

第三章 偏相関係数と回帰¹

劉慶豊²

小樽商科大学

October 17, 2017

¹第二章からの資料は森棟公夫先生著「基礎コース 計量経済学」をもとに作成したものである。

²E-mail:qliu@res.otaru-uc.ac.jp, URL:<http://www.otaru-uc.ac.jp/~qliu/> ◀ ▶ ≡ 🔍 ↺

$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)\} \quad (1)$$

分散共分散行列

$$V = \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

相関係数行列

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$7.56647E+09 = 7.56647 \times 10^9 = 7566470000$$

表3.1 所得および支出データ

| 所得 | 教育 | 教養娛樂 | 教育殘差 | 教娛殘差 |
|---------|--------|--------|---------|--------|
| 198,005 | 2,854 | 17,662 | -247.0 | -478.2 |
| 254,020 | 5,880 | 24,208 | -2111.6 | -651.6 |
| 290,237 | 11,995 | 30,538 | 841.4 | 1333.9 |
| 348,839 | 19,605 | 36,568 | 3335.0 | 334.2 |
| 452,356 | 23,490 | 48,113 | -1817.8 | -538.4 |

表3.2 相関係数行列

分散・共分散行列

| | 所得 | 教育支出 | 教養娛樂 | | 所得 | 教育支出 | 教養娛樂 |
|------|---------|---------|---------|--|-------------|-------------|-------------|
| 所得 | 1.00000 | 0.96757 | 0.99741 | | 7.56647E+09 | | |
| 教育支出 | 0.96757 | 1.00000 | 0.97653 | | 6.60610E+08 | 6.16071E+07 | |
| 教養娛樂 | 0.99741 | 0.97653 | 1.00000 | | 9.07653E+08 | 8.01868E+07 | 1.09446E+08 |

nで割って求めている

第3変数の影響

- 今まで学んだ2変数間の共分散、相関係数（単相関係数と呼ぶこともある）は第3変数の影響を考慮していない。
- 場合によって、第3変数の影響を取り除いて、残りの二つの変数の間の関係を調べる必要がある

例、見せかけの相関 X をエアコンの使用時間、 Y をビールの消費量、 Z を気温とする。 X と Y の間は正の単相関があると予想されるが、しかしそれは気温を通じての相関であると考えられる。 X と Y の間の相関は見せかけの相関である可能性が大きい。この場合、第三の変数 Z の影響を除いた相関を調べたい。それが偏相関である。

偏共分散と偏相関係数の計算方法

- まず、 x を z に回帰して、その残差 \hat{u}_{xi} を求める

$$x_i = \alpha_x + \beta_x z_i + u_{xi}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$\hat{x}_i = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x z_i$$

$$\hat{u}_{xi} = x_i - \hat{x}_i = x_i - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x z_i \quad (5)$$

- 次は、 y を z に回帰して、その残差 \hat{u}_{yi} を求める

$$y_i = \alpha_y + \beta_y z_i + u_{yi}, i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha}_y + \hat{\beta}_y z_i$$

$$\hat{u}_{yi} = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\alpha}_y - \hat{\beta}_y z_i$$

偏共分散と偏相関係数計算方法

標本偏分散

$$s_{xx|z} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_{xi})^2, \quad (7)$$

$$s_{yy|z} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_{yi})^2, \quad (8)$$

標本偏共分散

$$s_{xy|z} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_{xi} \hat{u}_{yi}), \quad (9)$$

標本偏相関係数

$$r_{xy|z} = \frac{s_{xy|z}}{\sqrt{s_{xx|z} s_{yy|z}}} \quad (10)$$

残差の性質

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_{xi} = 0, \sum_{i=1}^n \hat{u}_{xi} z_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_{yi} = 0, \sum_{i=1}^n \hat{u}_{yi} z_i = 0$$

を利用して

$$s_{xy|z} = \sum_{i=1}^n (\hat{u}_{xi} \hat{u}_{yi}) = \sum_{i=1}^n (\hat{u}_{xi} y_i) = \sum_{i=1}^n (x_i \hat{u}_{yi}), \quad (11)$$

