大学院計量経済学講義ノートII

劉　慶豊 (Qingfeng Liu)*

平成 21 年 12 月 11 日

小樽商科大学商学部

*qliu@res.otaru-uc.ac.jp

1　系列相関

例 1 *P205 Example 12.2*

モデル

$$y = X\beta + \varepsilon$$

強定常（Stong Statinarity） 任意の正数 $s1, s2, \cdots, sm$ に関して、確率変数 X_t の有限次元の同時分布

$$f\left(x_t, x_{t+s1}, x_{t+s2}, \cdots, x_{t+sm}\right) = f\left(x_{t'}, x_{t'+s1}, x_{t'+s2}, \cdots, x_{t'+sm}\right)$$

が成り立つ時、X_t は強定常である。

自己共分散（Autocovariance） $Cov\left(X_t, X_{t-s}\right)$

弱定常（分散共分散定常、Weak Statinarity） 任意の整数 t, t' と s に関して $Cov\left(X_t, X_{t-s}\right) = Cov\left(X_{t'}, X_{t'-s}\right)$ が成り立つ時 X_t は弱定常である。γ_s で弱定常の確率変数の自己共分散を表す。

自己相関係数（Autocorrelation） 弱定常の確率変数の自己相関係数

$$Corr\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s} | X\right) = \rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

自己相関行列 $E\left(\varepsilon\varepsilon' | X\right)$

エルゴード性（Ergodicity） 定常な確率変数の列 $\{X_t\}, t = -\infty, \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, \infty,$ と有界な関数 $f : R^l \to R, \quad g : R^m \to R$ に関して

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \left|E\left[f\left(x_t, x_{t+1}, \cdots, x_{t+l}\right)\right] g\left(x_{t+k}, x_{t+k+1}, \cdots, x_{t+k+l}\right)\right| \\
&= \left|E\left[f\left(x_t, x_{t+1}, \cdots, x_{t+l}\right)\right]\right| \left|E\left[g\left(x_{t+k}, x_{t+k+1}, \cdots, x_{t+k+l}\right)\right]\right|
\end{aligned}$$

が成り立つとき、$\{X_t\}$ がエルゴード性を持つという。

定常性の確認は行うときがあるが、殆どの場合エルゴード性が所与であるとする。定常性やエルゴード性が様々な推定法がうまく機能することを保障するための基本的な条件である。

定理 2 (The Ergodic Theorem) $\{X_t\}_{t=-\infty}^{t=\infty}$ が定常なエルゴード性を持つであるとき、

$$\bar{x}_t \xrightarrow{a.s.} \mu$$

ただし、$\bar{x}_t = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$、$\mu = E\left(x_t\right)$。

1.1 自己相関のある撹乱項を持つモデルの OLS 推定

$$b = \left(X'X\right)^{-1} X'y$$

1. $E(\varepsilon|X) = 0$ であれば不偏性を持つ。

2. $\frac{1}{n^2}X'\Omega X \xrightarrow{p} 0$ であれば一致性を持つ。b の条件付分散

$$\begin{aligned} V(b|X) &= \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1} X'\Omega X \left(X'X\right)^{-1} \\ &= \sigma^2 \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \frac{X'\Omega X}{n^2} \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

が 0 に確率収束するため、$b \xrightarrow{p} \beta$[1]。

3. 分散共分散行列の推定

$$V(b|X) = \frac{1}{n}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \sigma^2 \frac{X'\Omega X}{n} \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \tag{2}$$

$\sigma^2 \frac{X'\Omega X}{n}$ を Newey-West の推定量[2]

$$\begin{aligned} S_* &= S_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L}\sum_{t=j+1}^{n}\left(1 - \frac{j}{L+1}\right) e_t e_{t-j} \left[x_t x'_{t-j} + x_{t-j} x'_t\right] \\ S_* &- \sigma^2 \frac{X'\Omega X}{n} \xrightarrow{p} 0 \end{aligned} \tag{3}$$

で推定。ここでは $S_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x'_i e_i^2$。$V(b|X)$ の推定量は

$$\frac{1}{n}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} S_* \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \tag{4}$$

