相関係数の性質に関する証明

劉　慶豊
小樽商科大学

平成 21 年 10 月 8 日

定理 1 任意の二つの変数の相関係数は $-1 \leq \rho \leq 1$。

証明. $(x_i - \bar{x})$ と $(y_i - \bar{y})$ をそれぞれ w_i, v_i で表す。

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sum_{i=1}^n v_i^2}}\end{aligned}$$

となる。まず、$\left(\sum_{i=1}^n wv\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n w^2 \sum_{i=1}^n v^2$ を証明する。

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^n w_i v_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n w_i^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^2 v_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n w_i v_i w_j v_j - \sum_{i=1}^n w_i^2 v_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n w_i^2 v_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n w_i v_i w_j v_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n w_i^2 v_j^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(2 \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n w_i v_i w_j v_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n w_i^2 v_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n w_j^2 v_i^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n -\left(w_i^2 v_j^2 - 2 w_i v_i w_j v_j + w_j^2 v_i^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n -\left(w_i v_j - w_j v_i\right)^2 \leq 0\end{aligned}$$

従って $\left(\sum_{i=1}^n wv\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n w^2 \sum_{i=1}^n v^2$ から

$$-\sqrt{\sum_{i=1}^n w^2 \sum_{i=1}^n v^2} \leq \sum_{i=1}^n wv \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n w^2 \sum_{i=1}^n v^2}$$

がわかる。ゆえに

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

□