第五章　誤差項の諸問題[1]

劉慶豊[2]

小樽商科大学

January 27, 2010

[1]第二章からの資料は森棟公夫先生著「基礎コース　計量経済学」をもとに作成したものである。

[2]E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/

一般の回帰式に関する仮定

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + u_t, t = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

- **期待値がゼロ**

$$E(u_t) = 0, \tag{2}$$

- **分散が t に依存しない、分散均一である**

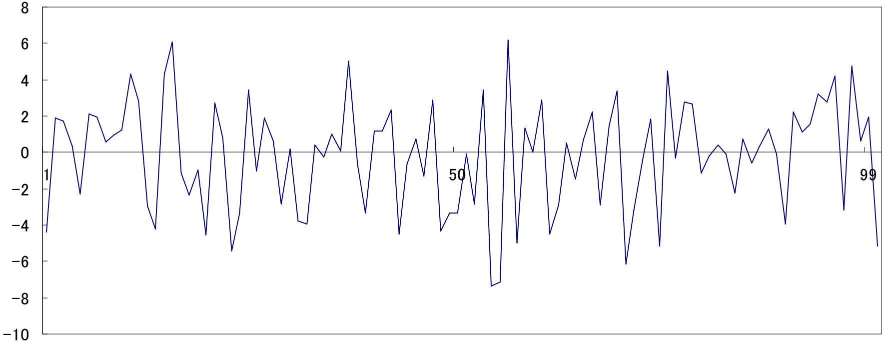
$$V(u_t) = \sigma^2 \tag{3}$$

- **共分散がゼロ、すなわち、異なる誤差項の間に（線形的な）結びつきがない**

$$Cov(u_t, u_{t-j}) = E\{(u_t - E(u_t))(u_t - E(u_{t-j}))\} = 0, \tag{4}$$

共分散がゼロの誤差項

5.1　標準的な誤差項: e(t)



- **系列相関：異なる誤差項の間に共分散がゼロではない、同じことで相関係数がゼロではないことを指す。**

$$Cov(u_t, u_{t-j}) \neq 0 \tag{5}$$

同じことで

自己相関係数

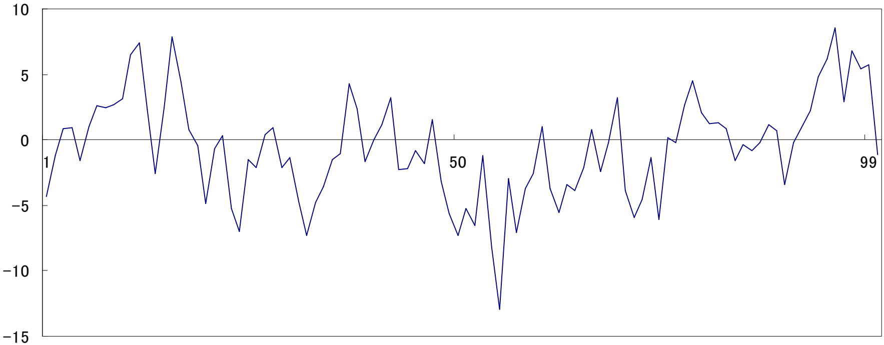
$$\phi_j = \frac{Cov\left(u_t, u_{t-j}\right)}{\sqrt{V\left(u_t\right) V\left(u_{t-j}\right)}} \neq 0$$

ただし、$V\left(u_t\right)$**と**$V\left(u_{t-j}\right)$**はそれぞれ**u_t**と**u_{t-j}**の分散である。分散が均一のとき、すなわち**$V\left(u_t\right) = V\left(u_{t-j}\right)$**の場合**

$$\phi_j = \frac{Cov\left(u_t, u_{t-j}\right)}{\sqrt{V\left(u_t\right) V\left(u_{t-j}\right)}} = \frac{Cov\left(u_t, u_{t-j}\right)}{V\left(u_t\right)} \neq 0 \tag{6}$$

系列相関のある誤差項

5.2　系列相関がある誤差項: u(t)=0.67u(t−1)+e(t)



標本自己相関係数

u_t の平均と u_{t-j} の平均が近似的に 0 として、u_t と u_{t-j} の標本自己相関係数が

$$\frac{\sum_{t=j+1}^{n} u_t u_{t-j}}{\sqrt{\sum_{t=j+1}^{n}(u_t)^2 \sum_{t=j+1}^{n}(u_{t-j})^2}} \tag{7}$$

となるが、計算を簡単にするため近似的に u_t と u_{t-j} の標本自己相関係数を

$$\frac{\sum_{t=j+1}^{n} u_t u_{t-j}}{\sum_{t=1}^{n}(u_t)^2} \tag{8}$$

とする。

標本自己相関係数の推定値 u_t, u_{t-j} などが観測できないため、最小二乗推定の残差 $\hat{u}_t, \hat{u}_{t-j}$ などを利用して標本自己相関係数を推定する

$$\hat{\phi}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-j}}{\sum_{t=1}^{n}(\hat{u}_t)^2}$$

