統計学（第二章　確率論、検定）

劉慶豊[1]

小樽商科大学

June 29, 2012

[1]E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/

2 変数同時分布表

例 15 **カ国の出生率と就学率の同時分布表**

出生率＼就学率	40－50	50-60	60-70	70-100	出生率の周辺度数
10-20	0	1	2	3	6
20-30	3	2	1	2	8
30-40	1	0	0	0	1
就学率の周辺度数	4	3	3	5	15

出生率が $10-20\%$ **で就学率が** 70% **以上の国は** 3 **カ国であることが読み取れる。**

周辺度数 **各変数の周辺度数は** 1 **変数の度数分布表の時の度数と同じ。**

確率入門

試行 結果に不確実性が伴うような実験や行動などを試行という。物理実験、政策施行、社会現象と自然現象などの発生を試行とみなすことができる。

事象 試行の結果を事象という。

根源事象 分割不可能な事象。

空事象 空である空集合。ϕで表す。

標本空間 すべての根元事象により構成した集合。標本空間は通常Ωで表す。

全事象 標本空間の中のすべての根元事象を含む事象である。

サイコロの例 サイコロを1回だけ投げる実験を行う。この実験が試行という。根元事象は,1の目が出る、2の目が出る、$\cdots$で、数学記号で表現すれば$A_1 = 1, A_2 = 2, \cdots, A_6 = 6$となる。標本空間は$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$で、$E_1 = \{1, 3, 5\}$という事象は奇数の目が出る結果を意味する。

確率

主観的確率 主観的に考えた事件の発生する可能性。例、明日の試合で勝利する確率は80%だ。彼が100%遅刻するだろう。

統計学的な確率の定義 同じ条件のもとで、繰り返し同じ試行をn回行い、毎回の試行は互いにまったく無関係（独立）であるとする。事象A（Aという結果）がm回出たとする。Aが発生する割合はm/nである。もし、試行の回数nを無限回にしたとする、このとき、m/nが一つの定数に収束したら、その定数を事象Aの確率とする。通常$P(A)$で表す。

練習問題 サイコロの例で統計学的な確率の概念を考えてみる。

確率の公理

確率の定義の仕方が様々あるが、統計学で取り扱えるようにするためには、必ず以下の公理を満たさなければならない。

確率の公理

1. 任意の事象Aに関して、$0 \leq P(A) \leq 1$。
2. 全事象の確率が1である。$P(\Omega) = 1$。
3. 事象AとBが排反する場合（同じ根元事象を含まない、すなわち、AとBが必ず同時に起きない場合)、AとBがどちらかが起きる確率はAとBの確率の和である。$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。$A$と$B$が排反ではない場合$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$である。

根元事象が互いに排反である。

確率変数

- 確率変数が取る値はおのおのに一定な確率が対応している。
- コイン投げの実験では表を1とし裏を0としたら、コイン投げの結果を確率変数Xのとる値とそれに対応している確率は$X=0$の確率は$0.5, X=1$の確率も0.5である。
- サイコロの場合は$X=1$の確率は$1/6, X=2$の確率も$1/6, \ldots$。

実現値 試行が完了して、確率変数の値が特定の実数値に確定される。その実数値が実現値という。

離散確率変数

- 上述した二つの確率変数の例では確率変数Xは0と1または$1, 2, 3, 4, 5, 6$と飛び飛びとした値しかとらない、たとえば0と1の間の値を取ることがない、この場合は離散確率変数と呼ぶ。
- 確率変数が取る値とそれに対応する確率との関係は以下の表で表せる。

Xが取る値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
対応する確率$P(x)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\cdots$	$P(x_n)$

サイコロの例

Xが取る値	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$\cdots$	$x_6 = 6$
対応する確率$P(x)$	$P(x_1) = 1/6$	$P(x_2) = 1/6$	$\cdots$	$P(x_6) = 1/6$

等確率の世界での離散確率変数の確率の計算

等確率の世界 すべての根元事象の確率が同じである世界。

例 歪みのないコイン、正確の形をしたサイコロ。

確率の計算 根元事象の確率が$1/$根元事象の総数で、個々の根元事象が互いに排反であるため

$$\text{事象}A\text{の確率} = \frac{\text{事象}A\text{に含まれた根元事象の数}}{\text{根元事象の総数}}$$

練習問題 2回コインを投げて、$A = \{1$回目に表が出て、2回目に裏が出る$\}$の確率を計算してください。

樹形図による確率の計算

樹形図 簡単な問題のとき、樹形図によって確率を計算できる。
根元事象の総数場合の数の計算と同じように、樹形図でできる。
しかし、場合の数が多すぎるとき困難である。

- 例：袋の中に白玉が1個、青玉が2個があり、玉2個を取り出すときに、全部青玉になる確率 $= 1/3$。テキスト図2.4参照。

順列

順列（順序が関係する場合に利用する） n個の異なった積み木があるとする。その中からr個を取り出して1列に並べたものを順列と呼ぶ。異なった順列の数は以下の公式で計算できる。

順列の数

$$_nP_r = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ただし$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$で$n$の階乗と呼ぶ。$0! = 1$とする。

例 A, B, C, Dの４人がいる場合、3人の列を作って、何パターンができるか？$_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$。各自で樹形図で確認しなさい。

組合せ

組合せ（順序が関係しない場合に利用する） n個の異なった積み木があるとする。その中からr個を取り出して順番を無視してそのr個の内容を組合せという。組合せの数は以下の公式で計算する。

