第五章　誤差項の諸問題[1]

劉慶豊[2]

小樽商科大学

July 11, 2011

[1]第二章からの資料は森棟公夫先生著「基礎コース　計量経済学」をもとに作成したものである。

[2]E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/

不均一分散

- 例：所得の低い人より所得の高い人の方が消費の分散が大きい
- モデル式

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + u_t, t = 1, 2, \cdots, n$$

- （説明変数が非確率変数の場合）被説明変数の分散は回帰式における誤差分散と等しい

$$V(u_t) = V(y_t)$$

- 被説明変数の分散が変化すると予想される場合、誤差分散も変化すると予想する

不均一分散 不均一分散とは誤差分散が観測対象（t や i）に応じて変化すること

$$V(u_t) = \sigma_t^2$$

不均一分散の影響

- 定数項と説明変数の係数の数足すn個の分散σ_t^2、$t = 1, \cdots n$、で、未知母数は$n + K$個となり観測数nより大きいであるため、全部推定することは不可能となる。偏回帰係数の推定だけを考える。
- t検定やF検定に影響を与える。DW検定も使えない。

不均一分散がある場合の推定法

分散比が既知

- 異なる観測対象の互いの分散比が既知、すなわち分散 $V(u_t) = (\sigma c_t)^2$ で c_t が既知の場合、モデルを以下のように変形して c_t で割ったデータを使い最小二乗法を適用する

$$\frac{y_t}{c_t} = \beta_1 \frac{1}{c_t} + \beta_2 \frac{x_{2t}}{c_t} + \cdots + \beta_K \frac{x_{Kt}}{c_t} + \frac{u_t}{c_t}, t = 1, 2, \cdots, n \quad (1)$$

- 新しい誤差項の分散は $V(\frac{u_t}{c_t}) = \sigma^2$ となり、均一分散となるため、t 検定や F 検定、DW 検定がいつも通り使えるようになる。
- 定数項が $\frac{1}{c_t}$ となり、1ではなくなるため、$0 \leq R^2 \leq 1$ の性質がなくなる。

不均一分散がある場合の推定法

分散比が既知

- 分散比 c_t が完全に既知であるのは稀であるが、近似的に何かの説明変数に比例するとみなすことができるときがある。
- 例：消費の分散は所得に比例する考えられるため、データを所得で割る。
- 分散が k 番目の説明変数 x_{kt} の二乗に比例すると分かった場合

$$V(u_t) = (\sigma x_{kt})^2, t = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

- 分散が k 番目の説明変数 x_{kt} の絶対値に比例すると分かった場合

$$V(u_t) = (\sigma)^2 |x_{kt}|, t = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

2グループ不均一分散の場合の検定

- 観測対象は分散の異なった二つのグループに分けられ、全部の観測個数 $n = n_1 + n_2$、n_1 と n_2 はそれぞれ第一と第二グループの観測個数である。
- 第一グループの誤差分散は σ_1^2、第二グループは σ_2^2。
- 各グループで別々に最小二乗法で推定して残差分散 s_1^2 と s_2^2 を求める。

ゴールドフェルト=クォント検定 帰無仮説は均一分散である、対立仮説は不均一分散分散である。F統計量は

$$f = \frac{(s_2)^2}{(s_1)^2}$$

自由度（$n_1 - K, n_2 - K$）のF分布に従う。F 検定を行えばいい。

2グループ不均一分散の場合の推定

1. グループごとに最小二乗法を適用し推定し、残差分散 s_1^2 と s_2^2 を求める。
2. 元データを前半は s_1^2 で後半は s_2^2 で割る。元のモデルに定数項がある場合前半 n_1 個の $1/s_1^2$ と後半 n_2 個の $2/s_2^2$ のデータ列を作って追加する。
3. 定数項無しでステップ2で作成したデータで推定を行う。

- 前半と後半を分けて表現すると新しいモデルは

$$\frac{y_t}{s_1} = \beta_1 \frac{1}{s_1} + \beta_2 \frac{x_{1t}}{s_1} + \cdots + \beta_K \frac{x_{Kt}}{s_1} + \frac{u_t}{s_1}, t = 1, \cdots, n_1 \tag{4}$$

$$\frac{y_t}{s_2} = \beta_1 \frac{1}{s_2} + \beta_2 \frac{x_{1t}}{s_2} + \cdots + \beta_K \frac{x_{Kt}}{s_2} + \frac{u_t}{s_2}, t = n_1 + 1, \cdots, n \tag{5}$$

となる。

一般的な不均一分散の検定

不均一分散の一般表現 誤差項が幾つかの何らかの変数従って変化すると表現できる

$$V(u_t) = \sigma^2\{\gamma_0 + \gamma_1 w_{1t} + \cdots + \gamma_p w_{pt}\}, \tag{6}$$

- この場合の不均一分散の検定の手順

1. 元のモデル

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + u_t, t = 1, 2, \cdots, n$$

   に最小二乗法を適用し残差 $\hat{u}_t$ を求める。
2. 残差 $\hat{u}_t$ に関して以下のモデルを推定する

$$(\widehat{u}_t)^2 = \gamma_0 + \gamma_1 w_{1t} + \cdots + \gamma_p w_{pt} + \text{誤差項}, \tag{7}$$

3. 以下の仮説を検定する　$H_0 : \gamma_1 = 0, \cdots, \gamma_p = 0$
4. F 統計量は

$$f = \frac{n-p-1}{p}\frac{ESS}{RSS}$$

   自由度（$p, n-p-1$）の F 分布に従う。F 検定を行う

LM検定

- 前のページのF検定は誤差項が正規分布に従う必要がある。
- 誤差項が正規分布に従わない場合LM検定を利用する
- $(\widehat{u}_t)^2 = \gamma_0 + \gamma_1 w_{1t} + \cdots + \gamma_p w_{pt} +$誤差項, を推定しその結果を利用して$LM$を計算する

$$LM = nR^2 = (n - p - 1)\frac{ESS}{RSS}$$

- LMは自由度pのχ^2分布に従うので、いつも通り、χ^2分布の臨界値を調べて、LMの値と臨界値と比較することで検定する。

一般的な不均一分散の検定（続き）

- モデル $(\widehat{u}_t)^2 = \gamma_0 + \gamma_1 w_{1t} + \cdots + \gamma_p w_{pt} +$ 誤差項, の中の説明変数 $w_{1t}, \cdots, w_{pt}$ として元のモデルの説明変数やその二乗または積を利用する方法がある。

$$(\widehat{u}_t)^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + \gamma_3 (x_{1t})^2 + \gamma_4 (x_{2t})^2 + \gamma_5 x_{1t} x_{2t} + \text{誤差項} \tag{8}$$

- 元のモデルの予測値を利用する方法もある。このとき、LM は自由度 1 の χ^2 分布に従う。

$$(\widehat{u}_t)^2 = \gamma_0 + \gamma (\widehat{y}_t)^2 + \text{誤差項} \tag{9}$$

残差を利用した推定法

1. 元のモデルを推定し残差 $\hat{u}_t$ を求める。
2. データを残差で割る、以下の新しいモデルを構成して推定する

$$\frac{y_t}{\hat{u}_t} = \beta_1 \frac{1}{\hat{u}_t} + \beta_2 \frac{x_{2t}}{\hat{u}_t} + \cdots + \beta_K \frac{x_{Kt}}{\hat{u}_t} + \frac{u_t}{\hat{u}_t}$$

3. このモデルの推定結果に普通の t 検定を適用できる。