

Федеральное автономное учреждение «Сибирский научно-исследовательский
институт авиации им. С. А. Чаплыгина»
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Новосибирский государственный технический университет»

На правах рукописи

Лакиза Павел Анатольевич

КОРРЕКЦИЯ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДАЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Специальность 2.5.14 — «Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Бернс Владимир Андреевич

Новосибирск — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Методы верификации расчетных динамических моделей конструкций по результатам модальных испытаний	6
1.1. Методы и средства модальных испытаний	6
1.2. Методы коррекции расчетных динамических моделей	6
1.3. Выводы по главе 1	6
Глава 2. Результаты модальных испытаний как исходные данные для верификации расчетных моделей конструкций	7
2.1. Методика определения модальных параметров	7
2.2. Погрешности экспериментального модального анализа	7
2.3. Первичная обработка результатов испытаний	7
2.4. Диагностика дефектов конструкций по результатам испытаний . .	7
2.4.1. Использование нелинейных искажений портретов колебаний	7
2.4.2. Обнаружение трещин	8
2.4.3. Контроль люфтов и зазоров	8
2.4.4. Выявление повышенного трения в подвижных соединениях	8
2.5. Обработка и представление результатов в процессе испытаний . .	8
2.6. Выводы по главе 2	8
Глава 3. Методика верификации расчетных динамических моделей . .	9
3.1. Коррекция расчетных моделей	9
3.2. Оценка чувствительности метода коррекции к погрешностям в результатах модальных испытаний	18
3.3. Коррекция параметров демпфирования	18
3.4. Освобождение математических моделей от наложенных связей . .	22
3.4.1. Описание метода	22
3.4.2. Тестовые примеры освобождения расчетных моделей . . .	29
3.5. Определение модальных характеристик крупногабаритных конструкций	32
3.6. Выводы по главе 3	32

Глава 4. Решение практических задач верификации расчетных моделей аэрокосмических конструкций	33
4.1. Коррекция расчетной модели динамически подобной модели самолета Ту-204	33
4.2. Верификация имитационной модели каркаса зонтичной антенны космического аппарата	33
4.3. Коррекция расчетной модели отъемной части крыла изделия С-70 «Охотник»	33
4.4. Выводы по главе 4	33
Основные выводы и заключение	34
Список литературы	35

Введение

Обзор, введение в тему, обозначение места данной работы.

Целью данной работы является ...

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
2. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
3. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.
4. Исследовать, разработать, вычислить и т. д. и т. п.

Научная новизна:

1. Метод коррекции расчетных моделей.
2. Метод освобождения математических моделей от закреплений, наложенных для проведения экспериментов.
3. Методика верификации асSEMBлированных конструкций, состоящая в коррекции, освобождении и синтезе их составных частей.
4. Вычислительные алгоритмы для идентификации дефектов по типу трещин, люфтов и зазоров на основе нелинейных искажений портретов колебаний.
5. Результаты применения методов верификации, идентификации и диагностирования дефектов к аэрокосмическим конструкциям.

Практическая значимость ...

Методология и методы исследования. ...

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Первое положение
2. Второе положение
3. Третье положение
4. Четвертое положение

Достоверность полученных результатов обеспечивается ... Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на: перечисление основных конференций, симпозиумов и т. п.

Личный вклад. Автор принимал активное участие ...

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в XX печатных изданиях, X из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, X — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 0 приложен.

Полный объём диссертации составляет 35 страниц, включая 4 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 3 наименования.

Глава 1. Методы верификации расчетных динамических моделей конструкций по результатам модальных испытаний

1.1. Методы и средства модальных испытаний

Сначала методы и средства классического экспериментального модального анализа. Затем переход к обнаружению дефектов в модальных испытаниях

1.2. Методы коррекции расчетных динамических моделей

1.3. Выводы по главе 1

Глава 2. Результаты модальных испытаний как исходные данные для верификации расчетных моделей конструкций

2.1. Методика определения модальных параметров

Здесь нужно использовать описание методики, изложенное в изобретении

2.2. Погрешности экспериментального модального анализа

Знание погрешностей необходимо для оценки «глубины» коррекции

2.3. Первичная обработка результатов испытаний

Эта обработка необходима в том числе и для устранения некоторых погрешностей

2.4. Диагностика дефектов конструкций по результатам испытаний

Дефектов нет в расчетных моделях, поэтому их нужно обнаруживать в реальной конструкции, а затем либо устранять, либо учитывать

2.4.1. Использование нелинейных искажений портретов колебаний

Привести таблицу сравнений чувствительности портретов и собственных частот к дефектам на примере панели

2.4.2. Обнаружение трещин

2.4.3. Контроль люфтов и зазоров

2.4.4. Выявление повышенного трения в подвижных соединениях

2.5. Обработка и представление результатов в процессе испытаний

Вот здесь и пригодилась твоя программа экспресс обработки результатов испытаний, так как между испытаниями и первым вылетом нет времени для составления полновесного отчета. Но главное не это! Обработка и представление результатов испытаний непосредственно в процессе испытаний позволит оперативно составить заключение о полноте экспериментальных данных, необходимых для коррекции расчетной модели объекта испытаний.

2.6. Выводы по главе 2

Глава 3. Методика верификации расчетных динамических моделей

3.1. Коррекция расчетных моделей

Пусть задана конечно-элементная модель исследуемого объекта в виде матриц жесткости \mathbf{K} и масс \mathbf{M} , тогда собственные числа $\lambda = 2\pi\nu$ (где ν — частота собственных колебаний) и формы колебаний \mathbf{Y} определяются из решения обобщенной проблемы собственных значений:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) \mathbf{Y} = 0 \quad (3.1)$$

Для коррекции динамических свойств КЭ-модели будем вносить изменения только в матрицу жесткости путем добавления к исходной матрице \mathbf{K} матрицы жесткости корректирующей КЭ-модели $\Delta\mathbf{K}$. При этом корректирующая модель является невесомой и строится на узлах исходной КЭ-модели.

Матрица жесткости корректирующего элемента в общем случае имеет вид:

$$\Delta\mathbf{K}_j = \sum_{p=1}^q c_{j+p-1} \mathbf{G}_j^{(p)}, \quad j = 1 \dots e, \quad (3.2)$$

где c_{j+p-1} — неизвестная корректирующая жесткость; q — число корректирующих жесткостей, описывающих элемент; $\mathbf{G}_j^{(p)}$ — парциальная матрица корректирующего элемента; e — число корректирующих элементов. Матрица (3.2) симметричная, поэтому не нарушает симметрию матрицы жесткости корректируемой модели при суммировании с ней.

Число корректирующих жесткостей q зависит от числа физических параметров, которыми описывается добавляемый элемент. В случае, если динамические свойства модели существенно зависят от изгибных и крутильных жесткостей её балочных или оболочечных элементов, предлагается использовать корректирующую КЭ-модель из балочных элементов ($q = 4$). Тогда парциальные матрицы корректирующего элемента примут вид:

$$\mathbf{G}_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 & -\mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{D}_1 & 0 & \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_j^{(2)} = \begin{pmatrix} 6\mathbf{D}_2 & 3\ell\mathbf{D}_4 & -6\mathbf{D}_2 & 3\ell\mathbf{D}_4 \\ 3\ell\mathbf{D}_4^\top & 2\ell^2\mathbf{D}_3 & -3\ell\mathbf{D}_4^\top & \ell^2\mathbf{D}_3 \\ -6\mathbf{D}_2^\top & -3\ell\mathbf{D}_4 & 6\mathbf{D}_2 & -3\ell\mathbf{D}_4 \\ 3\ell\mathbf{D}_4^\top & \ell^2\mathbf{D}_3^\top & -3\ell\mathbf{D}_4^\top & 2\ell^2\mathbf{D}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_j^{(3)} = \begin{pmatrix} 6\mathbf{D}_3 & -3\ell\mathbf{D}_4^\top & -6\mathbf{D}_3 & -3\ell\mathbf{D}_4^\top \\ -3\ell\mathbf{D}_4 & 2\ell^2\mathbf{D}_2 & 3\ell\mathbf{D}_4 & \ell^2\mathbf{D}_2 \\ -6\mathbf{D}_3^\top & 3\ell\mathbf{D}_4^\top & 6\mathbf{D}_3 & 3\ell\mathbf{D}_4^\top \\ -3\ell\mathbf{D}_4 & \ell^2\mathbf{D}_2^\top & 3\ell\mathbf{D}_4 & 2\ell^2\mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_j^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_1 & 0 & -\mathbf{D}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_1 & 0 & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix},$$