組合せの数

$$_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} = \frac{_nP_r}{r!}$$

例 A, B, C, Dの４人がいる場合、3人を選ぶ場合、何パターンがあり得るのか？$_4C_3 = (4 \times 3 \times 2) / (3 \times 2 \times 1) = 4$。各自で樹形図で確認しなさい。

順列、組合せによる確率の計算

例 袋の中に白玉が1個、青玉が2個があり、玉2個を取り出すときに、全部青玉になる確率を計算しなさい。

確率の公式事象Aの確率 $= \dfrac{\text{事象}A\text{に含まれた根元事象の数}}{\text{根元事象の総数}}$ と組合せの公式を利用して計算する

$$\text{全部青玉になる確率} = \frac{\text{全部青玉になるパターンの数}}{\text{すべての可能なパターンの数}} = \frac{1}{{}_2C_3} = \frac{1}{3}$$

例 サイコロを2回投げて、目の合計が10になる確率。順序を配慮に入れて10になるパターンの数は3、すべてのパターンの数は${}_1C_6 \times {}_1C_6 = 36$、求める確率は$1/12$。

順列、組合せによる確率の計算

例（テキスト例２．７） 壺に4個の青玉と2個の赤玉があり、6個の玉を順番に取り出して並べ、2個の赤玉が続く確率は？

1. 2個の赤玉が青玉との相対的な位置を考えると5ヶ所しかない。
2. そして赤玉の順番が${}_2P_2 = 2$パターン。
3. さらに残りの4個の青玉の順番のパターンは${}_4P_4 = 4!$。
4. 合わせて2個の赤玉続けて出てくるパターンは$5 \times 2 \times 4!$。
5. 全ての可能性は${}_6P_6 = 6!$。
6. ゆえに、求める確率は$(5 \times 2 \times 4!)\,/6! = 1/3$。

条件付確率

条件付確率 事象Aが生じたという条件のもとで事象Bが生じる確率をAのもとでのBの条件付確率という。$P(B|A)$と記する。
$P(A) \neq 0$の場合

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

と定義する。

例 シートベルト着用率を50%とし、シートベルトを着用し事故死の確率を0.5%とする。シートベルトを着用した人でその人の事故死の確率は？

$$\begin{aligned} & P(\text{事故死}|\text{シートベルト着用}) \\ & = \frac{P(\text{事故死} \cap \text{シートベルト着用})}{P(\text{シートベルト着用})} = \frac{0.5\%}{50\%} = 1\% \end{aligned}$$

ベイズの定理

ベイズの定理

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)}$$

ただし、A^C は A の補集合を現す。条件付確率の定義式と $P(B) = P\left[(B \cap A) \cup \left(B \cap A^C\right)\right] = P(B \cap A) + P\left(B \cap A^C\right)$ を利用して証明せよ。テキスト73ページ参照。

独立

独立 **事象**A**と**B**に関して、**$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ **のとき、**A**と**B**が互いに独立であるという。独立であれば**$P(B|A) = P(B)$**。**

例 **コインを**2**回投げる事件を行う。事象**$A = \{$**1回目には表が出る**$\}$**、事象**$B = \{$2**回目には表が出る**$\}$**、特別なことをしない限り、**2**回の投げは互いに無関係で、独立である。**$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$**。**

度数関数、分布関数

確率度数関数 ここでは$P(x)$は確率度数関数と呼ばれる。$P(x_1), P(x_2)\ldots$はxの具体的な値に対応する確率を表す。

分布関数 分布関数の定義は$F_X(c) = P(\{X \leq c\})$となる。表しているのはXがcより小さくなる確率である。離散確率変数の場合は

$$F_X(c) = P(\{X \leq c\}) = \sum_{x_i \leq c} P(x_i)$$

サイコロの例

$$\begin{aligned} F_X(3) = P(\{X \leq 3\}) &= \sum_{x_i \leq 3} P(x_i) \\ &= P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

確率変数の独立

確率変数の独立 任意の実数aとbに関して、
$P(\{X>a$かつ$Y>b\})=P(\{X>a\})\times P(\{Y>b\})$が満たされるとき、$X$と$Y$が互いに独立であるという。直感的にいうと、$X$と$Y$が独立であるときは、$X$の実現値の大小は$Y$の実現値の大小とまったく無関係である。

確率変数の期待値

確率変数 X の期待値を $E(X)$ で表す。期待値は直感的に確率変数の理論上の平均で理解できる。離散確率変数の場合

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i).$$

サイコロの例

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) \\ &= P(x_1) \times x_1 + P(x_2) \times x_2 + \cdots + P(x_6) \times x_6 \\ &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

期待値の性質

- 以下の性質は後述する連続確率変数に関しても成り立つ。

期待値の加法性 任意の二つの確率変数 X と Y の和の期待値が期待値の和と等しい。$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$。

独立な確率変数の積の期待値 確率変数 X と Y が独立であるとき $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$。

定数倍 $E(cX) = cE(X)$、ただし c が定数である。

練習問題 以上の性質を利用して、$E(X+Y+Z+W) = E(X) + E(Y) + E(Z) + E(W)$ を証明しなさい。X, Y, Z が互いに独立であるとする、$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z)$ を証明しなさい。

確率変数の分散

確率変数 X の分散を $V(X)$ で表して、離散確率変数の場合

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - E(X))^2 P(x_i)\right].$$

性質 $V(cX + b) = c^2 V(X)$、**ただし c と b は定数である。連続確率変数に関しても成り立つ。**

サイコロの例

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - E(X))^2 P(x_i)\right] \\ &= (x_1 - E(X))^2 \times P(x_1) + \cdots + (x_6 - E(X))^2 \times P(x_6) \\ &= \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \cdots + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

