纪念冯康先生百年诞辰

一种抽象的稳定化方法及在非线性不可压缩弹性问题上的应用*1)

洪庆国
(宾夕法尼亚州立大学数学系, PA 16802, 美国)
刘春梅
(湖南科技学院理学院, 永州, 425199)
许进超
(宾夕法尼亚州立大学数学系, PA 16802, 美国)

摘 要

针对非线性不可压缩弹性力学问题, 本文提出了一种抽象的稳定化方法并将其应用于非线性不可压缩弹性问题上. 在该框架中, 我们证明了只要连续的混合问题是稳定的, 则可以修正任何满足离散 inf-sup 条件的混合有限元方法使其是稳定的且最优收敛的. 我们将这种抽象的稳定化理论框架应用于非线性不可压缩弹性力学问题, 给出了稳定性和收敛性理论结论, 并通过数值实验验证了该结论.

关键词: 非线性不可压缩弹性问题; 混合有限元方法; 稳定性
MR (2010) 主题分类:

1. 引 言

对于线性弹性问题, 包括在高度受限的情况在内, 如不可压缩线性弹性问题, 许多有限元方法在精度和稳定性方面都有很好的计算效果 (见 [1–9]). 然而众所周知, 当这些方法推广到非线性弹性问题 (如大变形弹性问题) 时, 同样程度的稳定性则不能得到保证 (见 [10–13]).

文献 [14, 15] 介绍了一种非线性可压缩弹性问题的稳定间断伽辽金方法. 该方法通过局部地改变间断处惩罚项的大小, 使得其中的稳定项适应于问题的解, 因此它被称为自适应稳定化策略. 在文献 [16] 中利用了同样的自适应稳定化策略. 虽然这三篇论文都讨论了可压缩和几乎不可压缩的非线性弹性问题, 但它们并没有确切地讨论不可压缩问题.

文献 [17] 引入了一个等几何的 "流函数" 形式来准确地表示线性化的不可压缩性约束条件. 事实上, 这种线性化的不可压缩性约束条件的准确表示能使得数值解在稳定范围内收敛于精确解 (即连续问题的解). 由于流函数是由一个四阶偏微分方程给出的, 因此必须要求 NURBS 形函数 [18] 具有很高的正则性, 并且在三维空间中流函数不是唯一的.

* 2020 年 4 月 30 日收到.
1) 基金项目: 作者刘春梅由国家自然科学基金 (No. 11901189), 湖南省教育厅科研项目 (No.19A191) 支持. The work of Qingguo Hong was partially supported by Center for Computational Mathematics and Applications, The Pennsylvania State University.

针对二阶椭圆方程和线性弹性力学问题, Brezzi, Fortin 和 Marini 在文献 [19] 中提出了一种修正的混合元方法, 该方法天然满足强制性条件. Xie, Xu 和 Xue 在文献 [20] 中采用相同的方法并应用稳定的 Stokes 元求解 Darcy-Stokes-Brinkman 模型问题, 得到了一种一致稳定的方法.

本文借鉴文献 [19,20] 中针对二阶椭圆方程和 Darcy-Stokes-Brinkman 模型所采用的修正的混合有限元方法, 为经典的对于 Stokes 方程稳定的混合元设计了一种稳定化策略, 从而得到了求解非线性不可压缩弹性问题的一种修正的混合有限元方法.

如文献 [10] 所述, 即使非线性不可压缩弹性问题所对应的连续问题是稳定的, 使用稳定的 Stokes 混合元 (如 MINI 元) 求解非线性不可压缩弹性问题却是不稳定的. 我们注意到, 对于一般的混合有限元离散方法, 非物理不稳定性是由于离散解并不精确满足不可压缩条件. 因此, 我们改写非线性不可压缩弹性问题的连续问题, 使其包含一个惩罚不可压缩条件的项, 即从 divw = g 出发添加一项 $M(\mathrm{div}w, \mathrm{div}v) = M(g, \mathrm{div}v)$ 用以惩罚不可压缩条件, 在此基础上, 我们设计了一个包含离散解散度项的稳定化策略, 并证明了该修正的混合有限元方法可以消除非物理不稳定性, 从而达到最优收敛. 因而, 使用该修正的混合有限元方法及任何稳定的 Stokes 元求解非线性不可压缩弹性问题, 我们所得到的离散问题都是稳定的.

论文的其余部分组织如下. 在第 2 节, 我们借鉴文 [10] 的思想, 提出了有限应变不可压缩弹性问题, 并得到了非线性弹性问题的线性化形式; 在第 3 节, 我们提出了一种稳定化策略, 并在一个抽象的框架中推导出了一种修正的混合有限元方法; 在第 4 节, 我们将这种修正的方法应用于非线性不可压缩弹性问题. 在此基础上, 得到了这种修正的混合有限元方法的最优逼近. 在第 5 节中, 我们给出了两个简单的数值例子, 相应的数值实验验证了修正的混合有限元方法的稳定性和准确性. 相应的结论见第 6 节.