テキスト例 3.2 所得の影響を除いた教育費と娯楽費との偏相関

$$\hat{x} = -14186.3 + 0.0873z$$

$$\hat{u}_x = x + 14186.3 - 0.0873z$$

$$\hat{u}_y = y + 5612.0 - 0.120z,$$

$$r_{xy|z} = \frac{1569883}{\sqrt{6551485 \times 944718}} = 0.6310$$

所得の影響を除いた教育費と娯楽費との偏相関はその影響を除く前の相関（単相関）0.97653より大きく下がった。

表3.3 標本偏分散と標本偏共分散

| | 教育残差 | 娯楽残差 |
|--------------|---------|--------|
| 教育残差 | 6551485 | |
| 娯楽残差 | 1569883 | 944718 |
| n-2で割って求めている | | |

標本相関係数 r_{xy} 、偏相関係数 $r_{xy|z}$ はそれぞれ母相関係数 ρ_{xy} と母偏相関係数 $\rho_{xy|z}$ の推定量となっている。標本相関係数 r_{xy} 、偏相関係数 $r_{xy|z}$ を用いて、 ρ_{xy} と $\rho_{xy|z}$ が0になっているかどうかを検定する。すなわち、2つの変数の間に相関、偏相関があるかどうかを検定する。

相関係数の検定 帰無仮説 $H_0 : \rho_{xy} = 0$ のもとでは

$$t = \sqrt{n-2} \frac{r_{xy}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

が自由度 $n-2$ の t 分布に従う。

偏相関係数の検定 帰無仮説 $H_0 : \rho_{xy|z} = 0$ のもとでは

$$t = \sqrt{n-3} \frac{r_{xy|z}}{\sqrt{1-r_{xy|z}^2}}$$

が自由度 $n-3$ の t 分布に従う。

テキスト例、表3 - 4

表3.4 一人あたり所得と野菜支出ならびに外食支出

| | | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 年間収入(万円) | 89 | 125 | 145 | 154 | 172 | 183 | 211 | 239 | 287 | 428 |
| 野菜・海藻(円) | 2784 | 2964 | 2904 | 2578 | 2556 | 2467 | 2658 | 2683 | 2904 | 3042 |
| 外食(円) | 2053 | 2502 | 2830 | 3065 | 3591 | 3722 | 3997 | 4301 | 4675 | 5699 |

家計調査年報(平成14年)

| | 収入 | 野菜 | 外食 |
|-------|--------|--------|----|
| 年間収入 | 1 | | |
| 野菜・海藻 | 0.3878 | 1 | |
| 外食 | 0.9658 | 0.1814 | 1 |

相関係数の検定 外食支出と野菜・海藻品支出との相関係数は

$$r_{xy} = 0.1814。$$

$$t = \sqrt{8} \frac{0.1814}{\sqrt{1 - 0.1814^2}} = 0.52$$

$t = 0.52$ は自由度8の t 分布の5%有意水準点1.86より小さいので、帰無仮説 $H_0: \rho_{xy} = 0$ を棄却できない。相関が殆どないと考えられる。

偏相関係数の検定 外食支出と野菜・海藻品支出との偏相関係数は

$$r_{xy|z} = -0.808。$$

$$t = \sqrt{7} \frac{-0.808}{\sqrt{1 - 0.808^2}} = -3.63$$

$|t| = 3.62$ は自由度7の t 分布の5%有意水準点1.90より大きいので、帰無仮説 $H_0: \rho_{xy|z} = 0$ を棄却する。所得の影響を除いた外食支出と野菜・海藻品支出の間に負の相関がある。外食する人は料理の材料をあまり購入しないことの現れである。

