計量経済学練習問題

劉慶豊*
小樽商科大学

平成 23 年 5 月 26 日

1 第一章練習問題と解答

問題 1 データ $\{20, 12, 32, 12, 22, 89, 19\}$ と $\{6, 4, 5, 9\}$ の中央値を求めなさい

データを並べかがると、それぞれ $\{12, 12, 19, 20, 22, 32, 89\}$ と $\{4, 5, 6, 9\}$ となるので、それぞれの中央値は 20 と $(5 + 6)/2 = 5.5$ となる。

問題 2 データ $\{10, 12, 11, 16, 12, 18, 15, 19\}$ の四項移動平均を計算しなさい。

$$\begin{gathered}\{(10 + 12 + 11 + 16)/4, (12 + 11 + 16 + 12)/4, (11 + 16 + 12 + 18)/4,\\ (16 + 12 + 18 + 15)/4, (12 + 18 + 15 + 19)/4\}\\ = \{49/4, 51/4, 57/4, 61/4, 16\}\end{gathered}$$

問題 3 データ $\{3, 2, 4, 3, 1, 5\}$ の標本分散と標本標準偏差を計算しなさい。

データを x で表記すれば、平均 $\bar{x} = (3 + 2 + 4 + 3 + 1 + 5)/6 = 3$ 標本分散

$$\begin{aligned}S_x^2 &= \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\\ &= \frac{1}{5} \left\{(3-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2 + (1-3)^2 + (5-3)^2\right\}\\ &= 2\end{aligned}$$

*E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/

標本標準偏差

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{2}$$

問題 4 $x = \{3, 2, 4, 3, 1, 5\}$ として、x を標準化しなさい。

前の問題の結果を利用する。標準化されたデータ $z_i = (x_i - \bar{x})/S_x$ なので

$$\begin{aligned} z &= \left\{ \frac{3-3}{\sqrt{2}}, \frac{2-3}{\sqrt{2}}, \frac{4-3}{\sqrt{2}}, \frac{3-3}{\sqrt{2}}, \frac{1-3}{\sqrt{2}}, \frac{5-3}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= \left\{ 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right\} \end{aligned}$$

標準化されたデータ z の平均 $\bar{z} = 0$、標本分散

$$\begin{aligned} S_z^2 &= 1/5 \left\{ 0^2 + \sqrt{2}^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

と確認できる。

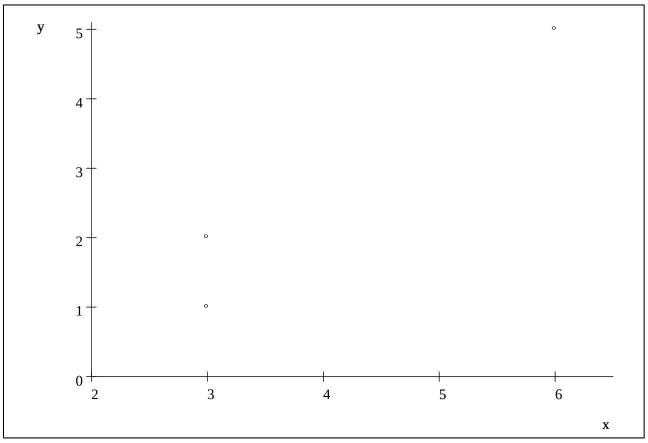
問題 5 標準化されたデータの分散が 1 となることを証明しなさい。

配布資料またはテキスト 16 ページ (1.10) 式を参照しなさい。

問題 6 $\bar{x} = 6, S_x^2 = 25$ として、x の 5 シグマ区間を求めなさい。チェビシェフの不等式より 5 シグマ区間に含まれる観測値の割合は何パーセント以上であることを答えなさい。

x の 5 シグマ区間は $(\bar{x} - 5S_x, \bar{x} + 5S_x) = (6-5, 6+5) = (1, 11)$ となる。5 シグマ区間に含まれる観測値の割合は $1 - 1/5^2 = 96\%$。

