第四章　多変数の回帰[1]

劉慶豊[2]

小樽商科大学

May 20, 2011

[1]第二章からの資料は森棟公夫先生著「基礎コース　計量経済学」をもとに作成したものである。

[2]E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/

K変数回帰（重回帰）のモデル

モデル式

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + u_i, i = 1, 2, \cdots, n-1, n \qquad (1)$$

誤差項に関する仮定 u_i が i に関して独立で、かつ

$$E(u_i) = 0, V(u_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \cdots, n$$

である。

データ

$$\{(y_1, x_{11}, \cdots, x_{K1}), (y_2, x_{12}, \cdots, x_{K2}), \cdots, (y_n, x_{1n}, \cdots, x_{Kn})\} \qquad (2)$$

$$x_{1i} = 1, i = 1, 2, \cdots, n$$

回帰係数の推定

OLS推定量 OLS(最小二乗）推定量は

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (\widehat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_K x_{Ki})\}^2 \tag{3}$$

を最小化するように決まる。

正規方程式

$$\sum_{i=1}^{n} \{y_i - (\widehat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_K x_{Ki})\} x_{mi} = 0, m = 1, 2, \cdots, K \tag{4}$$

もう一つの求め方 $\hat{\beta}_K$ を求めるが、説明変数 x の順番が特に意味がないため、他の係数の推定量、$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_{K-1}$ も同じ方法で計算できる。方法は第3章で説明した説明変数が三つの場合の発展である。

1. x_K を他の説明変数に回帰し、残差 $\widehat{u}_{Ki}$ を求める

$$x_{Ki} = c_1 x_{1i} + c_2 x_{2i} + \cdots + c_{K-1} x_{K-1i} + u_{Ki} \tag{5}$$

$$\widehat{u}_{Ki} = x_{Ki} - \widehat{c}_1 x_{1i} - \widehat{c}_2 x_{2i} - \cdots - \widehat{c}_{K-1} x_{K-1i}$$

2. 偏標本分散、偏標本共分散を求める

$$\begin{aligned} s_{x_K x_K | x_1 \cdots x_{K-1}} &= \frac{1}{n-(K-1)} \sum_{i=1}^{n} (\widehat{u}_{Ki})^2 \\ &= \frac{1}{n-K+1} \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_{Ki} \cdot x_{Ki}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$s_{y x_K | x_1 \cdots x_{K-1}} = \frac{1}{n-(K-1)} \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_{Ki} \cdot y_i \tag{7}$$

3. 推定量は

$$\widehat{\beta}_K = \frac{s_{yx_K|I_{K-1}}}{s_{x_Kx_K|I_{K-1}}}$$

$$\widehat{\beta}_K = r_{yx_K|I_{K-1}} \sqrt{\frac{s_{yy|I_{K-1}}}{s_{x_Kx_K|I_{K-1}}}} \tag{8}$$

となる。ただし、$\cdot|I_{K-1}$ は $\cdot|x_1 \cdots x_{K-1}$ と同じことを意味する。

4. 正規方程式から

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n\widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_K \sum_{i=1}^{n} x_{Ki} = 0$$

$$\widehat{\beta}_1 = \overline{y} - \widehat{\beta}_2\overline{x}_2 - \cdots - \widehat{\beta}_K\overline{x}_K \tag{9}$$

5. 標本平均からなる座標点 $(\bar{y}, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_K)$ は推定された回帰直線上に位置する。

$$\overline{y} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2\overline{x}_2 + \cdots + \widehat{\beta}_K\overline{x}_K \tag{10}$$

残差２乗和と総変動の分解

第3章で説明した3変数の回帰分析の拡張であると言える。

回帰値 $\widehat{y}_i = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_K x_{Ki}$

残差 $\widehat{u}_i = y_i - \widehat{y}_i$

直行性 $\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i x_{mi} = 0. m = 1, 2, \cdots, K$

誤差分散 $n - K$ **で割っていることを注意しよう（自由度が** $n - K$ **）。**

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1,n} \widehat{u}_i^2}{n - K} \tag{11}$$

$$s^2 = s_{yy|I_K} \tag{12}$$

残差２乗和と総変動の分解

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} \quad (13)$$

$$ESS = \sum_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - \overline{y})^2 \quad (14)$$

$$TSS = ESS + RSS \quad (15)$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} \quad (16)$$

最小２乗法の性質

単回帰（$K=2$）や3変数の回帰分析（$K=3$）を特殊ケースとして含む。

性質1. 残差和は0である.