テキスト81ページ (3.13) – (3.16) 式。

3 変数の回帰分析

$$\{(y_1, x_1, z_1), (y_2, x_2, z_2), \dots, (y_n, x_n, z_n)\} \quad (12)$$

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma z_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$V(u_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

u_i が i に関して独立で同じ分布に従うとする。

例 y が停止距離 x がスピード z が車の重さ

Excel分析ツールによる回帰計算

図 3.2 Excel による回帰分析

| | G | D | E | F | G | H | I | J | K |
|----|-----|--------|--------|--------|-------|-------|-------|------|---|
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | y | x | z | 回帰統計 | | | | | |
| 10 | 5.3 | 45 | 0.8 | 重相関 R | 0.91 | | | | |
| 11 | 7.5 | 50 | 0.9 | 重決定 R2 | 0.82 | | | | |
| 12 | 5.9 | 55 | 0.65 | 補正 R2 | 0.73 | | | | |
| 13 | 9.2 | 60 | 1.3 | 標準誤差 | 1.17 | | | | |
| 14 | 8.8 | 65 | 1.2 | 観測数 | 7 | | | | |
| 15 | 7.5 | 70 | 0.95 | | | | | | |
| 16 | 12 | 75 | 1.2 | 分散分析表 | | | | | |
| 17 | (m) | (km/h) | 1000kg | | 自由度 | 変動 | 分散 | 分散比 | |
| 18 | | | | 回帰 | 2.00 | 24.83 | 12.42 | 9.13 | |
| 19 | | | | 残差 | 4.00 | 5.44 | 1.36 | | |
| 20 | | | | 合計 | 6.00 | 30.27 | | | |
| 21 | | | | | | | | | |
| 22 | | | | | 係数 | 標準誤差 | t | P-値 | |
| 23 | | | | 切片 | -2.90 | 2.73 | -1.06 | 0.35 | |
| 24 | | | | x | 0.10 | 0.05 | 1.75 | 0.15 | |
| 25 | | | | z | 5.16 | 2.47 | 2.09 | 0.10 | |
| 26 | | | | | | | | | |

図 3.3 ダイアログ・ボックス

回帰分析 [?] [X]

入力元

入力 Y 範囲(Y): [icon]

入力 X 範囲(X): [icon]

☒ ラベル(L) ☐ 定数に 0 を使用(Z)

☐ 有意水準(Q) %

出力オプション

☒ 一覧の出力先(S): [icon]

☐ 新規又は次のワークシート(P)

☐ 新規ブック(W)

残差

☐ 残差(R) ☐ 残差グラフの作成(D)

☐ 標準化された残差(I) ☐ 観測値グラフの作成(I)

正規確率

☐ 正規確率グラフの作成(N)

OK

キャンセル

ヘルプ(H)

$$\hat{y} = -2.90(-1.06) + 0.10(1.75)x + 5.16(2.09)z$$

$$\hat{y} = -1.8294(-0.527) + 0.1643(2.881)x.$$

$$\hat{y} = -2.90(2.73) + 0.10(0.05)x + 5.16(2.47)z$$

自由度 $n - 3 = 4$ の 2.5% 点 = 2.78, γ の 95% 信頼区間は

$$5.16 \pm 2.78 \times 2.47 = 5.16 \pm 6.87$$

最小 2 乗推定量の導出

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \{y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + \hat{\gamma}z_i)\}^2 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\alpha}} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\beta}} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\gamma}} = 0, \text{ よう}$$

$$\sum_{i=1}^n \{y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + \hat{\gamma}z_i)\} = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \{y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + \hat{\gamma}z_i)\}x_i = 0 \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n \{y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + \hat{\gamma}z_i)\}z_i = 0 \quad (18)$$

前のスライドの式から直交性を導出できる。

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i x_i = 0 \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i z_i = 0 \quad (21)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) = n\hat{\alpha} + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\hat{\beta} + \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)\hat{\gamma} \quad (22)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\hat{\alpha} + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\hat{\beta} + \left(\sum_{i=1}^n z_i x_i\right)\hat{\gamma} \quad (23)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i z_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)\hat{\alpha} + \left(\sum_{i=1}^n x_i z_i\right)\hat{\beta} + \left(\sum_{i=1}^n z_i^2\right)\hat{\gamma} \quad (24)$$