где ℓ — длина корректирующего балочного элемента; D_1, D_2, D_3, D_4 — матрицы, состоящие из компонент вектора конечного поворота:

$$\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} d_{k,1}^2 & d_{k,1}d_{k,2} & d_{k,1}d_{k,3} \\ d_{k,2}d_{k,1} & d_{k,2}^2 & d_{k,2}d_{k,3} \\ d_{k,3}d_{k,1} & d_{k,3}d_{k,2} & d_{k,3}^2 \end{pmatrix}, k = 1 \dots 3,$$

$$\mathbf{D}_4 = \begin{pmatrix} d_{2,1}d_{3,1} & d_{2,1}d_{3,2} & d_{2,1}d_{3,3} \\ d_{2,2}d_{3,1} & d_{2,2}d_{3,2} & d_{2,2}d_{3,3} \\ d_{2,3}d_{3,1} & d_{2,3}d_{3,2} & d_{2,3}d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Для коррекции модели, составленной из объемных элементов, в качестве корректирующей КЭ-модели используется ферменная конструкция ($q = 1$).

Заметим, что жесткости корректирующих элементов могут быть отрицательными для изменения упругости конструкции в сторону уменьшения. При этом жесткости каждого вводимого элемента являются параметрами коррекции, которые подлежат определению из решения задачи безусловной минимизации целевой функции.

На рисунке 3.1 приведена принципиальная схема, иллюстрирующая физическую сторону предлагаемого метода на примере простой модели летательного аппарата. В данном случае модель составлена из объемных и оболочечных элементов, поэтому для изменения её динамических свойств вводятся как балочные, так и ферменные корректирующие элементы. Таким образом, корректирующая модель образует «каркасную» структуру над исходной моделью.

Для автоматического формирования набора корректирующих элементов используется портрет матрицы жесткости корректируемой конструкции. Так, если в матрице линейные степени свободы двух узлов «связаны» между собой внедиагональными элементами, то добавляется корректирующий элемент между этими узлами. В общем случае число корректирующих элементов определяется количеством связей между узлами в матрице, но оно может быть уменьшено посредством выбора областей коррекции, например, элементов конструкции с наибольшей неопределенностью физических и геометрических характеристик. Кроме того,

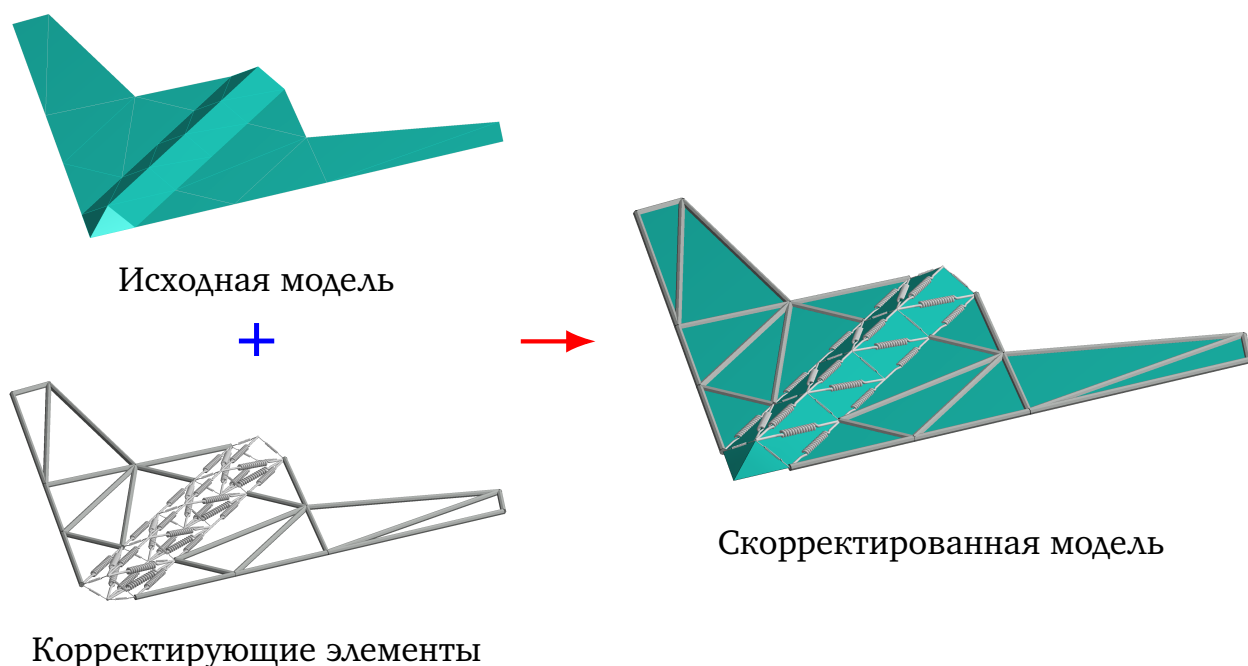


Рисунок 3.1 — Принципиальная схема коррекции

число независимых корректирующих жесткостей может быть уменьшено посредством введения зависимостей между элементами. Например, могут быть учтены геометрические особенности конструкции: наличие плоскостей симметрии и конструктивно идентичных элементов. Также можно проводить поэтапную коррекцию, в ходе которой в качестве целевых принимаются различные группы частот.

В зависимости от геометрии модели и типов конечных элементов может получиться так, что при добавлении (3.2) к матрице жесткости исходной конструкции появятся новые ненулевые элементы (изменится портрет разреженной матрицы). Такая ситуация возникает, например, когда есть геометрическая симметрия относительно некоторого узла и в исходном портрете соответствующие элементы при ассемблировании матрицы жесткости в сумме дают ноль и не попадают в портрет. Поэтому перед началом процедуры коррекции портрет матрицы жесткости дополняется портретом корректирующей матрицы.

Рассмотрим алгоритм метода коррекции на примере одного целевого значения для упрощения индексных обозначений, а затем обобщим формулы для случая коррекции по нескольким значениям собственных частот. Пусть в результате коррекции необходимо достигнуть целевого значения λ^* . Необходимо найти такую $\Delta \mathbf{K}^*$, чтобы достигнуть значения λ^* при решении следующей обобщенной проблемы:

$$[(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^*) - \lambda^* \mathbf{M}] \mathbf{Y}^* = 0 \quad (3.3)$$

Так как в (3.3) собственный вектор \mathbf{Y}^* зависит от матрицы $\Delta\mathbf{K}^*$, то использовать (3.3) напрямую как нелинейное матричное уравнение для поиска корректирующих жесткостей слишком затратно с вычислительной точки зрения: придется многократно решать обобщенную проблему. Поэтому для поиска корректирующей матрицы $\Delta\mathbf{K}^*$ предлагается следующий итерационный алгоритм.

Пусть решена обобщенная проблема для исходной модели

$$\left(\mathbf{K} - \lambda^{(0)}\mathbf{M}\right) \mathbf{Y}^{(0)} = 0, \quad (3.4)$$

то есть найдены $\lambda^{(0)}$ и $\mathbf{Y}^{(0)}$. Здесь и далее верхний индекс в круглых скобках обозначает номер итерации. На первой итерации ищем такое $\Delta\mathbf{K}^{(1)}$, чтобы удовлетворить следующему уравнению:

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(1)}\right) - \lambda^*\mathbf{M}\right] \mathbf{Y}^{(0)} = 0. \quad (3.5)$$

Здесь необходимо отметить, что $\Delta\mathbf{K}^{(1)}$ является функцией от корректирующих жесткостей c_1, c_2, \dots, c_m .