性質2. 残差と説明変数は，直交する: $\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i x_{mi} = 0. m = 1, 2, \cdots, K.$

性質3. 観測値の和は，回帰値の和に等しい: $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{y}_i.$

性質4. 観測値の平均は，回帰値の平均に等しい： $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widehat{y}_i.$

性質5. 残差と回帰値は，直交する: $\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i \widehat{y}_i = 0.$

性質6. x_1 **は定数だから，標本平均からなる座標** $(\overline{y}, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_K)$ **は，回帰直線上に位置する.**

性質7. 観測値と回帰値の積和は，回帰値の平方和に等しい：
$\sum_{i=1}^{n} y_i \widehat{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{y}_i^2.$

性質8. 決定係数 R^2 **は，回帰値** $\widehat{y}_i$ **と観測値** y_i **の相関係数（重相関係数）の２乗に等しい.**

残差変動の性質

性質 1. **説明変数を増やせば、*RSS* が必ず同じになるか減少する。**

$$\Phi(y|I_K) = \sum_{i=1}^{n}\{y_i - (\widehat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_{K-1}x_{K-1i} + \widehat{\beta}_K x_{Ki})\}^2, \tag{17}$$

$$\Phi(y|I_{K-1}) = \sum_{i=1}^{n}\{y_i - (\widehat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_{K-1}x_{K-1i})\}^2 \tag{18}$$

$$RSS(y|I_K) = \min_{\hat{\beta}_1,\cdots,\hat{\beta}_K} \Phi(y|I_K) \le \min_{\hat{\beta}_1,\cdots,\hat{\beta}_{K-1}} \Phi(y|I_{K-1}) = RSS(y|I_{K-1})$$

証明：説明変数が $K-1$ **個のときの推定量を** $\tilde{\beta}_1, \cdots, \tilde{\beta}_{K-1}$**, とする。説明変数が** K **個のときの推定値を** $\hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_{K-1}, \hat{\beta}_K$ **とする。**
$\hat{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_{K-1} = \tilde{\beta}_{K-1}, \hat{\beta}_K = 0$ **とすれば、**$\Phi(y|I_K) = \Phi(y|I_{K-1})$**。**
ゆえに、$\Phi(y|I_K)$ **の最小値は必ず** $\Phi(y|I_{K-1})$ **に到達することができ、大きくならない。**

残差変動の性質

性質 2. **説明変数の数** K **を標本数** n **と同じなるまで増やせば、** RSS **が** 0 **になる。ただし、説明変数の間に一次の関係がないことが条件である。一次の関係の例：すべての** i **に関して、** $x_{1i} = x_{2i}, x_{1i} = 5x_{3i}$ **など。** $K = n$ **でのとき、**

$$RSS(y|I_n) = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (\widehat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_{n-1} x_{n-1i} + \widehat{\beta}_n x_{ni})\}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \widehat{\beta}_1 x_{11} + \cdots + \widehat{\beta}_{n-1} x_{n-11} + \widehat{\beta}_n x_{n1} \\ y_2 &= \widehat{\beta}_1 x_{12} + \cdots + \widehat{\beta}_{n-1} x_{n-12} + \widehat{\beta}_n x_{n2} \\ & \cdots \\ y_n &= \widehat{\beta}_1 x_{1n} + \cdots + \widehat{\beta}_{n-1} x_{n-1n} + \widehat{\beta}_n x_{nn} \end{aligned}$$

は n **個の未知数を持つ** n **本の方程式となる。説明変数の間に一次の関係がなければ** $RSS(y|I_n) = 0$ **が解ける。**

自由度修正済み決定係数

モデル選択 異なった説明変数で異なったモデルを構成することができる。その中のどのモデルを選ぶかを決めることが一種のモデル選択の問題である。

決定係数 R^2 の問題点 以上のスライドで分かるのは、RSS を小さく（決定係数 R^2 を大きく、$R^2 = 1 - RSS/TSS$）したいなら、説明変数を増やせばいい。R^2 を回帰式の選択基準とすると、追加した説明変数は説明力がないとしても、説明変数を追加した回帰式が必ず選ばれる。

