Classification des structures complexes sur le tore

Qiu Shi Wang

1 Résumé du projet

Plusieurs champs des mathématiques modernes s'intéressent à la caractérisation d'ensembles munis d'une structure, à travers l'étude d'applications (fonctions) entre eux, appelés morphismes, qui préservent la structure. Par exemple, l'algèbre linéaire s'intéresse à l'étude d'espaces vectoriels, avec entre eux des fonctions appelées transformations linéaires qui préservent la structure d'espace vectoriel. En topologie, l'objet à l'étude est l'espace topologique, et le morphisme est l'application continue. Lorsque cette application a un inverse qui préserve aussi la structure, elle est appelée un isomorphisme et son domaine est dit isomorphe à son codomaine. L'isomorphisme est une relation d'équivalence qui préserve toutes les propriétés de l'objet étudié, et la classification de ces objets se fait à isomorphisme près. En topologie, l'homéomorphisme définit cette équivalence. Cependant, une surface de Riemann est un espace topologique auxquel on attribue une structure supplémentaire appelée structure complexe, sur laquelle on peut définir des fonctions holomorphes, qui satisfont plusieurs belles propriétés héritées de l'analyse complexe. L'isomorphisme entre deux surfaces de Riemann est une application bijective et biholomorphe. Il existe, à homéomorphisme près, un seul tore topologique de genre 1, mais il existe de nombreuses structures complexes non isomorphes sur le tore. Nous savons que le plan complexe quotienté par un réseau engendré par deux nombres complexes linéairement indépendants sur les nombres réels est une structure complexe sur le tore, le tore complexe. Il existe un critère exact que doivent satisfaire deux tores complexes pour qu'il existe un isomorphisme entre eux. Nous cherchons à classifier à isomorphisme près toutes les structures complexes sur le tore, et nous concluons que toutes les surfaces de Riemann compactes de genre 1 sont isomorphes à un tore complexe.

Ce projet a été réalisé sous la tutelle de Dr. François Charette du Collège Marianopolis.

2 Introduction

Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1. Des exemples de surfaces de Riemann sont la sphère de Riemann $\mathbb{C}_\infty$, le graphe d'une fonction holomorphe, ou un tore complexe. Dans ce projet, nous nous intéressons à la classification des structures complexes sur une surface de Riemann compacte de genre topologique 1 (un tore topologique). Nous arriverons dans ce projet à la proposition suivante:

Proposition 1. *Toute surface de Riemann compacte de genre* 1 *est isomorphe à un tore complexe* $\mathbb{C}/L$.

Pour arriver à ce résultat, nous aurons besoin des notions d'ordre et de degré, de formes différentielles, du théorème de Stokes et du premier groupe d'homologie, et de l'application d'Abel-Jacobi et du théorème d'Abel.

3 Surfaces de Riemann et tores complexes

Une *surface de Riemann* se définit par un espace topologique connexe Hausdorff à base dénombrable X muni d'une collection de cartes (homéomorphismes) $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$, appelée atlas ou structure complexe, couvrant tous les points de X, pour des ouverts $U_\alpha \subset X$ et $V_\alpha \subset \mathbb{C}$. Les changements de cartes $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ doivent être holomorphes pour tous $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{A}$, partout où ils sont définis.

Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ non nuls et linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Alors, un *réseau* L est défini comme $L = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \, | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$. Un réseau est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$. Soit $X = \mathbb{C}/L$ le groupe quotient, munie de la topologie quotient héritée de $\mathbb{C}$ et de l'application naturelle $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$. Alors X, avec l'atlas composée de toutes les cartes localement définies par π^{-1}, est un *tore complexe*, une surface de Riemann homéomorphe à $S^1 \times S^1$, le tore topologique.

4 Fonctions holomorphes et méromorphes, ordre, multiplicité et degré

Soit un surface de Riemann X et $W \subset X$ un voisinage de $p \in X$. Une fonction $f : W \to \mathbb{C}$ est *holomorphe* s'il existe une carte ϕ tel que $f \circ \phi^{-1}$ est holomorphe à $\phi(p)$. Une fonction *méromorphe* $g : W \to \mathbb{C}_\infty$ est définie de la même façon. L'*ordre* $k = \mathrm{ord}_p(f)$ d'une fonction méromorphe au point p est le degré du premier coefficient non nul de la série de Laurent de f dans une coordonnée locale z engendrée par la carte ϕ_2, $(f \circ \phi_2^{-1})(z) = \sum_{n \geq k} c_n(z - z_0)^n$. L'ordre est défini indépendamment de la coordonnée choisie, puisqu'un changement de coordonnées $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$, étant un homéomorphisme, satisfait $T'(\phi_1(p)) = 0$. Alors, la série de Taylor de $z = T(w)$ a un terme $a_1(w - w_0)$ non nul. Nous avons alors $(f \circ \phi_1^{-1})(w) = (f \circ \phi_2^{-1} \circ T)(w)$, dont la série de Laurent a pour degré du premier coefficient non nul $k * 1 = k$.