Число корректирующих жесткостей m в общем случае не меньше числа корректирующих элементов e и больше размерности матрицы жесткости N , а следовательно, больше числа уравнений в (3.5). Поэтому для решения (3.5) необходимо устремить к нулю следующую скалярную величину (невязку):

$$f^{(1)} = \left(\mathbf{Y}^{(0)}\right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(1)} - \Delta\lambda^{(1)*}\mathbf{M}\right] \mathbf{Y}^{(0)}, \quad (3.6)$$

где $\Delta\lambda^{(1)*} = \lambda^* - \lambda^{(0)}$.

В результате минимизации невязки (3.6) по корректирующим жесткостям получим $\Delta\mathbf{K}^{(1)}$ и, решив новую обобщенную проблему

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(1)}\right) - \lambda^{(1)}\mathbf{M}\right] \mathbf{Y}^{(1)} = 0, \quad (3.7)$$

найдем $\lambda^{(1)}$ и $\mathbf{Y}^{(1)}$. Это первая итерация метода. Аналогично (3.5) составим следующее уравнение для поиска $\Delta\mathbf{K}^{(2)}$:

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(1)} + \Delta\mathbf{K}^{(2)}\right) - \lambda^*\mathbf{M}\right] \mathbf{Y}^{(1)} = 0, \quad (3.8)$$

представим $\lambda^* = (\lambda^{(1)} + \Delta\lambda^{(2)*})$, тогда (3.8) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(1)} + \Delta\mathbf{K}^{(2)}\right) - (\lambda^{(1)} + \Delta\lambda^{(2)*})\mathbf{M}\right] \mathbf{Y}^{(1)} &= 0; \\ \left[\Delta\mathbf{K}^{(2)} - \Delta\lambda^{(2)*}\mathbf{M}\right] \mathbf{Y}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Delta\lambda^{(2)*} = \lambda^* - \lambda^{(1)}$. Аналогично (3.6) устремим к нулю невязку

$$f^{(2)} = \left(\mathbf{Y}^{(1)}\right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(2)} - \Delta\lambda^{(2)*}\mathbf{M}\right] \mathbf{Y}^{(1)}. \quad (3.10)$$

Это была вторая итерация метода коррекции. Обобщим формулы на случай нескольких целевых собственных значений. Пусть их число равно s . Таким образом, на каждой итерации метода коррекции минимизируется следующая целевая функция:

$$\begin{aligned} F^{(j+1)}(c_1, c_2, \dots, c_m) &= \sum_{i=1}^s w_i \left[f_i^{(j+1)} \right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^s w_i \left[\left(\mathbf{Y}_i^{(j)}\right)^T \Delta\mathbf{K}^{(j+1)} \mathbf{Y}_i^{(j)} - \Delta\lambda_i^{(j+1)*} \left(\mathbf{Y}_i^{(j)}\right)^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_i^{(j)} \right] \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где j — номер итерации, w_i — весовой коэффициент i -го тона.

Для минимизации (3.11) используется метод сопряженных градиентов. С вычислительной точки зрения важно найти аналитические выражения для вектора-градиента целевой функции. Для этого найдем производные от целевой функции по неизвестным корректирующим жесткостям (здесь и далее опустим номер итерации в круглых скобках):

$$\frac{\partial F}{\partial c_p} = 2 \sum_{i=1}^s w_i f_i \frac{\partial f_i}{\partial c_p}, \quad p = 1 \dots m. \quad (3.12)$$

Пусть $y_i^{(r)}$, $i = 1 \dots N$ — компоненты вектора собственной формы \mathbf{Y}_r , тогда частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial c_p}$ из (3.12) примут вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_p} = \frac{\partial}{\partial c_p} (\mathbf{Y}_r^T \Delta\mathbf{K} \mathbf{Y}_r) = \sum_{j=1}^N y_j^{(r)} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Delta k_{i,j}}{\partial c_p} y_i^{(r)}, \quad r = 1 \dots s, \quad p = 1 \dots m. \quad (3.13)$$

На примере ферменного корректирующего элемента покажем, что для вычисления (3.13) нет необходимости «прокручивать» два цикла (суммы), так как ненулевыми компонентами $\frac{\partial \Delta k_{i,j}}{\partial c_p}$ в общем случае без учета симметрии являются максимум 36 элементов в (3.2), поэтому (3.13) можно заменить на циклы по элементам (3.2). Рассмотрим такую замену в случае одного корректирующего элемента. Для удобства изложения обозначим произведения направляющих

косинусов $\beta_{i,j}$ и введем локальную нумерацию элементов, входящих в произведение (3.13):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & -\beta_{1,1} & -\beta_{1,2} & -\beta_{1,3} \\ \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & -\beta_{1,2} & -\beta_{2,2} & -\beta_{2,3} \\ \beta_{1,3} & \beta_{2,3} & \beta_{3,3} & -\beta_{1,3} & -\beta_{2,3} & -\beta_{3,3} \\ \hline -\beta_{1,1} & -\beta_{1,2} & -\beta_{1,3} & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} \\ -\beta_{1,2} & -\beta_{2,2} & -\beta_{2,3} & \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} \\ -\beta_{1,3} & -\beta_{2,3} & -\beta_{3,3} & \beta_{1,3} & \beta_{2,3} & \beta_{3,3} \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \beta_{1,1}(y_1 - y_4)^2 + \\ \beta_{2,2}(y_2 - y_5)^2 + \beta_{3,3}(y_3 - y_6)^2 + 2\beta_{1,2}(y_1y_2 - y_1y_5 - y_2y_4 + y_4y_5) + \\ 2\beta_{1,3}(y_1y_3 - y_1y_6 - y_3y_4 + y_4y_6) + \\ 2\beta_{2,3}(y_2y_3 - y_2y_6 - y_3y_5 + y_5y_6). \quad (3.14)$$

На основе выражений (3.14) можно вычислить производные $\frac{\partial f}{\partial c_p}$. Рассмотрим другой вариант вычисления производных. Для этого воспользуемся тем фактом, что симметричные матрицы хранятся в виде верхнего или нижнего треугольника, причем в разреженном формате хранения матрицы её элементы отсортированы в порядке возрастания номеров строк и столбцов. Для определенности рассмотрим построчное хранение разреженной матрицы:

$$\Delta \mathbf{K}_j = c_j \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 & \beta_{10} & \beta_{11} \\ & & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} \\ \hline & & & \beta_{16} & \beta_{17} & \beta_{18} \\ & & & & \beta_{19} & \beta_{20} \\ & & & & & \beta_{21} \end{array} \right). \quad (3.15)$$

В (3.15) введена другая нумерация произведений направляющих косинусов, и для удобства отрицательный знак внесен в значения соответствующих элементов. В общем виде один корректирующий конечный элемент с учетом симметрии имеет максимально 21 ненулевой элемент. В зависимости от конкретных значений направляющих косинусов ненулевых элементов в (3.15) может быть меньше. Для каждого корректирующего элемента предлагается хранить все произведения направляющих косинусов в виде последовательности $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{L(j)}$, где $L(j)$ — количество ненулевых элементов j -го корректирующего конечного элемента. Кроме того, для каждого такого элемента хранится порядковый номер элемента в портрете разреженной матрицы жесткости, по которому можно

определить строку i , столбец j (от 1 до N) и соответствующие номера степеней свободы id, jd (принимают значения от 1 до 3, соответствуют перемещениям вдоль осей глобальной системы координат). Тогда формула для вычисления производной (3.13) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial c_p} = \sum_{k=1}^{L(p)} \beta_k \left[-\delta_{id,jd} (y_i - y_j)^2 + (1 - \delta_{id,jd}) 2y_i y_j \right], \quad (3.16)$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Если сравнить вычислительные затраты на (3.14) и (3.16), первый имеет примерно в 2 раза меньше умножений, но для его реализации требуется дополнительная память на массив, содержащий $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23}$ для каждого корректирующего элемента.

