

Qiskit Fall Fest 2025

# 量子フーリエ変換 量子位相推定

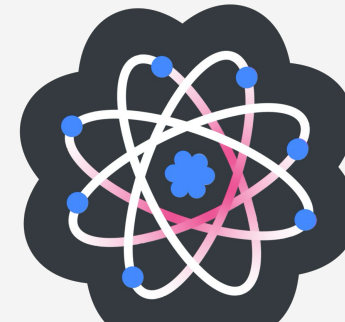
今村宗一郎

理学系研究科物理学専攻  
藤堂研M2

imamura-soichiro524@g.ecc.u-tokyo.ac.jp  
<https://soichiro524.github.io/ja/about>



Century of Quantum



## 前半の講義とこの資料について

この資料は、以下のスライドに発展的な補足を付け加えたものです。

[https://github.com/quantum-tokyo/introduction/blob/main/src/courses/utility-scale-quantum-computing/5\\_quantum-phase-estimation.pdf](https://github.com/quantum-tokyo/introduction/blob/main/src/courses/utility-scale-quantum-computing/5_quantum-phase-estimation.pdf)

まず前半では、量子フーリエ変換(QFT)と量子位相推定(QPE)を扱います。QFTは原理を理解していただけると嬉しいですが、あくまでアルゴリズムの一部として使うと思うので、細かいコーディングまでは触れません。以下のnotebookも少し見ますが、流し見程度になると思います。

<https://github.com/quantum-tokyo/introduction/blob/main/src/courses/utility-scale-quantum-computing/quantum-phase-estimation-ja.ipynb>

ハッカソンに臨むにあたり、QFTやQPEがどのような武器として使えるのか、というところを意識しながら聞いてもらえると良いかと思います。

発展的な補足も付け加えています。すでにQFTやQPEをご存知の方はそちらを見ていただくと面白いかもしれません。

後半にはプロンプトの話をしします。



# 目次

1. 量子位相推定（QPE）の目的
2. 量子フーリエ変換（QFT）
3. 量子位相推定アルゴリズムの実装

p.27以降に発展的な補足を追加しました

# 目次

1. 量子位相推定 (QPE) の目的
2. 量子フーリエ変換 (QFT)
3. 量子位相推定アルゴリズムの実装

# 量子位相推定(Quantum Phase Estimation)の目的

量子位相推定 (QPE) は、ユニタリ行列  $U$  とその固有状態  $|\psi\rangle$  に対し、固有値に紐づいた実数値  $\theta$  を求めるアルゴリズムである。

$$U|\psi\rangle = e^{2\pi i\theta} |\psi\rangle$$

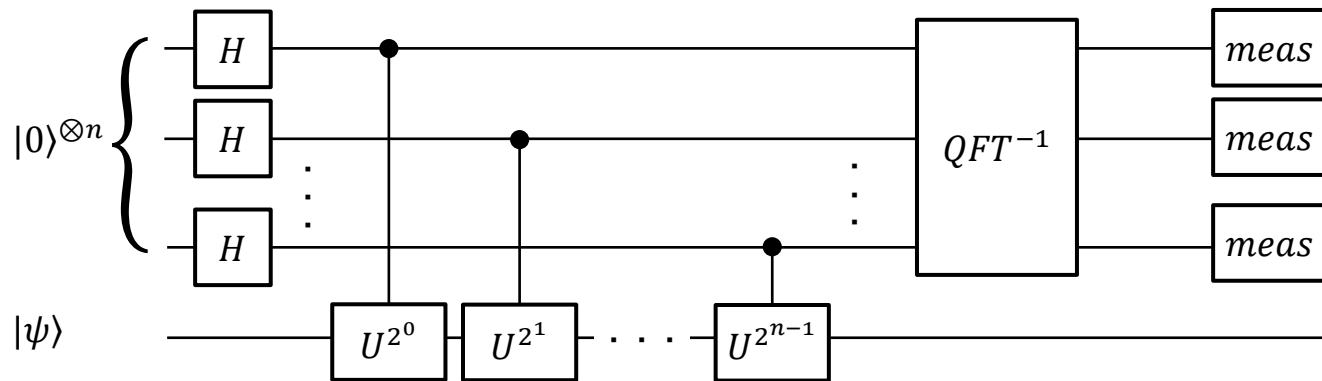
$U$ はユニタリ行列  $\rightarrow$  その固有値は絶対値1の複素数

## 応用

- ハミルトニアンエネルギー固有値と固有状態の数値計算
- Shorのアルゴリズム：QPEと根本は同じ！

# QPEの全体像

位相推定アルゴリズムは、 $|\psi\rangle$ で初期化したレジスタのほかに $n$ 量子ビットの計算レジスタを用意し、以下の量子回路として実装する。



1. 計算ビットすべてにアダマールゲートを施す。
2. 制御 $U$ ゲートを $|\psi\rangle$ に施す。
3. 計算ビットに逆QFTを施す。
4. 計算ビットを測定する。

# 目次

1. 量子位相推定 (QPE) の目的
2. 量子フーリエ変換 (QFT)
3. 量子位相推定アルゴリズムの実装

# 量子フーリエ変換(Quantum Fourier Transformation)

量子フーリエ変換 (QFT) は、バイナリ整数の計算基底を離散フーリエ変換のような形式へ変換する量子アルゴリズムである。

$$U_{QFT} |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{2^n}} |k\rangle$$

$n$  ビット整数  $j$  の量子状態  $|j\rangle$  に対するQFT

(古典) 離散フーリエ変換 :  $F(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} e^{2\pi i k \frac{x}{N}} f(x)$

ShorのアルゴリズムやQPEなど、主要なアルゴリズムの重要なサブルーチン  
高速な実装は  $O(n \log n)$  が知られている

➤ 古典は指数時間かかる → 量子計算で指数的加速 (ただし観測できない)




# QFTのテンソル積による表現

$n$  ビット整数  $k$  を、バイナリ表現として  $k = k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0$  (2) と書くとき、 $|j\rangle$  に対しQFTを実行した後の状態はテンソル積表現で書ける。

$$\begin{aligned} U_{QFT}|j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{2^n}} |k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}k_{n-1} + 2^{n-2}k_{n-2} + \dots + 2k_1 + k_0}{2^n}} |k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \bigotimes_{l=0}^{n-1} (e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{k_l \in \{0,1\}} e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}}{2^n}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-2}}{2^n}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^0}{2^n}} |1\rangle) \end{aligned}$$