自由度修正済み決定係数(続き)

より良いモデル選択の基準：自由度修正済み決定係数 $\bar{R}^2$ 説明変数を追加した場合、R^2 が必ず大きくなるが、$\bar{R}^2$ は $\frac{n-1}{n-K}$ で調整したため、説明力があまりない説明変数を増やしても、$\bar{R}^2$ は大きくならない。$\bar{R}^2$ が大きいほど、回帰モデルが良い。

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-K)}{TSS/(n-1)} \tag{19}$$

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{s_{yy|I_K}}{s_{yy}} \tag{20}$$

$$\overline{R}^2 = R^2 - \frac{K-1}{n-K}(1-R^2) \tag{21}$$

多変数回帰（重回帰）の例

Example

人的資本を含むクロスセクション生産関数（変数の定義はテキストにある）

$$\begin{aligned}\widehat{\log Y} &= 0.37(0.40) + 0.61(5.8)\log L + 0.33(5.0)\log K \\ &+ 0.12(0.56)\log H1 + 0.067(1.1)\log H2 + 0.014(0.09)\log H3 \\ &+ 0.17(2.4)\log H4 + 0.18(1.7)\log H5 + 0.12(1.4)\log H6. \end{aligned} \tag{22}$$

$R^2 = 0.99648$, $\bar{R}^2 = 0.9957$。**t 値が小さい** $H1, H2, H3$ **を除いて再推定**

$$\begin{aligned}\widehat{\log Y} &= 0.77(1.3) + 0.57(5.8)\log L + 0.36(6.2)\log K \\ &+ 0.20(4.5)\log H4 + 0.15(1.5)\log H5 + 0.13(1.7)\log H6, \end{aligned} \tag{23}$$

$R^2 = 0.99628$ **上のモデルの** R^2 **より減少した、** $\bar{R}^2 = 0.9958$ **上のより大きくなった。**

偏回帰係数に関する t 検定

$$V(\widehat{\beta}_K) = \frac{\sigma^2}{(n-K+1)s_{x_K x_K | I_{K-1}}}$$

$$t_{\beta_K} = \frac{\widehat{\beta}_K}{\sqrt{s^2/\{(n-K+1)s_{x_K x_K | I_{K-1}}\}}} \quad (24)$$

自由度 $n-K$（テキストにミスがある）の t 分布に従う。

Example

Per Capita式と収穫不変性

$$\log Y_t = \alpha + \beta \log K_t + \gamma \log L_t + \cdots \tag{25}$$

収穫の不変性 $\beta + \gamma = 1$であれば、KとLをc倍に増やしたら、Yもc倍まで増える。$\delta = \beta + \gamma - 1$とする。

$$\log Y = \alpha + \beta \log K + (1 + \delta - \beta) \log L + \cdots \tag{26}$$

$y = Y/L, k = K/L$として

$$\log y = \alpha + \beta \log k + \delta \log L + \cdots \tag{27}$$

$$H_0 : \beta + \gamma = 1, H_1 : \beta + \gamma < 1,$$

は$H_0 : \delta = 0$ を等価である。

結果：$\widehat{\log y} = -0.07(-1.0) \log L + 0.36(6.2) \log k +$他の項は同じ。帰無仮説が棄却できない。

複数の偏回帰係数に関するF検定

検定には誤差項が正規分布に従うという仮定が必要。

H_A モデル

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n \tag{28}$$

H_A モデルの RSS を $RSS\,(H_A)$ と表記する。

$$H_0 : \beta_{K-m+1} = 0, \cdots, \beta_{K-1} = 0, \beta_K = 0 \tag{29}$$

H_0 モデルを立てる

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_{K-m} x_{K-mi} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n \tag{30}$$