В процессе итераций при «движении» к целевым значениям частот возможно изменение порядка частот, особенно при наличии в спектре близких и кратных частот, поэтому после каждой итерации необходимо находить соответствие новых тонов колебаний старым. Обычно это можно сделать, используя критерий модального соответствия (МАС-критерий):

$$\text{MAC}(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y}) = \frac{(\tilde{\mathbf{Y}}^\top \mathbf{Y})^2}{(\tilde{\mathbf{Y}}^\top \tilde{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}^\top \mathbf{Y})},$$

однако при наличии кратных частот колебаний МАС-критерий может дать близкие численные значения сразу для нескольких форм колебаний, что не позволяет установить однозначное соответствие между формами колебаний до и после коррекции. Для решения этой проблемы предлагается находить собственные частоты и формы колебаний на каждом шаге коррекции методом итераций в подпространстве [1], используя в качестве начальных приближений векторы, найденные на предыдущем шаге.

Рассмотрим более общий алгоритм, который в частном случае вырождается в представленный выше. Представим $\lambda^* = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^*$, тогда (3.5) перепишется в следующем виде:

$$\left[(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(1)}) - (\lambda^{(0)} + \Delta\lambda^*) \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} = 0. \quad (3.17)$$

Вычтем (3.4) из (3.17), составим целевую функцию для поиска $\Delta\mathbf{K}^{(1)}$:

$$\left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^\top \left[\Delta\mathbf{K}^{(1)} - \Delta\lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (3.18)$$

где $\Delta\lambda^* = \lambda^* - \lambda^{(0)}$.

Решив задачу минимизации (3.18), получим $\Delta\mathbf{K}^{(1)}$ и решим новую обобщенную проблему:

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(1)} \right) - \lambda^{(1)} \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)} = 0. \quad (3.19)$$

При этом $\lambda^{(1)} \neq \lambda^*$, если $\Delta\mathbf{K}^{(1)} \neq \Delta\mathbf{K}$ и $\mathbf{Y}^{(1)} \neq \mathbf{Y}^*$. Сформируем целевую функцию для поиска второго приближения $\Delta\mathbf{K}^{(2)}$. Невязка будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} f &= \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(2)} \right) - \left(\lambda^{(0)} + \Delta\lambda^* \right) \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(1)}, \\ f &= \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(2)} \right) - \left(\lambda^{(0)} + \Delta\lambda^* \right) \mathbf{M} \right] \left(\mathbf{Y}^{(0)} + \Delta\mathbf{Y}^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Умножим f слева на транспонированный собственный вектор, получим

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(2)} - \Delta\lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} + \right. \\ &\left. + \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(2)} \right) - \lambda^* \mathbf{M} \right] \Delta\mathbf{Y}^{(1)} \right\}^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Решив задачу минимизации (3.20), будем иметь $\Delta\mathbf{K}^{(2)}$. Решим новую обобщенную проблему:

$$\left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(2)} - \lambda^{(2)} \mathbf{M} \right) \mathbf{Y}^{(2)} \right] = 0.$$

При этом $\lambda^{(2)} \neq \lambda^*$, если $\Delta\mathbf{K}^{(2)} \neq \Delta\mathbf{K}^*$ и $\mathbf{Y}^{(2)} \neq \mathbf{Y}^*$. Сформируем целевую функцию для поиска третьего приближения $\Delta\mathbf{K}^{(3)}$:

$$\left\{ \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(3)} \right) - \left(\lambda^{(0)} + \Delta\lambda^* \right) \mathbf{M} \right] \left(\mathbf{Y}^{(0)} + \Delta\mathbf{Y}^{(2)} \right) \right\}^2 \rightarrow \min.$$

В итоге аналогично (3.20) получим

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(3)} - \Delta\lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} + \right. \\ &\left. + \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\left(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}^{(3)} \right) - \lambda^* \mathbf{M} \right] \Delta\mathbf{Y}^{(2)} \right\}^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Таким образом, проанализировав (3.20) и (3.21), для поиска корректирующей матрицы жесткости $\Delta\mathbf{K}^{(i+1)} \rightarrow \Delta\mathbf{K}^*$ имеем следующую целевую функцию:

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\Delta\mathbf{K}^{(i+1)} - \Delta\lambda^* \mathbf{M} \right] \mathbf{Y}^{(0)} + \right. \\ &\left. + \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \Delta\mathbf{K}^{(i+1)} \Delta\mathbf{Y}^{(i)} + \left(\mathbf{Y}^{(0)} \right)^T \left[\mathbf{K} - \lambda^* \mathbf{M} \right] \Delta\mathbf{Y}^{(i)} \right\}^2 \rightarrow \min \end{aligned} \quad (3.22)$$

Выберем следующую нормировку для собственных векторов $\mathbf{Y}^{(0)}$:

$$\left(\mathbf{Y}^{(0)}\right)^T \mathbf{M} \mathbf{Y}^{(0)} = 1.$$

После решения обобщенной проблемы нормируем $\mathbf{Y}^{(i)}$ — сначала $\left(\mathbf{Y}^{(i)}\right)^T \mathbf{M} \mathbf{Y}^{(i)} = 1$, для установления соответствия тонов колебаний до и после коррекции по МАС-критерию, а затем $\left(\mathbf{Y}^{(0)}\right)^T \mathbf{M} \mathbf{Y}^{(i)} = 1$, тогда

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{Y}^{(0)}\right)^T \mathbf{M} \left(\mathbf{Y}^{(0)} + \Delta \mathbf{Y}^{(i)}\right) &= 1, \\ \left(\mathbf{Y}^{(0)}\right)^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{Y}^{(i)} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, целевая функция (3.22) примет следующий вид:

$$\left\{ \left(\mathbf{Y}^{(0)}\right)^T \Delta \mathbf{K}^{(i+1)} \mathbf{Y}^{(i)} + \left[\left(\mathbf{Y}^{(0)}\right)^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{Y}^{(i)} - \Delta \lambda^* \right] \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (3.23)$$

Выражения для производных от целевой функции, входящие в градиент по типу (3.16), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c_p} &= \sum_{k=1}^{L(p)} \beta_k \left[-\delta_{id,jd} (y_i - y_j) (\Delta y_i - \Delta y_j) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \delta_{id,jd}) (y_i \Delta y_j + y_j \Delta y_i) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

где y – компоненты вектора $\mathbf{Y}^{(0)}$, а Δy – компоненты вектора $\Delta \mathbf{Y}^{(i)}$.

Таким образом, в целевой функции (3.23) содержатся собственные векторы для двух обобщенных проблем: исходной $[\mathbf{K} - \lambda^{(0)} \mathbf{M}] \mathbf{Y}^{(0)} = 0$ и достигнутой в процессе итераций проблемы для скорректированной матрицы $[(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^{(i)}) - \lambda^{(i)} \mathbf{M}] \mathbf{Y}^{(i)} = 0$ для поиска следующего приближения корректирующей матрицы $\Delta \mathbf{K}^{(i+1)}$. Если обновлять «базовую точку» итерационного процесса на каждой итерации, то получим первый алгоритм с целевой функцией (3.11) при условии выбора нормировки собственных форм к единичным обобщенным массам: $\left[\left(\mathbf{Y}^{(i)}\right)^T \Delta \mathbf{K}^{(i+1)} \mathbf{Y}^{(i)} - \Delta \lambda^{(i+1)*} \right]^2 \rightarrow \min$

Сходимость представленного итерационного алгоритма существенно зависит от геометрии и физического соответствия расчетной модели реальной конструкции, поэтому она определяется практическим путем в каждом конкретном случае на основе требований, предъявляемых к расчетной модели летательного аппарата. Так, например, если назначением модели является оценка эксплуатационной нагруженности летательного аппарата, то, как правило, коррекция

расчетной модели призвана обеспечивать соответствие с заданной точностью расчетных значений собственных частот низших тонов колебаний их экспериментальным значениям. В то же время решение проблемы аэроупругой устойчивости самолетов требует сохранения в расчетной модели собственных частот таких тонов, которые оказывают первостепенное влияние на исследуемое явление. И степень соответствия модели реальной конструкции здесь определяется ограничениями максимальной скорости летательного аппарата.