# QFTのテンソル積による表現


$n$  ビット整数  $k$  を、バイナリ表現として  $k = k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0$  (2) と書くとき、 $|j\rangle$  に対しQFTを実行した後の状態はテンソル積表現で書ける。

$$\begin{aligned} U_{QFT}|j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{2^n}} |k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}k_{n-1} + 2^{n-2}k_{n-2} + \dots + 2k_1 + k_0}{2^n}} |k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \bigotimes_{l=0}^{n-1} (e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{k_l \in \{0,1\}} e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}}{2^n}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-2}}{2^n}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^0}{2^n}} |1\rangle) \end{aligned}$$


kを2進数表現

# QFTのテンソル積による表現

$n$  ビット整数  $k$  を、バイナリ表現として  $k = k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0$  (2) と書くとき、 $|j\rangle$  に対しQFTを実行した後の状態はテンソル積表現で書ける。

$$\begin{aligned} U_{QFT}|j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{2^n}} |k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}k_{n-1} + 2^{n-2}k_{n-2} + \dots + 2k_1 + k_0}{2^n}} |k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \bigotimes_{l=0}^{n-1} (e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{k_l \in \{0,1\}} e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}}{2^n}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-2}}{2^n}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^0}{2^n}} |1\rangle) \end{aligned}$$


$\Sigma$  内の各項を  
テンソル積で表現

# QFTのテンソル積による表現

$n$  ビット整数  $k$  を、バイナリ表現として  $k = k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0$  (2) と書くとき、 $|j\rangle$  に対しQFTを実行した後の状態はテンソル積表現で書ける。

$$\begin{aligned} U_{QFT}|j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{2^n}} |k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}k_{n-1} + 2^{n-2}k_{n-2} + \dots + 2k_1 + k_0}{2^n}} |k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \bigotimes_{l=0}^{n-1} (e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{k_l \in \{0,1\}} e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}}{2^n}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-2}}{2^n}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^0}{2^n}} |1\rangle) \end{aligned}$$

$k_l \in \{0,1\}$ の和の積へ分解

# QFTのテンソル積による表現

$n$  ビット整数  $k$  を、バイナリ表現として  $k = k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0$  (2) と書くとき、 $|j\rangle$  に対しQFTを実行した後の状態はテンソル積表現で書ける。

$$\begin{aligned} U_{QFT}|j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{k}{2^n}} |k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}k_{n-1} + 2^{n-2}k_{n-2} + \dots + 2k_1 + k_0}{2^n}} |k_{n-1}k_{n-2} \dots k_1k_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \bigotimes_{l=0}^{n-1} (e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \bigotimes_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{k_l \in \{0,1\}} e^{2\pi i j \frac{k_l 2^l}{2^n}} |k_l\rangle \right) \quad \text{Σと⊗を展開} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-1}}{2^n}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^{n-2}}{2^n}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i j \frac{2^0}{2^n}} |1\rangle) \end{aligned}$$

# 逆量子フーリエ変換

QFTの実装に対応するユニタリ行列  $U_{QFT}$  に対して、共役転置をとった行列は  $U_{QFT}$  の逆行列となり、これに対応する演算を逆量子フーリエ変換という。

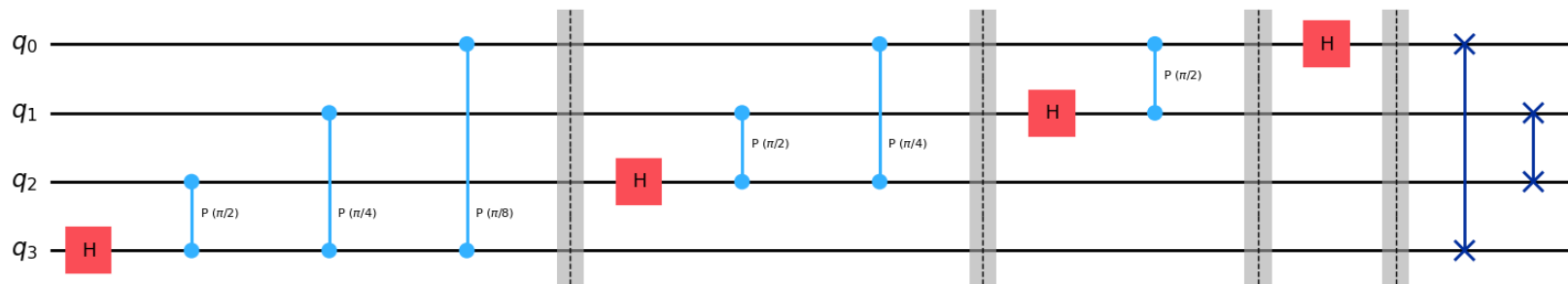
$$U_{QFT} \text{ はユニタリ} \rightarrow U_{QFT}^\dagger = U_{QFT}^{-1} : \text{逆QFT}$$

