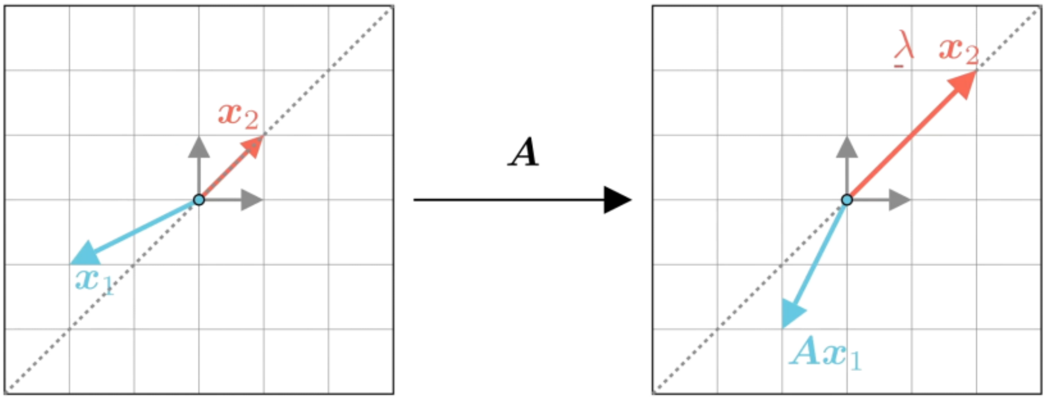
特征值与特征向量

2025年3月17日　16:29

1.什么是特征值?

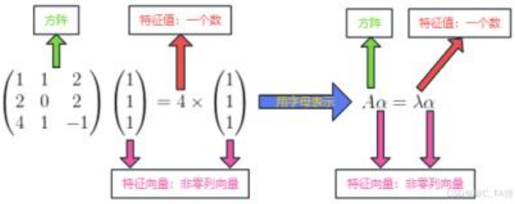
先从几何意义上理解:

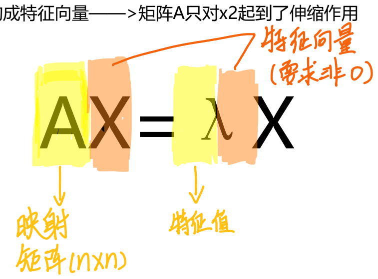


向量x1经过矩阵A映射——>Ax1——>x1与Ax1不在一条直线上——>不构成特征向量

向量x1经过矩阵A映射——>Ax2——>x1与Ax1在一条直线上——>构成特征向量——>矩阵A只对x2起到了伸缩作用

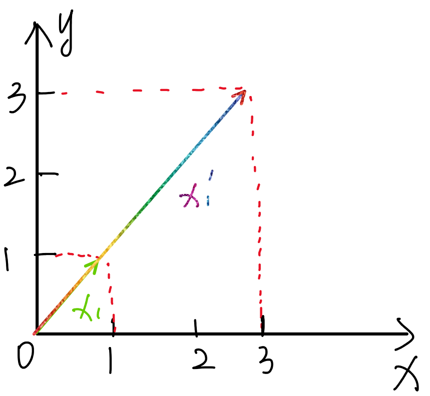
因此:





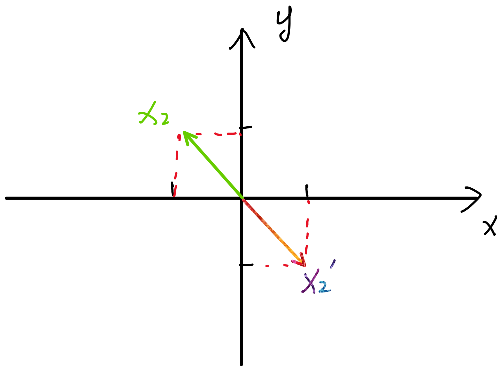
注:

如果特征值是**负数**，那说明了矩阵不但把向量拉长（缩短）了，而且让向量指向了相反的方向。



$$\underbrace{[1\quad 1]}_{X_1} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{3}_{\lambda_1}\underbrace{[1\quad 1]}_{X_1}$$

同向放大

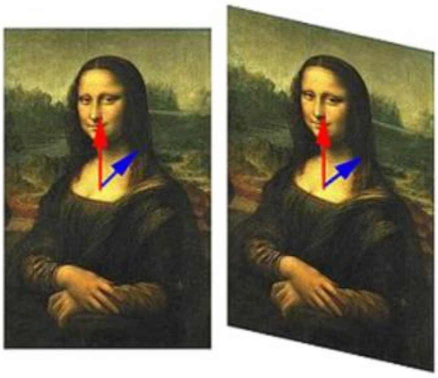


$$\underbrace{[-1\quad 1]}_{X_2} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{-1}_{\lambda_2}\underbrace{[-1\quad 1]}_{X_2}$$