2. 有限应变不可压缩弹性问题

为了研究有限应变不可压缩弹性问题, 我们在本文中采用了所谓的材料描述. 设 $\Omega \subset R^d$ $(1 \le d \le 3)$ 表示 d 维有界物体 $\mathcal{B}$ 的参考区域, 其上的映射 $\hat{\varphi}: \Omega \to R^d$ 可定义为

$$\hat{\varphi}(X) = X + \hat{u}(X),$$

其中 $X = (X_1, \cdots, X_d)$ 表示一个质点在参考区域中的坐标, $\hat{u}(X)$ 表示对应的位移矢量. 遵循标准的记号 (见 [17]), 我们通过如下定义来引入变形梯度 $\hat{F}$ 和 Cauchy-Green 变形张量 $\hat{C}$

$$\hat{F} = I + \nabla\hat{u}, \quad \hat{C} = \hat{F}^T\hat{F}, \tag{2.1}$$

其中 I 表示二阶单位张量, ∇ 表示基于坐标 X 的梯度算子.

对于均匀的新胡克材料, 例如, 乳胶和橡胶, 我们定义 (参见 [21]) 如下势能函数

$$\psi(\hat{u}) = \frac{1}{2}\mu[I : \hat{C} - d] - \mu\ln\hat{J} + \frac{\lambda}{2}(\ln\hat{J})^2, \tag{2.2}$$

其中 λ 和 μ 是正常数, 符号 “:” 表示通常的二阶张量之间的内积, $\hat{J} = \det\hat{F}$ 表示变形梯度的雅可比行列式.

当我们引入压力 $\hat{p} = \lambda\ln\hat{J}$ 时, 势能函数 (2.2) 可等价地写成如下 $\hat{u}$ 和 $\hat{p}$ 的函数 (仍然表示为 ψ):

$$\psi(\hat{u}, \hat{p}) = \frac{1}{2}\mu[I : \hat{C} - d] - \mu\ln\hat{J} + \hat{p}\ln\hat{J} - \frac{1}{2\lambda}(\hat{p})^2.$$

当物体 $\mathcal{B}$ 在参考区域的单位体积上受制于负载 $b=b(X)$ 时, 总的弹性能量泛函可以写为

$$\Pi(\hat{u},\hat{p})=\int_\Omega \psi(\hat{u},\hat{p})-\int_\Omega b\cdot\hat{u}. \tag{2.3}$$

根据标准的变分原理, 通过在适当的容许位移和压力空间 $\hat{V}$ 和 $\hat{Q}$ 中搜索 (2.3) 的临界点得到平衡状态. 由 (2.3) 推导出的相应欧拉—拉格朗日方程得到如下问题: 求 $(\hat{u},\hat{p})\in\hat{V}\times\hat{Q}$ 使得

$$\begin{cases} \mu\int_\Omega \hat{F}:\nabla v+\int_\Omega(\hat{p}-\mu)\hat{F}^{-T}:\nabla v=\int_\Omega b\cdot v \quad \forall v\in V,\\ \int_\Omega(\ln\hat{J}-\dfrac{\hat{p}}{\lambda})q=0 \quad \forall q\in Q, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 V 和 Q 分别为位移和压力的容许变化空间. 还要注意在 (2.4) 中, 变形梯度的雅可比的线性化为

$$DJ(\hat{u})[v]=J(\hat{u})F(\hat{u})^{-T}:\nabla v=\hat{J}\hat{F}^{-T}:\nabla v \quad \forall v\in V.$$

现在我们关注不可压缩材料的情况, 它对应于在 (2.4) 中取极限 $\lambda\to+\infty$. 因此模型问题为: 求 $(\hat{u},\hat{p})\in\hat{V}\times\hat{Q}$ 使得

$$\begin{cases} \mu\int_\Omega \hat{F}:\nabla v+\int_\Omega(\hat{p}-\mu)\hat{F}^{-T}:\nabla v=\int_\Omega b\cdot v \quad \forall v\in V,\\ \int_\Omega q\ln\hat{J}=0 \quad \forall q\in Q, \end{cases} \tag{2.5}$$

或以残量的形式可写为求 $(\hat{u},\hat{p})\in\hat{V}\times\hat{Q}$ 使得

$$\begin{cases} \mathcal{R}_u((\hat{u},\hat{p}),v)=0 \quad \forall v\in V,\\ \mathcal{R}_p((\hat{u},\hat{p}),q)=0 \quad \forall q\in Q, \end{cases} \tag{2.6}$$

其中

$$\begin{cases} \mathcal{R}_u((\hat{u},\hat{p}),v):=\mu\int_\Omega \hat{F}:\nabla v+\int_\Omega(\hat{p}-\mu)\hat{F}^{-T}:\nabla v-\int_\Omega b\cdot v,\\ \mathcal{R}_p((\hat{u},\hat{p}),q):=\int_\Omega q\ln\hat{J}. \end{cases} \tag{2.7}$$

下面我们在 $(\hat{u},\hat{p})$ 的附近来推导问题 (2.5) 的线性化. 注意到

$$D\hat{F}(\hat{u})[u]=-\hat{F}^{-T}(\nabla u)^T\hat{F}^{-T} \quad \forall u\in V,$$