$$U_{QFT}^{-1}(U_{QFT}|j\rangle) = U_{QFT}^{-1}U_{QFT}|j\rangle = |j\rangle$$

逆QFTはQFTの計算結果をもとに戻す

# QFTの実装

参考に、4量子ビット QFTの量子回路を示す。



4量子ビット QFTの量子回路  
 $n$  量子ビットに対し、 $O(n^2)$ の実装

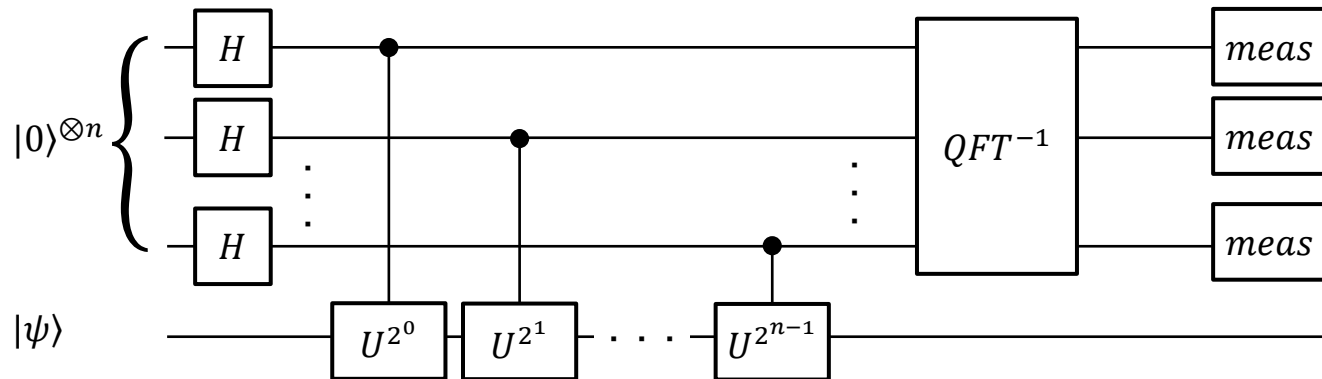
# 目次

1. 量子位相推定 (QPE) の目的
2. 量子フーリエ変換 (QFT)
3. 量子位相推定アルゴリズムの実装



# 位相推定アルゴリズムの実装

位相推定アルゴリズムは以下の手順で行われる。



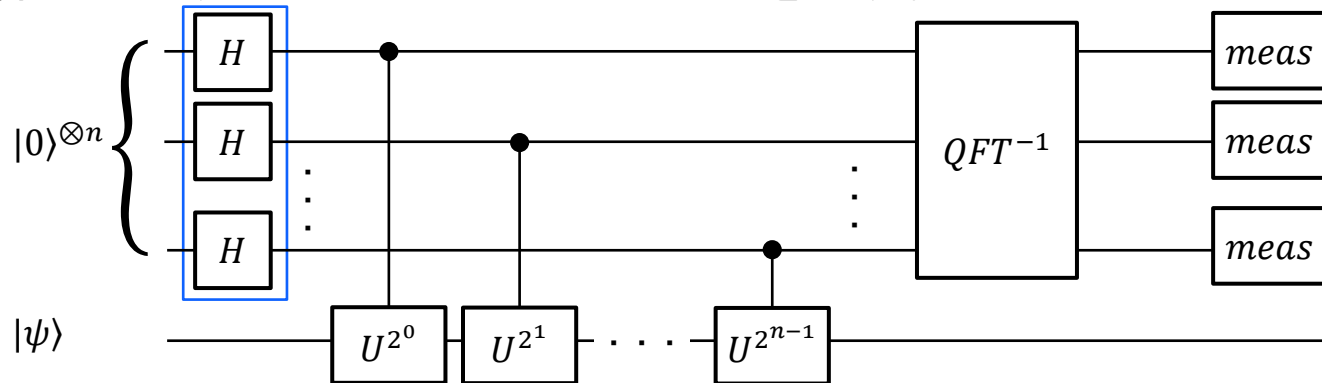
## 【手順】

1. 計算ビットすべてにアダマールゲートを施す。
2. 制御 $U$ ゲートを $|\psi\rangle$ に施す。
3. 計算ビットに逆QFTを施す。
4. 計算ビットを測定する。

$$U|\psi\rangle = e^{2\pi i\theta}|\psi\rangle$$

# 位相推定アルゴリズムの実装

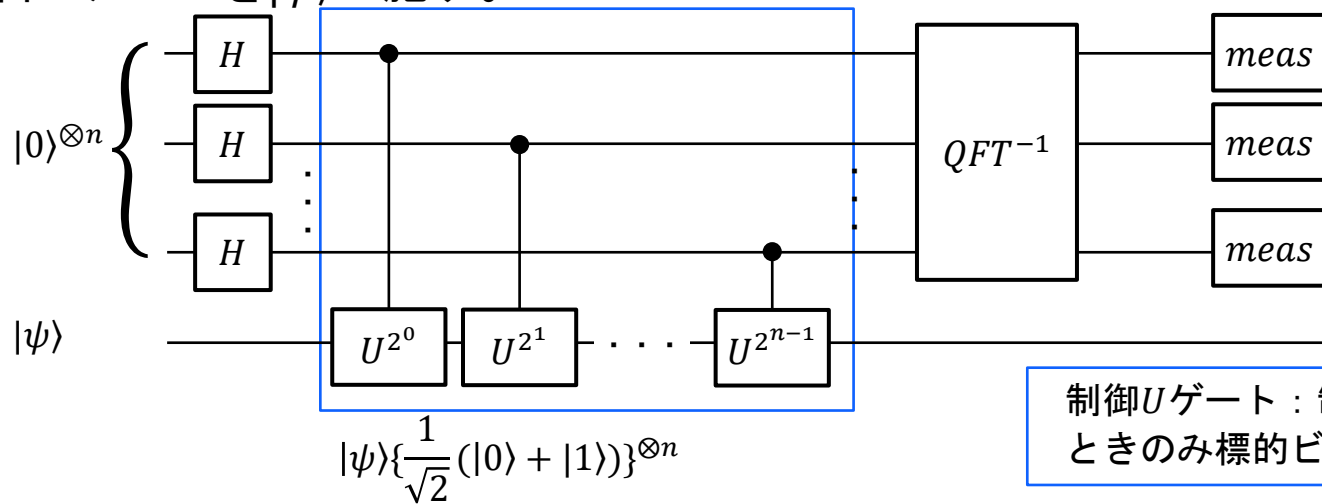
1. 計算ビットすべてにアダマールゲートを施す。



$$\begin{aligned}
 & |\psi\rangle|0\rangle^{\otimes n} \\
 & \rightarrow |\psi\rangle(H|0\rangle)^{\otimes n} = |\psi\rangle\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right\}^{\otimes n} \\
 & = |\psi\rangle\left\{\frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\right\}
 \end{aligned}$$

# 位相推定アルゴリズムの実装

2. 制御 $U$ ゲートを $|\psi\rangle$ に施す。



制御 $U$ ゲート：制御ビットが1の  
ときのみ標的ビットに $U$ をかける

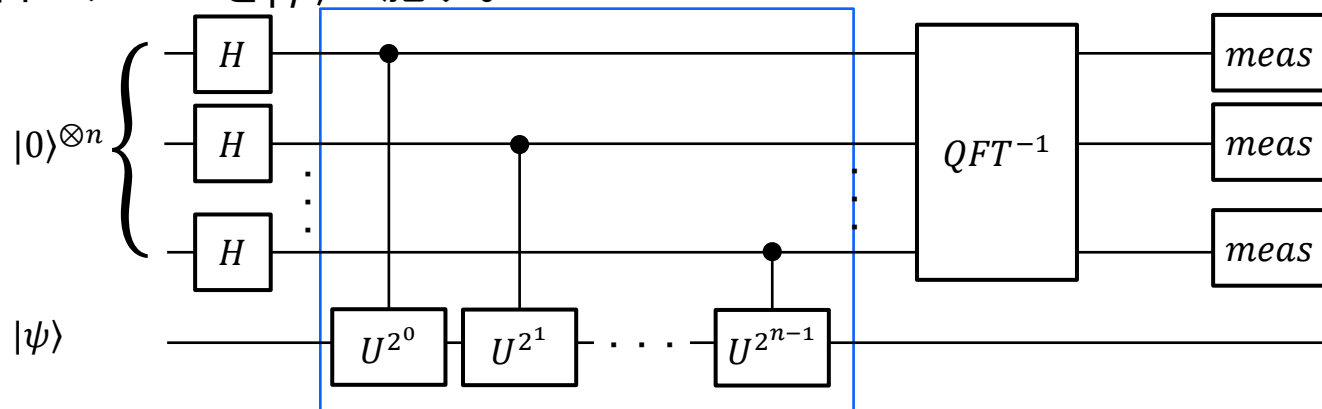
上から  $j$  番目の計算ビットに注目：

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle|0\rangle + |\psi\rangle|1\rangle) \\
 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle|0\rangle + U^{2^j}|\psi\rangle|1\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle|0\rangle + e^{2\pi i \theta \times 2^j}|\psi\rangle|1\rangle) \\
 &= |\psi\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i \theta \times 2^j}|1\rangle)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U|\psi\rangle &= e^{2\pi i \theta}|\psi\rangle \\
 U^2|\psi\rangle &= e^{2\pi i \theta}U|\psi\rangle = e^{2\pi i \theta \times 2}|\psi\rangle \\
 &\vdots \\
 U^k|\psi\rangle &= e^{2\pi i \theta \times k}|\psi\rangle
 \end{aligned}$$