となる。Newey-West の推定量は正値定符号を保障する。

1.2 効率的な推定量

AR(1) 撹乱項モデルの例

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + x_t\beta + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \end{aligned} \tag{5}$$

u_t が定常な white noise（自己相関がない）。$|\rho| < 1$。$Var(u_t) = \sigma_u^2$。$E(u_t) = 0$。

練習 3 上のモデルの ε_t の分散と自己共分散、自己相関係数を求めなさい。

[1] Chebychev's Inequality: 任意の正の数 ε に関して $P(|X_t - \mu| > \varepsilon) \leq \sigma^2/\varepsilon^2$ が成り立つ。

[2] 前節紹介した White の推定量は分散不均一で自己相関がないモデルに適用できるが、自己相関がある場合は利用できない。

1.2.1 GLS

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\Omega^{-1}y\right)$$

AR(1) の場合

$$\Omega = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & & \rho^{T-3} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \\ \rho^{T-1} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Cochrane-Orcutt 法 $\hat{\rho} = \frac{n-K}{n-1}\frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t+1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$ を利用して Ω の推定値 $\hat{\Omega}$ を求める、それを $\hat{\beta}_{GLS}$ に代入して、β, ρ, σ_u^2 を推定する、その ρ の推定値を利用して新しい $\hat{\Omega}$ を求める、それを $\hat{\beta}_{GLS}$ に代入して、β, ρ, σ_u^2 を再度推定する。この手続きを繰り返して行う。

1.2.2 MLE

$$\ln L = -\frac{T}{2}\left(\ln 2\pi + \ln \sigma_u^2\right) - \frac{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(1-\rho^2\right)$$

ただし、$u_1 = \varepsilon_1$ とする。

1.2.3 自己相関の検定

1.2.4 ダービンーワトソン検定（Dubbin-Watson test）

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}(\hat{u}_t)^2} \tag{6}$$

$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho > 0$。$DW < d_L\left(n, K\right)$ なら H_0 を棄却、$DW > d_U\left(n, K\right)$ なら H_0 を棄却しない、$d_L\left(n, K\right) < DW < d_U\left(n, K\right)$ なら決定不可能となる。$d_L\left(n, K\right), d_U\left(n, K\right)$ はサンプル数が n でパラメータの数が K のときの DW の下限と上限である。

1.2.5 ラグランジュ乗数法検定（LM test）

$$LM = n\left(\frac{e'X_0\left(X_0'X_0\right)^{-1}X_0'e}{e'e}\right) = nR_0^2 \sim \chi^2\left(1\right)$$

自由度1の χ^2 分布に従う。$X_0 = [X; e_{t-1}]$ で、説明変数 X の行列に残差のラグ e_{t-1} のベクトルを追加した行列となる。R_0^2 は回帰式

$$e_t = X\beta^* + e_{t-1}\tilde{\beta} + v_t$$

の決定係数である。

2 内生変数(exogenous variable)の問題と操作変数法 (Instrumental Variables)

内生変数 (exogenous variable) $E(u|x) \neq 0, cov(u, x) \neq 0.$

例 4 y が log-*earning*,X *year of schooling.*

$$y = \beta x + u$$

u の中に個人個人の能力を反映する要素が含まれていると考えられる。能力のある人は高学歴になりやすい、すなわち高い能力は x に貢献し得る。u と x は正の相関がある。

2.1 OLS による推定量が一致性を持たない

OLS 推定量の一致性を証明するために $E(u|x) \neq 0, cov(u, x) \neq 0$ という条件が必要。そのため x が内生変数の場合、OLS 推定量は一致性を持たない。

OLS の一致性の証明の復習.

$$b = \beta + \left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right)$$
$$p\lim(b) = \beta + Q^{-1}p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right)$$

(X_i, ε_i) が i に関して $i.i.d.$ であれば、大数の法則と仮定 $E(\varepsilon|X) = 0$ より、

$$\begin{aligned} & p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right) \\ & = p\lim\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i\right) \\ & = E(X_i\varepsilon_i) = 0 \end{aligned}$$