3.2. Оценка чувствительности метода коррекции к погрешностям в результатах модальных испытаний

3.3. Коррекция параметров демпфирования

Пусть известно s обобщенных коэффициентов демпфирования \mathbf{h}^* , определенных по результатам экспериментального модального анализа. Матрицу демпфирования в физической системе координат предлагается строить в два этапа: в качестве нулевого приближения использовать гипотезу Е. С. Сорокина, а затем, для достижения целевых обобщенных коэффициентов демпфирования, использовать предложенный с участием автора настоящей работы метод коррекции [2]. При этом коэффициенты коррекции вносятся только в матрицу демпфирования.

Нулевое приближение матрицы демпфирования формируется в следующем виде:

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{K}^* + \beta \mathbf{M}, \quad (3.25)$$

где $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}^*$ — скорректированная матрица жесткости, α — коэффициент конструкционного демпфирования, β — коэффициент инерционного демпфирования.

В результате решения обобщенной проблемы (3.3) найдены собственные частоты и формы колебаний \mathbf{y}_i^* ($i = 1 \dots s$), которые остаются неизменными в процессе восстановления матрицы демпфирования. Обобщенные жесткости и массы собственных тонов колебаний, для которых известны обобщенные коэффициенты демпфирования, запишутся:

$$\kappa_i = (\mathbf{y}_i^*)^T \mathbf{K}^* \mathbf{y}_i^*, \quad \mu_i = (\mathbf{y}_i^*)^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i^*. \quad (3.26)$$

Для нахождения коэффициентов α и β решаем задачу минимизации целевой функции:

$$G(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^s w_i \left(1 - \frac{\alpha \kappa_i + \beta \mu_i}{h_i^*} \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha, \beta}. \quad (3.27)$$

Запишем выражение для вектора-градиента целевой функции (3.27):

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^s \left[w_i \left(1 - \frac{\alpha \kappa_i + \beta \mu_i}{h_i^*} \right) \frac{\kappa_i}{h_i} \right], \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^s \left[w_i \left(1 - \frac{\alpha \kappa_i + \beta \mu_i}{h_i^*} \right) \frac{\mu_i}{h_i^*} \right],$$

$$\text{grad}(G) = \left\{ \frac{\partial G}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} \right\}^T. \quad (3.28)$$

Для дальнейшей коррекции будем вносить изменения в нулевое приближение матрицы демпфирования следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{H}} = (1 + \eta_0) \begin{pmatrix} h_{1,1}(1 + \eta_1) & h_{1,2}(1 + \eta_1)(1 + \eta_2) & \dots & h_{1,n}(1 + \eta_1)(1 + \eta_n) \\ h_{2,1}(1 + \eta_2)(1 + \eta_1) & h_{2,2}(1 + \eta_2) & \dots & h_{2,n}(1 + \eta_2)(1 + \eta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n,1}(1 + \eta_n)(1 + \eta_1) & h_{n,2}(1 + \eta_n)(1 + \eta_2) & \dots & h_{n,n}(1 + \eta_n) \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

где $h_{i,j}$ — элементы матрицы демпфирования \mathbf{H} , n — число корректирующих коэффициентов демпфирования.

С точки зрения численной реализации предлагаемого подхода корректируемую матрицу демпфирования $\tilde{\mathbf{H}}$ удобно представить в виде суммы матриц:

$$\tilde{\mathbf{H}}(\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n) = (1 + \eta_0) [\mathbf{H} + \mathbf{H}_1(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n) + \mathbf{H}_2(\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n)], \quad (3.30)$$

где

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} h_{1,1}\eta_1 & h_{1,2}(\eta_1 + \eta_2) & \dots & h_{1,n}(\eta_1 + \eta_n) \\ h_{2,1}(\eta_2 + \eta_1) & h_{2,2}\eta_2 & \dots & h_{2,n}(\eta_2 + \eta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n,1}(\eta_n + \eta_1) & h_{n,2}(\eta_n + \eta_2) & \dots & h_{n,n}\eta_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & h_{1,2}\eta_1\eta_2 & \dots & h_{1,n}\eta_1\eta_n \\ h_{2,1}\eta_2\eta_1 & 0 & \dots & h_{2,n}\eta_2\eta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n,1}\eta_n\eta_1 & h_{n,2}\eta_n\eta_2 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для новой матрицы демпфирования (3.29), используя (3.30), можно записать обобщенные коэффициенты демпфирования в следующем виде (индекс тона опущен):

$$\tilde{h} = (1 + \eta_0) (h + h_1 + h_2). \quad (3.31)$$

Алгоритм восстановления матрицы демпфирования заключается в том, чтобы найти такие коэффициенты $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$, которые будут решением следующей недоопределенной системы нелинейных уравнений:

$$f_i(\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n) = (\mathbf{y}_i^*)^\top \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{y}_i^* - h_i^* = \tilde{h}_i - h_i^*, \quad i = 1 \dots s. \quad (3.32)$$

Решением системы (3.32) будем считать решение задачи безусловной минимизации целевой функции, в качестве которой примем сумму квадратов каждого из уравнений (3.32) с взвешенной суммой квадратов коэффициентов коррекции:

$$F(\eta_0, \eta_1 \dots \eta_n) = \sum_{i=1}^s w_i f_i^2 + w_c \sum_{i=1}^s \eta_i^2 \rightarrow \min, \quad (3.33)$$

где w_i — весовые коэффициенты корректируемых тонов, w_c — параметр регуляризации. Из практики применения метода: если модель достаточно хорошо описывает реальный объект, то можно положить $w_c = 0$.

Для формирования целевой функции (3.33) построим аналитические выражения слагаемых в (3.31) на примере одного тона колебаний:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sum_{p=1}^n \left[\eta_p y_p^* \left(\sum_{i=1}^n h_{i,p} y_i^* + \sum_{i=1, i \neq p}^n h_{p,i} y_i^* \right) \right], \\ h_2 &= \sum_{p=1}^n \left[\eta_p y_p^* \sum_{i=1, i \neq p}^n h_{i,p} \eta_i y_i^* \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Аналитические выражения для частных производных по каждому из коэффициентов коррекции, необходимые для решения задачи минимизации (3.33), имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \eta_j} &= \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta_j} = (1 + \eta_0) \left(\frac{\partial h_1}{\partial \eta_j} + \frac{\partial h_2}{\partial \eta_j} \right), \\ \frac{\partial f_i}{\partial \eta_0} &= \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta_0} = \frac{1}{1 + \eta_0} \tilde{h}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $i = 1 \dots s, j = 1 \dots n$.

Будем решать задачу минимизации целевой функции методом сопряженных градиентов. Получим аналитические выражения для компонент вектора градиента:

$$\text{grad}(F) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \eta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_n} \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_0} \right\}^\top, \quad (3.36)$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_0} = 2 \sum_{i=1}^s \left(w_i f_i \frac{\partial f_i}{\partial \eta_0} \right), \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_j} = 2 \sum_{i=1}^s \left(w_i f_i \frac{\partial f_i}{\partial \eta_j} \right) + 2w_c \eta_j, \quad j = 1 \dots n.$$

Найдем аналитические выражения частных производных от (3.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \eta_j} &= y_j \left(\sum_{i=1}^n h_{i,j} y_i + \sum_{i=1, i \neq j}^n h_{j,i} y_i \right), \\ \frac{\partial h_2}{\partial \eta_j} &= y_j \left(\sum_{i=1}^n h_{i,j} \eta_i y_i + \sum_{i=1, i \neq j}^n h_{j,i} \eta_i y_i \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Воспользовавшись симметрией матрицы, из (3.34) и (3.37) получим:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sum_{j=1}^n \left[\eta_j y_j \left(2 \sum_{i=1}^n h_{i,j} y_i - h_{j,j} y_j \right) \right] \\ h_2 &= \sum_{j=1}^n \left[\eta_j y_j \sum_{i=1, i \neq j}^n h_{i,j} \eta_i y_i \right], \quad \frac{\partial h_2}{\partial \eta_j} = 2y_j \sum_{i=1, i \neq j}^n h_{i,j} \eta_i y_i. \end{aligned} \quad (3.38)$$

В итоге получаем формулы для вычисления градиента (3.36):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \eta_j} &= y_j \left(2 \sum_{i=1}^n h_{i,j} y_i - h_{j,j} y_j \right), \\ \frac{\partial h_2}{\partial \eta_j} &= 2y_j \left(\sum_{i=1}^n h_{i,j} \eta_i y_i - h_{j,j} \eta_j y_j \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ранее коллективом авторов, включая автора настоящей диссертации, был описан способ коррекции частот для редуцированных КЭ-моделей [3]. Следуя описанной в работе методологии, матрица демпфирования редуцированной модели может быть восстановлена следующим образом:

$$\mathbf{H}^* = \left(\mathbf{Y}^{*\top} \right)^{-1} \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} (\mathbf{Y}^*)^{-1}. \quad (3.40)$$

Заметим, что обобщенные характеристики, полученные в результате коррекции полноразмерных и редуцированных моделей отмеченными методами, близки между собой. Однако использование скорректированной полноразмерной модели для дальнейшего анализа: нахождения амплитудно-частотных характеристик, освобождения от закреплений и ассемблирования с другими моделями, является предпочтительным в силу того, что она более полно описывает связи между конечными элементами.