# 位相推定アルゴリズムの実装

2. 制御 $U$ ゲートを $|\psi\rangle$ に施す。



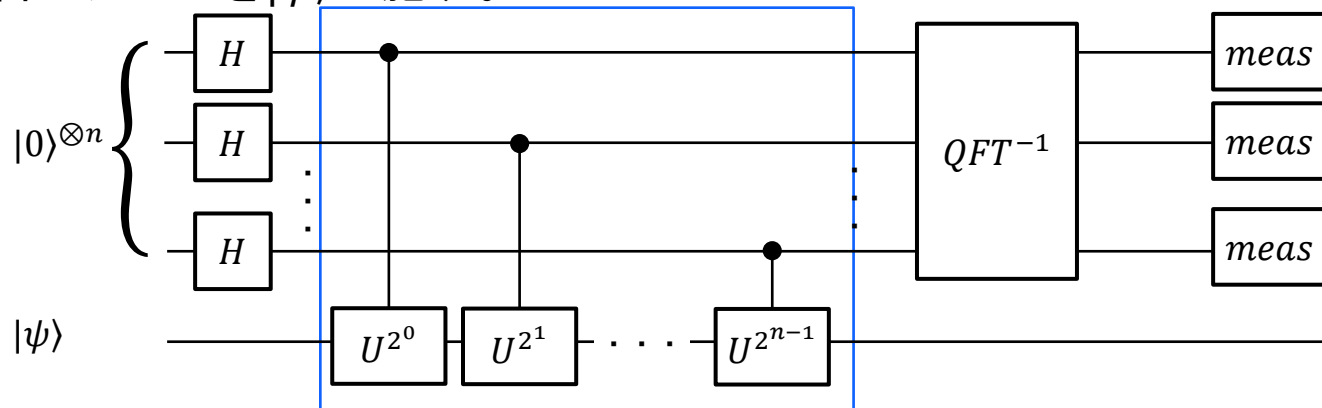
上から  $j$  番目の計算ビットに注目： $|\psi\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{2\pi i \theta \times 2^j} |1\rangle)$

$j = 0, 1, \dots, n-1$  の結果を統合する：

$$|\psi\rangle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i \theta \times 2^{n-1}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \theta \times 2^{n-2}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \theta \times 2^0} |1\rangle) \right\}$$

# 位相推定アルゴリズムの実装

2. 制御 $U$ ゲートを $|\psi\rangle$ に施す。



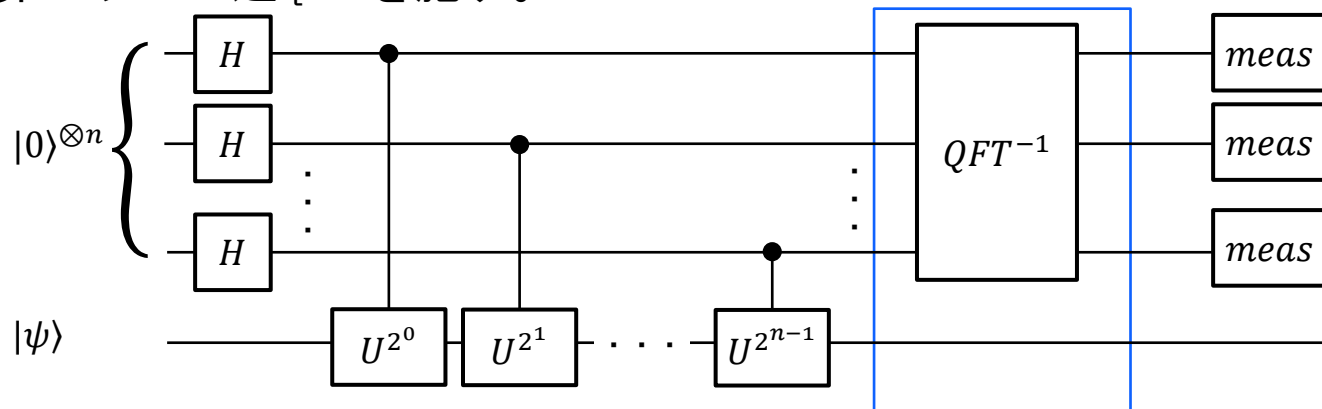
$$|\psi\rangle\left\{\frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle + e^{2\pi i\theta \times 2^{n-1}}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i\theta \times 2^{n-2}}|1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i\theta \times 2^0}|1\rangle)\right\}$$

ここで、 $\varphi = 2^n\theta$ とおくと、 $\theta = \varphi/2^n$ であるから、

$$|\psi\rangle\left\{\frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle + e^{2\pi i\varphi \frac{2^{n-1}}{2^n}}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i\varphi \frac{2^{n-2}}{2^n}}|1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i\varphi \frac{2^0}{2^n}}|1\rangle)\right\}$$

# 位相推定アルゴリズムの実装

## 3. 計算ビットに逆QFTを施す。



$$|\psi\rangle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i \varphi \frac{2^{n-1}}{2^n}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \varphi \frac{2^{n-2}}{2^n}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \varphi \frac{2^0}{2^n}} |1\rangle) \right\}$$

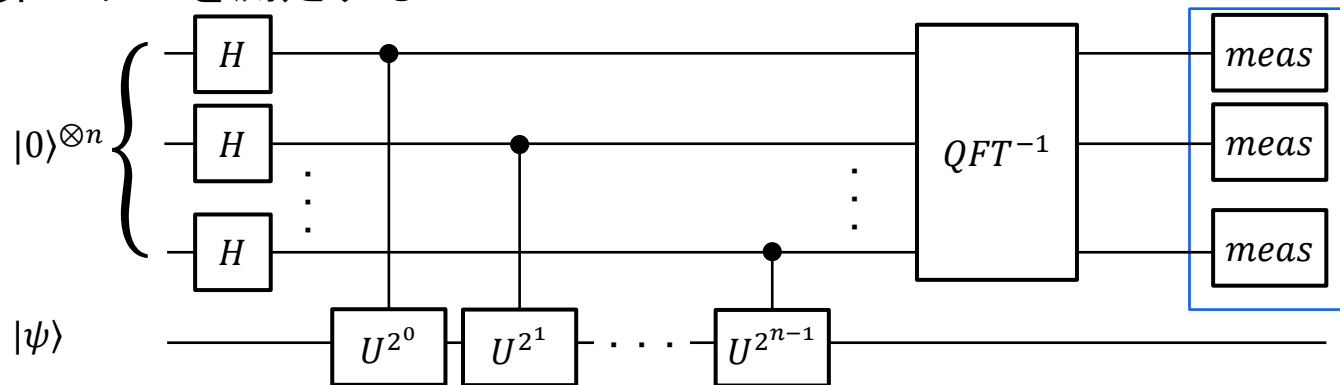
計算ビットの状態は、 $|\varphi\rangle = |2^n \theta\rangle$  に対しQFTをかけたものと同じ！

