第六章　発展した分析法[1]

劉慶豊[2]

小樽商科大学

July 17, 2011

[1]第二章からの資料は森棟公夫先生著「基礎コース　計量経済学」をもとに作成したものである。

[2]E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/

離散選択モデル

- 被説明変数 y_i が $0, 1, 2$ などの離散的な値を取るようなモデルを考える
- 例：女性が就職するなら 1、専業主婦になるなら 0。通勤手段として、車なら 0、電車なら 1、バスなら 2。
- 離散的な変数で表す選択肢を選択する原因を分析する。
- 二項と多項選択モデルがある。

二項選択モデル

- y_i が 0 と 1 しか取らない。例：持ち家を持つなら 1、持たないなら 0。
- 0 と 1 をどっちを選ぶかの確率を

$$
\begin{aligned}
P\left(y_i = 1\right) &= p_i \\
P\left(y_i = 0\right) &= 1 - p_i = q_i
\end{aligned}
$$

  と表す。
- 確率 p_i、q_i のモデル化の違いによって線形モデル、プロビットモデルとロジットモデルがある。

分析例

- 給与所得者が家を所有するか否かの確率を分析する
- 被説明変数：家を持つか持たないか。持ち家を持つなら 1、持たないなら 0。
- 説明変数：所得、勤続年数、年齢、家族構成など

一般表現

- **モデル式の一般表現**

$$P(y_i = 1) = p_i$$
$$P(y_i = 0) = 1 - p_i$$

$$y_i = p_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

$$\begin{aligned} p_i &= f\left(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{Ki}\right) \\ &= f\,\textbf{(所得}_i\textbf{、勤続年数}_i\textbf{、年齢}_i\textbf{、}\cdots\textbf{)} \end{aligned}$$

線形確率モデル

- **線形確率モデルのモデル式**

$$
\begin{aligned}
p_i &= f\left(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{Ki}\right) \\
&= \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}
\end{aligned}
$$

線形確率モデルの問題点 p_i **が確率であるため、0と1の間の値を取るべきだが、**$\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}$ **が必ずしも0と1の間の値にならないため、線形確率モデルはこのことを保障できない。**

プロビットモデル

- **プロビットモデルのモデル式**

$$p_i = \int_{-\infty}^{f_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}t^2)dt$$

ただし、

$$f_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}$$

ロジットモデル

- **ロジットモデルのモデル式**

$$p_i = \frac{\exp(f_i)}{1 + \exp(f_i)}$$

ただし、

$$f_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}$$

最尤推定法

- 最尤推定法でプロビットモデルとロジットモデルを推定する

尤度関数 尤度関数は観測された被説明変数のデータの同時確率である。

- 尤度関数を求めてみよう。

1. $(p_i)^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}$ は i 番目の観測値が y_i になる確率である。（確認してみる：$y_i = 1$ の確率を $(p_i)^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}$ で計算すると $(p_i)^1(1-p_i)^{1-1} = p_i$。これはモデル一般表現のページにある定義による $P(y_i = 1) = p_i$ と一致する。$y_i = 0$ の確率に関しても同様に確認できる。)
2. $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が互いに独立であるとする。$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 同時確率はそれぞれの確率（周辺確率）の掛け算となる。
3. 従って、尤度関数は観測された被説明変数のデータの同時確率であるため、尤度関数

$$L = \prod_{i=1}^{n} (p_i)^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}$$

となる。$\prod_{i=1}^{n}$ は積和を表す。

最尤推定法（続き）

対数尤度関数 尤度関数の対数である

$$\ln(L) = \sum_{i=1}^{n}\{y_i \ln(p_i) + (1 - y_i)\ln(1 - p_i)\}$$

最尤推定法 最尤推定法はプロビットモデルやロジットモデルの p_i の定義を対数尤度関数に代入して、対数尤度関数を最大にできるような $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_K$ の値を係数の推定値とする方法である。（対数尤度関数を最大にすることは尤度関数を最大にすることと同等である。）

直感的な理解 最尤推定法は $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の同時確率分布を推定しているような方法である。その確率分布の元では「今のデータが一番現れやすい」となるような確率分布を探していることとなる。