確率変数の共分散

確率変数 X と Y の共分散を $Cov(X, Y)$ で表して、離散確率変数の場合

$$
\begin{aligned}
Cov(X, Y) &= E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[(x_i - E(X))(y_j - E(Y))P(x_i, y_j)\right].
\end{aligned}
$$

独立な確率変数の共分散 確率変数 X と Y が独立であるとき共分散 $Cov(X, Y) = 0$。

確率変数の相関係数

$$
\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}
$$

$$
-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1
$$

確率分布

Definition (確率分布)

ある確率変数 X の取る値に対応する確率がある関数 $P(x)$ で表せるとき、この確率変数 X の確率分布は $P(x)$ に従うという。

ベルヌーイ分布の例

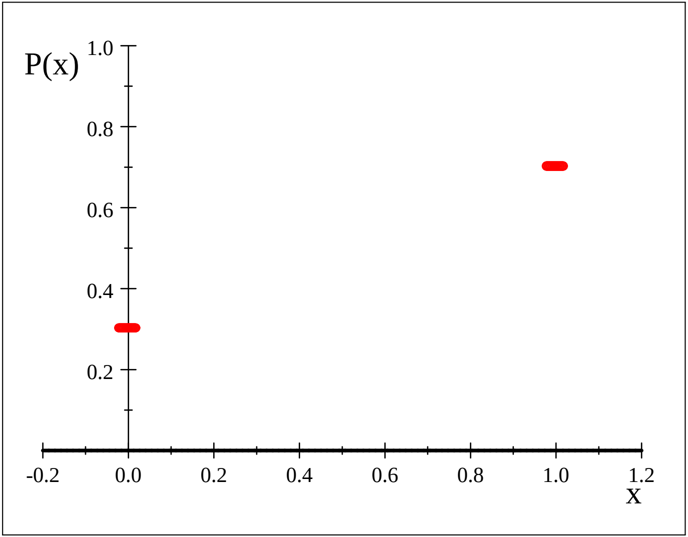
- **ベルヌーイ分布の確率度数関数**

$$\begin{cases} P(x) = p & x = 1 \\ P(x) = 1 - p & x = 0 \end{cases}$$

  $p = 0.5$ **のときは1回コイン投げた時の結果の分布となる。**
- **コインを投げる実験は確率 $p = 0.5$ のベルヌーイ試行と呼ぶ。**
- **期待値** $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$
- **分散は**

$$\begin{aligned} V(X) &= (0 - p)^2 \times (1 - p) + (1 - p)^2 \times p \\ &= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3 = p - p^2 \end{aligned}$$

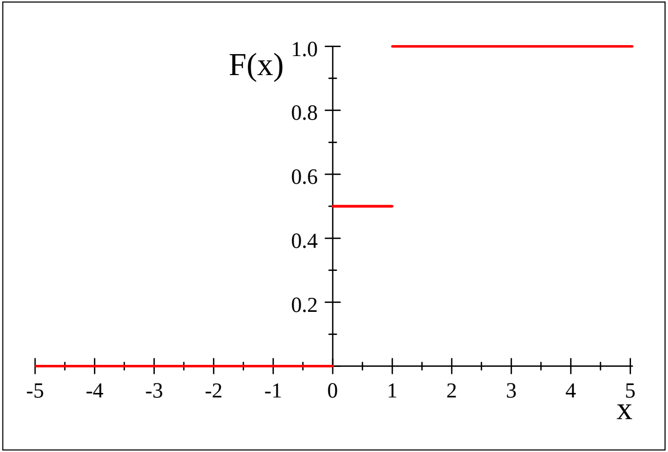
- **確率度数関数のグラフ**



ベルヌーイの確率度数関数 $p = 0.7$

- **確率分布関数**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



ベルヌーイ分布の分布関数 $p = 0.5$

二項分布

二項分布 独立な成功確率がpのベルヌーイ分布をn回行って、成功した回数の分布が二項分布と呼ぶ。$B(n,p)$で表記する。

二項分布の確率関数

$$P(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}, \; x = 0, 1, \cdots, n.$$

例 歪みのないコインを10回投げて、表が出る回数をXと記する場合、Xの分布は$p = 0.5$の二項分布となる。8回表が出る確率

$$P(X=8) = {}_{10}C_8 p^8 (1-p)^{10-8} = {}_{10}C_8 0.5^{10}$$

例 成功率$p = 70\%$バスケット選手の100回シュートして、成功する回数をXとする、Xの分布は$p = 0.7$の二項分布となる。この選手は100回シュートして80回成功する確率は

$$P(X=80) = {}_{100}C_{80} p^{80} (1-p)^{100-80} = {}_{100}C_{80} 0.7^{80} 0.3^{20}$$

二項分布の再生性 2つの二項分布の和がまた二項分布になる。

ポアソン分布

ポアソン分布 所与の時間間隔やある空間範囲内などでおきる事象の発生する確率を分析するためによく用いられる分布の一種。

ポアソン分布の確率関数

$$p(x) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}$$

例 過去の大阪市の交通事故の平均死亡者数は一日当たり1人だった。週間当たりの死亡者数をXとする。週間当たりの平均は7となるので、Xは$\lambda = 7$のポアソン分布に従う。一週間に5人以内になる確率は

$$\sum_{x=0}^{5} p(x) = \frac{7^0 \exp(-7)}{0!} + \frac{7^1 \exp(-7)}{1!} + \cdots + \frac{7^5 \exp(-7)}{5!}$$