→QFTの逆の演算をすることで、 $|\varphi\rangle$  を得られる。

$$|\psi\rangle \otimes U_{QFT}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + e^{2\pi i \varphi \frac{2^{n-1}}{2^n}} |1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \varphi \frac{2^{n-2}}{2^n}} |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i \varphi \frac{2^0}{2^n}} |1\rangle) \right\} = |\psi\rangle |2^n \theta\rangle$$

# 位相推定アルゴリズムの実装

## 4. 計算ビットを測定する



$$|\psi\rangle|2^n\theta\rangle$$

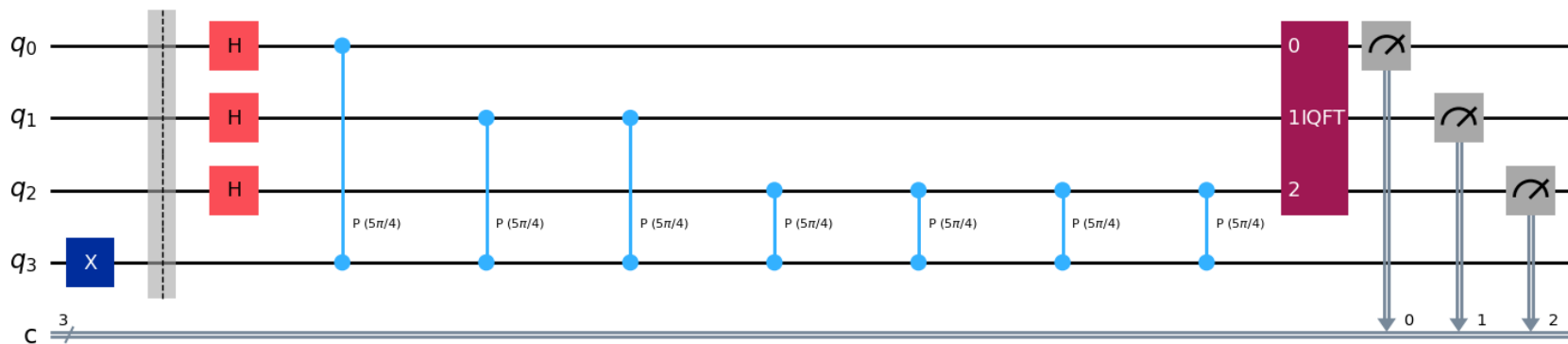
計算ビットを測定し、 $2^n\theta$  を得る。

→測定された値を  $2^n$  で割ることで、 $\theta$  (の近似値) を得る！

# 位相推定アルゴリズムの実装

Qiskitを用いてQPEの実験をしてみよう。わかりやすく  $P$  ゲートを用いる。

$$P(\lambda)|0\rangle = |0\rangle \rightarrow \theta = 0$$
$$P(\lambda)|1\rangle = e^{i\lambda}|1\rangle \rightarrow \theta = \frac{\lambda}{2\pi}$$

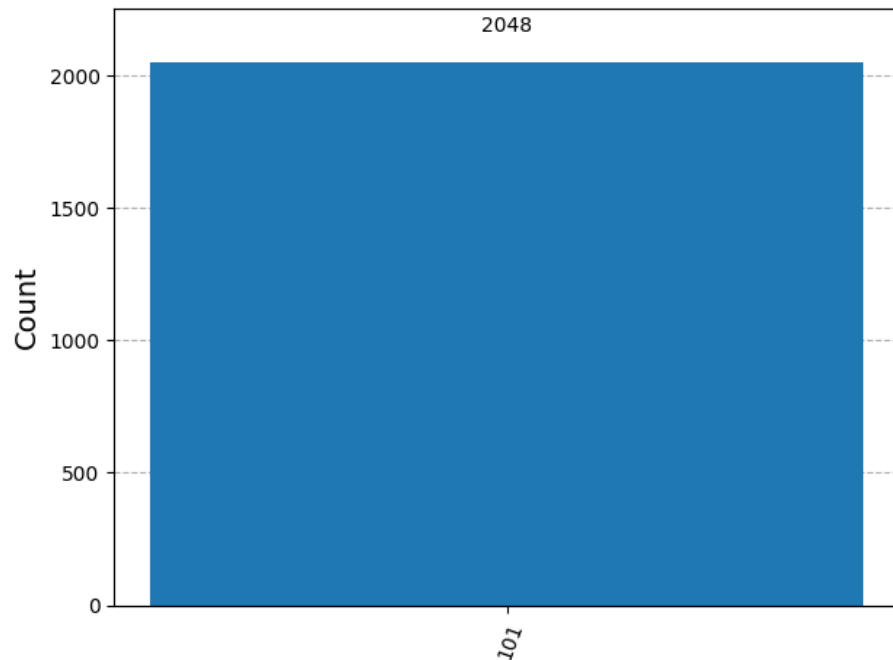


$$\lambda = \frac{5}{4}\pi \rightarrow \theta = \frac{5}{8} \quad |\psi\rangle = |1\rangle \text{ の実装}$$



# 位相推定アルゴリズムの実装

前ページの量子回路の測定結果は全て5であり、位相推定の結果として  $\theta = 5/8$  を得る。



シミュレータでの実験結果

$$\text{測定結果 : } 5 \rightarrow \theta = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

# まとめ

量子位相推定 (QPE) は、 $U|\psi\rangle = e^{2\pi i\theta}|\psi\rangle$  を満たす実数  $\theta$  を求めるアルゴリズムである。

- $U^{2^j}$  ゲートが高速に実装できるとき、多項式時間の計算量
- 逆QFTにより、位相の情報を計算基底として取り出し、一度の測定で解を得る
  - Shorのアルゴリズムなどでも用いられる方法
  - 主要なアルゴリズムの量子超越のカギになると期待

# 固有位相が2進数展開からずれているとき

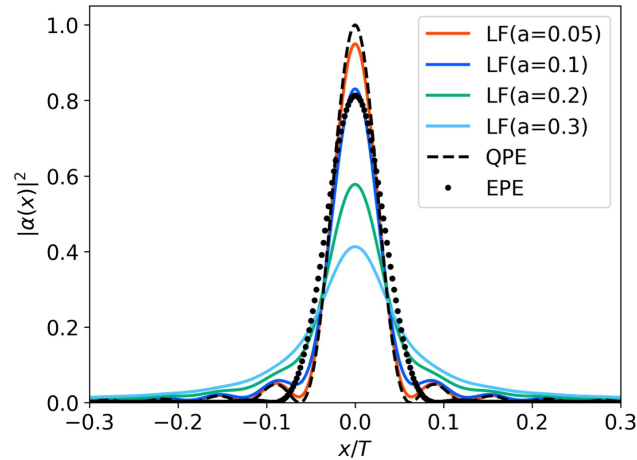


FIG. 8: Comparison of the input state of QPE. Eqs. (A3) and (A7) are denoted as QPE and EPE, respectively. Eq. (A14) is plotted with several decay rates,  $a = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ .

$$|\psi_{\text{in}}^{\text{EPF}}\rangle = \sqrt{\frac{2}{N_q}} \sum_{\tau=0}^{N_q-1} \sin \frac{\pi(\tau + 1/2)}{N_q} |\tau\rangle_{n_q}. \quad (\text{A5})$$

<https://arxiv.org/pdf/2505.08612>

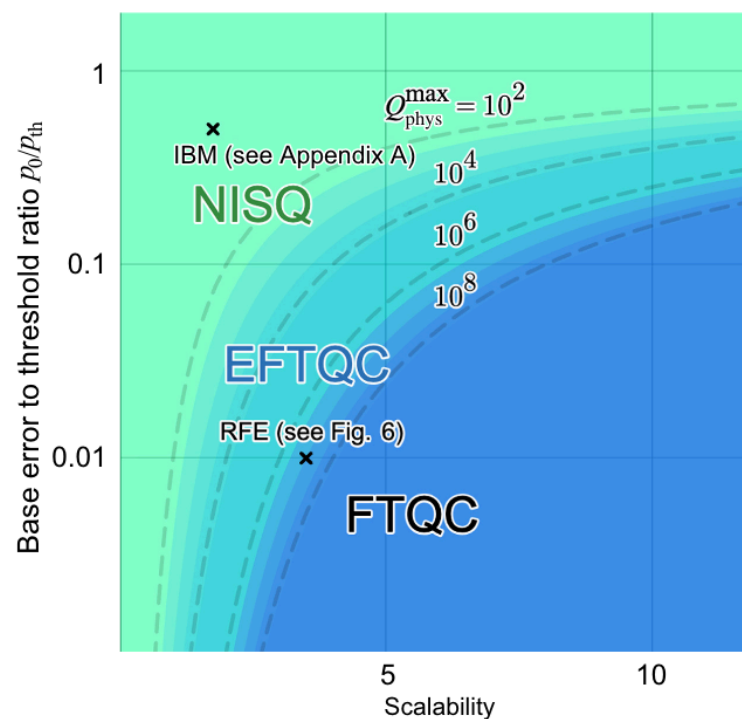
求めたい固有値が2進数展開からずれている時に、通常のQPEだと、真の値(図中の $x=0$ )以外のところにも、確率のピークができてしまう。これは精度を求める際に問題になることがある。

通常のQPEでは、ancilla qubitにはアダマールゲートによって均等重ね合わせ状態を用意するが、左下のA5式のような状態に変更することで、真の値を中心とする場所以外のピークをなくすることができる(その代わり幅は少し広がってしまう)。Entangled Phase Estimation (EPE) と呼ばれるテクニックである。

[こちらの論文](#)のAppendix Aで議論されている。

# Early-FTQC

- NISQ  $\longleftrightarrow$  Early-FTQC  $\longleftrightarrow$  FTQC
- 量子ビット数や量子回路の深さに制限がある



Katabarwa et al. (2024)

# Quantum Phase Estimation (QPE)

- ユニタリ演算子の固有値を求める

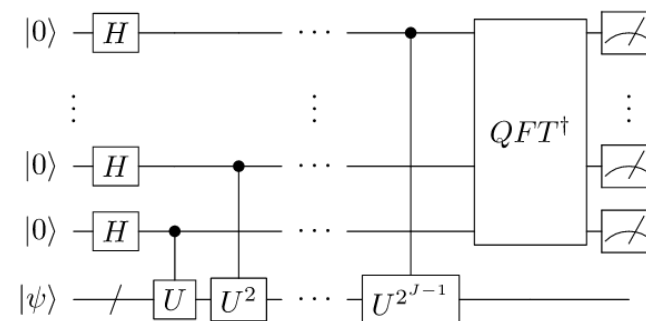
- $U|\psi\rangle = e^{i\phi}|\psi\rangle$
- e.g.) もし  $U = e^{-iHt}$  かつ  $|\psi\rangle$  が  $H$  の基底状態なら、QPEで基底エネルギーが求まる.

- 手続き

- 位相をバイナリに展開  $\phi = (2\pi)0.j_1j_2\dots j_n$  ( $j_i = 0,1$ )
- 測定前のancilla qubit (補助系) の量子状態:  $|j_1j_2\dots j_n\rangle \leftarrow$  1回の測定で区別可能

- Problems

- $k$  ビットの精度で読み出すためには  $k$ -qubit のancillaが必要
  - 1 qubitだけにしたい!



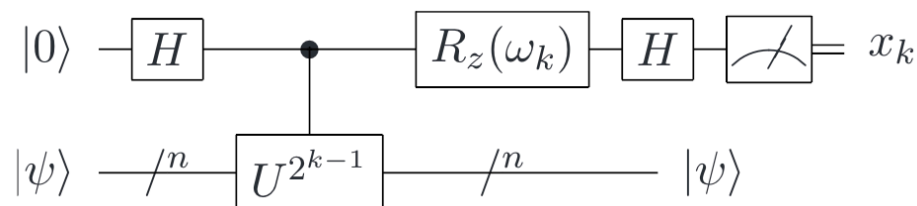
# 1. Iterative Phase Estimation (IPE)

Dobšíček et al. (2007)

**Idea:** 位相をバイナリに展開して末尾から1ビットずつ決める

$$U|\psi\rangle = e^{i2\pi\phi}|\psi\rangle, \phi = \sum_{j=1}^m \phi_j 2^{-j} \quad (\phi_j = 0,1)$$

1. ( $k = m$ )  $\omega_m = 0$  とする



測定前の状態:  $\frac{1}{2}\{(1 + e^{i2^k\pi\phi} |0\rangle) + (1 - e^{i2^k\pi\phi} |1\rangle)\} \otimes |\psi\rangle$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(x_m = 0) &= \cos^2 \left( \pi \sum_{j=1}^m \phi_j 2^{(m-1)-j} \right) = \cos^2(\pi\phi_m/2) \leftarrow \phi_m \text{ を1回の測定で決定可能} \\ &= \pi\phi_1 2^{m-2} + \pi\phi_2 2^{m-3} + \dots + \pi\phi_{m-1} 2^0 + \pi\phi_m 2^{-1}, \cos^2(\pi + \theta) = \cos^2(\theta) \end{aligned}$$