Une fonction $F : X \to Y$ entre surfaces de Riemann est *holomorphe* au point $p \in X$ s'il existe des cartes ϕ_1 sur X et ϕ_2 sur Y tel que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ est holomorphe à $\phi_1(p)$. Deux surfaces de Riemann X et Y sont considérées la même s'il existe une bijection biholomorphe $f : X \to Y$, appelée un *isomorphisme*. Nous avons le théorème suivant qui s'appliquent tant aux fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qu'entre surfaces de Riemann:

Proposition 2 (Théorème de l'image ouverte)**.** *Soit $F : X \to Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann. Alors F est une application ouverte.*

L'inverse d'une fonction holomorphe est aussi automatiquement holomorphe. Alors,

Proposition 3. *Soit $F : X \to Y$ une application holomorphe injective entre surfaces de Riemann. Alors F est un isomorphisme entre X et $F(X)$.*

À l'aide de séries de Taylor, nous pouvons montrer que tout $F : X \to Y$ se met sous la *forme locale normale* $(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})(z) = z^m$ pour chaque p et ϕ_2, pour un unique entier positif m, la *multiplicité* $\mathrm{mult}_p(F)$ de F au point p.

Nous avons aussi la notion du *degré* d'une fonction holomorphe non constante $F : X \to Y$ entre surfaces de Riemann compactes. Pour chaque $y \in Y$, nous définissons le degré

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \mathrm{mult}_p(F).$$

Le degré est indépendant du choix de y. La preuve repose sur le fait que $y \mapsto d_y(F)$ est une fonction localement constante vers $\mathbb{Z}$: puisque Y est connexe, $d_y(F)$ doit être constant partout. Nous écrivons alors $\deg(F)$ pour le degré de F. Puisque F n'est identiquement constant sur aucun ouvert, $\mathrm{mult}_p(F) \geq 1$ pour tout $p \in X$. Donc, lorsque $\deg(F) = 1$, F est une bijection parce que chaque $y \in Y$ a exactement une préimage. Pour des surfaces de Riemann compactes X et Y, le résultat suivant suit alors de la proposition 3:

Proposition 4. $F : X \to Y$ *est un isomorphisme si et seulement si* $\deg(F) = 1$.

Nous avons besoin de l'exemple suivant pour la preuve du résultat principal. Soit f une fonction méromorphe sur X compacte, avec un pôle simple (d'ordre -1) à p et aucun autre pôle. Alors l'application correspondante $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ satisfait $\mathrm{mult}_p(F) = 1$, puisque dans la carte inverse définie autour de ∞ dans l'atlas standard pour $\mathbb{C}_\infty$, un pôle simple $1/z$ a z comme forme locale normale. Puisque $F^{-1}(\infty) = \{p\}$, $\deg(F) = 1$. Alors, par la proposition 4,

Proposition 5. *Si X est une surface de Riemann compacte sur laquelle il existe une fonction méromorphe f avec un seul pôle simple, alors X est isomorphe à $\mathbb{C}_\infty$.*

Nous avons aussi le résultat suivant:

Proposition 6. *Soit f une fonction méromorphe non constante sur une surface de Riemann compacte X. Alors*

$$\sum_p \mathrm{ord}_p(f) = 0.$$

5 Formes différentielles, intégration, théorème de Stokes et homologie

Pour intégrer le long de chemins sur une surface de Riemann, nous avons besoin de formes différentielles. Une *1-forme holomorphe(méromorphe)* ω dans la coordonnée z définie sur un ouvert $V \subset \mathbb{C}$ est une expression $\omega = f(z)\mathrm{d}z$, où f est une fonction holomorphe(méromorphe) sur V. Pour une application holomorphe $z = T(w)$, une 1-forme $\omega_1 = f(z)\mathrm{d}z$ *se transforme sous T à* la 1-forme $\omega_2 = g(w)\mathrm{d}w$ si $g(w) = f(T(w))T'(w)$. Une 1-forme holomorphe(méromorphe) sur une surface de Riemann X se définit par une collection de 1-formes holomorphes(méromorphes) $\{\omega_\phi\}$, une pour chaque carte dans l'atlas de X, tel que si deux cartes ϕ_1 et ϕ_2 ont des domaines qui s'intersectent, alors ω_{ϕ_1} se transforme à ω_{ϕ_2} sous le changement de cartes $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$. L'espace vectoriel complexe des 1-formes holomorphes sur X est désigné par $\Omega^1(X)$.