H_0 モデルの RSS を $RSS\,(H_0)$ と表記する。

複数の偏回帰係数に関するF検定

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{n-K}{m}\frac{RSS(H_0)-RSS(H_A)}{RSS(H_A)} \\
&= \frac{1}{m}\frac{RSS(H_0)-RSS(H_A)}{s^2}
\end{aligned} \tag{31}
$$

$$
f = \frac{n-K}{m}\frac{R^2(H_A)-R^2(H_0)}{1-R^2(H_A)} \tag{32}
$$

自由度（$m, n-K$）のF分布に従う。mは制約の数（0と仮定された説明変数の数）。

検定

χ^2

複数の偏回帰係数に関するχ^2検定 誤差項が正規分布に従うという仮定が不要である。変わりに標本の数たくさんある（nが大きい）ことが必要。

$$C = \frac{RSS(H_0) - RSS(H_A)}{s^2} = (n-K)\frac{R^2(H_A) - R^2(H_0)}{1 - R^2(H_A)} \tag{33}$$

自由度mのχ^2分布（カイ自乗分布）に従う。

Example

人的資本変数のF検定：帰無仮説は H_1, H_2, H_3 **の係数が** 0 **である。**

$$f = \frac{46-9}{3}\frac{0.116488-0.11016}{0.11016} = 0.71$$

$$f = \frac{46-9}{3}\frac{0.99648-0.99628}{1-0.99648} = 0.70$$

四捨五入しなければ同じ値になる。

回帰式全体に関するF検定

定数項以外のすべての説明変数の係数がが0**であるかどうか、すなわち、定数項以外の説明変数はまったく説明力がないかどうかを検定する。**

$$H_0 : \beta_2 = 0, \cdots, \beta_K = 0 \tag{34}$$

$$f = \frac{n-K}{K-1} \frac{TSS - RSS(H_A)}{RSS(H_A)} = \frac{n-K}{K-1} \frac{R^2}{1-R^2} \tag{35}$$

テキストの（3.50**）式の一般化である。**

多重共線性（マルティコ）現象

リターン・モデルの推定の例 r :**収益率、**div :**配当利回り、**$cfps$:1**株当たりキャッシュ・フロー、**bps :1**株当たり純資産、**$nepr$:1**株当たり純利益 / 前月末株価、**$cfpr$: $cfps$ / **前月末株価、**bpr : bps / **前月末株価、**mv :**時価総額。**

$$\hat{r} = -10.26(-7.9) + 2.69(1.0)div - 4.41(-1.6)cfps + 0.98(0.40)bps - 2.6(-0.69)nepr + 7.4(2.0)cfpr - 0.8(-0.29)bpr + 9.3(4.3)\log(mv)$$

時価総額以外はの説明変数は収益率 r **に正の影響を与えると予想されたが、推定結果は係数の符号が逆になっているのもある。**

相関係数行列

	divyield	cfps	bps	nepr	cfpr	bpr	log(MV)
divyield	1						
cfps	−0.18235	1					
bps	−0.12752	0.574704	1				
nepr	0.380625	0.539313	0.203112	1			
cfpr	0.308971	0.607269	0.104817	0.837967	1		
bpr	0.600748	−0.20429	0.116217	−0.1176	0.061099	1	
log(MV)	−0.44122	0.531162	0.57202	0.033011	−0.0685	−0.39773	1

$$\widehat{r} = -10.26(-7.9) + 2.69(1.0)div - 4.41(-1.6)cfps + 0.98(0.40)bps$$
$$- 2.6(-0.69)nepr + 7.4(2.0)cfpr - 0.8(-0.29)bpr + 9.3(4.3)\log(mv)$$

多重共線性（マルティコ）現象

Definition

変数間の相関が高い場合には、１つの変数が相関の高い他の変数の効果を吸収してしまい、係数の推定結果が本来の符号を示さないことがある。t値も有意になりにくい。このような現象を多重共線性（マルティコ）現象と呼ぶ。

- *cfps*（1株当たりキャッシュ・フロー）と *cfpr*（*cfps* / 前月末株価）、*bps*（1株当たり純資産）と *bpr*（*bps* / 前月末株価）が似たような指標となっている。しかも、相関が高い。
- 相関の高い説明変数を除いて再推定

$$\begin{aligned}\widehat{r} &= -10.3(-7.9) + 2.4(1.3)div + 2.5(1.8)cfpr \\ &\quad + 0.21(0.13)bpr + 7.4(4.9)\log(mv)\end{aligned}$$