□

2.2　一致性を持つ推定法

2.2.1　操作変数法

操作変数 以下の二つの条件を満たす変数 z が x の操作変数と呼ばれる。1. z が u と無相関である 2. z が x と相関する。z が x を通じてだけ y に影響を与える、すなわち、z は u に影響を与えない。

例 5 上の例の続き。自宅が最寄の大学への距離を z とする。z が x の操作変数となる。

操作変数推定量 重回帰モデル $\mathbf{y} = \mathbf{x}\beta + \mathbf{u}$ に関して

$$\hat{\beta}_{IV} = \left(\mathbf{z}'\mathbf{x}\right)^{-1}\mathbf{z}'\mathbf{y}$$

となる。漸近分散は

$$V\left(\hat{\beta}_{IV}\right) = \frac{1}{n}\left[p\lim\left(\frac{1}{n}\mathbf{z}'\mathbf{x}\right)\right]^{-1} p\lim\left[\frac{1}{n}\mathbf{z}'\Omega\mathbf{z}\right]\left[p\lim\left(\frac{1}{n}\mathbf{x}'\mathbf{z}\right)\right]^{-1}$$

となり、その推定量は

$$\hat{V}\left(\hat{\beta}_{IV}\right) = \left(\mathbf{z}'\mathbf{x}\right)^{-1}\mathbf{z}'\hat{\Omega}\mathbf{z}\left(\mathbf{x}'\mathbf{z}\right)^{-1}$$

となる。ただし、$\hat{\Omega} = Diag\left(\hat{u}_i^2\right)$。

一致性

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{IV} &= \left(\mathbf{z}'\mathbf{x}\right)^{-1}\mathbf{z}'\mathbf{y} \\
&= \left(\mathbf{z}'\mathbf{x}\right)^{-1}\mathbf{z}'\left(\mathbf{x}\beta + \mathbf{u}\right) \\
&= \beta + \left(\frac{\mathbf{z}'\mathbf{x}}{n}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{z}'\mathbf{u}}{n}\right) \\
p\lim\left(\hat{\beta}_{IV}\right) &= \beta + \mathbf{Q}_{zx}^{-1} p\lim\left(\frac{\mathbf{z}'\mathbf{u}}{n}\right) \\
&= \beta + E\left(\mathbf{zu}\right)
\end{aligned}$$

$E\left(\mathbf{zu}\right) = 0$ であるため、$p\lim\left(\hat{\beta}_{IV}\right) = \beta$ 一致性が証明されました。

識別条件 Condition of Identification 操作変数の次元が r, x の次元が K とする。$r > K$ が識別条件となる。

2.2.2　二段階最小二乗法（2SLS）

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \left[\mathbf{x}'\mathbf{z}\left(\mathbf{z}'\mathbf{z}\right)^{-1}\mathbf{zx}\right]^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{z}\left(\mathbf{z}'\mathbf{z}\right)^{-1}\mathbf{z}'\mathbf{y}$$

二段階の意味合い $\hat{\beta}_{2SLS}$ は以下の二段階に分けて求めることができる。

1. $\mathbf{x}$ を操作変数 $\mathbf{z}$ に回帰して、その予測値 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}\hat{\beta}$ を求める。
2. $\mathbf{y}$ を $\hat{\mathbf{x}}$ に回帰してその係数の推定値は。$\hat{\beta}_{2SLS}$ となる。

$\hat{\beta}_{2SLS}$ は $\hat{\mathbf{x}}$ を操作変数にした操作変数推定量でもある。従って、性質は前節より明らか。

3　モーメント法 (Method of Moments,MM)

母集団のモーメント条件を利用してパラメータ θ を推定する。

$$E\left[g\left(\cdot\right)|\theta\right] = 0$$

例 6 y の期待値 μ を推定する。モーメント条件は

$$E\left(y - \mu\right) = 0$$

そのサンプル版は

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \mu\right) = 0 \tag{7}$$

(7) 式を解けば、

$$\hat{\mu}_{MM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

例 7 最小二乗推定量。モーメント条件は

$$E\left(Xu\right) = 0$$
$$E\left(X\left(y - X'\beta\right)\right) = 0$$

となる。サンプル版は

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\left(y_i - X_i'\beta\right) = 0$$