我们很容易得到如下关于无穷小增量 (u,p) 的问题: 求 $(u,p)\in V\times Q$ 使得

$$\begin{cases} \tilde{a}(u,v)+b(v,p)=-\mathcal{R}_u((\hat{u},\hat{p}),v) \ \forall v\in V,\\ \tilde{b}(u,q)=-\mathcal{R}_p((\hat{u},\hat{p}),q) \quad \forall q\in Q, \end{cases} \tag{2.8}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{a}(u,v)=\mu\int_\Omega \nabla u:\nabla v+\int_\Omega(\mu-\hat{p})(\hat{F}^{-1}\nabla u)^T:\hat{F}^{-1}\nabla v,\\ \tilde{b}(u,q)=\int_\Omega q\hat{F}^{-T}:\nabla u. \end{cases} \tag{2.9}$$

注 1. 由于问题 (2.8) 是问题 (2.5) 的线性化, 也可看作是求解非线性问题 (2.5) 的牛顿迭代过程的一般步骤.

注 2. 在 (2.8) 中令 $(\hat{u},\hat{p})=(0,0)$, 我们立即得到基于微小变形的经典线性不可压缩弹性问题, 即: 求 $(u,p)\in V\times Q$ 使得

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mu\displaystyle\int_\Omega \epsilon(u):\epsilon(v)+\int_\Omega p\ \mathrm{div}v=\int_\Omega b\cdot v\ \forall v\in V,\\ \displaystyle\int_\Omega q\ \mathrm{div}u=0\ \ \forall q\in Q,\end{array}\right. \tag{2.10}$$

其中 $\epsilon(u)=\frac{(\nabla u)^T+\nabla u}{2}$ 表示对称梯度算子.

注意到 Piola 等式 $\mathrm{div}(\hat{J}\hat{F}^{-T})=0$ 及 $\hat{J}=1$, 所以 $\mathrm{div}\hat{F}^{-T}=0$ 成立. 因此, 我们有

$$\mathrm{div}(\hat{F}^{-T}u)=\mathrm{div}\hat{F}^{-T}\cdot u+\hat{F}^{-T}:\nabla u=\hat{F}^{-T}:\nabla u.$$

令 $\hat{F}^{-T}u=w$, 考虑如下问题: 求 $(w,p)\in V\times Q$ 使得

$$\left\{\begin{array}{l} a(w,v)+b(v,p)=-\mathcal{R}_u((\hat{u},\hat{p}),v)\ \forall v\in V,\\ b(w,q)=-\mathcal{R}_p((\hat{u},\hat{p}),q)\ \ \forall q\in Q,\end{array}\right. \tag{2.11}$$

其中

$$\left\{\begin{array}{l} a(w,v)=\tilde{a}(\hat{F}w,\hat{F}v)=\mu\displaystyle\int_\Omega \nabla(\hat{F}w):\nabla(\hat{F}v)+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\displaystyle\int_\Omega(\mu-\hat{p})(\hat{F}^{-1}\nabla(\hat{F}w))^T:\hat{F}^{-1}\nabla(\hat{F}v),\\ b(w,p)=\displaystyle\int_\Omega p\mathrm{div}w.\end{array}\right. \tag{2.12}$$

设 $V_h\subset V$ 和 $Q_h\subset Q$ 为有限元空间, (2.11) 对应的离散问题为: 求 $(w_h,p_h)\in V_h\times Q_h$ 使得

$$\left\{\begin{array}{l} a(w_h,v_h)+b(v_h,p_h)=-\mathcal{R}_u((\hat{u},\hat{p}),v_h)\ \forall v_h\in V_h,\\ b(w_h,q_h)=-\mathcal{R}_p((\hat{u},\hat{p}),q_h)\ \ \forall q_h\in Q_h,\end{array}\right. \tag{2.13}$$

其中 $a(\cdot,\cdot)$ 和 $b(\cdot,\cdot)$ 由 (2.12) 定义.

在某些情况下, 会出现连续问题 (2.11) 是稳定的, 而离散问题 (2.13) 是不稳定的情形 (参见 [10]). 我们说, 这种情形是由于离散化造成了非物理的不稳定性.

3. 一种抽象的对于混合元逼近的稳定化策略

由前一节, 我们知道当连续问题 (2.11) 稳定时, 有必要建立稳定的离散问题. 因此, 在本节中, 我们提出一种抽象的对于混合元逼近的稳定化框架.

设 V 和 Q 均是希尔伯特空间, 并假设

$$a:V\times V\to\mathbb{R},\ b:V\times Q\to\mathbb{R}$$

是连续的双线性型. 设 $f\in V'$ 及 $g\in Q'$. 记 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为空间 V 与其对偶空间 V' 及空间 Q 与其对偶空间为 Q' 之间的对偶对.