連続確率変数

連続確率変数 連続な値をとる確率変数。たとえば、部品の誤差、新生児の身長。

密度関数 連続確率変数の度数関数は密度関数と呼ぶ。

大学生男子50人の身長のデータ（DATA01）の度数分布

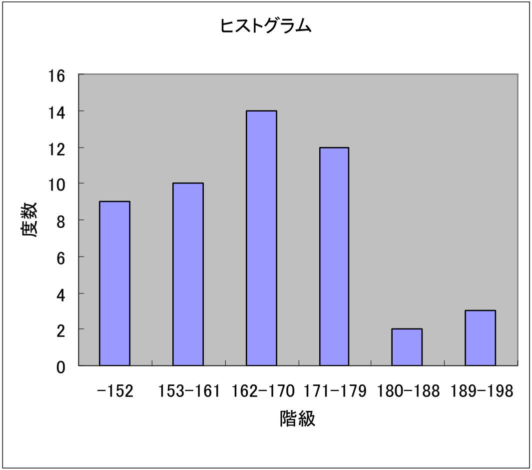
階級	度数	累積度数	相対度数	累積相対度数
143–152	9	9	18%	18%
152–161	10	19	20%	38%
161–170	14	33	28%	66%
170–179	12	45	24%	90%
179–188	2	47	4%	94%
188–198	3	50	6%	100%

度数 各階級に入っているデータの数．相対度数：度数/全体のデータ数。

累積度数 下の階級からの度数の合計。相対累積度数：累積度数/全体のデータ数。

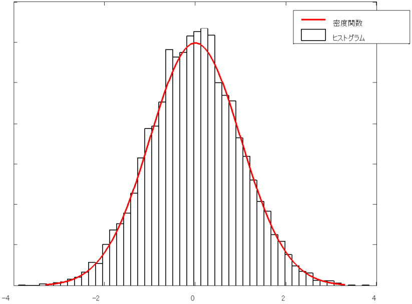
ヒストグラム

各階級の度数を棒グラフにしたものをヒストグラムという。



密度関数

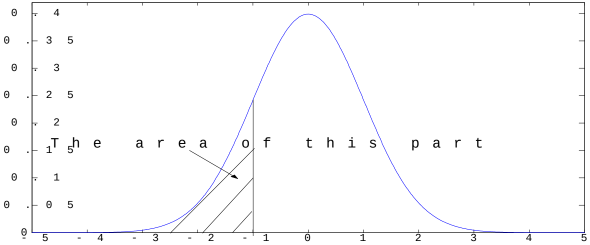
正規分布を例に 標準化した身長のデータのヒストグラム（相対度数で描いたもの）、その上に標準正規分布の密度関数を重ね合わせた。正規分布の密度関数のグラフは鐘または富士山の形をしている。



正規分布

密度関数に関して

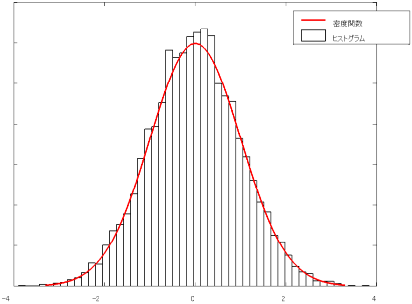
- 密度関数は面積で確率を表現する。
- 密度関数の曲線と X 軸で囲まれた図形の全体の面積は 1 となる。
- 確率変数がある値以下になる確率はその値より左側の密度関数の曲線の下の面積に対応する。
- 確率変数が二つの値の間に入る確率はその二つの値の間の密度関数の曲線の下の面積に対応する。



-1 以下の値になる確率

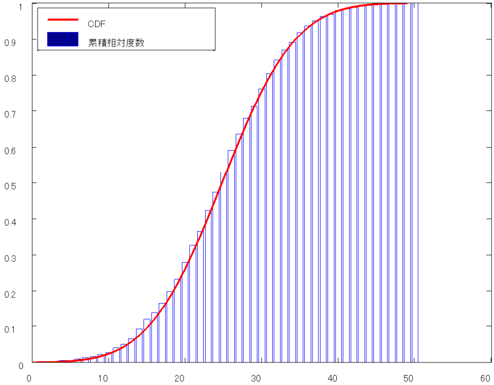
正規分布の密度関数 期待値がμで分散がσ^2の正規分布の密度関数（通常小文字のxでXの特定の実現値を表す）

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$



正規分布

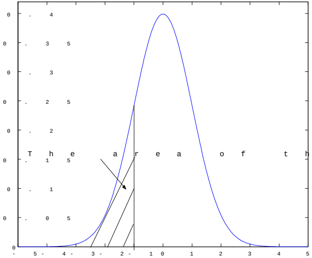
累積相対度数と累積分布関数



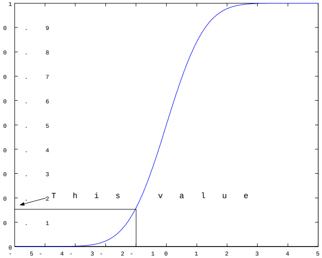
累積分布関数 $F(x)$ 略して分布関数、確率変数 X がある特定の値 x に対応する累積分布関数の値は x より小さい値（x を含む）に対応する確率の総和である。

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{2}$$

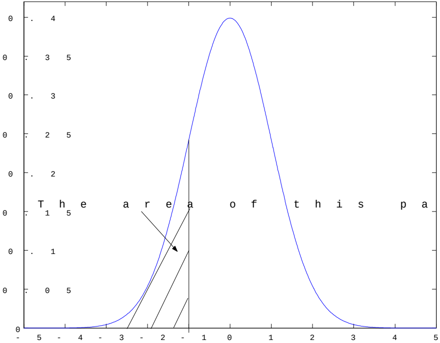
密度関数と分布関数の関係 分布関数は確率密度関数の積分の形になっている。積分が図形の面積の計算に対応していることから、連続確率変数の場合に関して、標準正規分布を例にグラフに描けば以下のようになる：