# 1. Iterative Phase Estimation (IPE)

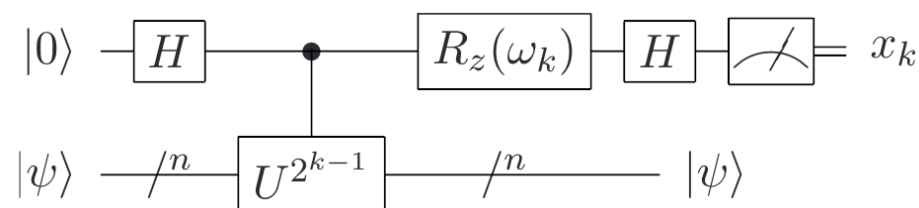
Dobšíček et al. (2007)

**Idea:** 位相をバイナリに展開して末尾から1ビットずつ決める

2.  $\phi_{k+1}, \dots, \phi_m$  が既知の時、

$$\omega_k = -2\pi \sum_{j=k+1}^m \phi_j 2^{k-1-j} \text{ とする}$$

測定前の状態:  $\frac{1}{2} \{ (e^{-i\omega_k/2} + e^{i(\omega_k/2+2^k\pi\phi)} |0\rangle) + (e^{-i\omega_k/2} - e^{i(\omega_k/2+2^k\pi\phi)} |1\rangle) \} \otimes |\psi\rangle$



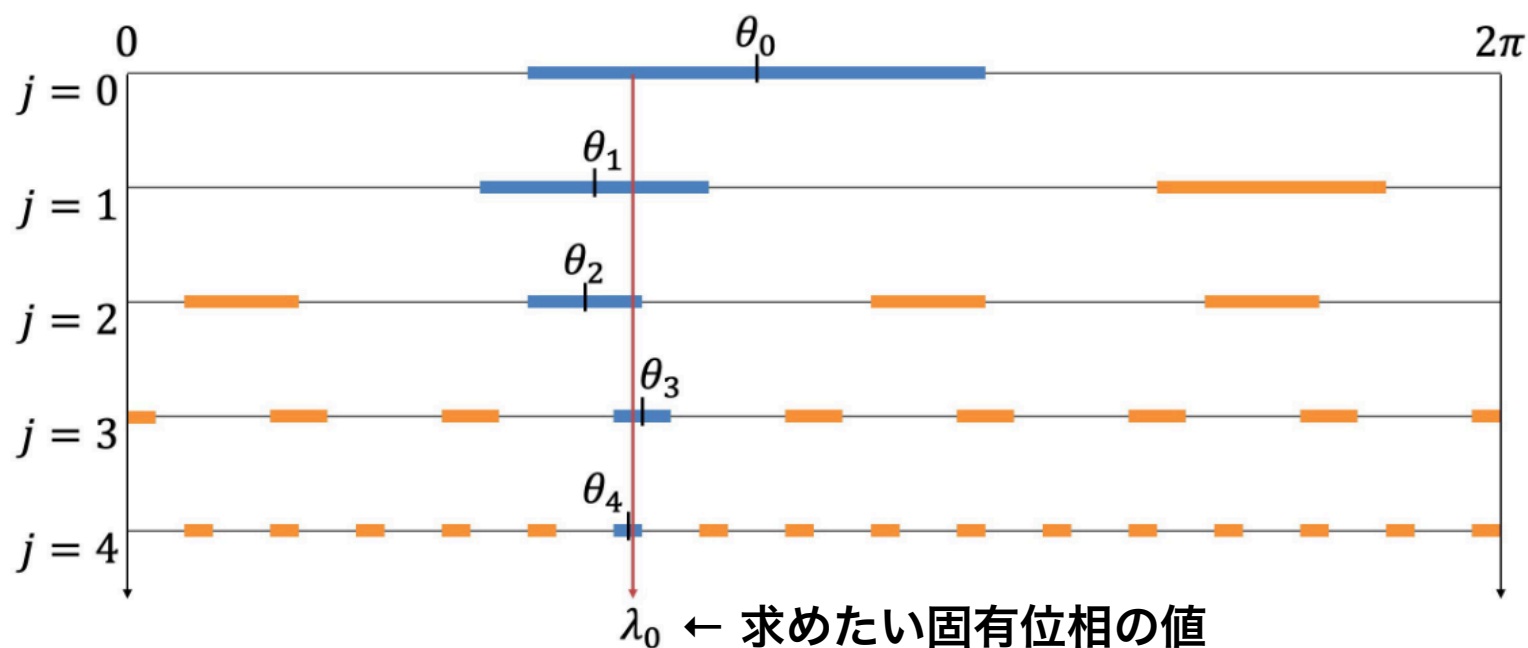
$$P(x_k = 0) = \cos^2 \left( \pi \sum_{j=1}^k \phi_j 2^{(k-1)-j} \right) = \cos^2(\pi \phi_k / 2) \leftarrow \phi_k \text{ を1回の測定で決定可能}$$

$$= \pi \phi_1 2^{k-2} + \pi \phi_2 2^{k-3} + \dots + \pi \phi_{k-1}^4 2^0 + \pi \phi_k 2^{-1}, \cos^2(\pi + \theta) = \cos^2(\theta)$$

## 2. Robust Phase Estimation (RPE)

Ni et al. (2023)

**Idea:** 求めたい値が存在する範囲を半分ずつに絞っていく





# 2. Robust Phase Estimation (RPE)

Ni et al. (2023)

---

**Algorithm 1** An adapted version of RPE in [2]

---

**Input:**  $\epsilon$ : target accuracy,  $\eta$ : upper bound of the failure probability,  $\delta$ : upper bound for the noise in the initial state  $|\psi\rangle$ .

Let  $J = \lceil \log_2(\epsilon^{-1}) \rceil$  and calculate  $N_s$  with the values of  $\epsilon$ ,  $\eta$  and  $\delta$  according to (5).

$\theta_{-1} = 0$ .

**for**  $j = 0, 1, \dots, J$  **do**

Run the circuit in Figure 1(b) for the real part and imaginary part of  $\langle \psi | U^{2^j} | \psi \rangle$  for  $\frac{N_s}{2}$  times each to generate  $Z_j$  as an estimation of  $\langle \psi | U^{2^j} | \psi \rangle$ .

Define a candidate set  $S_j = \left\{ \frac{2k\pi + \arg Z_j}{2^j} \right\}_{k=0, \dots, 2^j-1}$ .