限界効果と平均限界効果

- 限界効果：各説明変数が確率 p_i に与える効果。
  - ロジットモデルの限界効果の公式

$$\delta_i = \frac{\partial p_i}{\partial x_{ki}} = \beta_k \frac{\exp(f_i)}{1 + 2\exp(f_i) + \exp(2f_i)}$$

  - プロビットモデルの限界効果の公式

$$\delta_i = \frac{\partial p_i}{\partial x_{ki}} = \beta_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} f_i^2}$$

- 平均限界効果の定義
  1. 1．説明変数の平均値 $\bar{x}_k$ を限界効果の公式に代入して計算した値。
  2. δ_i の平均値、$\bar{\delta} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$。

通勤モードの例

- **推定結果**
  - **ロジットモデル**

$$\hat{f}_i = -1.1 - 0.01(-0.99)dif_i + 0.002(1.6)income_i$$

  - **プロビットモデル**

$$\hat{f}_i = -0.68 - 0.0061(-1)dif + 0.0012(1.6)income$$

通勤モードの例（続き）

- 平均限界効果（車を選ぶ確率に与える平均限界効果）
  - ロジットモデル

$$\text{価格差の平均効果}\frac{\partial p}{\partial dif} = -0.0022$$

$$\text{所得の平均効果}\frac{\partial p}{\partial income} = 0.00045$$

  - プロビットモデル

$$\text{価格差の平均効果}\frac{\partial p}{\partial dif} = -0.0023$$

$$\text{所得の平均効果}\frac{\partial p}{\partial income} = 0.00046$$

プロビットモデルとロジットモデルのファイナンスや保険への応用

倒産リスクへの応用 i番目の企業は倒産したら$y_i = 1$倒産していないなら$y_i = 0$とする。説明変数としてその企業の売り上げや資本金や収益率などの財務指標が考えられる。

保険への応用 i番の種類の幾つかの特性を持つ人が一年以内に入院する確率を分析する。入院するなら$y_i = 1$、していないなら$y_i = 0$とする。説明変数としてi番の種類の特性が考えられる。

同時方程式

同時方程式 数本のモデルから成り立つモデルのシステムで経済システムの中の諸要素間の影響を表す。ある式の説明変数が、他の式の被説明変数になったりする。

生産関数と投資関数の同時方程式の例

$$\begin{cases} \text{生産関数：} \quad \text{総生産額} = f\,(\text{投資，固定資産，雇用者数}) \\ \text{投資関数：} \quad \text{投資} = f\,(\text{総生産額，政府支出，金利}) \end{cases}$$

一般表現

構造方程式 経済システムの構造を表す方程式

$$\begin{cases} y_{1t} = \alpha + \beta y_{2t} + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + \gamma_3 x_{3t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \alpha' + \beta' y_{1t} + \gamma'_1 x_{1t} + \gamma'_2 z_{2t} + \gamma'_3 z_{3t} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

外生変数 x や z がシステムの外から値がもたらされると考え、外生変数と呼ぶ。

内生変数 y 変数はシステムの中で値が決まると考えるため、内生変数と呼ぶ。

先決変数 ラグ付き内生変数と外生変数が時点 t においては既知であるため、先決変数と呼ぶ。例えば、$y_{1t} = \alpha + \beta y_{2t} + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t-1} + \gamma_3 y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$ の中の x_{2t-1} と y_{2t-1}。

一般表現（続き）

構造方程式の分散共分散行列

$$\begin{pmatrix} V(\varepsilon_{1t}) & Cov(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) \\ Cov(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1t}) & V(\varepsilon_{2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

一般表現（続き）

誘導方程式 y_{1t} と y_{2t} を未知数として見て、先決変数に関して方程式を解いて得られた方程式を誘導方程式と呼ぶ。

$$y_{1t} = \pi_1 + \pi_2 x_{1t} + \pi_3 x_{2t} + \pi_4 x_{3t} + \pi_5 z_{2t} + \pi_6 z_{3tt} + v_1 \tag{2}$$

$$y_{2t} = \pi_1' + \pi_2' x_{1t} + \pi_3' x_{2t} + \pi_4' x_{3t} + \pi_5' z_{2t} + \pi_6' z_3 + v_2 \tag{3}$$