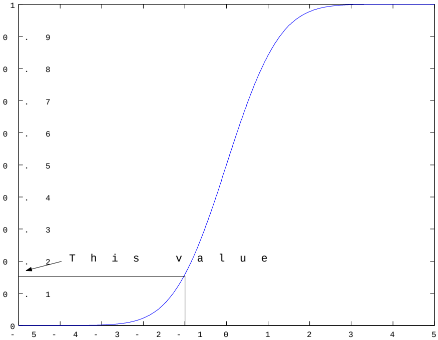
$F(-1)$ の値（密度関数



$F(-1)$ の値（分布関数で



$F(-1)$ の値（密度関数で表す）



$F(-1)$ の値（分布関数で表す）

正規分布の累積分布関数

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

期待値と分散

離散確率変数の場合

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(x_i).$$

確率変数の分散：確率変数 X の分散を $V(X)$ で表して、離散確率変数の場合

$$V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-E(X))^2P(x_i)\right].$$

連続関数の場合は

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx.$$

$$V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2f(x)\,dx.$$

性質 $E(cX+b)=cE(X)+b$、$V(cX+b)=c^2V(X)$、**ただし c と b は定数である。**

連続確率変数の共分散と相関係数

共分散の定義

$$Cov\left(X, Y\right) = E\left[\left(X - E\left(X\right)\right)\left(Y - E\left(Y\right)\right)\right].$$

独立な確率変数の共分散 **確率変数**X**と**Y**が独立であるとき共分散** $Cov\left(X, Y\right) = 0$。

確率変数の相関係数

$$\rho\left(X, Y\right) = \frac{Cov\left(X, Y\right)}{\sqrt{V\left(X\right) V\left(Y\right)}}$$

$$-1 \leq \rho\left(X, Y\right) \leq 1$$

正規分布のまとめ

- 正規分布は統計学の中で最もよく利用される分布の一つである。測量データ、誤差、平均値の分布、$\cdots$。
- 正規分布の確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

- 正規分布の累積分布関数

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{4}$$

- 正規分布の期待値はμ分散がσ^2：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$
$$= \mu$$
$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$
$$= \sigma^2$$

正規分布の再生性

正規分布の再生性

1. 確率変数X_i、 $i = 1, 2, \cdots, m,$ が$N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$に従って独立に分布しているとき、$\sum_{i=1}^m c_i X_i$は$N\left(\sum_{i=1}^m \mu_i, \sum_{i=1}^m c_i^2 \sigma_i^2\right)$に従って分布する。ただし、$c_i$、$i = 1, 2, \cdots, m,$ が定数の列である。
2. $i = 1$の場合、すなわちXが$N\left(\mu, \sigma^2\right)$のとき、$cX$の分布は$N\left(c\mu, c^2\sigma^2\right)$になる。ここでは$N\left(\mu, \sigma^2\right)$は「平均が$\mu$分散が$\sigma^2$の正規分布」を表す。

例 $X \sim N(1, 9)$、$Y \sim N(2, 1)$のとき、$2X \sim N(2, 36)$となり、$(2X + 3Y) \sim N(8, 45)$となる。ここでは「$\sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$」は「平均が$\mu$分散が$\sigma^2$の正規分布に従う」の意味。

その他の連続分布（参考）

密度関数は区間 $[a, b]$ の中で一定で、それ以外はゼロである。密度関数の面積が 1 になるため、$a \leq x \leq b$ に関しては $f(x) = \frac{1}{b-a}$ となる。

性質 $E(X) = \frac{a+b}{2}$、$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

例 丸い鉛筆の横断面の長さが c とする。その横断面の縁の一点にマックを付けてを転がす。接地点とマックの間の弦の長さの分布が $[0, c]$ における一様分布である。

その他の連続分布（参考）

指数分布 密度関数は$x > 0$に関して$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$、$x \leq 0$に関して$f(x) = 0$。布関数は$x > 0$に関して$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$、$x \leq 0$に関して$F(x) = 0$。ただし、$\lambda > 0$である。

例 失業者が再就職までの時間の分布の近似としてよく利用される。次の事故が起きるまでの時間の分布など。

確率変数の標準化

期待値 $E(X)=\mu$、分散 $V(X)=\sigma^2$ の確率変数 X があるとする。X から期待値を引いて、標準偏差で割って、できた新しい確率変数

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

は標準化された確率変数で、その期待値 $E(Z)=0$、分散 $V(Z)=1$ となる。

分布表から確率を読み取る

- 期待値$\mu = 1$分散$\sigma^2 = 4$の正規分布確率変数Xに関して$X \leq 4.28$の確率を標準正規分布表（テキストp279、付表4）から読み取る。
- まずXを標準化してZとする。Zが標準正規分布（期待値$\mu = 0$分散$\sigma^2 = 1$）に従う確率変数となる。

$$Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{X - 1}{2}$$

- Zに関して標準正規分布表を適用する。$x = 4.28$のとき

$$z = \frac{x - 1}{2} = \frac{4.28 - 1}{2} = 1.64$$

ゆえに、 $P(X \leq 4.28) = P(Z \leq 1.64) \approx 0.95$。

期待値と分散の推定

推定には点推定と区間推定があるが、本講義では点推定だけ説明する。

母集団 分析対象の全体である。標本を母集団の中から抽出される。たとえば、日本の国民の所得を分析したい場合、全部の国民の所得が母集団を構成する。世界全人口の所得を対象に分析したい場合、地球上にいるすべての人の所得が母集団を構成する。