考虑如下问题: 求 $(w,p)\in V\times Q$, 使得

$$\left\{\begin{array}{ll} a(w,v)+b(v,p)=\langle f,v\rangle & \forall v\in V,\\ b(w,q)=\langle g,q\rangle & \forall q\in Q.\end{array}\right. \tag{3.1}$$

定义映射 B 为

$$B : V \to Q^{'} : \langle Bw, q\rangle = b(w,q) \quad \forall q \in Q.$$

定义 B 的核空间为

$$K = \ker(B) := \{v \in V : b(v,q) = 0 \quad \forall q \in Q\}.$$

显然, 连续问题 (3.1) 在下面的假设条件下是适定的:

- A_1 : inf-sup 条件, 即存在一个常数 $\beta > 0$, 使得

$$\inf_{q\in Q}\sup_{v\in V}\frac{b(v,q)}{\|v\|_V\|q\|_Q} \geq \beta, \tag{3.2}$$

  其中 $\|\cdot\|_V$ 和 $\|\cdot\|_Q$ 分别为定义在空间 V 和 Q 上的范数.

- A_2 : 核空间上的强制性条件, 即存在一个常数 $\alpha > 0$, 使得

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall\ v \in K. \tag{3.3}$$

下面给出问题 (3.1) 的一种等价形式: 求 $(w,p) \in V \times Q$, 使得

$$\begin{cases} A(w,v) + b(v,p) = \langle f, v\rangle + M(g, Bv)_{Q'} \quad \forall v \in V, \\ b(w,q) = \langle g, q\rangle \quad \forall q \in Q, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $A(w,v) = a(w,v) + M(Bw,Bv)_{Q'}$, $(\cdot,\cdot)_{Q'}$ 表示空间 $Q^{'}$ 上的内积, M 为适当选取的参数.

令 $V_h \subset V$ 和 $Q_h \subset Q$ 为空间 V 和 Q 的有限维子空间, 且满足如下假设条件:

- A_3 : 离散的 Inf-sup 条件

$$\inf_{q_h\in Q_h}\sup_{v_h\in V_h}\frac{b(v_h,q_h)}{\|v_h\|_V\|q_h\|_Q} \geq \beta_1 > 0, \tag{3.5}$$

其中 β_1 与 h 无关.

下面考虑离散变分问题 (3.4): 求 $(w_h,p_h) \in V_h \times Q_h$, 使得

$$\begin{cases} A(w_h,v_h) + b(v_h,p_h) = \langle f, v_h\rangle + M(g, Bv_h)_{Q'} \ \forall v_h \in V_h, \\ b(w_h,q_h) = \langle g, q_h\rangle \ \ \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{3.6}$$

注 3. 注意到当 $M = 0$ 时, (3.6) 为经典的混合有限元方法. 我们称 (3.6) 为修正的混合有限元方法.

引理 1 (见 [22]). 条件 A_1 等价于如下条件, $B : K^\perp \to Q^{'}$ 为同构算子, 且

$$\|Bv\|_{Q'} \geq \beta\|v\|_V \quad \forall v \in K^\perp, \tag{3.7}$$

其中 $K^\perp$ 表示 K 在 V 中的正交补空间.

定理 1. 当假设条件 A_1 和 A_2 成立时, 存在常数 M_0, 使得当 $M \geq M_0$ 时, 离散问题 (3.6) 是稳定的, 即存在正常数 α_1, 使得

$$A(v_h,v_h) \geq \alpha_1\|v_h\|_V^2 \quad \forall\ v_h \in V_h. \tag{3.8}$$

证明. 对任意的 $v_h \in V_h$, 注意到 $V_h \subset V$, 我们有 $v_h = \varphi + \varphi^\perp$, 其中 $\varphi \in K, \varphi^\perp \in K^\perp$ 且 $K^\perp$ 表示 K 在 V 中的正交补空间. 由引理 1 可知

$$\begin{aligned} A(v_h, v_h) &= a(v_h, v_h) + M(Bv_h, Bv_h)_{Q'} \\ &= a(\varphi + \varphi^\perp, \varphi + \varphi^\perp) + M(B\varphi^\perp, B\varphi^\perp)_{Q'} \\ &\geq a(\varphi, \varphi) + a(\varphi, \varphi^\perp) + a(\varphi^\perp, \varphi) + a(\varphi^\perp, \varphi^\perp) + M\beta^2 \|\varphi^\perp\|_V. \end{aligned}$$

由假设 A_2, 线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 的连续性及柯西不等式, 我们有

$$\begin{aligned} A(v_h, v_h) &\geq \alpha\|\varphi\|_V^2 - C_1\|\varphi\|_V\|\varphi^\perp\|_V - C_2\|\varphi^\perp\|_V^2 + M\beta^2\|\varphi^\perp\|_V^2 \\ &\geq (\alpha - \varepsilon C_1)\|\varphi\|_V^2 - (C_2 + \frac{C_1}{\varepsilon})\|\varphi^\perp\|_V^2 + M\beta^2\|\varphi^\perp\|_V^2 \\ &\geq (\alpha - \varepsilon C_1)\|\varphi\|_V^2 + (M\beta^2 - (C_2 + \frac{C_1}{\varepsilon}))\|\varphi^\perp\|_V^2. \end{aligned}$$

注意到 $\|v_h\|_V^2 = \|\varphi\|_V^2 + \|\varphi^\perp\|_V^2$ 并选择 $\varepsilon = \frac{\alpha}{2C_1}, M_0 = \dfrac{\frac{\alpha}{2} + C_2 + \frac{2C_1^2}{\alpha}}{\beta^2}$, 我们有

$$A(v_h, v_h) \geq \alpha_1(\|\varphi\|_V^2 + \|\varphi^\perp\|_V^2) = \alpha_1\|v_h\|_V^2,$$

至此完成了证明.