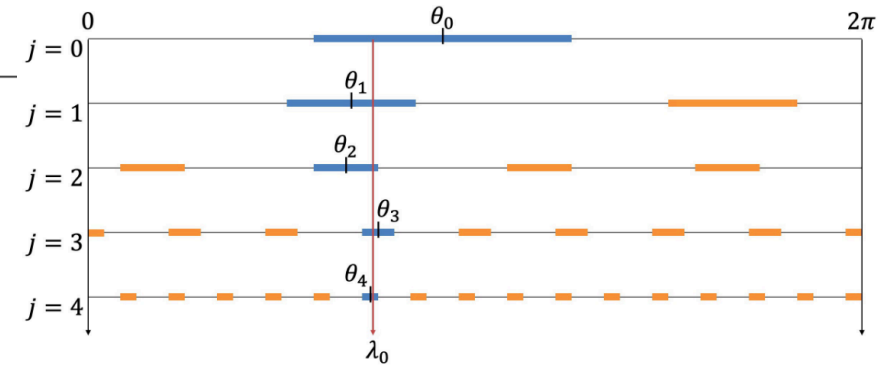
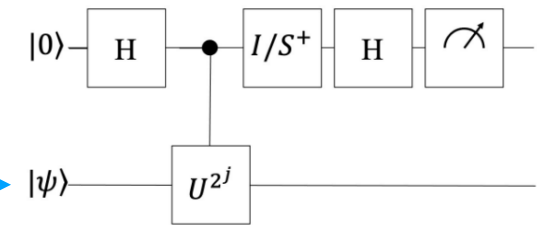
$\theta_j = \arg \min_{\theta \in S_j} |\theta - \theta_{j-1}|_{2\pi}$ . ← オレンジの候補から青い領域を選ぶ

**end for**

**Output:**  $\theta_J$  as an approximation to  $\lambda_0$ .

---

Hadamard Test



# 2. Robust Phase Estimation (RPE)

Ni et al. (2023)

**Lemma 1.** Suppose the constant  $\delta < 2\sqrt{3} - 3$  and let

$$\alpha(\delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \delta) - \delta > 0.$$

If the quantum state  $|\psi\rangle$  satisfies  $p_0 > 1 - \delta$  and

$$|Z_j - \langle \psi | U^{2^j} | \psi \rangle| < \alpha(\delta),$$

then

$$2^j \lambda_0 \in \left( \arg Z_j - \frac{\pi}{3}, \arg Z_j + \frac{\pi}{3} \right) \mod 2\pi,$$

where  $\arg Z_j$  is the principal argument of  $Z_j$ .

$\lambda_0$  は **orange** オレンジの候補の内の1つの中

この間隔の長さを調べると、

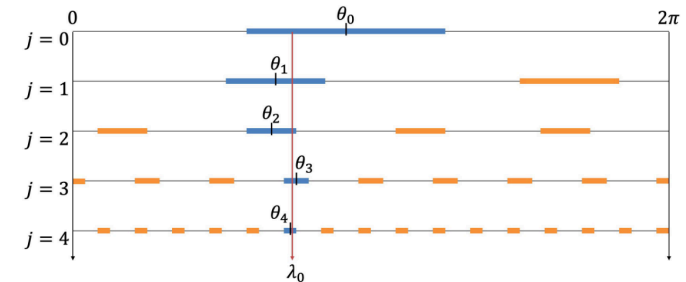
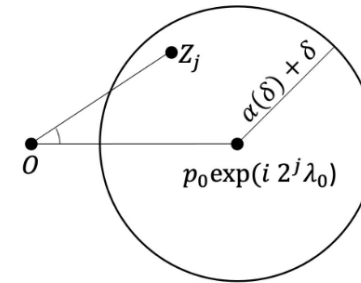
**青い**領域は **オレンジ**の候補のうちの

1つとしか重ならない

$$p_m = |c_m|^2 = |\langle \psi | \psi_m \rangle|^2$$

$$\alpha(\delta) > \left| Z_j - \langle \psi | U^{2^j} | \psi \rangle \right| = \left| Z_j - p_0 e^{i2^j \lambda_0} - \sum_{m=1}^M p_m e^{i2^j \lambda_m} \right|$$

$$\geq \left| Z_j - p_0 e^{i2^j \lambda_0} \right| - \sum_{m=1}^M p_m \geq \left| Z_j - p_0 e^{i2^j \lambda_0} \right| - \delta,$$



### 3. Quantum Complex Exponential Least Squares (QCELS)

Ding & Lin (2023)

#### Idea: 非線形最小二乗問題を解く

RPEと同じ量子回路を用いるが、後処理が異なる

1. データセットを用意する：  $\{(t_n, Z_n)\}_{n=0}^{N-1}$ , where  $\mathbb{E}[Z_n] = \langle \psi | U^{-t_n} | \psi \rangle$
2. 以下のような問題を解くことで、固有位相の近似値  $\theta^*$  を得る

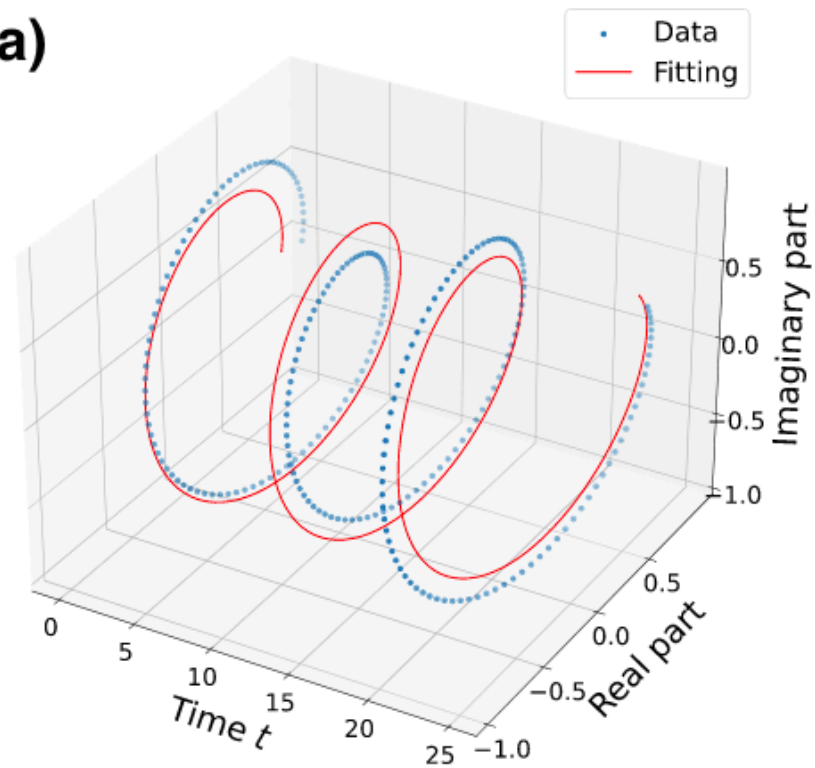
$$(r^*, \theta^*) = \operatorname{argmin}_{r \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}} L(r, \theta), \text{ where } L(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |Z_n - r \exp(-it_n \theta)|^2$$

この問題は古典コンピュータで効率よく解ける

### 3. Quantum Complex Exponential Least Squares (QCELS)

Ding & Lin (2023)

(a)



後半へ続く...