無作為標本 母集団のすべての個体が均等な機会でかつ互いに無関係（独立）に抽出されるように抽出された標本（公平なくじ引きで考えれば分かりやすい）。

期待値と分散の推定（続き）

- 確率変数Xの実現値$\{X_1, X_2, X_3, ..., X_n\}$を$X$の分布に従う母集団からの無作為標本とする。

母集団の期待値$\mu = E(X)$の推定方法

無作為標本の算術平均（標本平均）$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$を用いて推定する。

母集団の分散$\sigma^2 = E(X-\mu)^2$の推定方法

一つの推定量として標本分散$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$用いる。

期待値（時には平均値とも呼ばれる）と分散の推定例

確率変数X 商大生の身長を確率変数と見なす。

母集団 商大の学生全員の身長。

無作為標本 商大の学生全員のくじを作り、くじ引きで100人を選び、身長を測って無作為標本$\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{100}\}$とする。

$E(X)$またはμ 商大生全員の平均身長、母集団の期待値（平均）。

μの推定量

$$\bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$$

σ^2の推定量

$$S^2 = \frac{1}{100-1}\sum_{i=1}^{100}(X_i - \bar{X})^2$$

推定量の性質

母集団のパラメーター（母数）をθとし、推定量を$\hat{\theta}$と表記する。

不偏性 推定量の期待値が推定したい母数と等しいとき、すなわち$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$、推定量が不偏であるという。

標本平均の不偏性 標本は無作為標本とする、すなわち、各X_iの間は独立である。明らかに$E\left(\bar{X}\right)=\mu$、なので$\bar{X}$が$\mu$の不偏推定量である。

効率性（参考） 同じ母数の二つの推定量θ_1とθ_2に関して、θ_1の漸近分散がθ_2のより小さい場合、θ_1はθ_2より効率的という。

標本平均の不偏性一致性

確率収束 確率変数Xと実数cは任意の正の実数δに関して

$$P\left(|X-c| \geq \delta\right) \to 0$$

が満たされるとき、確率変数Xが実数cに確率収束するという。$X \xrightarrow{p} c$と表記する。

一致性 サンプルサイズnが無限大に近づくにつれ、推定量が母数に確率収束する、すなわち$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$とき、推定量は一致性を持つという。

チェビシェフの不等式 任意の正の実数δに関して

$$P\left(|X-\mu| \geq \delta\right) \leq \frac{Var\left(X\right)}{\delta^2}$$

$\bar{X}$の分散 $Var\left(\bar{X}\right) = E\left[\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)^2\right] = \sigma^2 / n$、(独立の確率変数間の共分散が$0$であることを利用すれば証明できる。)

標本平均の一致性

標本平均の一致性 チェビシェフの不等式より任意の正の実数δに関して

$$P\left(|\bar{X}-\mu| \geq \delta\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$$

nが無限大に近づくにつれ、右辺は0に収束する。従って、$\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$、一致性を持つ。

大数の法則 標本サイズnが無限になるにつれ無作為標本の標本平均$\bar{X}$は母集団平均μに確率収束する。すなわち$\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$を満たす。

標本分散の分布

カイ２乗分布 Z_i、$i = 1, 2, \cdots, k$、が独立に標準正規分布に従うとき、$W = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$ が自由度 k の χ^2 分布に従う。テキスト図4.5。

標本分散の分布に関する定理 正規分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ からの無作為標本の標本分散を S^2 とする。

$$Y = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2}$$

が自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布に従う。証明略。

自由度に関して（参考） $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right) = 0$ が必ず満たされるという制約がかかるため、自由度が1が減り、$(n-1)$ となる。

期待値（母平均）の検定

以下の検定の話が成り立つための前提条件 標本数がかなり大きいまたは母集団が正規分布に従うとする。

仮説 帰無仮説 H_0 ：棄却（否定）したい仮説。
対立仮説 H_1 ：採択し（認め）たい仮説。

例 職業訓練の効果を調べたいとする。訓練を受けたと受けていない 100 人ずつの二つのグループの人の所得を調べる。

H_0 ：訓練を受けたグループの平均所得と受けていないグループの平均所得が同じ；
H_1 ：訓練を受けたグループの平均所得と受けていないグループの平均所得が異なる。

標本平均の分布１．

標本数が少ない場合

Theorem (検定の根拠となる)

確率変数 X が正規分布に従うなら、その標本平均 $\bar{X}$ も正規分布に従う。

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

平均が 0 分散が 1 の正規分布は標準正規分布と呼ばれる。

標本数が大きいとき

Theorem (中心極限定理、検定の根拠となる)

独立同一な分布に従う確率変数の平均は，サンプル数が大きくなるに従いその期待値に近づく。すなわち、各 X_i が平均（期待値）μ と分散 σ^2 を持つ独立同一な分布に従うとき，n が大きくなるにつれ，$\sqrt{n}$ 倍した標準化した $\bar{X}$ が標準正規分布に収束する（近づく）。

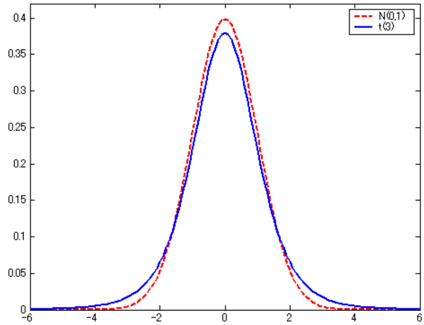
$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