注意到 $A(\cdot, \cdot)$ 是连续的, 利用文献 [22–24] 中关于鞍点问题的经典 Brezzi 理论, 我们有

定理 2. 设 w, p 是问题 (3.4) 的解, 并且在满足假设条件 A_1, A_2, A_3 及 M 充分大的情况下, 离散问题 (3.6) 有唯一解 $(w_h, p_h) \in V_h \times Q_h$, 并满足

$$\|w - w_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq C\left(\inf_{v_h \in V_h}\|w - v_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h}\|p - q_h\|_Q\right), \tag{3.9}$$

其中 C 是依赖于 α_1, β_1 和 M 的常数.

4. 非线性不可压弹性问题的应用

我们注意到非线性弹性问题通常是描述具有大变形的情形, 在进行下一步非线性迭代时, 初始值 $\hat{u}, \hat{p}$ 不再为零, 从而导致线性化后由于散度不能精确为零引起数值不稳定, 因此, 本节我们将上一节提出的抽象的稳定化框架应用于非线性不可压缩弹性问题中每一个非线性迭代所需要求解的线性问题。 假设 Ω 是连通区域, 考虑问题 (2.11) 对应的 d 维狄氏边值问题 (其他边值问题是类似的), 即 $V = (H_0^1(\Omega))^d$, $Q = L_0^2(\Omega)$ 及 $K = \{v \in (H_0^1(\Omega))^d : \mathrm{div} v = 0\}$. 选取满足条件 A_3 的有限元空间 V_h 和 Q_h. 模型问题 (2.11) 可改写为: 求 $(w, p) \in V \times Q$, 使得

$$\begin{cases} A(w, v) + b(v, p) = -\mathcal{R}_u((\hat{u}, \hat{p}), v) - M\mathcal{R}_p((\hat{u}, \hat{p}), \mathrm{div} v) & \forall v \in V, \\ b(w, q) = -\mathcal{R}_p((\hat{u}, \hat{p}), q) & \forall q \in Q, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $A(w, v) = a(w, v) + M(\mathrm{div} w, \mathrm{div} v)$, 线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 和 $b(\cdot, \cdot)$ 由 (2.12) 定义, $(\cdot, \cdot)$ 为 $L^2(\Omega)$ 上的内积, 其中 M 适当选取的参数.

连续问题 (4.1) 对应的离散问题为: 求 $(w_h, p_h) \in V_h \times Q_h$, 使得

$$\begin{cases} A(w_h, v_h) + b(v_h, p_h) = -\mathcal{R}_u((\hat{u}, \hat{p}), v_h) - M\mathcal{R}_p((\hat{u}, \hat{p}), \mathrm{div} v_h) & \forall v_h \in V_h, \\ b(w_h, q_h) = -\mathcal{R}_p((\hat{u}, \hat{p}), q_h) & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{4.2}$$

引理 2 ([25], 推论 2.3). 我们有 $K = \{v \in (H_0^1(\Omega))^d : \mathrm{div} v = 0\}$ 的正交补空间的精确刻画, 即

$$K^{\perp} = \{(-\triangle)^{-1} \mathrm{grad} f : f \in L_0^2(\Omega)\}.$$

令 $K^0 = \{y \in (H^{-1}(\Omega))^d : \langle y, \phi \rangle = 0 \ \ \forall \phi \in K\}$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示空间 $(H^{-1}(\Omega))^d$ 和 $(H_0^1(\Omega))^d$ 之间的对偶对.

引理 3 ([25], 推论 2.4). 设 Ω 是连通区域, 则

1. 算子grad 是从 $L_0^2(\Omega)$ 到 K^0 的同构算子;
2. 算子div 是从 $K^{\perp}$ 到 $L_0^2(\Omega)$ 的同构算子.

定理 3. 如果由 (2.12) 定义的线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 满足在 K 上的强制性条件, 即: 存在一个常数 $\alpha > 0$, 使得

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2 \ \ \forall v \in K,$$

则离散问题 (4.2) 在如下意义下是稳定的, 即：存在常数 $\alpha_1 > 0$, 使得

$$A(v_h, v_h) \geq \alpha_1 \|v_h\|_1^2 \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.3}$$

证明. 由前一节中的抽象理论框架, 该定理的证明是显然的.

同样, 由前一节中的抽象理论框架, 我们可得到与 (3.9) 类似的逼近性结论.

定理 4. 设 w, p 是问题 (2.11) 的解, 则当假设条件 A_2 和 A_3 成立且 M 足够大时, 离散问题 (4.2) 有唯一的解 $(w_h, p_h) \in V_h \times Q_h$, 且满足

$$\|w - w_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h} \|w - v_h\|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_0 \right), \tag{4.4}$$

其中常数 C 依赖于 α_1, β_1 和 M.