3.4. Освобождение математических моделей от наложенных связей

3.4.1. Описание метода

Пусть имеется скорректированная по результатам испытаний закрепленная конечно-элементная (КЭ) модель L некоторой упруго-массовой конструкции. Модель описывается матрицами жесткости \mathbf{K} и масс \mathbf{M} , имеет n степеней свободы и N узлов. Система уравнений собственных колебаний этой модели имеет следующий вид:

$$\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = 0. \quad (3.41)$$

Ставится задача освободить КЭ-модель от закреплений, при условии, что известны инерционные характеристики свободной конструкции, а именно: масса и массовые моменты инерции относительно некоторой точки, например, центра тяжести. Информации об убранных при начальном закреплении модели степенях свободы либо нет, либо она неактуальна, то есть она не позволяет сделать модель свободной. Последнее имеет место быть, например, когда проводится коррекция динамических свойств закрепленной модели по результатам эксперимента.

Для понимания предлагаемого метода представим, что рассматриваемая модель L находится на воображаемой платформе, к которой она прикреплена всеми узлами, которые были зафиксированы. Эта платформа может перемещаться и поворачиваться как жесткое целое. Положение платформы в глобальной неподвижной системе координат будем определять координатами точки C — вектором $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а ориентация в пространстве задается вектором конечного поворота $\tilde{\mathbf{\Omega}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ (рисунок 3.2). Воображаемая платформа в общем случае находится на упругом основании, заданном тремя линейными и тремя крутильными жесткостями.

При ускорении платформы на конструкцию действуют дополнительные силы инерции, обусловленные ускорением каждой точки конструкции за счёт перемещения и поворота платформы, поэтому уравнение движения конструкции (3.41) переписется в следующем виде:

$$\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}}_0) = 0, \quad (3.42)$$

$$\text{где } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \dots \\ \mathbf{R}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0(x_0, y_0, \dots, \omega_3) \\ x_2^0(x_0, y_0, \dots, \omega_3) \\ \dots \\ x_N^0(x_0, y_0, \dots, \omega_3) \end{bmatrix}, \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i,$$

(x_0, y_0, z_0) — линейные смещения платформы,

$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — компоненты вектора конечного поворота Ω ,

\mathbf{M}, \mathbf{K} — матрицы масс и жесткости модели соответственно.

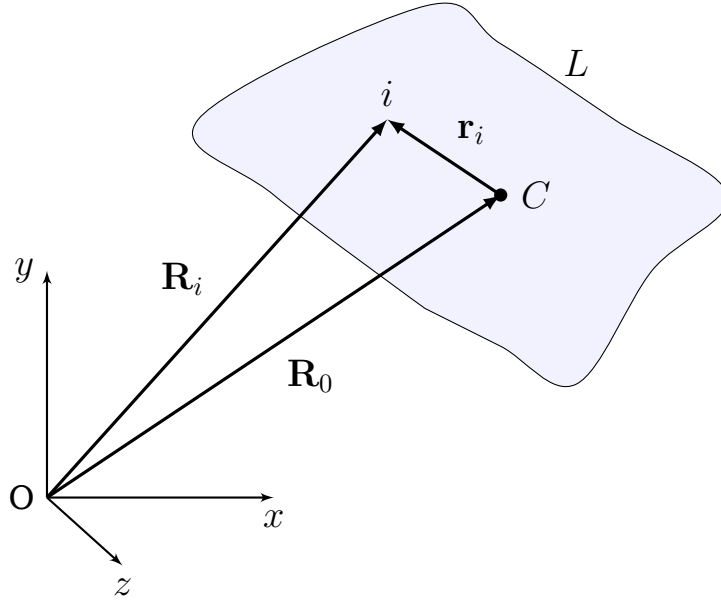


Рисунок 3.2 — Расчетная схема

В случае малых поворотов матрица λ линейна относительно компонент этого вектора и имеет следующий вид:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Каждый узел КЭ-модели L до деформирования имеет координаты (x_i^0, y_i^0, z_i^0) , $i = 1 \dots N$ в своей системе координат, которая необязательно совпадает с системой координат, выбранной выше, тогда точка C в этой системе имеет координаты (x_0, y_0, z_0) . Так как рассматриваются малые перемещения, то зависимость $\mathbf{r}_i =$

$\mathbf{r}_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — линейная относительно компонент вектора конечного поворота:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \lambda \mathbf{r}_i^0 = \begin{pmatrix} 1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_i^0 - x_0 \\ y_i^0 - y_0 \\ z_i^0 - z_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta x_i^0 - \Delta z_i^0 \omega_2 + \Delta y_i^0 \omega_3 \\ \Delta z_i^0 \omega_1 + y_i^0 - \Delta x_i^0 \omega_3 \\ -\Delta y_i^0 \omega_1 + \Delta x_i^0 \omega_2 + \Delta z_i^0 \end{bmatrix}, \quad i = 1 \dots N. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Для определенности пусть каждый узел описывается тремя линейными и тремя угловыми степенями свободы (хотя в общем случае это может быть не так), тогда выражение (3.42) с учетом (3.44) перепишется в следующем виде:

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \ddot{x}_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 - \Delta z_1^0 \ddot{\omega}_2 + \Delta y_1^0 \ddot{\omega}_3 \\ \ddot{y}_0 + \Delta z_1^0 \ddot{\omega}_1 - \Delta x_1^0 \ddot{\omega}_3 \\ \ddot{z}_0 - \Delta y_1^0 \ddot{\omega}_1 + \Delta x_1^0 \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_1 \\ \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_3 \\ \dots \\ \ddot{z}_0 - \Delta y_N^0 \ddot{\omega}_1 + \Delta x_N^0 \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_1 \\ \ddot{\omega}_2 \\ \ddot{\omega}_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.45)$$

Перепишем это уравнение в матричном виде:

$$\widehat{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{x}}} = 0, \quad (3.46)$$

где

$$\widehat{\mathbf{K}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} k_{1,1} & \dots & k_{1,n} & 0 & \dots & 0 \\ k_{2,1} & \dots & k_{2,n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,1} & \dots & k_{n,n} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right),$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ x_0 \\ y_0 \\ \dots \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{M}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} & \sum_{j=1}^N m_{1,\mathbf{G}_{j,1}} & \dots & \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} m_{1,\mathbf{G}_{j,6}} + \\ +\Delta x_j^0 m_{1,\mathbf{G}_{j,2}} - \\ -\Delta y_j^0 m_{1,\mathbf{G}_{j,1}} \end{pmatrix} \\ m_{2,1} & \dots & m_{2,n} & \sum_{j=1}^N m_{2,\mathbf{G}_{j,1}} & \dots & \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} m_{2,\mathbf{G}_{j,6}} + \\ +\Delta x_j^0 m_{2,\mathbf{G}_{j,2}} - \\ -\Delta y_j^0 m_{2,\mathbf{G}_{j,1}} \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} & \sum_{j=1}^N m_{n,\mathbf{G}_{j,1}} & \dots & \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} m_{n,\mathbf{G}_{j,6}} + \\ +\Delta x_j^0 m_{n,\mathbf{G}_{j,2}} - \\ -\Delta y_j^0 m_{n,\mathbf{G}_{j,1}} \end{pmatrix} \end{array} \right).$$

При этом матрица \mathbf{G}_{ji} содержит порядковый номер уравнения, соответствующего i -ой степени свободы j -го узла.