σ は普通未知であるため、σ の代わりに σ の推定量 S（標本標準偏差、標本分散の平方根、以前の講義で勉強した S_x）を使う。

t分布

t分布 Zが標準正規分布、Wが自由度kのχ^2分布に従うとする。$t = \frac{Z}{\sqrt{W/k}}$がt分布に従う。

性質 正規分布は平均と分散によって密度関数が決まるが、t分布は自由度によって決まる。自由度が大きくになるにつれ正規分布に近づき、密度関数のグラフが同じようになっていく。下記グラフは標準正規分布と自由度が3のt分布



標本平均の分布３．

Theorem (検定の根拠となる)

上の定理の条件の下で、σ の代わりに σ の推定量 s（標準偏差、標本分散の平方根）を使った場合、t 値

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \xrightarrow{d} t_{(n-1)}.$$

となる。ただし、$t_{(n-1)}$ は自由度 $n-1$ の t 分布を表す。

展開してみる

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{\frac{(n-1)S/\sigma^2}{n-1}}}$$

前述する中心極限定理により $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ が正規分布、標本分散の分布に関する結果により $(n-1)\,S/\sigma^2$ が自由度 $n-1$ の χ^2 分布。従って、t が自由度 $n-1$ の t 分布に従う

平均の片側検定

平均の検定には片側検定と両側検定がある、片側検定は平均がある値より大きいかどうか、または小さいかどうかに関して別々に検定する。両側検定の場合、両方を同時に検定する。

平均の片側検定の例題

国民の平均年収 が$20,000$ドルに達したかどうかが先進国であるかどうかを判断するための一つおおよそな指標となる。A国が先進国であるかどうかをこの指標で検討したいとする。A国の国民の個人年収を確率変数Xとする。Xの期待値（全国民の平均年収）に関して検定することを考える。10000人をくじ引きで選んで（無作為標本）、年収のデータを収集する、その平均を計算して$\bar{X} = 20,200$ドルになったとする。この10000人の年収の標本標準偏差を計算して$s = 7500$になったとする。期待値μが$20,000$ドルより大きいかどうかを検定する。

基本的な考え方

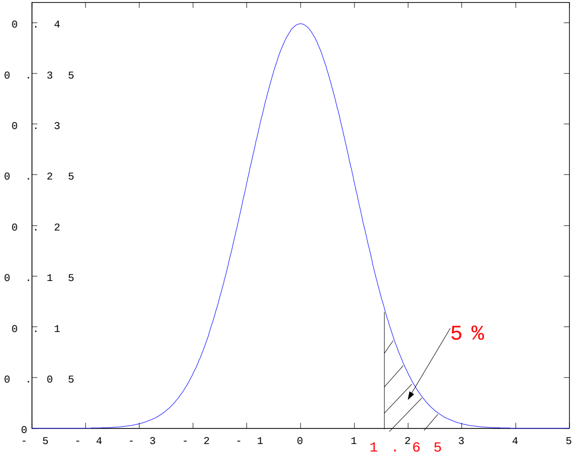
- まず X は平均（期待値）が $\mu \leq 20000$、標準偏差が $\sigma = s = 7500$ の正規分布 $N\left(20000, 7500^2\right)$ に従うと仮定する。
- 上述の仮定の下で、$\bar{X}$ が実現値 20200 を超える確率を調べる。
- $\bar{X}$ が実現値 20200 を超える確率は極めて小さいなら、仮定が $\bar{X}$ の実現値 20200、すなわちデータと矛盾することを意味する。$\mu \leq 20000$ の仮説が偽であると判断する（棄却する）。
- $\bar{X}$ が実現値 20200 を超える確率は小さくない場合、$\mu \leq 20000$ の仮説が真であると判断する（採択する）。

有意水準 確率が小さいかどうかを判断する基準である。通常 α で表す、慣例として 1% か 5% とする。

臨界値（有意水準点） 確率が有意水準 a に対応している確率変数の値。たとえば、今の例では $P(X > c) = a$ となるような c の値。

有意水準と臨界値（有意水準点）

- 有意水準を $a = 5\%$ にした場合、影の部分の面積は $a = 5\%$ を表している。その影の左端の座標は臨界値となる。今のグラフの例では臨界値は 1.65 となる。数式で表すと、$P(X > 1.65) = 5\%$。



解答

- 有意水準を$\alpha = 5\%$とする。
- 帰無仮説H_0：期待値$\mu \leq 20000$；対立仮説H_1：期待値$\mu > 20000$とする。
- 検定統計量t値を計算する。
  $t = \sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)/s = 100 \times \left(20200 - 20000\right)/7500 = 2.66$
- t分布表より（自由度が大きい場合標準正規分布表を利用しても良い）、自由度（平均の検定のとき、自由度は$n-1$）が9999のt分布の5%の臨界値（有意水準点）が約1.65である。
- 検定統計量の値$t = 2.66 > 1.65$であるため[2]帰無仮説H_0：期待値$\mu \leq 20000$が棄却される。国民の平均年収が$20,000$ドルを超えて先進国といえると判断する。