となる。サンプル版を解いて、$\hat{\beta}_{MM} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i'\right)^{-1}\sum_{i=i}^{n} X_i y_i$、最小二乗推定量と同じ結果を得る。

例 8 *IV* 法。操作変数法のモーメント条件は

$$E\left(Zu\right) = 0$$

となる。サンプル版は

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\left(y_i - X_i'\beta\right) = 0$$

Z の次元と X の次元が同じとき、方程式を解いて $\hat{\beta}_{MM} = \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i'\right)^{-1}\sum_{i=i}^{n} Z_i y_i$

例 9 最尤法。尤度関数を $f(y|X,\theta)$ とする。尤度関数を最大にすることは一次条件

$$s(\theta)=\frac{\partial\ln f(y|X,\theta)}{\partial\theta}=0$$

を解くことと同等。

$$s(\theta)=0$$

がモーメント条件となる。サンプル版は

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln f(y_i|X_i,\theta)}{\partial\theta}=0$$

となる。$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln f(y_i|X_i,\theta)}{\partial\theta}$ が *score function* と呼ばれる。（モデルが $y=X'\theta+u$ で u が正規分布に従うとき、$f(y|X,\theta)$ 及び $\hat{\theta}_{MM}$ を求めてみなさい。）

以上のすべての例においてはモーメント条件の数とパラメータの数が等しいである。

4 一般化モーメント法（Generalized mothod of moments, GMM）

モーメント条件の数がパラメータ数より多い場合に関して考える。

例 10 前の章の（7）ではモーメント条件は $E(X(y-X'\beta))=0$ でしたが、何にかの事前情報で $EX(y-X'\beta)^3=0$ が分かったとする。このとき、モーメント条件は

$$E(X(y-X'\beta))=0$$
$$EX(y-X'\beta)^3=0$$

となる。サンプル版は

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(y_i-X_i'\beta)=0$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(y_i-X_i'\beta)^3=0$$

となる、説明変数の数 K とすれば、サンプル版は $2K$ 個の方程式を含むようになる、しかし、未知数が K 個しかないため、方程式は解けない。そこで適当な $(2K\times 2K)$ ウエイト行列を W を利用して推定を行う。

$$Q_N=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(y_i-X_i'\beta)\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(y_i-X_i'\beta)^3\end{pmatrix}'W\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(y_i-X_i'\beta)\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(y_i-X_i'\beta)^3\end{pmatrix}$$

として、GMM 推定量は

$$\hat{\beta}_{GMM}=\arg\min_{\beta}Q_N$$

と定義される。

4.1 一般表現

r 個のモーメント条件があって、パラメータの数は q とする。

$$E\left(h\left(w_i,\theta_0\right)\right)=0$$

ただし、θ の次元は $q\times 1, h\left(\cdot\right)$ の次元は $r\times 1, r\geq q$。

$r=q$ の場合、MM 推定

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}h\left(w_i,\hat{\theta}\right)=0$$

を解くことにより、パラメータを推定する。

$r>q$ の場合、GMM 推定

$$\hat{\theta}_{GMM}=\arg\min_{\theta}Q_N\left(\theta\right)$$
$$Q_N\left(\theta\right)=\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}h\left(w_i,\theta\right)\right]'W_N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}h\left(w_i,\theta\right)\right]$$

ただし、W_N が $r\times r$ のウエイト行列である。$r=q, W_N=I$ の時、$\hat{\theta}_{GMM}$ は MM 推定量となる。

最小化の一次条件

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial h\left(w_i,\hat{\theta}\right)'}{\partial\theta}\Bigg|_{\hat{\theta}}\right]W_N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}h\left(w_i,\hat{\theta}\right)\right]=0$$