- $div, bpr, \log(mv)$ の係数が同時に0である帰無仮説の F 検定

$$f = \frac{31-8}{3}\frac{0.586-0.531}{1-0.586} = 1.02$$

男女ダミー変数

y_i は i 番目の人の体重、x_i は身長である。

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma M_i + u_i, \tag{36}$$

M_i が人工的に作ったダミー変数である。i 番目の人が男性であれば $M_i = 1$、そうでなければ $M_i = 0$。たとえば、$M_i, i = 1, \cdots, n$ は $\{0, 0, 1, 0, 1, 1, ...\}$。
上の式を2本の式に分けられる

$$\text{男性式：} y_i = \alpha + \gamma + \beta x_i + u_i,$$
$$\text{女性式：} y_i = \alpha + \beta x_i + u_i,$$

男性の定数項が $(a + \gamma)$ となって、女性の定数項 α と異なる。

検定

男女差の検定 **最初の式**

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma M_i + u_i, \tag{37}$$

を推定して $\gamma = 0$ **であるかどうかの** t **検定を行えば良い。** $\gamma = 0$ **は棄却できなければ男女差がないことになる。**

切片ダミー変数

Example (季節ダミー変数)

季節によって定数項が違う。四半期データ（季節ごとのデータ）を持って分析をするとき、季節性を調整するためにダミー変数を入れる。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + u_t, \tag{38}$$

- D_{1t} : t が第1四半期であれば1、他の期なら0、$\{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \cdots\}$
- D_{2t} : t が第2四半期であれば1、他の期なら0、$\{0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \cdots\}$,
- D_{3t} : t が第3四半期であれば1、他の期なら0、$\{0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \cdots\}$。

勾配ダミー変数

$$y_t = \alpha + \beta_1(D_{1t}x_t) + \beta_2(D_{2t}x_t) + \beta_3(D_{3t}x_t) + \beta_4(D_{4t}x_t) + \gamma z_t + u_t, \tag{39}$$

$(D_{1t}x_t)$ **は,**$\{x_1, 0, 0, 0, x_5, 0, 0, 0, x_9, 0, 0, 0, x_{13}, 0, \cdots\}$

$(D_{2t}x_t)$ **は,**$\{0, x_2, 0, 0, 0, x_6, 0, 0, 0, x_{10}, 0, 0, 0, x_{14}, \cdots\}$,

$(D_{3t}x_t)$ **は,**$\{0, 0, x_3, 0, 0, 0, x_7, 0, 0, 0, x_{11}, 0, 0, 0, \cdots\}$,

$(D_{4t}x_t)$ **は,**$\{0, 0, 0, x_4, 0, 0, 0, x_8, 0, 0, 0, x_{12}, 0, 0, \cdots\}$,

構造変化の検定

- ある時点を境目に経済システムなどの構造が変わったかどうかの検定である。
- たとえば、1973年に石油ショックが発生した。石油ショックの影響で1973年以前とその後の経済の構造が変わったかどうか。
- または、バブル期とそれ以外の時期の経済構造が同じかどうか。
- 計量経済のモデルに関しては、構造変化はモデルの係数が変わったことを意味する。

構造変化の検定（続き）

構造変化無し 全期間においてx_tの係数が変わらない、同じモデルで表す。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t,$$

構造変化があり $t = 7$以前と$t = 8$以後は係数βの値が違う。

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta_1 x_t + u_t, \quad t = 1, \cdots, 7 \\ y_t &= \alpha + \beta_2 x_t + u_t, \quad t = 8, \cdots, n \end{aligned}$$