[2] $\bar{X}$がその実現値20100を超える確率が5%よりも小さいと意味する

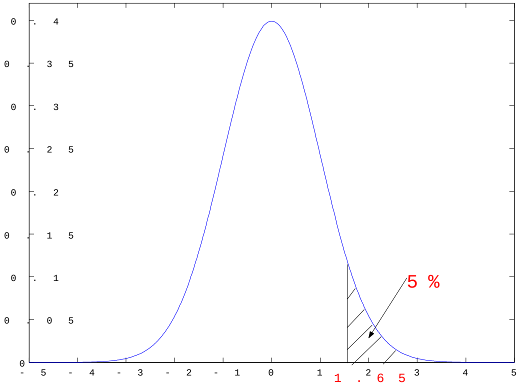
注

1. 今の例題の対立仮説は$\mu > 20000$、より大きい$(>)$となっている。より小さい（$<$）たとえば対立仮説が$\mu < 20000$となる場合、t値を計算して左側の臨界値と比較する。t値が左側の臨界値より小さければ帰無仮説を棄却する、逆の場合だったら帰無仮説を採択する。
2. 左側の臨界値は分布表から見つかった右側の臨界値の値$\times(-1)$)、たとえば、右側の5%臨界値が1.65だったら、左側は-1.65となる。

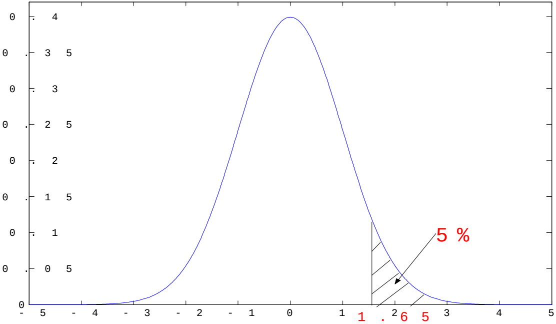
密度関数のグラフで見る

グラフで示すなら、検定統計量 t が t 分布の裾の端に入って臨界値よりも右にあって、$\mu \leq 20000$ の仮説が偽であると判断し棄却する。

棄却域 影の部分は棄却域と呼ぶ。検定統計量 t 値が棄却域に入った場合、帰無仮説は棄却される。



1. 対立仮説はより大きい（$>$）となっている場合、棄却域はグラフの右裾にある。t値が棄却域に入った場合（すなわちは検定統計量tが臨界値よりも右にある場合)、帰無仮説を棄却する。
2. 対立仮説はより小さい（$<$）となっている場合、棄却域はグラフの左裾にある。t値が棄却域に入った場合（すなわちは検定統計量tが臨界値よりも左にある場合)、帰無仮説を棄却する。
3. 以下の図は対立仮説はより大きい（$>$）となっている場合の棄却域を示している。



解答のステップ

1. 有意水準を選ぶ。例の場合、有意水準を $\alpha = 5\%$ とする。（普通は 1% か 5% にする）
2. 仮説を立てる。例の場合、帰無仮説 H_0：期待値 $\mu \leq 20000$； 対立仮説 H_1：期待値 $\mu > 20000$。
3. t 分布の 5% 臨界値の値を読み取る。例の場合、臨界値が約 1.65。
4. $\bar{X}$、s を計算して統計量 $t = \sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)/s$ を計算する。例の場合、$t = 100 \times (20200 - 20000)/7500 = 2.66$。
5. ステップ３で求めた t とステップ２で求めた臨界値の値 1.65 と比較する、$t > 1.65$ であれば、帰無仮説を棄却する。$t \leq 1.65$ であれば帰無仮説が採択される。例の場合、$t > 1.65$ なので、帰無仮説を棄却する。国民の平均年収が $20,000$ ドルを超えて先進国といえると判断する。

演習問題

ある美容室が割引サービスを行った、この割引サービスによって、一日の平均来客数が増えたかどうかを調べたい。この美容室の普段の平均来客数が10人。割引サービスを実施後、25日間来客数を集計して平均と標準偏差を計算して$\bar{X} = 12$、$s = 3$だとする。検定を行って一日平均の来客数が増えたかどうかを判断してください。ヒント：H_0：$\mu \leq 10$；H_1：$\mu > 10$。

平均の両側検定

部品のサイズの平均の検定を例に説明する

工場から送ってきた大量な同じ種類の部品を検査することを考える。納品の中から100個を無作為に抽出して、直径を図り平均と標準偏差を計算し$\bar{X} = 3.2\,\mathrm{cm}, s = 2$となった。良品の条件として直径の期待値が$\mu = 3$と決まっている。$\bar{X}$の値を利用して、$\mu = 3$であるかどうかの検定を考える。

方針 方法は片側検定とほぼ同じである。異なるところは

1. 帰無仮説は$=$を使う、対立仮説は$<, >$両方を使う。たとえば、H_0：$\mu = 3$；H_1：$\mu > 3$または$\mu < 3$。
2. 有意水準を決めてから、それを半分にして、臨界値の値を調べる。たとえば、有意水準を5%にした場合、それの半分2.5%の臨界値の値を調べる。
3. 検定統計量t値の計算などは片側のときと同じであるが、最後にtの絶対値と臨界値の値（たとえば、2.5%の臨界値の値）と比較する。$|t| >$臨界値の値であれば、帰無仮説を棄却する、逆に$|t| \leq$臨界値の値であれば、帰無仮説を採択する。

解答

- 両側検定を行う。有意水準を5%とする。
- H_0：$\mu = 3$；H_1：$\mu > 3$または$\mu < 3$。
- $t = \sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)/s = 10 \times 0.2/2 = 1$、自由度99の2.5%臨界値が1.96なので$|t| < 1.96$、帰無仮説は採択される。納品は良品であると判断する。

グラフで見る両側検定

- 両側検定の棄却域は両裾の影の部分に対応する。t 値がどちらに入っても帰無仮説 H_0 は棄却される。