5 GMM 推定量の性質

pp.173-174 の条件のもとで、

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}_{GMM}-\theta_0\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\left(G_0'W_0G_0\right)^{-1}\left(G_0'W_0S_0W_0G_0\right)\left(G_0'W_0G_0\right)^{-1}\right)$$

$W_0=\lim W_N$、

$$\mathbf{G}_0=\ \mathrm{plim}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial\mathbf{h}_i}{\partial\boldsymbol{\theta}'}\Bigg|_{\boldsymbol{\theta}_0}\right]$$

$$\mathbf{S}_0=\mathrm{plim}N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\mathbf{h}_i\mathbf{h}_j'\Big|_{\boldsymbol{\theta}_0}\right]$$

である。W_N を $W_0 = S_0^{-1}$ になるように決めると、

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}_{GMM} - \theta_0\right) \xrightarrow{d} N\left\{0, \left(G_0' S_0^{-1} G_0\right)^{-1}\right\}$$

となる。このような W_N は推定量の漸近分散を最小にする最適なウエイトである。$h\left(w_i, \theta\right)$ が i に関して独立であると仮定して、G_0 と S_0 は

$$\widehat{\mathbf{G}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right|_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}$$

$$\widehat{\mathbf{S}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{h}_i(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{h}_i(\widehat{\boldsymbol{\theta}})'$$

で推定できる。そして、V は

$$\widehat{\mathrm{V}}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{GMM}}] = \frac{1}{N}\left(\widehat{\mathbf{G}}'\mathbf{W}_N\widehat{\mathbf{G}}\right)^{-1}\widehat{\mathbf{G}}'\mathbf{W}_N\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{W}_N\widehat{\mathbf{G}}\left(\widehat{\mathbf{G}}'\mathbf{W}_N\widehat{\mathbf{G}}\right)^{-1}$$

で推定できる。

6 二段階 GMM

ステップ 1 まず、単位行列をウエイトとして GMM を行う。

$$\hat{\theta}_{GMM} = \arg\min_{\theta}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(w_i, \theta\right)\right]' I \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(w_i, \theta\right)\right]$$

$\hat{S}$ を

$$\widehat{\mathbf{S}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{h}_i(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{h}_i(\widehat{\boldsymbol{\theta}})'$$

で推定する。

ステップ 2 $\hat{S}^{-1}$ をウエイトとして利用して、GMM 推定を行う。

$$\hat{\theta}_{Towstep-GMM} = \arg\min_{\theta}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(w_i, \theta\right)\right]' \hat{S}^{-1} \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(w_i, \theta\right)\right]$$

6.0.1 DID 証明

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i \vartriangle y_i - n\bar{D} \vartriangle \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} D_i - n\bar{D}^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i \vartriangle \bar{y}^{tr} - \sum_{i=1}^{n} D_i \vartriangle \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} D_i \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}\right)} \\
&= \frac{n \vartriangle \bar{y}^{tr} - \sum_i \vartriangle y_i^{tr} - \sum_i \vartriangle y_i^{nt}}{n \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}\right)} \\
&= \frac{n \vartriangle \bar{y}^{tr} - \sum_i \vartriangle y_i^{tr} - \sum_i \vartriangle y_i^{nt}}{n - \sum_{i=1}^{n} D_i} \\
&= \frac{(n - \sum_{i=1}^{n} D_i)(\vartriangle \bar{y}^{tr} - \vartriangle \bar{y}^{nt})}{n - \sum_{i=1}^{n} D_i} \\
&= \vartriangle \bar{y}^{tr} - \vartriangle \bar{y}^{nt}
\end{aligned}
$$

$\sum_i \vartriangle y_i^{nt} = (n - \sum_{i=1}^{n} D_i) \vartriangle \bar{y}^{nt}$ であることを利用した。

7 パーネルデータ分析

7.1 Basics

Table 21.1. *Linear Panel Model: Common Estimators and Models*[a]

	Assumed Model		
Estimator of β	**Pooled (21.1)**	**Random Effects (21.3) and (21.5)**	**Fixed Effects (21.3) Only**
Pooled OLS (21.1)	Consistent	Consistent	Inconsistent
Between (21.7)	Consistent	Consistent	Inconsistent
Within (or Fixed Effects) (21.8)	Consistent	Consistent	Consistent
First Differences (21.9)	Consistent	Consistent	Consistent
Random Effects (21.10)	Consistent	Consistent	Inconsistent

[a] This table considers only consistency of estimators of β. For correct computation of standard errors see Section 21.2.3.