構造変化の式を1本の式で表す

$$y_t = \alpha + \beta_2 x_t + \delta(D_t x_t) + \gamma z_t + u_t, \qquad (40)$$

$D_t x_t$**は,**$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \cdots\}$

構造変化の検定（続き）

Example

マクロ輸入関数の推定

$\log$（**輸入**）$= a + \beta$ **実質国内総生産** $+ \gamma \log$（**輸入相対価格**）

$$IMR = \alpha + \beta GDPR + \gamma P$$

の推定結果

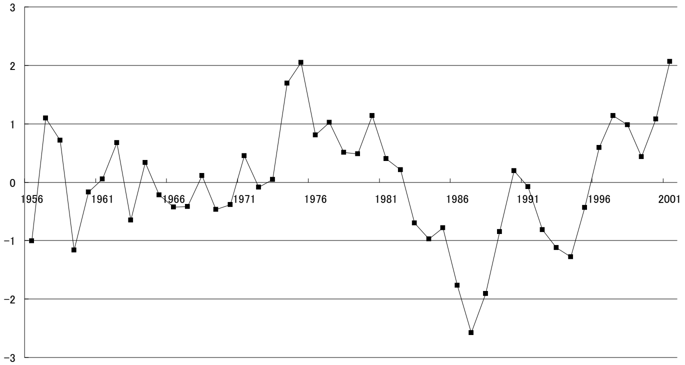
$$\widehat{IMR} = -6.0(-11.5) + 1.28(31.3)GDPR - 0.20(-2.5)P,$$

括弧内は t **値，** $R^2 = 0.99, \overline{R}^2 = 0.99, RSS = 0.46951,$ **である．**

構造変化の検定（続き）

標準化残差：$\hat{u}_t/S$ のグラフ

図4.7　標準化残差



構造変化の検定（続き）

$$IMR = \alpha + \beta GDPR + \gamma P$$
$$+ \lambda D + \delta D \times GDPR + \phi D \times P,$$

1984 年まで $D = 0$、1985 年以後 $D = 1$ とする。

$$\left\{ \underbrace{0, 0 \cdots 0, 0}_{1956-1984}, \underbrace{1, 1, \cdots, 1, 1}_{1985-2001} \right\}$$

1984 年以前の式と 1985 年以後の式の 2 本の式で表現することもできる

$$IMR = \alpha + \beta GDPR + \gamma P$$

$$IMR = (\alpha + \lambda) + (\beta + \delta) GDPR + (\gamma + \phi) P$$

仮説 $H_0 : \lambda = 0, \delta = 0, \phi = 0$、$H_A : \lambda \neq 0, \delta \neq 0, \phi \neq 0$。

帰無仮説モデル H_0 **モデル**

$$IMR = \alpha + \beta GDPR + \gamma P$$

対立仮説のモデル H_A **モデル**

$$\begin{aligned} IMR = {} & \alpha + \beta GDPR + \gamma P \\ & + \lambda D + \delta D \times GDPR + \phi D \times P, \end{aligned}$$

構造変化の検定（続き）

推定結果

- H_0 モデルの結果

$$\widehat{IMR} = -6.0(-11.5) + 1.28(31.3)GDPR - 0.20(-2.5)P,$$

括弧内はt値，$R^2 = 0.99$, $\overline{R}^2 = 0.99$, $RSS = 0.46951$。

- H_A モデルの結果

$$\widehat{IMR} = -6.4(-15) + 1.3(38)GDPR - 0.19(-2.4)P - 16(-4.5)D + 1.3(4.5)D \times GDPR + 0.38(2.1)D \times P,$$

括弧内はt値，$R^2 = 0.994$, $\overline{R}^2 = 0.994$, $RSS = 0.2476$。

構造変化の検定（続き）

F 検定（誤差項が正規分布に従うという仮定が必要。）

$$f = \frac{n-K}{m} \frac{RSS(H_0) - RSS(H_A)}{RSS(H_A)}$$

は自由度 $(m, n-K)$ の F 分布に従う。ただし、m は制約の数で、K は対立仮説 H_A モデルの定数項を含んだ説明変数の数である。

$$f = \frac{46-6}{3} \frac{0.46951 - 0.2476}{0.2476} = 11.9$$

自由度3と40の F 分布によれば、P 値は0になるので、帰無仮説は棄却される。構造変化があると考えられる。

構造変化の検定（続き）

誤差項が正規分布に従うと仮定しない場合、χ^2 検定が利用できる。

公式

$$C = (n-K)\,\frac{RSS(H_0) - RSS(H_A)}{RSS(H_A)}$$

自由度 m の χ^2 に従う。

検定結果

$$C = 40\,\frac{0.46951 - 0.2476}{0.2476} = 35.9$$

C は自由度 3 の 5% 有意水準点が 7.82 より大きいため、帰無仮説が棄却される。