Les 1-formes holomorphes se généralisent aux *1-formes C^∞*, sous la forme $\omega = f(z,\bar{z})\mathrm{d}z + g(z,\bar{z})\mathrm{d}\bar{z}$, où f et g sont des fonctions lisses. Une collection de 1-formes C^∞ définit une 1-forme C^∞ sur une surface de Riemann lorsqu'elle satisfait une condition de transformation semblable à celle pour les 1-formes holomorphes. Nous définissons une opération de différentiation d sur les 1-formes comme suit:

$$\mathrm{d}\omega = (\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$$

$\mathrm{d}\omega$ est alors une *2-forme C^∞*, une expression de la forme $h(z,\bar{z})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$ pour une fonction lisse h.

Nous pouvons définir une intégrale d'une 1-forme C^∞ le long d'un chemin γ. Soit une partition $\{\gamma_i\}$ de γ tel que chaque γ_i, sur tout son domaine $[a_{i-1}, a_i]$ est contenu dans une seule carte ϕ_i. Dans chacune de ces cartes, écrivons $\omega = f_i(z,\bar{z})\mathrm{d}z + g_i(z,\bar{z})\mathrm{d}\bar{z}$ et soit $z = \phi_i \circ \gamma_i$. Nous définissons alors

$$\int_\gamma \omega = \sum_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(z(t), \overline{z(t)})z'(t) + g_i(z(t), \overline{z(t)})\overline{z'(t)})dt$$

L'intégrale d'une 2-forme C^∞ sur un triangle $T \subset X$ se définit par l'intégrale de surface usuel sur $\mathbb{C} = \mathrm{R}^2$, après un changement de coordonnées de $(z,\bar{z})$ en $(x = (z+\bar{z})/2, y = (z-\bar{z})/2i)$. À l'aide du théorème de Green, nous pouvons montrer le théorème suivant:

Proposition 7 (Théorème de Stokes)**.** *Soit D un sous-ensemble fermé et triangulable d'une surface de Riemann X, et soit ω une 1-forme C^∞ sur X. Alors*

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega.$$

Deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ entre a et b sont *homotopes* s'il existe une *homotopie* continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tel que pour chaque s, $\gamma_s = H(s,t)$ est un chemin de a à b, et que $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$. Nous pouvons maintenant montrer l'invariance de l'intégrale d'une 1-forme fermée sous homotopie du chemin.

Proposition 8. *Soient γ_0, γ_1 deux chemins homotopes sur une surface de Riemann X. Si ω est une 1-forme fermée sur X, alors*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Proof. Soit D l'image du carré $[0,1] \times [0,1]$ sous l'homotopie. Alors $\partial D = \gamma_1 - \gamma_0$. Puisque $d\omega = 0$, par la proposition 7 (théorème de Stokes),

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_0} \omega = \int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega = 0.$$

□

Soit $\pi_1(X,p)$ le groupe fondamental de X, dont les éléments sont les classes d'homotopie de lacets basés en p et dont l'opération est la concaténation de lacets. L'intégrale d'une 1-forme fermée autour d'un lacet ne dépend alors que de la classe d'homotopie du lacet: l'application $\int_{-} \omega : \pi_1(X,p) \to \mathbb{C}$, qui envoie $[\gamma]$ à $\int_\gamma \omega$ est alors bien définie. De plus, cette application est un homomorphisme de groupe. Nous remarquons que chaque commutateur $aba^{-1}b^{-1} \in \pi_1(X,p)$ est envoyé à 0. Alors, le sous-groupe $[\pi_1, \pi_1]$ engendré par ces commutateurs est dans son noyau. Définissons $H_1(X)$, le *premier groupe d'homologie* de X, comme le groupe quotient $\pi_1(X,p)/[\pi_1, \pi_1]$. L'application d'intégration $\int_{-} \omega : H_1(X) \to \mathbb{C}$ est un homomorphisme bien défini.