- 点 $(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z})$ は必ず回帰直線上に位置する

$$\bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x} + \hat{\gamma}\bar{z} \quad (25)$$

正規方程式の行列表現

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum z_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum z_i x_i \\ \sum z_i & \sum x_i z_i & \sum z_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i z_i \end{pmatrix} \quad (26)$$

停止距離の例

$$56.2 = 7\hat{\alpha} + 420\hat{\beta} + 7\hat{\gamma}$$

$$3487 = 420\hat{\alpha} + 25900\hat{\beta} + 429.25\hat{\gamma}$$

$$58.87 = 7\hat{\alpha} + 429.25\hat{\beta} + 7.345\hat{\gamma}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 420 & 7 \\ 420 & 25900 & 429.25 \\ 7 & 429.25 & 7.345 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56.2 \\ 3487 \\ 58.87 \end{pmatrix}$$

偏回帰係数と偏相関係数

単回帰の係数

$$\hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = r_{xy} \sqrt{\frac{s_{yy}}{s_{xx}}} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \quad (27)$$

三変数の場合（重回帰）の係数

$$\hat{\beta} = \frac{s_{xy|z}}{s_{xx|z}} = r_{xy|z} \sqrt{\frac{s_{yy|z}}{s_{xx|z}}}, \quad (28)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{s_{zy|x}}{s_{zz|x}} = r_{zy|x} \sqrt{\frac{s_{yy|x}}{s_{zz|x}}} \quad (29)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} - \hat{\gamma}\bar{z} \quad (30)$$

回帰値と残差 2 乗和

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + \hat{\gamma}z_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i + \hat{\gamma}z_i) \quad (32)$$

$$RSS = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \quad (33)$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i^2 - \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \hat{\gamma} \sum_{i=1}^n z_i y_i \quad (34)$$

残差分散

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1,n} \hat{u}_i^2}{n-3} \quad (35)$$

全変動

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

決定係数

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} \quad (36)$$

回帰変動

$$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (37)$$

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i) \quad (38)$$

$$TSS = ESS + RSS \quad (39)$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

偏回帰係数に関する t 検定

$$z = \frac{\hat{\beta} - c}{\sqrt{V(\hat{\beta})}} \quad (40)$$

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{(n-2)s_{xx|z}} \quad (41)$$

$$t_{\beta} = \frac{(\hat{\beta} - c)}{\sqrt{s^2 / \{(n-2)s_{xx|z}\}}} = \frac{(\hat{\beta} - c)}{s_{\hat{\beta}}} \quad (42)$$

$$t_{\gamma} = \frac{(\hat{\gamma} - d)}{\sqrt{s^2 / \{(n-2)s_{zz|x}\}}} = \frac{(\hat{\gamma} - d)}{s_{\hat{\gamma}}} \quad (43)$$

自由度 $n - 3$ の t 分布に従う。

$$\hat{\gamma} - t_{97.5} \times s_{\hat{\gamma}} < \gamma < \hat{\gamma} + t_{97.5} \times s_{\hat{\gamma}}$$

$$s_{\hat{\gamma}}^2 = \frac{s^2}{(n-2)s_{zz|x}}$$

β に関しても同様な方法で求める。

回帰式に関するF検定

$$H_0 : \beta = 0, \gamma = 0$$

f = 回帰分散/残差分散、回帰分散 = $\frac{1}{2}ESS$

$$f = \frac{1}{2} \frac{ESS}{s^2} = \frac{ESS/2}{RSS/(n-3)} \quad (44)$$

$$f = \frac{R^2/2}{(1-R^2)/n-3} \quad (45)$$

f 値が分子の自由度が r (仮定の中の仮説の数), 分母の自由度が $n-K$ (K は定数項を含んだ説明変数の数) F 分布 ($F(r, n-K)$ と表す) に従う。

$$\hat{y}_i - \bar{y} = \hat{\beta}(x_i - \bar{x}) + \hat{\gamma}(z_i - \bar{z})$$