問題 7 $x = \{3, 3, 6\}$、$y = \{1, 2, 5\}$ として、x と y の散布図を描き、相関係数を計算しなさい。



x の平均 $\bar{x}=4$、標本分散 $S_x^2=3, y$ の平均 $\bar{y}=8/3$、標本分散

$$S_y^2=\frac{1}{2}\left((1-8/3)^2+(2-8/3)^2+(5-8/3)^2\right)=13/3$$

x と y の標本共分散

$$S_{xy}=\frac{1}{2}\left\{(3-3)(1-8/3)+(3-3)(2-8/3)+(6-3)(5-8/3)\right\}=7/2$$

相関係数

$$r=\frac{S_{xy}}{S_x S_y}=\frac{7/2}{\sqrt{3}\sqrt{13/3}}=\frac{7}{26}\sqrt{13}\doteqdot 0.97.$$

問題 8 c を定数として $E(cX)=cE(X)$ であることを離散確率変数と連続確率変数のそれぞれの期待値の定義に照らして確認しなさい。さらに cX の分散が X の分散の c^2 倍であることを証明しなさい。

定義より

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i P(x_i)\right)$$

なので

$$E(cX)=\sum_{i=1}^{n}\left(cx_i P(x_i)\right)=c\sum_{i=1}^{n}\left(x_i P(x_i)\right)=cE(X).$$

確率変数の分散の定義より X の分散

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(x_i)\right)^2 P(x_i)$$

cX の分散

$$\begin{aligned}
V(cX) &= \sum_{i=1}^{n} (cx_i - E(cx_i))^2 P(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (cx_i - cE(x_i))^2 P(x_i) \\
&= c^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x_i))^2 P(x_i) \\
&= c^2 V(X)
\end{aligned}$$

証明完了。

問題 9 期待値の加法性 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ を利用して、$E(X+Y+Z+W) = E(X) + E(Y) + E(Z) + E(W)$ を証明しなさい。確率変数 X と Y が独立であるとき $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$ という独立な確率変数の積の期待値の性質を利用して、X, Y, Z が互いに独立であるとき、$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z)$ であることを証明しなさい。

$E(X+Y+Z+W) = E((X+Y)+(Z+W))$ なので、さらに期待値の加法性より

$$E((X+Y)+(Z+W)) = E(X+Y) + E(Z+W)$$

もう一回加法性を右の二つの項に適用すれば

$$E(X+Y) + E(Z+W) = E(X) + E(Y) + E(Z) + E(W)$$

となり、証明完了。$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z)$ の証明に関しては X, Y, Z が互いに独立であるため、繰り返し独立な確率変数の積の期待値の性質の法則を適用すれば証明できる。

問題 10 ある美容室が割引サービスを行った、この割引サービスによって、一日の平均来客数が増えたかどうかを調べたい。この美容室の普段の平均来客数が 10 人。割引サービスを実施後、25 日間来客数を集計して平均と標準偏差を計算して $\bar{X} = 12$、$s = 3$ だとする。検定を行って一日平均の来客数が増えたかどうかを判断してください。ヒント：H_0：$\mu \leq 10$；H_1：$\mu > 10$。

1. 有意水準を $\alpha = 5\%$ とする。

2. H_0：$\mu \leq 10$；H_1：$\mu > 10$ とする。

3. 検定統計量 t 値を計算する。$t = \sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)/s = \sqrt{25}\times(12-10)/3 \doteqdot 3.33$

4. t 分布表より自由度 $n - 1 = 24$ の t 分布の 5% の臨界値（有意水準点）が約 1.71 である。

5. 検定統計量の値 $t = 3.33 > 1.71$ であるため帰無仮説 H_0：$\mu \leq 10$ が棄却される。割引サービスにより一日平均の来客数が増えたと判断する。

問題 11 テキスト *34* ページ練習問題 *4*。

まず期間 1 に関して検定を行う。

1. 有意水準を $\alpha = 5\%$ とする。

2. H_0：$\mu \geq 0$；H_1：$\mu < 0$ とする。

3. 検定統計量 t 値を計算する。$t = \sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)/s = \sqrt{20}\times(-55.18-0)/\sqrt{12685} = -2.191$