6 Application d'Abel-Jacobi et théorème d'Abel

Le *support* d'une fonction $D : X \to \mathbb{Z}$ d'une surface de Riemann vers les entiers est l'ensemble des points p où $D(p) \neq 0$. Un *diviseur* sur X est une telle fonction D dont le support est discret, et l'ensemble des diviseurs $\mathrm{Div}(X)$ forme un groupe sous l'addition par point. Si X est compact, alors un sous-ensemble infini aurait un point d'accumulation non discret. Puisque D est discret, D doit être fini. Nous écrivons alors un diviseur comme la somme finie $D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p$. Le *degré* d'un diviseur se définit comme la somme des valeurs de D,

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

$\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ est un homomorphisme dont le noyau est $\mathrm{Div}_0(X)$, les diviseurs de degré 0.
Le *diviseur d'une fonction méromorphe* f est un diviseur de la forme $\mathrm{div}(f) = \sum_p \mathrm{ord}_p(f) \cdot p$. Tout diviseur sous cette forme est un *diviseur principal* sur X. Un diviseur de degré 0 doit satisfaire une condition précise pour qu'il soit un diviseur principal, stipulée par le théorème d'Abel. Ce dernier est formulé en termes de l'application d'Abel-Jacobi.

Nous avons montré plus tôt que l'intégrale d'une 1-forme holomorphe autour d'une classe d'homologie $[c]$ est bien définie. Alors, nous pouvons définir une forme linéaire, appelée *période*, sur l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes par l'intégration:

$$\int_{[c]} : \Omega^1(X) \to \mathbb{C}.$$

Sous l'addition, l'ensemble Λ des périodes est un sous-groupe de l'espace dual $\Omega^1(X)^*$, l'ensemble des formes linéaires sur $\Omega^1(X)$. La *jacobienne* $\mathrm{Jac}(X)$ d'une surface de Riemann compacte X est le groupe quotient

$$\mathrm{Jac}(X) = \frac{\Omega^1(X)^*}{\Lambda}$$

Proposition 9. *Si le genre de X est 1, alors $\mathrm{Jac}(X)$ est un tore complexe.*

Nous introduisons une application $A : X \to \Omega^1(X)^*$ comme suit. Étant donné un point de base fixe p_0 sur une surface de Riemann compacte X, nous définissons

$$A(p)(\omega) = \int_{\gamma_p} \omega$$

Où γ_p est un chemin de p_0 à p. Cette fonction est mal définie puisqu'un choix différent de chemin changera sa valeur par celle d'une période. Alors l'*application d'Abel-Jacobi* $A : X \to \mathrm{Jac}(X)$ est bien définie. Elle s'étend sur $\mathrm{Div}(X)$ en définissant $A(\sum n_p p) = \sum n_p A(p)$. Nous écrivons $D_0 : \mathrm{Div}_0(X) \to \mathrm{Jac}(X)$ pour cette application restreinte aux diviseurs de degré 0 sur X.

Proposition 10. *A_0 ne dépend pas du choix de point de base $p_0 \in X$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'Abel. Nous savions de la proposition 6 que le degré d'un diviseur principal doit être 0.

Proposition 11 (Théorème d'Abel)**.** *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et D un diviseur de degré 0 sur X. Alors D est un diviseur principal sur X si et seulement si $A_0(D) = 0 \in \mathrm{Jac}(X)$.*

Proposition 12. *Si X a genre $g \geq 1$, alors $A : X \to \mathrm{Jac}(X)$ est une application injective.*

Proof. Supposons que non. Alors il existe $p, q \in X$ tel que $A(p) = A(q)$. Alors $A(p - q) = 0$ où $p - q$ est considéré comme un diviseur de degré 0. Par le théorème d'Abel (proposition 11), $p - q$ est un diviseur principal: il existe donc une fonction méromorphe f sur X ayant un pôle simple à q, un zéro à p et aucun autre pôle. Par la proposition 5, X est isomorphe à $\mathbb{C}_\infty$, ce qui mène à une contradiction puisque le genre de la sphère de Riemann est 0. □

Pour X un tore topologique, A est holomorphe puisque $A(p)$ est localement définie comme l'intégrale d'une 1-forme holomorphe le long d'un chemin vers p. Alors, par la proposition 3, A est un isomorphisme entre X et $\mathrm{Jac}(X)$, ce qui est notre résultat principal.

Proposition 13. *Toute surface de Riemann compacte de genre 1 est isomorphe à un tore complexe $\mathbb{C}/L$.*

References

[1] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable.* New York, Springer-Verlag, 1973.

[2] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract Algebra.* New Delhi, Wiley India, 2013. Réimpression de l'originale de 2004.

[3] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* American Mathematical Society, 1995.

[4] James R. Munkres. *Topology.* Pearson, 1999.