表5－1の例

Example

$$\widehat{\phi}_1 = -0.10, \quad \widehat{\phi}_2 = -0.11, \quad \widehat{\phi}_3 = 0.05, \quad \widehat{\phi}_4 = 0.08, \quad \widehat{\phi}_5 = 0.004,$$

$$\widehat{\phi}_1 = 0.64, \quad \widehat{\phi}_2 = 0.44, \quad \widehat{\phi}_3 = 0.40, \quad \widehat{\phi}_4 = 0.35, \quad \widehat{\phi}_5 = 0.26$$

自己回帰モデルで表現する自己相関

$$u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{9}$$

ε_t が平均0、分散が σ^2、共分散が0のノイズ（ホワイトノイズ）である。このようなモデルに従う u_t は一期前の誤差項 u_{t-1} と関連があり、一階の自己相関を持つ、すなわち $Cov\left(u_t, u_{t-1}\right) \neq 0$ である。

誤差項の自己相関による問題

- 誤差項の間に自己相関（系列相関）が存在する場合、最小二乗推定に、次のような障害が起きる
  - 通常の t 値で係数の検定ができない
  - F 検定も利用できない

誤差項の間に自己相関があるかどうかを検定する

Durbin=Watson 検定

- $$u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{10}$$
  の中の係数ϕが0かどうかの検定に相当する（帰無仮説は$\phi = 0$、すなわち自己相関がない)。
- 検定統計量

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\widehat{u}_t - \widehat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}(\widehat{u}_t)^2} \tag{11}$$

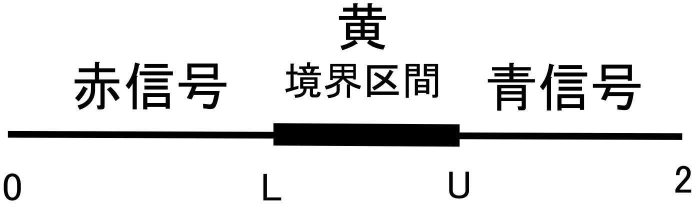
$$\sum_{t=2}^{n}(\widehat{u}_t)^2 + \sum_{t=2}^{n}(\widehat{u}_{t-1})^2 - 2\sum_{t=2}^{n}\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-1} \tag{12}$$

であるため、

$$DW \fallingdotseq 2 - 2\widehat{\phi} \tag{13}$$

DW検定の手続き

図　5.3　DWあるいは(4−DW)の値



DW検定の手続き（続き）

通常は片側検定を行う。

1. 有意水準を決める、1% あるいは5%
2. サンプル数 n と定数項以外の説明変数の数 k を確認する。帰無仮説はいつも $\phi = 0$ となる。片側検定の対立仮説を自分で決める。経済データの場合は通常 $H_a : \phi > 0$ を選ぶ。稀に $H_a : \phi < 0$ とする。
3. 付表５、付表６より下限（L）と上限（U）を求める。
4. 対立仮説として $H_a : \phi > 0$ を選んだとき、
    1. $DW < L$ であれば、帰無仮説を棄却する。
    2. $L < DW < U$ であれば、検定は不決定となる。
    3. $DW > U$ であれば、帰無仮説は棄却できない。

DW検定の手続き（続き）

5. $H_a : \phi < 0$を選んだとき
   1. $4 - DW < L$であれば、帰無仮説を棄却する。
   2. $L < 4 - DW < U$であれば、検定は不決定となる。
   3. $4 - DW > U$であれば、帰無仮説は棄却できない。

系列相関があると分かったら
（系列相関があるときの推定法）

- コクラン=オーカット法：$u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t$ で ϕ の値が既知の場合、

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + u_t && (14)\\
&= \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + \phi u_{t-j} + \varepsilon_t && (15)\\
\phi y_{t-1} &= \phi\left(\beta_1 + \beta_2 x_{2t-1} + \cdots + \beta_K x_{Kt-1}\right) + \phi u_{t-1} && (16)
\end{aligned}
$$

$$
y_t - \phi y_{t-1} = \beta_1(1-\phi) + \beta_2\left(x_{2t} - \phi x_{2t-1}\right) + \cdots + \beta_K\left(x_{Kt} - \phi x_{Kt-1}\right) + \varepsilon_t \qquad (17)
$$

$y_t^* = y_t - \phi y_{t-1}, x_{1t}^* = (1-\phi), x_{2t}^* = x_{2t} - \phi x_{2t-1}, \cdots$ とすれば

$$
y_t^* = \beta_1 + \beta_2 x_{2t}^* + \cdots + \beta_K x_{Kt}^* + \varepsilon_t \qquad (18)
$$

この式の誤差項は系列相関がない。従って最小二乗法で推定し、普通の t、F 検定が適用できる。

- コクラン=オーカット法：ϕ未知。まず、元の式$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + u_t$に最小二乗法を適用し、残差$\hat{u}_t$を求める。そして、

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=j+1}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} (\hat{u}_t)^2}$$

でϕを推定してからコクラン=オーカット法で推定する。