

第三章 単回帰（続き）¹

劉慶豊²

小樽商科大学

July 1, 2010

¹第三章の資料は森棟公夫先生著「基礎コース 計量経済学」をもとに作成したものである。

²E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:<http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/> ◀ ▶ ≡ 🔍 ↺

一定の条件のもとでは

$$z = (\hat{\beta} - \beta) / \sqrt{V(\hat{\beta})} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\sigma^2 / \{(n-1)s_{xx}\}}} \quad (1)$$

が標準正規分布に従う。

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1,n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{(n-1)s_{xx}} \quad (2)$$

検定の根拠（続き）

$V(\hat{\beta})$ を計算するために σ^2 の値が必要、しかし、 σ^2 は母集団に関するパラメーターで未知である代わりに以前説明した残差分散 $s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$ を利用する。そうすることで $V(\hat{\beta})$ が s_{β}^2 となる。

s_{β} は $\hat{\beta}$ の標準誤差

$$s_{\beta} = \sqrt{s^2 / \{(n-1)s_{xx}\}}$$

t 値

$$t_{\beta} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{s_{\beta}}$$

t_{β} は自由度 $n-2$ の t 分布に従う。

回帰係数に関するt検定

真の β が β_0 であるかどうかを調べる。ただし、 β_0 が定数である。 β_0 を0にする場合が多い。

片側検定 $H_0 : \beta = \beta_0, H_1 : \beta > \beta_0$ と $H_0 : \beta = \beta_0, H_1 : \beta < \beta_0$ 二種類。

両側検定 $H_0 : \beta = \beta_0, H_1 : \beta \neq \beta_0$ 。

$$t_\beta = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{s^2 / \{(n-1)s_{xx}\}}} \quad (3)$$

帰無仮説のもとで t_β は自由度 $n-2$ の t 分布に従う。 t_β と自由度 $n-2$ の t 分布の有意水準点と比較する。

ジップ (Zipf) の法則 都市人口 \times 都市人口順位 = 定数 データ

表 2.4 京都12市の人口とその順位

順位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
人口(千人)	1390	186	94	94	85	77	73	67	53	53	40	25

モデル c を定数として、

$$P_i \times i = c$$

$$\log(P_i) = c - \log(i)$$

$$\log(P_i) = c + \beta \log(i) + u_i, i = 1, 2, \dots, n$$

推定結果 () の中は帰無仮説が $\beta = 0$ の t 値である。

$$\widehat{\log(P_i)} = 6.53(23.7) - 1.235(-8.1)\log(i)$$

検定 $H_0 : \beta = -1, H_1 : \beta \neq -1$ (両側検定)。有意水準を10%とする。帰無仮説が $\beta = 0$ の t 値の公式から逆算して標準誤差を求めて、そして t 値を求める。

$$s_\beta = -1.235 \times \frac{1}{-8.1} = 0.152$$

$$t = \frac{-1.235 - (-1)}{0.152} = -1.55.$$

検定結果 自由度10の右側5%有意水準点(95%分位点) $t_{95} = 1.81$ 。
 $|t| < t_{95}$ 、 H_0 は棄却できない。 $\beta = -1$ であろうと認識する。

最小 2 乗推定量の導出(1)

$$\Phi = RSS = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right)^2$$

最小化の為の1次条件 $\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\alpha}} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\beta}} = 0.$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\alpha}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right)^2}{\partial \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right)} \frac{\partial \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right)}{\partial \hat{\alpha}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (-2) \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\beta}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right)^2}{\partial \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right)} \frac{\partial \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right)}{\partial \hat{\beta}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (-2) \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i \right) x_i \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

最小 2 乗推定量の導出(2)

正規方程式

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i) x_i = 0$$

最小化の為の2次条件

$$\frac{\partial^2 \Phi}{(\partial \hat{\beta})^2} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i)^2$$

最小 2 乗推定量の導出(3)

正規方程式を解いて最小二乗 (OLS) 推定量を求める

$$\hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \quad (6)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (7)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad (8)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \quad (9)$$