$\hat{\beta}$ 、 $\hat{\gamma}$ の値が 0 に近ければ、 f が 0 に近い小さい値になる。

例

$$\hat{y} = -2.898(-1.06) + 0.096(1.75)x + 5.164(2.09)z$$

$$\hat{y}_1 = -2.898 + 0.096 \times 45 + 5.164 \times 0.8 = 5.553$$

$$\hat{u}_1 = y_1 - \hat{y}_1 = 5.3 - 5.553 = -0.253$$

$$TSS = (481.48 - \frac{1}{7}56.2^2) = 30.27,$$

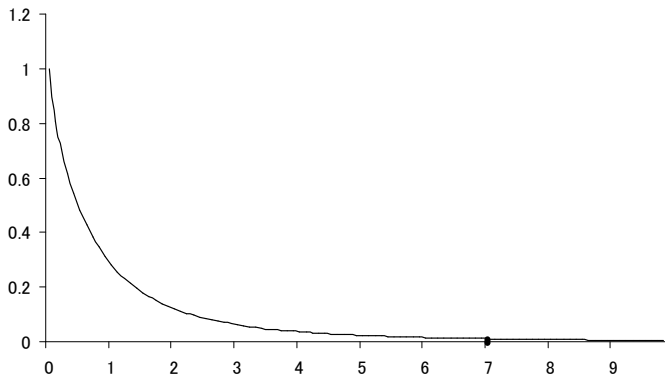
$$\begin{aligned} RSS &= 481.48 - (-2.898)56.2 - 0.096 \times 3487 - 5.164 \times 58.87 \\ &= 5.59 \end{aligned} \quad (46)$$

$$30.27 - 5.59 = 24.68,$$

$$f = \frac{12.42}{1.36} = 9.1$$

$$f = \frac{7-3}{2} \frac{0.82}{(1-0.82)} = 9.1$$

図3.4 $F(2, 4)$ の密度関数



コブ・ダグラス生産関数

Y は生産額、 K は資本額、 L は労働の投入量

$$Y = \alpha K^{\beta} L^{\gamma} \quad (47)$$

$$\log Y = \alpha' + \beta \log K + \gamma \log L \quad (48)$$

弾力性

$$\theta = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta K / K} = \frac{\Delta Y}{\Delta K} \frac{K}{Y}$$

$$\theta = \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y} = \frac{\partial \log Y}{\partial \log K} = \beta$$

マクロ生産関数の推定

表3.5 経済活動別国内総生産(実質)

(単位:10億円) <http://www.esri.cao.go.jp/>

| (平成7暦年基準) 項 目 | 平成14暦年 2002 |
|--------------------|----------------|
| 1. 産業 | 501,639.0 |
| (1)農林水産業 | 8,193.1 |
| (2)鉱業 | 971.0 |
| (3)製造業 | 119,993.2 |
| (4)建設業 | 35,300.0 |
| (5)電気・ガス・水道業 | 15,941.3 |
| (6)卸売・小売業 | 74,101.6 |
| (7)金融・保険業 | 35,693.7 |
| (8)不動産業 | 66,567.2 |
| (9)運輸・通信業 | 39,120.3 |
| (10)サービス業 | 105,757.5 |
| 2. 政府サービス生産者 | 46,877.5 |
| 3. 対家計民間非営利サービス生産者 | 9,773.8 |
| 小計 | 558,290.3 |
| 輸入品に課される税・関税 | 2,651.1 |
| (控除)総資本形成に係る消費税 | 2,053.1 |
| (控除)帰属利子 | 29,045.7 |
| 国内総生産(不突合を含まず) | 529,842.6 |
| 統計上の不突合 | 3,119.3 |
| 国内総生産(不突合を含む) | 532,961.9 |

$$\log Y_t = \alpha + \beta \log K_t + \gamma \log L_t + \varepsilon_t \quad (49)$$

