均の検定とほぼ同様である。
- 母分散が異なる場合、サンプルサイズが大きい場合、近似的に Z が正規分布に従うとして検定する。

母平均の差の検定例題

- （以下の例は架空なデータによるものである）派遣社員の待遇に関して男女差別を調べるために、派遣社員男性と女性100人ずつ無作為標本を得たとする。標本に関して月平均所得が男性22万円、女性21万円だったとする。標本分散が男性4,女性3.5となったとする。両側検定を行う。
- 有意水準を5%として$H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$。検定等計量を計算して$Z = 1/\left(\sqrt{1/50}\sqrt{1/198 \times (99 \times 4 + 99 \times 3.5)}\right) = 3.65$
- 自由度$n_1 + n_2 - 2 = 198$のt分布の2.5%有意水準点が1.96である。$|Z| = 3.65 > 1.96$なので、H_0を棄却する。差別が存在すると結論付ける。