7.1.1 FE(Within) 対 FD

FE(Within)

$$y_{it} - \bar{y}_i = (\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i)' \beta + (\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
v_t &= (\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i) \\
cov(v_t, v_{t-1}) &= E\left((\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i)(\varepsilon_{i,t-1} - \bar{\varepsilon}_i)\right) \\
&= 0 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T} - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T} \\
&= -\frac{\sigma_\varepsilon^2}{T}
\end{aligned}$$

FD

$$y_{it} - y_{i,t-1} = (\mathbf{x}_{it} - \mathbf{x}_{i,t-1})' \beta + (\varepsilon_{it} - \varepsilon_{i,t-1}) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\varpi_t &= (\varepsilon_{it} - \varepsilon_{i,t-1}) \\
cov(\varpi_t, \varpi_{t-1}) &= E\left((\varepsilon_{it} - \varepsilon_{i,t-1})(\varepsilon_{i,t-1} - \varepsilon_{i,t-2})\right) \\
&= 0 - 0 - \sigma_\varepsilon^2 - 0 \\
&= \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

7.1.2 Time-invariant variable

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 d_{it} + \varepsilon_{it}$$

もし d_{it} の値は時間に関して不変であるなら（たとえば、d_{it} が男女ダミー）、$d_{it} = d_i$ となり

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 d_i + \varepsilon_{it}$$

となる。これに関して FE や FD を行うと、d_i の項が消えてしまう。ゆえに、FE や FD は Time-invariant variable の係数を推定できない。推定したい場合は IV や GMM などの方法で RE モデルを推定する。詳しくは次の章で説明する。

7.1.3 漸近分散のパーネルロバスト推定量 (Panel robust estimate of asymptotic variance)

パーネルデータモデルの一般表現を

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \tilde{\mathbf{W}}_i \theta + \mathbf{u}_i$$

とする。$E(u_{it}|w_{it}) = 0$ を満たすとする。u_{it} が i に関して独立で、$V(u_{it})$ と $cov(u_{it}, u_{is})$ が時間 t, s に関して変化する場合（t に関して分散不均一、系列相関がある）にも対応

できるロバストな漸近分布の推定量は以下の三つがある。

$$\widehat{\mathrm{V}}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{OLS}}] = \left[\sum_{i=1}^{N} \widetilde{\mathbf{W}}_i{}'\widetilde{\mathbf{W}}_i\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\mathbf{W}}_i{}'\widehat{\mathbf{u}}_i\widehat{\mathbf{u}}_i'\widetilde{\mathbf{W}}_i \left[\sum_{i=1}^{N} \widetilde{\mathbf{W}}_i{}'\widetilde{\mathbf{W}}_i\right]^{-1}, \tag{10}$$

$$\widehat{\mathrm{V}}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{OLS}}] = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \widetilde{\mathbf{w}}_{it}\widetilde{\mathbf{w}}_{it}'\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T} \widetilde{\mathbf{w}}_{it}\widetilde{\mathbf{w}}_{is}'\widehat{u}_{it}\widehat{u}_{is} \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \widetilde{\mathbf{w}}_{it}\widetilde{\mathbf{w}}_{it}'\right]^{-1}, \tag{11}$$

以上の二つは同等なものとなる。次のは bootstrap 推定量である。漸近的に上の二つと同じである。

$$\widehat{\mathrm{V}}_{\mathrm{Boot}}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_b - \overline{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_b - \overline{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}\right)',$$

7.1.4 RE の GLS 推定

RE モデルは

$$y_{it} = \alpha_i + \mathbf{x}_{it}'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{it},$$