$$\widehat{\log Y} = 0.55(3.5) + 0.71(53) \log K + 0.25(5.4) \log L \quad (50)$$

収穫の不変性 $\beta + \gamma = 1$ であれば、 K と L を c 倍に増やしたら、 Y も c 倍まで増える。

$$Y = \alpha (cK)^\beta (cL)^\gamma = c^{\beta+\gamma} \{\alpha K^\beta L^\gamma\} \quad (51)$$

$$\log Y = \alpha + \beta \log K + (1 - \beta) \log L + \varepsilon$$

$$\log(Y/L) = \alpha + \beta \log(K/L) + \varepsilon$$

$$H_0 : \beta + \gamma = 1,$$

$$H_1 : \beta + \gamma < 1,$$

$$\delta = \beta + \gamma - 1 \tag{52}$$

とする。

$$H_0 : \delta = 0$$

$$\log Y = \alpha + \beta \log K + (1 + \delta - \beta) \log L + \varepsilon \quad (53)$$

$y = Y/L, k = K/L$ として

$$\log y = \alpha + \beta \log k + \delta \log L + \varepsilon \quad (54)$$

$$\widehat{\log y} = 0.55(3.5) + 0.71(53) \log k - 0.034(-0.63) \log L, \quad (55)$$

$$\widehat{\log y} = 0.46(15) + 0.71(71) \log k, \quad (56)$$

一変数のF値 = (t 値)²

$$(23 - 3) \frac{0.99595 - 0.99587}{1 - 0.99595} = 0.395, \quad (57)$$

$$(t_\delta)^2 = (-0.6282)^2 = 0.395$$

表3.6のデータを利用して

$$\log Y_t = \alpha + \beta \log K_t + \gamma \log L_t + \varepsilon_t \quad (58)$$

を推定する。 Y_t は製造業GDP、 K = 民間資本ストック \times 稼働率、 L = 就業者 \times 労働時間。さらに、以上の三つの変数に関して対数を取る。 $\log Y_t, \log K_t, \log L_t$ をデータとしてExcelの分析ツールで回帰分析を行う。

Excelによる生産関数の推定結果

| 回帰統計 | |
|--------------------|----------|
| 重相関 R | 0.996996 |
| 重決定 R ² | 0.994 |
| 補正 R ² | 0.9934 |
| 標準誤差 | 0.006824 |
| 観測数 | 23 |

分散分析表

| | 自由度 | 変動 | 分散 | された分 | 有意 F |
|----|-----|----------|----------|---------|-------|
| 回帰 | 2 | 0.154293 | 0.077146 | 1656.74 | 6E-23 |
| 残差 | 20 | 0.000931 | 4.66E-05 | | |
| 合計 | 22 | 0.155224 | | | |

| | 係数 | 標準誤差 | t | P-値 | 下限 95% | 上限 95% | 下限 95.0% | 上限 95.0% |
|-------|----------|----------|----------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 切片 | 0.554135 | 0.159961 | 3.464179 | 0.00245 | 0.22046 | 0.887809 | 0.220461 | 0.887809 |
| X 値 1 | 0.707453 | 0.013283 | 53.2588 | 5E-23 | 0.67974 | 0.735161 | 0.679744 | 0.735161 |
| X 値 2 | 0.25808 | 0.047414 | 5.443109 | 2.5E-05 | 0.15918 | 0.356985 | 0.159176 | 0.356985 |

以上の結果を利用して t 検定などを行える。

練習問題 テキストの3.63式を Excel で推定しなさい。 $H_0 : \delta = 0$ の検定に関しても考えなさい。データは
<http://www.econ.kyoto-u.ac.jp/~morimune/> の (「基礎コース 計量経済学」 の全データです。ALL-TABLES) からダウンロードできる。直接のリンクは
<http://www.econ.kyoto-u.ac.jp/~morimune/basic-ECONOMETRICS-Tables//ALL-TABLES.xls> である。表3.6のデータはそのファイルの中の表3.6のシートにある。