第三章　単回帰（続き）[1]

劉慶豊[2]

小樽商科大学

July 1, 2010

[1]第三章の資料は森棟公夫先生著「基礎コース　計量経済学」をもとに作成したものである。

[2]E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/

検定の根拠

一定の条件のもとでは

$$z = \left(\widehat{\beta} - \beta\right) / \sqrt{V(\widehat{\beta})} = \frac{\widehat{\beta} - \beta}{\sqrt{\sigma^2 / \{(n-1)s_{xx}\}}} \tag{1}$$

が標準正規分布に従う。

$$V(\widehat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1,n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sigma^2}{(n-1)s_{xx}} \tag{2}$$

検定の根拠（続き）

$V(\widehat{\beta})$を計算するためにσ^2の値が必要、しかし、σ^2は母集団に関するパラメーターで未知である代わりに以前説明した残差分散
$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$を利用する。そうすることで$V(\hat{\beta})$が$s_{\beta}^2$となる。

s_βは$\hat{\beta}$の標準誤差

$$s_\beta = \sqrt{s^2/\{(n-1)s_{xx}\}}$$

t 値

$$t_\beta = \frac{\widehat{\beta}-\beta}{s_\beta}$$

t_βは自由度$n-2$のt分布に従う。

回帰係数に関するt検定

真のβがβ_0であるかどうかを調べる。ただし、β_0が定数である。β_0を0にする場合が多い。
片側検定$H_0 : \beta = \beta_0, H_1 : \beta > \beta_0$と$H_0 : \beta = \beta_0, H_1 : \beta < \beta_0$二種類。
両側検定$H_0 : \beta = \beta_0, H_1 : \beta \neq \beta_0$。

$$t_\beta = \frac{\widehat{\beta}-\beta_0}{\sqrt{s^2/\{(n-1)s_{xx}\}}} \qquad (3)$$

帰無仮説のもとでt_βは自由度$n-2$のt分布に従う。t_βと自由度$n-2$のt分布の有意水準点と比較する。

例題

ジップ（Ziph）の法則 都市人口×都市人口順位＝定数

データ

表 2.4 京都12市の人口とその順位

順位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
人口（千人）	1390	186	94	94	85	77	73	67	53	53	40	25

モデル cを 定数として、

$$P_i \times i = c$$

$$\log(P_i) = c - \log(i)$$

$$\log(P_i) = c + \beta \log(i) + u_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

推定結果 （ ）の中は帰無仮説が $\beta = 0$の t値である。

$$\widehat{\log(P_i)} = 6.53\,(23.7) - 1.235\,(-8.1)\log(i)$$

検定 $H_0 : \beta = -1, H_1 : \beta \neq -1$（両側検定）。有意水準を 10%とする。帰無仮説が $\beta = 0$の t値の公式から 逆算して 標準誤差を 求めて、そして t値を 求める。

$$s_\beta = -1.235 \times \frac{1}{-8.1} = 0.152$$

$$t = \frac{-1.235 - (-1)}{0.152} = -1.55.$$

検定結果 自由度10の右側5%有意水準点（95%分位点）$t_{95} = 1.81$。$|t| < t_{95}$、H_0は棄却できない。$\beta = -1$であろうと 認識する。

最小２乗推定量の 導出(1)

$\Phi = RSS = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right)^2$

最小化の 為の１次条件 $\frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{\alpha}} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{\beta}} = 0.$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{\alpha}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right)^2}{\partial \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right)} \frac{\partial \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right)}{\partial \widehat{\alpha}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{(-2) \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right)\right\} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{\beta}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right)^2}{\partial \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right)} \frac{\partial \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right)}{\partial \widehat{\beta}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{(-2) \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right) x_i\right\} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

最小２乗推定量の 導出(2)

正規方程式

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i\right) x_i = 0$$

最小化の 為の２次条件

$$\frac{\partial^2 \Phi}{(\partial \widehat{\beta})^2} = 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$$

最小２乗推定量の導出(3)

正規方程式を解いて最小二乗（OLS）推定量を求める

$$\widehat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x} \tag{6}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{7}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \tag{8}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \tag{9}$$