となるが、それを書き直して

$$y_{it} = \mathbf{X}_{it}'\beta + (\alpha_i + \varepsilon_{it})$$

となる。$v_{it} = (\alpha_i + \varepsilon_{it})$ を新しい撹乱項とみなす。その自己共分散は

$$\mathrm{Cov}[(\alpha_i + \varepsilon_{it}), (\alpha_i + \varepsilon_{is})] = \begin{cases} \sigma_\alpha^2, & t \neq s, \\ \sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2, & t = s. \end{cases}$$

となる。分散均一であるが、$(\alpha_i + \varepsilon_{it})$ には系列相関がある。系列相関の影響を取り除くため GLS で推定を行う。以下のモデルの OLS 推定に相当する。

$$y_{it} - \widehat{\lambda}\bar{y}_i = (1-\widehat{\lambda})\mu + (\mathbf{x}_{it} - \widehat{\lambda}\bar{\mathbf{x}}_i)'\boldsymbol{\beta} + v_{it},$$

$$\text{where } v_{it} = (1-\widehat{\lambda})\alpha_i + (\varepsilon_{it} - \widehat{\lambda}\bar{\varepsilon}_i) \text{ and } \widehat{\lambda} \text{ is consistent for}$$

$$\lambda = 1 - \sigma_\varepsilon/(T\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2)^{1/2}.$$

v_{it} が分散均一で自己共分散 $cov\,(v_{it}, v_{i,t-1}) = 0$ であることを確認しなさい。

7.1.5 Hausman test for panel data

Within と RE のどっちを取るかを決めるための検定である。

真のモデルは fixed effect モデルにも関わらず、RE で推定した場合、$\hat{\beta}$ は一致性を持たない。このことを利用して検定する。α_i が $i.i.d.$、ε_{it} も $i.i.d.$ の場合

$$\mathrm{H} = \left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{RE}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{W}}\right)' \left[\widehat{\mathrm{V}}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{W}}] - \widehat{\mathrm{V}}[\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{RE}}]\right]^{-1} \left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{RE}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{W}}\right),$$

を用いて検定する。

α_i と ε_{it} が $i.i.d.$ ではない場合

$$\mathrm{H}_{\mathrm{Robust}} = \left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{RE}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{W}}\right)' \left[\widehat{\mathrm{V}}_{\mathrm{Boot}}[\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{RE}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{W}}]\right]^{-1} \left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{RE}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{W}}\right),$$

$$\widehat{\mathrm{V}}_{\mathrm{Boot}}[\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{RE}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{1,\mathrm{W}}] = \frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left(\widehat{\boldsymbol{\delta}}_b - \overline{\widehat{\boldsymbol{\delta}}}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\delta}}_b - \overline{\widehat{\boldsymbol{\delta}}}\right)', \tag{12}$$

を利用する。だが、いつも 12 を利用すればいい。

7.1.6 条件付最尤推定 (Conditional MLE)

Within と同じ推定になる

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_{\mathrm{COND}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\alpha}) &= \prod_{i=1}^{N} f(y_{i1}, \ldots, y_{iT} | \bar{y}_i) \qquad (21.38)\\
&= \prod_{i=1}^{N} \frac{f(y_{i1}, \ldots, y_{iT}, \bar{y}_i)}{f(\bar{y}_i)}\\
&= \prod_{i=1}^{N} \frac{(2\pi\sigma^2)^{-T/2}}{(2\pi\sigma^2/T)^{-1/2}} \exp\left\{\sum_{t=1}^{T} -[(y_{it} - \mathbf{x}_{it}'\boldsymbol{\beta})^2 + (\bar{y}_i - \bar{\mathbf{x}}_i'\boldsymbol{\beta})^2]/2\sigma^2\right\}.
\end{aligned}$$

7.1.7 Within で α を推定

$\hat{\beta}$ を求めてから

$$\widehat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{\mathbf{x}}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{W}}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

$i = 1, \cdots n$,α_i が N 個あって、$T \to \infty$ とならないと、$\hat{\alpha}_i$ は一致性がない。