第一回目練習問題解答

分散と共分散の計算に関して、n であると $(n-1)$ であるという 2 種類の公式があるが、混乱を避けるため、本講義では $(n-1)$ に統一しましょう。

$$\begin{aligned}
\text{分散 } S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right) \\
\text{共分散 } S_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}\right)
\end{aligned}$$

- 問題 1.　$X=\{3,1,4\}$ の平均分散標準偏差を求めてください。

$$\text{平均} = \frac{1}{3}(3+1+4)=\frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{分散} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{3-1}\left\{\left(3-\frac{8}{3}\right)^2+\left(1-\frac{8}{3}\right)^2+\left(4-\frac{8}{3}\right)^2\right\} \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{標準偏差} = \sqrt{\text{分散}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

- 問題 2.　$X=\{3,1,4\}$、$Y=\{2,2,3\}$

$$\bar{X}=\frac{8}{3},\bar{Y}=\frac{7}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{共分散 } S_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}\right) \\
&= \frac{1}{3-1}\left(3\times 2+1\times 2+4\times 3-3\times\frac{8}{3}\times\frac{7}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

第二回目練習問題解答

- 問題 1．テキスト 34 ページ問題 1

(a).c が定数の場合、総和記号は c を n 回足し合わせることを意味する。

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \times c$$

(b).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} \\
&= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - n\bar{x} \\
&= n\bar{x} - n\bar{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c\,(x_i - \bar{x}) &= c\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \\
&= c \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i\,(x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{x} \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i\,(y_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y} \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\bar{x}
\end{aligned}$$

なので、$\sum_{i=1}^{n} y_i\,(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,(y_i - \bar{y})$.

- 問題 2．テキスト 34 ページ問題 2

以下の公式に沿って計算すればいい。

$$
\begin{aligned}
\text{分散 } S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right) \\
\text{共分散 } S_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}\right) \\
\text{相関係数}\rho &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \\
&= \frac{S_{xy}}{S_xS_y}
\end{aligned}
$$

相関係数の計算では分子にある S_{xy} と分母にある S_xS_y を計算するとき $(n-1)$ で割る公式を利用するように統一してください。

(a).

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{5}{2}, \bar{y}=\frac{2}{5} \\
S_x^2 &= \frac{5}{3}, S_y^2=\frac{5}{3} \\
S_x &= \sqrt{\frac{5}{3}}, S_y=\sqrt{\frac{5}{3}} \\
S_{xy} &= -\frac{5}{3} \\
\rho &= \frac{S_{xy}}{S_xS_y}=\frac{-\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{5}{3}}}=-1
\end{aligned}
$$

(b).

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{5}{2}, \bar{y}=\frac{2}{5} \\
S_x^2 &= \frac{5}{3}, S_y^2=\frac{5}{3} \\
S_x &= \sqrt{\frac{5}{3}}, S_y=\sqrt{\frac{5}{3}} \\
S_{xy} &= \frac{5}{3} \\
\rho &= \frac{S_{xy}}{S_xS_y}=\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{5}{3}}}=1
\end{aligned}
$$

(c).

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{5}{2}, \bar{y} = \frac{2}{5} \\
S_x^2 &= \frac{5}{3}, S_y^2 = \frac{26}{3} \\
S_x &= \sqrt{\frac{5}{3}}, S_y = \sqrt{\frac{26}{3}} \\
S_{xy} &= \frac{10}{3} \\
\rho &= \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\frac{10}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{26}{3}}} = \frac{\sqrt{130}}{13}
\end{aligned}
$$

第三回目練習問題解答 テキスト 68 ページ問題 1.

	y	x	x2	xy	y2
	1	1	1	1	1
	7	2	4	14	49
	10	3	9	30	100
和	18	6	14	45	150

上の表の結果を利用して公式に沿って $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の値を計算すればいい。

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha} &= -3 \\
\hat{\beta} &= 4.5
\end{aligned}
$$

そして、$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の値を $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$ に代入して回帰値を求め、残差を計算する。結果は

	y	x	x2	xy	y2	回帰値	残差
	1	1	1	1	1	1.5	−0.5
	7	2	4	14	49	6	1
	10	3	9	30	100	10.5	−0.5
和	18	6	14	45	150	18	0

となる。

$$
\begin{aligned}
\text{残差二乗和 } RSS &= (-0.5)^2 + 1^2 + (-0.5)^2 = 1.5 \\
\text{全変動 } TSS &= \sum_{i=1}^{3} (y_i - \bar{y})^2 = (1-6)^2 + (7-6)^2 + (10-6)^2 \\
&= 42 \\
\text{決定係数 } R^2 &= 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{1.5}{42} = 0.964
\end{aligned}
$$