Составим уравнения движения платформы. Пусть $c_{1,2,3}$, $\kappa_{1,2,3}$ — линейные и угловые жесткости крепления платформы. Если платформа свободна, эти жесткости равны нулю. Пусть m_0 — общая масса платформы и конечно-элементной модели L , а $J_{1,2,3}$ — соответствующие массовые моменты инерции. Тогда можно записать 6 уравнений движения платформы с КЭ-моделью как жесткого целого:

$$\kappa \cdot \xi + \mu \cdot \ddot{\xi} + \sum m \cdot \ddot{\mathbf{x}} = 0, \quad (3.47)$$

где

$$\xi = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Уравнения (3.46) и (3.47) образуют новую систему уравнений движения с симметричными матрицами размером $n + 6$:

$$\bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{x}}} = 0, \quad (3.50)$$

или

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & (\sum m)^T \\ \sum m & \mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.51)$$

Система (3.51) описывает собственные колебания конечно-элементной модели L вместе с платформой. Если модель получена путем закрепления свободной модели \bar{L} , жесткости крепления платформы равны нулю, масса и моменты инерции платформы соответствуют незакрепленной модели, тогда частоты, найденные из решения проблемы (3.51) будут близки к частотам колебаний свободной модели \bar{L} . При этом формы собственных колебаний, найденные из (3.51), также будут близки к формам свободной модели, если их привести к одной системе координат с учетом относительного движения.

Найдем абсолютные координаты согласно (3.44):

$$\tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \\ \dots \\ \tilde{x}_{n-3} \\ \tilde{x}_{n-2} \\ \tilde{x}_{n-1} \\ \tilde{x}_n \\ x_0 \\ y_0 \\ \dots \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \dots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \\ y_0 \\ \dots \\ \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 - \Delta z_1^0 \omega_2 + \Delta y_1^0 \omega_3 \\ y_0 + \Delta z_1^0 \omega_1 - \Delta x_1^0 \omega_3 \\ z_0 - \Delta y_1^0 \omega_1 + \Delta x_1^0 \omega_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \dots \\ z_0 - \Delta y_N^0 \omega_1 + \Delta x_N^0 \omega_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выразим локальные координаты $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\bar{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Подставим (3.53) в (3.51):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{K}} \cdot (\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) + \widehat{\mathbf{M}} \cdot (\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} - \ddot{\bar{\mathbf{x}}}_0) &= 0, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & (\sum m)^\top \\ \sum m & \mu \end{pmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Так как

$$\left(\sum m \right)^\top \ddot{\xi} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_0, \quad \left(\sum k \right)^\top \xi = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_0, \quad (3.55)$$

тогда

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & -(\sum k)^\top \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \sum m & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \sum m \ddot{\mathbf{x}}_0 \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.56)$$

Введем обозначение:

$$\sum m \cdot \ddot{\mathbf{x}}_0 = \sum \sum m \cdot \ddot{\xi}. \quad (3.57)$$

Тогда последняя система уравнений переписывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & -(\sum k)^\top \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \sum \mu & \mu - \sum \sum m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.58)$$

Заметим, что $\sum k = F_s(\mathbf{K}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$, $\sum \sum m = F_m(F_s(\mathbf{M})) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$. Эти матричные функции равны:

$$F_m(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N a_{1,\mathbf{G}_{i,1}} \dots \sum_{i=1}^N a_{1,\mathbf{G}_{i,3}} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{1,\mathbf{G}_{i,4}}^+ \\ +\Delta y_i^0 a_{1,\mathbf{G}_{i,3}}^- \\ -\Delta z_i^0 a_{1,\mathbf{G}_{i,2}} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{1,\mathbf{G}_{i,6}}^+ \\ +\Delta x_i^0 a_{1,\mathbf{G}_{i,2}}^- \\ -\Delta y_i^0 a_{1,\mathbf{G}_{i,1}} \end{pmatrix} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^N a_{6,\mathbf{G}_{i,1}} \dots \sum_{i=1}^N a_{6,\mathbf{G}_{i,3}} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{6,\mathbf{G}_{i,4}}^+ \\ +\Delta y_i^0 a_{6,\mathbf{G}_{i,3}}^- \\ -\Delta z_i^0 a_{6,\mathbf{G}_{i,2}} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{6,\mathbf{G}_{i,6}}^+ \\ +\Delta x_i^0 a_{6,\mathbf{G}_{i,2}}^- \\ -\Delta y_i^0 a_{6,\mathbf{G}_{i,1}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

$$F_s(\mathbf{A})^\top = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{G}_{i,1},1} \dots \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{G}_{i,3},1} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{\mathbf{G}_{i,4},1}^+ \\ +\Delta y_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,3},1}^- \\ -\Delta z_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,2},1} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{\mathbf{G}_{i,6},1}^+ \\ +\Delta x_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,2},1}^- \\ -\Delta y_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,1},1} \end{pmatrix} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{G}_{i,1},n} \dots \sum_{i=1}^N a_{\mathbf{G}_{i,3},n} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{\mathbf{G}_{i,4},n}^+ \\ +\Delta y_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,3},n}^- \\ -\Delta z_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,2},n} \end{pmatrix} \dots \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} a_{\mathbf{G}_{i,6},n}^+ \\ +\Delta x_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,2},n}^- \\ -\Delta y_i^0 a_{\mathbf{G}_{i,1},n} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

где $a_{i,j}$ — элементы матрицы \mathbf{A} , $(\Delta x_i^0, \Delta y_i^0, \Delta z_i^0)$ — компоненты радиус-вектора от центра тяжести до i -го узла недеформированной конструкции.

Для дальнейшего преобразования (3.58) в симметричный вид, воспользуемся линейными комбинациями первых строк этой системы. В соответствии с таблицей \mathbf{G} , для приведения матрицы масс в симметричный вид, получим:

$$\sum_{\mathbf{G}} \left[\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}} - \left(\sum k \right)^T \xi + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} = 0 \right], \quad (3.61)$$

$$\sum k \cdot \tilde{\mathbf{x}} - \sum \sum k \cdot \xi + \sum m \cdot \ddot{\mathbf{x}} = 0. \quad (3.62)$$

Тогда из (3.58) получим итоговую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & -(\sum k)^T \\ -(\sum k)^T & \kappa + \sum \sum k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mu - \sum \sum m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.63)$$

Необходимо отметить, что точка C необязательно должна располагаться в центре масс, она может находиться в любом месте конструкции. Пусть точка C находится на расстоянии $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ от центра тяжести, тогда матрица μ может быть вычислена следующим образом:

$$\mu = m_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta_z & \Delta_y \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta_z & 0 & -\Delta_x \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_y & -\Delta_x & 0 \\ 0 & -\Delta_z & \Delta_y & \frac{J_1}{m} + (\Delta^2 - \Delta_x^2) & -\Delta_x \Delta_y & -\Delta_x \Delta_z \\ \Delta_z & 0 & -\Delta_x & -\Delta_x \Delta_y & \frac{J_2}{m} + (\Delta^2 - \Delta_y^2) & -\Delta_y \Delta_z \\ \Delta_y & -\Delta_x & 0 & -\Delta_x \Delta_z & -\Delta_y \Delta_z & \frac{J_3}{m} + (\Delta^2 - \Delta_z^2) \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

где $\Delta^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2$.