同模反向

简而言之——>特征向量就是在线性变化当中不变的向量

在线性代数中，“特征” 就是一种更抽象的描述。矩阵乘法对应了一个变换，是把任意一个向量变成另一个方向或长度都大多不同的新向量。在这个变换的过程中，原向量主要发生旋转、伸缩的变化。如果矩阵对某一个向量或某些向量只发生伸缩（尺度）变换，而**没有产生旋转**的效果（也就意味着张成的子空间没有发生改变），这样的向量就认为是特征向量。



在这个仿射变换中，蒙娜丽莎的图像被变形，但是中心的纵轴在变换下保持不变。（注意：角落在右边的图像中被裁掉了。）蓝色的向量，从胸部到肩膀，其方向改变了，但是红色的向量，从胸部到下巴，其方向不变。因此红色向量是该变换的一个特征向量，而蓝色的不是。**因为红色向量既没有被拉伸又没有被压缩，其特征值为1。所有沿着垂直线的向量也都是特征向量，它们的特征值相等。它们构成这个特征值的特征空间。**

2.特征值计算方法

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow (\lambda E - A)\alpha = \theta,$$

即要求齐次线性方程组 $(\lambda E - A)x = \theta$ 有非零解，

即方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的根就是矩阵A的特征值，

相应**非零解**即为特征向量。

例题:

设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量。

1、求特征方程$|\lambda E - A| = 0$的全部根，即为矩阵 A 的全部特征值；

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ 降阶：$(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)[(\lambda+2)(\lambda-3)-4]$

$=(\lambda-2)[\lambda^2-\lambda+2]$

$=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0,$$

所以A的特征值为 $\lambda_1 = 2$(二重根), $\lambda_2 = -1$.

2、对每一特征值 λ_i，求出齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)x = \theta$$

的一个**基础解系**$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$，其中 r 为 $\lambda_i E - A$ 的秩；

2、对每一特征值 λ_i，求出齐次线性方程组

$=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

$$(\lambda_i E - A)x = \theta$$

的一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$，其中 r 为 $\lambda_i E - A$ 的秩；

则 A 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为不全为零的任意数。

对 $\lambda_1 = 2$，$2E - A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

相应齐次线性方程组的基础解系为

$$\alpha_1 = (1, 0, 4)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, -1)^T,$$

因此属于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \ (k_1, k_2 \text{不全为零})；$$

对 $\lambda_2 = -1$，$-E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

相应齐次线性方程组的基础解系为

$$\alpha_3 = (1, 0, 1)^T,$$

因此属于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为 $k_3\alpha_3 (k_3 \neq 0)$.

用python中的numpy库计算特征值与特征向量

代码：

```
import numpy as np
a = np.matrix('-2 1 1;0 2 0;-4 1 3')
b=np.linalg.eig(a)
print(b)
```

结果：

```
EigResult(eigenvalues=array([-1.,  2.,  2.]), eigenvectors=matrix([[-0.70710678, -0.24253563,  0.30151134],
        [ 0.        ,  0.        ,  0.90453403],
        [-0.70710678, -0.9701425 ,  0.30151134]]))
```

其中：特征值EigResult(eigenvalues=array([-1., 2., 2.])

特征向量：eigenvectors=matrix

([[-0.70710678, -0.24253563, 0.30151134],
[0. , 0. , 0.90453403],
[-0.70710678, -0.9701425 , 0.30151134]]))

`numpy` 计算出的特征向量是归一化的，即每个特征向量的模长为 1

- 第一列特征向量的模长：

$$\sqrt{(-0.70710678)^2 + 0^2 + (-0.70710678)^2} = \sqrt{0.5 + 0 + 0.5} = \sqrt{1} = 1$$

- 第二列特征向量的模长：

$$\sqrt{(-0.24253563)^2 + 0^2 + (-0.9701425)^2} = \sqrt{0.0588 + 0 + 0.9412} = \sqrt{1} = 1$$

- 第三列特征向量的模长：

$$\sqrt{(0.30151134)^2 + (0.90453403)^2 + (0.30151134)^2} = \sqrt{0.0909 + 0.8182 + 0.0909} =$$

- 特征值 -1 对应的特征向量 $\begin{pmatrix} -0.70710678 \\ 0 \\ -0.70710678 \end{pmatrix}$ 可以表示为 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，与手动计算的 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向一致。