4. t 分布表より自由度 $n - 1 = 19$ の t 分布の 5% の右側臨界値（有意水準点）が約 1.73 である。対立仮説が H_1：$\mu < 0$ で不等号がより小さいであるため、左側の臨界値を見る。左側の臨界値は右側の臨界値掛ける -1 で -1.73 となる。

5. 検定統計量の値 $t < -1.73$ であるため帰無仮説 H_0：$\mu \geq 0$ が棄却される。収益率が負であると判断する。[1]

---

[1]

(a) 講義の例題では対立仮説は $\mu > 20000$、より大きい (>) となっている。より小さい（<）たとえば対立仮説が $\mu < 20000$ となる場合、t 値を計算して左側の有意水準点と比較する。t 値が左側の有意水準点より小さければ帰無仮説を棄却する、逆の場合だったら帰無仮説を採択する。

(b) 左側の有意水準点は分布表から見つかった右側の有意水準点の値 $\times(-1)$)、たとえば、右側の 5% 有意水準点が 1.65 だったら、左側は -1.65 となる。

期間 2 に関して検定を行う。

1. 有意水準を $\alpha = 5\%$ とする。
2. H_0：$\mu \leq 0$；H_1：$\mu > 0$ とする。
3. 検定統計量 t 値を計算する。$t = \sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)/s = \sqrt{17}\times(33.71 - 0)/\sqrt{18249} = 1.0289$
4. t 分布表より自由度 $n - 1 = 16$ の t 分布の 5% の右側臨界値（有意水準点）が約 1.75 である。
5. 検定統計量の値 $t = 1.0289 < 1.75$ であるため帰無仮説 H_0：$\mu \leq 0$ が棄却できない。収益率が正であるとはいえない。

2 第二章練習問題と解答

問題 12 テキスト *68* ページ練習問題 *1*。さらに、残差の総和が 0 となることを確認しなさい。

まず、計算できるところまで表を完成していく。

	y	x	x^2	xy	y^2	回帰値	残差
	1	1	1	1	1		
	7	2	4	14	49		
	10	3	9	30	100		
総和	18	6	14	45	150		

モデルを $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ として、以上の結果を利用して係数の推定値を求める。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$
$$= \frac{45 - 3 \times \frac{6}{3} \times \frac{18}{3}}{14 - 3 \times \left(\frac{6}{3}\right)^2} = 4.5$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{18}{3} - 4.5 \times \frac{6}{3} = -3$$

以上の結果を利用して回帰値を求める。

$$\hat{y}_1 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_1 = -3 + 4.5 \times 1 = 1.5$$
$$\hat{y}_2 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_2 = -3 + 4.5 \times 2 = 6$$
$$\hat{y}_3 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_3 = -3 + 4.5 \times 3 = 10.5$$

残差は

$$\hat{u}_1 = y_1 - \hat{y}_1 = 1 - 1.5 = -0.5$$
$$\hat{u}_2 = y_2 - \hat{y}_2 = 7 - 6 = 1$$
$$\hat{u}_3 = y_3 - \hat{y}_3 = 10 - 10.5 = 0.5$$

表を完成すると

	y	x	x^2	xy	y^2	回帰値	残差
	1	1	1	1	1	1.5	-0.5
	7	2	4	14	49	6	1
	10	3	9	30	100	10.5	-0.5
総和	18	6	14	45	150	18	0

決定係数

$$
\begin{aligned}
R^2 &= 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{3} (y_i - \bar{y})^2} \\
&= 1 - \frac{(-0.5)^2 + 1^2 + (-0.5)^2}{(1-6)^2 + (7-6)^2 + (10-6)^2} \\
&= 0.9643
\end{aligned}
$$

残債の総和 $\sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i = -0.5 + 1 - 0.5 = 0$ である。