5. 数值实验

本节, 我们给出验证稳定化策略性能的数值实验. 在实验中我们采用 Stokes 稳定混合元. 我们首先简要介绍所考虑的修正的混合有限元方法, 之后给出用该方法计算的数值结果.

5.1. 两个例子

本小节中, 我们提出两个简单的问题, 这两个例子将在小节 5.3 中被用来讨论第 3 节中提出的稳定化策略的性能. 在常用的笛卡尔坐标 (X, Y) 下, 考虑区域 $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$, 其中 $\Gamma = [-1, 1] \times \{1\}$ 是区域 Ω 的顶部边界, 其他边界记为 Γ_D. 假设总能量为 (2.3), 外载荷是由垂直均匀体力给出的: $b = \gamma f$, 其中 $f = (0, 1)^{\top}$. 对于给定的不同的边界条件, 这两个问题是不同的. 更准确地说应该是:

- **问题 1.** 在边界 Γ_D 上设置了约束边界条件, 但边界 Γ 是无约束的.
- **问题 2.** 在边界 Γ_D 上设置了法线方向位移消失的条件, 但在边界 Γ 上设置的是自由边界条件.

对任意一个 $\gamma \in R$, 很容易看出, 这两个问题都有这样的解 $(\hat{u},\hat{p})=(0,\gamma r)$, 其中 $r=r(X,Y)=1-Y$.

通过研究这些问题, 相应的线性系统 (2.12) 可描述为: 求 $(w,p)\in V\times Q$ 使得

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mu\displaystyle\int_\Omega \epsilon(w):\epsilon(v)-\gamma\int_\Omega r(\nabla w)^\top:\nabla v+\int_\Omega p\ \mathrm{div}v=\delta\gamma\int_\Omega f\cdot v,\ \forall v\in V,\\ \displaystyle\int_\Omega q\ \mathrm{div}w=0\ \ \forall q\in Q,\end{array}\right. \tag{5.1}$$

其中 $\delta\gamma$ 是参数 γ 的增量.

对于这两个不同的问题, 空间 V 和空间 Q 可定义为

- **问题 1.** $V=\{v\in H^1(\Omega)^2:\ v|_{\Gamma_D}=0\};Q=L^2(\Omega)$.
- **问题 2.** $V=\{v\in H^1(\Omega)^2:\ (v\cdot n)|_{\Gamma_D}=0\};Q=L^2(\Omega)$, 其中 n 表示单位外法向量.

稳定的离散格式如下 (见 (4.2)): 求 $(w_h,p_h)\in V_h\times Q_h$, 使得

$$\left\{\begin{array}{l} A(w_h,v_h)+b(v_h,p_h)=\delta\gamma\displaystyle\int_\Omega f\cdot v_h,\ \forall v_h\in V_h,\\ b(w_h,q_h)=0,\ \ \forall q_h\in Q_h.\end{array}\right. \tag{5.2}$$

其中 $A(w,v)=2\mu\int_\Omega\epsilon(w):\epsilon(v)-\gamma\int_\Omega r(\nabla w)^\top:\nabla(v)+M(\gamma)\int_\Omega \mathrm{div}w\ \mathrm{div}v;\ b(w,p)=\int_\Omega p\ \mathrm{div}v$, 这里 $M(\gamma)$ 是依赖于 γ 的参数.

注 4. 对于问题 1, 理论上可以证明, 见文献 [10], 当 $\gamma<3\mu$ 时连续问题 (5.1) 是稳定的.

5.2. MINI 元

对于变分问题 (5.2) , 采用 MINI 元离散 (见 [24]). 令 T_h 为区域 Ω 上网格尺寸为 h 的三角形. 对位移场的离散, 我们采用

$$V_h=\{v_h\in V: v_h|_T\in P_1(T)^2+B(T)^2\ \forall\ T\in T_h\},$$

其中 $P_1(T)$ 表示定义在单元 T 的线性函数, $B(T)$ 是由定义在单元 T 上的标准泡函数 b_T 产生的线性空间. 对压力的离散, 我们采用

$$Q_h=\{q_h\in H^1(\Omega)\cap Q: q_h|_T\in P_1(T)\ \forall\ T\in T_h\}.$$

5.3. 数值实验

现在, 我们利用上述简单描述的修正的混合有限元格式来研究离散问题的稳定性. 对于问题 1, 文献 [10] 已经从理论上及数值上证明, 当 $\gamma<\mu$ 时经典的混合有限元方法是稳定的, 而当 $\gamma>\frac{3}{2}\mu$ 时是不稳定的. 在本节的数值实验中, 对问题 1 和问题 2, 当 $-\infty<\gamma<3\mu$ 时, 修

正的混合有限元方法是稳定的 (这个稳定范围与文献 [10] 中问题 1 的连续问题的稳定范围是一致的), 这验证了我们的定理 1.