- 誘導方程式の係数と誤差項が構造方程式の係数と誤差項で表すことができる。

$$v_1 = \frac{\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2}{1 - \beta\beta'}, v_2 = \frac{\varepsilon_2 + \beta'\varepsilon_1}{1 - \beta\beta'} \tag{4}$$

$$\pi_2 = \frac{\gamma_1 + \beta\gamma_1'}{1 - \beta\beta'}, \pi_2' = \frac{\gamma_1' + \beta'\gamma_1}{1 - \beta\beta'} \tag{5}$$

識別条件

識別条件 モデルを正確に推定（一致推定）を行うための条件。
次数条件（必要条件） ある特定の式を識別するための必要条件

$$\text{当該式の右辺に含まれる変数の数} \leq \text{全システムの先決変数の総数} \quad (6)$$

推定法（単一方程式推定法）

- 構造方程式の推定が目的。
- 以下のモデルを例に

$$\text{構造方程式}\begin{cases} y_{1t} = \alpha + \beta y_{2t} + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + \gamma_3 x_{3t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \alpha' + \beta' y_{1t} + \gamma_1' x_{1t} + \gamma_2' z_{2t} + \gamma_3' z_{3t} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

$$\text{誘導方程式}\begin{cases} y_{1t} = \pi_1 + \pi_2 x_{1t} + \pi_3 x_{2t} + \pi_4 x_{3t} + \pi_5 z_{2t} + \pi_6 z_{3tt} + v_1 \\ y_{2t} = \pi_1' + \pi_2' x_{1t} + \pi_3' x_{2t} + \pi_4' x_{3t} + \pi_5' z_{2t} + \pi_6' z_3 + v_2 \end{cases}$$

- 内生変数が誤差項と相関するため、普通の最小二乗法ではうまく推定できない（一致推定量を得られない）。

推定法（単一方程式推定法、続き）

２段階最小二乗法（2SLS） 構造方程式の一番目の式の推定を説明する。

1. まず、普通の最小二乗法で誘導方程式の２番目の式を推定する。推定値 $\hat{y}_{2t}$ を求める。

$$\hat{y}_{2t} = \hat{\pi}'_1 + \hat{\pi}'_2 x_{1t} + \hat{\pi}'_3 x_{2t} + \hat{\pi}'_4 x_{3t} + \hat{\pi}'_5 z_{2t} + \hat{\pi}'_6 z_3$$

2. $\hat{y}_{2t}$ を y_{2t} の変わりに構造方程式の一番目の式に代入し、モデル式

$$y_{2t} = \alpha' + \beta' y_{1t} + \gamma'_1 x_{1t} + \gamma'_2 z_{2t} + \gamma'_3 z_{3t} + \varepsilon_{2t} + \text{誤差項}$$

を最小二乗法で推定する。

例6.13

- **モデル式**

$$Cons = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 P_{-1} + \alpha_3 W + \varepsilon_{1t} \text{（消費関数）}$$

$$I = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 P_{-1} + \beta_3 K1 + \varepsilon_{2t} \text{（投資関数）}$$

$$Wp = \gamma_0 + \gamma_1 X + \gamma_2 X_{-1} + \gamma_3 trend + \varepsilon_{3t} \text{（民間賃金関数）}$$

$$X = Cons + I + G \text{（需給均衡式）}$$

$$P = X - W - tax \text{（民間利潤定義式）}$$

$$W = Wp + Wg \text{（総賃金定義式）}$$

- **被説明変数** $Cons, I, Wp, X, P, W$ **が内生変数であり，先決変数は，** $P_{-1}, K1, X_{-1}, trend, G, tax, Wg$ **と定数項。**

推定結果

最小二乗法の結果

$$Cons = 16.2(12.4) + .19(2.1)P + .09(0.99)P_{-1} + .80(20)W$$

2SLS の結果

$$Cons = 16.6(11.3) + .017(.13)P + .22(1.8)P_{-1} + .81(18)W$$