Положение точки C влияет на относительные координаты каждого узла $(\Delta x_i^0, \Delta y_i^0, \Delta z_i^0)$ и матрицы κ и μ . Более того, модель может быть закреплена не в одной точке, но нужно иметь в виду, что после процедуры освобождения по (3.58) или (3.63) появляется специфическая погрешность, вызванная тем, что мы заменяем множество закрепленных степеней свободы всего шестью степенями свободы вектора ξ , что вносит определенные изменения в деформирование модели, а именно: все закрепленные точки относительно друг друга не деформируются. Другими словами потерянная информация о законах деформирования закрепленных точек не может быть восстановлена, поэтому освобожденная модель будет отличаться от исходной свободной модели.

3.4.2. Тестовые примеры освобождения расчетных моделей

Система масс на пружинках

Уравнения (3.51) и (3.63) могут быть использованы в преобразовании любых расчетных моделей, представленных в виде (3.41). Проиллюстрируем их применение на простейшем примере: колебания двух масс на пружинках (рисунок 3.3).

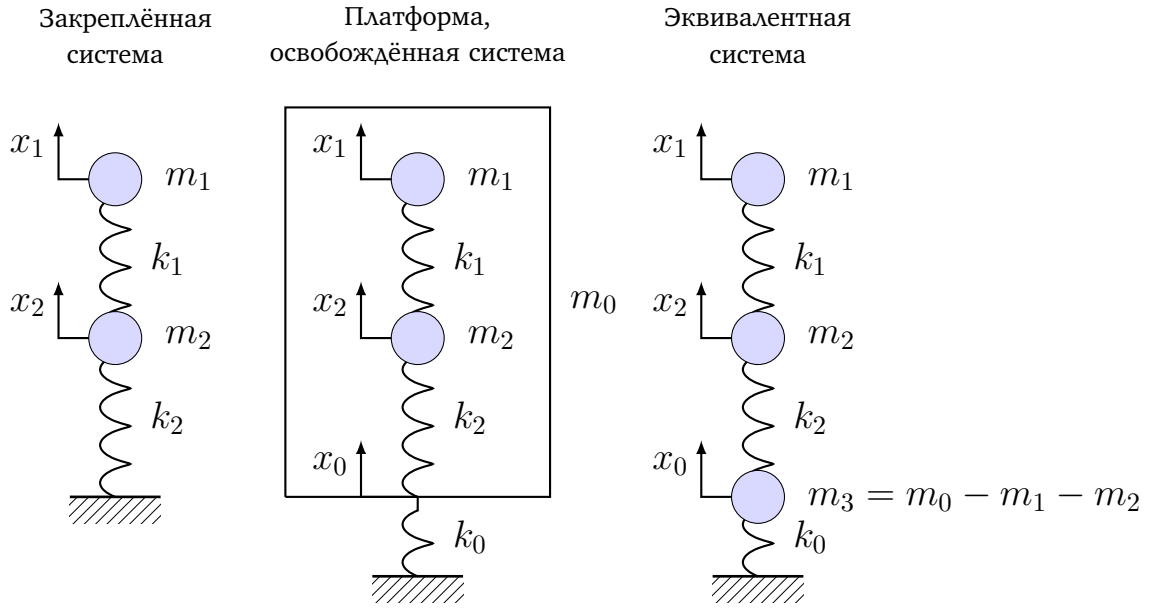


Рисунок 3.3 — Пример преобразования системы масс на пружинках

Система уравнений собственных колебаний «Закреплённой системы» имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.65)$$

Преобразование (3.65) с учетом (3.51) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & m_1 \\ 0 & m_2 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_0 \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.66)$$

Аналогичное преобразование, но с учетом (3.63), даёт такую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_0 + k_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ x_0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_0 - m_1 - m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{x}}_1 \\ \ddot{\tilde{x}}_2 \\ \ddot{x}_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.67)$$

Система уравнений, описывающих собственные колебания «Эквивалентной системы», имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_0 + k_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{x}}_1 \\ \ddot{\tilde{x}}_2 \\ \ddot{\tilde{x}}_3 \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.68)$$

Очевидно, что так как $\tilde{x}_3 = x_0$, $m_3 = m_0 - m_1 - m_2$, то система уравнений (3.68) совпадает с системой уравнений (3.67). Кроме того, следует отметить, что частоты собственных колебаний, найденные по уравнениям (3.66), совпадают с частотами по (3.67) и (3.68). При этом собственные формы колебаний, приведенные к глобальной системе координат, совпадают с соответствующими формами, определенными по (3.67) и (3.68). Если в (3.66) – (3.68) положить $k_0 = 0$, получим уравнения колебаний свободной системы.

Балочная модель самолёта

На рисунке 3.4 представлена условная балочная модель самолёта, стоящего на трёх стойках шасси.

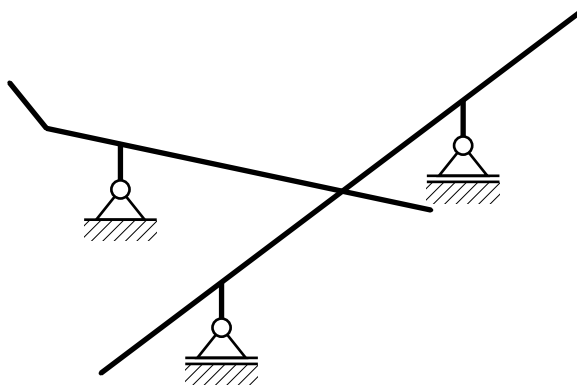


Рисунок 3.4 — Балочная модель самолёта

Балки, имитирующие шасси, закреплены следующим образом: для задней опоры запрещены перемещения в трех направлениях и по углу рыскания самолёта, а для двух передних — только перемещения по вертикали.

В таблице 1 приведены первые 15 частот собственных колебаний закрепленной модели, свободной модели и модели, освобождённой от закреплений по предлагаемому методу. В последней колонке показана разница в процентах между частотами свободной и освобождённой модели. Из представленных результатов следует, что частоты практически совпали между собой. Анализ форм колебаний освобождённой модели показал, что они также близки к формам колебаний свободной модели.

Таблица 1 — Результаты применения метода освобождения к балочной модели самолета

№ тона	Частоты собственных колебаний, Гц			Разница, %
	Закрепленная	Свободная	Освобождённая	
1	1.85662	0.00000	0.00003	—
2	4.96444	0.00009	0.00006	
3	6.17794	0.00010	0.00008	
4	6.86614	0.00035	0.00010	
5	13.10533	0.00038	0.00012	
6	17.68520	0.00042	0.00014	
7	20.03209	6.45900	6.45896	-0.00053
8	21.06621	6.46460	6.46460	-0.00007
9	23.86814	6.98969	6.98972	0.00042
10	30.36936	21.27473	21.27574	0.00475
11	47.42829	22.40967	22.40978	0.00047
12	53.07032	25.32626	25.32857	0.00913
13	67.18707	33.51995	33.51972	-0.00069
14	71.56714	34.78906	34.78965	0.00170
15	74.38522	36.34213	36.36089	0.05160

3.5. Определение модальных характеристик крупногабаритных конструкций

3.6. Выводы по главе 3

Глава 4. Решение практических задач верификации расчетных моделей аэрокосмических конструкций

4.1. Коррекция расчетной модели динамически подобной модели самолета Ту-204

4.2. Верификация имитационной модели каркаса зонтичной антенны космического аппарата

4.3. Коррекция расчетной модели отъемной части крыла изделия С-70 «Охотник»

4.4. Выводы по главе 4

Основные выводы и заключение

Список литературы

1. Bathe K., Wilson E. Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1973. — Vol. 6. — P. 213–226.
2. Лакиза П. А., Красноруцкий Д. А. Метод коррекции математических моделей, полученных путем конечно-элементного моделирования // Наука. Технологии. Иновации. — 2019. — Т. 9. — С. 57–59.
3. Разработка расчетно-экспериментального метода модального анализа крупногабаритных трансформируемых космических конструкций / Бернс В. А., Левин В. Е., Красноруцкий Д. А., Маринин Д. А., Жуков Е. П., Маленкова В. В. и Лакиза П. А. // Научный журнал «Космические аппараты и технологии». — 2018. — С. 125–133. — Режим доступа: <http://www.journal-niss.ru/journal/archive/25/paper2.pdf> (дата обращения: 1.10.2022).