注意到定理 1, 我们研究由双线性形式 $A(\cdot,\cdot)$ 导出的矩阵的特征值. 我们把使得负特征值出现的第一个载荷称为临界载荷. 下面分别从 $\gamma=0$ 开始讨论正载荷和负载荷情况, 即 $\gamma<0$ 和 $\gamma>0$. 我们标记第一个使我们找到负特征值的荷载值为临界荷载 $\gamma_{m,h}$ 和 $\gamma_{M,h}$.

为了提高临界载荷检测的准确性, 我们采用了后续等分法过程. 相应的无量纲值分别记为 $\tilde{\gamma}_{m,h}$ 和 $\tilde{\gamma}_{M,h}$, 其中 $\tilde{\gamma}=\frac{\gamma L}{\mu}$. 这里, L 是某个问题的特征长度, 为简单起见设为 1, 这也符合模型问题的几何性质. 如果不检测非常大载荷下 (如 $\tilde{\gamma}>10^6$) 的负特征值, 令 $\tilde{\gamma}=\infty$. 注意到双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 的有界常数是 $\gamma+2\mu$ 的量级, 同时 $a(\cdot,\cdot)$ 的稳定性常数是 μ 的量级. 通过定理 1 的证明, 我们可以取 $M_0=m_1|\tilde{\gamma}|+m_2\tilde{\gamma}^2$. 因此, 在程序中, 令 $\mu=40, M(\gamma)=m_1|\tilde{\gamma}|+m_2\tilde{\gamma}^2$, 然后我们调整参数 $\tilde{\gamma}$, m_1 及 m_2 来调查稳定性表现. 更进一步, 在问题 1 中我们采用 $m_1=320, m_2=0$, 在问题 2 中我们采用 $m_1=320, m_2=1.36$.

表 1 问题 1 的稳定性区间

Nodes	$\tilde{\gamma}_{m,h}$	$\tilde{\gamma}_{M,h}$
5×5	$-\infty$	$+\infty$
9×9	$-\infty$	14.50
17×17	$-\infty$	8.25
33×33	$-\infty$	7.13

表 2 问题 2 的稳定性区间

Nodes	$\tilde{\gamma}_{m,h}$	$\tilde{\gamma}_{M,h}$
5×5	$-\infty$	$+\infty$
9×9	$-\infty$	3.88
17×17	$-\infty$	3.38
33×33	$-\infty$	3.23

为了验证收敛性结论 (2), 在 (5.1) 中取另一组数据 $f=(-e^x(1-y),e^x)^\top$ 和真解 $(w,p)=(0,\delta\gamma e^x(1-y))$.

表 3 问题 1 中 $\tilde{\gamma}=7.125$ 时的收敛性

Nodes	$\|p-p_h\|_0$	$\|w-w_h\|_1$	*order*
5×5	6.0469×10^{-2}	1.0518×10^{-6}	$--$
9×9	1.5141×10^{-2}	1.8890×10^{-7}	2
17×17	3.7871×10^{-3}	3.0897×10^{-8}	2
33×33	9.4692×10^{-4}	9.2283×10^{-9}	2

表 4 问题 2 中 $\tilde{\gamma}=3.23$ 时的收敛性

Nodes	$\|p-p_h\|_0$	$\|w-w_h\|_1$	$order$
5×5	6.0187×10^{-2}	7.5563×10^{-6}	$--$
9×9	1.5129×10^{-2}	1.6314×10^{-6}	2
17×17	3.7867×10^{-3}	3.3616×10^{-7}	2
33×33	9.4691×10^{-4}	7.7049×10^{-8}	2

由表 1 和表 2 可知, 本文提出的稳定化策略以及相应的修正的混合有限元法是有效的, 且稳定性性能明显提高. 事实上, 值 $\tilde{\gamma}_{M,h}$ 与文献 [17] 中的 "真解" 具有相当的可比性. 表 3 和表 4 验证了收敛结果 (2), 且可以看出修正的混合有限元方法也是无闭锁的. 事实上, 当 $\tilde{\gamma}=7.125$ 时, 用经典的混合有限元方法求解问题 1 时是不稳定的, 因此也是不收敛的, 然而, 修正的混合有限元方法计算效果很好.

6. 结　论

在不可压缩材料的有限弹性问题理论框架内, 即使连续问题是稳定的, 人们知道经典的混合有限元离散有时也是不稳定的. 本文对连续问题进行了新的表述, 提出了一种基于新的连续表述的抽象的稳定化策略, 得到了一种修正的混合有限元方法. 在第 3 节中证明了, 当 M 足够大及连续问题稳定时, 修正的混合有限元方法是稳定的, 并且该方法保持了经典方法的最优收敛性. 在第 5 节中, 通过数值实验验证了修正的混合有限元方法比经典的混合有限元方法更稳定, 而且是无闭锁的. 第 3 节中参数 M_0 的选取总是高于实际中使用的参数. 然而, 我们在数值实验 (见第 5 节) 中可以根据连续问题的稳定性和连续性来选择参数.

参 考 文 献

[1] Reddy B, Simo J. Stability and convergence of a class of enhanced strain methods [J]. SIAM J. Numer. Anal., 1995, 32(6): 1705–1728.