問題 13 問題 12 の結果を利用して、以下の仮説に関して検定を行いなさい。$H_0 : \beta = 0; H_1 : \beta \neq 0.$

1. 有意水準を $\alpha = 5\%$ とする。
2. 帰無仮説と対立仮説をそれぞれ $H_0 : \beta = 0; H_1 : \beta \neq 0$ とする。
3. 検定統計量 t 値を計算する。

$$
t_\beta = \frac{\left(\hat{\beta} - \beta_0\right)}{s_\beta}
$$

t_β を計算するために $s_\beta = \sqrt{s^2/\{(n-1)s_{xx}\}}$、従って s^2 と s_{xx} を計算する必要がある。

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{(n-2)} = \frac{(-0.5)^2 + 1^2 + (-0.5)^2}{3-2} = 1.5 \\
s_{xx} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \right) \\
&= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 14 - 2^2 \right) = 1
\end{aligned}
$$

t_β の公式に代入する。

$$
\begin{aligned}
t_\beta &= \frac{\left(\hat{\beta} - \beta_0\right)}{s_\beta} = t_\beta = \frac{\left(\hat{\beta} - \beta_0\right)}{\sqrt{s^2/\{(n-1)s_{xx}\}}} \\
&= \frac{4.5 - 0}{\sqrt{1.5/\left\{(3-1) \times 1\right\}}} = 5.1962
\end{aligned}
$$

4. t 分布表より自由度 $n-2=1$ の t 分布の 2.5%(両側検定のため自由度を半分にする) の臨界値が約 12.71 である。

5. 検定統計量の絶対値値 $|t|=5.1962<12.71$ であるため帰無仮説 H_0：$\beta=0$ が採択される。

問題 14 問題 12 の結果を利用して、以下の仮説に関して検定を行いなさい。$H_0:\beta=4; H_1:\beta\neq 4.$

1. 有意水準を $\alpha=5\%$ とする。

2. 帰無仮説と対立仮説をそれぞれ $H_0:\beta=0; H_1:\beta\neq 0$ とする。

3. 検定統計量 t 値を計算する。

$$t_\beta=\frac{\left(\hat{\beta}-\beta_0\right)}{s_\beta}$$

   t_β を計算するために $s_\beta=\sqrt{s^2/\{(n-1)s_{xx}\}}$、従って s^2 と s_{xx} を計算する必要がある。

$$\begin{aligned}
s^2&=\frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{(n-2)}=\frac{(-0.5)^2+1^2+(-0.5)^2}{3-2}=1.5\\
s_{xx}&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2=\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2-\bar{x}^2\right)\\
&=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times 14-2^2\right)=1
\end{aligned}$$

   t_β の公式に代入する。

$$\begin{aligned}
t_\beta&=\frac{\left(\hat{\beta}-\beta_0\right)}{s_\beta}=t_\beta=\frac{\left(\hat{\beta}-\beta_0\right)}{\sqrt{s^2/\{(n-1)s_{xx}\}}}\\
&=\frac{4.5-4}{\sqrt{1.5/\left\{(3-1)\times 1\right\}}}=0.5774
\end{aligned}$$

4. t 分布表より自由度 $n-2=1$ の t 分布の 2.5%(両側検定のため自由度を半分にする) の臨界値が約 12.71 である。

5. 検定統計量の絶対値値 $|t|=0.5774<12.71$ であるため帰無仮説 H_0：$\beta=4$ が採択される。

問題 15 問題 12 の結果を利用して、以下の仮説に関して検定を行いなさい。β の 95% 信頼区間を求めなさい。さらに、その信頼区間をもとに有意水準 5% で $H_0 : \beta = 0; H_1 : \beta \neq 0$ に関して検定しなさい。

前の問題より $s_\beta = \sqrt{s^2/\{(n-1)s_{xx}\}} = \sqrt{1.5/\{(3-1)\times 1\}} = 0.866$。$t$ 分布表より自由度 $n-2=1$ の右側 2.5% 点 $t_{97.5} = 12.71$。

$$
\begin{aligned}
\beta\text{の 95\%信頼区間} &= \left[\hat{\beta} - s_\beta \times t_{97.5}, \hat{\beta} + s_\beta \times t_{97.5}\right] \\
&= [4.5 - 0.866 \times 12.71, 4.5 + 0.866 \times 12.71] \\
&= [-6.5069, 15.507]
\end{aligned}
$$

0 が β の 95% 信頼区間に入っているため、帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ が採択される。