[2] Braess D, Carstensen C, Reddy B. Uniform convergence and a posteriori error estimators for the enhanced strain finite element method [J]. Numer. Math., 2004, 96(3): 461–479.

[3] Houston P, Schotzau D, Wihler T. An hp-adaptive mixed discontinuous Galerkin FEM for nearly incompressible linear elasticity [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2006, 195(25–28): 3224–3246.

[4] Hansbo P, Larson M. Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche's method [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2002, 191(17–18): 1895–1908.

[5] Hong Q, Kraus J, Xu J, Zikatanov L. A robust multigrid method for discontinuous Galerkin discretizations of Stokes and linear elasticity equations [J]. Numer. Math., 2016, 132(1): 23–49.

[6] Wu S, Gong S, Xu J. Interior penalty mixed finite element methods of any order in any dimension for linear elasticity with strongly symmetric stress tensor [J]. Math. Models Methods in Appl. Sci., 2017, 27(14): 2711–2743.

[7] Gong S, Wu S, Xu J. New hybridized mixed methods for linear elasticity and optimal multilevel solvers [J]. Numer. Math., 2019, 141(2): 569–604.

[8] Wang F, Wu S, Xu J. A mixed discontinuous Galerkin method for linear elasticity with strongly imposed symmetry [J]. J. Sci. Comput., 2020, 83(1): 1–17.

[9] Hong Q, Hu J, Ma L, Xu J. An Extended Galerkin Analysis for Linear Elasticity with Strongly Symmetric Stress Tensor [J]. arXiv preprint arXiv:2002.11664, 2020.

[10] Auricchio F, da Veiga L B, Lovadina C, Reali A. A stability study of some mixed finite elements for large deformation elasticity problems [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2005, 194(9-11): 1075–1092.

[11] Wriggers P, Reese S. A note on enhanced strain methods for large deformations [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1996, 135(3–4): 201–209.

[12] Lovadina C, Auricchio F. On the enhanced strain technique for elasticity problems [J]. Comput.& Structures, 2003, 81(8–11): 777–787.

[13] Pantuso D, Bathe K. On the stability of mixed finite elements in large strain analysis of incompressible solids [J]. Finite Elem. Anal. Des., 1997, 28(2): 83–104.

[14] Eyck A T, Celiker F, Lew A. Adaptive stabilization of discontinuous Galerkin methods for nonlinear elasticity: Analytical estimates [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2008, 197(33–40): 2989–3000.

[15] Eyck A T, Celiker F, Lew A. Adaptive stabilization of discontinuous Galerkin methods for nonlinear elasticity: Motivation, formulation, and numerical examples [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2008, 197(45–48): 3605–3622.

[16] A. Ten Eyck A, Lew A. An adaptive stabilization strategy for enhanced strain methods in nonlinear elasticity [J]. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 2010, 81(11): 1387–1416.

[17] Auricchio F, da Veiga L B, Lovadina C, Reali A. The importance of the exact satisfaction of the incompressibility constraint in nonlinear elasticity: mixed FEMs versus NURBS-based approximations [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2010, 199(5–8): 314–323.

[18] Hughes T, Cottrell J, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2005, 194(39–41): 4135–4195.

[19] Brezzi F, Fortin M, Marini L. Mixed Finite Element Methods with Continuous Stresses [J]. Math. Models Methods Appl. Sci., 1993, 3: 275–287.

[20] Xie X, Xu J, Xue G. Uniformly stable finite element methods for Darcy-Stokes-Brinkman models [J]. J. Comput. Math., 2008, 26(3): 437–455.

[21] Bonet J, Wood R. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis[M]. Cambridge University Press, New York, 1997.

[22] Brezzi F, Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods[M]. Springer-Verlag, New York, 1991.

[23] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers [J]. RAIRO Anal. Numer., 1974, 8(2): 129–151.

[24] Arnold D, Brezzi F, Fortin M. A stable finite element for the Stokes equations [J]. Calcolo, 1984, 21(4): 337–344.

[25] Girault V, Raviart P. Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms[M]. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1986.

AN ABSTRACT STABILIZATION METHOD WITH APPLICATIONS TO NONLINEAR INCOMPRESSIBLE ELASTICITY

Hong Qingguo
(*Department of Mathematics, Pennsylvania State University, Unverisity Park, PA 16802, USA*)
Liu Chunmei
(*College of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou 425199, China*)
Xu Jinchao
(*Department of Mathematics, Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA*)

Abstract

In this paper, we propose and analyze an abstract stabilized mixed finite element framework that can be applied to nonlinear incompressible elasticity problems. In the abstract stabilized framework, we prove that any mixed finite element method that satisfies the discrete inf-sup condition can be modified so that it is stable and optimal convergent as long as the mixed continuous problem is stable. Furthermore, we apply the abstract stabilized framework to nonlinear incompressible elasticity problems and present numerical experiments to verify the theoretical results.

Keywords: nonlinear incompressible problem, mixed finite methods, stability.

2010 Mathematics Subject Classification: